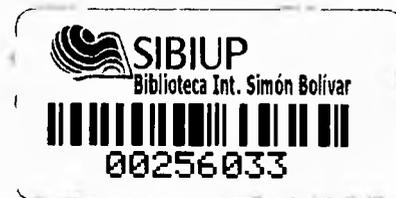


UNIVERSIDAD DE PANAMÁ



VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

**PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN
MATEMÁTICA**

**LA TÉCNICA DE APRENDIZAJE MAPAS CONCEPTUALES,
UNA ALTERNATIVA CONSTRUCTIVISTA PARA LA
ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EL NIVEL SUPERIOR**

NARCISO RUJANO ESCOBAR

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA
OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

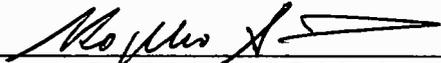
1999

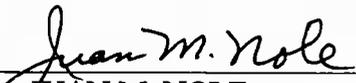
T.M.

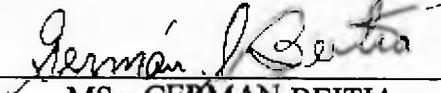
- 9 FEB 2000

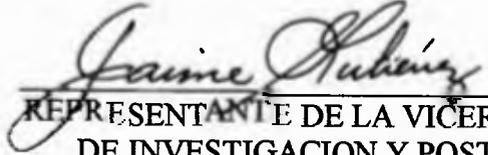
Obsequio del Autor

APROBADO POR:


Dr. ROGELIO ROSAS
PRESIDENTE


MSc. JUAN M NOLE
MIEMBRO


MSc. GERMAN BEITIA
MIEMBRO


REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

Fecha: 5 de enero de 2000

322/574

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios, por haberme dado el privilegio de culminar una etapa más de mi vida profesional. A las memorias de mis seres queridos que ya no están con nosotros: mi padre Narciso Rujano A., mi tío Fidelino Rujano A., mi hermano Pedro Rujano E. y mi abuela Catalina Atencio R. A toda mi familia, mi esposa Edilma, mis hijos Magdy, Pedro y Fany; mi madre Magdalena, mis hermanos y sobrinos, que, incondicionalmente, me ofrecieron su comprensión y apoyo moral para la consecución de esta meta.

Narciso

AGRADECIMIENTO

Agradezco a nuestro padre celestial por concederme la sabiduría necesaria para realizar uno de mis más deseados anhelos; A todos los profesores del programa de Maestría en Matemática Educativa, que contribuyeron a mi formación Finalmente a todas las personas que, de manera incondicional, me brindaron su apoyo

El autor

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN (SUMMARY)	1
--------------------------------	---

INTRODUCCIÓN	2
---------------------------	---

1. EL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN .	7
---	---

1 1 TÍTULO	8
----------------------	---

1 2 EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ..	8
--------------------------------------	---

1 3 OBJETIVOS GENERALES	8
-----------------------------------	---

1 4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
-------------------------------------	---

1 5 JUSTIFICACIÓN	10
-----------------------------	----

1 6 HIPÓTESIS	11
-------------------------	----

1 7 LA MUESTRA	12
--------------------------	----

1 8 METODOLOGÍA	12
---------------------------	----

2.	EL MARCO TEÓRICO	14
2.1	LAS GRANDES TEORÍAS DEL APRENDIZAJE	15
2.1.1	EL CONDUCTISMO	17
2.1.1.1	PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DEL CONDUCTISMO	25
2.1.1.2	LIMITACIONES DEL CONDUCTISMO	31
2.1.2	LA TEORÍA COGNITIVA	34
2.1.2.1	PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DE LA TEORÍA COGNITIVA	42
2.1.2.2	APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	46
2.1.2.2.1	FASES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	51
2.1.2.2.2	LOS MAPAS CONCEPTUALES	67
2.1.2.2.2.1	PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES	68

2 1 2 2 2	ELABORACIÓN DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES	74
2 1 2 2 3	MOMENTOS DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES	77
2 1 2 2 4	LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE	79
2 1 2 2 4 1	ETAPAS PARA DIRIGIR EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES	81
2 1 2 2 4.2	ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR LOS MAPAS CONCEPTUALES	87
2.1.2.2.5	PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LOS MAPAS CONCEPTUALES	99
2 1 2.2 2 6	VENTAJAS Y CUIDADOS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES	103

2 1 2 2.2.7	LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO TÉCNICA PARA COMPARTIR SIGNIFICADO	106
2 1 2.2 2 8	LOS MAPAS CONCEPTUALES EN LOS ELEMENTOS DE LA METODOLOGÍA PARTICIPATIVA	110
2 1 2 2.2.9	LOS MAPAS CONCEPTUALES Y LA UNIDAD DIDÁCTICA	113
2.1.2 2 2 10	LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO TÉCNICA DE EVALUACIÓN..	120

3. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS. 123

3 1	PRUEBA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE A ANALIZAR	124
3 1 1	DATOS RECOLECTADOS	127
3 2	RESULTADOS DE LA PRUEBA DE HIPÓTESIS	130

CONCLUSIONES	134
RECOMENDACIONES	136
ANEXOS	139
BIBLIOGRAFÍA	199

RESUMEN

LA TÉCNICA DE APRENDIZAJE MAPAS CONCEPTUALES, UNA ALTERNATIVA CONSTRUCTIVISTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EL NIVEL SUPERIOR.

El aprendizaje no es un asunto sencillo de transmisión, internalización y acumulación de conocimientos; sino un proceso en el cual el aprendiz debe ensamblar, organizar y extrapolar los significados a través de técnicas de aprendizaje que le permitan la interacción con su medio y los procesos de aprendizaje.

Este trabajo presenta un estudio comparativo entre la Técnica de Aprendizaje Tradicional Conductista Expositiva – Dialogada y la Constructivista, Mapas Conceptuales; estudio basado en una investigación cuasi experimental y validado por el estadístico "t" de student.

Se presenta la fundamentación metodológica y psicológica de la técnica de aprendizaje constructivista Mapas Conceptuales, en el marco de las teorías de aprendizaje que la sustentan. También se ofrece algunas utilidades de la técnica, dentro del ambiente educativo, con sus respectivos ejemplos prácticos, sus ventajas y limitaciones

SUMMARY

THE CONCEPTUAL MAPS TECHNIQUES, A CONSTRUCTIVE ALTERNATIVE TO TEACHING GEOMETRY IN THE SUPERIOR LEVEL

Learning is not a simple matter of transmission, internalization and accumulation knowledge but rather a process by which the learned material ought to be assembled, organized and the significance extrapolated by means of the techniques of learning which permit an interaction with its environment and the learning process.

This work presents a comparative study between the techniques of traditional learning of exposition and dialogue and the constructivist conceptual maps (schemas); a study based on a quasi – experimental investigation and validated by the student t statistic.

This research presents the methodological and psychological foundation of the constructivist conceptual schema, within the framework of the learning theories that support it. Also provides some uses of the technique, within the educational environment, with the respective practical examples their advantages and limitations

INTRODUCCIÓN

Así como la actividad física es un placer para una persona sana, también lo debe ser la actividad intelectual y, por ende, la enseñanza de la matemática, como un saber autónomo, bajo una orientación adecuada. En la actualidad, no siempre esto sucede, pues generalmente nos encontramos en el aula de clase de matemática, un ambiente con estudiantes pasivos, dependientes y sin motivos para aprender, ya que el sistema les ofrece teorías de aprendizaje tradicionales a través de técnicas verticales, donde el estudiante espera instrucciones del docente para actuar.

La Geometría, como parte importante de la matemática, no escapa a esta situación. Es necesario buscar teorías de aprendizaje constructivistas, basadas en técnicas actualizadas, que motiven a los involucrados en la tarea docente a lograr aprendizajes significativos y los insten a cambiar de actitud, ser independientes, capaces para resolver problemas y tomar decisiones.

Preocupado por esta situación, presentamos un estudio que compara la eficiencia de dos técnicas de aprendizaje en la enseñanza de la geometría en el nivel superior: la técnica conductista expositiva – dialogada y la técnica constructivista Mapas Conceptuales. Estas dos técnicas se han utilizado paralelamente para enseñar una unidad de aprendizaje del curso geometría 112b y, posteriormente, se comparan los resultados obtenidos a través de cada una de ellas.

La importancia de este trabajo radica en la presentación de una técnica constructivista alternativa, unida a los cambios vertiginosos de nuestro mundo científico e intelectual, técnica esta en la que tienen más valor los procesos de pensamientos eficaces, que los contenidos los cuales rápidamente, se convierten en ideas obsoletas, que no son posibles de combinarse con otras, para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas presentes.

En el marco de una educación de calidad, es importante que el alumno manipule los objetos a estudiar, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento, a fin de mejorarlos conscientemente, haga transferencia de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, se divierta con su propia actividad mental; se prepare para su vida cotidiana, con los otros problemas de la ciencia y los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia. Estos aspectos son importantes para enseñar valores, formar espíritu crítico y capacidad para tomar decisiones. Aprendizajes relevantes que pueden obtenerse a través de los

Mapas Conceptuales

Entre las variables a considerar tenemos las siguientes:

- 1 El rendimiento académico. El logro o no de los objetivos de una unidad de aprendizaje, del curso de Geometría 112b, por parte de los estudiantes del primer año de Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Veraguas.

- 2 La técnica de aprendizaje tradicional expositiva – dialogada, que es la utilizada con el grupo control
- 3 La técnica mapas conceptuales, que es la técnica de aprendizaje que será validada (grupo experimental).

Con éste trabajo se pretende recomendar una técnica de enseñanza constructivista alternativa, para la enseñanza de la Geometría, que contribuya, en particular, al logro de los objetivos del curso de Geometría 112b, de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Panamá; con el propósito de hacer más significativo su aprendizaje.

Se espera que esta técnica ayude a docentes y estudiantes de la Licenciatura en Matemática a lograr una comunicación con menos ruidos tanto endógenos como exógenos, durante el proceso enseñanza – aprendizaje en la asignatura en mención

Entre las limitaciones que confrontamos tenemos:

- 1 La muestra utilizada disponible fue reducida, es decir, en el Centro Regional Universitario de Veraguas, la asignatura Geometría 112b de la Licenciatura en Matemática sólo cuenta con un grupo de estudiantes, y su matrícula no es numerosa, por lo que todos sus integrantes participaron del experimento. La muestra pudo haber sido

ampliada a otros centros de educación superior, pero el paralelismo que debía darse en la enseñanza del tema hizo imposible este hecho

- 2 El dividir el grupo seleccionado en dos grupos; para determinar la validez de la técnica, produjo que el número de participantes en los grupos control y experimental fuera, aún, más pequeño.
- 3 A pesar de consultar toda la literatura disponible y mucha información a través del Internet, es posible que existan otras referencias bibliográficas importantes que no fueron consultadas, las cuales enriquecerían aún más este trabajo.
- 4 También es posible que el aspecto psicológico en los estudiantes al aplicar esta técnica no sea el más adecuado, pues la misma es nueva en nuestro ambiente educativo

1. EL DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

1.1 TÍTULO:

La técnica Mapas Conceptuales, una alternativa constructivista para la enseñanza de la Geometría en el nivel superior

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Existen justificaciones sociales, epistemológicas, psicológicas y didácticas que hacen necesario orientar la enseñanza de las ciencias hacia un aprendizaje constructivo. Añadido esto, a las grandes dificultades de aprendizaje que confrontan los estudiantes en geometría, en el nivel superior, motivan a tratar de buscar técnicas de enseñanza constructivistas, con sólida fundamentación teórica, que sean alternativas de solución a este problema. En este sentido se plantea la siguiente pregunta: ¿Es más eficiente la técnica constructivista Mapas Conceptuales, en la enseñanza de la Geometría en el nivel superior, que la técnica conductista Expositiva - dialogada?

1.3 OBJETIVOS GENERALES:

1.3.1 Analizar la fundamentación teórica y psicológica de la técnica de enseñanza Mapas Conceptuales.

1.3.2 Probar la efectividad de la técnica de enseñanza Mapas Conceptuales, en el curso de Geometría 112b.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.4.1 Investigar la fundamentación psicológica de la técnica de enseñanza Mapas Conceptuales, según los proponentes de la misma

1.4.2 Deducir las diferentes etapas en que se divide la técnica de enseñanza Mapas Conceptuales en la enseñanza de la Geometría en el nivel superior.

1.4.3 Diseñar lineamientos metodológicos para el aprendizaje de una unidad de aprendizaje del curso de Geometría 112b, utilizando la técnica mapas conceptuales

1.4.4 Aplicar la técnica de enseñanza Mapas Conceptuales, en la enseñanza de la unidad de aprendizaje sobre Los Poliedros.

1.4.5 Comparar, mediante instrumentos estadísticos, el rendimiento de la muestra de estudiantes que utiliza la técnica de aprendizaje tradicional expositiva – dialogada, con la muestra de estudiantes que utiliza la técnica mapas conceptuales

- 1.4.6 Proponer una técnica de aprendizaje constructivista, alternativa para el curso de Geometría 112b, que ayude a los estudiantes a obtener un aprendizaje significativo.

1.5 JUSTIFICACIÓN

Un tema de actualidad educativa es distinguir entre lo que es útil de aprender y lo que es deseable de enseñar; la utilidad en la enseñanza de la matemática está ligado con el futuro, ya que se forman ciudadanos del mañana y profesionales del futuro a lo largo de un proceso cada vez más amplio en el tiempo, y los cambios de todo tipo son vividos por la sociedad con una velocidad vertiginosa.

La Geometría es considerada como la matemática del espacio, es decir, es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, más el interés por estudiar el espacio no es propio solo de la educación integral de los matemáticos, sino de diversas disciplinas y profesiones técnicas y artísticas. También los estudiantes al ingresar a la universidad tienen una base muy superficial, sobre Geometría; unido a ello está el hecho de tener que hacer uso del Método Deductivo, como método por excelencia de la Geometría. Significa esto, que sino se cuenta con una buena técnica de aprendizaje que programe actividades que genere un aprendizaje dinámico, su aprendizaje para algunos estudiantes no será fácil

Esta situación conduce a buscar técnicas de aprendizaje constructivistas; que genere aprendizajes que sean, realmente, significativos para estos estudiantes, y que los ayude a resolver su situación. Esta técnica facilita, tanto la adquisición de conceptos, como la aplicación del Método Deductivo, que resolvería nuestro problema

1.6 HIPÓTESIS:

Para tratar de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, formulamos las siguientes hipótesis:

1.6.1 H_0 : La media de los resultados de los estudiantes del curso de geometría 112b, que utilizaron la técnica constructivista mapas conceptuales, es igual que la media de los resultados de los estudiantes que utilizaron la técnica tradicional conductista expositiva – dialogada, es decir, $\mu_1 - \mu_0 = 0$

1.6.2 H_1 : La media de los resultados de los estudiantes del curso de geometría 112b, que utilizaron la técnica constructivista mapas conceptuales, es mayor que la media de los resultados de los estudiantes que utilizaron la técnica tradicional conductista expositiva – dialogada, es decir, $\mu_1 - \mu_0 > 0$

1.7 La muestra:

Para realizar esta investigación se seleccionó el grupo de primer año de Licenciatura en Matemática de la asignatura Geometría 112b, el cual se compone por 11 estudiantes. Aleatoriamente, se seleccionó 5 estudiantes para conformar el grupo experimental y los 6 restantes formaron el grupo control.

El grupo control fue atendido en horario corriente, utilizando la técnica tradicional de aprendizaje expositiva – dialogada, para el logro de los objetivos de la unidad de aprendizaje seleccionada, y el grupo experimental, al cual se le aplicaría la técnica en estudio, se le asignó otro horario diferente, con la misma frecuencia semanal, para mantenerlos aislados.

1.8 METODOLOGÍA:

Para realizar esta investigación se aplicó la siguiente metodología:

1.8.1 Recolección de información bibliográfica, elaboración de ficheros, consulta a información a Internet, etc.

1.8.2 Redacción de la fundamentación teórica de la técnica Mapas Conceptuales

- 1 8 3 Aplicación de la técnica Mapas Conceptuales en la experiencia educativa a la unidad seleccionada en Geometría
- 1 8 4 Aplicación del instrumento de evaluación de los aprendizajes. Se diseñó una prueba objetiva que evaluara los objetivos de aprendizaje propuestos en la unidad seleccionada y se le aplicó la misma prueba a ambos grupos
- 1 8 5 Presentación, análisis e interpretación de los resultados El mismo se hará aplicando el estadístico t para la diferencia de medias, usando un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, donde se comparará el rendimiento promedio de ambos grupos.
- 1 8 6 Elaboración de la propuesta, conclusiones y recomendaciones

2. EL MARCO TEÓRICO

2.1. LAS GRANDES TEORÍAS DEL APRENDIZAJE.

El aprendizaje es una actividad consustancial al ser humano, es un proceso que no es observable directamente, pero que de alguna manera se infiere a partir de los cambios conductuales del individuo, es un proceso porque formalmente es comparable a otros procesos orgánicos humanos tales como la digestión y la respiración, sin embargo el aprendizaje es un proceso complejo que solo se comprende parcialmente. Se aprende a lo largo de toda la vida, aunque no siempre en forma sistemática: a veces es fruto de las circunstancias del momento, otras, de actividades planeadas por alguien (ya sea la persona misma o un agente externo) y que el discente realiza en aras de dominar aquello que le interesa aprender

Todos los estudios psicológicos relativos al fenómeno del aprendizaje humano, están relacionados con el diseño de ambientes de enseñanza – aprendizaje, es decir, dependen de la circunstancias que se disponen (entorno físico y psicológico, recursos, restricciones) y las estrategias que se usan para lograr que el discente logre los objetivos propuestos.

Es en la mitad de este siglo cuando los psicólogos del aprendizaje han ejercido influencia significativa en el currículum de la matemática. En los años 20 las teorías de Thorndike fueron aplicadas directamente a la enseñanza de

la Aritmética, la cual decepcionó en los años 50 por la falta de plasmación de la teoría del aprendizaje en teoría de instrucción clara y concreta

A finales de los años 50 había polémica sobre la aplicación de las diversas teorías existentes, y en el 24º "Yearbook" del N.C.T.M (National Council of Teachers of Mathematics), Lankford (1959, pág. 406) señala que, las ideas de los educadores, que han leído las teorías del aprendizaje, y con sinceros deseos de mejorar en su trabajo de enseñar, coincidían que una sola teoría no era suficiente, por lo tanto lo que se trató fue de seleccionar lo necesario de cada una para tal fin, y en ese sentido seleccionaron una lista de 14 puntos que habla de la motivación, la práctica repetitiva en destrezas, el reconocimiento de los propios errores y los resultados correctos ayudan al aprendizaje, y que la transferencia a nuevas tareas será mejor, si en el aprendizaje, el aprendiz ha descubierto las relaciones por sí mismo y si ha tenido experiencias de aplicación de los principios.

En la actualidad, los esfuerzos de los teóricos se dirigen al análisis del aprendizaje de conceptos matemáticos específicos, en lugar de buscar amplios principios generales que expliquen el aprendizaje, como fue usual anteriormente. En cualquier caso las teorías del aprendizaje modernas, involucradas en el proceso educativo, tienen rasgos de las anteriores y las podemos dividir en dos grandes denominaciones, el conductismo y el cognitivismo. Esto no significa que solo hay dos teorías del aprendizaje, sino

que el conductismo recoge la mitad de las teorías y el cognitivismo recoge la otra mitad

2.1.1. EL CONDUCTISMO.

El Conductismo es, primeramente, postulado por el norteamericano E. L. Thorndike, acogido por B F Skinner y actualizado recientemente por Robert Gagné, fue el modelo predominante en la enseñanza de la aritmética, en época pasada, y se basa en el principio general de que la instrucción debe basarse en la enseñanza directa y en la fragmentación del currículum en un número de partes aisladas para ser aprendidas con el esfuerzo apropiado

Los individuos aprenden de la palabra, su valor es temporal; pero los tipos de cosas que aprenden abarcan una gama de capacidades que tienen un valor considerablemente perdurable para el individuo y, en última instancia, para la sociedad. Entre esas cosas que aprenden están las capacidades aprendidas, que han sido clasificadas como habilidades intelectuales, estrategias cognitivas, información verbal, actitudes y habilidades motoras.

Las habilidades intelectuales son aprendizaje que se realizan cuando el alumno interactúa con el ambiente a través de símbolos; la lectura, escritura y el manejo de números son aprendizajes típicos de estas capacidades, las

acciones utilizadas en este aprendizaje son distinguir, combinar, tabular, clasificar, analizar y cuantificar objetos, fenómenos y hasta otros símbolos, por ejemplo, la conversión mental de 30gr en kilogramos

La información verbal es el aprendizaje a través del discurso oral, de la escritura o del dibujo; lógicamente para llegar a esta categoría, debe haber desarrollado ciertas habilidades intelectuales, para sustentar ciertas afirmaciones, las cuales pueden ser una idea o conjunto de ellas, que deben estar ordenadas de acuerdo a ciertos criterios. Se espera que el alumno retenga enormes cantidades de informaciones durante el transcurso de su vida para tenerla disponible, de inmediato, en cualquier situación. Esta categoría es importante porque se trata del conocimiento común que todo individuo debe saber, por ejemplo, los días de la semana, localización de ciudades, etc. Además sirve de auxiliar y acompañante del aprendizaje.

Las estrategias cognitivas constituyen el segundo y fundamental tipo de capacidades aprendidas por los alumnos, son habilidades internamente organizadas que permiten a los alumnos regular sus propios procesos internos de atención, aprendizaje, recuerdo y pensamiento, ésta capacidad está relacionada con procesos de descubrir y resolver problemas nuevos.

Las habilidades motoras constituyen la capacidad de aprender a ejecutar movimientos a través de cierto número de actos motores organizados, de tal manera que constituyan una acción total, armoniosa, regular y bien

sincronizada. Esta armonía y sincronización de las acciones reflejan el grado de organización interna que posee el alumno, y con la práctica continua mejorarán las mismas. Generalmente estos actos individuales coherentes forman parte de actividades más globales, como jugar al baloncesto o béisbol. Por ejemplo, para golpear una pelota de béisbol consta de los siguientes movimientos.

1. Acomodar el cuerpo y el bate
2. Levantar el bate sobre los hombros.
3. Apuntar a la pelota con el bate.
4. Ejecutar el golpe con un movimiento total de los brazos y el cuerpo.

Las actitudes son el tipo final de capacidades aprendidas; son los estados internos que influyen o modifican las elecciones de acción personal realizadas por el alumno; estas capacidades tienen tres componentes que son: afectivos, cognitivos y consecuencias conductuales. La toma de decisiones de los individuos está influenciada por las actitudes, el seleccionar una determinada estrategia para resolver un problema, depende de estas capacidades; las cuales estarán determinadas por los estados internos moderadores que se van adquiriendo durante toda la vida a través de las

diferentes situaciones que se encuentran en el medio, como el hogar, las calles, la comunidad, la escuela.

El modelo de aprendizaje y la memorización, base de esta teoría, postula la existencia de ciertas estructuras internas en el cerebro humano y algunos procesos correspondientes, que dichas estructuras llevan a cabo [10; 72 – 86]

La versión del modelo se presenta en la figura 2.1

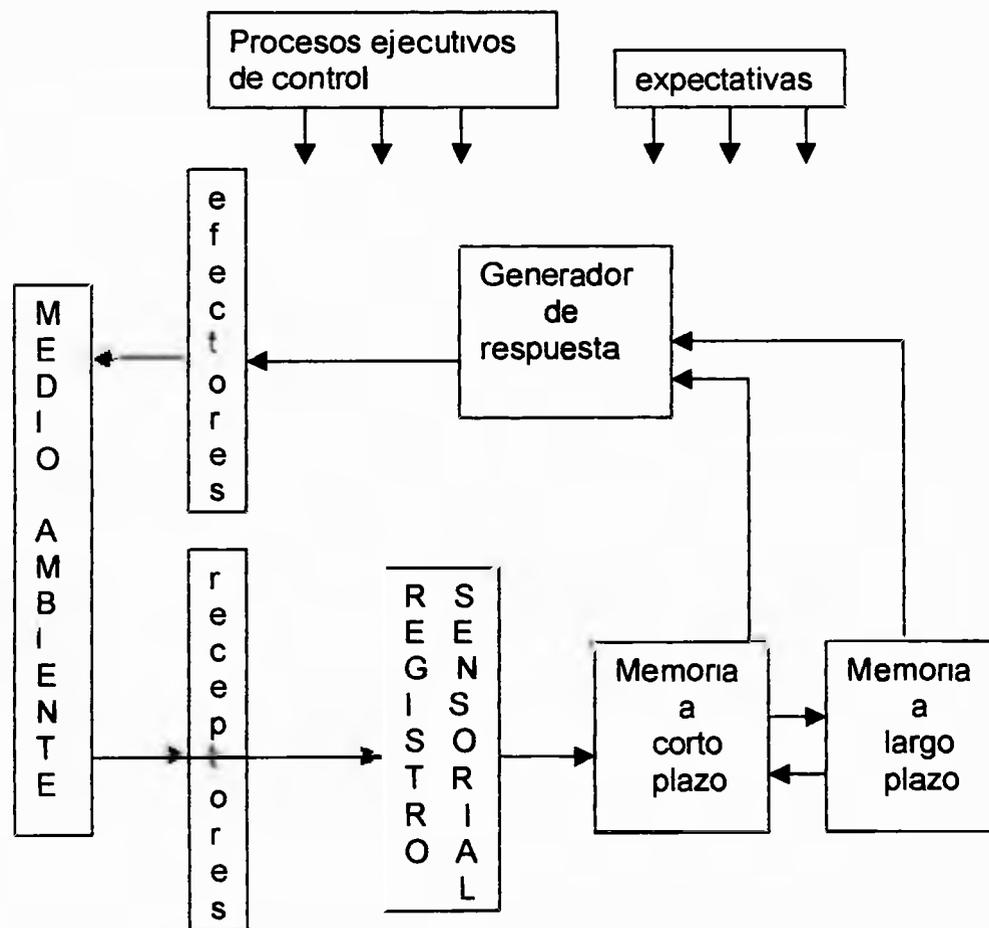


Figura 2.1

El alumno recibe de su medio ambiente los estímulos que activan ciertos receptores, que son convertidos en información nerviosa. Inicialmente, esta información llega a una estructura (o estructuras) llamadas registro sensorial, donde persiste por un breve lapso de tiempo, aproximadamente unas cuantas centésimas de segundos.

La información captada por el registro sensorial no es persistente, sino que se convierte en patrones de estimulación, proceso denominado percepción selectiva, que es la capacidad del alumno para captar ciertas características importantes de la información en el registro sensorial e ignorar las otras. La percepción de estas características forma un nuevo tipo de información que va a parar a la memoria a corto plazo

Al ingresar la información procesada en el registro sensorial, en la memoria a corto plazo ella es almacenada, aproximadamente unos 20 segundos, en cualesquiera de las formas siguientes. en forma acústica, en la que la información la escuchan internamente los alumnos, en forma articuladora, en la que los alumnos se escuchan a sí mismo decir la información, por ejemplo, cuando los alumnos repiten las tablas de multiplicar para internalizarlas, otro tipo de almacenamiento puede ser las imágenes visuales al recordar en forma de cuadros, las escenas que ha presenciado.

La capacidad de la memoria a corto plazo es muy limitada, una vez rebasada su capacidad los elementos viejos debe ser empujados hacia fuera, conforme se introduce información en la memoria a corto plazo. Pero ella tiene la capacidad de efectuar repeticiones mentales silenciosas de la información, proceso llamado repaso o repetición, el cual extiende la capacidad de la memoria a corto plazo y permite almacenar la información por más tiempo. También ayuda, este proceso de repaso, a codificar información como materia prima para la siguiente estructura, la memoria a largo plazo.

La transformación más crítica de la información ocurre cuando sale de la memoria a corto plazo y entra a la memoria a largo plazo, proceso llamado codificación, que sólo ocurrirá si el material codificado está organizado de una manera semántica o que tenga significado; la codificación tiene como fundamento las imágenes visuales y de otros tipos; la información disponible en la memoria a corto plazo, como ciertas características perceptuales, es transformada ahora en una forma conceptual o significativa, no se almacena como sonidos o forma, sino como conceptos cuyo significado es conocido y puede relacionarse de una manera coherente con el entorno del alumno.

El proceso de codificación adopta muchas formas, una puede ser unidades verbales significativas como oraciones; otra puede ser cuadros sinópticos, diagramas, imágenes, cuadros detallados de la información que se está aprendiendo. Una vez codificada la información, se almacena en la

memoria a largo plazo, pruebas indican que no sufren pérdidas con el tiempo, pero es evidente que la interacción entre la memoria nueva y vieja puede bloquear el acceso hacia la información almacenada

Los procesos de aprendizajes están continuamente en acción mientras los individuos están despiertos (y posiblemente mientras duermen), ya que el material previamente aprendido y almacenado en la memoria a largo plazo se envía continuamente de regreso hacia la memoria de trabajo y hacia la conciencia. Ahí puede ser repasado, no sólo en el sentido de repetirlo, sino también de rectificarlo antes de volver a meterlo en la memoria a largo plazo. El proceso de codificación, como ocurre en la memoria de trabajo, está bajo la influencia de nuevos fragmentos de información, cuyos orígenes son externos respecto al sujeto.

Posteriormente se instituyen los procesos de búsquedas que van seguidos de un proceso de recuperación, que es un proceso de verificación de lo aprendido. En este momento, la información puede regresar a la memoria a corto plazo, que es concebido como una memoria activa de trabajo o consciente, ya que hace posible la combinación de materiales que van a ser aprendidos con el contenido de la memoria establecido en eventos de aprendizajes previos, y una vez aquí, el material aprendido queda accesible para el alumno, de modo que puede combinarse con nueva información para generar nuevas codificaciones. Este proceso de recuperación exige la aportación de ciertas pistas o índices, sea por medio de una situación externa

o por parte del propio sujeto (tomando de otra fuente de memoria), para acoplar o enlazar lo que se aprende y convertirlo en proceso de búsqueda.

Por ejemplo, en el aprendizaje de encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, la memoria de trabajo recupera y combina las habilidades subordinadas de identificación de los lados, suma de cuadrados y extracción de raíces cuadradas

Los procesos ejecutivos de control y las expectativas los ha adquirido en buena medida el alumno, durante su aprendizaje previo, son parte independiente de la memoria a largo plazo, y determinan la manera en que el alumno enfoca una o más maneras de procesar la información, es decir, como atiende y almacena la información, por un lado, y cómo la codifica y recupera por otro.

El proceso de control influye en la atención y la percepción selectiva, al determinar cuales características de la información del registro sensorial pasarán a formar parte de la memoria a corto plazo, y qué es lo que se repasará en esa memoria. También determina cómo se almacena en la memoria a largo plazo, y afectar el esquema de búsqueda y recuperación del alumno, y así, determinar qué tanto o qué tan bien se puede recordar una información Así mismo ejerce influencia sobre el tipo de organización de respuestas del alumno

La expectativa es otro proceso ejecutivo de control que representa la motivación específica del alumno, para lograr un objetivo de aprendizaje previamente determinado, sea por otras personas o por el mismo. Estos dos procesos no están interconectados con los otros elementos del modelo.

Si bien es cierto que la secuencia temporal que indica el modelo tiene lugar desde el medio externo hacia los almacenes internos del cerebro del individuo, dicho modelo no implica necesariamente que el aprendizaje ocurra de manera invariable en esa secuencia.

2.1.1.1. PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DEL CONDUCTISMO.

El aprendizaje conductista se basa en los siguientes principios psicológicos. [11; 89]

- 1 El sujeto de aprendizaje debería ser activo más que limitarse a escuchar o mirar pasivamente. La teoría estímulo – respuesta subraya la trascendencia de la respuesta del sujeto de aprendizaje, y aprender haciendo es su slogan.

2. La frecuencia de la repetición es importante para la adquisición de destrezas y para producir un grado de aprendizaje tal, que garantice la retención.
3. El refuerzo es importante
4. La generalización y la discriminación sugieren la importancia de la práctica en contextos variados, para que el aprendizaje se adecue a una más amplia gama de estímulos.
5. La aparición de un comportamiento nuevo puede intensificarse mediante la imitación de modelos a través del ejemplo del modelaje y es consecuente con el acercamiento tolerante estímulo – respuesta al aprendizaje
6. Las condiciones del impulso son importantes para el aprendizaje, es decir, las condiciones motivacionales son importantes.
7. Los conflictos y las frustraciones surgen inevitablemente en el proceso de aprendizajes de discriminaciones difíciles y en situaciones sociales en las que pueden aparecer móviles inoportunos, por lo tanto tienen que ser reconocidos y darles solución.

El aprendizaje conductista planifica las lecciones bajo el criterio de que, para enseñar un concepto completo o destreza es necesario delimitar las componentes que constituyen el conocimiento que se persigue y organizarlas jerárquicamente, en lo que se llamaría la secuencia de instrucción

Una secuencia de instrucción es una cadena o conjunto ordenado de capacidades o destrezas intelectuales ligadas y subordinadas a la capacidad superior que se pretende alcanzar. Las capacidades inferiores recogen el conocimiento, que se pretende, fragmentado en pequeñas unidades, que se enseñarán y evaluarán de modo separado y que generarán la transferencia de aprendizajes previamente adquiridos a otros de orden superior. A mayor calidad de la secuencia, mayor efectividad, mejor programa de aprendizaje. Para esto se sugiere averiguar, qué es lo que sabe el individuo en relación con el aprendizaje de la nueva capacitación. El problema con este tipo de aprendizaje es que no es fácil diseccionar un tema en los componentes subordinados necesarios para la instrucción: ¿por dónde se empieza, en cuántas unidades, en qué orden o cómo saber si está completo?

La adquisición del conocimiento es considerada como la acumulación de unidades o piezas de información aisladas, de tal modo que el nivel de almacenamiento que alcanzan los individuos se toma como indicativo de su nivel de conocimiento, donde su cultura se mide por su saber enciclopédico, y el aprendizaje consiste en establecer y mantener las asociaciones o vínculos entre los estímulos y las respuestas estipuladas y que estos vínculos o

asociaciones se estampen en la mente por repetición, como si de arraigar un hábito se tratara. Para aprender solo hay que estar dispuesto a practicar. Si el discente no logra alcanzar la respuesta, por cualquier factor, el docente le recetará repetir el mismo proceso o le prescribirá actividades complementarias destinadas a compensar o a reforzar

La memoria va unida al aprendizaje, pues es la encargada de fijar el conocimiento igual que se fija una fotografía sobre un papel, hasta el punto que no es distinguible la línea divisoria que divide aprendizaje y memorización del contenido.

Se parte de la base de que todos tenemos la misma aptitud para memorizar, y siempre que el profesor exponga con claridad, todos podemos aprender lo mismo y al mismo ritmo, salvo los atípicos y los no capacitados, por eso la enseñanza colectiva es la adecuada: los alumnos se agrupan por edades cronológicas en clases y se les transmite a todos el mismo conocimiento, para lo cual lo mejor es que todos usen el mismo libro de texto, ya que este contiene el saber institucionalizado, es decir, es seleccionado, estructurado, organizado por cursos y adaptado a la edad cronológica del alumno. Este libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado que se puede encontrar fácilmente y con el cual el único trabajo posible consiste en su asimilación

El profesor es el transmisor social que vierte el conocimiento establecido en el programa y desarrollado en el libro de texto, en la cabeza de los alumnos, en la que se escribe como si de una pizarra se tratara, debe conseguir que el alumno atienda, controlarle el tiempo de trabajo, los ejercicios que hace y decidir cuando debe pasar a la tarea siguiente. Este cambio de tarea debe ser visto por el alumno como un avance en objetivo a conseguir, lograrlo será su recompensa y hará que se sienta satisfecho. El trabajo del profesor no es cuestionar los conocimientos que debe transmitir, ya que no es asunto de su competencia la selección ni la graduación de los mismos porque están plasmados en un programa; si no asignar las lecciones a las clases, empezar y acabar las lecciones de acuerdo con el programa, explicar las reglas y procedimiento de cada lección, juzgar las acciones de los estudiantes durante la lección y mantener el orden y el control durante la misma.

Por este camino, la clase se desarrolla magistralmente, el docente desvela día a día el conocimiento encerrado en el libro de texto reproduciéndolo lo más fácilmente posible, con el mayor detalle y de la forma más clara.

Planificar la instrucción es establecer la lista de objetivos para determinar el punto de partida, decir por donde empieza la instrucción, que es lo que ya sabe el alumno en lo que se refiere al tema objeto de enseñanza.

El docente debe controlar el dominio de la materia alcanzado por los alumnos sobre la base de la medición del saber observable, es decir, del saber que se puede mostrar. De esta forma lo importante es el éxito de la respuesta estipulada y no se tiene en cuenta la bondad o no del camino seguido para lograrla. El conocimiento que aporta el alumno es irrelevante, pues se parte de la base de que el alumno llega a la escuela desinformado y el docente no debe preocuparse por otra cosa que de facilitarle la respuesta correcta, corregir sus errores y organizarle las tareas. Mientras conteste correctamente, no importa si el alumno entiende lo que hace, no importa si tomándose tiempo será capaz de, reflexionando, calcular respuestas pertinentes aunque no sean estipuladas. Por eso la evaluación es sencilla, ya que solo hay que contar el número de respuestas correctas para obtener el diagnóstico.

Esta teoría no toma en cuenta al sujeto que aprende, solo las condiciones externas que favorecen su aprendizaje; tiene su origen en el estudio del comportamiento de los animales domésticos, y es justificada con el éxito de su aplicación al entrenamiento de deportistas y de músicos. Los cambios de conductas que reflejan el dominio de los objetivos de aprendizaje, pueden ser descritos en términos de estímulos respuestas y asociación; donde quiera que el estudiante da respuesta a un estímulo, se ha creado un vínculo, una asociación cuya persistencia en la memoria es una cuestión de repetición y ejercicio.

Según los conductistas, las actuaciones reforzadas se plasman en un complejo sistema de premios y castigos que en su forma mas desviadas fueron, hasta no hace mucho, la vara y el ponerse de rodillas y son, en la actualidad, la crítica y la ridiculización. El carácter reforzador de esta actividad se encuentra en la satisfacción que se experimenta cuando se responde correctamente, y no tiene que ver con la forma, mas o menos, agradable con que haya sido presentada. Es por ello que los adornos a colores, las ilustraciones con figuras de cómicas grotescas que aparecen en los libros de textos no son refuerzos para el aprendizaje, sino que se intenta hacer más interesante y hasta atractiva la escuela; pero no sirven para generar una forma específica de conducta.

2.1.1.2 LIMITACIONES DEL CONDUCTISMO

Algunas limitaciones de esta teoría:

1. Ignora los problemas educativos, las razones del fracaso escolar y el papel que juegan los errores en el aprendizaje. Prefieren responsabilizar al estudiante de su aprendizaje que al profesor de su falta de preocupación por mejorar su método de enseñanza.

2. Es una teoría ciega en cuanto a las diferencias individuales, a los intereses personales y al conocimiento informal que el alumno aporta y que no tiene en cuenta. Ciega porque ignora las nuevas tecnologías, televisión, ordenadores y sus implicaciones educativas; es decir, el énfasis no debe estar nunca en lo que las máquinas pueden hacer, sino en lo que las máquinas nunca podrán hacer por nosotros, como pensar, explorar, conjeturar, probar, plantear, formalizar, generalizar etc
- 3 Se prima el aprovechamiento de las destrezas y se ignora el desarrollo de las habilidades generales Se aprende a seguir ciegamente unos procedimientos y, cuando esto ocurre, lo normal es que se empleen rígidamente y que se prefiera la respuesta mecánica y trabajosa a la más inteligente o rápida.
4. Se prima el individualismo, la sumisión y la pasividad, ya que no hay lugar para la participación y solo se aprende para no ser reprendido
- 5 Se enfatiza el conocimiento impreso en el libro de texto, el cual es incuestionable al igual que el que imparte el docente, pues en ellos se haya depositado el saber.

- 6 La lista de objetivos dice lo que se pretende que el alumno aprenda; pero no dice cómo lograrlo, no contiene una propuesta didáctica, no dice en qué se fundamenta, ni cuál es el marco de relaciones que hay entre ellos, y es difícil saber cuándo hay que terminar la lista de objetivos, cuántos hay que poner, cuál es el grado de refinamiento que deben precisarse. De este modo solo se produce una fragmentación en productos parciales y una desatención del proceso, con la mera jerarquización de los objetivos.

- 7 Se potencia la selección y la consiguiente exclusión de los alumnos en razón de la superación o no de los aprendizajes estipulados, con el argumento de la suficiencia o falta de competencia intelectual

- 8 Al aplicar esta teoría aparecen diferencias importantes entre lo que se pretende enseñar lo enseñado y lo aprendido no solo entre diferentes docentes, sino también a lo largo de la carrera de un mismo docente, ya que se fomenta las siguientes creencias:
 1. Aprender matemática es memorizar.

 2. La comprensión juega un papel secundario.

3. La incapacidad para responder con rapidez es señal de inferioridad
- 4 Siempre hay una regla para resolver cualquier problema.
5. Solo hay una manera correcta de resolver un problema.

2.1.2. LA TEORÍA COGNITIVA.

La teoría cognitiva surge inicialmente en oposición a las ideas de Thorndike; fue encabezada por Brownell (1935) que argumentaba que la instrucción matemática necesitaba apoyarse en la comprensión de los conceptos básicos matemáticos, y por el denominado Gestaltismo, en cuya visión del aprendizaje son elementos claves la comprensión y la menor consideración de la práctica repetitiva. Posteriormente, bajo las corrientes psicológicas el enfoque piagetiano, la teoría de los esquemas cognitivos, la teoría ausubeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, la psicología sociocultural vigotskiana, la teoría de la asimilación de Mayer, la teoría de esquemas de Anderson y la teoría de la elaboración de Merrill y Reigeluth, surge el constructivismo, el estandarte de los educadores modernos, y que tiene su origen en los trabajos de Jean Piaget y sus colaboradores Jerome Bruner y David Ausubel, donde la relación de la nueva información por aprender y el conocimiento preexistente juegan un papel

fundamental en el aprendizaje. Se cree que el conocimiento conceptual no puede transferirse como un producto elaborado de una persona a otra, sino que debe ser construido activamente desde la propia experiencia y no recibido pasivamente del entorno por el sujeto cognitivo

Este proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales:
[7; 15]

1. Los conocimientos previos o representaciones que se tengan de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver
- 2 La actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto.

Esta teoría acepta la existencia de aprendizajes conductistas, ya que afirma que en presencia de un estímulo, se produce una respuesta y, si a esta le sigue otro tipo de estímulo especial, es decir, el refuerzo, dicha asociación queda consolidada, pero sostiene que este tipo de aprendizaje está subordinado a otro aprendizaje más amplio que depende del desarrollo de las estructuras cognoscitivas del alumno

Los procesos, que se deben concebir con objeto de explicar los fenómenos del aprendizaje, son aquellos que realizan determinados tipos de transformaciones de potencia consumida en potencia generada, en una

manera un tanto análoga al funcionamiento de una computadora. Por ejemplo cuando un estudiante se encuentra en una situación de aprendizaje, el estímulo físico de sus ojos, oídos y otros sentidos se transforman en ciertos mensajes neurales. A su vez los mensajes sufren otras transformaciones en el sistema nervioso, con el objeto de que puedan ser acumulados y recordados más tarde. La información rememorada se vuelve a transformar a otra clase más de mensaje que controlan la acción de los músculos. El resultado es el habla u otros tipos de movimientos que indican que se ha asimilado una forma de proceder. Estas formas de transformaciones, sus características y su manera de funcionar constituyen la esencia de esta teoría.

Sus representantes sostienen que, en la inteligencia existen estructuras mentales complejas, y se hacen cada vez más complejas, cuya finalidad es la interacción con el medio, en el sentido de una mejor adaptación y conocimiento de la realidad. Estas estructuras son las representaciones organizadas de experiencia previa. Son relativamente permanentes y sirven como esquemas que funcionan activamente para filtrar, codificar, categorizar y evaluar la información que uno recibe, en relación con alguna experiencia relevante; esto es, mientras se capta la información se está constantemente organizándola en unidades con algún tipo de ordenación, que llamamos estructura, la nueva información es asociada, generalmente, con información ya existente en estas estructuras, y a la vez puede reorganizar o reestructurar la información existente

El desarrollo intelectual es caracterizado en etapas o niveles, los cuales indican una partición de los cambios que se producen en la estructura cognitiva para producir el aprendizaje, como es el caso de Piaget, que señala tres etapas que tienen que ver con el periodo escolar, esta son

- 1 Etapa preoperativa, que se caracteriza por la utilización de abstracciones primarias, relacionadas con experiencias concretas empíricas, es la etapa en que la manipulación de objetos reales es el requisito o condición necesaria para el aprendizaje.
- 2 Etapa de las operaciones concretas, que se caracteriza por la emergencia de la conservación de la masa, peso, número y volumen; en este caso aparecen conceptos secundarios que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta.
- 3 Etapa de las operaciones abstractas, se caracteriza por la liberación del pensamiento de la preocupación por las cosas reales, y por pasar a abarcar relaciones entre representaciones simbólicas que podrían ser o no ciertas con respecto a los datos.

Los Van Hiele, señalan 5 niveles en el proceso de aprendizaje, en los cuales el docente debe ubicarse para lograr una buena comunicación con el estudiante en su respectiva etapa, estas son:

- 1 Visual, en las que las figuras se distinguen en función de su forma individual, como un todo, en esta etapa no se ven componentes, ni existe relación entre las figuras, por ejemplo el estudiante no sabe que el rectángulo tiene sus 4 ángulos rectos y sus lados paralelos.
2. Descriptivo, en este nivel se distinguen las etapas y atributos de las figuras y se establecen algunas propiedades de modo experimental; por ejemplo, el estudiante puede observar que un rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos con la misma medida.
3. Abstracto, se establecen propiedades mediante razonamientos informales; se establecen definiciones abstractas y se pueden distinguir condiciones necesarias y suficientes para determinar un concepto, comienza a establecerse conclusiones lógicas y se hacen clasificaciones. Por ejemplo, el cuadrado es un caso especial de rectángulo y el rectángulo es un caso especial de paralelogramo

4. Deductivo lógico – formal, aquí comienza el razonamiento matemático formal, se opera con un sistema de leyes lógicas, axiomas y teoremas; se pueden realizar razonamientos deductivos formales y complejos.

5. Rigor, se puede comparar sistemas axiomáticos basados en diferentes conjuntos de axiomas, y puede estudiar geometría en ausencia de modelos concretos

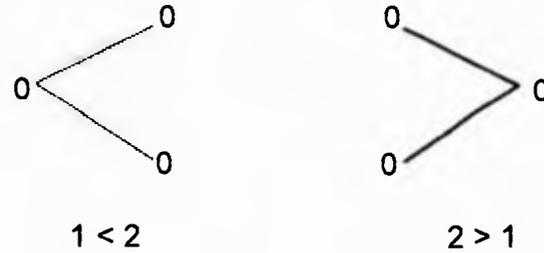
La disponibilidad para el aprendizaje depende de lo adecuado del equipamiento cognitivo (los conocimientos previos específicos que se poseen en relación con la particular materia a aprender y del desarrollo intelectual o madurez cognitiva), que posee el estudiante para enfrentarse con los requerimientos de una determinada nueva tarea de aprendizaje.

El conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura, y es considerado desde dos puntos de vistas; el conocimiento espontáneo o informal que se construye por el individuo interactuando con su entorno, constituyendo su realidad individual (lo que piensa, lo que cree, lo que sabe de la calle), y el conocimiento formal es el que corresponde al objetivo educativo, el que se encuentra en el currículum desarrollado, distinto del currículum implementado o aprendido y del currículum oficial o del libro.

El aprendizaje no es un asunto sencillo de transmisión, internalización y acumulación de conocimientos, sino un proceso activo de parte del alumno en ensamblar, extender, restaurar e interpretar y, por lo tanto, de construir conocimiento desde los recursos de la experiencia y la información que recibe, ya que ninguna experiencia declara su significancia tajantemente, sino la persona debe ensamblar, organizar y extrapolar los significados

El aprendizaje requiere una intensa actividad por parte del alumno, y que cuanto más rica sea su estructura cognitiva, mayor será la posibilidad de que pueda construir significados nuevos y, así, evitar memorización repetitiva y mecánica. Además, el aprender a aprender constituye el objetivo más ambicioso de la educación escolar

Es cierto que hay aspectos de la matemática que han de ser aprendidos aisladamente y de memoria, como los símbolos y los nombres de los números o las equivalencias entre las unidades de medidas, pero en estos casos pueden ser empleados elementos mnemotécnicos, ya que la interpretación que hace el dibujo del simbolismo puede ser valiosa. Por ejemplo, no es fácil para un niño aprender el sentido en que se aplican los signos de mayor y menor que, pero una presentación de lo siguiente ayudaría.



La comprensión no puede enseñarse, ni surge por sí misma depende de la experiencia, la acción es la fuente principal del aprendizaje, especialmente tratando con situaciones reales, no solo con declaraciones; por eso, ante una situación de aprendizaje, es recomendable comenzar por actividades para pensar matemáticamente acerca del objeto de estudio y completar con actividades para el pensamiento abstracto. Es decir, si vamos a enseñar a sumar, debemos empezar con problemas, seguir con la interpretación de problemas y culminar con la aplicación de la técnica descubierta a la resolución de problemas; y no aprender primero la técnica y después aplicarla a la resolución de problemas. En lugar de empezar con definiciones y seguir con los ejemplos, que los alumnos harán como ejercicios, se propone que se empiece por las aplicaciones sobre las cuales los estudiantes experimentarán y progresarán hacia la forma matemática que las resume expresa.

Este modelo de aprendizaje concibe el desarrollo cognitivo durante la infancia como una consecuencia lógica del funcionamiento cognitivo reiterado, es lento y gradual, no se produce de un día a otro, y provoca sorpresas desagradables cuando aparecen componentes que no habían sido

integrados o acomodado en su momento, haciendo que se tambalee el conocimiento que se creía adquirido, de este modo, en el campo de los Números Racionales, de la misma manera que se acepta que $\frac{9}{9} = 1$, se debería aceptar que $0,\bar{9} = 1$. Pero esto choca con la idea intuitiva de que como decimal periódico no alcanza nunca a 1. Incluso después de presentar diferentes demostraciones, muchos alumnos se niegan a creerlo; este problema debe orientarse en función de la forma como se enfoca el significado de las expresiones decimales, en particular las decimales periódicas

2.1.2.1. PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DE LA TEORÍA COGNITIVA.

Los principios básicos de la teoría cognitiva son: [11; 105 – 107]

- 1 Las características perceptivas del problema presentado (relaciones de figuras – fondo, signos direccionales, interrelacionabilidad orgánica), son condiciones importantes del aprendizaje, lo que significa que los problemas de aprendizaje deben estructurarse y presentarse de tal manera que sus características esenciales estuviesen abiertas a un examen por parte del sujeto de aprendizaje.

- 2 La organización del conocimiento debe ser una preocupación primordial del docente en la planificación educativa, es decir partir de lo simple a lo complejo no significa partir de lo arbitrario y sin sentido hacia conjunto con sentido, sino de conjuntos simples hacia otros más complejos
- 3 El aprendizaje unido a la comprensión es más duradero y, a la vez, más transferible que el aprendizaje por escrito o el aprendizaje a través de fórmulas.
4. El feedback cognitivo subraya la correcta adquisición de conocimientos y corrige un aprendizaje defectuoso
- 5 La fijación de objetivos por parte del sujeto de aprendizaje supone una importante motivación para aprender, es decir, sus éxitos o fracasos dependen de la forma como fije los objetivos que pretende alcanzar.
- 6 El pensamiento divergente que permite encontrar soluciones ingeniosas a los problemas o llegar a resultados creativos, se nutre del pensamiento convergente que es el que conduce a la respuesta correcta lógicamente

La instrucción no debe encaminarse a estimular la memoria fotográfica, al adiestramiento, o la búsqueda de respuestas automáticas, sino a favorecer el empleo inteligente de las relaciones o principios matemáticos, y a desarrollar competencias cognitivas generales (capacidad de análisis, hábitos y actitudes frente al trabajo, flexibilidad para cambiar de puntos de vista, etc.)

Señala Bruner, que la instrucción debe tener en cuenta las características de los contenidos (estructura y secuenciación), las características del desarrollo del alumno, los aspectos motivacionales y el refuerzo. Lo importante para un alumno es el dominio de un determinado concepto y sus patrones para relacionarlo, de tal forma que su comprensión le proporcione la capacidad de transferirlos y aplicarlos a una variedad de situaciones, lo que significa que deben desarrollarse estructuras o estrategias de resolución de problemas que favorezcan la comprensión y minimicen el olvido

Esta teoría toma en cuenta en el aula de clase la importancia de la interacción alumno – alumno y alumno – maestro en el desarrollo de la inteligencia, ya que permite que el alumno intercambie, discuta y evalúe sus propias ideas; además, produce en el individuo una visión más realista y crítica de sí mismo y de los otros, es decir, cuando se preguntan y explican entre ellos recapacitan, articulan y consolidan su comprensión de los hechos.

En vez de proporcionar estímulos que dirijan las respuestas, la función del docente es diseñar y proporcionar situaciones de aprendizaje sugerentes que provoquen la actividad, que sean significativas, que se acerquen a la manera real de aprender del alumno, que se adapten a las necesidades individuales y que, aprovechando su conocimiento informal, le ayuden a superar los obstáculos que se le presentan en la construcción del conocimiento.

Es importante, para el docente, conocer los mecanismos del desarrollo y del aprendizaje, pues los sujetos con los que trata están construyendo sus estructuras intelectuales, y su tarea fundamental es contribuir a la formación de éstas. Comprender cómo se va pasando de las etapas iniciales a las etapas finales, cómo se produce el incremento de los conocimientos y de formación de nuevas estructuras. Pero entender los mecanismos de aprendizaje requiere conocer el estado en que se encuentra el sujeto, es decir, cómo va a ser capaz de recibir ese nuevo conocimiento a partir de su situación anterior, por lo que es de gran importancia conocer los distintos estadios por los que pasa el sujeto en su desarrollo mental.

Para ello hay que estudiar el desarrollo desde sus comienzos, pues este ocupa toda la etapa de formación de los individuos jóvenes, y durante ella estos construyen una representación del mundo, tanto físico como social y sus propias estructuras intelectuales. No basta que el docente de bachillerato conozca el desarrollo del adolescente entre los 14 y 17 años y el de

preescolar sepa lo que pasa entre los 4 y 5 años, porque el desarrollo es un proceso continuo y tenemos que tener presente todas sus fases, si queremos comprenderlo; lo que sucede a los 14 años es el resultado de todo lo anterior, y el trabajo que se realiza durante los dos primeros años de vida tiene una influencia profunda sobre lo que sucede después. Además un docente puede encontrarse en estudiantes de 15 años con formas de pensamiento inapropiadas, es decir, utilizar estrategias que corresponderían a niños de 6 ó 7 años cuando se les plantean problemas difíciles, situación que debe brindarle el adecuado tratamiento

La motivación debe ser interna, relacionada con el interés y la curiosidad del alumno; la evaluación no puede limitarse a puntuar las respuestas correctas que producen los alumnos, viendo si el resultado es el estipulado, sino que debe examinar los procesos subyacentes y la forma como llegan al resultado. Se trata de recopilar datos sobre la manera de conducirse del estudiante, sobre sus éxitos y errores, sobre sus dificultades y conflictos para, apoyándose en éste análisis, reconducir la enseñanza de la mejor manera posible.

2.1.2.2 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

En el marco de esta teoría cognitiva, Ausubel presenta la teoría del aprendizaje significativo, la cual parte del constructivismo, que consiste en la organización de los datos de la experiencia a partir de ciertos instrumentos

asimiladores, en la que los logros dependen, no solo del profesor, sino en gran medida del estudiante; en la que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el alumno posee en su estructura cognitiva. Sus principales aportes son sus estudios acerca de cómo se realiza la actividad intelectual en el contexto escolar, en el cual manifiesta se diferencian dos dimensiones posibles.

- 1 Las que se refiere al modo en que se adquiere el conocimiento.
- 2 La que se refiere a la forma en que el conocimiento es subsecuentemente incorporado en la estructura de conocimiento o estructura cognitiva del alumno

En la primera dimensión encontramos dos tipos de aprendizaje posible, estos son: aprendizaje por recepción y por descubrimiento; en la segunda dimensión encontramos dos modalidades, por repetición y significativo.

La interacción de estas dos dimensiones se traduce en las denominadas situaciones del aprendizaje escolar, estas son

- 1 Aprendizaje por recepción repetitiva
- 2 Aprendizaje por descubrimiento repetitivo.

3 Aprendizaje por recepción significativo.

4 Aprendizaje por descubrimiento significativo

La mayor parte del aprendizaje escolar es receptivo, ya que el estudiante recibe la información que tiene que aprender ya sistematizada, mientras que en el aprendizaje por descubrimiento el estudiante tiene que descubrir y valorar el material antes de ser incorporado a la estructura cognitiva

El aprendizaje por descubrimiento es importante, ya que se deben resolver problemas de la vida diaria, y resulta motivador descubrir por cuenta propia las relaciones que existen entre los atributos de ciertos objetos con su estructura cognitiva; pero considera que el dominio de esta solo podrá adquirirse a través de la recepción. Una de las desventajas del aprendizaje por descubrimiento es que existe un momento que el alumno queda totalmente abandonado a sus propios recursos, y puede carecer de la experiencia mínima para realizar ciertas tareas de aprendizaje

Ante el aprendizaje memorístico, caracterizado por la adquisición de conocimientos a través de procedimientos repetitivos, Ausubel presenta una teoría que se ocupa específicamente de los procesos de enseñanza / aprendizaje de los conceptos científicos a partir de los conceptos previamente formados por el alumno en su vida cotidiana; es una teoría sobre la interiorización o asimilación, a través de la instrucción de los conceptos

verdaderos que se construyen a partir de conceptos previamente formados o descubiertos por el alumno en su entorno Ausubel pone el acento de su teoría en la organización del conocimiento en estructuras y en la reestructuración que se produce debido a la interacción entre esas estructuras presentes en el sujeto y la nueva información, reestructuración que puede efectuarse siempre que se facilite una instrucción formalmente establecida, que presente de modo organizado y explícito la información que debe desequilibrar las estructuras existentes.

Este modelo de aprendizaje comprende la adquisición de nuevos significados en forma sustancial no arbitraria y con intencionalidad, es decir, las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra), con lo que el alumno ya sabe, con alguna experiencia anterior, con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición

La condición necesaria y suficiente para que se dé un aprendizaje significativo, es una disposición manifiesta por parte del alumno, para relacionar sustancial y no arbitraria el nuevo material con su estructura cognitiva, el alumno debe tener algún motivo para esforzarse a comprender, lo que denominamos actitud de aprendizaje significativo, y que el material que aprende sea potencialmente significativo para el alumno, es decir, susceptible de dar lugar a la construcción de significados, relacionable con su

estructura de conocimiento sobre una base intencional, no arbitraria y sustancial, no al pie de la letra

Independiente de cuánto significado potencial esté inherente a una proposición, en particular, si la intención del alumno es memorizar arbitraria y literalmente, tanto el proceso de aprendizaje como los resultados del mismo serán mecánicos y carentes de significados, y sin importar lo significativa que sea la actitud del alumno, ni el proceso, ni el resultado del aprendizaje serán posiblemente significativo, si la tarea del aprendizaje no lo es potencialmente, y si tampoco es relacionable intencionada y sustancialmente con la estructura cognitiva. Por ejemplo, un estudiante podría aprender la fórmula para el área de un triángulo, la cual es el producto de una de sus bases por su altura correspondiente entre dos; pero esta proposición no será significativamente aprendida a menos que el estudiante sepa el significado de los conceptos base, altura y área; y que trate de relacionar estos conceptos como lo estipula esta ley.

El aprendizaje significativo es más eficaz que el memorístico porque
[18; 17]

1. Le afecta en sus tres principales fases: adquisición, retención y recuperación.

- 2 Las pruebas realizadas confirman que el enfoque significativo de un material potencialmente significativo hace la adquisición más fácil y más rápida que en el caso de un enfoque repetitivo
- 3 La adquisición significativa es más fácil porque fundamentalmente implica la utilización de estructuras y elementos previamente adquiridos, que funcionan como anclas respecto al nuevo material, por semejanza y contraste.
4. Es más fácilmente retenido durante un periodo mas largo

2.1.2.2.1. FASES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

Tres son las fases del aprendizaje significativo, ellas son: [7, 25 – 26]

1 Fase inicial de aprendizaje

- 1 1 El aprendiz percibe a la información como constituida por piezas o partes aisladas sin conexión conceptual.
- 1 2 El aprendiz tiende a memorizar o interpretar en la medida de lo posible estas piezas, y para ello usa su conocimiento esquemático.

- 1 3 El procesamiento de la información es global y este se basa en escaso conocimiento sobre el dominio a aprender, estrategias generales independientes de dominio, uso de conocimientos de otro dominio para interpretar la información (para comparar y usar analogías)
- 1 4 La información aprendida es concreta (más que abstracta) y vinculada al contexto específico
- 1 5 Uso predominante de estrategias de repaso para aprender la información.
- 1 6 Gradualmente el aprendiz va aprendiendo un panorama global del dominio o del material que va a aprender, para lo cual usa su conocimiento esquemático, establece analogías (con otro dominio que conoce mejor). Para representarse ese nuevo dominio, construye suposiciones basadas en experiencias previas.

2. Fase intermedia de aprendizaje.

- 2 1 El aprendiz empieza a encontrar relaciones y similitudes entre las partes aisladas y llega a configurar esquemas y mapas cognitivos, sobre el material y el dominio de aprendizaje en forma progresiva.

Sin embargo, estos esquemas no permiten aún que el aprendiz se conduzca en forma automática o autónoma.

- 2.2 Se va realizando de manera paulatina un procesamiento más profundo del material. El conocimiento aprendido se vuelve aplicable a otros contextos.
- 2.3 Hay más oportunidad para reflexionar sobre la situación, material y dominio.
- 2.4 El conocimiento llega a ser más abstracto, es decir, menos dependiente del contexto donde, originalmente, fue adquirido
- 2.5 Es posible el empleo de estrategias elaborativas u organizativas tales como: mapas conceptuales y redes semánticas (para realizar conductas metacognitivas), así como para usar la información en la solución de tareas – problemas, donde se requiera la información a aprender.

3. Fase terminal de aprendizaje.

- 3.1 Los conocimientos que comenzaron a ser elaborados en esquemas o mapas cognitivos en la fase anterior, llegan a estar más integrados y a funcionar con mayor autonomía.

- 3.2 Como consecuencia de ello, las ejecuciones comienzan a ser más automáticas y a exigir un menor control consciente
- 3.3 Igualmente las ejecuciones del sujeto se basan en estrategias específicas del dominio para la realización de tareas, tales como solución de problemas, respuestas a preguntas, etc.
- 3.4 Existe mayor énfasis, en esta fase, sobre la ejecución que en el aprendizaje, dado que los cambios, en la ejecución, que ocurren se deben a variaciones provocadas por la tarea, más que a arreglos o ajustes internos.
- 3.5 El aprendizaje que ocurre durante esta fase probablemente consiste en
 1. la acumulación de información a los esquemas preexistentes y
 2. aparición progresiva de interrelaciones de alto nivel en los esquemas.

Existen tres tipos de aprendizaje significativo, según Ausubel, en función del grado creciente de complejidad: aprendizaje de representaciones, aprendizaje de conceptos y aprendizaje de proposiciones.

El aprendizaje de representaciones se ocupa de los significados de símbolos o palabras unitarios, consiste en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabras) o de lo que éstas representan. Se trata, pues, de aprender lo que significan las palabras aisladas o los símbolos, como el aprendizaje de las palabras de cualquier idioma, ya que cada una de ellas representa un objeto, situación, concepto u otro símbolo unitario de los dominios físicos, social e ideático, pero completamente desconocidas para el que aprende. Es el tipo de aprendizaje significativo más próximo al repetitivo, ya que siempre en el aprendizaje de definiciones en matemática hay elementos o relaciones arbitrarias que deben adquirirse por repetición.

El aprendizaje de conceptos se ocupa de los conceptos; estos son objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo. Este aprendizaje consta de dos momentos, que son:

1. Primero habrá un proceso de formación de conceptos que consiste en una abstracción inductiva a partir de experiencias empíricas concretas; el significado se extrae por abstracción de la propia realidad. Es un aprendizaje basado en situaciones de descubrimiento que incluiría procesos como la diferenciación, la generalización, la formulación y la comprobación de hipótesis. Según Ausubel, es la fórmula para adquirir conocimientos en el

periodo preescolar. Los conceptos también representan símbolos y palabras individuales; pero hay un mayor grado de abstracción en función de unos atributos de criterios comunes. Surgen, pues, de relacionar determinados objetos, sucesos, etc., con atributos comunes a todos ellos.

2. El segundo momento es la asimilación de conceptos consistentes en relacionar los nuevos conceptos con otros anteriormente formados y ya existentes en la mente del alumno, el significado se extrae de la interacción entre la nueva información con las estructuras conceptuales ya construidas. El aprendizaje de estructuras conceptuales implica una comprensión de las mismas y que esa comprensión no pueden alcanzarse solo por procedimientos asociativos.

En la medida que aumenta el vocabulario en el alumno, se puede adquirir nuevos conceptos mediante el proceso de asimilación conceptual, ya que los atributos de criterio de los conceptos nuevos se pueden definir por medio del uso de los referentes ya existentes en nuevas combinaciones disponibles en la estructura cognitiva del alumno.

El aprendizaje de proposiciones consiste en adquirir el significado de nuevas ideas expresadas en una frase o una oración, que contiene dos o más conceptos; se forma después que interactúan tareas de aprendizaje

potencialmente significativas con ideas pertinentes de la estructura cognitiva, pero en este caso la proposición potencialmente significativa consiste en una idea compuesta que se expresa verbalmente que contiene así los significados denotativo y connotativo de las palabras como sus funciones sintácticas y sus relaciones. La información que resulte de este proceso de aprendizaje significativo, será un producto interactivo de la manera particular en que el contenido de la proposición nueva se haya relacionado con el contenido de ideas pertinentes ya establecidas en la estructura cognoscitiva.

Los contenidos que se enseñan en todos los niveles educativos pueden agruparse en tres áreas básicas: [7; 29]

1. Los contenidos declarativos.
2. Los contenidos procedimentales.
3. Los contenidos actitudinales.

Aprendizajes de contenidos declarativos:

Los contenidos declarativos son el “saber que” referido al conocimiento de datos, hechos, conceptos y principios; que se declara o se conforma por medio del lenguaje, es importante hacer una distinción taxonómica de ellos:

- 1 El conocimiento factual, se refiere a datos y hechos que proporcionan información verbal, y que los alumnos deben aprender en forma literal o “al pie de la letra”, donde no se le da mucha importancia a los conocimientos previos, esto es el conocimiento de una fórmula matemática.

- 2 El conocimiento conceptual es construido a partir del aprendizaje de conceptos, principios y explicaciones, las cuales no tienen que ser aprendidos en forma literal, sino abstrayendo su significado esencial o identificando las características definitorias y las reglas que los componen

Aprendizaje de contenidos procedimentales.

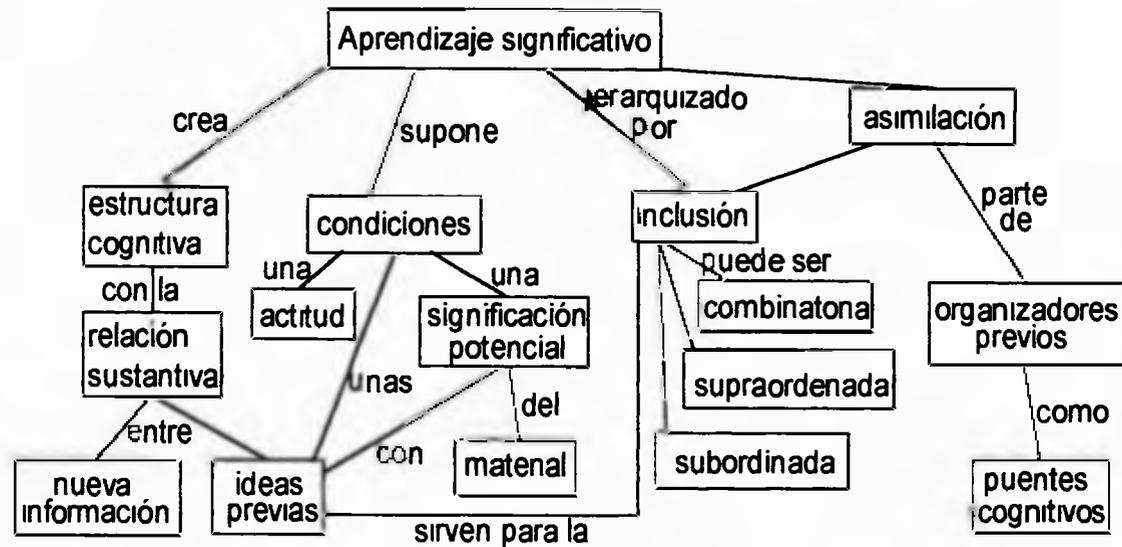
Es el “saber hacer”, es el conocimiento referido a la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas, métodos, etc , basado en la realización de acciones u operaciones que el alumno debe aprender en forma significativa. Ejemplos: elaboración de gráficos estadísticos, el uso de algoritmos u operaciones matemáticas, elaboración de mapas conceptuales, etc.

Aprendizaje de contenidos actitudinales.

Se refiere a actitudes, valores y normas, donde la actitud es una orientación perceptiva y disposición a reaccionar frente a un ser determinado, o una clase determinada de seres, son tendencias a obrar, relativamente duraderas y varían según los individuos y las culturas; los valores son ideales del comportamiento humano, manifestaciones, más bien de tipo espiritual, de carácter positivo, tanto para el individuo, como para las demás personas que lo rodea y es lo que hace a algo digno de ser apreciado, deseado y buscado.

La norma es una pauta de conducta que determina cuál ha de ser el comportamiento en una situación; detrás de cada norma hay un valor que la legitima y otorga fuerza y fundamento.

El aprendizaje de las actitudes es un proceso gradual, donde influyen diversos factores tales como: experiencias personales previas, actitudes de otras personas significativas, la información, experiencias novedosas y el contexto socio – cultural (a través de las instituciones, los medios y las representaciones colectivas).



Mapa 2.1

La incorporación sustancial e intencionada de una tarea de aprendizaje potencialmente significativa a porciones pertinentes de la estructura cognoscitiva de modo que surja un nuevo significado, implica que el significado recién aprendido llega a formar parte integral de un sistema ideativo particular, la cual tendrá, debido a esto, dos consecuencias:

1. Primero, estos procesos dejan de depender de la capacidad humana para retener asociaciones arbitrarias y al pie de la letra como entidades autónomas, discretas y aisladas, lo que implica que el periodo de retención se expande en gran proporción.
2. Segundo, el material recién aprendido termina sometándose a los principios organizadores que gobiernan el aprendizaje y la retención del sistema al cual son incorporados; el mismo acto de

incorporarlos (asimilarlos) dentro del sistema de conocimiento organizados jerárquicamente. Ocurrida dicha incorporación, el material nuevo retiene, inicialmente, su identidad sustancial en virtud de que es disociable de sus ideas de afianzamiento; pero luego pierde gradualmente su identificabilidad a medida que se reduce a la asimilación.

En el aprendizaje significativo, el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto de la información recién adquirida como del aspecto específicamente pertinente de la estructura cognoscitiva, con el que aquella está vinculada. A este proceso de vinculación de la nueva información con los segmentos preexistentes de la estructura cognoscitiva, le denominamos inclusión. Como la estructura cognitiva tiende a estar organizada jerárquicamente de acuerdo al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de las ideas, la aparición de nuevos significados proporcionales refleja, más comúnmente, una relación subordinada del material nuevo con la estructura cognitiva. Esto implica la inclusión de proposiciones potencialmente significativas en ideas más amplias y generales en la estructura cognoscitiva existente; las cuales solo pueden ser adquiridas por asimilación y esto, a su vez, produce la organización jerárquica de la estructura cognoscitiva.

El proceso de interacción entre el material recién aprendido y los conceptos existente, constituyen el núcleo de la teoría de la asimilación, la

cual contribuye a interpretar tanto la longevidad memorística de las ideas aprendidas significativamente, como la manera en que el conocimiento se organiza dentro de la estructura cognoscitiva.

La asimilación mejora la retención de tres maneras diferentes; primero, al incorporar el nuevo significado, se afianza a una forma modificada de ideas muy estables en la estructura cognoscitiva; segundo, este tipo de afianzamiento, al continuar durante el almacenamiento de la relación intencionada y original que guardan entre sí la idea nueva y la establecida, protege también el nuevo significado de la interferencia ejercida por las ideas aprendidas previamente, experimentadas al mismo tiempo, y las encontradas subsiguientemente, ya que esta interferencia puede ser perjudicial cuando el material de aprendizaje se relaciona de manera arbitraria con la estructura cognitiva, como ocurre con el aprendizaje repetitivo. Y por último, el hecho de que la nueva idea significativa sea almacenada en relación articulada con la idea o ideas particulares de la estructura cognitiva, a la que sea más pertinente (o sea, a la idea o ideas con que se relacionó originalmente al adquirir sus significados), ocasiona, supuestamente, que recuperarla sea un proceso menos arbitrario y más sistemático. La asimilación también puede contribuir a explicar la forma como el conocimiento se organiza en la estructura cognoscitiva

La adquisición de estas proposiciones por asimilación genera tres formas de aprendizaje significativo, el aprendizaje subordinado, el aprendizaje supraordinado y el aprendizaje combinatorio.

El aprendizaje subordinado se produce cuando la nueva información se relaciona con los conceptos ya adquiridos; es una relación subordinada entre los conceptos nuevos y los ya adquiridos, que tienen un mayor nivel de abstracción generalidad e inclusividad, que Ausubel llama inclusores, y que sirven de anclajes entre la información nueva y la ya existente. Puede ser de dos formas derivativa y correlativa, es derivativa cuando los nuevos conceptos sirven solo para aclarar el significado de los ya adquiridos, es decir son ejemplos, ilustraciones que no producen cambios en sus atributos; es correlativa, cuando la nueva información es una extensión o modificación de la ya existente por el alumno. Es el caso más común de aprendizaje, porque los conceptos adquiridos se hallan jerárquicamente subordinados a los ya adquiridos, específicamente es un aprendizaje deductivo, ya que se origina una diferenciación progresiva de información ya existente.

El aprendizaje supraordenado es el proceso inverso al subordinado, aquí la información nueva a aprender tiene un mayor nivel de abstracción; existe una reconciliación integradora donde se integran los atributos de una serie de conceptos en información nueva con un mayor nivel de abstracción. Es decir, se produce una interacción entre los rasgos de una serie de conceptos que dan lugar a la aparición de un nuevo concepto más general o llamado

supraordinado, es un aprendizaje en el que se procede por inducción, y provoca la reorganización del conocimiento ya aprendido con un significado distinto. Por ejemplo, la aparición de nuevas ideas o teorías se produce, en muchos casos, mediante el descubrimiento de nuevas leyes o conceptos más generales que permiten explicar, de una misma forma, fenómenos que antes se consideraban distintos.

En el caso del aprendizaje significativo combinatorio, la idea nueva y las ya existentes no están relacionadas jerárquicamente, sino que se hallan al mismo nivel dentro del concepto. El aprendizaje de proposiciones nuevas y de muchos conceptos, produce esta categoría de aprendizaje. Por ejemplo, la relación entre las áreas de dos polígonos semejantes con sus respectivos lados homólogos

La incorporación sustancial e intencionada de una tarea de aprendizaje, potencialmente significativa a porciones pertinentes de la estructura cognoscitiva, de modo que surja un nuevo significado, implica que este significado recién aprendido, llega a formar parte integral de un sistema idetivo particular.

El aprendizaje significativo de cualquier información implica, necesariamente, su memorización comprensiva, su almacenamiento en una red más o menos amplia de significados [5; 136]; cuanto más amplio sea

esta red de significados, la capacidad del alumno para establecer nuevas relaciones será mayor, generando al mismo tiempo nuevos significados.

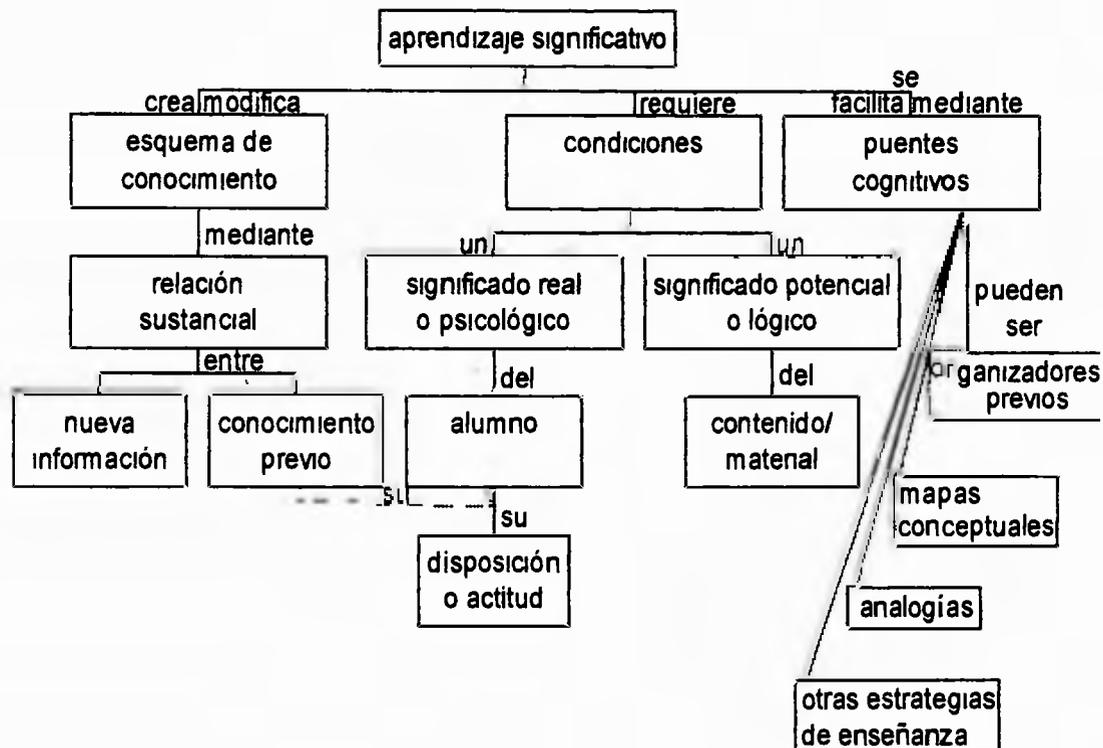
Para la facilitación del aprendizaje significativo se hace necesario la utilización de ciertos conceptos o ideas iniciales, que son presentados como marcos de referencia de los nuevos conceptos y las nuevas relaciones, los cuales llamamos organizadores previos; estos son los puentes cognitivos entre los nuevos contenidos y la estructura cognitiva del alumno, que permiten un aprendizaje más eficaz.

La aplicación de estos organizadores previos tiene tres momentos que son:

- 1 La presentación de los organizadores: es el momento en que se clarifican los objetivos, se dan algunas ideas o propiedades, se dan algunos ejemplos, se aporta el contexto, se recuerdan algunas experiencias y algunos conocimientos relacionados con los objetivos a lograr.
2. La presentación del material de trabajo consiste en organizar el trabajo, ordenar lógicamente el proceso de aprendizaje, presentar el material de información, ya sean estos documentos informativos, películas, lecturas, experimentos, etc.; aquí se debe disponer de algunos principios para hacer la reconciliación integradora y suscitar un enfoque crítico.

- 3 La reconciliación integradora del nuevo material con la estructura cognitiva, consiste en recordar las ideas generales, preguntar sobre las principales propiedades del nuevo material y las discrepancias existentes en él, así como la descripción de las relaciones entre el nuevo material y el concepto utilizado como organizador.

En el contexto del aprendizaje significativo, Joseph D Novak propone los mapas conceptuales como una estrategia, método y recurso para ejemplificar la secuencia de instrucción para lograr un aprendizaje.



Mapa 2 2

2.1.2.2.2 LOS MAPAS CONCEPTUALES.

Los mapas conceptuales son estrategias metacognitivas de aprendizaje, basada en la teoría de la asimilación del aprendizaje cognitivo de Ausubel y desarrollados por Joseph Novak en la universidad de Cornell. Son representaciones de significados o estructura ideacional, específica de un dominio de conocimiento, para un contexto dado de significados; donde se puede representar jerárquicamente la estructura lógica y psicológica de un contenido de instrucción. Representan la estructura del conocimiento del alumno antes y después de la instrucción, y constituye un instrumento útil para ayudarle a pasar del aprendizaje memorístico al significativo, ya que a través de ellos se establece la comunicación con la estructura cognitiva del alumno y se pone de manifiesto sus conocimientos.

Los mapas conceptuales son gráficos, enramados de líneas que confluyen en una serie de puntos; podemos considerarlos como un mapa de carreteras donde las ciudades aparecen unidas por una serie de líneas que simbolizan las vías de comunicación. Los puntos de confluencias se reservan para los términos conceptuales que se sitúan en una elipse recuadro; los conceptos relacionados se unen por líneas y el sentido de la relación se aclara con palabras enlace que se escriben en minúsculas junto a las líneas de unión, de esta forma dos conceptos con sus respectivas palabras enlaces forman lo que llamamos proposiciones; las cuales son unidades con significado psicológico

Son modelos de educación centrado en el alumno y no en el docente, que atiende el desarrollo de destrezas y pretende el desarrollo armónico de todas las dimensiones de la persona; también pueden ser considerados como un recurso esquemático para aprender un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. Presentan el conocimiento ordenado de una manera jerárquica en forma descendente, de manera tal que los conceptos más generales están en la parte superior y los más específicos en la parte inferior.

Permiten a docentes y alumnos intercambiar sus puntos de vista sobre la validez de un vínculo proposicional determinado; o darse cuenta de las uniones que faltan entre los conceptos y que sugieren la necesidad de un nuevo aprendizaje, establecen un modelo para interpretar nuevos conocimientos o informaciones.

2.1.2.2.1 PRINCIPIOS PSICOLÓGICOS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES

Los Mapas Conceptuales se fundamentan en los siguientes principios del aprendizaje significativo.

- 1 La necesidad de conocer las ideas previas de los sujetos, antes de iniciar nuevos aprendizajes, es decir, revela la estructura de significados que poseen los sujetos, con el propósito de establecer aprendizajes interrelacionados y no aislados y arbitrarios
2. La idea que, en la medida que el nuevo conocimiento es adquirido significativamente, los conceptos preexistentes experimentan una diferenciación progresiva
- 3 En la medida que los significados de dos o más conceptos, aparecen relacionados de una nueva manera y significativa, tiene lugar una reconciliación integradora

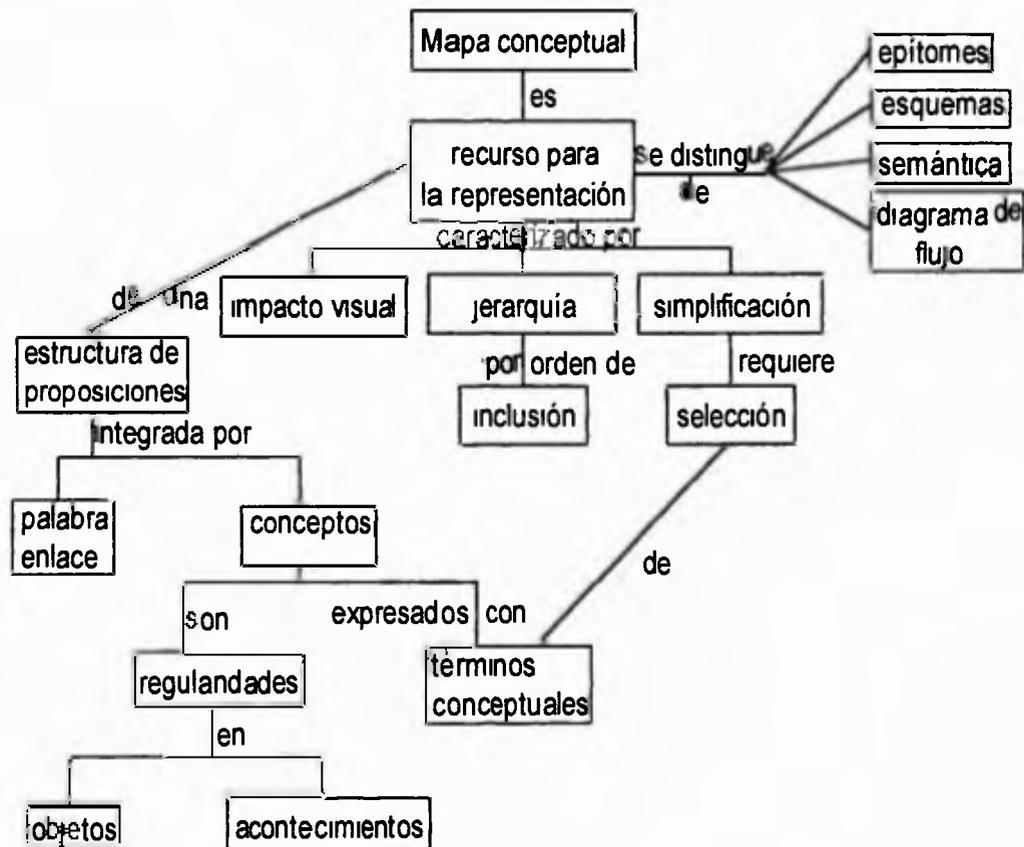
Los mapas conceptuales tienen tres elementos fundamentales, que son: los conceptos, las proposiciones y las palabras enlace.

Los conceptos hacen referencia a acontecimientos que son cualquier cosa que sucede o puede provocarse y a objeto que son cualquier cosa que existe y se puede observar. Los conceptos son, según Novak, las imágenes mentales que provocan en nosotros las palabras o signos con los que expresamos regularidades, estas imágenes mentales poseen elementos comunes en todos los individuos, pero tienen matices personales, puesto que nuestros conceptos no son exactamente iguales aunque usemos las mismas palabras Este carácter idiosincrático surge por la forma peculiar que tiene

cada alumno para captar inicialmente el significado de un término, la experiencia acumulada sobre la realidad, los sentimientos que provoca, etc.

Las proposiciones son dos o más conceptos o términos conceptuales unidos por palabras - enlaces para formar una unidad semántica.

Las palabras – enlace, son palabras que sirven para unir los conceptos y señalar el tipo de relación existente entre ambos, pueden ser las siguientes: para, por, donde, como entre otros.



Mapa 2.3

La vertiente interna más importante de los mapas conceptuales, es que estos gráficos son la manifestación de una estructura mental de conceptos y proposiciones, vertiente que permite calificar esta técnica como cognitiva y relacionarla con el aprendizaje significativo. Estos mapas conceptuales no deben confundirse con ninguna de las siguientes formas o representaciones mas o menos semejantes a ellos, como estas.

- 1 **Diagrama de flujo.** representan una sucesión temporal de acontecimientos, no el orden de inclusividad.
- 2 **Organigramas.** son representaciones de una jerarquía, pero no de significados, sino de unidades o funciones administrativas.
3. **Redes conceptuales** expresan jerarquía de significados, de tal manera que los conceptos más generales se explican en una serie de conceptos más concretos que describen el significado de los primeros. Pero implican el modo de pertenencia a una clase de conceptos y las propiedades de esta, las relaciones se simbolizan por medio de flechas y no, necesariamente, se expresan de forma verbal.
- 4 **Redes semánticas,** son redes conceptuales que pretenden, fundamentalmente, establecer relaciones de significados entre los

conceptos que tratan de representar; pero no son organizadas, necesariamente, por niveles jerárquicos.

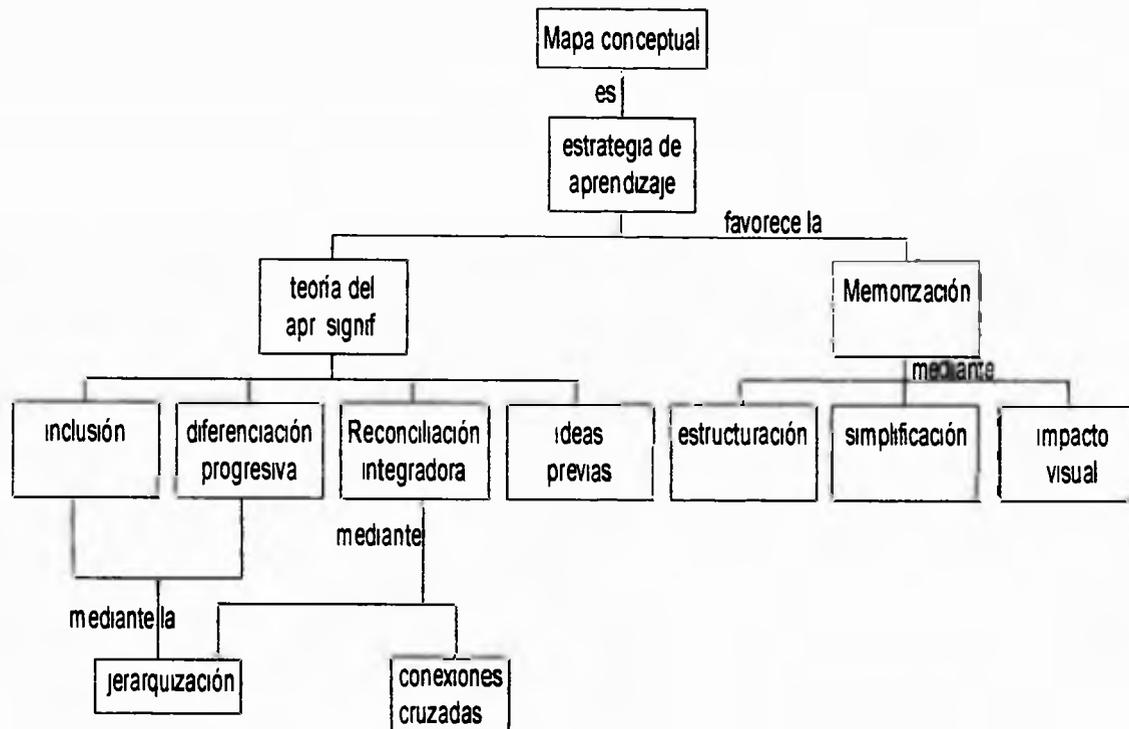
- 5 **Epítomes**, constituyen un marco conceptual de una asignatura o área escolar, que recoge los elementos esenciales del contenido y los contextualiza conceptualmente.
- 6 **Esquemas**, se distinguen de los mapas porque su lenguaje es más escueto, la jerarquización es más estricta que en los esquemas y también es mayor el impacto visual.
7. **Mapas cognitivos**, es otro tipo de esquema mental semejante a los mapas conceptuales, son representaciones internas que permiten desenvolvernó en nuestro entorno y resolver problemas de localización, orientación y desplazamiento; son utilizados para el conocimiento espacial y ambiental, para analizar el conocimiento del entorno físico y geográfico, aquí prevalece el carácter individual, mientras que en los mapas conceptuales prevalece lo social.

Las características o condiciones de los mapas conceptuales que los diferencian de estos recursos gráficos, estrategias o técnicas cognitivas semejante tenemos:

1. **La jerarquización**, en los mapas conceptuales los conceptos están dispuestos por orden de importancia o de inclusividad; los conceptos más inclusivos ocupan los lugares superiores en la estructura gráfica. Los ejemplos se sitúan en el último lugar, y no se enmarcan. Es importante señalar que los conceptos, en ésta técnica, sólo aparecen una vez y se conviene terminar la línea de enlace con una flecha para indicar el concepto derivado

- 2 **La selección**, los mapas constituyen una síntesis o resumen que contiene lo más importante o significativo de un mensaje, tema o texto. En el proceso de construcción, es necesario seleccionar los términos que hagan referencia a los conceptos en los que conviene centrar la atención, puesto que lo importante en los mapas es recoger un mensaje o texto, que puede ser extenso, lo que implica que en él pueden estar ocultos algunos conceptos, los cuales pueden ser objetos de estudio en otro mapa.

3. **El impacto visual**, El diseñador de un mapa conceptual debe aprovecharse de todos los recursos tecnológicos existentes para su diseño, ya que el mismo debe ser conciso y mostrar las ideas principales, objeto de estudio, de un modo simple y vistoso. Se aconseja escribir los términos conceptuales en mayúsculas y enmarcadas con elipses, para mejor impacto.



Mapa 2.4

2.1.2.2.2 ELABORACIÓN DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES.

Algunos principios metodológicos que pueden tenerse en cuenta en la elaboración de los mapas conceptuales a partir de las ideas de Novack, J, y Gowin, B, son los siguientes:

- 1 **La conexión con las ideas previas de los alumnos**, es el procedimiento utilizado por el docente para relacionar los

conceptos ya existentes en la estructura cognitiva del alumno con el concepto nuevo a adquirir, a través del mapa conceptual, que puede hacerse de dos maneras; una es presentar a los alumnos el concepto que tratamos de enseñarle, y pedirle que construya un mapa con todos los conceptos que considere relacionado con el primero; la otra alternativa es presentar al alumno una lista con los conceptos más importante del tema a trabajar para que elabore con ellos un mapa conceptual. También es importante definir qué es un concepto y qué es una proposición. El concepto puede ser considerado como aquella palabra que se emplea para designar cierta imagen de un objeto o de un acontecimiento que se produce en la mente del individuo. La proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras de enlace para formar una unidad semántica.

2. **La diferenciación progresiva y la reconciliación integradora,** sobre todo la idea de que le es más fácil al individuo que aprende a relacionar los conceptos de un todo más amplio y ya aprendido, que formularlo a partir de componentes diferenciados. Un rasgo característico del mapa conceptual es la representación de la relación de los conceptos, siguiendo el modelo general a lo específico, en donde las ideas más generales o inclusivas, ocupen el ápice o parte superior de la estructura y las más específicas en la parte inferior

3. **La inclusión**, es la colocación en la construcción del mapa conceptual, de los conceptos; en el orden de jerarquía que le corresponde; es colocar los conceptos más generales en el más alto nivel, y los más específicos en el más bajo. Aunque puede suceder que existan conceptos valorados con diferentes niveles, de acuerdo a diferentes estudiantes

4. Un cuarto principio es la necesidad de elaborar los mapas conceptuales, siguiendo un ordenamiento lógico que permita lograr la mayor posibilidad de interrelación, donde se logre un aprendizaje supraordinario y combinatorio; es decir que permita reconocer y reconciliar los nuevos conceptos con los ya aprendidos y poder combinarlos. En otras palabras, el mapa debe permitir "subir y bajar", esto es, explorar las relaciones entre todos los conceptos

5. Un quinto principio es la función o utilidad del mapa conceptual como instrumento de evaluación, ya sea como una actividad de inicio, o de diagnóstico, que presente lo que el alumno ya sabe. También durante el transcurso del desarrollo de un tema específico, o como una actividad de cierre que permita medir la adquisición y el grado de asimilación por parte del alumno sobre el problema de estudio. Lo que ayuda a obtener información sobre el tipo de estructura cognoscitiva que el alumno posee y medir los

cambios en la misma medida que se realiza el aprendizaje. Este aprendizaje puede lograrse en forma socializada o individualmente.

2.1.2.2.3 MOMENTOS DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES

La elaboración de los mapas conceptuales consta de los siguientes momentos.

1. Preparación de lo necesario

Primeramente se debe preparar toda la documentación bibliográfica y el material necesario que va a ser utilizado por el alumno; ello incluye los conocimientos previos, la información actualizada y los materiales necesarios para el logro de los objetivos que se pretenden lograr.

2. Plasmación práctica de todo el material recopilado en la fase anterior.

En este momento el estudiante, individual o en grupo, con la ayuda de sus conocimientos previos, la información y los materiales, procede a la construcción de su mapa conceptual; aquí se pone en práctica dos elementos

fundamentales, como son el hecho de compartir y negociar significados. Ambos se basan en el principio de que el conocimiento, al contrario del aprendizaje, puede ser compartido, y el principio ausubeliano de la diferenciación progresiva, ya que con respecto a esto Novak y Gowin [18, 70] dicen.

“Los conceptos nunca se aprenden totalmente, sino, que siempre se están aprendiendo, modificando o haciendo más explícitos e inclusivos a medida que se van diferenciando progresivamente”

En este momento, si los estudiantes están agrupados proceden a compartir significados, a defender sus puntos de vistas, pueden aparecer algunas concepciones equivocadas al exteriorizar algunas proposiciones cuya conexión entre conceptos es claramente falsa o al poner de manifiesto uniones que pasan por alto un concepto más general o inclusivo que conecta, a su vez, dos o más conceptos fundamentales. Si los estudiantes están trabajando de manera individual, inmediatamente termine cada uno de construir su mapa, se les pide que se agrupen en pequeños grupos para que elaboren un solo mapa, con el propósito de que compartan los significados. Novak y Gowin [18; 70], al respecto dicen:

“Los mapas conceptuales permiten a profesores y alumnos intercambiar puntos de vista sobre la validez de un vínculo proposicional determinado, o

darse cuenta de las conexiones que faltan entre los conceptos, y que sugieren la necesidad de un nuevo aprendizaje”

3. Negociación y aplicación de conceptos

Una vez los estudiantes se ponen de acuerdo y elaboran sus mapas conceptuales, se inicia el proceso de negociación de significado; el docente conjuntamente con los alumnos debe construir un solo mapa conceptual. Esto requiere de un acuerdo entre los alumnos, y entre docentes y alumnos a través de un proceso de diálogo e intercambio, en el que se decide compartir un determinado significado, ya que no se va a encontrar dos mapas conceptuales iguales.

2.1.2.2.4 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE.

Las estrategias son procesos ejecutivos mediante los cuales se eligen, coordinan, planifican y aplican las acciones o habilidades, en una secuencia de actividades para conseguir una finalidad o un aprendizaje.

Como la teoría cognitiva no se basa en los aspectos externos observables, que es el caso de los conductistas, sino en los procesos

internos que ocurre en la memoria, concibiendo el aprendizaje como un cambio en el conocimiento, a través de un proceso psicológico de reestructuración; Pozo [18, 43 – 44], tomando en cuenta estas características del aprendizaje significativo y con el nivel de procesamiento profundo, hace la siguiente clasificación de estrategias.

1. **Estrategias de asociación**, son las que tienen el carácter clásico, como el repaso.
2. **Estrategias de reestructuración**, son las que pretenden relacionar los conocimientos nuevos con los ya existentes en el alumno, y colocarlos en una estructura de significado mas o menos amplia. Estas comprenden las estrategias de elaboración, que están centradas en la búsqueda de una relación simple entre significados, sin llegar a establecer una estructura tales, como. palabras claves, imagen mental, rimas, abreviaturas, códigos, analogías, etc.
3. **Estrategias de organización**, son las que establecen la relación interna entre los materiales de aprendizaje; estas estrategias implican una clasificación jerárquica u organización semántica de esos elementos y representa la forma más compleja y sofisticada de aprender un material; es pues, mucho más compleja que las anteriores y mucho más eficaz, y puede hacerse de las siguientes forma:

3 1 Por clasificación, formando categorías

3 2 Por jerarquización, estableciendo un orden de mayor a menor o pirámide de conceptos, que es la forma más eficaz de bloque de conocimiento

De acuerdo a esta clasificación, los mapas conceptuales aparecen como técnica o habilidad dentro del aprendizaje por reestructuración, pertenecientes a la estrategia de aprendizaje de organización jerárquica, ya que con los mapas conceptuales el alumno llega a tener la conciencia del propio proceso cognitivo o metacognición.

2.1.2.2.2.4.1 ETAPAS PARA DIRIGIR EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA TÉCNICA MAPAS CONCEPTUALES.

Presentamos el procedimiento para dirigir el aprendizaje de la construcción de mapas conceptuales; este procedimiento, de 5 etapas, puede ser el mismo para cualquier nivel educativo, solo se gradúa el nivel de dificultad, dependiendo del nivel del grupo. Por supuesto, la experiencia del maestro y su conocimiento del grupo son insustituibles y determinantes.

Etapa I Actividades de preparación.

Consta de seis fases que son:

- 1 Reconocimiento de términos conceptuales, consiste en elaborar una serie de actividades donde el docente debe llevar al estudiante a relacionar conceptos con aspectos conocidos por el estudiante; tales como elaboración de dos listas de palabras que sean términos conceptuales, una y la otra de hechos, acciones, fenómenos naturales etc., que sean conocidos por el estudiante y que los alumnos reconozcan las diferencias que hay entre ambas listas
2. Reconocimiento de imágenes mentales y de términos conceptuales. Son actividades tendientes a describir los conceptos y a construir de cada concepto una imagen. Por ejemplo, pedir a los estudiantes que describan lo que se imaginan en cada palabra de las listas, e indíqueles que esas imágenes mentales las llamamos conceptos.
3. Elaboración de listas de términos conceptuales. Es la elaboración de la lista de conceptos obtenidos de la fase 2.

- 4 Reconocimiento de descriptores o palabras enlace. Son actividades tendientes a reconocer palabras que no forman términos conceptuales, que no forman imágenes mentales; pero que se pueden utilizar para relacionar conceptos para formar proposiciones, por ejemplo, es, donde, el, como, etc.
- 5 Reconocimiento de nombres propios. Son actividades tendiente a reconocer los nombres propios y a diferenciarlos de los genéricos, por ejemplo, que diferencie la palabra Panamá de la palabra país
- 6 Construcción de proposiciones. Una vez elaborada la lista de términos conceptuales y reconocida las palabras enlaces se les pide a los estudiantes que construyan proposiciones; estas deben ser frases breves, tener sentido, ser lógicas y claras, es decir, que se entiendan bien. En este caso se le puede proveer palabras con distintos conceptos, para que formen distintos conceptos. Se debe verificar que las proposiciones estén bien construidas.

Etapa II. Aplicación de conocimientos.

Esta etapa consiste en la verificación del aprendizaje efectuado en la etapa I, puede ser a través de una práctica. Son importantes las actividades realizadas en esta fase porque permiten desarrollar en los alumnos las habilidades indispensables, para tener éxito en las siguientes etapas

Etapa III Actividades de construcción del mapa conceptual Contiene dos fases, estas son

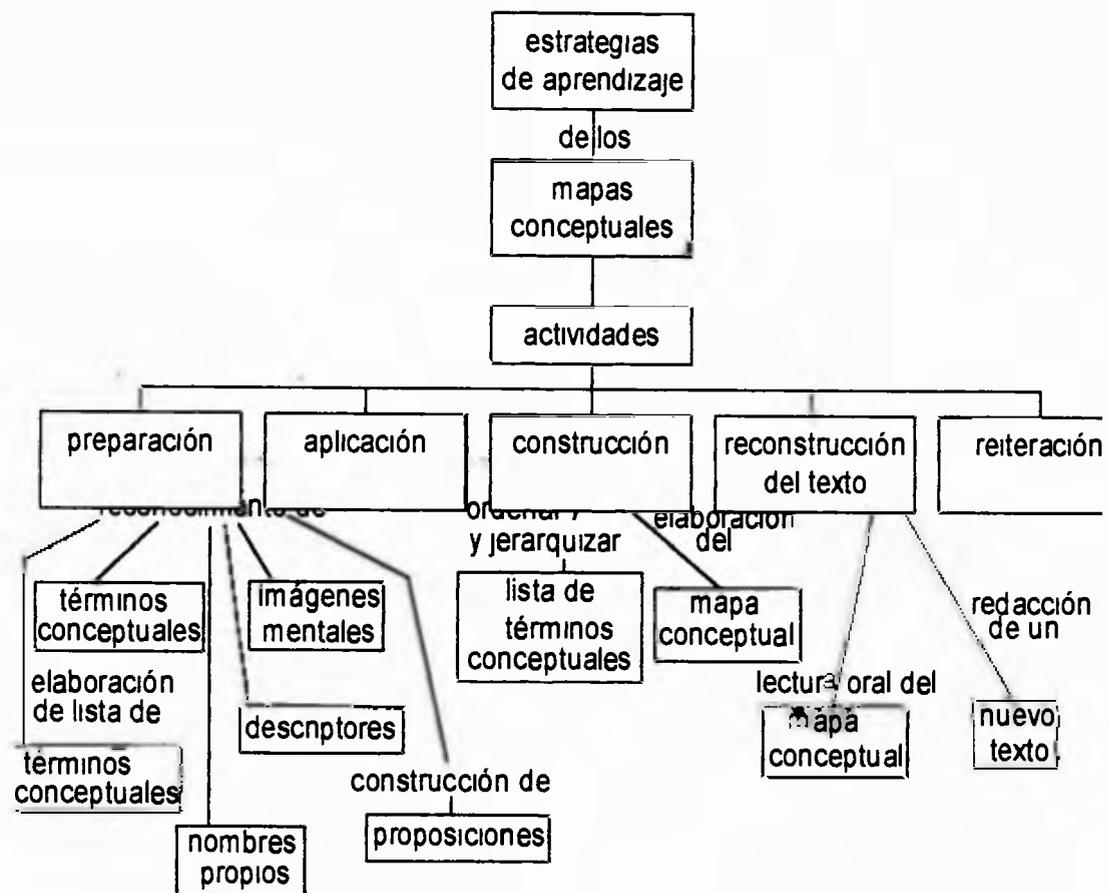
- 7 Ordenar y jerarquizar la lista de términos conceptuales Son actividades tendientes a indicar a los alumnos cómo ordenar y jerarquizar su lista de términos conceptuales, de tal manera que el más general e inclusivo esté arriba y, los demás en forma descendente, hasta ubicar abajo el más particular o el menos inclusivo. Como es una actividad que el docente debe guiar, es lógico que obtendremos diferentes ordenamientos realizado por los estudiantes; una forma práctica de determinar si el ordenamiento es correcto consiste en comprobar si se puede comprender el sentido del escrito que se está analizando.
8. Elaboración del mapa conceptual. Se trata de construir el mapa conceptual en forma colectiva y por consenso, donde todos los alumnos deben participar En esta ocasión se les recuerda a los estudiantes que se utilizan óvalos o recuadros para encerrar los términos conceptuales, líneas inclinadas, horizontales o verticales para los conectores o líneas ramales y flechas, cuando sea necesario marcar la direccionalidad más claramente Esta actividad puede hacerse individualmente o en pequeños grupos (4 a 6 alumnos)

Etapa IV Reconstrucción del texto. Contiene dos fases, estas son:

- 9 Lectura del mapa conceptual Esta actividad consiste en revisar si el mapa conceptual construido en consenso, reúne los contenidos esenciales del escrito, por lo menos, los más importantes; esto puede hacerse leyéndolo en voz alta, de arriba abajo y, en cada nivel de izquierda a derecha
10. Redacción de un nuevo texto. Se procede a elaborar en forma individual nuevos textos y compararlos para que el grupo formule conclusiones, a partir de las mismas; se construye un nuevo mapa conceptual, con el que la mayor parte de los alumnos estén de acuerdo

Etapa V. Reiteración.

Este es el momento en que salen a relucir los aspectos más importantes de los objetivos que se están estudiando; aquí pueden salir a relucir las llamadas relaciones cruzadas, pues existen términos conceptuales que están relacionados con dos términos distintos, y deben emplearse las relaciones cruzadas para integrar significados que de otra forma no podrán relacionarse.



Mapa 2 5

2.1.2.2.4.2. ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR LOS MAPAS CONCEPTUALES

Para introducir los mapas conceptuales, se sugieren las siguientes actividades [17, 45 – 56]

1. Actividades previas a la elaboración de mapas conceptuales:
 - 1 1 Prepare una lista con nombres de objetos y otra con acontecimientos que resulten conocidos para los alumnos y muéstrelas en la pizarra, o bien mediante un proyector de transparencias. Por ejemplo, podrán servir como nombres de objetos: automóvil, perro, silla, árbol, nube, libro. Los acontecimientos podrían ser: llover, jugar, lavar, pensar, tronar, fiesta de cumpleaños. Pregunte a los alumnos si son capaces de decir en qué se diferencian las dos listas. Trate de ayudarlos a darse cuenta de que la primera lista es de cosas u objetos mientras que la segunda es de sucesos o acontecimientos y ponga título a las dos listas.
 - 1 2 Pida a los alumnos que describan lo que piensan cuando oyen la palabra automóvil, perro, etc. Ayúdelos para que se den cuenta de que, aunque utilizamos las mismas palabras, cada uno de nosotros

puede imaginar las cosas de manera ligeramente distinta, Estas imágenes mentales que tenemos de las palabras son nuestros conceptos: presente la palabra concepto.

- 1 3 Repita las actividades del paso dos utilizando ahora palabras que designen acontecimientos y señale de nuevo las diferencias que existen entre las imágenes mentales, o conceptos, que tenemos de los acontecimientos. En este momento tal vez le interese sugerir que una de las razones por las que, a veces, nos resulta difícil entendernos mutuamente, es que nuestros conceptos nunca son exactamente iguales, incluso aunque conozcamos las mismas palabras. Las palabras son signos para designar conceptos, pero cada uno de nosotros debe adquirir sus propios significados para las palabras.

- 1 4 Ahora nombre una serie de palabras como: eres, donde, el, es, entonces, con. Pregunte a los alumnos qué se les viene a la mente cuando oyen cada una de estas palabras. Estas palabras no son términos conceptuales, las llamaremos palabras de enlace y las utilizamos cuando hablamos y cuando escribimos. Las palabras de enlace se utilizan conjuntamente con los conceptos para formar frases que tengan significados.

- 1.5 Los nombres de personas, acontecimientos lugares u objetos determinados no son términos conceptuales sino nombres propios. Ponga algunos ejemplos y ayude a los alumnos a ver la diferencia entre los signos que designan regularidades en los acontecimientos y en los objetos, y los que designan acontecimientos y objetos determinados (o nombres propios).

- 1.6 Escriba en la pizarra unas cuantas frases cortas formadas por dos conceptos y una o varias palabras de enlace, con objeto de ilustrar cómo utiliza el ser humano conceptos y palabras de enlace para transmitir algún significado. Algunos ejemplos pueden ser los siguientes "El perro está corriendo" o "Hay nubes y truenos"

- 1.7 Pida a los estudiantes que formen por sí solos unas cuantas frases cortas, que identifiquen las palabras de enlace y los términos conceptuales, y que digan si estos últimos se refieren a un objeto o un acontecimiento.

- 1.8 Si algunos de los alumnos de la clase son bilingües, pídales que digan algunas palabras del otro idioma que designen los mismos acontecimientos y objetos. Ayude a los alumnos a darse cuenta de que el lenguaje no vea los conceptos sino que tan sólo proporciona los signos que utilizamos para designarlos.

1.9 Presente algunas palabras cortas; pero que resulten desconocidas como atroz o terso. Éstas son palabras que designan conceptos que los alumnos ya conocen; pero que tienen significados un poco especiales. Ayude a los alumnos a darse cuenta de que el significado de los conceptos no es algo rígido y determinado, sino que algo que puede crecer y cambiar a medida que vayamos aprendiendo más cosas.

1.10 Elija una sección de un libro de texto (basta con una página) y prepare copias para todos los alumnos. Hay que elegir un pasaje que transmita un mensaje concreto. Como tarea de clase pida a los alumnos que lean el pasaje e identifiquen los principales conceptos (generalmente pueden encontrarse entre 10 y 20 conceptos relevantes en un texto de una página). Pida también a los alumnos que anoten algunas palabras de enlace y términos conceptuales de importancia menor para el desarrollo del argumento de la narración.

2. Actividades de elaboración de mapas conceptuales:

2.1 Elija uno o dos párrafos especialmente significativos de un libro de texto o de cualquier otro tipo de material impreso y haga que los estudiantes lo lean y seleccionen los conceptos más importantes, es decir, aquellos conceptos necesarios para entender el significado del texto. Una vez que estos conceptos hayan sido identificados, prepare

con ellos una lista en la pizarra o muéstrela mediante un proyector de transparencias y discuta con los estudiantes cuál es el concepto más importante, cuál es la idea más inclusiva del texto

2.2 Coloque el concepto más inclusivo al principio de una nueva lista ordenada de conceptos y vaya disponiendo en ella los restantes conceptos de la primera lista hasta que todos los conceptos queden ordenados de mayor a menor generalidad e inclusividad. Los estudiantes no van a estar siempre de acuerdo entre ellos con la ordenación, pero generalmente sólo se producirán unas cuantas diferencias importantes en el orden de los conceptos. Esto resulta positivo porque sugiere que hay más de un modo de entender el contenido de un texto.

2.3 Una vez que se ha llegado a este punto, se puede empezar a elaborar un mapa conceptual empleando la lista ordenada como guía para construir la jerarquía conceptual. Haga que los estudiantes colaboren eligiendo las palabras de enlace apropiadas para formar las proposiciones que muestran las líneas del mapa. Una buena forma de que practiquen la construcción de mapas conceptuales es hacer que escriban conceptos y palabras de enlace en unos pequeños rectángulos de papel y que los reordenen a medida que van descubriendo nuevas formas de organizar el mapa.

- 2.4 Busque a continuación relaciones cruzadas entre los conceptos de una sección del mapa y los de otra parte del "árbol" conceptual. Pida a los estudiantes que le ayuden a elegir palabras de enlace para las relaciones cruzadas.
- 2.5 La mayor parte de las veces, en estos primeros intentos los mapas tienen una mala simetría o presentan grupos de conceptos con una localización deficiente con respecto a otros conceptos o grupos de conceptos con los que están estrechamente relacionados. Hay que rehacer los mapas, si ello puede ayudar. Indique a los estudiantes que, para conseguir una buena representación de los significados proposicionales, tal como ellos los entienden, hay que rehacer el mapa una vez por lo menos y, a veces, dos o tres.
- 2.6 Discuta los criterios de puntuación de los mapas conceptuales que se presentan y puntúe los mapas conceptuales elaborados. Señale posibles cambios estructurales que pudieran mejorar el significado y, quizá, la puntuación del mapa.
- 2.7 Haga que los estudiantes elijan una sección de un texto o de cualquier otro material, y que repitan los pasos 1 al 6 por sí mismos (o en grupos de dos o tres).

2.8 Los mapas construidos por los educandos pueden presentarse en clase mediante un retroproyector o en la pizarra. La "lectura" del mapa debería aclarar a los demás alumnos de la clase sobre qué trataba el texto, tal como lo interpretaba el alumno que ha elaborado el mapa.

2.9 Haga que los estudiantes construyan mapas conceptuales para las ideas más importantes de sus pasatiempos favoritos, el deporte o todo aquello que les interesa especialmente. Estos mapas se pueden colocar alrededor de la clase y fomentar las discusiones informales sobre ellos.

2.10 En el próximo examen incluya una o dos preguntas sobre mapas conceptuales, para dejar claro que tales mapas constituyen un procedimiento válido de evaluación que exige pensar con detenimiento y que puede poner de manifiesto si se ha comprendido la materia.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran la construcción de mapas conceptuales.

Mapa conceptual construido a partir de un concepto matemático.

El triángulo

El triángulo es un polígono de tres lados, tres vértices y tres ángulos; cada lado tiene su altura respectiva, y a través de estos dos elementos podemos calcular el área del triángulo mediante la fórmula $\frac{(base)(altura)}{2}$, ya que el lado, en este caso es la base del triángulo. Los triángulos los clasificamos de acuerdo a sus lados y a sus ángulos.

De acuerdo a sus lados, en equiláteros, isósceles y escalenos; de acuerdo a sus ángulos en rectángulos y oblicuángulos; los oblicuángulos, a su vez, los clasificamos en obtusángulos y acutángulos. Los lados de los triángulos rectángulos reciben nombres especiales, el lado opuesto al ángulo recto lo llamamos hipotenusa y los otros, catetos. En todo triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras, y a partir de estos triángulos se forman las funciones trigonométricas.

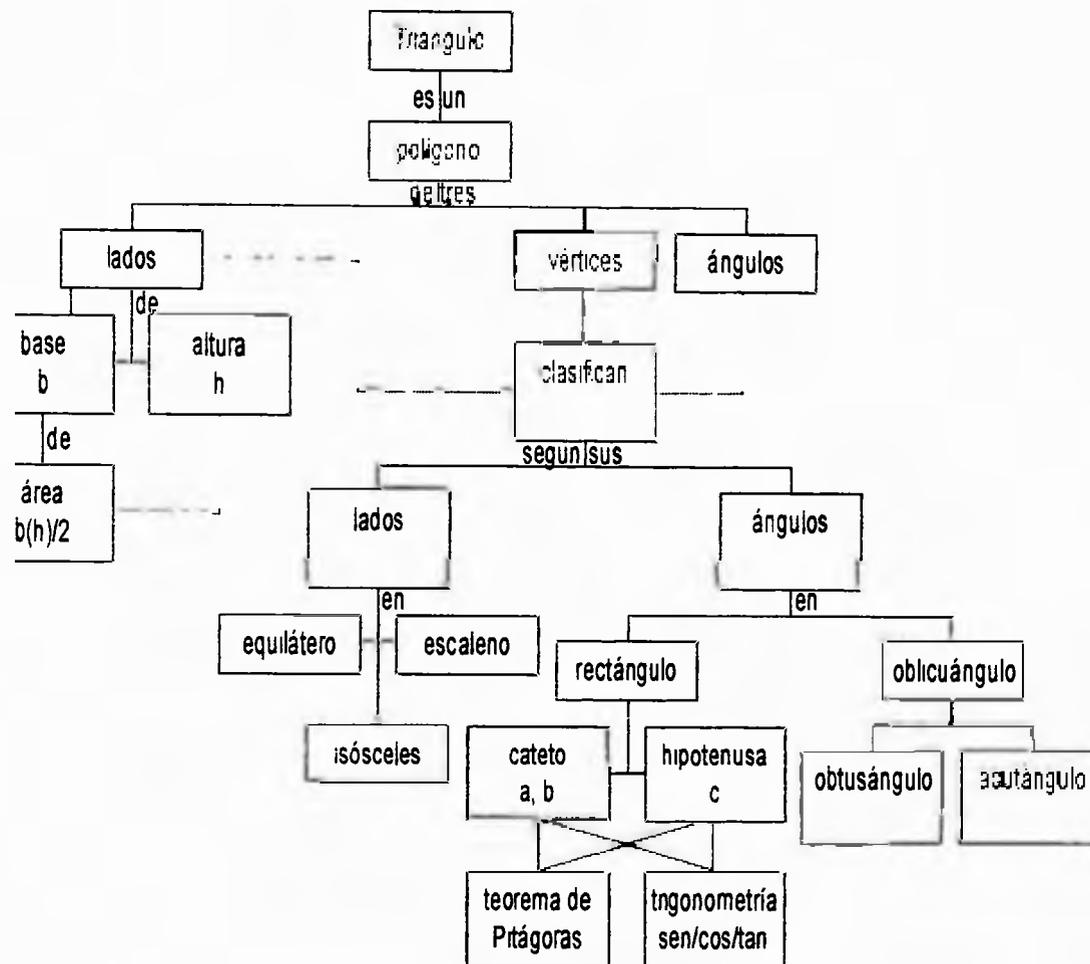
Lista de términos conceptuales:

Polígono,	triángulo,	lado,	base,	altura,
Área	vértice,	ángulo,	equilátero,	isósceles,
Escaleno,	rectángulo	oblicuángulo,	obtusángulo,	acutángulo,
Hipotenusa,	cateto,	funciones trigonométricas,		teorema de
Pitágoras.				

Palabras enlace

Es, que, tres, tiene, un, de, según, en, tiene, se cumple

Mapa conceptual



En la resolución de problemas:

Esta es una experiencia presentada con el propósito de brindarles a los estudiantes la oportunidad de obtener una terapia mental, y que puede ser realizada un viernes, supuestamente el día en que los estudiantes se encuentran más cansados.

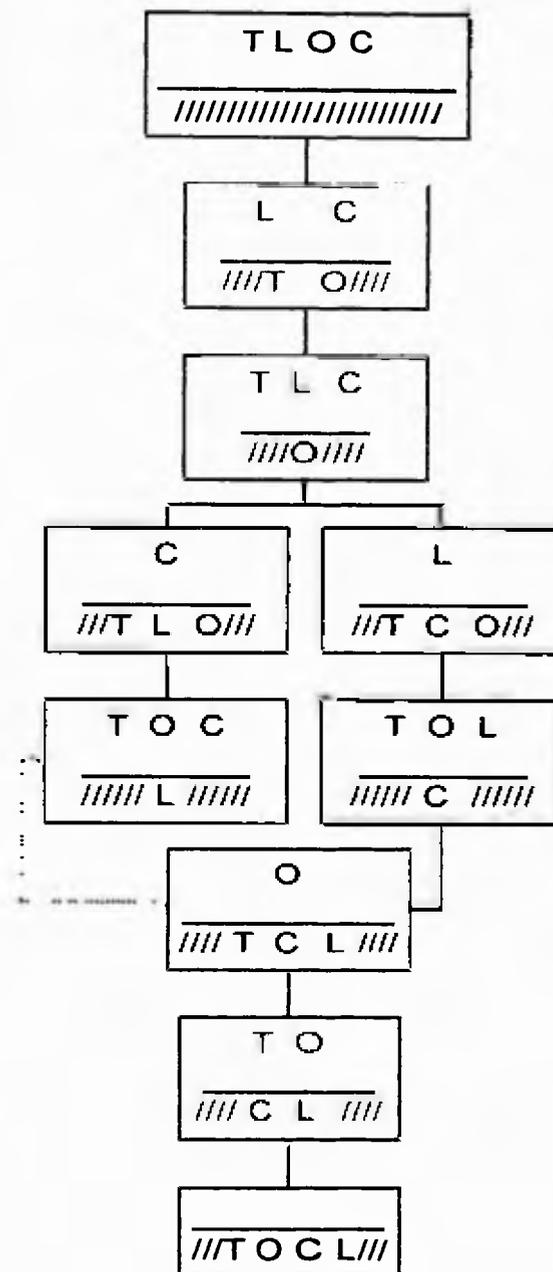
Este es un problema que aparece en el libro *Divertimentos matemáticos* de Brian Bolt:

El embrollo del cruce del río

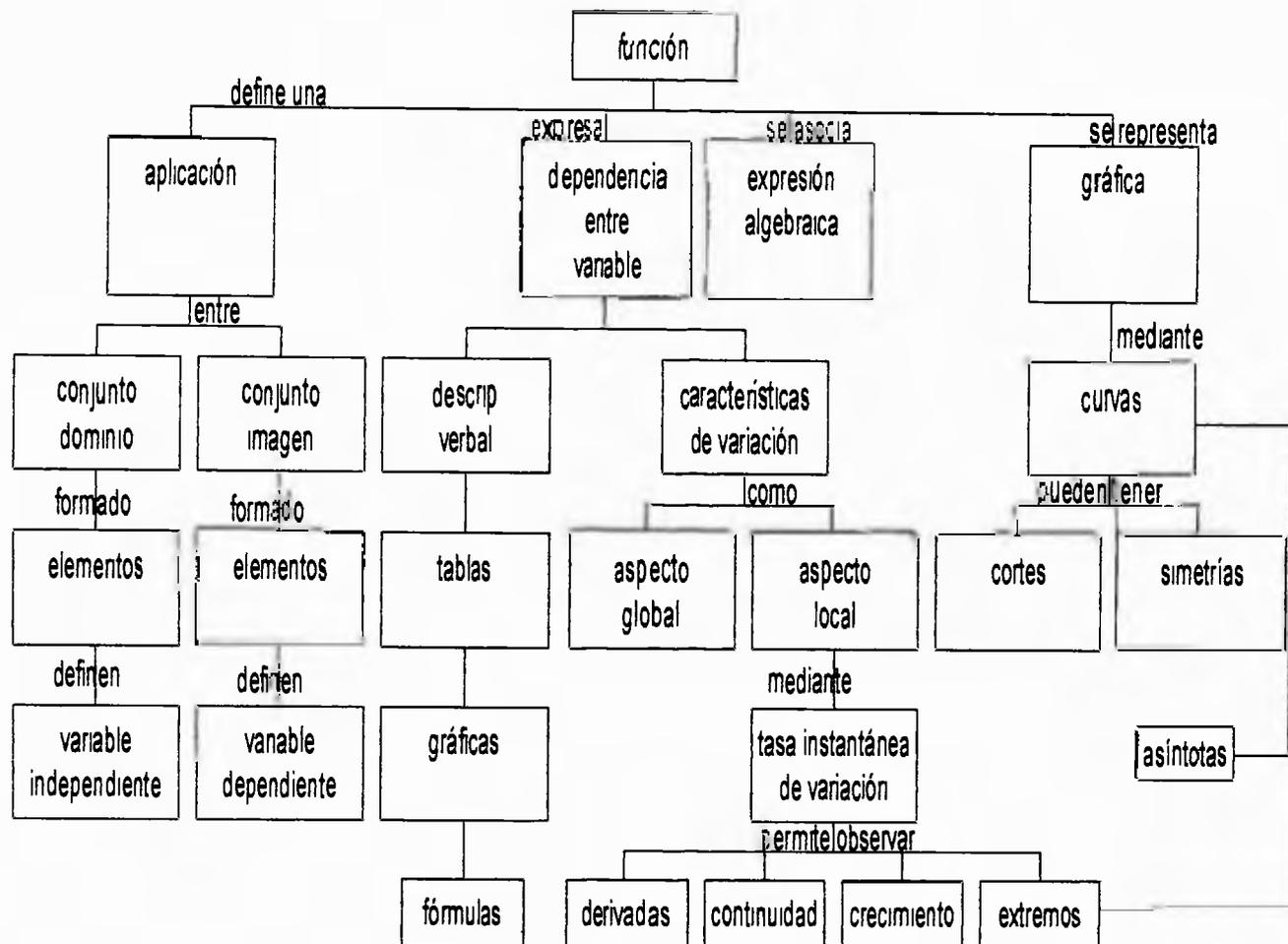
El problema se refiere a un rompecabezas muy antiguo. Se cuenta que había una vez un titintero que recorría un país llevando consigo un lobo, una cabra y una col. Este personaje llega a la orilla de un río y se encuentra con que la única manera de cruzarlo es utilizando una barca en la que sólo cabe él y el lobo, o él y la cabra, o él y la col. Pero él no puede dejar al lobo solo con la cabra, ni a la cabra sola con la col; porque en el primer caso el lobo se comería a la cabra y en el segundo caso la cabra se comería a la col. Después de pensar un rato, llegó a la conclusión de que podría atravesar el río con todas sus pertenencias, con ayuda de la barca, sin perder ninguna de ellas en la operación, ¿cómo lo hizo?

Solución

Titintero (T), Lobo (L), Oveja (O), Col (C).



Presentamos un ejemplo del concepto de función



2.1.2.2.5 PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LOS MAPAS CONCEPTUALES

Puede realizarse según tres variantes:

1. Solicitando su elaboración a los alumnos, siempre que sea el docente que proponga la temática o el concepto focal sobre el que se construirá el mapa que habrá de evaluarse.
2. Solicitando su elaboración a los alumnos, pero en este caso el docente debe proponer todos los conceptos que exclusivamente se considerarán en el mapa que se evaluará
3. Los elaborados por el profesor para guiar las preguntas hechas a los alumnos (en una situación de entrevista) o para analizar las respuestas escritas u orales de los alumnos (como plantillas de análisis)

En la primera de las modalidades se puede valorar “al natural” el grado de profundidad (diferenciación progresiva) y amplitud (reconciliación integradora), en el manejo de los conceptos involucrados en el tema; en la segunda, hasta cierto punto, se le induce a relacionar los conceptos; aunque

el interés, en este caso, debe centrarse en el grado de precisión semántica del manejo de los conceptos y sus relaciones.

La tercera modalidad exige que el profesor construya primero el mapa, y que luego lo utilice como guía o pauta para dirigir entrevistas que intenten valorar las concepciones de los alumnos, o para evaluar sus respuestas cuando se trate de pruebas escritas; sin duda este recurso es de utilidad para tareas de exploración e investigación que el profesor desee realizar cuando sea necesario hacer un análisis, con cierto grado de profundidad, del manejo que tienen los alumnos acerca de temáticas o conceptos complejos.

Para valorar los mapas conceptuales puede hacerse un juicio evaluativo sobre el lenguaje de estos, o sobre una comparación, también cualitativa, entre mapas elaborados antes y después de la instrucción, ya que es exigencia del sistema educativo sintetizar la evaluación, a veces, a una valoración numérica. Novak y Gowin proponen varios criterios basados en los procesos y mecanismos psicológicos que describe la teoría de la asimilación de Ausubel, para tal evaluación:

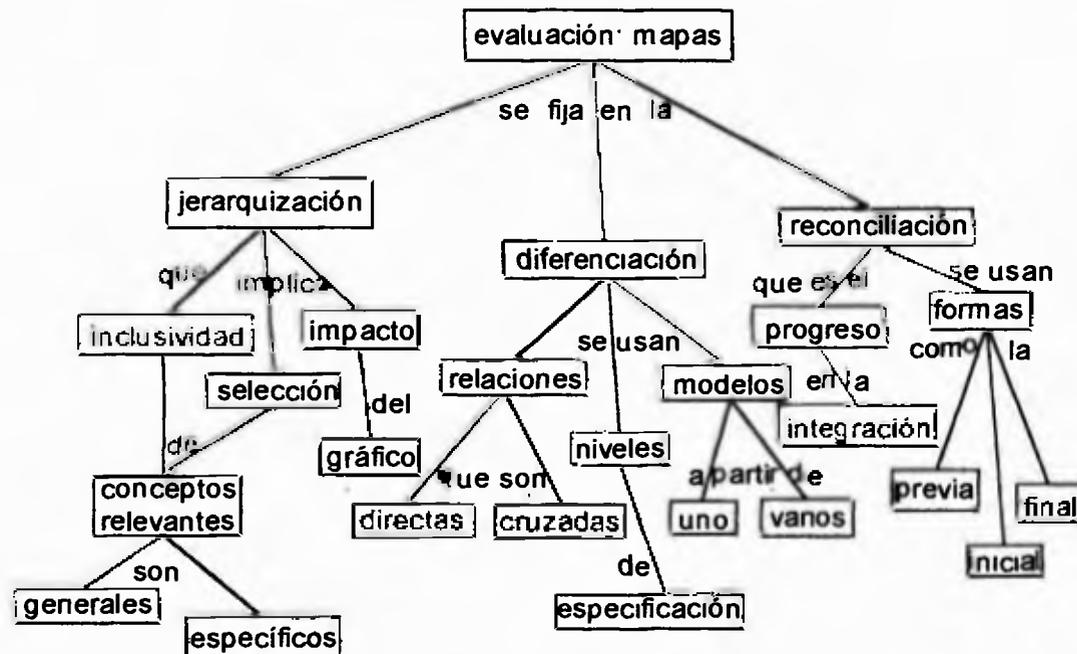
- 1 Considerar la calidad de la organización jerárquica conceptual en los mapas elaborados, esto es nivel de jerarquía en función de la temática o el concepto focal, ya que así se valora el nivel de diferenciación progresiva conseguido.

2. Apreciar las proposiciones obtenidas, la validez y precisión semántica de las distintas relaciones establecidas entre los conceptos con las palabras - enlaces (que todas las relaciones sean veraces y estén rotuladas adecuadamente según el tipo de relación semántica apropiada entre los conceptos involucrados)
3. Tomar en cuenta, dentro del mapa, la densidad (nivel e integración correcta de conceptos) y las relaciones cruzadas (establecidas entre distintas partes del mapa) dado que involucran actividades de reconciliación integradora.
4. Considerar los ejemplos incluidos en el mapa, para estar seguro de que los alumnos han sabido comprender las expectativas de lo que es el concepto y lo que no lo es.

Estos criterios de evaluación, siempre que se utilicen para valorar el aprendizaje significativo de los mapas conceptuales, pueden servir igual que los utilizados en otro sistema. En cuanto a la valoración asignada, para estos criterios, cada docente puede asignarle su propia escala numérica, de acuerdo a sus propios criterios de puntuación

Novak y Gowin proponen un puntaje arbitrario, para estos aspectos, con la consideración de que los tres primeros son los más relevantes, que es el siguiente.

- 1 Para las relaciones correctas entre conceptos, un punto
- 2 En el caso de los ejemplos correctos, la mitad del valor que las relaciones correctas o igual valor
3. Para los niveles jerárquicos bien puestos, de tres a diez veces lo que vale una relación correcta.
- 4 En el caso de las relaciones cruzadas correctas, dos veces lo que vale



Mapa 2.6

2.1.2.2.2.6 VENTAJAS Y CUIDADOS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES

Mencionamos algunas ventajas, como también los cuidados que posee este instrumento de aprendizaje.

Ventajas

Indiscutiblemente esta técnica de aprendizaje ofrece una serie de ventajas en el desarrollo mismo del aprendizaje del estudiante. Entre las que merece mayor atención, están las siguientes:

- 1 Constituye una herramienta que sirve para ilustrar la estructura cognoscitiva o de significados que tienen los individuos mediante los que se perciben y procesan las experiencias.
- 2 Al saber sobre los conocimientos del alumno, permite trabajar y corregir los errores conceptuales del estudiante. Así como facilitar la conexión de la información con otros conceptos relevantes de la persona. Es decir, que se remite al simple hecho de definir y recordar lo aprendido del contenido de la materia.

- 3 Facilita la organización lógica y estructurada de los contenidos de aprendizaje, ya que son útiles para separar la información significativa de la información trivial, logrando fomentar la cooperación entre el estudiante y el poder al vencer la falta de significatividad de la información.
- 4 Permite planificar la instrucción y a la vez ayuda a los estudiantes a aprender a aprender, ya que se puede medir qué concepto hay en la asignatura que el alumno puede aprender Favorece la creatividad y autonomía.
5. Permite lograr un aprendizaje interrelacionado, al no aislar los conceptos, las ideas de los alumnos y la estructura de la disciplina. En el caso de los Estudios Sociales, facilita la comprensión de la historia desde la perspectiva, presente, pasado y futuro
6. Fomenta la negociación, al compartir y discutir significados La confección de los mapas conceptuales en forma grupal, por ejemplo, desempeña una útil función social en el desarrollo del aprendizaje
- 7 Es un referente, buen elemento gráfico cuando se desea recordar un concepto o un tema con sólo mirar el mapa conceptual.
8. Permite relacionar las partes (el todo) unos con otros

9. La riqueza de los conceptos depende en parte del medio social del alumno. No es determinista el hecho del aspecto psicobiológico en la influencia del pensamiento.

Cuidados

Entre los cuidados que se deben tener en cuenta, están los siguientes:

1. Que se elabore un esquema o diagrama de flujo en lugar de un mapa conceptual, en donde en lugar de presentar relaciones supraordenadas y combinatorias entre conceptos, se presentan meras secuencias lineales de acontecimientos.
2. Que las relaciones entre conceptos no sean excesivamente confusas. Es decir, con muchas líneas y palabras de enlace que produzcan en el estudiante apatía, al no encontrarle sentido al orden lógico del mapa conceptual.
3. Que no se constituya en la única herramienta o técnica para construir aprendizaje, sino que sea parte de una secuencia más amplia, ordenada y sobre todo, significativa.
4. El docente debe tener presente que la elaboración de los mapas conceptuales, es un proceso que requiere tiempo; los estudiantes

necesitan practicar el pensamiento reflexivo, es decir, la construcción y reconstrucción de los mapas conceptuales.

2.1.2.2.2.7 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO TÉCNICA PARA COMPARTIR SIGNIFICADOS.

Los mapas conceptuales pueden ser utilizados para negociar significados, es decir, el docente puede usarlos para determinar qué rutas se siguen para organizar los significados y negociarlos con los alumnos, así como señalar las concepciones equivocadas que pueda tener. Pues el aprendizaje es una responsabilidad estrictamente del alumno, ya que él es el que aprende; pero los significados se dialogan, se intercambian, se comparten y, a veces, se adquieren a través de un compromiso o de un convenio, obteniendo un logro importante, en esta negociación, pues los alumnos siempre aportarán algo de su estructura cognitiva.

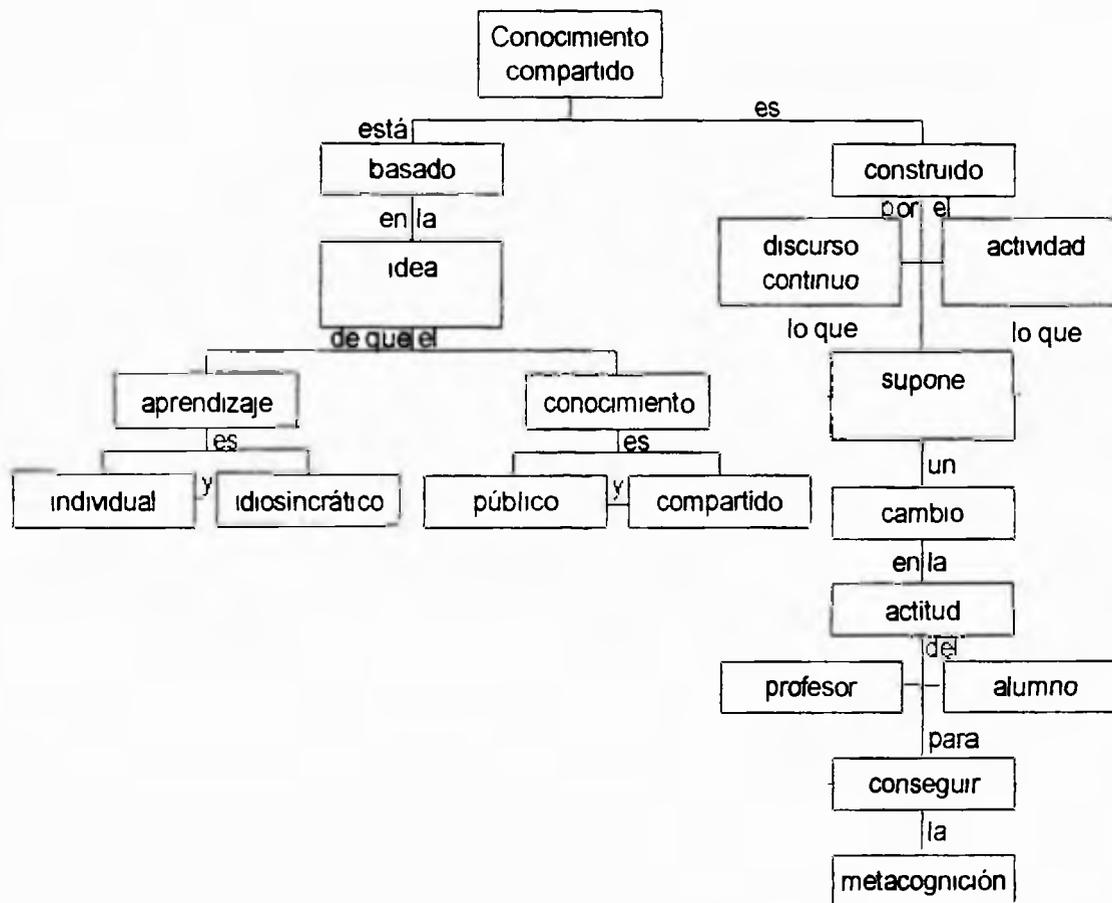
Así como el docente es un mediador, entre la estructura conceptual de la disciplina y la estructura cognitiva del alumno, es un facilitador de los aprendizajes del alumno, Debe proporcionarle una selección de contenidos culturales significativos, además, de unas estrategias cognitivas que permitan la construcción eficaz de nuevas estructuras cognitivas. El aula es considerada, por algunos autores, como un microsistema, en el que tienen

lugar multitud de acontecimientos, que se relacionan estrechamente entre sí, acontecimientos que están centrados en la enseñanza y el aprendizaje, el primero le atañe al docente y el segundo al alumno

La naturaleza misma del aprendizaje, como experiencia vivida, en cada individuo es diferente, es decir, no hay dos alumnos idénticos y, por tanto, sus experiencias de aprendizaje son diferentes; hecho que le proporciona al educador serios problemas en la comunicación. Por lo que la mejor manera de enseñar es la que plantea la tarea del docente como un acto en el que este comparte sus conocimientos con sus alumnos, intentando vivir su propia experiencia de enseñar de manera colateral o coetánea con la experiencia de aprendizaje que está viviendo dichos alumnos. En ese sentido, la tarea del docente, para que sea eficaz, debe basarse en criterios de honradez y de responsabilidad, así como de respeto por aquellos alumnos con los que se comparte y construye tal significado. Ya que el hecho de compartir estos conocimientos es el fundamento de la vida en sociedad; es un acto radicalmente humano que consiste en hacer que dos personas sepan algo que antes solo sabía una.

Para construir este conocimiento compartido es necesario tomar en cuenta el contexto cultural e ideológico en el que están envuelto alumnos y docentes, el material en que apoyan su trabajo, las necesidades de extraer y desarrollar potencialidades y aptitudes en los alumnos y la naturaleza de la educación. La educación como transmisora de conocimiento, debe exigir un

debate permanente con un contenido que cuestione el futuro del propio alumno, como sujeto agente de su propia cultura, construida a través del diálogo con el profesor y sus compañeros



Mapa 2.7

Es necesario, pues que el docente no dude en traspasar los conocimientos, que él controla al alumno, con el fin de que éste adquiera su propia autonomía, y también una nueva postura del alumno ante su propio aprendizaje, por lo que este último debe reflexionar sobre el acto de aprender, adquiriendo lo que se denomina metacognición

Los mapas conceptuales son altamente creativos, pues permiten abrir un campo de nuevas relaciones entre conceptos que antes no concebíamos; situación que exige un gran esfuerzo, ya que el asimilar ideas novedosas que implican la reflexión sobre aquello que se acaba de aprender es muy difícil. Esta situación puede salvarse cuando le pedimos a los alumnos que cada uno construya su propio mapa conceptual; el resultado de esta actividad puede ser la elaboración de mapas conceptuales plasmando concepciones equivocadas; pero la reconstrucción de estos mismos mapas por parte de los demás compañeros, desarrolla el aspecto solidario y anima a los alumnos a compartir los significados, como un equipo deportivo comparte su actividad de entrenamiento. De esta forma, los significados propios del conocimiento presentan la posibilidad de ser intercambiados, e incluso negociados, con otros compañeros, con el fin de conseguir la construcción de un mapa conceptual consensuado por todos, en el que se plasmen los conceptos más significativos de cada alumno, previamente negociado.

2.1.2.2.8 LOS MAPAS CONCEPTUALES EN LOS ELEMENTOS DE LA METODOLOGÍA PARTICIPATIVA.

Los mapas conceptuales están estrechamente relacionados con la metodología participativa, porque ambos términos adquieren su máximo sentido en el marco del aprendizaje significativo, cognitivo experiencial, ya que parte del mismo individuo

Permite el desarrollo de actitudes de compromiso personal con el trabajo y anima a la relación con los demás, en un proceso que ayuda a los alumnos en la participación activa y creativa de su propia cultura.

Al final de la sesión, será el propio alumno quien tendrá que reflexionar sobre las consecuencias positivas o negativas de su trabajo, en cuanto al significado que ha supuesto la experiencia de aprendizaje.

Es un aprendizaje significativo, por lo tanto participativo, porque para desarrollar todas las posibilidades del alumno confluyen en él las dos características que definen la participación según Ontoria y Molina, [18; 137]:

1. El compromiso, la responsabilidad con el propio trabajo del que depende el funcionamiento del grupo en el que se está implicado

- 2 La cooperación, que incide en el proceso social del aprendizaje, por el que el alumno experimenta, a través del trabajo en grupo, lo enriquecedor que puede ser para él, el contacto y la comunicación con sus compañeros, el estar comprometidos en una tarea común

El conocimiento es público y compartido, es la tónica que marca la interrelación entre los mapas conceptuales y la metodología participativa, en ese sentido Novak y Gowin, señalan:

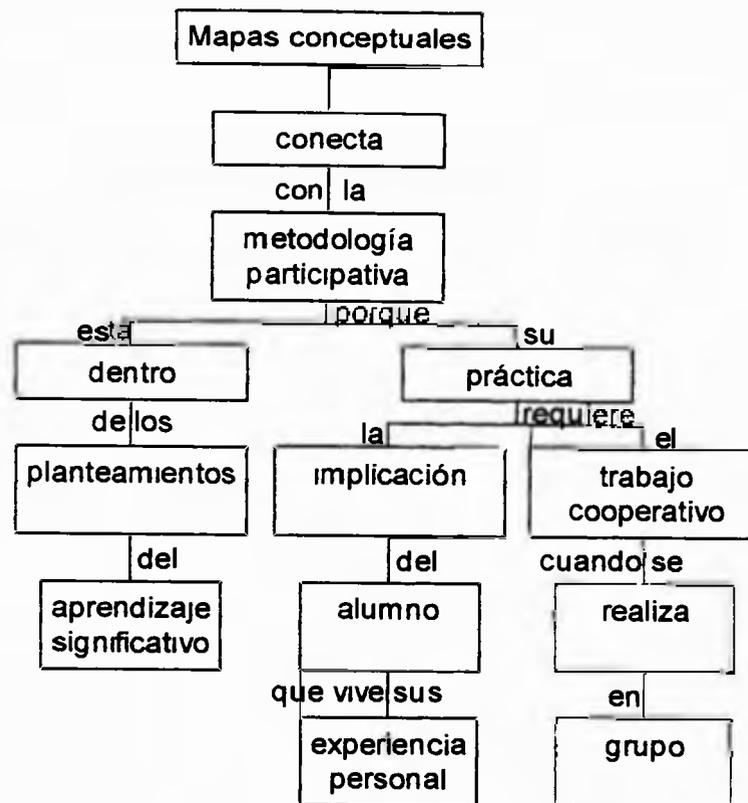
“ los mapas conceptuales ayudan a los estudiantes a entender su papel como alumnos; también clarifican el papel del profesor y crean en el aprendizaje un clima de respeto mutuo. Los mapas conceptuales pueden fomentar la cooperación entre el estudiante y el profesor (o entre el alumno y la escuela) en un combate donde el monstruo que hay que vencer es la falta de significatividad de la información y la victoria consiste en llegar a compartir significados”

En el contexto de esta metodología participativa, el perfil del docente debe ser eminentemente cooperativo, democrático centrado en el alumno o en el grupo. Lo que implica que el docente en la tarea de construcción de un mapa conceptual, debe aparecer como un buen recurso de información para

los alumnos, al cual pueden acudir y con el que han de cooperar en la búsqueda de nuevos elementos que enriquezcan sus vivencias tanto individual como de trabajo en grupo. Además de proporcionarles a los alumnos contenidos culturales propios de la asignatura, el docente debe proporcionarles contenidos de tipo procedimental, los cuales pueden ayudar a los estudiantes a disponer de medios más eficaces, susceptibles de ser aplicados en otros ámbitos de su desarrollo cognitivo.

El utilizar contenidos procedimentales hace que, con la práctica, el alumno participe en forma activa en su propio aprendizaje, sintiéndose más libre y creativo, hace que aprenda a aprender.

Así pues, los mapas conceptuales son un excelente recurso para ayudar a los alumnos a participar en la construcción de su propio aprendizaje y para compartir con otros compañeros los nuevos conocimientos adquiridos. Se convierte a sí misma en una experiencia participativa de alto valor educativo



Mapa 2 8

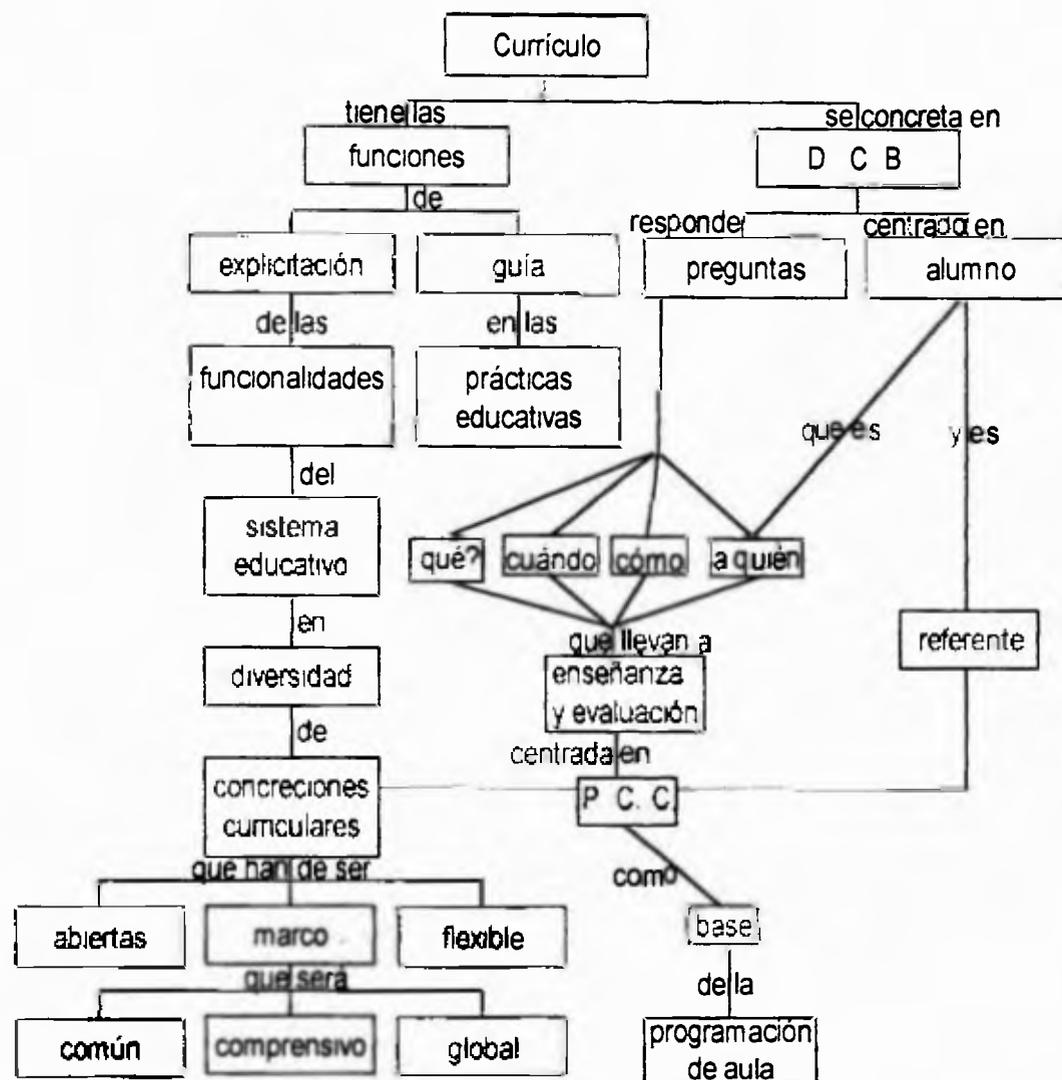
2.1.2.2.2.9 LOS MAPAS CONCEPTUALES Y LA UNIDAD DIDÁCTICA

Los mapas conceptuales pueden ser utilizados para organizar el currículum, a través del cual se pueda obtener una visión panorámica de todos los elementos que lo componen, el cual debe comprender un diseño

curricular básico (D. C. B.), que trate de responder a las preguntas qué enseñar?, cómo enseñar?, cuándo enseñar?, qué?, cómo? y cuándo evaluar?; que debe tener en cuenta el sistema de valores sociales, los criterios metodológicos y las necesidades de cada región y debe ser diseñado por un equipo de docentes de cada centro

Partiendo de este proyecto curricular, llegamos a la programación, que es el conjunto de unidades didácticas ordenadas y secuenciadas, donde se concretiza el currículo, es decir, se concretiza los contenidos, objetivos, actividades de enseñanza – aprendizaje y actividades de evaluación.

Las unidades didácticas deben responder a los procesos de pensamiento prioritarios, a las capacidades que se van a desarrollar, los valores a fomentar y los diseños metodológicos a implementarse.



Mapa 2.9

Dentro del proyecto curricular se encuentra la programación que es el conjunto de unidades didácticas ordenadas y secuenciadas para las áreas de cada ciclo educativo.

Estas unidades son unidades de trabajo relativas a un proceso de enseñanza – aprendizaje, articulado y completo, lo cual supone la concreción de los contenidos, objetivos, actividades de enseñanza – aprendizaje, actividades de evaluación y la contemplación de adaptaciones curriculares para asegurar la individualización en aquellos alumnos que necesiten ayuda pedagógica a causa de sus intereses, motivaciones o discapacidades

Los componentes básicos de la unidad didáctica son los contenidos, las estrategias metodológicas y la evaluación. Los contenidos son los medios a través de los cuales se pretende alcanzar los objetivos o intencionalidades educativas. Estos contenidos se trabajan a través de las actividades propuestas, manejando los recursos con que se cuenten y siguiendo una determinada estrategia metodológica.

Las estrategias metodológicas son el uso concreto que se hace de las metodologías, de los procedimientos y de las estrategias y técnicas de trabajo como medio para la construcción activa de los aprendizajes. Implican, generalmente, procesos de organización cognitiva, proceso de organización personal y grupal (estudio independiente, trabajos grupales), y diferentes tipos de procesos de interacciones sociales.

La evaluación es un proceso de investigación para orientar y mejorar la práctica docente, es por tanto un sistema de valoración para la intervención educativa y la toma de decisiones. Por lo que debe evaluarse los objetivos,

los contenidos, las actividades, metodología, recursos, profesorado, alumnado y el sistema educativo mismo.

Los mapas conceptuales son un procedimiento cognitivo especial, para relacionar los conceptos claves que aparecen en una unidad didáctica, ya que permiten organizar y estructurar jerárquicamente sus contenidos conceptuales, de tal manera que sea de gran utilidad para el alumnado y el profesorado.

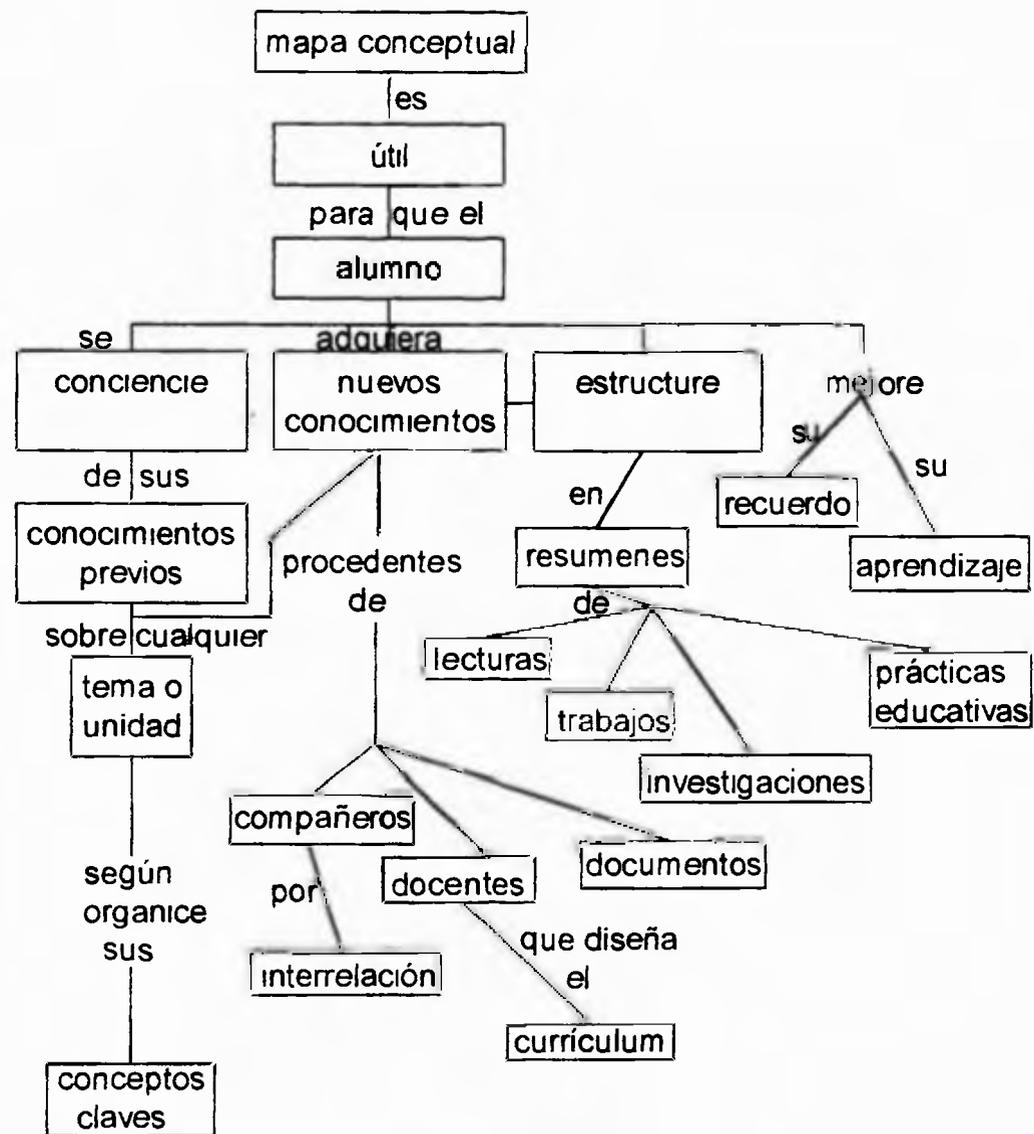
Uso de los mapas conceptuales para el profesorado:

- 1 Como organizador previo de los contenidos. Sirve de canal de comunicación entre el profesor y el alumno dentro de una estructura visual organizada. También facilita la asimilación de los nuevos contenidos por parte del alumno, ya que éste se puede apoyar en los mapas conceptuales para una mejor clarificación de los contenidos.
2. Como diagnóstico previo. Sirve para determinar el grado de organización de los conocimientos del alumno.

Uso de los mapas conceptuales por los alumnos.

- 1 Para tomar conciencia Debe estructurar sus conocimientos previos de un determinado tema o unidad, antes de iniciar las actividades del proceso enseñanza – aprendizaje, mediante mapas conceptuales
- 2 Para estructurar la nueva información Es el uso más general que el alumno realiza del mapa conceptual; debe facilitar una mejor integración de los nuevos conocimientos con la consiguiente mejora del recuerdo de los contenidos y a la vez desarrollar una serie de actitudes de respeto hacia las opiniones ajenas, de tolerancia, de conciencia de logros compartidos y de convivencia en general
3. Como resumen Como esquema visual de contenido mejora la comprensión, así como el conocimiento estructurado y profundo de lecturas, trabajos, prácticas educativas, proyectos o cualquier tipo de investigación tanto propia como ajena. Y si el mapa es confeccionado por el propio alumno; la comprensión, al menos hasta el nivel de estructuración a que haya llegado, queda asegurada. En cambio si el mapa es confeccionado por el docente, existe el peligro de que el alumno lo memorice mecánicamente por estimarlo perfecto, sin haber llegado a una correcta asimilación comprensiva de los contenidos.

4 Para mejorar el recuerdo Facilita la persistencia del recuerdo



Mapa 2.10

2.1.2.2.2.10 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO TÉCNICA DE EVALUACIÓN

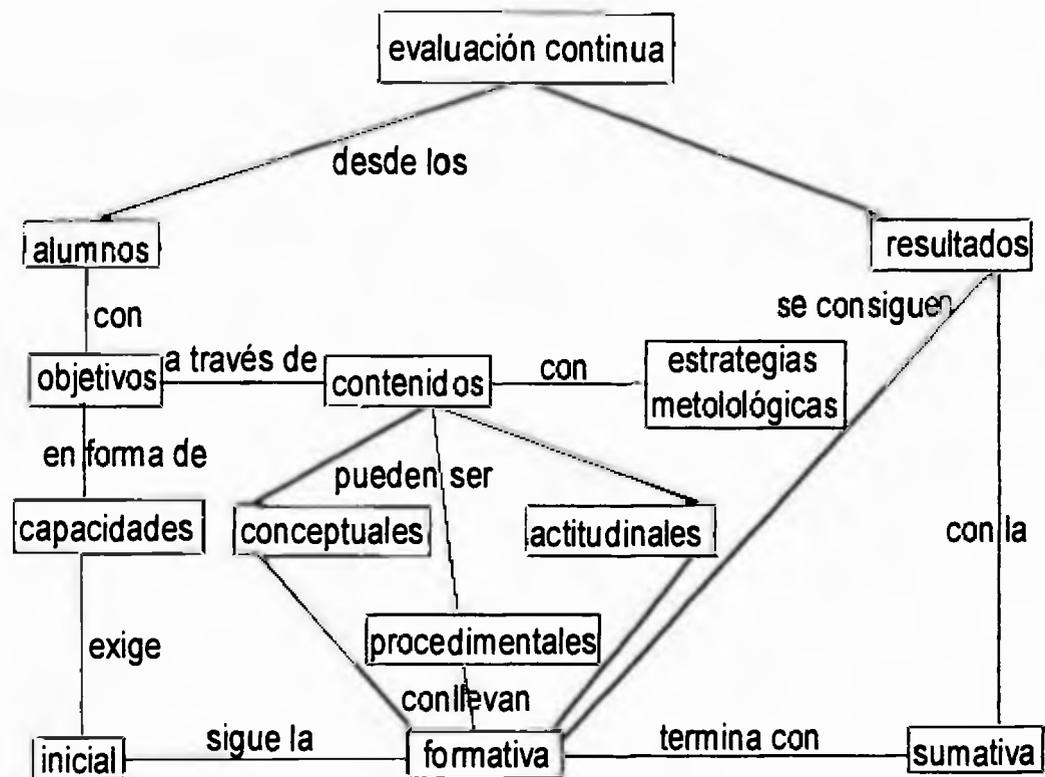
La evaluación es una parte integrante de todo modelo educativo que se refleja en el proceso de enseñanza – aprendizaje; es un proceso cualitativo y explicativo que facilita la comprensión de todos los procesos seguidos en el desarrollo curricular, y es una actividad primordialmente valorativa e investigadora, a través de la cual se toman decisiones que contribuyen a regular el proceso educativo. De ahí que el proceso evaluador no tenga un carácter puntual, sino procesual y continuo, en el que debemos utilizar instrumentos o técnicas de evaluación amplias que concuerden con los propósitos educativos para así asegurar una enseñanza de calidad con controles de calidad

Para Ausubel, evaluar es “hacer un juicio de valor o mérito para apreciar los resultados educativos en términos de si están satisfaciendo o no un conjunto específico de metas educativas”. Y la función de la evaluación consiste en: “determinar el grado en que objetivos de importancia educativa, está siendo alcanzados en realidad”

Dentro de la unidad didáctica, la evaluación debe valorar el proceso enseñanza – aprendizaje, el cual comprende la recopilación de la información sobre el desarrollo del trabajo en el aula; significa esto que debe considerar la

totalidad de los componentes que intervienen en el proceso educativo (contenidos, estrategias didácticas, actividades, secuenciación, temporización, etc) y la singularidad de cada alumno con su ritmo y estilo de aprendizaje, a través de los tres momentos de la evaluación, la diagnóstica, formativa y la reflexión final, que llamamos evaluación sumativa, para posteriormente tomar la decisión.

Es decir, es importante que el alumno vea las relaciones que existen entre los grupos de conceptos, de un mapa hecho previamente al comenzar un tema de estudio, y en otro realizado al terminar la explicación, pues, con ello se valora los conocimientos previos, se clarifica con lo estudiado y se aportan nuevos datos del aprendizaje; se descubren las percepciones equivocadas o las que estuvieran desplazadas en su posición jerárquica.



Mapa 2.11

3. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

3.1 LA PRUEBA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

La comparación de la efectividad entre la técnica conductista expositiva – dialogada y la constructivista mapas conceptuales, está fundamentada en los resultados de la prueba que se aplicó al grupo experimental y el grupo control, como fase terminal del proceso enseñanza – aprendizaje de la unidad Los Poliedros

El objetivo particular a lograr en esta unidad de aprendizaje, es el siguiente: examinar las propiedades de los poliedros.

Los objetivos de aprendizaje indispensables para el logro del objetivo particular son.

1. Mencionar el concepto de los poliedros más usuales
2. Calcular el área lateral y total de cualquier prisma.
3. Calcular el volumen de cualquier prisma
4. Demostrar las propiedades más importantes de los poliedros
5. Resolver problemas de aplicación sobre áreas y volúmenes de prismas.
6. Calcular el área lateral y total de cualquier pirámide.
7. Calcular el volumen de cualquier pirámide
8. Calcular el volumen de tronco de pirámide

La prueba estuvo conformada por 10 ítems, los cuales estuvieron basados en los objetivos de aprendizaje seleccionados de la unidad los Poliedros, la prueba fue la siguiente.

República de Panamá

Universidad de Panamá

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología

Centro Regional de Veraguas

Escuela de Matemática

Prueba de Matemática 112 b.

Nombre _____ Cédula: _____ Fecha: _____ Puntos: ____ Cal

Instrucción: Estimado estudiante, te agradezco tu cooperación, espero que tu estadía en este laboratorio lo hayas utilizado para beneficio propio.

Resuelva los siguientes problemas:

1. Escriba en forma concisa las definiciones de los siguientes poliedros:
 - a. Prisma
 - b. Paralelepípedo
 - c. Pirámide
2. Calcúlese el área total y el volumen de un prisma recto de 5.28m de largo, donde la base es un rombo de 4.5m de lado, y uno de sus ángulos mide 45° .
3. Calcúlese el área total y el volumen de un prisma hexagonal recto de arista 12.5cm, y de lado de la base $3\sqrt{3}$ cm

- 4 Las caras de un triedro de un paralelepípedo son todas de 30° y las aristas son de 4, 3.5 y 2.7cm, respectivamente, calcúlese el área total y el volumen del paralelepípedo
- 5 Demuestre que los ángulos triedros opuestos que se encuentran en los cantos de las diagonales de un paralelepípedo son congruentes
- 6 Demuestre que las secciones transversales de cualquier prisma tienen igual área
- 7 Las dimensiones interiores de una caja de hierro son de 18, 10 y 8cm, el espesor de las paredes y tapa es de 4.5mm, suponga que se llena de agua, calcule su peso:
 - a vacío
 - b lleno
- 8 Calcule el área total y el volumen de una pirámide regular triangular en que sus aristas miden 8cm y la apotema de la base mide $4\sqrt{3}$ cm
- 9 Halle una expresión para el lado l y el volumen V de una pirámide regular que tiene por base un cuadrado, área total A y altura h
- 10 Si una pirámide de 15cm de altura y 325cm^2 de base se corta por un plano paralelo a la base a 9cm del vértice, cuál es el volumen del tronco así obtenido?

3.2 DATOS RECOLECTADOS:

3.2.1 ÍTEMS EVALUADOS

Los resultados de los ítems evaluados se presentan en la siguiente tabla:

Item	Grupo control		Grupo experimental	
	Aprobado	Reprobado	Aprobado	Reprobado
1	6		5	
2	5	1	3	2
3	4	2	5	
4		6	3	2
5	1	5	2	3
6		6	3	2
7		6	3	2
8		6	1	4
9		6	4	1
10	2	4	4	1

Tabla 3 1

3.2.2 DOMINIO DE OBJETIVOS

El resultado de dominio de objetivos se presenta en la siguiente tabla

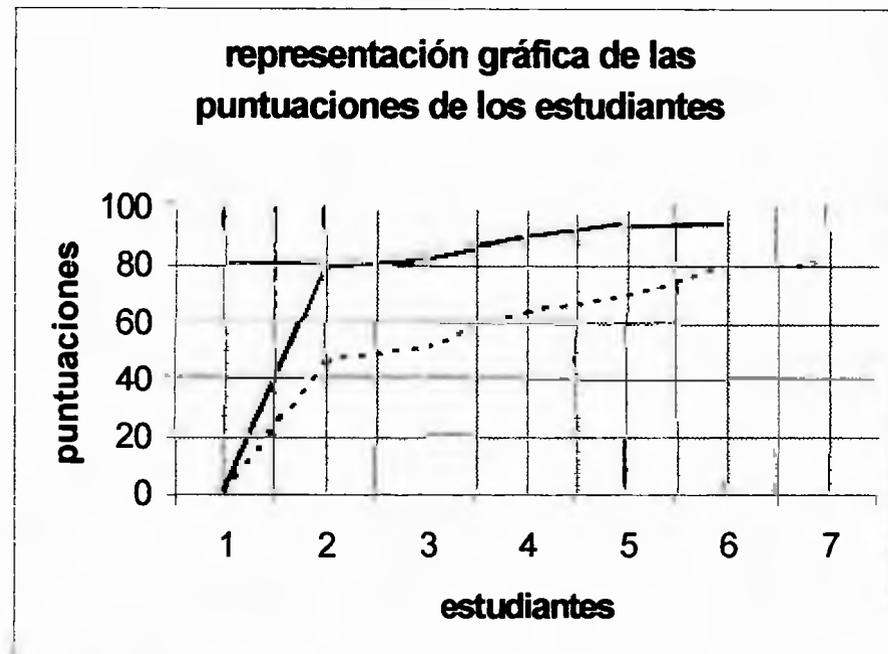
Objetivo	Grupo control		Grupo experimental	
	Aprobado	Reprobado	Aprobado	Reprobado
1	6		5	
2	5	1	4	1
3	4	2	4	1
4		6	3	2
5		6	4	1
6		6	4	1
7		6	4	1
8	2	4	4	1

Tabla 3 2

3.2.3 GRÁFICA DE DATOS RECOLECTADOS

Los resultados de la prueba para cada grupo es el siguiente

grupo control	grupo experimental
46.6	78.8
52.2	82.2
64.4	88.8
70	93.3
78.8	94.4
81.1	



Leyenda — grupo experimental

----- grupo control

3.3 PRUEBA DE HIPÓTESIS

Resultado de la prueba de hipótesis.

Los resultados obtenidos, por ambos grupos de estudiantes, en la prueba se refleja en el siguiente cuadro:

Grupo control, # 1	Grupo experimental # 2
46.6	78.8
52.2	82.2
64.4	88.8
70	93.3
78.8	94.4
81.1	

Tabla 3.3

El análisis fue realizado mediante el estadístico "t", ya que las muestras fueron menores que 30 en ambos grupos, generando el siguiente resultado

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum(x_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{393.1}{6} = 65.51\bar{6}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - 65.51\bar{6})^2}{5} = \frac{975.808\bar{3}}{5} = 195.161\bar{6}$$

$$S_1 = 13.97$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{437.5}{5} = 87.5$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - 87.5)^2}{4} = \frac{186.72}{4} = 46.68$$

$$S_2 = 6.8322$$

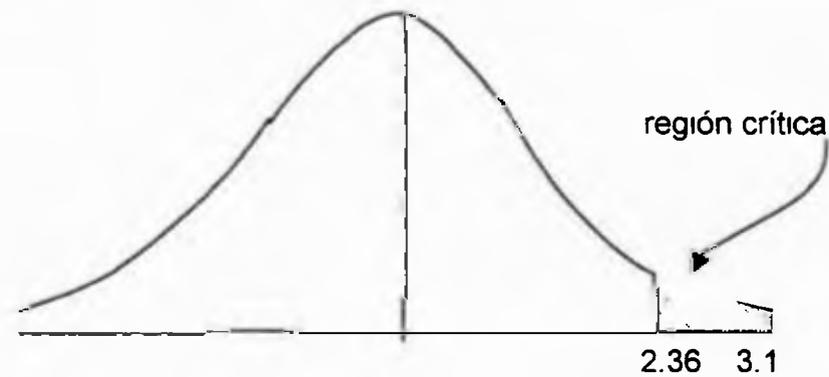
H_0 = La media del resultado de las puntuaciones de los estudiantes del grupo experimental, es igual a la media del resultado de las puntuaciones del grupo control

$$H_0 = \mu_2 - \mu_1 = 0$$

H_1 = la media del resultado de las puntuaciones de los estudiantes del grupo experimental, es mayor que la media del resultado de las puntuaciones del grupo control

$$H_1 = \mu_2 - \mu_1 > 0$$

Nivel de significancia, $\alpha = 0.05$



Región crítica $t > 2.365$

"t" calculado:

$$t_c = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}}$$

$$\text{donde } S_p = \sqrt{\frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{195.1616(5) + 46.68(4)}{6 + 5 - 2}}$$

$$S_p = 11.36528991$$

$$t_c = \frac{(87.5 - 65.51\bar{6}) - 0}{S_p \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}}}$$

$$t_c = 3.194311843$$

como $t_c > 2.365$, rechazamos nuestra hipótesis nula y aprobamos nuestra hipótesis de investigación de que la media del resultado de las puntuaciones de los estudiantes del grupo experimental es mayor que la media del resultado de las puntuaciones de los estudiantes del grupo control.

CONCLUSIONES

- 1 La mejor manera de aprender es aquella basada en los principios del aprendizaje significativo, donde el alumno construye la realidad atribuyéndole significados, es decir, creyendo que el alumno es el verdadero protagonista de su propio aprendizaje
- 2 Nadie, ni siquiera los científicos, perciben los hechos directamente, sino mediante los filtros conceptuales que les imponen sus propias ideas; y, menos que nadie, los alumnos o aprendices.
3. Es importante en la construcción del conocimiento, la creación de redes de conexiones entre trozos de conocimientos, conceptos, fórmulas, principios y proposiciones, ya que estos elementos sólo adquieren significado cuando están relacionados con otros.
- 4 El punto clave del constructivismo no está tanto en el resultado del aprendizaje, sino en el proceso de adquisición del conocimiento; pues estudios psicológicos muestran que no es importante realizar una actividad mecánica, sino comprender los procesos realizados en esa acción
- 5 La enseñanza debe basarse en los conocimientos previos de las ideas con que los alumnos llegan a un aula de clases, ya que no se trata de

suprimir, sustituir o hacer que el alumno abandone sus propias ideas, sino de que a partir de ellas se desarrollen nuevas concepciones, más próximas a las científicamente aceptadas.

6. El factor aislado más importante que influye en el aprendizaje es aquel que el alumno ya sabe, por lo que el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se relaciona en conceptos preexistentes en la estructura cognitiva, se adecua, los transforma y funciona como punto de anclaje de los posteriores.
7. El material de aprendizaje organizado por el docente para su labor didáctica, debe estar organizado de una manera no arbitraria y no literal, para que influya y facilite el aprendizaje significativo.
8. Las estrategias didácticas de investigación serán más útiles, cuando el objetivo prioritario sean los procedimientos; mientras que las exposiciones serán, en muchos casos necesarias, aunque no suficientes, cuando se trate del aprendizaje de conceptos.

RECOMENDACIONES

- 1 Diseñar programas educativos que contengan contenidos potencialmente significativos y funcionales, que proporcionen a los alumnos la base necesaria, para comprender cómo y por qué se relacionan la información nueva con la otra preexistente, ya que la verdadera educación cambia el significado de la experiencia humana
- 2 Diseñar situaciones didácticas que utilicen técnicas de aprendizaje constructivista, que permitan a los alumnos construir su propio conocimiento, donde ellos reflexionen sobre sus propias ideas y tomen conciencia de ellas; la técnica Mapas Conceptuales es una alternativa.
- 3 Motivar a los alumnos a adoptar alta disposición para relacionar la nueva información a su estructura cognitiva, ya que se logra un aprendizaje significativo al hacerse ellos mismos responsables de que así sea y al tomar parte activa en él, enjuiciando la validez de lo que se afirma, porque de esa forma desarrolla el razonamiento
- 4 La adopción de una teoría explícita y avanzada, que esté inmersa en un currículum vertical coherente, interesada en comprender el proceso de adquisición del conocimiento, y que promueva la investigación, es mas imprescindible para el desarrollo integral de los individuos.

- 5 Que el docente realice una labor exigente, desde ayudar individualmente a los alumnos, graduar la dificultad de los contenidos o generar un ambiente de cooperación, hasta convertirse en investigador de su propia práctica, pues es lógico que no sólo a los alumnos se les exija un aprendizaje constructivo, sino que éste alcance también a los propios docentes

- 6 Que los programas educativos proporcionen a los alumnos la base necesaria para comprender cómo y por qué se relacionan los nuevos conocimientos con los conocidos y transmitirles la seguridad de que son capaces de utilizarlos en contextos diferentes.

- 7 Que el docente organice el material de manera no arbitraria y no literal, que desarrolle una estructura cognitiva capaz de influir y facilitar un aprendizaje subsecuente, donde la nueva información se incorpore a la estructura cognitiva de manera no literal, no arbitraria

- 8 Mostrar a los alumnos cómo aprender a aprender; estimulando la honestidad intelectual, ya que nadie lo sabe todo y todos tienen que participar en el entendimiento de un conocimiento que nunca es confirmable, lo que desemboca en un nuevo sentido de responsabilidad compartida dentro del aula.

- 9 Recomendar la técnica de aprendizaje Mapas Conceptuales, como una alternativa constructivista para la enseñanza de la Geometría en el nivel superior, ya que esta se basa en el aprendizaje significativo y permite al alumno construir su propio conocimiento, a partir de sus conceptos previos y los capacita para tomar decisiones

ANEXO

República de Panamá
Universidad de Panamá
Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología
Centro Regional de Veraguas
Escuela de Matemática
Licenciatura en Matemática

El siguiente material de información de estudio y aprendizaje, es básico para lograr los objetivos de aprendizaje del módulo 4 del programa de la asignatura Mat 112 b, que se imparte en la licenciatura en matemática, de la escuela de matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología. Está estructurado de manera tal que siempre sabrás que hacer ante cualquier situación problema que se te presente; ya que tendrás, en todo momento, esquematizado el procedimiento que tienes que seguir para resolver tu problema, además, te ayudará a tener una visual macro de tu situación problema.

Es importante que, usted estimado estudiante, vaya poco a poco dominando los objetivos de aprendizaje; basándose en las orientaciones del profesor, a la realización de las actividades de aprendizaje señaladas y la lectura y el análisis de este material de información, ya que el dominio de los mismos es importante para el desarrollo de los objetivos venideros.

El asesoramiento del profesor y el análisis y estudio de este material de información permitirá que, al final, puedas dominar el objetivo particular de

aprendizaje, el cual escribimos en los siguientes términos: **examinar las propiedades de los poliedros.**

El logro de este objetivo particular tiene como prerequisite, que usted domine los siguientes objetivos de aprendizaje

- 1 Mencionar el concepto de los poliedros más usuales.
- 2 Calcular el área lateral y total de cualquier prisma.
- 3 Calcular el volumen de cualquier prisma
4. Resolver problemas de aplicación sobre áreas y volúmenes de prismas
- 5 Demostrar las propiedades más importantes de los poliedros
- 6 Calcular el área lateral y total de cualquier pirámide.
7. Calcular el volumen de cualquier pirámide.
8. Calcular el volumen de troncos de pirámides

Para el logro y el dominio de los objetivos de aprendizaje, anteriormente descritos, debes seguir las orientaciones del profesor y realizar en forma eficaz las siguientes actividades de aprendizaje.

- 1 Lee y analiza en este material los conceptos fundamentales y los mapas conceptuales relacionados con los poliedros y sus propiedades más importantes; para que las menciones, las construyas y puedas familiarizarte con ellos.
2. Lee y analiza en este material los procedimientos típicos para calcular el área total de superficie de un prisma, así como su volumen, sus

respectivos mapas conceptuales y los problemas resueltos que te presentamos; para que puedas calcularlos

- 3 Lee y analiza en este material de información los procedimientos típicos para calcular el área total de superficie de una pirámide, así como su volumen, sus respectivos mapas conceptuales y los problemas resueltos que te presentamos; para que los calcules

Los Poliedros

Al estudiar la materia, la podemos dividir en tres categorías, que son sólidos, líquidos y gaseosos. Las sustancias sólidas tienen forma y volumen propio, las líquidas tienen el volumen propio, pero la forma del recipiente y las gaseosas tienen la forma y el volumen del recipiente.

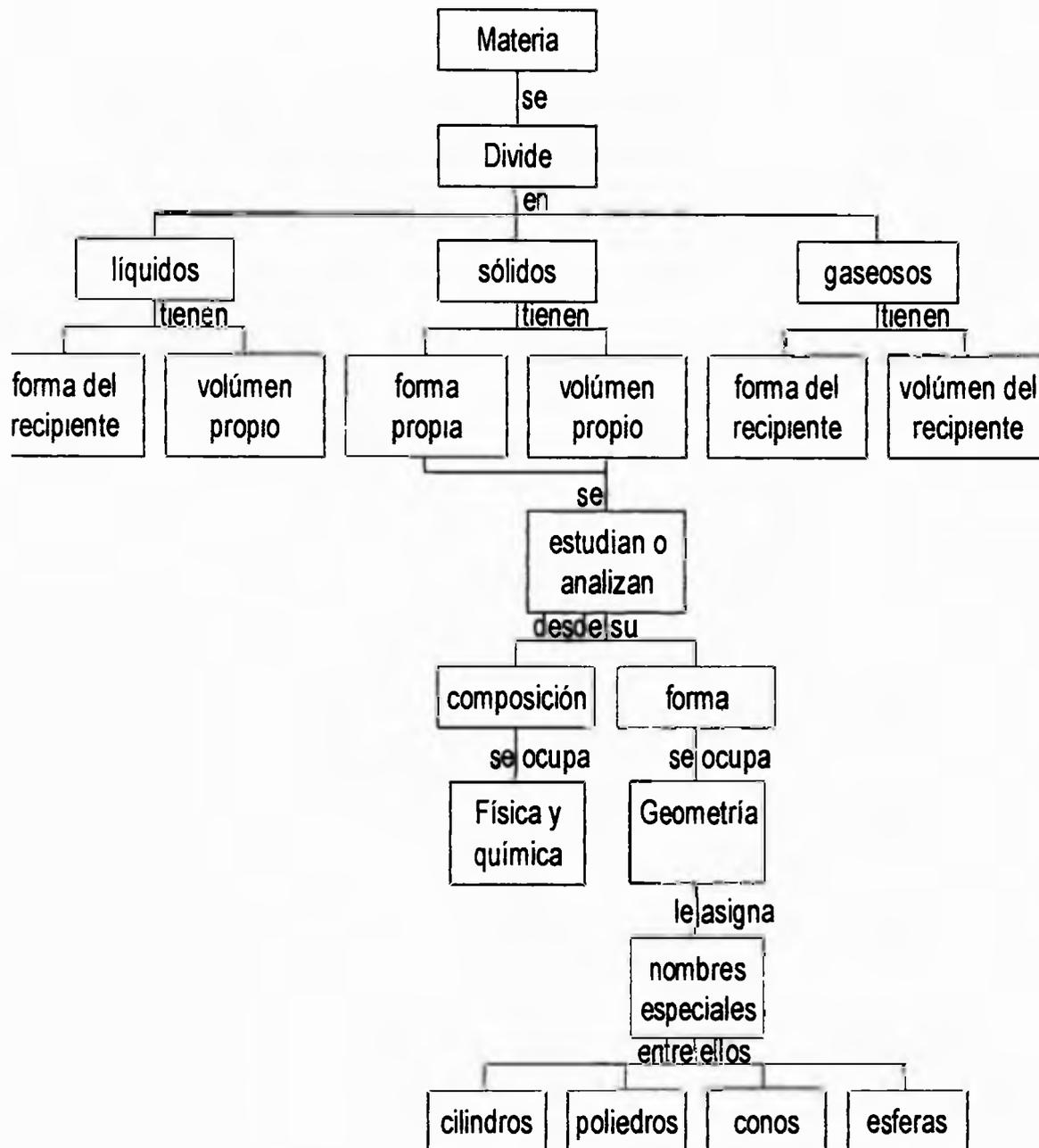
Las sustancias sólidas, nuestro objeto de estudio, se pueden estudiar desde dos puntos de vista, que son desde su composición interna y desde su forma. De la primera se encarga la Física y la Química, y el estudio de la forma, sin importar el color, peso u otras propiedades del sólido, se encarga la Geometría, quien la considera vacía sin material alguno y su forma no varía, si el objeto está en movimiento o no.

Éstos objetos sólidos que existen tienen forma muy variadas, ya que pueden ser productos de la naturaleza misma, o resultados de fabricación artificial del mismo hombre. Algunos ejemplos:



La Geometría se encarga de asignarles, a estos objetos, sus respectivos nombres especiales, y así aparecen los poliedros, los cilindros, conos, esferas, etc.

Para un mejor afianzamiento, presentamos el siguiente mapa conceptual

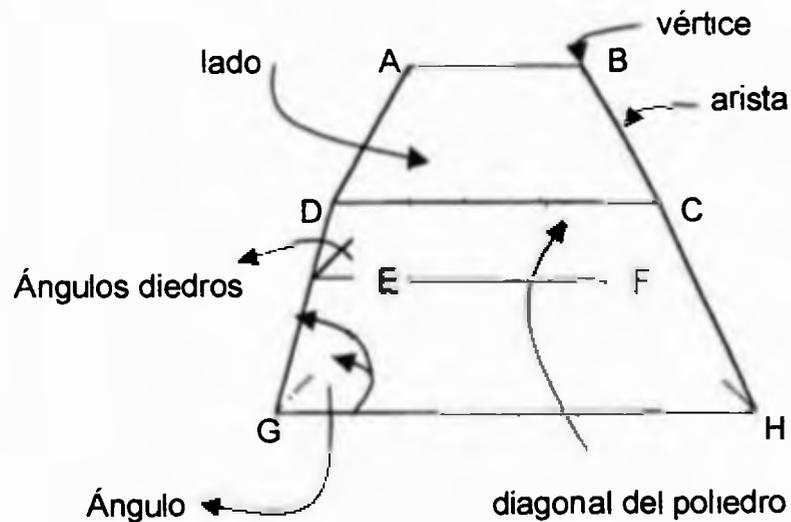


Los Poliedros son sólidos limitados por superficies planas, entre sus principales elementos distinguimos:

- 1 Los lados o caras que son los polígonos que se forman en los planos que delimitan el poliedro.

- 2 Las aristas o canto: son las intersecciones de los planos que delimitan el poliedro o los lados de las caras
- 3 Vértices Son las intersecciones de las aristas
- 4 Ángulos diedros Son los ángulos formados por dos caras del poliedro con una arista común
- 5 Ángulos: son los ángulos poliedros que se forman en los vértices
- 6 Diagonales: son los segmentos que determinan dos vértices que no están en la misma cara.

Llamamos sección de un poliedro a la intersección de sus caras con un plano que las corta.



Los poliedros los podemos clasificar de acuerdo al número de caras en.

- 1 Tetraedro, los que tienen cuatro caras
- 2 Pentaedro los que tienen cinco caras

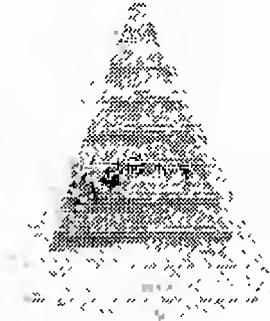
- 3 Hexaedro los que tienen seis caras
- 4 Octaedro los que tienen ocho caras
- 5 Dodecaedro los que tienen doce caras
6. Icosaedro los que tienen 20 caras



Pentaedro



Hexaedro



Octaedro

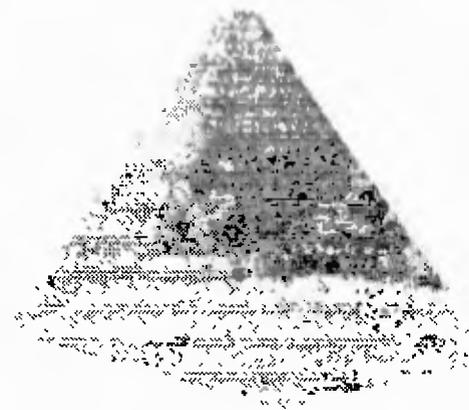
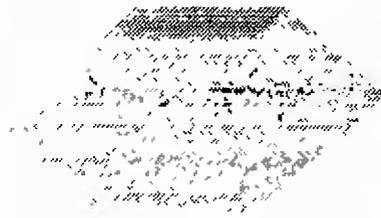
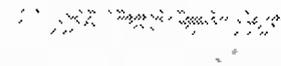


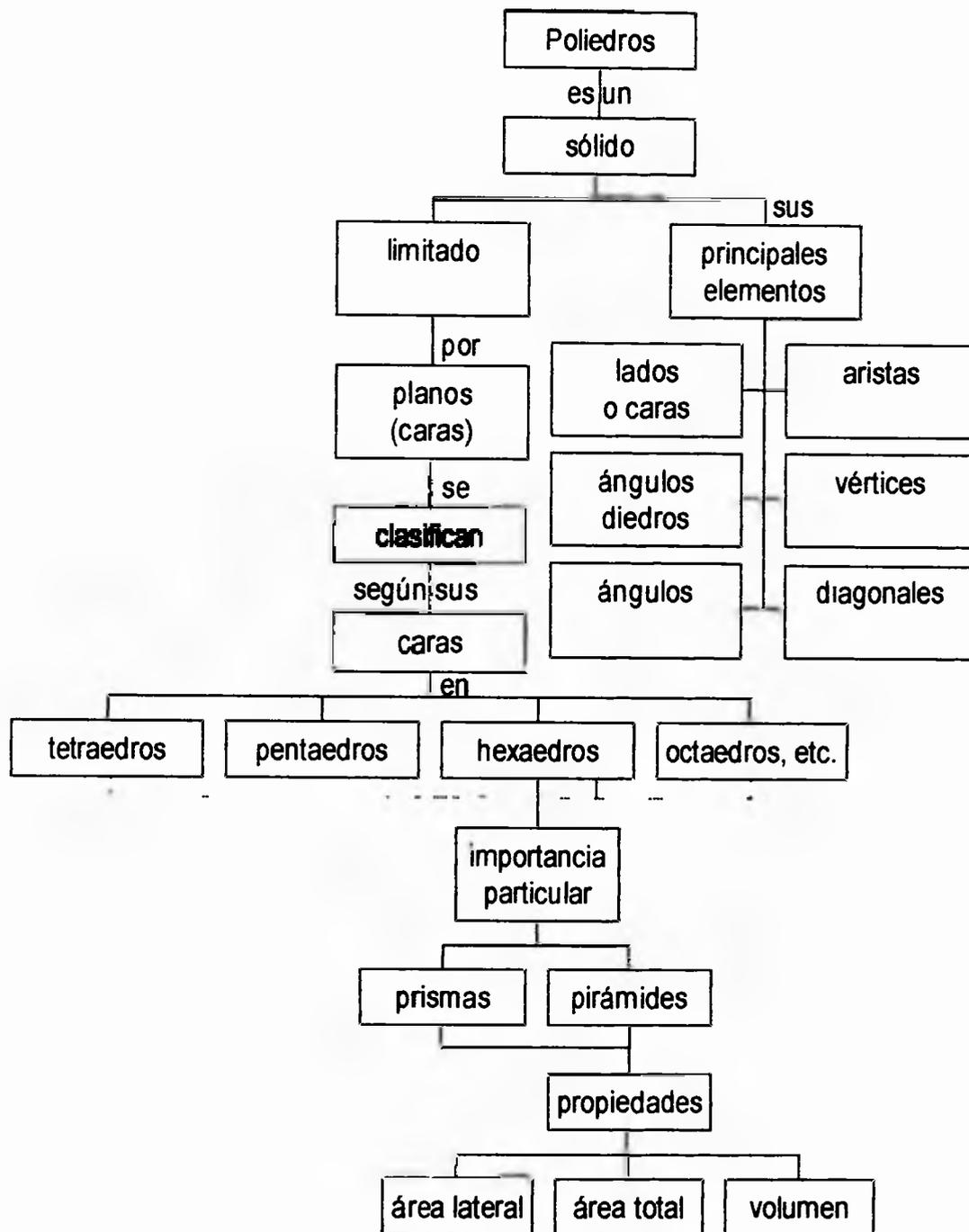
Dodecaedro



Tetraedro

Algunos poliedros son de especial interés, por las aplicaciones que tienen, por eso reciben nombres particulares, entre ellos tenemos los prismas, los paralelepípedos y las pirámides

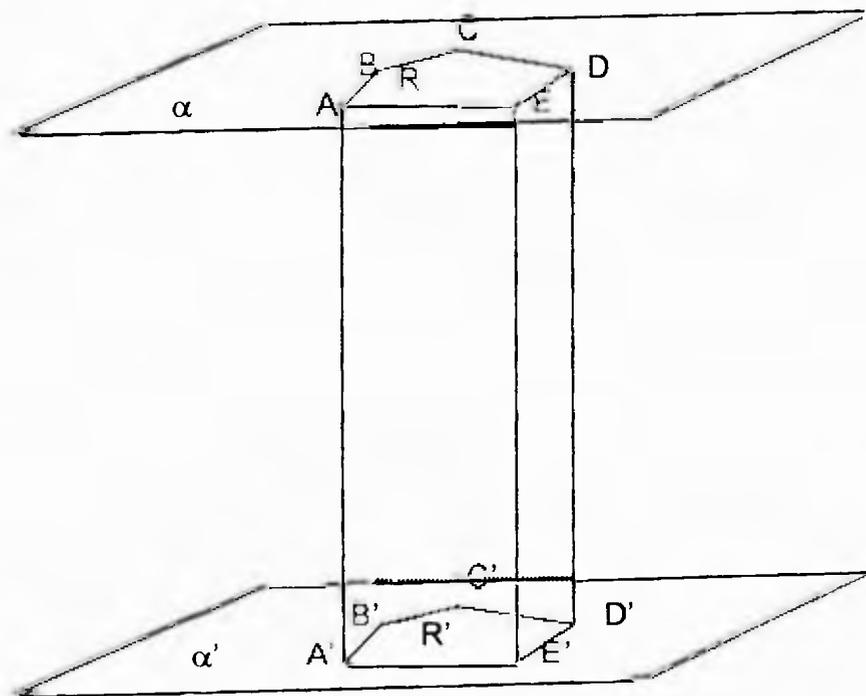




Los Prismas

Llamamos prismas a poliedros dos de cuyas caras son polígonos congruentes, y que están situados en planos paralelos y sus otras caras son paralelogramos

Las caras situadas en planos paralelos las llamamos bases del prisma, y los paralelogramos las llamamos caras laterales.



Los planos α y α' son paralelos, R y R' son los polígonos congruentes les llamamos bases del prisma.

Los cuadriláteros $\square AA'B'B$, $\square BB'C'C$, $\square CC'D'D$, $\square DD'E'E$ y $\square EE'A'A$ son los paralelogramos que son las caras laterales; y con la suma de sus áreas obtenemos el área de la superficie lateral del prisma. Y la suma de las áreas de la superficie lateral con el área de las bases se obtiene el área de la superficie total del prisma, llamado también frontera del prisma.

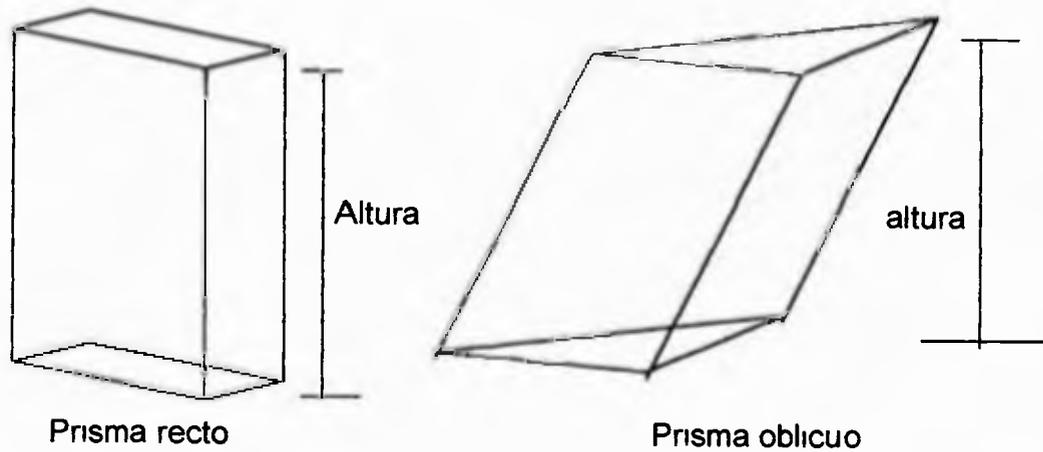
Es importante señalar que, en cuanto a los prismas, el término cara se aplica exclusivamente a las caras laterales, es decir, no incluye los polígonos congruentes.

Las intersecciones de las caras laterales, las llamamos aristas laterales. Los puntos de intersección de las aristas los llamamos vértices.

Las diagonales son los segmentos que tienen de extremos dos vértices que no están en la misma cara.

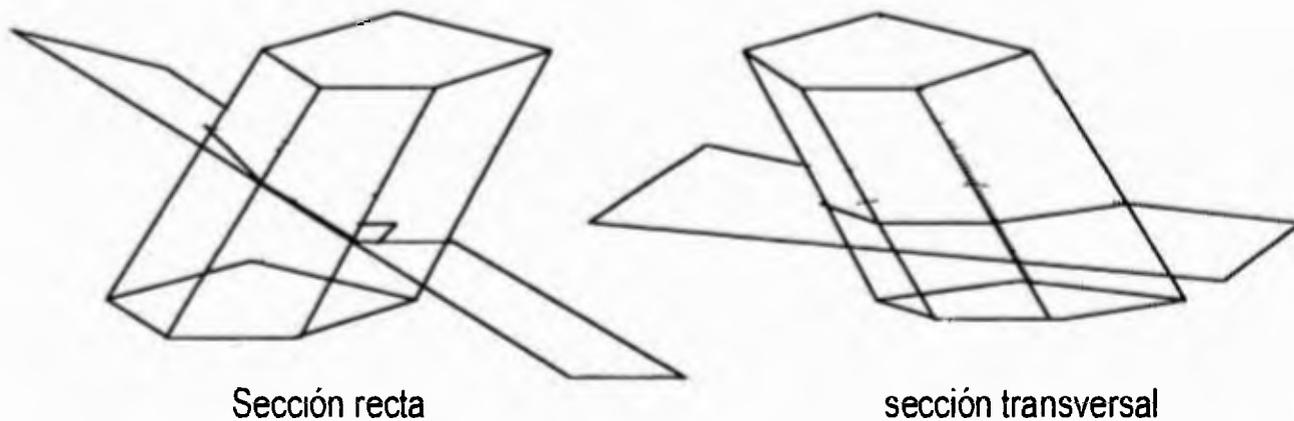
La altura de un prisma es la longitud del segmento perpendicular común a los planos de las bases comprendida entre esos planos, es decir, la distancia entre los planos de las bases.

Los prismas los podemos clasificar según el ángulo que haga la arista lateral con el plano que contiene las bases en recto y oblicuo. Será recto si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases, de lo contrario es oblicuo.

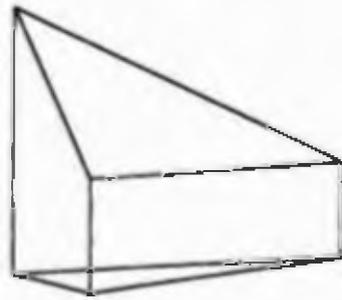


Los prismas según sus bases los podemos clasificar en triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Según que sus bases sean triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.

Llamamos sección recta de un prisma, a la sección determinada por un plano que intersecta todas las aristas y es perpendicular a ellas.



Llamamos prisma truncado la parte del prisma comprendida entre una de las bases y un plano oblicuo a las bases



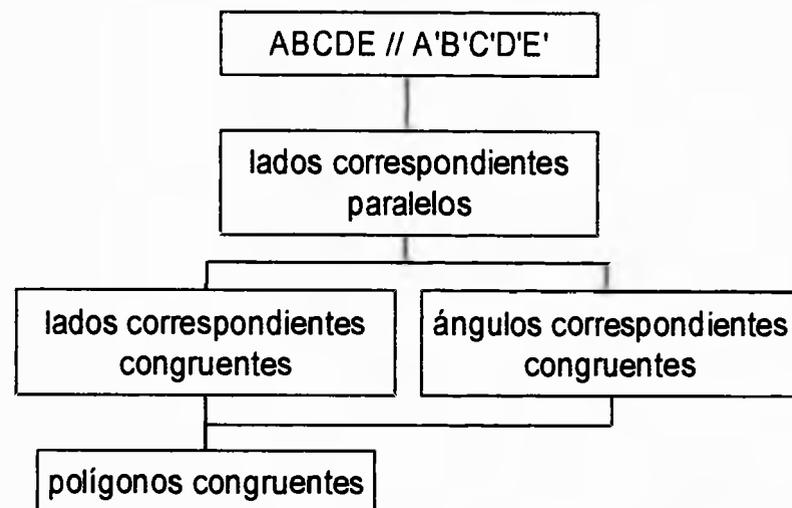
Prisma truncado

Llamamos sección transversal de un prisma a la intersección del prisma con un plano paralelo al plano de la base.

Proposición: Las secciones de un prisma determinadas por planos paralelos son polígonos congruentes.

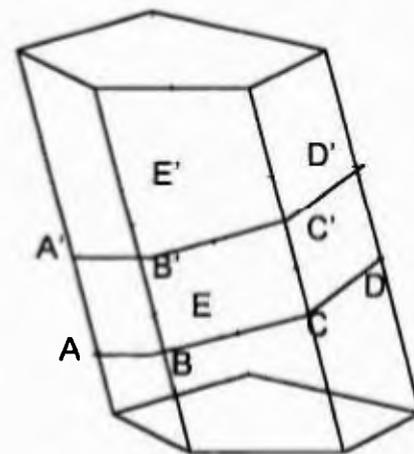
Demostración

Utiliza de ayuda el siguiente mapa de concepto



AB es paralela a A'B', y A'A es paralela a B'B, ya que es una cara del prisma, el cuadrilátero $\square A'ABB'$ es un paralelogramo, por lo tanto sus lados opuestos son congruentes, luego $AB \cong A'B'$.

Por el mismo razonamiento



de $BC \parallel B'C'$ resultan los lados $BC \cong B'C'$

de $CD \parallel C'D'$ resulta $CB \cong C'D'$

de $DE \parallel D'E'$ resulta $DE \cong D'E'$

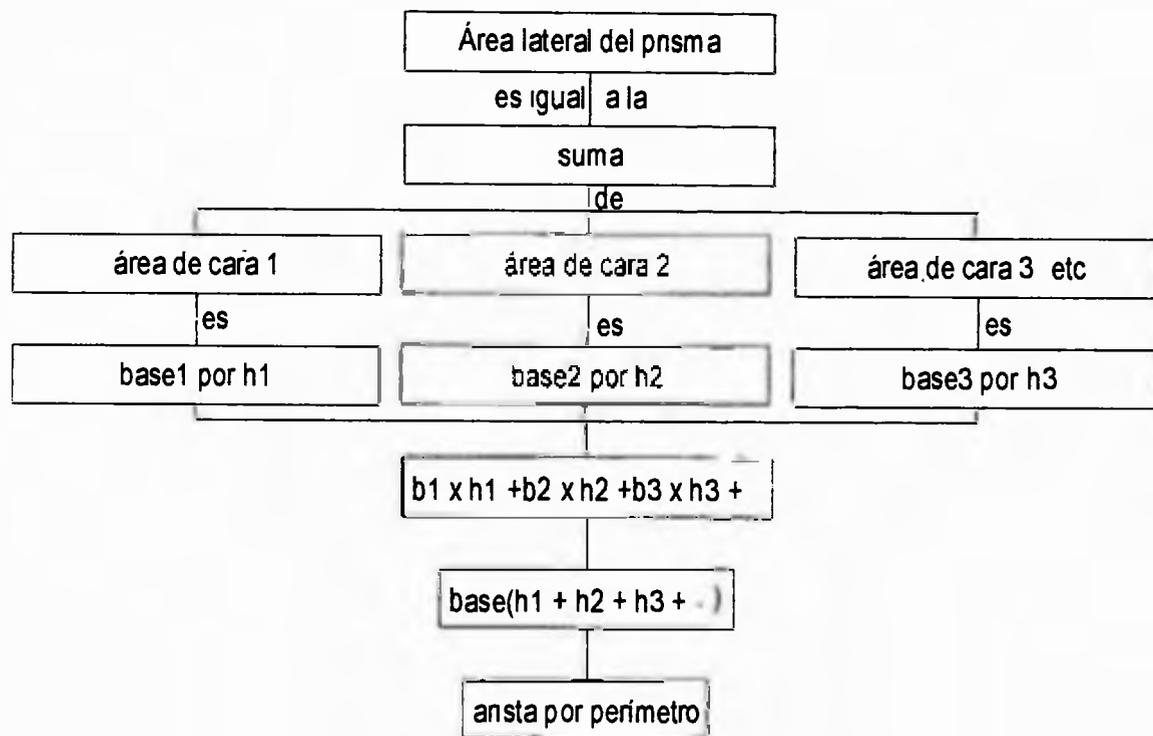
de $EA \parallel E'A'$ resulta $EA \cong E'A'$

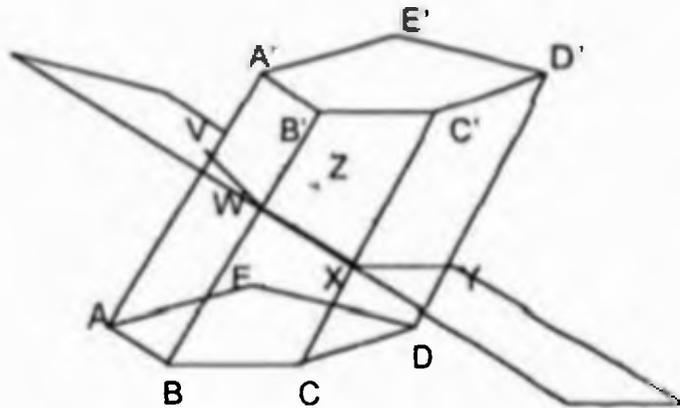
También, los ángulos respectivos pertenecen al mismo ángulo diedro, y sus lados respectivos son paralelos; por lo tanto, tienen la misma medida, lo que implica que, $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, $\angle DCB \cong \angle D'C'B'$, $\angle EDC \cong \angle E'D'C'$, $\angle AED \cong \angle A'E'D'$ y $\angle BAE \cong \angle B'A'E'$ por lo tanto los polígonos son congruentes

Proposición: El área lateral de un prisma es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de la sección recta.

Demostración

Guíate por el siguiente mapa conceptual





Sea $VWXYZ$ la sección recta de un prisma AD' ; L el área lateral, a la arista lateral, y P el perímetro de la sección recta.

Debo probar que $L = aP$

$AA' \cong BB'$, ya que el $\square AA'B'B$ es un paralelogramo, por la misma razón

$BB' \cong CC' \Rightarrow AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD' \cong EE' = a$

Como VW es perpendicular a BB' ,

entonces el área del $\square AA'B'B = BB'(VW) = a(VW)$,

como $WX \perp CC' \Rightarrow$ el área del $\square BB'C'C = CC'(WX) = a(WX)$

como $XY \perp DD' \Rightarrow$ el área del $\square CC'D'D = DD'(XY) = a(XY)$

como $YZ \perp EE' \Rightarrow$ el área del $\square DD'E'E = EE'(YZ) = a(YZ)$

como $ZV \perp AA' \Rightarrow$ el área del $\square EE'A'A = AA'(ZV) = a(ZV)$

luego $L = a(VW) + a(WX) + a(XY) + a(YZ) + a(ZV)$

$$L = a(VW + WX + XY + YZ + ZV)$$

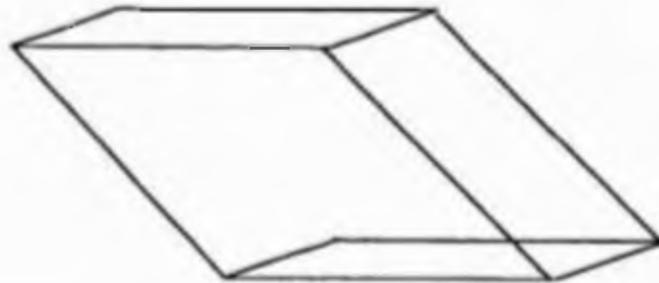
$$L = aP$$

Recuerda el
área de un
paralelogramo
es base por
altura

Usted puede demostrar el siguiente corolario

El área lateral de un prisma recto es igual al producto de la altura del prisma por el perímetro de la base

Un caso especial de prisma son los paralelepípedos que son prismas cuadrangulares que sus bases son paralelogramos



Existen paralelepípedos rectos y oblicuos.

Los paralelepípedos los llamamos rectos, si sus aristas laterales son perpendiculares a sus bases, de lo contrario los llamamos oblicuos



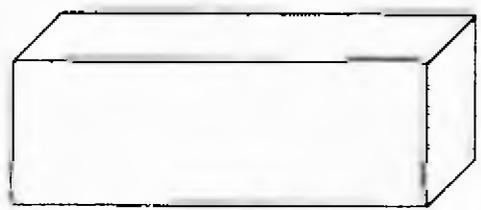
Paralelepípedo recto



Paralelepípedo oblicuo

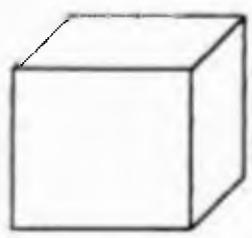
Los paralelepípedos rectos los subdividimos en paralelepípedos rectángulos y cubos

Los paralelepípedos rectángulos son los paralelepípedo recto que sus bases son rectángulos

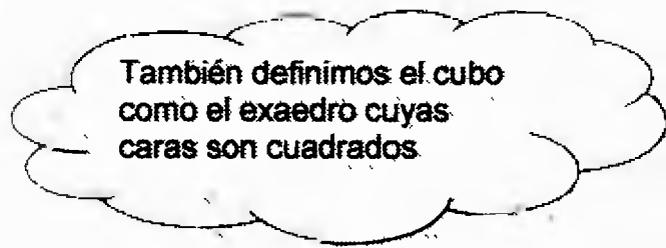


Paralelepípedo rectángulo

Cubo: Son los paralelepípedos rectángulos que sus bases y caras son cuadrados



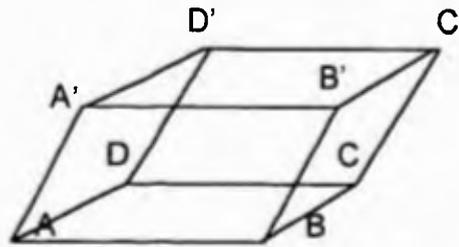
cubo



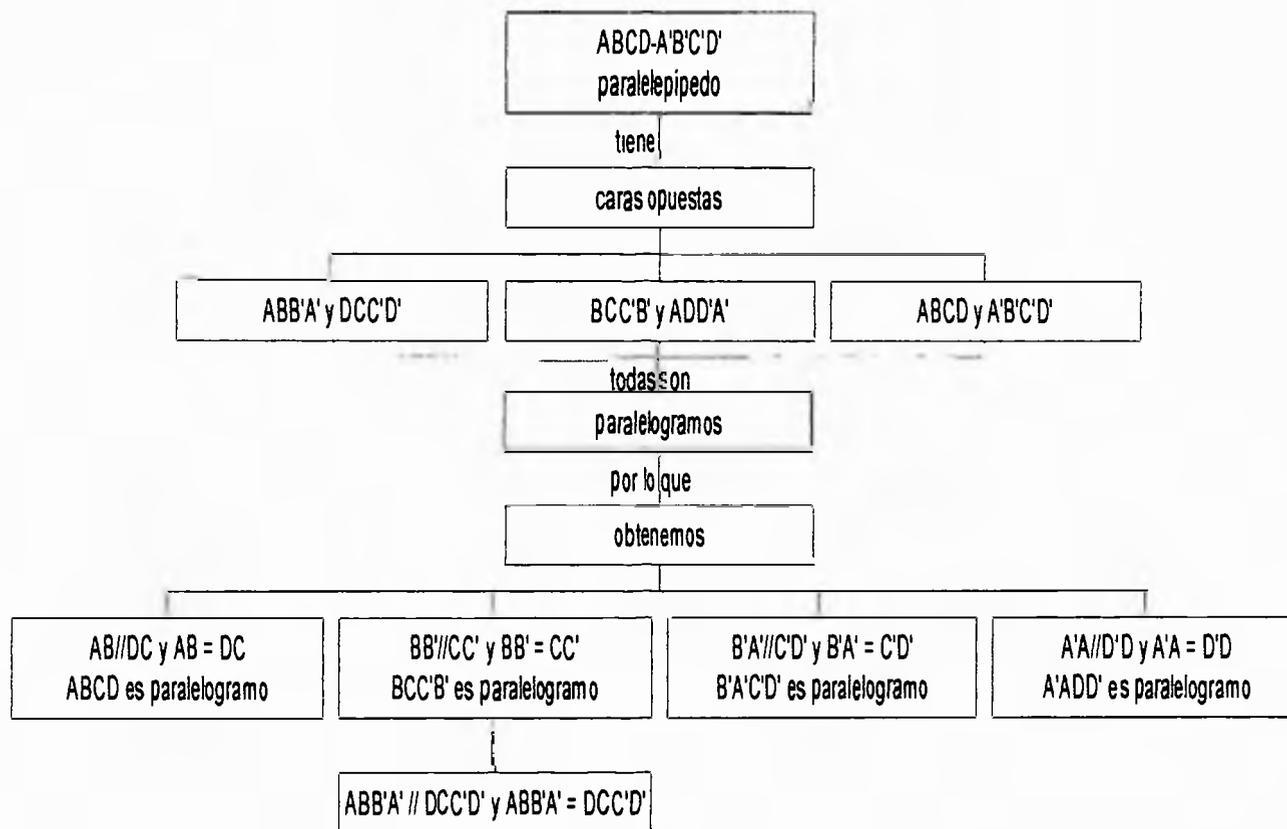
Proposición:

Las caras opuestas de un paralelepípedo son congruentes y paralelas.

Demostración



Guiáte por el siguiente mapa conceptual

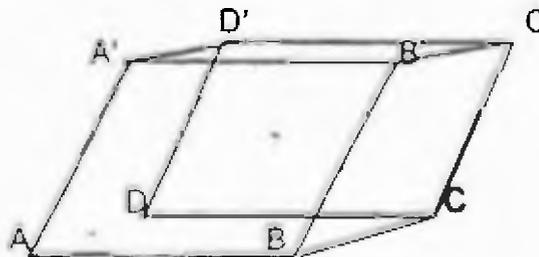


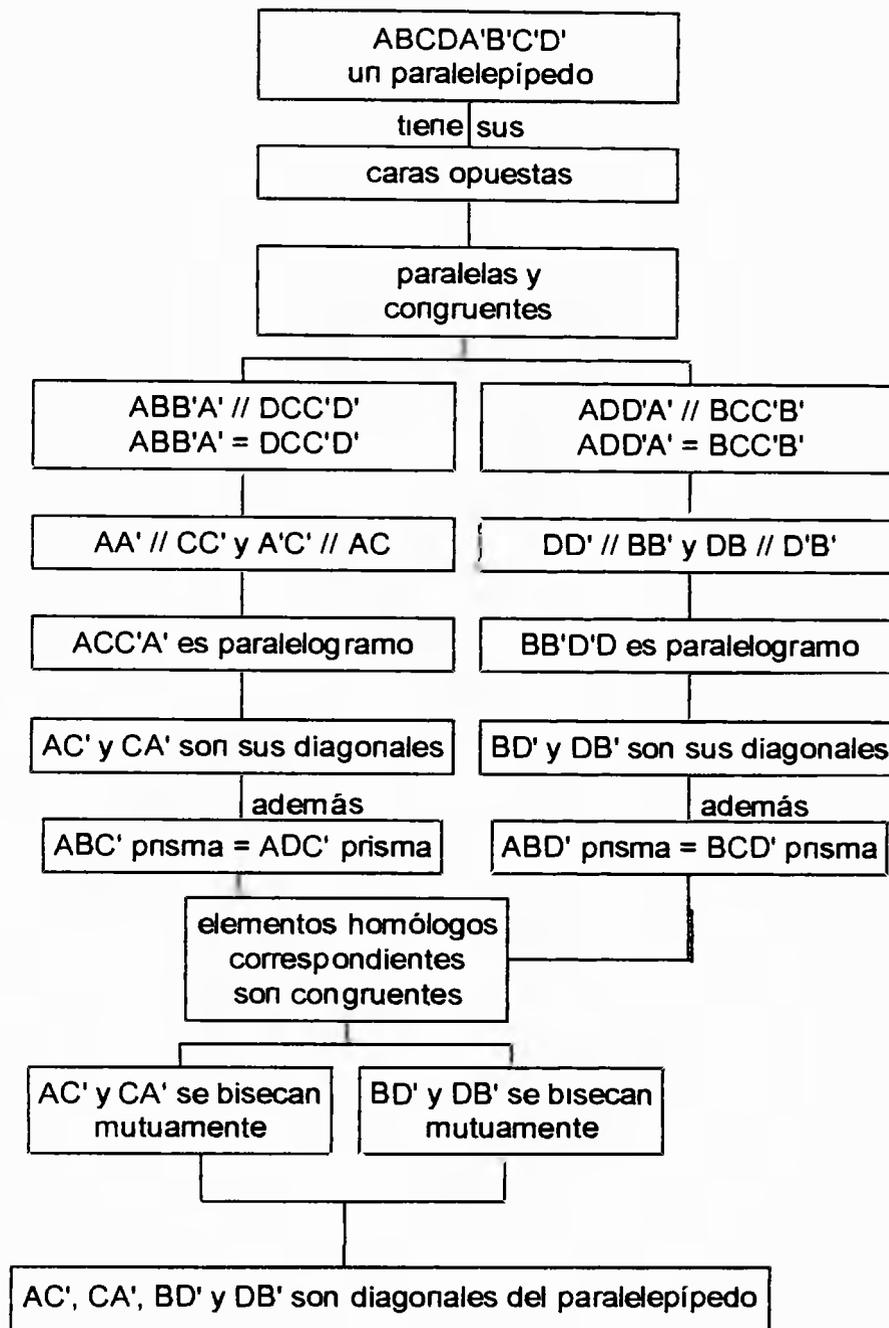
Sea $ABCD-A'B'C'D'$ un paralelepípedo,
 donde dos de sus caras opuestas son $ABB'A'$ y $DCC'D'$
 como $ABCD$ es un paralelogramo, $AB \parallel DC$ y $AB \cong DC$
 como $BB'C'C$ es un paralelogramo, $BB' \parallel CC'$ y $BB' \cong CC'$
 como $B'A'D'C'$ es un paralelogramo, $B'A' \parallel C'D'$ y $B'A' \cong C'D'$
 Como $A'ADD'$ es un paralelogramo, $A'A \parallel D'D$ y $A'A \cong D'D$
 Por lo tanto $ABB'A' \parallel DCC'D'$ y $ABB'A' \cong DCC'D'$

Proposición: Las cuatro diagonales de un paralelepípedo se bisecan entre sí

Demostración

Apóyate en el dibujo y en el mapa conceptual siguiente





Consideremos el paralelepípedo ABCDA'B'C'D', sus diagonales son AC', CA' y BD', DB'

Como $\square ABB'A'$ es un paralelogramo $AA' \parallel BB'$

Como $\square BCC'B'$ es un paralelogramo $BB' \parallel CC' \Rightarrow AA' \parallel CC'$

Entonces $\square ACC'A'$ es un paralelogramo, AC' y A'C son sus diagonales, por lo tanto se bisecan.

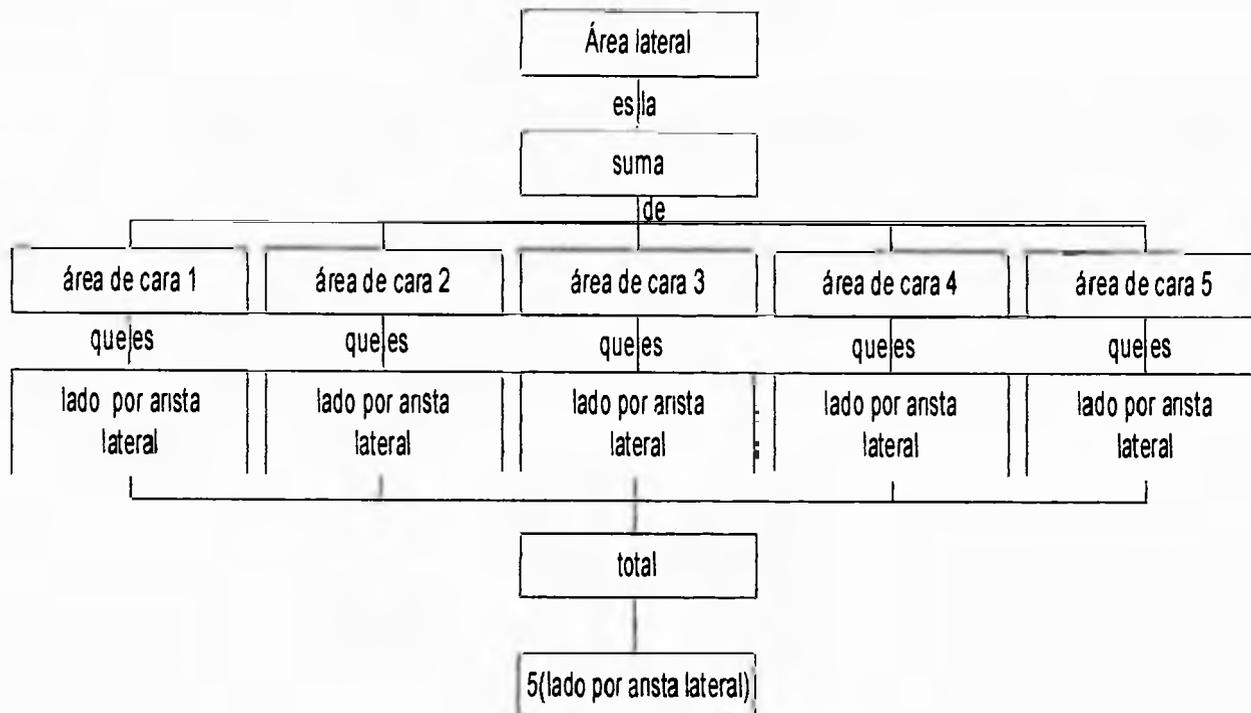
Con procedimiento análogo demostramos que BD' y DB' se bisecan mutuamente

Analiza los siguientes problemas resueltos que te presentamos:

- 1 Calcular el área lateral de un prisma recto pentagonal regular, si el lado de la base mide 5cm y la arista lateral mide 20cm.

Resolución

Primero diseñemos su respectivo mapa conceptual



Área lateral es igual a la suma de todas sus caras

Área lateral = área de cara 1 + área de cara 2 + área de cara 3 + área de cara 4 + área de cara 5

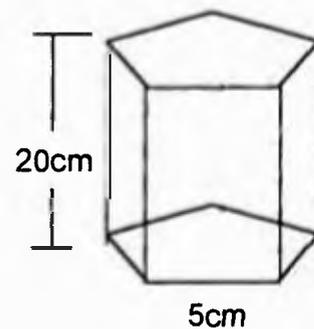
Como sus caras son congruentes, entonces:

Área lateral = 5(área de una de sus caras)

$$= 5(5\text{cm} \times 20\text{cm})$$

$$= 500\text{cm}^2$$

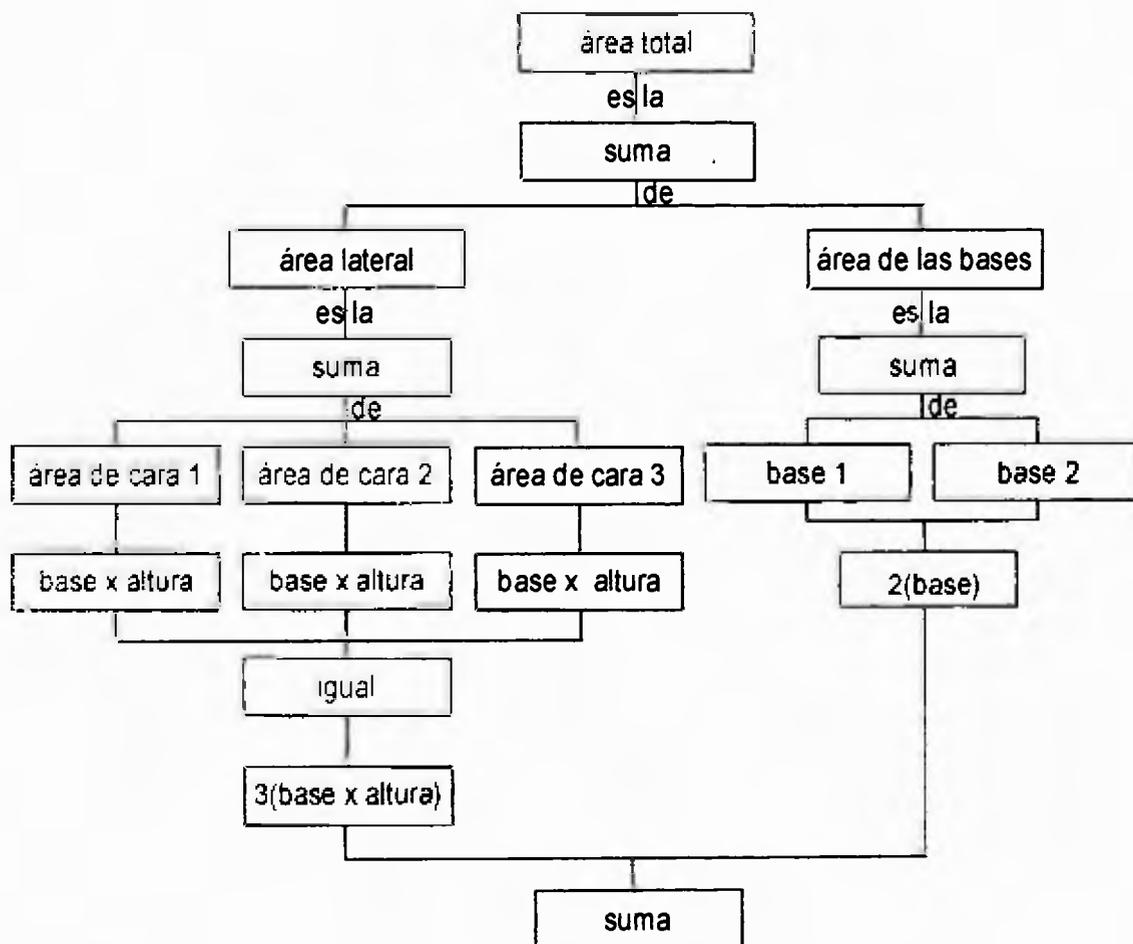
Recuerda el área de un rectángulo es base por altura



- 2 Calcular el área total de un prisma triangular recto regular si la arista lateral mide 9cm y el lado de la base mide 5cm

Resolución

Su mapa conceptual es el siguiente



El área total = área lateral + área de las bases

= área de cara 1 + área de cara 2 + área de cara 3 + área de base 1 + área de base 2

$$= 3(\text{área de cara 1}) + 2(\text{área de base 1})$$

$$= 3(5\text{cm} \times 9\text{cm}) + 2\left[\frac{(5\text{cm})(5\text{cm})\text{sen } 60^\circ}{2}\right]$$

$$= 135\text{cm}^2 + 25\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2 = \left(135 + \frac{25}{2}\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$

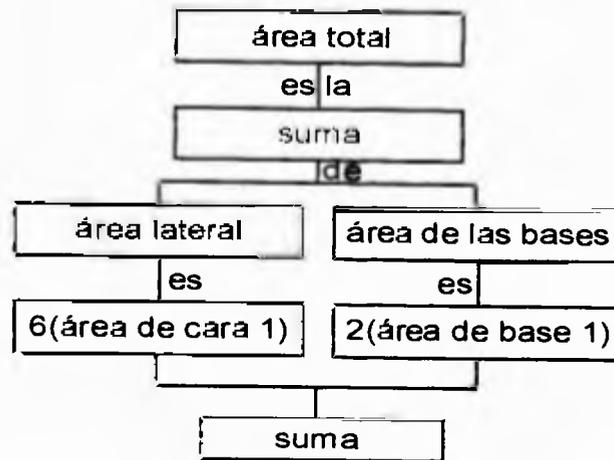
Área de un triángulo es:

$$\frac{(l_1)(l_2)\text{sen}(l_1, l_2)}{2}$$

- 3 Calcular el área lateral de un prisma recto hexagonal regular de 6cm de lado y 8cm de altura.

Resolución

Apóyate en el siguiente mapa conceptual



Área total = área lateral + área de las bases

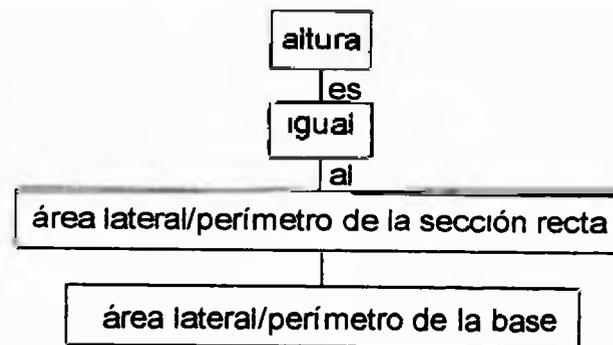
$$= 6(6\text{cm})(8\text{cm}) + 2(6) \left[\frac{(6\text{cm})(6\text{cm})\text{sen } 60^\circ}{2} \right] = 288\text{cm}^2 + 216 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{cm}^2$$

$$= (288 + 108\sqrt{3})\text{cm}^2$$

- 4 Hallar la altura de un prisma recto cuadrado para el cual el área de la superficie lateral es 143cm y el perímetro de la base es 13cm

Resolución

Su mapa conceptual respectivo es:



Área total es
 área de las
 bases + área
 lateral

$$\text{Altura} = \frac{\text{área de superficie lateral}}{\text{perímetro de la base}} = \frac{143\text{cm}^2}{13\text{cm}} = 11\text{cm}$$

Llamamos dimensiones de un paralelepípedo rectángulo a las longitudes de tres aristas concurrentes

Una unidad de volumen es el espacio ocupado por un cubo cuya arista es igual a la unidad de longitud

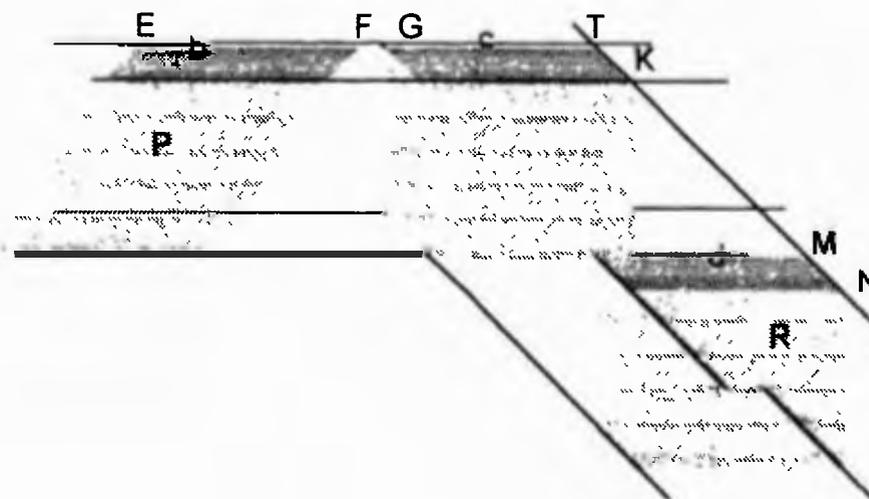
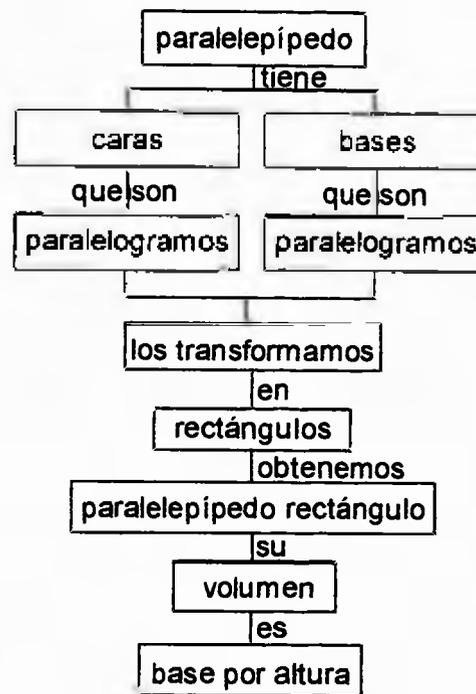
Llamamos volumen de un sólido al número de unidades de volumen que contiene.

Proposición:

El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura

Demostración

Su mapa conceptual es el siguiente



Prolónguese la arista EF y las paralelas a ella, y córtense, en ángulo recto por dos planos situados a una distancia GI igual a EF. Obténese así un paralelepípedo Q cuya base c es un rectángulo.

Prolónguese la arista IK y sus paralelas, y córtense en ángulo recto por planos situados a una distancia MN igual a IK; obtenemos así el paralelepípedo rectángulo R.

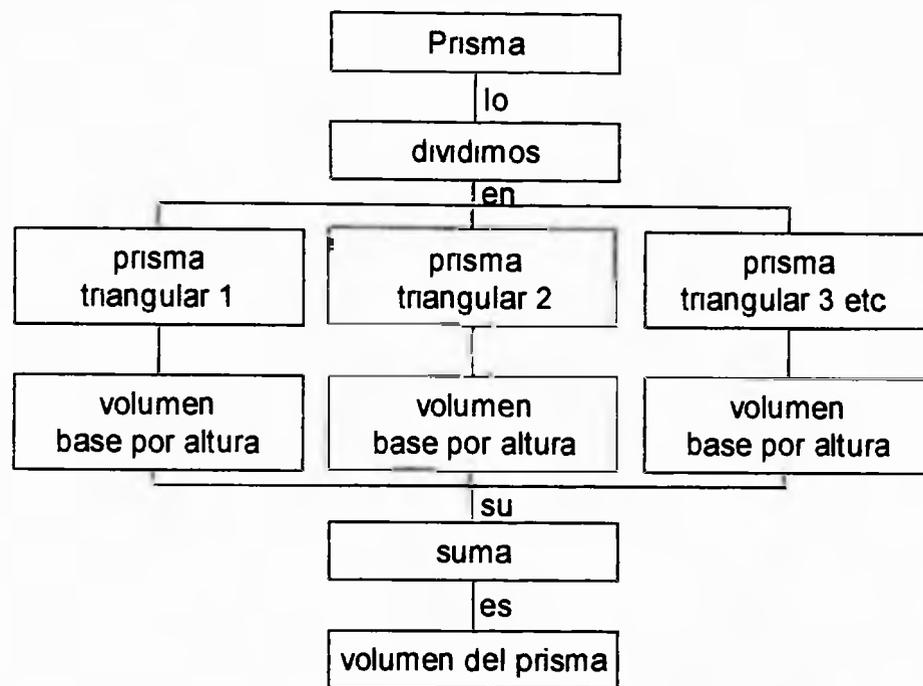
El volumen P = volumen Q = volumen R = base por altura

Proposición

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la base por la altura.

Demostración

Su mapa conceptual es el siguiente



El Volumen del prisma triangular es base por altura

Dividimos el prisma en prismas triangulares:

Prisma triangular 1, prisma triangular 2, prisma triangular 3, etc

Volumen del prisma = volumen del prisma triangular 1+ volumen del prisma

Triangular 2 + volumen del prisma triangular 3 + etc.

= base 1 por altura 1 + base 2 por altura 2 + base 3 por altura 3 + etc.

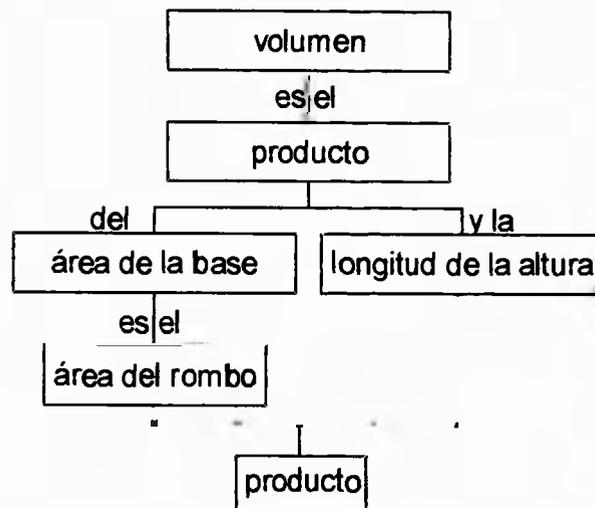
= (base 1 + base 2 + base 3 +...)por altura

= base del prisma por la altura

- 5 Calcular el volumen de un prisma de base un rombo de 32cm de perímetro y uno de sus ángulos mide 45° y su altura es de 12cm

Resolución

Su respectivo mapa conceptual es el siguiente.



$$\text{Volumen} = (\text{área de la base})(\text{la longitud de la altura})$$

$$= (\text{área del rombo})(\text{longitud de la altura})$$

$$= (l_1)(l_2)\text{sen}(l_1, l_2)(h)$$

$$= (8\text{cm})(8\text{cm})\text{sen } 45^\circ(12\text{cm})$$

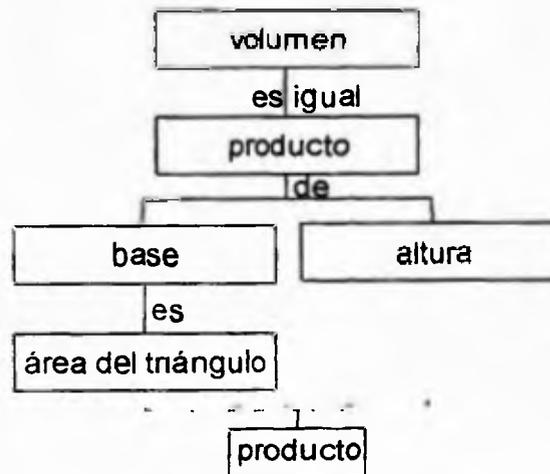
$$= (8\text{cm})(8\text{cm})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(12\text{cm})$$

$$= 384\sqrt{2}\text{cm}^3$$

- 6 Calcular el volumen de un prisma triangular, donde dos lados consecutivos de la base miden 8cm y 5cm, el ángulo comprendido es de 30° y la altura del prisma es de 10cm.

Resolución

Apóyate en el mapa conceptual siguiente:



$$\text{Volumen} = (\text{área de la base})(\text{altura})$$

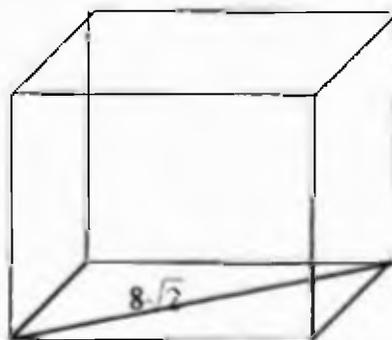
$$= \frac{(5\text{cm})(8\text{cm})\text{sen } 30^\circ}{2} (10\text{cm})$$

$$= (5\text{cm})(4\text{cm})\left(\frac{1}{2}\right)(10\text{cm})$$

$$= 100\text{cm}^3$$

7 Calcular el volumen de un cubo cuyo diagonal de su cara mide $8\sqrt{2}$

Resolución.



Su mapa conceptual es el siguiente.



El área de la base, es el producto del lado del cuadrado de diagonal $8\sqrt{2}$ cm por sí mismo y lo podemos calcular aplicando el teorema de Pitágoras

Luego el volumen del cubo es el producto de sus tres aristas.

$$l^2 + l^2 = (8\sqrt{2})^2 \cdot$$

$$2l^2 = (64)(2)$$

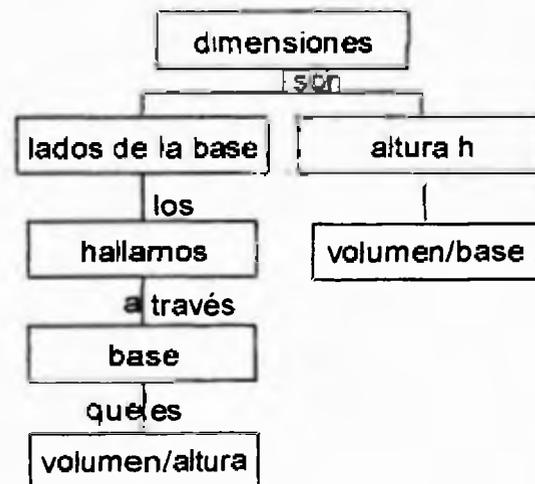
$$l = 8$$

por lo tanto, el volumen es $l^3 = (8\text{cm})^3 = 512\text{cm}^3$

8. Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada, si el volumen es de 2738cm^3 y su altura es de 5cm .

Resolución

Su mapa conceptual es el siguiente



$$(\text{base})(\text{altura}) = \text{volumen}$$

$$(\text{base})(5\text{cm}) = 273,8\text{cm}^3$$

$$\text{base} = \frac{273,8\text{cm}^3}{5\text{cm}}$$

$$= 54,76\text{cm}^2$$

$$\text{luego el lado de la base es } l = \sqrt{54,76\text{cm}^2} = 7,4\text{cm}$$

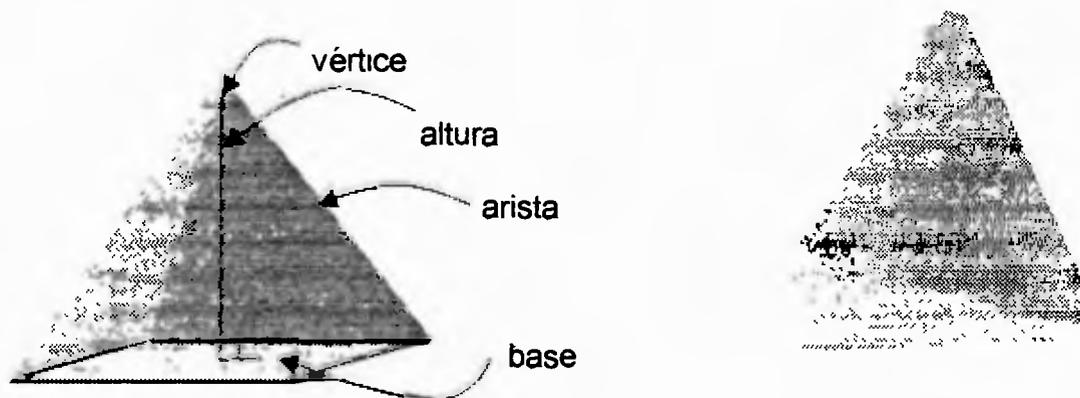
Pirámides

Llamamos pirámide al poliedro en que una de sus caras, llamada base es un polígono cualquiera y las otras caras son triángulos que tienen un vértice común

En las pirámides el término cara se aplica, generalmente, a esos triángulos, el vértice común es el vértice de la pirámide y las intersecciones de sus planos son las aristas laterales.

Llamamos altura de la pirámide a la longitud del segmento de recta perpendicular del vértice al plano de la base

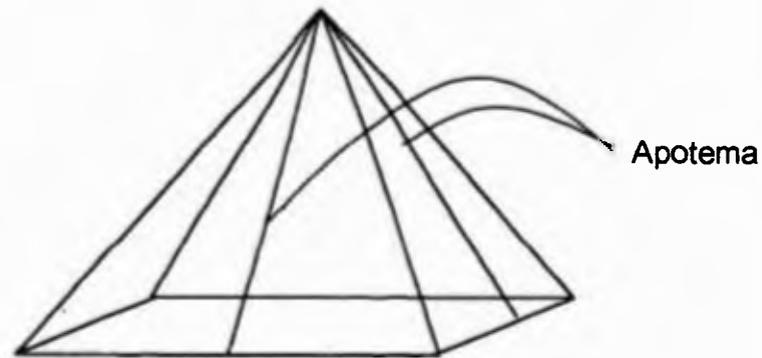
El área lateral es la suma de las áreas de sus caras.



Las pirámides las podemos clasificar según la base, dicese que una pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

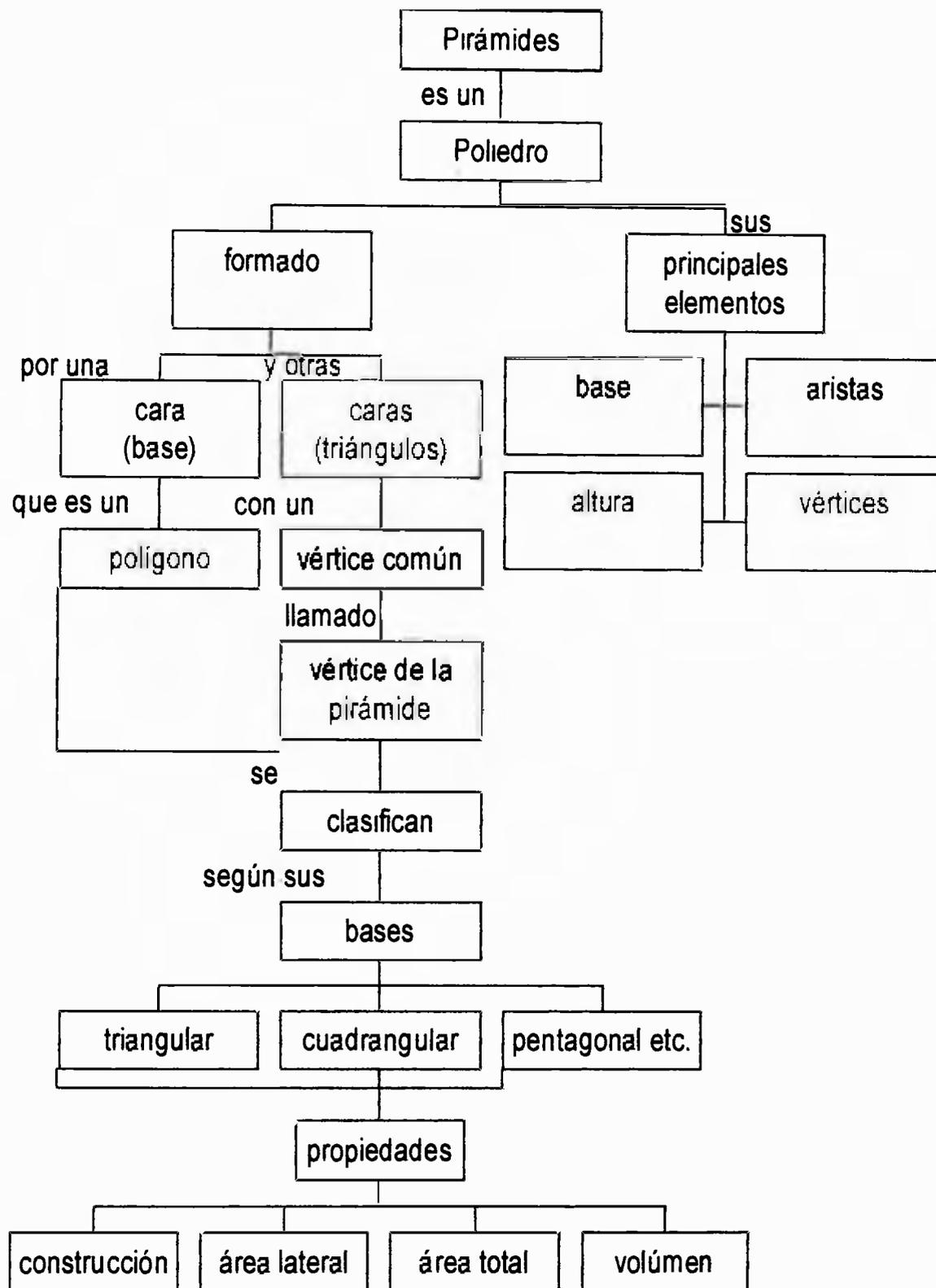
Una pirámide es regular, si su base es un polígono regular y su vértice se halla en la perpendicular levantada al plano de la base en el centro de ese polígono. También se le llama pirámide recta.

Llamamos apotema de una pirámide regular a la altura de los triángulos isósceles que forman sus caras, tomando por bases de los triángulos, los lados de las bases de las pirámides.



Algunas propiedades de las pirámides regulares:

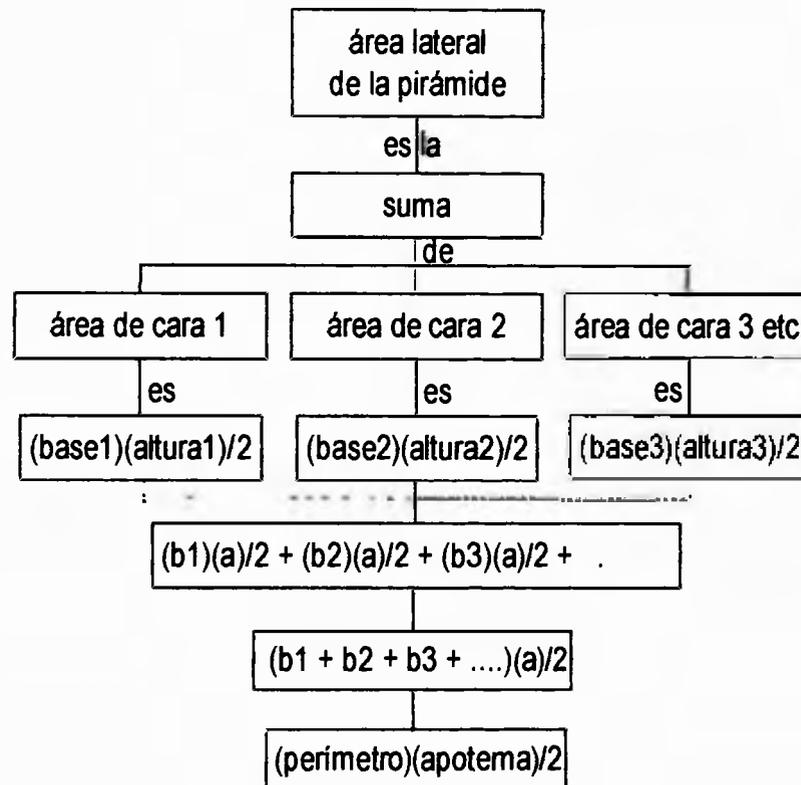
1. Las aristas laterales de una pirámide regular tienen igual longitud.
2. Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes.



Proposición: El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del apotema por el perímetro de la base

Demostración

Apóyate en el siguiente mapa conceptual



Consideremos la pirámide regular en que el perímetro de la base es P,
la apotema es a y L es el área lateral

$L = \text{área de cara 1} + \text{área de cara 2} + \text{área de cara 3} + \dots$

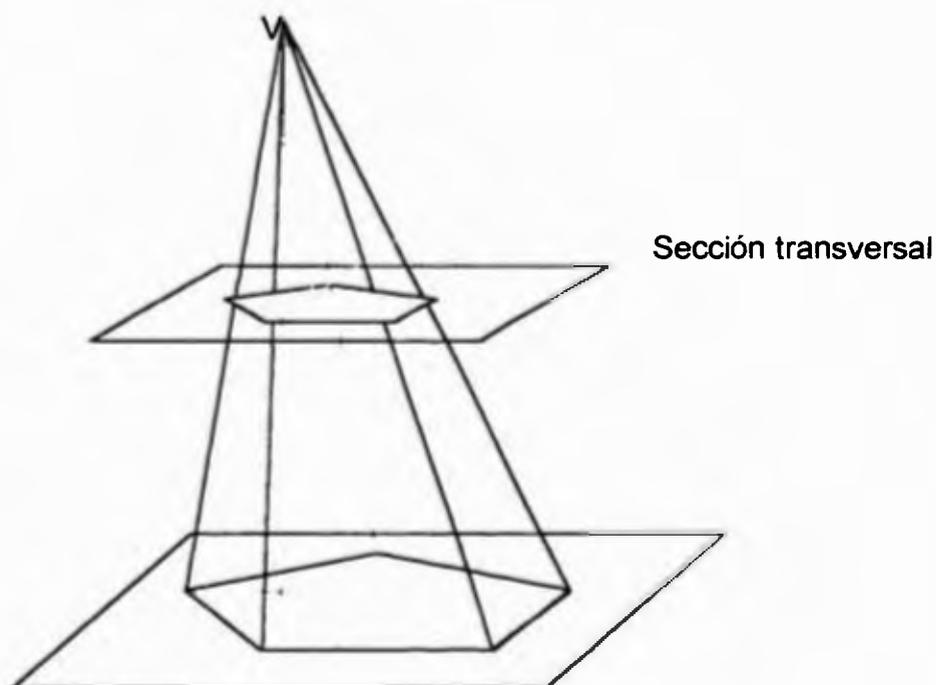
$$L = \frac{1}{2}(b_1)(a) + \frac{1}{2}(b_2)(a) + \frac{1}{2}(b_3)(a) + \dots \quad \text{ya que son triángulos congruentes}$$

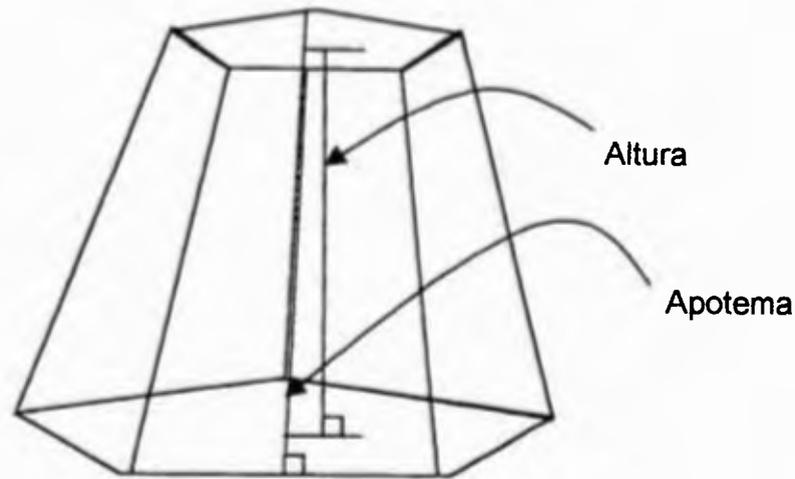
$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)(a)$$

$$= \frac{1}{2}(P)(a)$$

Llamamos **sección transversal** de una pirámide a la intersección de la pirámide con un plano paralelo al plano de la base.

Llamamos **pirámide truncada** o **tronco de pirámide** a la parte de la pirámide comprendida entre la base y una sección determinada por un plano paralelo a la base. Esta sección y la base de la pirámide las llamamos **bases del tronco**, la menor la llamamos **base superior** y la otra **base inferior**.





Tronco de pirámide o pirámide truncada

Llamamos altura de un tronco de pirámide a la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra.

Llamamos comúnmente caras de un tronco de pirámide a las caras limitadas por las bases, es evidente que estas caras son trapecios, y si la pirámide es regular, las caras del tronco son congruentes.

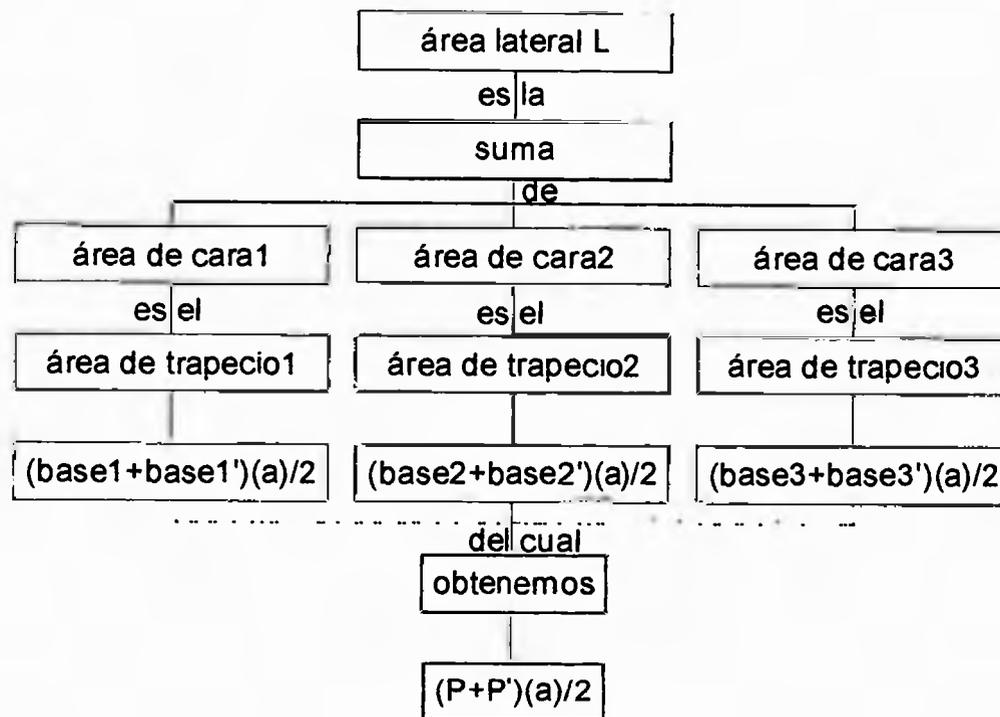
Llamamos área lateral del tronco a la suma de las áreas de las caras.

Llamamos apotema del tronco de pirámide regular a la altura de los trapecios que forman sus caras.

Proposición El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases multiplicada por la apotema

Demostración

Su respectivo mapa conceptual es el siguiente



Consideremos el tronco de pirámide regular de área lateral L y apotema a

$L =$ suma de las áreas de las caras

$=$ área de cara 1 + área de cara 2 + área de cara 3 + ...

$=$ área de trapecio 1 + área de trapecio 2 + área de trapecio 3 +

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(base1 + base1')(a) + \frac{1}{2}(base2 + base2')(a) + \frac{1}{2}(base3 + base3')(a) \dots \\
&= \frac{1}{2}[(base1 + base2 + base3 + \dots) + (base1' + base2' + base3' + \dots)](a) \\
&= \frac{1}{2}[(perímetro de base inferior) + (perímetro de base superior)](apotema)
\end{aligned}$$

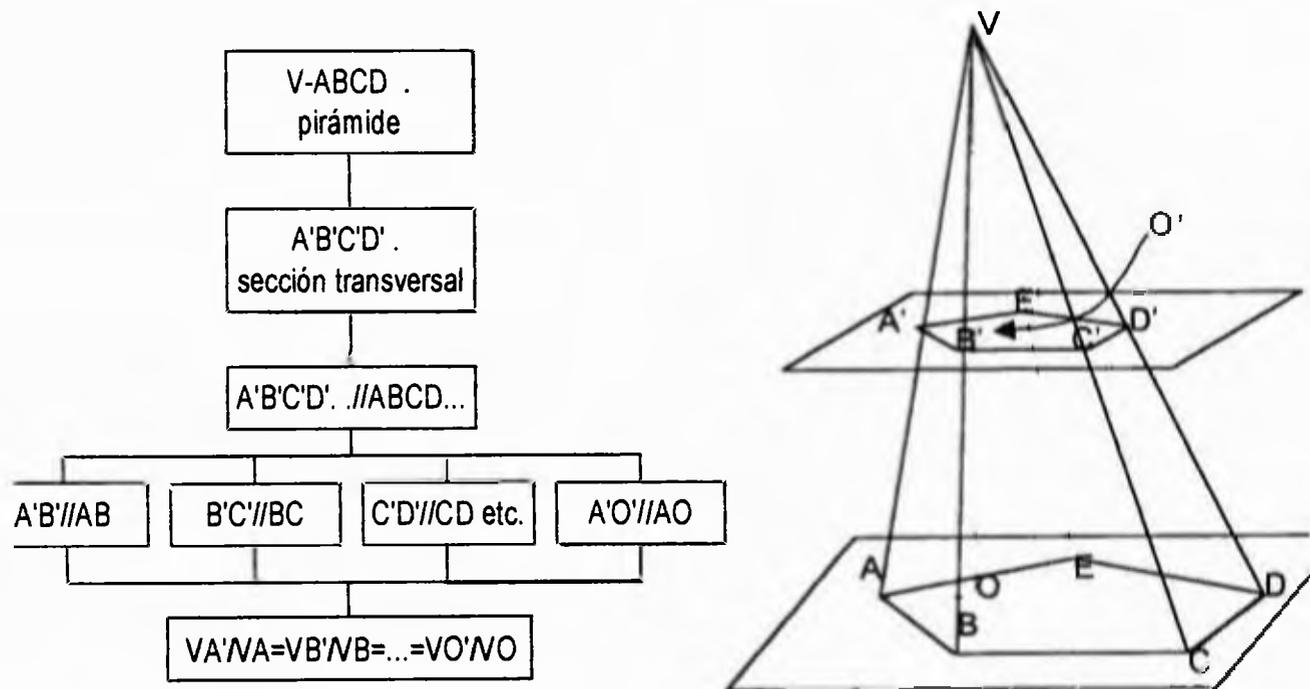
Proposición: Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base

- i El plano divide las aristas y la altura proporcionalmente.
- ii. La sección es un polígono semejante a la base.
- iii La razón de las áreas entre el polígono de la sección en el plano cortante y el área de la base es igual a la razón de los cuadrados de sus respectivas distancias al vértice

Demostración

- i El plano divide las aristas y la altura proporcionalmente

Apóyate en el mapa conceptual respectivo y en el dibujo



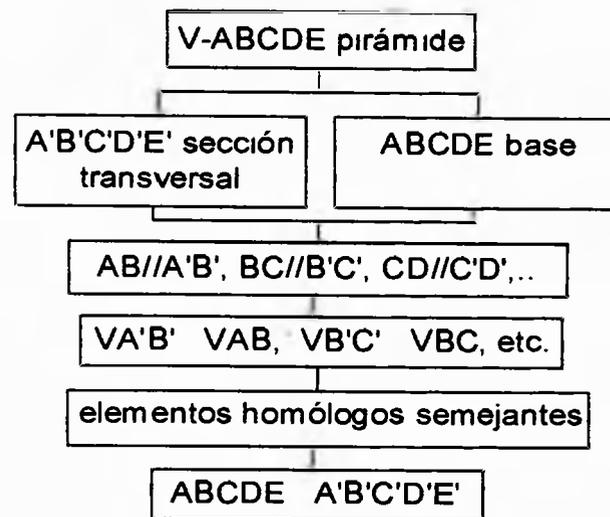
Sea V-ABCD una pirámide cortada en A'B'C'D'E' por un plano paralelo a la base, por lo tanto las dos bases son paralelas, de esto resulta que:

A'B' // AB, B'C' // BC, C'D' // CD, . A'O' // AO, lo cual se obtiene

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \dots = \frac{VO'}{VO} \text{ que demuestra la primera parte}$$

ii. La sección es un polígono semejante a la base.

Su mapa conceptual es el siguiente:



Como A'B'C'D'E' es una sección transversal, el plano que contiene al polígono A'B'C'D'E' es paralelo al plano que contiene al polígono ABCDE, entonces

AB // A'B' y ambas son elementos de la misma cara

BC // B'C' y ambas son elementos de la misma cara

CD // C'D' y ambas son elementos de la misma cara

DE // D'E' y ambas son elementos de la misma cara

EA // E'A' y ambas son elementos de la misma cara

VA' // VA, ya que están en la misma línea recta

VB' // VB, ya que están en la misma línea recta

Y $\angle A'VB' \cong \angle AVB$ ya que son el mismo ángulo, por lo tanto

$\Delta A'VB' \sim \Delta AVB$

El mismo razonamiento es utilizado para demostrar la semejanza de los otros pares de triángulos $\Delta B'VC' \sim \Delta BVC$, $\Delta C'VD' \sim \Delta CVD$; $\Delta D'VE' \sim \Delta DVE$ y $\Delta E'VA' \sim \Delta EVA$

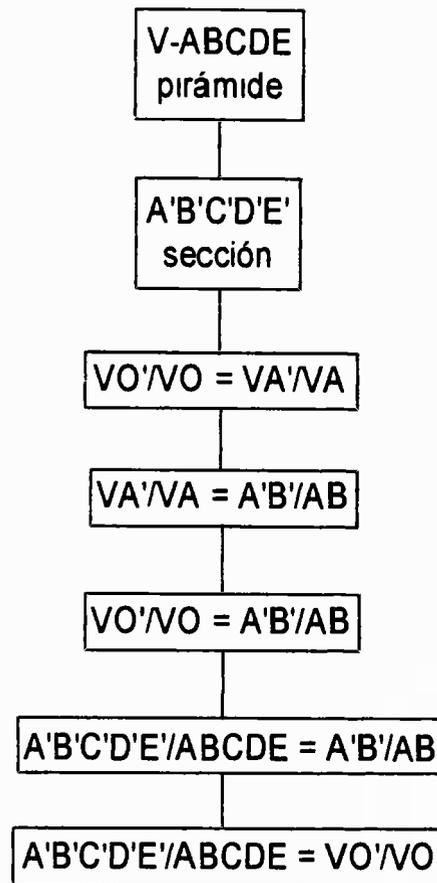
Esto permite concluir que los ángulos triedros $B'-C'VA'$ y $B-CVA$ son congruentes. Por lo tanto $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$.

El mismo razonamiento es utilizado para demostrar la congruencia de los otros pares de ángulos $\angle B'C'D' \cong \angle BCD$; $\angle C'D'E' \cong \angle CDE$; $\angle D'E'A' \cong \angle DEA$ y $\angle E'A'B' \cong \angle EAB$

Lados homólogos proporcionales y ángulos homólogos congruentes, los polígonos son semejantes, $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$.

- iv La razón de las áreas entre el polígono de la sección en el plano cortante y el área de la base es igual a la razón de los cuadrados de sus respectivas distancias al vértice.

Apóyate en el mapa conceptual siguiente.



Sea la pirámide V-ABCDE de sección A'B'C'D'E', por (ii) el plano divide las anstas y las alturas proporcionalmente; por lo tanto $\frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA}$.

De la semejanza de los triángulos $\Delta VA'B'$ y ΔVAB resulta $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB}$,

elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos: $\frac{(VO')^2}{(VO)^2} = \frac{(A'B')^2}{(AB)^2}$

Como $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son polígonos semejantes y las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos,

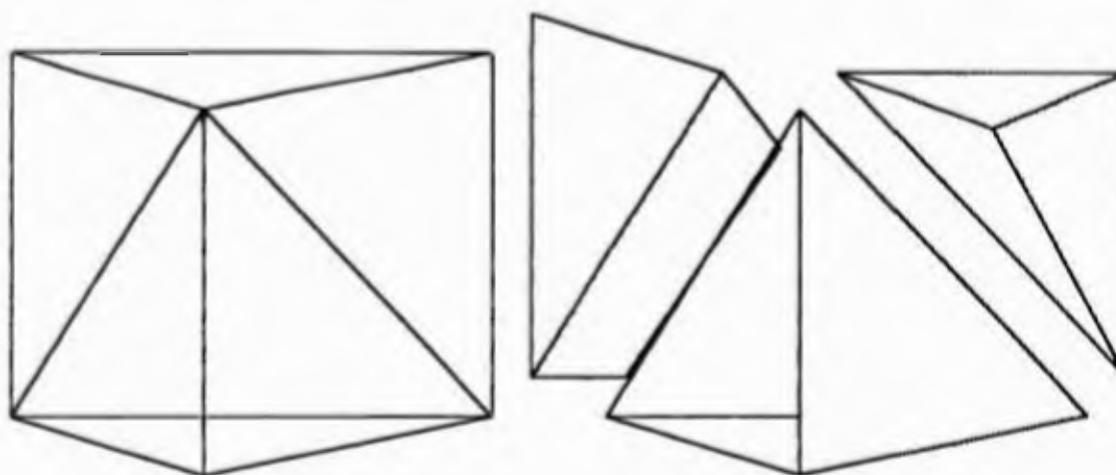
$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE} = \frac{(A'B')^2}{(AB)^2} \Rightarrow \frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE} = \frac{(VO')^2}{(VO)^2}$$

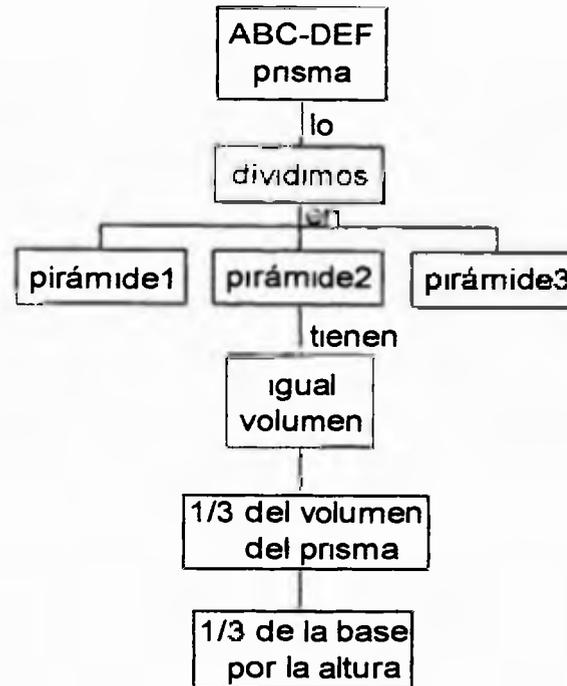
Proposición: (volumen de pirámides)

El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del producto de la base por la altura.

Demostración.

Apóyate en el dibujo y el mapa conceptual siguiente.





Sea el prisma triangular ABC-DEF de base b y altura h

Por los puntos D E y C trácese el plano DEC, se forma la pirámide E-CFD de igual altura y base que el prisma dado

De esta forma podemos dividir el prisma en tres pirámides que son: E-ABC, E-CFD y E-ACD

Las pirámides E-CFD y E-ACD tienen igual altura e igual base, ya que son CFD y ACD, respectivamente, pues cada una de ellas es el producto de la división del paralelogramo por su diagonal DC

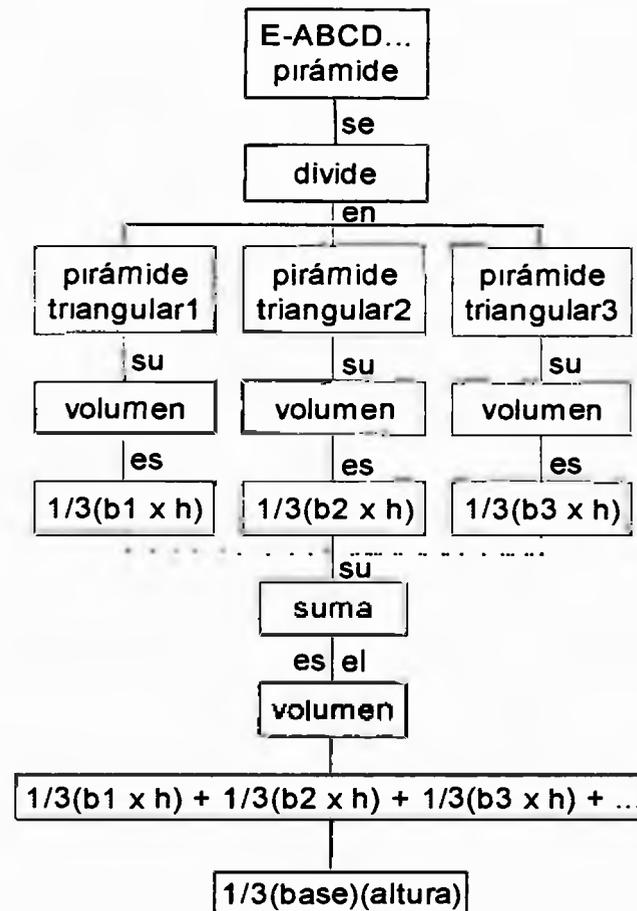
También la pirámide E-CFD es la misma pirámide C-DEF cuya altura es igual a la de E-ABC y con la misma base, por lo tanto las tres pirámides tienen el mismo volumen.

Por lo tanto el volumen de la pirámide E-ABC es una tercera parte del volumen del prisma, es decir, $\frac{1}{3}(base)(altura)$

Proposición: El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto de la base por su altura.

Demostración

Su mapa conceptual es el siguiente:



Sea la pirámide V-ABCD. de base b y altura h.

Como la base ABCD es un polígono trácense planos que contengan al vértice V y que intersecten a la base en cada una de sus diagonales. Estos planos dividen la pirámide en pirámides triangulares, las cuales tendrán la misma altura h de la pirámide V-ABCD...

El volumen de V-ABCD = volumen de pirámide 1 + volumen de pirámide 2
+ volumen de pirámide 3 + ...

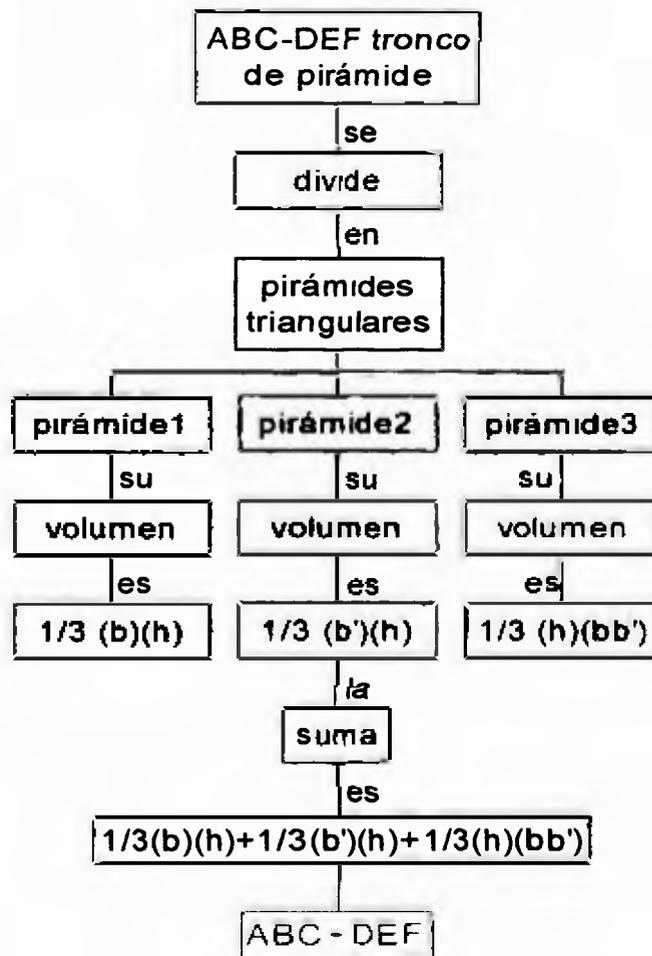
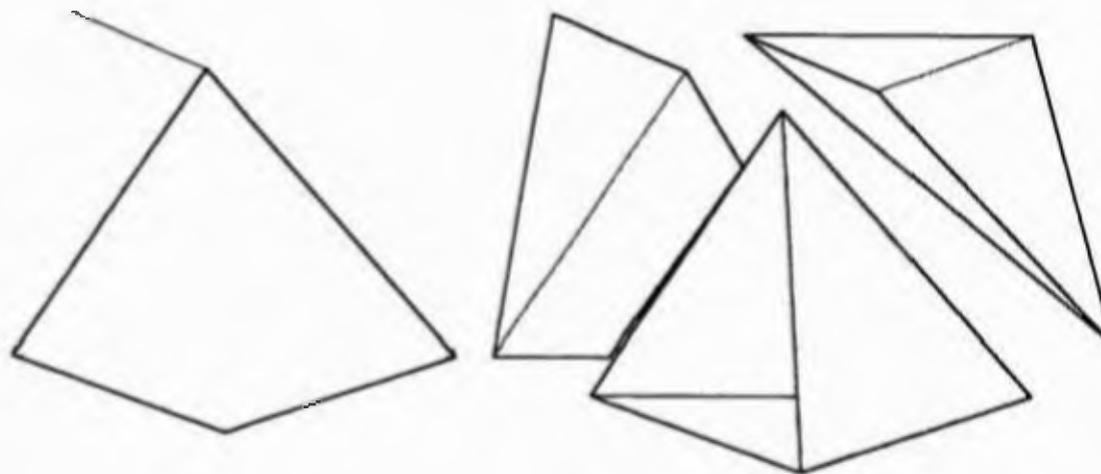
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}(base1)(h) + \frac{1}{3}(base2)(h) + \frac{1}{3}(base3)(h) + \\
 &= \frac{1}{3}(base1 + base2 + base3 + \dots)(h) \\
 &= \frac{1}{3}(base\ de\ V -\ ABCD \dots)(h) \\
 &= \frac{1}{3}(b)(h)
 \end{aligned}$$

Proposición: (tronco de pirámide)

Todo tronco de pirámide triangular es equivalente a la suma de tres pirámides, cuyas alturas comunes es la del tronco y cuyas bases son, respectivamente, las del tronco y la media proporcional entre estas.

Demostración

El dibujo y el mapa conceptual son de gran utilidad



Sea $ABC - DEF$ un tronco de pirámide triangular, las áreas de cuyas bases ABC y DEF son b y b' , respectivamente, y cuya altura es h

Trácese un plano por $A E$ y C , y otro por C, D y E , estos planos dividen el tronco en tres pirámides triangulares:

$E - ABC$ con volumen $\frac{1}{3}(b)(h)$; $C - DEF$ con volumen $\frac{1}{3}(b')(h)$, y la

pirámide $E - ACD$

Pero $E - ABC$ es la misma pirámide que $C - ABE$ y $E - ACD$ es la misma que $C - AED$, pero como los volúmenes de dos pirámides son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, entonces:

$$\frac{C - ABE}{C - AED} = \frac{\Delta ABE}{\Delta AED}$$

ya que los triángulos ΔABE y ΔAED tienen por altura común la del trapecio

$\square ABED$

Como dos triángulos de alturas iguales son entre sí como sus bases respectivas:

$$\frac{\Delta ABE}{\Delta AED} = \frac{AB}{DE} \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{C - ABE}{C - AED} = \frac{AB}{DE} \text{ o bien}$$

$$\frac{E - ABC}{E - ACD} = \frac{AB}{DE}$$

Además, $E - ACD$ y $E - CFD$ tienen un mismo vértice y las bases en un mismo plano, sus alturas son iguales, y dos pirámides de igual altura son entre sí como sus bases, luego:

$$\frac{E - ACD}{E - CFD} = \frac{\Delta ACD}{\Delta CFD}$$

Puesto que los triángulos ΔACD y ΔCFD tienen por altura común la del trapecio $\square ACFD$,

$$\frac{\Delta ACD}{\Delta CFD} = \frac{AC}{DF}, \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{E - ACD}{E - CFD} = \frac{AC}{DF}$$

También los triángulos ΔDEF y ΔABC son semejantes, luego:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \text{ entonces } \frac{E - ABC}{E - ACD} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow$$

$$\frac{E - ABC}{E - ACD} = \frac{E - ACD}{E - CFD}$$

Ahora $E - CFD$ es la misma pirámide que $C - DEF$ cuyo volumen es $\frac{1}{3}b'h$

$$\frac{\frac{1}{3}bh}{E - ACD} = \frac{E - ACD}{\frac{1}{3}b'h}$$

$$E - ACD = \sqrt{\frac{1}{3}bh \left(\frac{1}{3}b'h \right)} = \frac{1}{3}h\sqrt{bb'}$$

$$E - ABC + C - DEF + E - ACD = \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}b'h + \frac{1}{3}h\sqrt{bb'}$$

o sea que el volumen del tronco es:

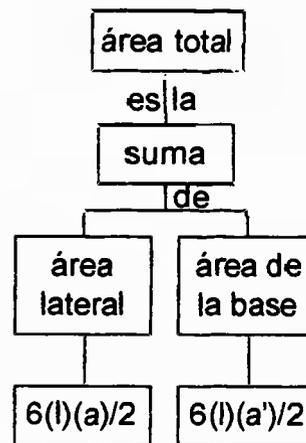
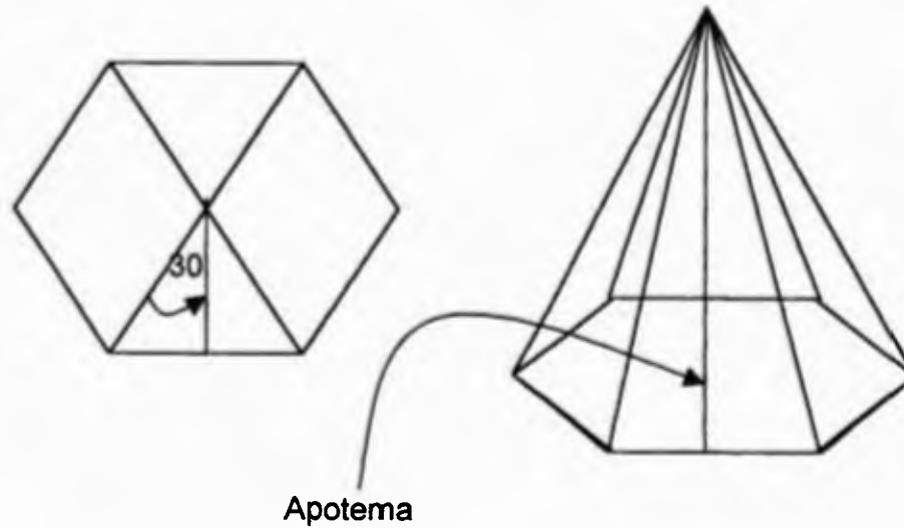
$$ABC - DEF = \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}b'h + \frac{1}{3}h\sqrt{bb'}$$

$$ABC - DEF = \frac{1}{3}h(b + b' + \sqrt{bb'})$$

Ejemplo: Calcule el área total y el volumen de una pirámide regular de base hexagonal, si el lado de la base mide 5cm y la apotema de la pirámide mide 4cm.

Resolución

Apóyate en el dibujo y en el mapa conceptual siguiente.



Para calcular estas áreas, primero calculamos la apotema del hexágono, ya que a través de él podemos determinar el área de la base de la pirámide.

$$a' = \frac{2.5\text{cm}}{\tan 30^\circ} = \frac{2.5\text{cm}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\text{cm}$$

área total = área del hexágono + área de la pirámide

$$6(5\text{cm})\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\text{cm}\right) + 6(5\text{cm})(4\text{cm}) = (75\sqrt{3} + 120)\text{cm}^3$$

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

- 1 ADDA Josette Elemento de didácticas de las matemáticas México, CINVESTAV 1987
- 2 BLANCO N Lorenzo. Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas, España, editorial universitaria 1993
- 3 CATALÁ C. Alsina. Invitación a la didáctica de la Geometría: Madrid, editorial Síntesis 1995
- 4 Chávez de Rosa V. Explicaciones y proceso de resolución de problemas de tipo lógico en adolescentes. Tesis de pregrado Guatemala de la asunción 1990
- 5 COLL, César Psicología Genética y Educación. Barcelona, Oikos – Tau. 1981
- 6 DELVAL, Juan. Crece y pensar, la construcción del conocimiento en la escuela México, Paidós Ibérica S. A 1981
- 7 DÍAZ B Frida y Gerardo Hernández R Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista. México, McGraw – Hill 1998
- 8 DÍAZ Godino, A Gómez y otros. Didáctica de la matemática. Madrid, editorial Síntesis. 1991
9. DUBNOR y A. S. Errores en las demostraciones geométricas. México, editorial Limusa – Wiley. 1991
- 10 GAGNÉ Robert M. Las condiciones del aprendizaje. 4^º edición. México, Nueva editorial Interamericana, 1987
- 11 GALVIS P Alvaro H. Ingeniería de software educativo. Santa Fe de Bogotá, Colombia, ediciones Unidas. 1992

12. GASCÓN P Joseph El aprendizaje de método de resolución de problemas matemáticos España 1989
13. HERNÁNDEZ de O Sylvia La instrucción heurística en la clase de matemática Cuba 1992
14. LAKATOS, Imre Pruebas y Refutaciones. España, editorial Alianza. 1976
15. MORENO Montserrat. La Pedagogía Operatoria Barcelona, Laia. 1983
16. NEWMAN, James R El Mundo de las matemáticas. Barcelona, España, ediciones Grujalbo 1976
17. NOVAK, Joseph D y Bob Gowin Aprendiendo a aprender. Madrid, ediciones Martínez Roca S A 1988.
18. ONTORIA, Antonio, Ana ballesteros y otros. Mapas Conceptuales. Una técnica para aprender 4^a edición. Madrid, ediciones Narcea, 1995.
19. POLYA George. Como plantear y resolver problemas. México editorial Trillas. 1965
20. QUINTERO, Ana H. y Nancy Costas Geometría. Puerto Rico. Editorial de la Universidad de Puerto Rico 1994
21. RODRÍGUEZ A. Analive. Geometría. Costa Rica, serie cátedra universitaria 1993
22. SANTOS T Luz M La resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática México, CINVESTAV I: P. N. 1994
23. SOLOW Daniel. Como entender y hacer demostraciones en matemáticas. México, editorial Limusa. 1987.
24. TORANZOS, Fausto. Introducción a la epistemología y fundamentación en la matemática Argentina, editora Espasa – Calpe Argentina S A 1946

- 25 TSIJLI, Teodora. Geometría Euclídea I San José Costa Rica, editorial universidad estatal a distancia. 1994.
- 26 TSIJLI, Teodora Geometría Euclídea II San José Costa Rica, editorial universidad estatal a distancia 1996
- 27 WENTWORTH, Jorge y David E. Smith. Geometría. Estados Unidos, Ginn y Compañía 1915