

UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

FOLIACIONES DEL PLANO

Por:

Juan Manuel Nole

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

Panamá, República de Panamá

1982

"Al hacerse rigurosa, la ciencia matemática toma un carácter artificial que choca a todos, se olvida de sus orígenes; aprendemos a contestar preguntas, mas ya no sabemos de donde vienen esas preguntas".

"Es con lógica que uno demuestra; es por intuición que uno inventa".

H. Poincaré

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico a mi esposa Anayansi Castillo de Nole, quien en todo momento me estimuló a seguir adelante durante los años de estudio.

Así como a mis queridos hijos Nayita y Juancito.

Juan



## AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento y eterna gratitud al Dr. OSCAR VALDIVIA por sus desvelos, atinados consejos y palabras de aliento que en todo momento supo prodigarme.

También deseo dejar constancia de mi agradecimiento y gratitud a mis compañeros MARIA DIXIANA, WENCESLAO ROBERTO, ENRIQUE y JULIO ALBERTO quienes conformaron mi grupo de estudio al cual pertenezco con orgullo.

## INDICE GENERAL

PORTADA .....	i
PENSAMIENTO DE H.POINCARÉ .....	ii
DEDICATORIA .....	iii
AGRADECIMIENTO .....	iv
INDICE GENERAL .....	v
INTRODUCCION .....	vi
CAPITULO 1: PRELIMINARES	
1.1 Haces Fibrados. Definición y Ejemplos .....	1
1.2 Haces Vectoriales .....	13
1.3 Transformaciones de Haces y Equivalencia .....	14
1.4 Extensión del Grupo Estructural de un Haz .....	28
1.5 Teorema de Existencia y Unicidad de un Haz, dado un Sistema de Transición .....	33
1.6 Foliaciones. Definiciones y Ejemplos .....	38
1.6.1 Foliaciones definidas por Submersiones ...	43
1.6.2 Fibraciones .....	45
1.6.3 Foliaciones de Reeb de la esfera unitaria.	46
1.6.4 Campos de Vectores sin singularidades ....	49
1.6.5 Acciones de grupos de Lie .....	53
1.7 Las Hojas .....	61
1.8 Aplicaciones Distinguidas .....	65
CAPITULO 2: VARIEDADES (NO SEPARADAS) DE DIMENSION UNO Y ESTRUCTURA FOLIADA DEL PLANO.	
2.1 Propiedades de las variedades de dimensión uno ..	71
2.1.1 Definiciones y Ejemplos .....	71

2.1.2	Variedades de dimensión uno simplemente conexas .....	84
2.1.3	Variedades provistas de estructuras diferenciables .....	89
2.2	Las estructuras foliadas del plano .....	104
CAPITULO 3: FIBRACIONES POR RECTAS Y FOLIACIONES DEL PLANO		
3.1	Propiedades de toda foliación del plano .....	120
3.2	Foliaciones Conjugadas o Equivalentes .....	125
3.3	Clasificación de las foliaciones del plano .....	126
3.4	La ramificación simple $Z$ .....	127
3.5	Clasificación de estructuras Diferenciables sobre $Z$ .....	141
3.6	Realización de una estructura sobre $Z$ por una foliación del plano .....	149
CAPITULO 4: FOLIACIONES DEL PLANO DETERMINADAS POR FLUJOS.		
4.1	Campos vectoriales y Espacios de Fase .....	153
4.2	Separatrices y equivalencia topológica de campos vectoriales en el plano .....	161
CAPITULO 5: REPRESENTACION DE UNA FOLIACION DEL PLANO		
5.1	Representaciones de dos foliaciones que tienen el mismo espacio de hojas (cociente) .....	167
5.2	Representación de una foliación del plano por medio de una recta y Semirrectas del plano .....	170
5.3	Topología de una representación .....	173
CONCLUSIONES .....		176
REFERENCIAS .....		181
APENDICE .....		185

## INTRODUCCION

La actual teoría de foliaciones se inició con los trabajos de C. Ehresmann y G. Reeb en la década de 1940, aunque, como Reeb observó, P. Painlevé (1895), a fines del siglo pasado sintió la necesidad de crear una teoría geométrica (el de las foliaciones) para la mejor comprensión de los problemas relativos al estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales holomorfas en el campo complejo.

Sobre foliaciones del plano aparecieron los trabajos de Kaplan [15], Kamke [14] y Wazewski [29]. Estos resultados fueron redemostrados por Haefliger y Reeb [12]. Posteriormente aparecieron los trabajos de C. Godbillon y G. Reeb [11], C. Godbillon [10], la tesis doctoral de E. Fedida [8] y la prepublicación de E. Fedida - F. Pluvinage [6]. Una versión sintética de estos resultados aparecen en [26].

En este trabajo presentamos el problema de clasificación de las foliaciones del plano y el problema de representación de una foliación del plano mediante una recta y semirectas. El primer problema, lo estudiamos a través de la clasificación:

1. De las variedades topológicas de dimensión uno, con base enumerable y simplemente conexa.
2. De los fibrados sobre tal variedad, localmente triviales con espacio total de Hausdorff.

Luego se clasifican las estructuras diferenciables sobre la ramificación simple y se estudian las realizaciones de tales estructuras mediante foliaciones del plano.

Para el segundo problema damos una construcción llamada representación e introducimos su correspondiente topología.

Para poder presentar los dos problemas fundamentales de este trabajo, tuvimos que distribuir los temas del contenido tal como aparece en la tabla de contenido, partiendo desde las bases. Tal distribución obedece a un orden lógico y coherente entre los capítulos; puesto que la naturaleza de algunos temas lo exigía. En ese sentido, podemos observar que en el capítulo 1 las secciones más sobresalientes para la afirmación de resultados en el capítulo 3 son:

- (1.1) Haces Fibrados. Definición y Ejemplos.
- (1.3) Transformaciones de Haces y Equivalencia.
- (1.5) Teorema de Existencia y Unicidad de un Haz, dado un Sistema de Transición.

De (1.1) los puntos más sobresalientes son: la definición de haz fibrado; el haz producto trivial; el grupo estructural de un haz fibrado.

De (1.3) tenemos, equivalencia de haces; los criterios de caracterización de equivalencia entre dos haces; el corolario 1.3.2,6.

De (1.5), el teorema de existencia y unicidad de un haz.

La sección, Foliaciones. Definiciones y Ejemplos del capítulo 1, también es fundamental para el desenvolvimiento de los temas posteriores. Aquí se da el concepto de foliación y se presentan múltiples ejemplos no solamente para aclarar el concepto de foliación, sino para que se observen sus diversas aplicaciones en las matemáticas.

En cuanto a la interrelación de esta sección con el Capítulo 2; los puntos más sobresalientes son; la definición de una foliación de clase  $C^r$  y dimensión  $n$ , de una variedad diferenciable  $M$ , de dimensión  $m$ ; la proposición 1.6.1 (las placas son subvariedades conexas de dimensión  $n$  y clase  $C^r$  de  $M$ ); la definición 1.6.2, (A los conjuntos de la forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  con  $c \in U_2$  se les llaman placas de  $U$ ); la definición 1.6.3; la definición 1.6.4; ejemplo 1.6.4 (campos de vectores sin singularidades),

Ella también está ligada con el capítulo 3 mediante el ejemplo 1.6.2 (Fibraciones).

De manera análoga tenemos también que el capítulo 2 contiene secciones sobresalientes que son fundamentales para la presentación y demostración de resultados en el Capítulo 3; tales como:

- (2.1) Propiedades de las variedades de dimensión uno.
- (2.2) Estructuras foliadas del plano.
- (2.3) El espacio de hojas de una estructura foliada del plano.

De (2.1) los puntos más sobresalientes son: la proposición 2.1.1.1; el cual constituye un procedimiento de construcción general de variedades; la definición 2.1.1.3 (definición de punto de ramificación); la construcción de ejemplos de variedades de dimensión uno; variedades de dimensión uno simplemente conexas (definición 2.1.3.3, proposición 2.1.2.1, proposición 2.1.2.2); variedades provistas de estructuras diferenciables (propiedad 2.1.3.1; Corolario 2.1.3.5).

De (2.2) los puntos más sobresalientes son: definición 2.2.1.3, definición 2.2.1.4; teorema 2.2.1.4 (Poincaré, Bendixon); ejemplo 1 de estructuras foliadas del plano.

De (2.3), la proposición 2.2.2.1.

En el capítulo 3 presentamos los dos problemas fundamentales de clasificación de las foliaciones del plano. Para poder llegar a ese punto se hacía necesario la presentación de la sección 3.1: Propiedades de toda foliación del plano, la cual pudo ser abordada gracias a los capítulos 1 y 2.

En este capítulo sobresale también la sección 3.4: La ramificación simple  $Z$ . En esta, los puntos más sobresalientes son: la proposición 3.4.1, el cual es una consecuencia de un teorema general, cuya demostración está basada en el capítulo 1 (Grupo estructural de un haz, Teorema de existencia y unicidad de un haz); el Corolario 3.4.2; la proposición 3.4.4; la definición 3.4.1; la proposición 3.4.7; teorema 3.4.8 (Godbillon-Reeb), el cual establece una caracterización para la equiva-



lencia entre dos haces fibrados por rectas  $\eta$  y  $\eta'$  sobre  $Z$  por el grupo  $G^+$ ; con espacios totales de Hausdorff.

Esta sección es fundamental para el problema de clasificación de las foliaciones del plano, puesto que como consecuencia de la proposición 3.4.7 y del Teorema de Godbillon-Reeb se tiene una clasificación de los fibrados por rectas localmente triviales sobre la ramificación simple con espacio total de Hausdorff en el siguiente sentido.

- 2 clases de equivalencia por el grupo  $G^+$
- 1 clase de isomorfismo por el grupo  $G^+$
- 1 clase de equivalencia por el grupo  $G$ .

En este sentido hemos culminado con una etapa, dándole respuesta a uno de los problemas planteados.

En el Capítulo 3 vimos también la necesidad de considerar el problema de clasificación de estructuras diferenciables sobre  $Z$ . Los puntos sobresalientes en esta sección son: la definición 3.5.1; la definición 3.5.2; la proposición 3.5.1, cuya demostración está basada en el corolario 2.1.3.5; la proposición 3.5.2. Esta última proposición es fundamental, puesto que introduce una relación de equivalencia  $\rho$  sobre  $D^r(\mathbb{R}^+)$  y traslada el estudio de las  $C^r$ -estructuras sobre  $Z$  a las de  $D^r(\mathbb{R}^+)/\rho$ . En esta sección sobresale también el teorema 3.5.3 (Fedida) que establece en qué condiciones las estructuras analíticas no son  $C^r$ -equivalentes; el teorema 3.5.5 el

cual establece la existencia de una estructura analítica  $C^1$ -equivalente a una  $C^r$ -estructura  $S$  dada sobre  $Z$ , con  $r \geq 1$ .

Al estudiar las realizaciones de tales estructuras dadas sobre  $Z$  mediante foliaciones del plano, sobresale la proposición 3.6.1, cuya demostración está basada en las proposiciones 2.2.2.1 y 3.5.1.

En el Capítulo 4 los puntos más sobresalientes en la motivación dada sobre campos vectoriales y espacios de fase son: el ejemplo 1.1; el ejemplo 1.2, la proposición 4.1.1, puesto que sirven de base para el desarrollo de la sección 4.2: Separatrices y regiones canónicas.

En esta sección los puntos sobresalientes son: la definición 4.2.1; la definición 4.2.3; la observación 4.2.2, la definición 4.2.4, la definición 4.2.5 y el teorema 4.2.1. (Kaplan-Marcus); que da una caracterización para la equivalencia topológica de dos foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  de  $\mathbb{R}^2$  definidas por campos vectoriales polinomiales.

En el capítulo 5 presentamos el problema fundamental de representación de una foliación del plano mediante una recta y semirrectas. Para poder abordar este problema se hacía necesario la presentación de las secciones:

- (5.1) Representación de dos foliaciones que tienen el mismo espacio de hojas (cociente),

(5,2) Representación de una foliación del plano por medio de una recta y semirrecta del plano,

Para motivar la sección (5.1) fueron consideradas dos foliaciones que tienen el mismo espacio de hojas, pero que no son topológicamente equivalentes. Para comprobar esto se consideraron sistemas totales de transversales a las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ .

Luego pasamos a representar esas dos foliaciones, mediante una técnica que es explicada cuidadosamente en la sección (5.2). Se obtiene en esta sección, partir de una transversal  $\mathcal{C}$  escogida una representación no solamente del espacio cociente sino también de la foliación.

Se hizo sentir en el desarrollo de la sección 5.2, el concepto de dos trayectorias de la foliación que son inseparables en el cociente, tratado en el Capítulo 4.

Pasamos después a construir una topología mediante un sistema fundamental de vecindades, llamada topología de una representación.

# CAPITULO I

## PRELIMINARES

En este capítulo revisaremos los resultados fundamentales sobre haces fibrados que utilizaremos en los capítulos siguientes.

### 1.1 Haces Fibrados. Definición y Ejemplos.

Definición 1.1.1. (definición provisional de Haz fibrado)

Un haz fibrado  $\xi = (E, p, B, F)$  consta de lo siguiente:

- Tres espacios topológicos  $E, B$  y  $F$ .
- Una función, continua  $p$  de  $E$  sobre  $B$ .
- una colección  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ; donde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es

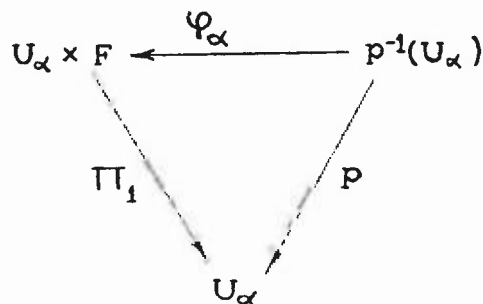
un cubrimiento abierto de  $B$ , y para cada  $\alpha \in A$   $\varphi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $p^{-1}(U_\alpha)$  sobre  $U_\alpha \times F$ , tal que el diagrama siguiente sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} & p^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow p \\ & U_\alpha & \end{array}$$

o sea  $p \circ \varphi_\alpha^{-1} = \pi_1$ , es decir, para  $\forall (x, y) \in U_\alpha \times F$  se tiene  $p \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$ .

Observación 1.1.1

Además se tiene la conmutatividad del diagrama



o sea  $\Pi_1 \circ \varphi_\alpha = p$ .

A los espacios  $E$ ,  $B$  y  $F$  se les llama respectivamente, el espacio total, la base y la fibra tipo del haz fibrado  $\xi$ .

A la función  $p: E \longrightarrow B$  se le llama la proyección y a la colección  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  el atlas de  $\xi$ .

De la condición  $p \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$ , se obtiene que la restricción de  $\varphi_\alpha$  a  $F_x = p^{-1}(x)$ , que denotamos con  $\varphi_{\alpha, x}$ , es un homeomorfismo de  $F_x$  sobre  $F$ . A  $p^{-1}(x) = F_x$  se le llama la fibra sobre  $x$ .

En efecto:

Como  $p \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$ , entonces  $\varphi_\alpha^{-1}(x, y) \in F_x$ ,  
 Luego  $\varphi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x, y)) = (x, y) \in \{x\} \times F$ .

Fijando  $x$ , sea la aplicación  $j_x: \{x\} \times F \longrightarrow F$   
 definida por  $j_x(x, y) = y$ .

Siendo  $\varphi_\alpha$  y  $j_x$  homeomorfismos; entonces  $\varphi_{\alpha, x} = j_x \circ \varphi_\alpha$   
 es un homeomorfismo.

Ejemplos de Hazes Fibrados.

1.1.1 El Haz Producto  $(B \times F, p, B, F)$ :

El espacio total de este haz es  $B \times F$  y  $p: B \times F \longrightarrow B$  es la proyección sobre el primer factor.

El atlas consta de un solo elemento  $(U, \varphi)$ ; donde  $U = B \times F$  y  $\varphi = I_{B \times F}$ .

Este haz se conoce como el haz trivial.

1.1.2 El Haz Fibrado  $(S^n, p; P^n, Z_2)$ :

Consideremos la esfera unitaria  $S^n$  y sea  $P^n = S^n/Z_2$ , donde  $Z_2 = \{-1, 1\}$ ,  $Z_2$  está provista de la topología discreta, entonces  $P^n = \{[x] = \{x, -x\} / x \in S^n\}$  es el espacio proyectivo real y sea  $p: S^n \longrightarrow P^n$  la función cociente.

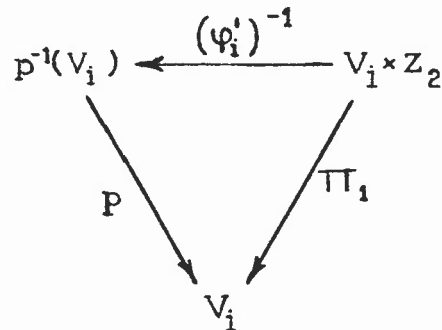
El atlas que consideremos para  $P^n$  consta de los elementos  $(V_i, \varphi_i)$ ; donde  $\varphi_i: V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , está dada por  $\varphi_i = \psi_i^+ \circ p^{-1}$ ; donde  $\psi_i^+: V_i^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $V_i^+ = \{x \in S^n / x^i > 0\}$ .  
o bien  $\varphi_i = \psi_i^- \circ p^{-1}$ , donde  $\psi_i^-: V_i^- \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ; donde  $V_i^- = \{x \in S^n / x^i < 0\}$ .

El atlas del haz fibrado consta de las parejas  $(V_i, \varphi_i)$ ; donde  $\{V_i\}_{i=1, \dots, n+1}$  es un cubrimiento abierto de  $P^n$ , con  $V_i = p(V_i^+) = p(V_i^-)$  y

$\varphi_i' : p^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times Z_2$  el homeomorfismo definido por

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} ([x], 1) & \text{si } x \in V_i^+ \\ ([x], -1) & \text{si } x \in V_i^- \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que el diagrama



es conmutativo.

Observación 1.1.2.

Nótese que el haz fibrado  $(S^n, p, P^n, Z_2)$  no es producto, ya que  $P^n \times Z_2$  no es conexo y por tanto no puede ser igual a  $S^n$  que es conexo.

1.1.3 El Haz tangente a una variedad  $(T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$ :

Sean  $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ .

$T_p(M)$  es el espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $\forall p \in M$ ; donde  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

$T(M)$  tiene una estructura de variedad diferenciable que llamaremos variedad tangente.

En efecto.

Sea  $\{ (U_i, \psi_i) \}_{i \in A}$  un atlas de  $M$ ; luego para

$$\forall i \in A, \psi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Sean  $\pi: T(M) \longrightarrow M$  la función dada por

$$\pi(p, x_p) = p$$

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definida por}$$

$$(p, x_p) \longmapsto (\psi_i(p), a_1, \dots, a_n)$$

puesto que  $x_p$  tiene la expresión

$$x_p = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} / p$$

con respecto a la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  de  $T_p(M)$

definida por la carta local  $(V_i, \psi_i)$  de  $M$  alrededor de  $p$ .

Se comprueba que la colección  $\{ (\pi^{-1}(U_i), \varphi_i) \}_{i \in A}$  es un  $2n$ - atlas, que define una estructura diferenciable de  $T(M)$ . (Ver [ 2 ]).

Es fácil ver que  $T(M)$  es un espacio de Hausdorff con base numerable. Por lo tanto,  $T(M)$  es una variedad diferenciable.

Un atlas para  $(T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$  se obtiene de la manera siguiente.

La imagen de  $\pi^{-1}(U_i)$  por  $\varphi_i$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y además, este abierto está incluido en el abierto  $\psi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ . Luego, se tiene la composición  $(\psi_i^{-1} \times 1) \circ \varphi_i$ , definida como:



$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &\xrightarrow{\psi_i} \psi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_i^{-1} \times 1} U_i \times \mathbb{R}^n \\ (p, x_p) &\rightsquigarrow (\psi_i(p), a_1, \dots, a_n) \rightsquigarrow (p, a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

es decir  $\varphi'_i = (\psi_i^{-1} \times 1) \circ \psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$

$$(p, x_p) \rightsquigarrow (p, a_1, \dots, a_n)$$

se verifica que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi'_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow U_i \\ & U_i & \end{array}$$

Luego  $\{(U_i, \varphi'_i)\}_{i \in A}$  es un atlas para  $(T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$

#### 1.1.4 El grupo estructural de un haz fibrado.

Sean  $\xi = (E, p, B, F)$  un haz fibrado y  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  dos elementos del atlas de  $\xi$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ .

De la condición  $p \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$  se sigue que  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es un homeomorfismo que deja fija la primera componente  $x$  de cada  $(x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ .

En efecto:

$$\text{Sea } \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x, y)) = (a, b) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \quad (1)$$

Como  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  son dos elementos del atlas del haz que satisfacen respectivamente la condición  $p \circ \varphi_\alpha^{-1} = \pi_1$  y  $p \circ \varphi_\beta^{-1} = \pi_1$ ; entonces  $p = \pi_1 \circ \varphi_\alpha$  y  $p = \pi_1 \circ \varphi_\beta$ .

Ahora aplicando  $\pi_1 a(1)$  y simplificando se tiene  $x = a$ .

Tenemos además que  $\varphi_{\beta,\alpha} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}: F \rightarrow F$  es un homeomorfismo. Luego  $(\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})(y) = b$

Por tanto  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, (\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})(y))$ .

Sea ahora  $g_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$

Entonces  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, g_{\beta,\alpha}(x)(y))$  y resulta que  $g_{\beta\alpha}(x)$  es un automorfismo de  $F$ .

Por consiguiente, la transformación  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  que es el cambio de carta, define de manera natural una función  $g_{\beta\alpha}$ :

$$g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow A(F)$$

donde  $A(F)$  es el espacio topológico de los homeomorfismos de  $F$ .

A las funciones  $g_{\beta\alpha}$  se les llama las funciones de transición del haz  $\xi$ .

Sea  $K = \{g_{\beta\alpha}(x) \in A(F) / x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$ ; donde  $(A(F), \circ)$  es el grupo que llamamos El Grupo de los automorfismos de  $F$ .

Sea  $G$  el subgrupo de  $A(F)$  generado por  $K$ . Al grupo topológico  $G$  asociado en forma natural con el haz  $\xi$  se llama el grupo estructural de  $\xi$ .

Proposición 1.1.1

Sean  $U_\alpha$ ,  $U_\beta$  y  $U_\gamma$  vecindades del atlas de  $\xi$ , tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ . Entonces para  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  se satisfacen las siguientes propiedades:

- (a)  $g_{\gamma\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) = g_{\gamma\alpha}(x)$
- (b)  $g_{\alpha\beta}(x) = [g_{\beta\alpha}(x)]^{-1}$
- (c)  $g_{\alpha\alpha}(x) = I_F$

Demostración.

Es inmediata utilizando las definiciones.

Veamos cual es el grupo estructural de los haces fibrados en los tres ejemplos anteriores.

En el haz producto  $(B \times F, p, B, F)$ , como el atlas consta de un solo elemento  $(B, I_{B \times F})$ , se comprueba que tenemos una sola función  $g$  de transición de  $B$  en  $A(F)$  definida como  $g(x) = I_F$ ,  $\forall x \in B$  y por tanto

$$G = \{ I_F \}$$

En el haz  $(S^n, p, P^n, Z_2)$ , la fibra tipo es  $Z_2 = \{-1, 1\}$

Se comprueba que:

$$A(Z_2) = \{ I, f \} ; \text{ donde } I \text{ es la identidad}$$

y  $f$  está definida por  $f(1) = -1$  y  $f(-1) = 1$ .

Sea la aplicación;

$$\varphi : A(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \text{ definida por}$$

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi(f) = -1$$

Se comprueba que  $\varphi$  es un isomorfismo.

Por tanto, podemos identificar  $A(\mathbb{Z}_2)$  con  $\mathbb{Z}_2$ .

Solamente hay dos posibilidades para  $G$  ..

$$G = \mathbb{Z}_2 \quad \delta \quad G = \{1\}$$

puesto que los únicos subgrupos de  $\mathbb{Z}_2$  son  $\mathbb{Z}_2$  y  $\{1\}$ .

Concluimos que:

$$G = A(\mathbb{Z}_2) \quad \delta \quad G = \{1\}$$

Los subgrupos de  $A(\mathbb{Z}_2)$  son  $A(\mathbb{Z}_2)$  y  $\{1\}$ .

Probaremos a continuación que:

$$G = A(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

Sean  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  dos elementos cualesquiera del atlas del haz y  $g_{ji}$  la función determinada por  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ .

Supongamos que  $[x] \in U_i \cap U_j$  con la condición, que  $x \in (U_i^+ \cap U_j^-)$  (x podría pertenecer a  $U_i^- \cap U_j^+$  o bien a  $U_i^- \cap U_j^-$  o bien a  $U_i^+ \cap U_j^+$ ).

Esto implica que:

$$g_{ji}([x]) = -1 \in A(\mathbb{Z}_2)$$

Como  $G$  solamente puede ser  $\mathbb{Z}_2$   $\delta$   $\{1\}$

Entonces  $G = \mathbb{Z}_2$

Con el objeto de calcular el grupo estructural del haz fibrado tangente de una variedad diferenciable recordemos:

- (1) Cada carta local  $(V, \psi)$  de una variedad diferenciable  $M$  alrededor de  $p$  define una base del espacio tangente  $T_p(M)$ .
- (2) Sean ahora  $(V_\alpha, \psi_\alpha)$  y  $(V_\beta, \psi_\beta)$  dos cartas locales del atlas de  $M$ , con  $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ . Para  $p \in V_\alpha \cap V_\beta$ , la carta local  $(V_\alpha, \psi_\alpha)$  define una base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}$  de  $T_p(M)$  y la carta local  $(V_\beta, \psi_\beta)$  define otra base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p \right\}$  de  $T_p(M)$ .

Entonces las componentes de  $X_p$  en la base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p \right\}$ , se obtienen a partir de los componentes de  $X_p$  en la base  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}$  por medio de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ , (Ver [1]).

Ahora, en el haz  $(T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$  consideremos dos elementos cualesquiera  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \psi_\beta)$  del atlas de  $M$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

Sean  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \psi_\beta)$  los elementos correspondientes en el atlas del haz fibrado tangente y

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$  las bases de  $T_p(M)$ , determinadas por las cartas locales  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ ,  $(U_\beta, \psi_\beta)$  para cada  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ .

Si  $X_p \in T_p(M)$ , entonces se tiene:

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x_i) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad X_p = \sum_{i=1}^n X_p(y_i) \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

Se deduce fácilmente que la función

$$g_{\beta\alpha}(p) = \Psi'_{\beta\beta} \circ (\Psi'_{\alpha,\beta})^{-1}$$

actúa de la siguiente manera:

$$g_{\beta\alpha}(p) (X_p(x_1), \dots, X_p(x_n)) = (X_p(y_1), \dots, X_p(y_n))$$

Hemos visto que esta función es precisamente la dada por la matriz jacobiana del cambio de coordenadas

$$\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}.$$

Luego 
$$g_{\beta\alpha}(p) = (d(\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}))$$

Entonces el grupo estructural de este haz es el grupo lineal  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Definición 1.1.2. (definición de Haz Fibrado)

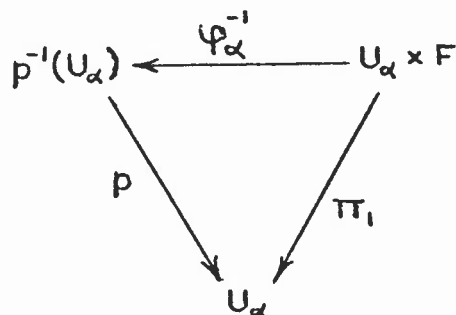
Un haz fibrado  $\xi = (E, p, B, F, G)$  consta de lo siguiente:

- a) Tres espacios topológicos  $E, B$  y  $F$ .
- b) Una función continua  $p$  de  $E$  sobre  $B$ .
- c) Una colección  $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  donde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es un cubrimiento abierto de  $B$  y para cada  $\alpha \in A$

$$\Psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

es un homeomorfismo tal que el siguiente

diagrama.



es conmutativo, es decir  $p \circ \varphi_{\alpha}^{-1} = \pi_1$ , donde  $\pi_1$  es la primera proyección.

d) Un grupo topológico  $G$  y una acción efectiva por la izquierda  $G \times F \longrightarrow F$ .

e) Sean  $\alpha, \beta \in A$ , tales que  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ . Entonces para  $\forall x \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ , el automorfismo de  $F$ ,  $g_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$ , coincide con un elemento de  $G$ .

f) Las funciones de transición  $g_{\beta\alpha}$

$$g_{\beta\alpha}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow G$$

son continuas.

## 1.2 Haces Vectoriales.

### Definición 1.2.1.

Un haz fibrado  $\xi = (E, p, B, F, G)$  se llama un haz vectorial si la fibra tipo  $F$ , es un espacio vectorial sobre los complejos o sobre los reales y el grupo  $G$ , es un grupo de transformaciones lineales de  $F$ . En este caso la estructura de espacio vectorial sobre  $F$  se puede trasladar a cada  $F_x = p^{-1}(x)$  de la manera siguiente:

Sean  $U_1, U_2 \in F_x$ ,  $x \in U_\alpha$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$ ; se define  $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$  por:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = \varphi_{\alpha, x}^{-1} (\lambda_1 \varphi_{\alpha, x}(U_1) + \lambda_2 \varphi_{\alpha, x}(U_2))$$

se comprueba que la definición es independiente del elemento  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  del atlas, que se use.



1.3 Transformaciones de Haces y Equivalencias.

1.3.1 Transformaciones de Haces,

Definición 1.3.1.3.

Sean  $\xi = (E, p, B, F, G)$  y  $\eta = (E', p', B', F, G)$  dos haces fibrados con la misma fibra tipo y el mismo grupo estructural. Denotaremos por  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(U'_\beta, \varphi'_\beta)$  elementos del atlas de  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente. Una transformación de haces fibrados  $h: \xi \longrightarrow \eta$  es una función continua  $h: E \longrightarrow E'$  que satisface las propiedades siguientes:

a) Para cada  $x \in B$ , la restricción  $h_x$  de  $h$  a la fibra  $F_x$ , es un homeomorfismo de  $F_x$  sobre una  $F_{x'}$  de  $E'$ . Se sigue de esto que  $h$  induce una función continua  $h_0: B \longrightarrow B'$ ; tal que  $p' \circ h = h_0 \circ p$ .

b) Para cada  $x \in U_\alpha \cap h_0^{-1}(U'_\beta)$  el automorfismo  $\varphi'_{\beta,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F$  con  $x' = h_0(x)$ , coincide con un elemento de  $G$ .

c) La función  $h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap h_0^{-1}(U'_\beta) \longrightarrow G$ , definida por:

$$h_{\beta\alpha}(x) = \varphi'_{\beta,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1} \text{ es continua.}$$

Proposición 1.3.1.1.

Si  $h: \xi \longrightarrow \eta$  y  $h': \eta \longrightarrow \Theta$  son transformaciones de haces, entonces  $h' \circ h: \xi \longrightarrow \Theta$  también es una transformación de haces. Además la identidad  $I: \xi \longrightarrow \xi$  es una

transformación de haces.

Demostración:

De la hipótesis, utilizando las definiciones se deduce que  $h' \circ h$  es una transformación de haces.

Obviamente,  $I: \xi \longrightarrow \xi$  es una transformación de haces.

### 1.3.2 Equivalencia de Haces.

Sean  $\xi = (E, p, B, F, G)$  y  $\eta = (E', p', B, F, G)$  dos haces fibrados con la misma base, fibra tipo y grupo estructural. Como la acción de  $G$  en  $F$  es efectiva,  $G$  se identifica con un subgrupo de  $A(F)$ . Por lo tanto, cuando se dice que dos haces tienen la misma fibra tipo y el mismo grupo estructural, debe entenderse que la acción de  $G$  en  $F$  es la misma en ambos casos

#### Definición 1.3.2.1.

Dado dos haces  $\xi$  y  $\eta$  con la misma base, fibra tipo y grupo estructural. Se dice que  $\xi$  es equivalente a  $\eta$  y se escribe  $\xi \sim \eta$ , si existe una transformación de haces  $h: \xi \longrightarrow \eta$  tal que  $h_0 = I_B$ .

#### Lema 1.3.2.1

La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los haces fibrados con la misma base, fibra tipo y grupo estructural.

Demostración.

La transitividad y la reflexividad de la relación  $\sim$  se sigue de la proposición 1.3.1.1.

Para la simetría hay que mostrar que: Si  $\xi \sim \eta$  entonces  $\eta \sim \xi$ .

Por hipótesis:

$\xi \sim \eta$  si y solo si  $\exists$  una transformación  $h$  de  $\xi$  en  $\eta$  tal que  $h_0 = I_B$ .

Por demostrar:  $\eta \sim \xi$  o sea  $\exists g: E' \rightarrow E$  transformación del haz  $\eta$  en el haz  $\xi$  tal que  $g_0 = I_B$ .

Fácilmente se comprueba que  $h$  es biyectiva.

Demostraremos que  $g = h^{-1}: E' \rightarrow E$  es una transformación de haces.

Sean  $(U'_\beta, \varphi'_\beta)$  y  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  elementos del atlas de  $\eta$  y  $\xi$  respectivamente; tales que  $U_\alpha \cap U'_\beta \neq \emptyset$ .  
 Para cada  $x \in U_\alpha \cap U'_\beta$ , la aplicación  $\varphi_{\alpha,x} \circ h_x^{-1} \circ (\varphi'_{\beta,x})^{-1}$  es claramente la inversa de  $\varphi'_{\beta,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$ .

Como  $h$  es una transformación de haces, para cada  $x \in B$ , la restricción  $h_x$  de  $h$  a  $F_x$  es un homeomorfismo de  $F_x$  sobre  $F_x$ ; luego la inversa de  $h_x$ , que es  $h_x^{-1}$  es un homeomorfismo de  $F_x$  sobre  $F_x$ .

Además  $h_0^{-1} = I_B$ , puesto que  $h_0 = I_B$ .

Entonces  $h_0^{-1}$  es continua.

Por otro lado, como para todo  $x \in U_\alpha \cap U'_\beta$ ,  $\varphi'_{\beta,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$  coincide con un elemento de  $G$ , entonces  $\varphi_{\alpha,x} \circ h_x^{-1} \circ (\varphi'_{\beta,x})^{-1}$  coincide con un elemento de  $G$ ; y puesto que  $h_0(x) = x$  se tiene que  $x = h_0^{-1}(x)$ .

Ahora, la función  $h_{\alpha\beta}^{-1} : U'_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G$  dada por  $h_{\alpha\beta}^{-1}(x) = \varphi_{\alpha,x} \circ h_x^{-1} \circ (\varphi'_{\beta,x})^{-1}$  es continua.

Probemos ahora la continuidad de  $h^{-1}$ .

La restricción de  $h^{-1}$  a  $(p')^{-1}(U'_\beta \cap U_\alpha)$  la podemos representar así:

$$h^{-1}(u') = \varphi_\alpha^{-1}(x, (h_{\alpha\beta}^{-1}(x) \circ \varphi_{\beta,x})(u')),$$

donde  $x = p'(u')$ .

Ahora de  $x = p'(u')$  se deduce que:

$$u' \in (p')^{-1}(x) = F_x \subseteq (p')^{-1}(U'_\beta \cap U_\alpha).$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) &\longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times F, \text{ por lo tanto} \\ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times F &\longrightarrow p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \end{aligned}$$

Además:

$$h_{\alpha\beta}^{-1}(x) \circ \varphi_{\beta,x} : F_x \longrightarrow F \text{ es un homeomorfismo.}$$

Como  $u' \in F_x$ , entonces  $(h_{\alpha\beta}^{-1}(x) \circ \varphi_{\beta,x})(u') \in F$ ; luego  $\varphi_\alpha^{-1}(x, (h_{\alpha\beta}^{-1}(x) \circ \varphi_{\beta,x})(u')) \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$

como  $u' \in (p')^{-1}(U'_\beta \cap U_\alpha)$ , entonces  $h'(u') \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ ; luego  $h^{-1}$  está bien definida.

$h^{-1}$  restringida a  $(p')^{-1}(U'_\beta \cap U_\alpha)$  es continua por ser una composición de funciones continuas.

Como los abiertos  $(p')^{-1}(U'_\beta \cap U_\alpha)$  cubren a  $E'$  y el cubrimiento es abierto, se sigue que  $h^{-1}$  es continua, por ser una función de pegamento.

Se sigue fácilmente que  $h^{-1}$  induce una función continua  $h_0^{-1}$  de  $B$  sobre  $B$  tal que:

$$p \circ h^{-1} = h_0^{-1} \circ p'$$

es decir  $p \circ h^{-1} = p'$

Proposición 1.3.2.2.

Sean  $\xi$  y  $\xi'$  dos haces con la misma base, fibra tipo y grupo estructural y  $h: \xi \rightarrow \xi'$  una equivalencia; es decir  $h$  es una transformación de  $\xi$  en  $\xi'$  tal que

$h_0 = I_B$ . Sea  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  el atlas de  $\xi$  y  $\{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}_{\beta \in A'}$  el atlas de  $\xi'$ .

Sea por último  $h_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U'_\beta \rightarrow G$  las funciones dadas por:

$$h_{\alpha\beta}(x) = \varphi'_{\alpha,x} \circ h_x \circ \varphi_{\beta,x}^{-1}$$

Entonces:

$$(*) \begin{cases} h_{\gamma\alpha}(x) = h_{\gamma\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) & x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \\ h_{\gamma\alpha}(x) = g'_{\gamma\beta}(x) h_{\beta\alpha}(x) & x \in U_\alpha \cap U'_\beta \cap U'_\gamma \end{cases}$$

Demostración:

Es inmediata utilizando las definiciones.

A la clase de equivalencia de un haz  $\xi$  bajo la relación  $\sim$  la denotaremos con  $[\xi]$  y a  $[\xi]$  también lo llamaremos un haz.

veamos algunos criterios de equivalencia en términos de vecindades coordinadas.

Proposición 1.3.2.3.

Sean  $\xi$  y  $\xi'$  dos haces con la misma base, fibra tipo y grupo estructural. Entonces  $\xi$  es equivalente a  $\xi'$ , si y solo si existen funciones continuas.

$$h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$$

que satisfacen:

$$h_{\delta\alpha}(x) = h_{\delta\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) \quad , \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\delta$$

$$h_{\delta\alpha}(x) = g'_{\delta\beta}(x) h_{\beta\alpha}(x) \quad , \quad x \in U_\alpha \cap U_{\beta'} \cap U'_\delta$$

Demostración.

supongamos que  $\xi$  es equivalente a  $\xi'$

Sean  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  el atlas de  $\xi = (E, p, B, F, G)$  y

$\{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}_{\beta \in A'}$  el atlas de  $\xi' = (E', p', B, F, G)$

Por la proposición 1.3.2.2. se obtienen las funciones  $h_{\beta\alpha}$  con las propiedades dadas.

Supongamos que son dadas las funciones continuas

$h_{\beta\alpha}$  tales que:

$$h_{\beta\alpha}(x) = h_{\beta\delta}(x) g_{\delta\alpha}(x)$$

$$h_{\beta\alpha}(x) = g'_{\beta\delta}(x) h_{\delta\alpha}(x).$$

construiremos una equivalencia  $f: \xi \longrightarrow \xi'$ , es decir una transformación  $f: E \longrightarrow E'$  tal que  $f_0 = I_B$ .

Consideremos para cada  $\alpha \in A$  y  $\beta \in A'$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ , la función

$$f^{\beta\alpha}: p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow (p')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

definida por:

$$f^{\beta\alpha}(u) = (\varphi'_\beta)^{-1}(x, h_{\beta\alpha}(x) \cdot \varphi_{\alpha,x}(u))$$

con  $x = p(u)$ .

Como  $x = p(u)$  se tiene que  $u \in p^{-1}(x) = F_x \subseteq p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ ,

$h_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha,x}: F_x \longrightarrow F$  es un homeomorfismo, donde

$$h_{\beta\alpha}(x) = \varphi'_{\beta,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$$

Ahora, como  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  y  $h_{\beta\alpha}(x) \varphi_{\alpha,x}(u) \in F$ ;

entonces  $(x, h_{\beta\alpha}(x) \varphi_{\alpha,x}(u)) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ ;

luego  $(\varphi'_\beta)^{-1}(x, h_{\beta\alpha}(x) \varphi_{\alpha,x}(u)) \in (p')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$

Así tenemos que  $f^{\beta\alpha}$  está bien definida.

$f^{\beta\alpha}$  sobre la fibra  $F_x$  es inyectiva; luego para

$$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \quad f^{\beta\alpha}: p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow (p')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es biyectiva.

Ahora como:

$$f^{\beta\alpha} = (\varphi')^{-1} \circ \text{id} \times (h_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha,x}) \circ i_x^{-1}: F_x \longrightarrow (p')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

resulta continua, por ser una composición de funciones continuas;

luego  $\forall u \in p^{-1}(U_\alpha \cap U'_\beta)$  tal que  $x = p(u)$ .

$f^{\alpha} (u) = (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, h_{\beta, \alpha}(x) \cdot \varphi_{\alpha, x}(u))$  es continua.

Como  $f^{\alpha}$  es inyectiva; entonces existe la inversa

$(f^{\alpha})^{-1} : (p')^{-1}(U_\alpha \cap U'_\beta) \longrightarrow F_x$  que está definida

por:

$$(f^{\alpha})^{-1}(u') = \varphi_{\alpha, x}^{-1} \circ h_{\beta, \alpha}^{-1}(x) \circ \varphi'_{\beta, x}(u')$$

Con  $p'(u') = x$ .

$(f^{\alpha})^{-1}$  es continua para cada  $x \in U_\alpha \cap U'_\beta$ .

Luego  $f^{\alpha}$  es un homeomorfismo que lleva fibras sobre  $x$  en fibras sobre  $x$ .

Si  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \neq \emptyset$ , se comprueba fácilmente que las funciones  $f^{\alpha}$  y  $f^{\beta}$  coinciden en su dominio común  $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma)$ .

Tenemos así que para cada miembro  $p^{-1}(U_\alpha \cap U'_\beta)$  de un cubrimiento de abiertos del espacio  $E$  es dado una función  $f^{\alpha}$  continua en el espacio  $E'$ , tal que:

$$\frac{f^{\alpha}}{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma)} = \frac{f^{\beta}}{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma)}$$

para cada par de miembros  $p^{-1}(U_\alpha \cap U'_\beta)$ ,  $p^{-1}(U_\beta \cap U'_\gamma)$  del cubrimiento de  $E$ . Entonces podemos definir una



función llamada de pegamento.

$$f: E \longrightarrow E'$$


$$u \rightsquigarrow f(u) = f^{\delta\alpha}(u), u \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Como el cubrimiento es abierto, la función de pegamento es continua y como cada  $f^{\delta\alpha}$  es abierta, entonces  $f$  es abierta. Luego  $f$  es un homeomorfismo de  $E \longrightarrow E'$ ; es decir, las funciones  $f^{\delta\alpha}$  definen un homeomorfismo  $t: E \longrightarrow E'$  que lleva fibras sobre  $x$  en fibras sobre  $x$  e induce la identidad en la base común.

Además para todo  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ , el automorfismo

$$\varphi_{\beta,x} \circ f^{\delta\alpha} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}: F \longrightarrow F, f_\alpha(x) = x.$$

coincide con un elemento de  $G$  y la función


$h_{\delta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ , definida por  $h_{\delta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ f^{\delta\alpha} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$  es continua; luego  $f$  es una transformación de haces, que da una equivalencia entre  $\xi$  y  $\xi'$ . 

Proposición 1.3.2.4.

Sea  $\xi = (E, p, B, F, G)$  un haz y  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  su atlas. Sea  $\{U'_\beta\}$  un refinamiento de  $\{U_\alpha\}$ , es decir  $\{U'_\beta\}$  es una cubierta abierta de  $B$ , tal que cada  $U'_\beta$  está contenida en algún  $U_\alpha$ . Para cada  $U'_\beta$  consideremos todos los  $U_\alpha$  que lo contienen y definamos  $\varphi'_{\beta,\alpha}: p^{-1}(U'_\beta) \longrightarrow U'_\beta \times F$  como la restricción de  $\varphi_\alpha$  a  $p^{-1}(U'_\beta)$ .

La colección de todas las parejas  $(U'_\beta, \varphi'_{\beta,\alpha})$ , definen un nuevo haz  $\xi'$  con el mismo espacio total, proyección, base, fibra tipo y grupo estructural que  $\xi$ . Entonces  $\xi$  es equivalente a  $\xi'$ .

Demostración.

Inmediata utilizando la proposición 1.3.2.3. 

Corolario:

Sean  $\xi$  y  $\eta$  dos haces con la misma base y sean  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  y  $\{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}$  los atlas de  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente.

Los abiertos de la forma  $U_\alpha \cap U'_\beta$  son un refinamiento común a las cubiertas  $\{U_\alpha\}$  y  $\{U'_\beta\}$ .

La colección de las parejas  $(U_\alpha \cap U'_\beta, \varphi'_{\beta,\alpha})$  define un nuevo haz  $\xi'$  y la colección de parejas  $(U_\alpha \cap U'_\beta, \varphi_{\beta,\alpha})$  define un nuevo haz  $\eta'$ .

Entonces  $\xi \sim \xi'$  y  $\eta \sim \eta'$

Los haces  $\xi'$  y  $\eta'$  tienen las mismas vecindades coordenadas  $\{(U_\alpha \cap U'_\beta)\}$ .

Proposición 1.3.2.5.

Sean  $\xi$  y  $\eta$  dos haces con la misma base, fibra tipo, grupo estructural y vecindades coordenadas. Sean  $\{g_{\beta\alpha}\}$  y  $\{g'_{\beta\alpha}\}$  las funciones de transición de  $\xi$  y  $\eta$

respectivamente. Entonces  $\xi$  es equivalente a  $\eta$  si y solo si, existen funciones continuas  $\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G$ , tales que:

$$g'_{\beta\alpha}(x) = \lambda_\beta(x) g_{\beta\alpha}(x) \lambda_\alpha^{-1}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Demostración:

Sean  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  el atlas de  $\eta$ . Sea  $x \in U_\beta \cap U_\alpha$ . Como  $g_{\beta\alpha}$  y  $g'_{\beta\alpha}$  son funciones de transición; además  $\lambda_\beta(x)$  y  $\lambda_\alpha(x)$  son funciones continuas de  $F$  sobre  $F$ , es decir  $\lambda_\alpha(x), \lambda_\beta(x) \in G$ . Entonces  $\lambda_\alpha^{-1}(x) \in G$  porque  $G$  es un grupo; luego  $\lambda_\alpha^{-1}(x)$  es una función de  $F$  sobre  $F$ , y por lo tanto  $g'_{\beta\alpha}$  está bien definida.

Supongamos primero que  $\xi$  es equivalente a  $\eta$ , y sea  $h: \xi \longrightarrow \eta$  una equivalencia. Por la proposición 1.3.2.3. existen funciones continuas  $h_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$  tales que:

$$h_{\beta\alpha}(x) = h_{\beta\tau}(x) \circ g_{\tau\alpha}(x), \quad x \in U_\tau \cap U_\alpha \cap U'_\beta$$

$$h_{\beta\alpha}(x) = g'_{\beta\tau}(x) \circ h_{\tau\alpha}(x), \quad x \in U'_\beta \cap U'_\tau \cap U_\alpha$$

Definamos  $\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G$  por

$$\lambda_\alpha(x) = h_{\alpha\alpha}(x) = \varphi'_{\alpha,x} \circ h_x \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}$$

$\lambda_\alpha$  está bien definida, puesto que  $h$  es una equivalencia.

Ahora resulta que  $\lambda_\beta(x) \circ g_{\beta\alpha}(x) \circ \lambda_\alpha^{-1}(x) = g'_{\beta\alpha}(x)$ .

Recíprocamente,

Supongamos ahora que son dadas funciones continuas  $\{\lambda_\alpha\}$  que satisfacen la igualdad

$$g'_{\beta\alpha}(x) = \lambda_\beta(x) \circ g_{\beta\alpha}(x) \circ \lambda_\alpha^{-1}(x)$$

Definamos  $h^\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow (p')^{-1}(U_\alpha)$  por

$$h^\alpha(u) = (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, \lambda_\alpha(x) \varphi_{\alpha,x}(u)), \quad x = p(u).$$

Se comprueba fácilmente que  $h^\alpha$  está bien definida y que  $h^\alpha$  sobre la fibra  $F_x$  es biyectiva, como  $h^\alpha$  es biyectiva, existe la inversa  $(h^\alpha)^{-1}$ ,

$(h^\alpha)^{-1} : (p')^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow F_x$  está definida por

$$(h^\alpha)^{-1}(u') = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \circ \lambda_\alpha^{-1}(x) \circ \varphi'_{\alpha,x}(u'); \text{ con}$$

$$p'(u') = x.$$

$(h^\alpha)^{-1}$  es continua para cada  $x \in U_\alpha$ .

De aquí resulta que  $h^\alpha$  es un homeomorfismo que lleva fibras sobre  $x$  en fibras sobre  $x$ .

Tenemos así que para cada miembro  $p^{-1}(U_\alpha)$  de un cubrimiento de abiertos del espacio  $E$  está dada una función continua  $h^\alpha$  en el espacio  $E'$ , tal que:

$$\frac{h^\alpha}{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} = \frac{h^\beta}{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

para cada par de miembros  $p^{-1}(U_\alpha)$ ,  $p^{-1}(U_\beta)$  del cubrimiento de  $E$ . Entonces podemos definir una función de pegamento  $h$ ,

$$h : E \longrightarrow E'$$

$$u \longmapsto h(u) = h^\alpha(u), u \in p^{-1}(U_\alpha)$$

Como el cubrimiento es abierto, la función de pegamento es continua. Como cada  $h^\alpha$  es abierta; entonces  $h$  es abierta.

Luego  $h$  es un homeomorfismo de  $E$  sobre  $E'$ , es decir las funciones  $h^\alpha$  definen un homeomorfismo  $h: E \longrightarrow E'$  que envía fibras sobre  $x$  en fibras sobre  $x$  e induce la identidad en la base común.

Además para todo  $x \in U$ , el automorfismo

$$\varphi'_{\alpha,x} \circ h^\alpha \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1} : F \longrightarrow F; h_0(x) = x.$$

Coincide con un elemento de  $G$ ; y la función

$h_{\alpha\alpha} : U_\alpha \longrightarrow G$ , definida por

$$h_{\alpha\alpha}(x) = \varphi'_{\alpha,x} \circ h^\alpha \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1} \text{ es continua.}$$

Luego  $h$  es una transformación de haces tal que

$h_0 = I_B$ , es decir la función

$$h : E(\xi) \longrightarrow E'(\eta) \text{ definida por}$$

$$h \Big/_{p^{-1}(U_\alpha)} = h^\alpha \text{ es una equivalencia}$$

entre  $\xi$  y  $\eta$ .  $\odot$

Nota: Recordemos que el haz producto  $(B \times F, p_1, B, F)$  tiene grupo estructural  $G = \{I_F\}$  y el atlas consta de un solo elemento  $(B, I_{B \times F})$ . Este haz lo denotaremos por:

$$(B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$$

Corolario 1.3.2.6.

Sean  $\xi = (E, p, B, F, G)$  un haz donde  $G = \{I_F\}$ . Entonces  $\xi$  es equivalente al haz producto  $(B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$ .

Demostración:

Sea  $\eta$  el haz obtenido a partir de  $(B \times F, p', B, F, \{I_F\})$  al considerar un nuevo atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , donde  $\{U_\alpha\}$  son las vecindades coordenadas del atlas de  $\xi$  y para cada  $\alpha$ ,  $\varphi_\alpha: p'^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$  es la identidad. Sabemos que  $\eta \sim (B \times F, p', B, F, \{I_F\})$ .

Por otro lado si definimos  $\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \{I_F\}$  para cada  $\alpha$  tal que:

$$g'_{\beta\alpha}(x) = \lambda_\beta(x) g_{\beta\alpha}(x) \lambda_\alpha^{-1}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Por la proposición 1.3.2.5, se sigue que  $\xi \sim \eta$ .

Por lo tanto  $\xi \sim (B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$  por el lema 1.3.2.1.

1.4 Extensión del Grupo Estructural de un Haz.

Proposición 1.4.1.

Sean  $\xi = (E, p, B, F, H)$  un haz fibrado con grupo estructural  $H$ , donde:

$H$  es un subgrupo cerrado del grupo topológico  $G$ .

Supongamos que  $\mu' : G \times F \rightarrow F$  es una acción efectiva tal que la restricción

$$\mu' / H \times F = \mu : H \times F \rightarrow F$$

Si consideramos las funciones de transición  $g_{\beta\alpha}$  de  $\xi$ , obtenemos un nuevo haz  $\xi_G = (E, p, B, F, G)$  que difiere de  $\xi$  sólo por el grupo estructural.

Demostración.

Consideremos el atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  del haz fibrado  $\xi$  y las funciones de transición  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H$ .

Definamos  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} H \xrightarrow{i} G$  por

$$g_{\beta\alpha} - i \circ g_{\beta\alpha}$$

donde  $i$  es la inclusión.

Sean  $U_\alpha, U_\beta$  y  $U_\gamma$  vecindades del atlas de  $\xi$ , tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = \emptyset$  se comprueba fácilmente que para  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

se cumple:

$$g_{\beta\alpha}(x) \cdot \bar{g}_{\beta\alpha}(x) = \bar{g}_{\beta\alpha}(x) \\ g_{\alpha\alpha}(x) - I_F$$

Tenemos que, como  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  con  $\alpha, \beta \in A$  y  $\bar{g}_{\beta\alpha}(x) \in A(F)$ , entonces  $G$  es el subgrupo de  $A(F)$  generado por los  $\bar{g}_{\beta\alpha}(x)$ .


Por otro lado, como  $g_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$  entonces  $\bar{g}_{\beta\alpha}(x) = (i \circ g_{\beta\alpha})(x) = i(g_{\beta\alpha}(x))$   
 $= i(\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})$

es decir  $\bar{g}_{\beta\alpha}(x)$  es un automorfismo de  $F$  que coincide con un elemento de  $G$ .

Las funciones de transición  $\bar{g}_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$  son continuas.

Entonces  $G$  es el grupo topológico asociado en forma natural con el nuevo haz  $\xi_G = (E, p, B, F, G)$ .

En este caso se dice que  $\xi$  admite una imagen en  $G$  y el haz  $\xi_G$  se le llama la  $G$ -imagen de  $\xi$ .

Sea  $\eta = (E', p', B, F, K)$  con la misma base y fibra tipo que  $\xi$  y donde  $K$  es también un subgrupo cerrado de  $G$ . Claramente  $\eta$  tiene también una imagen  $\eta_G$  en  $G$ . 

Definición 1.4.1.

Se dice que  $\xi$  es  $G$ -equivalente a  $\eta$  si  $\xi_G \sim \eta_G$ , donde  $\eta_G = (E', p', B, F, G)$ .



Definición 1.4.2.

Se dice que  $\xi = (E, p, B, F, H)$  es un haz G-trivial, si  $\xi_G$  es equivalente a la G-imagen del haz producto  $(B \times F, p_1, B, \{I_F\})$ .

Proposición 1.4.2.

Sea H un subgrupo cerrado del grupo estructural G y  $\xi = (E, p, B, F, H)$  un haz que admite una imagen  $\xi_G$  en G. Entonces  $\xi$  es G-trivial, si y solo si, existen funciones continuas  $\lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ , tales que:

$$g_{\beta\alpha}(x) = \lambda_\beta^{-1}(x) \lambda_\alpha(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

donde las  $\{g_{\beta\alpha}\}$  son las funciones de transición de

Demostración:

Tenemos por hipótesis:  $\xi = (E, p, B, F, H)$

$$\xi_G = (E, p, B, F, G)$$

Sabemos que:

$\xi$  es G-trivial si y sólo si  $\xi_G \sim$  a la G-imagen del haz producto.

Sea  $\eta$  el haz que se obtiene a partir del haz producto  $(B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$  al considerar un nuevo atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  donde  $\{U_\alpha\}$  son las vecindades coordenadas del atlas de  $\xi$  y para cada  $\alpha$ ,

$$\varphi_\alpha: p_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \text{ es la identidad. El haz}$$

es  $(B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$ . Sabemos que  $\eta \sim (B \times F, p_1, B, F, \{I_F\})$ .

$\{I_F\}$  es un subgrupo cerrado de  $G$ .

Como  $G$  actúa en  $F$  por la izquierda de manera efectiva, se tiene la  $G$ -imagen de  $\eta$ ; esta es  $\eta_G$ , donde  $\eta_G = (B \times F, p_1, B, F, G)$ .

Como  $\{g_{\beta\alpha}\}$  son las funciones de transición de  $\xi$ ; entonces  $\{\bar{g}_{\beta\alpha}\}$  constituyen las funciones de transición de  $\xi_G$ , donde  $\bar{g}_{\beta\alpha} = i \circ g_{\beta\alpha}$

En el haz producto solamente existe una función de

transición  $g : B \longrightarrow \{I_F\}$

El haz  $\eta$  está provisto de la misma función de transición  $g$ .

Luego la función de transición de  $\eta_G$  es  $\{\bar{g}_{\beta\alpha}\}$  (un solo elemento), donde  $\bar{g}_{\beta\alpha} = i \circ g$ .

$$g_{\beta\alpha} = i \circ g = U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{g} \{I_F\} \xrightarrow{i} G$$

Los haces  $\xi_G$  y  $\eta_G$  tienen la misma base, fibra tipo y grupo estructural y vecindades coordinadas.

Este caso constituyen un caso particular de la proposición 1.3.2.5.

Entonces

$\xi_G \sim \eta_G$  si y solo si, existen funciones continuas

$$\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G \text{ tales que: } \bar{g}_{\beta\alpha}^{-1} = \lambda_\beta(x) \bar{g}_{\beta\alpha}(x) \lambda_\alpha^{-1}(x)$$

lo que se comprueba fácilmente.

1.5 Teorema de Existencia y Unicidad de un Haz, dado un Sistema de Transición.

Sistema de Transición.

Sea  $\xi$  un haz con atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Podemos considerar que el espacio total  $E(\xi)$  está formado por piezas  $U_\alpha \times F$ , pegadas entre si de acuerdo a ciertas reglas. Estas reglas son precisamente las funciones de transición  $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ .

" Vamos a ver que las  $\{g_{\beta\alpha}\}$ , junto con la acción de  $G$  en  $F$ , determinan a  $[\xi]$  ".

Definición 1.5.1.

Sea  $B$  un espacio y  $G$  un grupo topológico. Se llama un sistema de transición en  $B$  con valores en  $G$  a una colección  $\{U_\alpha, g_{\beta\alpha}\}_{\alpha \in A}$  donde las  $U_\alpha$  forman una cubierta abierta de  $B$  y las  $g_{\beta\alpha}$  son funciones continuas

$$g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

tales que para todo  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  se cumple

$$g_{\gamma\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) = g_{\gamma\alpha}(x)$$

$$g_{\alpha\alpha}(x) = I_F.$$

Teorema 1.5.1. (Teorema de Existencia y Unicidad):

Sea  $\{(U_\alpha, \mathcal{G}_{\beta\alpha})\}_{\alpha \in A}$  un sistema de transición en B con valores en G y supongamos que G actúa por la izquierda y efectivamente en un espacio F. Entonces existe un haz  $\xi$ , con base B, fibra tipo F, grupo estructural G y funciones de transición  $\{\mathcal{G}_{\beta\alpha}\}$ . Además este haz es único salvo equivalencia.

Demostración:

Sea  $D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times F \times \{\alpha\}$  la unión disjunta de los espacios  $U_\alpha \times F \times \{\alpha\}$ . Cada uno de estos tiene la topología producto.

El conjunto A de índices tiene la topología discreta. Sabemos que

$$B \times F \times A \supseteq U_\alpha \times F \times \{\alpha\}.$$

Luego  $U_\alpha \times F \times \{\alpha\}$  es abierto en  $B \times F \times A$ .

Vamos a proveer a  $D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times F \times \{\alpha\}$  de una topología, de la manera siguiente:

un subconjunto V de D es abierto, si y solo si

$$V \cap U_\alpha \times F \times \{\alpha\} \text{ es abierto en } U_\alpha \times F \times \{\alpha\} \text{ para } \forall \alpha \in A.$$

Ahora definamos en D la siguiente relación binaria.

$$(x, y, \alpha) \sim (x', y', \beta) \text{ si y sólo si } x = x', y' = \mathcal{G}_{\beta\alpha}(x)y$$

Se comprueba que esta relación es de equivalencia.

Sea  $E$  el espacio cociente de  $D$  bajo esta relación, es decir  $E = D/\sim$  y  $q: D \longrightarrow E$  la función cociente.

Los puntos de  $E$  los denotaremos con  $\{x, y, \alpha\}$  (clases de equivalencia).

Sea  $p: E \longrightarrow B$ , dada por  $p(\{x, y, \alpha\}) = x$ .

Sea  $U$  abierto en  $B$ . Como  $U \subseteq B$ ; entonces  $p^{-1}(U) \subseteq E$ ; luego  $q^{-1}(p^{-1}(U)) \subseteq D$ ; de donde

$$q^{-1}(p^{-1}(U)) = \bigcup_{\alpha \in A} V \cap (U_\alpha \times F \times \{\alpha\})$$

luego  $q^{-1}(p^{-1}(U))$  es abierto en  $D$ , entonces  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $E$ . Y por tanto  $p$  es continua.

Ahora Definamos

$$\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F, \text{ por } \varphi_\alpha(\{x, y, \alpha\}) = (x, y).$$

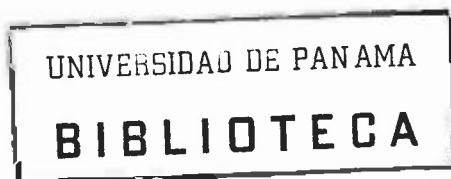
Se deduce que  $\varphi_\alpha$  está bien definida y es biyectiva.

Como  $\varphi_\alpha$  es biyectiva, su inversa  $\varphi_\alpha^{-1}$  está dada por:

$$\varphi_\alpha^{-1}((x, y)) = \{x, y, \alpha\} = q(\{x, y, \alpha\})$$

La continuidad de  $\varphi_\alpha^{-1}$  se sigue de la continuidad de  $q$ .

Para la continuidad de  $\varphi_\alpha$  basta probar que si  $W$  es abierto en  $U_\alpha \times F$ , entonces para toda  $\beta \in A$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  se cumple que  $W_\beta = q^{-1}(\varphi_\alpha^{-1}(W)) \cap U_\beta \times F \times \{\beta\}$  es abierto en  $U_\beta \times F \times \{\beta\}$ .



Sabemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{-1} : U_{\alpha} \times F &\longrightarrow p^{-1}(U_{\alpha}) \subset E \\ W &\xrightarrow{\quad} \varphi_{\alpha}^{-1}(W) \\ q^{-1} : E &\longrightarrow D \\ & \\ & q^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(W)) \in D \end{aligned}$$

Ahora bien  $W_{\beta} = \left\{ (x, y, \beta) / (x, g_{\alpha\beta}(x) y) \in W \right\}$  es precisamente la imagen inversa de  $W$  bajo la función continua.

$$\begin{aligned} U_{\alpha} \cap U_{\beta} \times F \times \beta &\longrightarrow U_{\beta} \times F \\ (x, y, \beta) &\xrightarrow{\quad} (x, g_{\alpha\beta}(x) y) \end{aligned}$$

Luego  $W_{\beta}$  es abierto en el subespacio  $U_{\beta} \times F \times \{\beta\}$  y por lo tanto  $q^{-1}(\varphi_{\alpha}^{-1}(W))$  es abierto en  $D$ . Entonces

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(W) \text{ es abierto en } p^{-1}(U_{\alpha}).$$

Por lo tanto  $\varphi_{\alpha}$  es continua.

Además se deduce que  $p \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(x, y) = x$ .

Hasta aquí se ha construido el atlas  $\left\{ (U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \right\}_{\alpha \in A}$

Luego, tenemos que:

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(x, y) \in p^{-1}(x) = F_x$$

Tenemos  $\varphi_{\alpha}$  restringida a  $F_x$ .

De la condición  $p \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(x, y) = x$ , se deduce que la restricción de  $\varphi_{\alpha}$  a  $F_x = p^{-1}(x)$  es un homeomorfismo

$$\varphi_{\alpha, x} : F_x \longrightarrow F.$$

se observa que  $\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(\gamma) = g_{\beta\alpha}(x)\gamma$  ; de donde se sigue que  $\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1} \in G$  , y que las funciones de transición del haz  $\xi$  , que hemos construido, coinciden con las  $\{g_{\beta\alpha}\}$  dadas en la hipótesis.

Finalmente, sea  $\eta$  otro haz con base B, fibra tipo F, grupo estructural G y funciones de transición  $\{g_{\beta\alpha}\}$ .

Definamos  $\lambda_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G$ , por:

$$\lambda_\alpha(x) = I_F \in G, \text{ para toda } x \in U_\alpha \text{ y para toda } \alpha \in A.$$

$$\text{Luego } g_{\beta\alpha}(x) = \lambda_\beta(x) g_{\beta\alpha}(x) \lambda_\alpha^{-1}(x),$$

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Por tanto  $\xi \sim \eta$ .  $\blacklozenge$



1.6 Foliaciones. Definiciones y Ejemplos.

Definición 1.6.1.

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y clase  $C^r$ . Una foliación de clase  $C^r$  y dimensión  $n$  de  $M$ , es un atlas maximal  $\mathcal{F}$  de clase  $C^r$  en  $M$  con las siguientes propiedades:

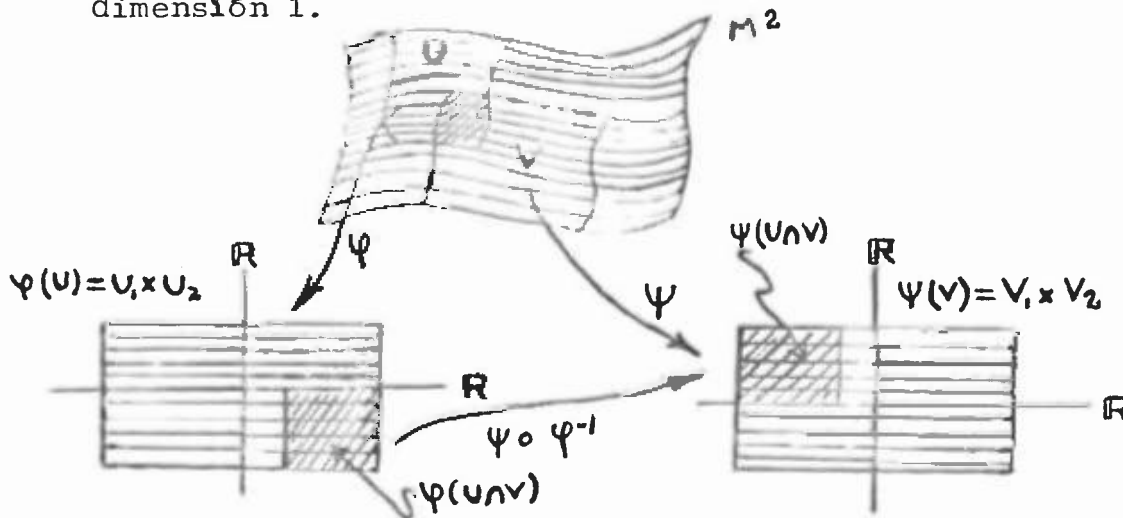
- a) Si  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  entonces  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  donde  $U_1$  y  $U_2$  son discos de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^{m-n}$  respectivamente.
- b) Si  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  son tales que  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces el cambio de cartas  $\psi \circ \varphi^{-1}$ :

$\varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$  es de la forma:

$$(*) \psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

Decimos también que  $M$  es foliada por  $\mathcal{F}$ , o que  $\mathcal{F}$  es una estructura foliada de dimensión  $n$  y clase  $C^r$  sobre  $M$ .

En la figura que sigue ilustramos el aspecto Local de una variedad de dimensión 2 foliada por una foliación de dimensión 1.



Observación 1.6.1.

Se observa que

$$h_1: \varphi(U \times V) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \longmapsto h_1(x, y)$$

es la primera proyección

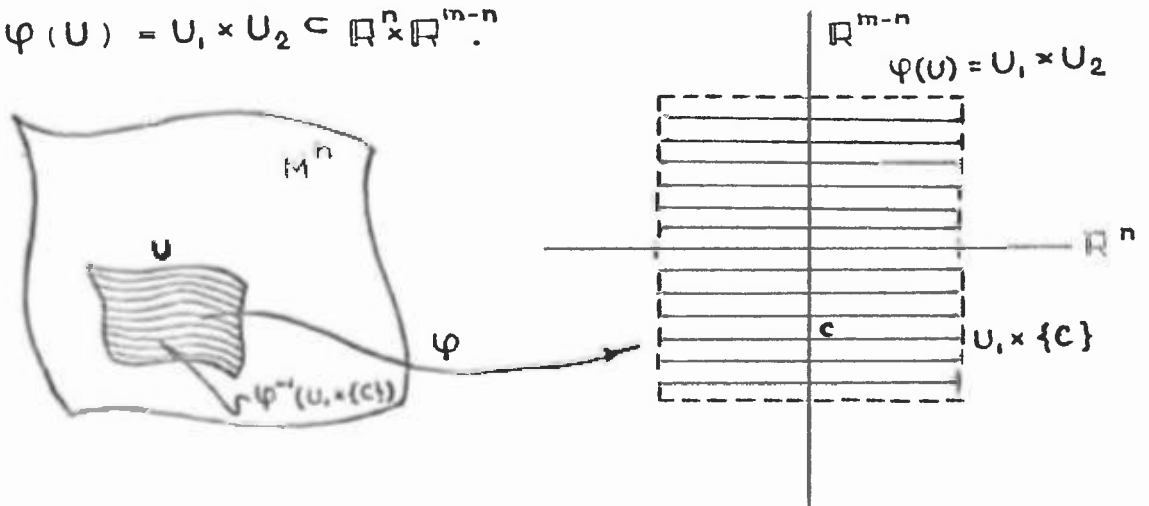
$h_2$  es la función que manda  $y \in U_2$  en  $h_2(y) \in \mathbb{R}^{m-n}$ ; es decir:

$$h_2: U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$$

$$y \longmapsto h_2(y)$$

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de clase  $C^r$  y dimensión  $n$ ,  $0 < n < m$  de una variedad  $M$  de dimensión  $m$ .

Consideremos una carta  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ .



Definición 1.6.2.

A los conjuntos de la forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  con  $c \in U_2$  se les llaman placas de  $U$ , o también placas de  $\mathcal{F}$ .

Proposición 1.6.1.

Las placas son subvariedades conexas de dimensión  $\underline{n}$  y clase  $C^r$  de  $M$ .

Demostración:

Fijado  $c \in U_2$ , la aplicación

$$f = \varphi^{-1}/_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \longrightarrow U$$

es una inmersión difeomórfica de clase  $C^r$ .

En efecto:

Sea  $p \in \varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ . Entonces existe

$$\varphi^{-1} = \varphi/U' : U' \longrightarrow U'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, \text{ con } p \in U'$$

tal que:

$$\varphi(\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\}) \cap U') = U'' \cap \mathbb{R}^n$$

Luego  $f(U_1 \times \{c\}) = \varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  es una subvariedad diferenciable.

$f$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$ .

Por consiguiente, las placas son subvariedades de clase  $C^r$ .

Las placas son conexas y de dimensión  $n$ , puesto que los conjuntos  $U_1 \times \{c\} = \{(x, c) / x \in U_1\}$  son conexas, de dimensión  $n$  y las cartas  $\varphi$  son homeomorfismos .

Además si  $\alpha$  y  $\beta$  son placas de  $U$ , entonces

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \text{ o } \alpha = \beta$$

Definición 1.6.3.

Un camino de placas de  $\mathcal{F}$  es una sucesión  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas de  $\mathcal{F}$  tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Como las placas de  $\mathcal{F}$  cubren a  $M$  podemos definir la siguiente relación binaria:

$p R q$  si y sólo si existe un camino de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  con  $p \in \alpha_1$  y  $q \in \alpha_k$ .

Se comprueba que  $R$  es una relación de equivalencia.

Definición 1.6.4.

A las clases de equivalencia de la relación  $R$  llamamos hojas de  $\mathcal{F}$ .

Recordemos que:

- a) Una aplicación  $f: M^m \longrightarrow N^n$  es una submersión de clase  $C^k$  si y solo si  $\forall x \in M, Df(x): T_x(M) \longrightarrow T_x(N)$  es suryectiva.
- b) Sea  $f: M \longrightarrow N$  una aplicación de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Un punto  $c \in N$  se dice un valor regular de  $f$  si, para cada  $p \in f^{-1}(c)$ , la derivada  $Df(p): T_p(M) \longrightarrow T_p(N)$  es suryectiva.

Cuando  $c \in N - f(M)$ , o sea  $f^{-1}(c) = \emptyset$ , entonces  $c$  es un valor regular de  $f$ . Si algún  $c \in f(M)$  es valor regular de  $f$ , entonces  $\dim M \geq \dim N$ .

Proposición 1.6.2:

Sea  $c \in N$  un valor regular de una aplicación  $f: M^m \longrightarrow N^n$  de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Entonces  $f^{-1}(c)$  es vacío, o bien  $f^{-1}(c)$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m-n$  de clase  $C^k$ . Además el espacio tangente a  $f^{-1}(c)$  en cada punto  $p$  es el núcleo de  $f'(p): T_p(M) \longrightarrow T_c(N)$ . Ver una demostración en 16.

Teorema 1.6.3.

Sea  $f: M^m \longrightarrow N^n$  una submersión de clase  $C^r$ . Entonces, para  $\forall c \in N$ ,  $f^{-1}(c)$  es vacío o una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m-n$  y clase  $C^r$ .

Demostración:

Sea  $c \in N$ . Entonces  $f^{-1}(c) = \emptyset$  ó  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$

Si  $f^{-1}(c) = \emptyset$  entonces  $c$  es un valor regular de  $f$ .

Luego estamos en condiciones de aplicar la proposición 1.6.2.

Supongamos ahora que  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ . Entonces para  $\forall x \in f^{-1}(c)$ ,  $Df(x): T_x(M) \longrightarrow T_c(N)$ , con  $f(x)=c$ , es suryectiva; puesto que  $f$  es una submersión.

Luego  $c$  es un valor regular de  $f$ .

Como  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , aplicamos la proposición 1.6.2; entonces  $f^{-1}(c)$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m-n$  y de clase  $C^r$ .

De aquí resulta que la submersión  $f$  define una estructura de variedad foliada de clase  $C^r$  donde las hojas son las componentes conexas de las superficies de nivel  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{N}$ .

Ejemplo 1.6.1. Foliaciones definidas por Submersiones

Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por  $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r^2)e^{x_3}$ , donde  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  y  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^\infty$  tal que  $\alpha(1)=0$ ,  $\alpha(0) = 1$  y si  $t > 0$  entonces  $\alpha'(t) < 0$ .

Vamos averiguar, si  $f$  es una submersión.

Ahora,  $f$  es una submersión si  $\text{rg}_p f = \dim \mathbb{R}$

Calculando las derivadas parciales de  $f$  en el punto

$(0,0,0)$ ; se observa que existe un menor de orden 1 de

la matriz jacobiana  $(\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_3})$

asociada al diferencial de  $f$  en el punto  $(0,0,0)$  que no se anula.

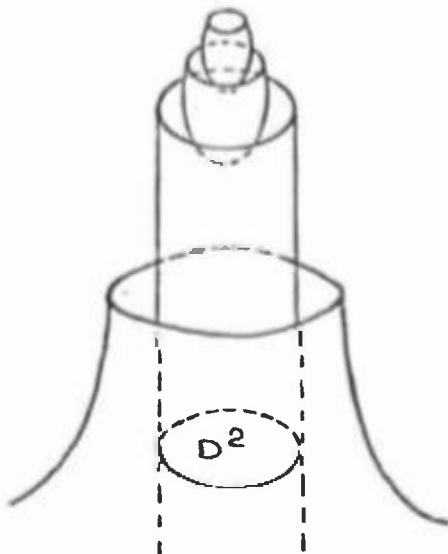
Luego,  $\text{rg}_{(0,0,0)} f = 1$ . Entonces  $f$  es una submersión de clase  $C^\infty$ .

Entonces para  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(c)$  es vacío o una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 2 de clase  $C^\infty$ .

Sea  $\mathcal{F}$  la foliación de  $\mathbb{R}^3$  cuyas hojas son los componentes conexas de las subvariedades  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Las hojas de  $\mathcal{F}$  en el interior del cilindro sólido  $C = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  son todas homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y se pueden parametrizar por

$$(x_1, x_2) \in D^2 \longmapsto (x_1, x_2, \log(\frac{c}{\alpha(r^2)})), \text{ con } c > 0$$



En efecto:

$$\text{Sea } f^{-1}(c) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = c \right\}$$

Se concluye que

$f^{-1}(c)$  es de la forma:

$$f^{-1}(c) = \left\{ (x_1, x_2, \log(\frac{c}{\alpha(r^2)})) \right\}$$

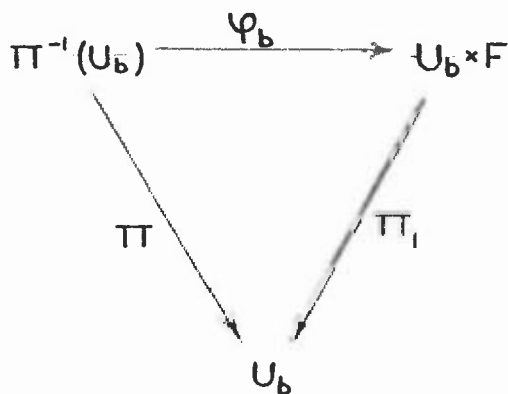
donde  $f^{-1}(c)$  puede estar constituida por una o varias componentes conexas.

El borde de  $C$ ,  $\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  es también una hoja.

Fuera de  $C$ , las hojas son todas homeomorfas a cilindros.

Ejemplo 1.6.2: Fibraciones

Las fibras sobre  $x$ , para todo  $x \in B$  de un haz fibrado  $(E, \pi, B, F)$  definen una foliación en  $E$ , cuyas hojas son difeomorfas a las componentes conexas de  $F$ . El haz fibrado  $(E, \pi, B, F)$  va a consistir de variedades diferenciables  $E, B, F$ , y de una submersión  $\pi: E \longrightarrow B$  tales que para  $\forall b \in B$ , existen una vecindad abierta  $U_b$  de  $b$  y un difeomorfismo  $\varphi_b: \pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$  de manera que el diagrama siguiente es conmutativo.



donde  $\pi_1$  es la proyección en el primer factor. Las fibras del haz fibrado son las subvariedades  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$



Un ejemplo importante de esta situación está dado por el teorema que sigue,

Teorema 1.6.2.1. (de la Vecindad tubular).

Sea  $N \subset M$  una subvariedad  $C^r$  con  $r \geq 1$ . Existen una vecindad abierta  $T(N) \supset N$  y una submersión  $C^r$ ,  $\Pi: T(N) \longrightarrow N$ , tales que  $\Pi(q) = q$  para todo  $q \in N$ . Si la codimensión de  $N$  es  $k$ , entonces  $T(N)$  puede ser obtenida de tal forma que  $(T(N), \Pi, N, B^k)$  sea un haz fibrado. (ver 16 ).

Ejemplo 1.6.3: La foliación de Reeb de la esfera unitaria  $S^3$ .

Consideremos la submersión del Ejemplo 1.6.1.  $f: D^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D^2$  es el disco en el plano, dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r) e^{x_3}$ , desde ahora  $\alpha(r)$  es la función,

$$\alpha(r) = \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right)$$

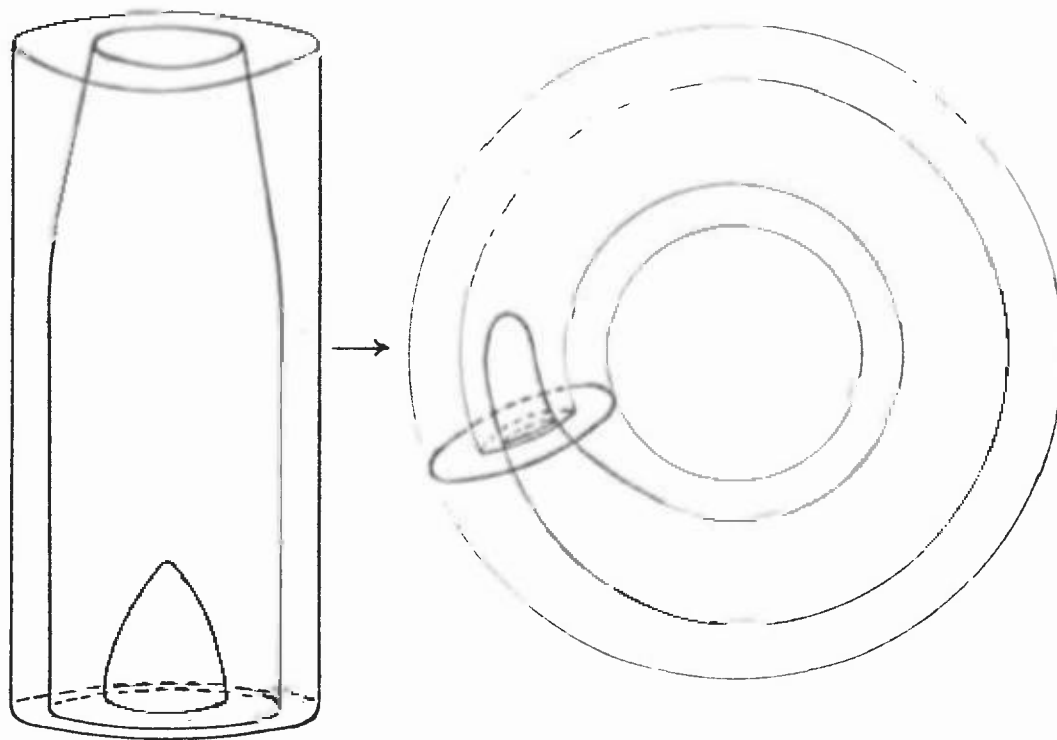
Sea  $\mathcal{F}$  la foliación de  $D^2 \times \mathbb{R}$  cuyas hojas son las componentes conexas de las subvariedades  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Las hojas de  $\mathcal{F}$  en el interior del cilindro sólido  $D^2 \times \mathbb{R} = \{ (x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$  se pueden parametrizar por:

$$(x_1, x_2) \in D^2 \longrightarrow (x_1, x_2, e^{\frac{1}{1-r^2} + b}); b \in \mathbb{R}$$

Luego  $f^{-1}(c) = \left\{ (x_1, x_2, e^{\frac{1}{1-r^2}} + b) \right\}$  , con  $b = \log_e c$

Es decir, la foliación definida por  $f$  tiene como hojas las gráficas de las funciones  $x_3 = \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y se extiende a una foliación  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$  cuyas hojas en el exterior de  $D^2 \times \mathbb{R}$  son los cilindros  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ ,  $r > 1$ .



Esto significa que al definir una relación de equivalencia entre los elementos o puntos de las bases o tapas de un cilindro finito  $D^2 \times [0, 1]$  , la foliación es compatible con la relación de equivalencia.

En  $D^2 \times [0, 1]$  identificamos los puntos del borde (de las tapas inferior y superior) de la manera siguiente:

$$(x_1, x_2, 0) \equiv (y_1, y_2, 1) \text{ si y sólo si } (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

Luego podemos pasar a la variedad cociente  $D^2 \times [0, 1] / \equiv$ , que es difeomorfa a  $D^2 \times S^1$  y como la foliación definida en  $D^2 \times \mathbb{R}$  es invariante por traslaciones a lo largo del eje  $x_3$ , ella induce una foliación  $\mathcal{F}^1$  de clase  $C^\infty$  de  $D^2 \times S^1$ . Esta es la llamada foliación de Reeb (orientable) de  $D^2 \times S^1$ . En esta foliación el borde  $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$  es una hoja. Además todas las otras hojas, en el interior de  $D^2 \times S^1$  son homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y se acumulan en el borde.

En la foliación de Reeb no orientable, se ha definido en primer lugar una relación de equivalencia en  $D^2 \times [0, 1]$  de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1) \iff (x_1, x_2) = (y_1, -y_2)$$

Entonces el cociente  $D^2 \times [0, 1] / \sim$  será una variedad no orientable de dimensión 3,  $K^3$ ; cuyo borde es difeomorfo a la botella de Klein:

Como esta identificación preserva la foliación de  $D^2 \times \mathbb{R}$ , esta induce una foliación  $R$  de  $K^3$  llamada la foliación de Reeb no orientable de  $K^3$ . Las hojas de  $R$  en el interior de  $K^3$  son todas homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y el

borde de  $K^3$  es una hoja. A partir de dos foliaciones de Reeb de  $D^2 \times S^1$  podemos obtener una foliación  $C^\infty$  de la esfera  $S^3$  de la manera siguiente: La esfera

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 1 \right\}$$

puede considerarse como la unión de dos toros sólidos  $T_i \cong D^2 \times S^1$ ,  $i = 1, 2$  identificadas a lo largo del borde por un difeomorfismo que lleva meridianos de  $\partial T_1$  en paralelos de  $\partial T_2$  y viceversa. ver [4]

En la construcción de la foliación de  $S^3$ , consideramos la foliación que resulta de unir dos foliaciones de Reeb de  $T_1$  y  $T_2$  donde  $\partial T_1 = \partial T_2$  es una hoja. Así obtenemos una foliación de  $S^3$  de codimensión 1 llamada foliación de Reeb de  $S^3$ . Esta foliación es  $C^\infty$  y posee una hoja homeomorfa a  $T^2$ . Todas las otras hojas son homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y se acumulan en la hoja compacta.

Ejemplo 1.6.4: Campos de Vectores sin singularidades

Definición 1.6.4.1: La diferencial.

1. Sea  $\psi : M \longrightarrow N$  de clase  $C^\infty$ , y sea  $m \in M$ .

La diferencial de  $\psi$  en  $m$  es la aplicación lineal.

$$d\psi : T_m(M) \longrightarrow T_{\psi(m)}(N)$$

definida de la manera siguiente. Si  $v \in T_m(M)$ , entonces  $d\psi(v)$  es el vector tangente a  $N$  en  $\psi(m)$ .

2. Sea  $g$  una función de clase  $C^\infty$  en una vecindad de  $\psi(m)$ . Definamos  $d\psi(v)(g)$  por

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi)$$

Proposición 1.6.4.1

Sean  $(U, x_1, \dots, x_d)$  y  $(V, y_1, \dots, y_l)$  sistemas de coordenadas alrededor de  $m$  y  $\psi(m)$  respectivamente.

Entonces

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_m\right) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j}\Big|_m \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\psi(m)}$$

Demostración.

La demostración se sigue de la parte 2 de la definición 1.6.4.1.  $\blacklozenge$

Proposición 1.6.4.2


Sea  $X$  un campo vectorial en  $M$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a)  $X$  es  $C^\infty$
- b) si  $(U, x_1, \dots, x_n)$  es un sistema de coordenadas en  $M$ , y si  $\{a_i\}$  es la colección de funciones en  $U$  definida por

$$X|_U = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

entonces  $a_i \in C^\infty(U)$ .

c) Cuando  $V$  es abierto en  $M$  y  $f \in C^\infty(V)$ , entonces  
 $X(f) \in C^\infty(V)$

Demostración: Ver [28] 

Definición 1.6.4.2.

Sea  $X$  un campo vectorial en  $M$ . Una curva lisa  $\sigma$  en  $M$  es una curva integral de  $X$  si

$$\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$$

para cada  $t$  en el dominio de  $\sigma$ .

Sea  $X$  un campo vectorial  $C^\infty$  en  $M$ , y sea  $m \in M$ . Vamos a considerar ahora la siguiente pregunta. Existirá una curva integral de  $X$  que pasa por  $m$ , y si es así, ella será única?

Una curva  $\gamma: (a,b) \longrightarrow M$  es una curva integral de  $X$  si y solo si

$$(1) \quad d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right) = X(\gamma(t)) \quad (t \in (a,b))$$

o bien 
$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \quad (t \in (a,b))$$

Vamos a interpretar esto en coordenadas locales. Supongamos que  $0 \in (a,b)$  y  $\gamma(0) = m$ .

Escojamos una carta local  $(U, \varphi)$  con funciones coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_d$  alrededor de  $m$ .

Por la parte (b) de la proposición 1.6.4.2.

$$(2) \quad X/U = \sum_{i=1}^d f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde las  $f_i$  son funciones  $C^\infty$  en  $U$ . Además, para cada  $t$  tal que  $\gamma(t) \in U$ ,

$$(3) \quad d\gamma \left( \frac{d}{dr} / t \right) = \sum_{i=1}^d \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr} / t \frac{\partial}{\partial x_i} / \gamma(t)$$

Por la Proposición 1.6.4.1.

De (1), (2) y (3) tenemos

$$(4) \quad \sum_{i=1}^d \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr} / t \frac{\partial}{\partial x_i} / \gamma(t) = \sum_{i=1}^d f_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} / \gamma(t)$$

Así  $\gamma$  es una curva integral de  $X$  en  $\gamma^{-1}(U)$  si y sólo si

$$(5) \quad \frac{d\gamma_i}{dr} / t = f_i \circ \varphi^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t))$$

donde  $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ ,  $i=1, \dots, d$  y  $t \in \gamma^{-1}(U)$

La ecuación (5) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para la cual existen los teoremas de existencia y unicidad. Estos teoremas, son trasladados en término de variedades, de la siguiente manera.

Teorema 1.6.4.3.

Sea  $X$  un campo vectorial  $C^\infty$  en una variedad diferenciable  $M$ . Para cada  $m \in M$  existen  $a(m)$  y  $b(m)$  en  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , y una curva lisa

$$(1) \quad \gamma_m: (a(m), b(m)) \longrightarrow M$$

tal que

$$(a) \quad 0 \in (a(m), b(m)) \text{ y } \gamma_m(0) = m$$

(b)  $\gamma_m$  es una curva integral de  $X$

(c) Si  $\mu: (c, d) \longrightarrow M$  es una curva suave satisfaciendo las condiciones (a) y (b), entonces  $(c, d) \subset (a(m), b(m))$  y  $\mu = \gamma_m|_{(c, d)}$

Demostración: Ver 28

El teorema de existencia y unicidad garantiza que bajo ciertas condiciones en  $X$  por todo punto  $x \in M$  pasa una órbita de  $X$ . Cuando  $X$  no posee singularidades (esto es,  $X(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ ), las órbitas de  $X$  son las hojas de una foliación de dimensión 1 en  $M$ .

Ejemplo 1.6.5: Acciones de grupos de Lie.

Definición 1.6.5.1

Sea  $G$  un conjunto sobre el cual están definidas, una estructura de variedad diferenciable  $C^\infty$  y una estructura de grupo. Se dice que las dos estructuras son compatibles si las operaciones de grupo

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G ; \\ (a, b) & \longmapsto & ab \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

son de clase  $C^\infty$ . En este caso se dice que  $G$  es un grupo de Lie. Nótese que todo grupo de Lie es un grupo topológico.



Una subvariedad inmersa  $H \subset G$  de clase  $C^\infty$  que es también un subgrupo de  $G$  es llamada Subgrupo de Lie de  $G$ .

Ejemplos de Grupos de Lie 1.6.5.1.

- 1.- El grupo aditivo  $\mathbb{R}^n$
- 2.- El grupo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  con la multiplicación de números complejos. La circunferencia  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$  es un subgrupo de Lie de  $\mathbb{C}^*$ .
- 3.- El toro  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  veces) con la multiplicación  $(z_1, \dots, z_n)(w_1, \dots, w_n) = (z_1 w_1, \dots, z_n w_n)$ .
- 4.- El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  de todas las matrices reales  $n \times n$  no singulares es un grupo de Lie de dimensión  $n^2$ . (\*) Sabemos que  $GL(n, \mathbb{R})$  con la multiplicación de matrices es un grupo topológico.

Es fácil ver que  $GL(n, \mathbb{R})$  es una variedad diferenciable; ver [1]

- 5.- El grupo ortogonal  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  que consiste de las matrices  $n \times n$  reales  $A$  tales que  $A \cdot A^t = I$  es un subgrupo de Lie compacto de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Es fácil demostrar que  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Vamos a demostrar que  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es cerrado:

En efecto:

Sea  $S(n, \mathbb{R})$  el espacio de las matrices simétricas.

Sea  $f: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S(n, \mathbb{R})$  la aplicación

(\*) Ver una demostración en el apéndice.

definida por:

$$f(x) = x \cdot x^t$$

Esta aplicación está bien definida y es de clase  $C^\infty$ .

Como  $S(n, \mathbb{R})$  es un espacio de Hausdorff,  $\{I\} \in S(n, \mathbb{R})$  es cerrado:

Entonces  $f^{-1}(I) = \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es cerrado.

Además como los elementos de  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  son puntos no singulares, se verifica que  $I$  es un valor regular de  $f$ .

Por consiguiente,  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Luego  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$ .  
 Demostraremos ahora que  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es compacto.

En efecto:

$$\begin{array}{ccc} \text{La función } \alpha: GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\ (A, X) & \xrightarrow{\quad} & AX. \end{array}$$

Define una actuación efectiva de  $GL(n, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^n$  o sea  $AX = X, \forall X \in \mathbb{R}^n \implies A = I$ .

Recordemos que  $GL(n, \mathbb{R})$  se identificó con un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n^2}$  y como  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es cerrado, basta ver que es acotado.

Sea  $A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ ; entonces cada componente  $a_{ij}$  de  $A$  tiene norma menor igual que uno.

Supongamos que este no es el caso; entonces existen  $i$  e  $j$  tales que  $\|a_{ij}\| > 1$ .

Considérese el elemento  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , el 1 en la posición  $j$ . Entonces la  $j$ -ésima componente de  $AX$  es  $a_{ij}$  y por lo tanto  $\|AX\| > \|a_{ij}\| > 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien: } \|Ax\| &= \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} > 1 \\ \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Pero } \langle A_x, A_x \rangle = \langle x, x \rangle$$

resulta que hay una contradicción

Luego  $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de Lie

Compacto de  $GL(n, \mathbb{R})$

#### Definición 1.6.5.2.

Una acción de clase  $C^r$  de un grupo de Lie  $G$  en una variedad  $M$  es una aplicación  $\varphi: G \times M \longrightarrow M$  de clase  $C^r$  tal que:

$$(a) \quad \varphi(e, x) = x$$

$$(b) \quad \varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$$

$$\forall g_1, g_2 \in G$$

$$\text{y } x \in M$$

#### Observación 1.6.5.2.

1.- Fijando  $g \in G$ , tenemos la aplicación de clase  $C^r$

$$\varphi_g: M \longrightarrow M, \text{ definida por:}$$

$$\varphi_g(x) = \varphi(g, x).$$

Luego tenemos la familia  $\{\varphi_g\}_{g \in G}$

Se comprueba fácilmente que la familia  $\{\varphi_g\}_{g \in G}$  es una familia de difeomorfismo.

2.- Fijando  $x$ , tenemos la aplicación  $\alpha_x : G \longrightarrow M$  de clase  $C^r$ , definida como:

$$\alpha_x(g) = \varphi(g, x)$$

Estas son las órbitas fijando  $x$ . Se tiene así la familia  $\{\alpha_x\}_{x \in M}$

3.- Sea  $F = \{\varphi_g : M \longrightarrow M\}_{g \in G}$

$(F, \circ)$  es un grupo de difeomorfismo de  $M$ .

Vamos a definir  $\psi : G \longrightarrow F$ , como

$$\psi(g) = \varphi_g$$

$\psi$  es un homomorfismo.

De las observaciones (1) y (3) concluimos que:

Una acción de clase  $C^r$  de un grupo de Lie  $G$  en una variedad  $M$  equivale a tener una familia  $\{\varphi_g\}_{g \in G}$  de difeomorfismos de  $M$ .

Además hay un homomorfismo del grupo de Lie en la familia de difeomorfismos.

Definición 1.6.5.3.

La órbita de un punto  $x \in M$  por la acción  $\varphi$  es el subconjunto 
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x(\varphi) &= \{ \varphi(g, x) \in M / g \in G \} \\ &= \alpha_x(G) \end{aligned}$$

Definición 1.6.5.4.

El grupo de isotropía de  $x \in M$  es el subgrupo.

$$G_x(\varphi) = \{ g \in G / \varphi(g, x) = x \}$$

$$= \{ g \in G / \varphi_g(x) = x \}$$

Observación 1.6.5.3.

1.-  $G_x(\varphi)$  es un subgrupo cerrado de  $G$ .

2.- La aplicación  $\alpha_x : G \longrightarrow M$  dada por

$$\alpha_x(g) = \varphi(g, x)$$

induce la aplicación  $\bar{\alpha}_x : G / G_x(\varphi) \longrightarrow M$

definida por  $\bar{\alpha}_x(\bar{g}) = \alpha_x(g)$  ; donde  $\bar{g} = g.G_x(\varphi)$

$\bar{\alpha}_x$  está bien definida y es inyectiva. Se demues-

tra que  $G / G_x(\varphi)$  posee una estructura diferenciable

y que  $\bar{\alpha}_x$  es una inmersión inyectiva cuya imagen es

$\mathcal{O}_x(\varphi)$  . Ver [4]

Definición 1.6.5.5.

Decimos que  $\varphi : G \times M \longrightarrow M$  es una acción foliada si para todo  $x \in M$  el espacio tangente a la órbita de  $\varphi$  que pasa por  $x$  tiene dimensión fija  $k$ . Cuando  $K$  es la dimensión de  $G$  decimos que  $\varphi$  es localmente libre.

Se demuestra (ver [4] ) que las órbitas de una acción foliada definen las hojas de una foliación.

Observación 1.6.5.4.

Dados un grupo de Lie  $G$  y un subgrupo de Lie  $H \subset G$  la aplicación  $\psi': H \times G \longrightarrow G$ , definida como  $\psi'(h,g) = h.g$  define una acción de  $H$  en  $G$ .

El grupo de isotropía de cada elemento  $g \in G$ , es la identidad. Luego esta acción es localmente libre.

Las órbitas definen una foliación de  $G$  cuyas hojas son todas homeomorfas a  $H$ . Las hojas de esta foliación son inmersas difeomórficamente si y sólo si  $H$  es cerrado en  $G$ . Ver [ 4 ].

Un ejemplo específico se obtiene considerando  $G = \mathcal{O}(4, \mathbb{R})$  y  $H$  el subgrupo generado por las matrices  $A$  de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} ; \text{ donde } A_1 = \begin{bmatrix} -\text{coss} & \text{sens} \\ -\text{sens} & \text{coss} \end{bmatrix} ; A_2 = \begin{bmatrix} \text{cost} & \text{sent} \\ \text{sent} & \text{cost} \end{bmatrix}$$

Se prueba que  $H$  es isomorfo al Toro  $T^2$ .

Definición 1.6.5. 6.

Una acción  $\psi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  ( $\mathbb{R}$  es el grupo aditivo de los números reales) también es llamado flujo en  $M$ . Un flujo  $\psi$  en  $M$  satisface las propiedades:

- a)  $\psi(0, x) = x$  para  $x \in M$
- b)  $\psi(s+t, x) = \psi(s, \psi(t, x))$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in M$ .

Observación 1.6.5.5

1. Se puede considerar el flujo  $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  como una familia  $\{\alpha_x\}_{x \in M}$  de curvas

$$\alpha_x : \mathbb{R} \longrightarrow M, \text{ definidas por}$$

$$\alpha_x(t) = \varphi(t, x)$$

A la curva  $\alpha_x$  se le llama línea de flujo o curva integral que pasa por  $x$ . La imagen  $\alpha_x(\mathbb{R})$  de la línea de flujo se denomina órbita de  $x$ .

2. A un flujo  $C^r$  ( $r \geq 1$ )  $\varphi$  en  $M$  es posible asociar un campo de vectores  $C^{r-1}$  por la fórmula:

$$X(x) = d\varphi/dt(t, x)/_{t=0}$$

El campo  $X$  así definido es tal que  $\alpha_x(t) = \varphi(t, x)$  para  $\forall t \in \mathbb{R}$  es la órbita de  $X$  que pasa por  $x$ .

En efecto, de la definición tenemos

$$\begin{aligned} d\varphi/dt(t, x) &= d\varphi/dt(s+t, x)/_{s=0} = d\varphi/dt(s, \varphi(t, x))/_{s=0} \\ &= X(\varphi(t, x)) \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $X$  es un campo de vectores  $C^r$  en  $M$  cuyas líneas de flujo o curvas integrales están definidas en  $\mathbb{R}$ , existe un único flujo  $C^r$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ , tal que  $\alpha_x(t) = \varphi(t, x)$  es la órbita de  $X$  con condición inicial  $\varphi(0, x) = x$ . (Ver [4]).

1.7 Las Hojas.

Proposición 1.7.1.

Toda hoja  $F$  de una foliación  $\mathcal{F}$  de clase  $C^r$  posee una estructura de variedad diferenciable  $C^r$  inducida por las cartas de  $\mathcal{F}$ , llamada estructura intrínseca de  $F$ .

Demostración:

Esta estructura es construida de la manera siguiente:

Dado  $p \in F$ , sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $\mathcal{F}$  tal que  $p \in U$  y  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^s$  respectivamente. Sea  $\alpha$  una placa de  $U$  que contiene a  $p$ . Tomando  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ; donde  $\varphi_1: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\varphi_2: U \longrightarrow \mathbb{R}^s$ , definimos  $\bar{\varphi}: \alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , por

$$\bar{\varphi} = \varphi_1|_{\alpha}$$

Es claro que  $\bar{\varphi}: \alpha \longrightarrow U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo.

En lo siguiente mostraremos que

$\Phi = \left\{ (\alpha, \bar{\varphi}) / \alpha \subset F \text{ es placa de } U, \text{ con } (U, \varphi) \in \mathcal{F} \right\}$  es un atlas de clase  $C^r$  y dimensión  $n$  de  $F$ .

Basta verificar que si  $(\alpha, \bar{\varphi}), (\beta, \bar{\psi})$  están en  $\Phi$  y  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$  entonces  $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  y  $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  son abiertos de

$\mathbb{R}^n$  y  $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}: \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \longrightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$ .



Ya sabemos que las placas subren a  $M$ ; por lo tanto cubren a la hoja  $F$ .

Mostraremos primero que  $\alpha \cap \beta$  es abierto en  $\alpha$  y  $\beta$ .

Sean  $(U, \varphi), (V, \psi)$  en  $\mathcal{F}$  tales que  $\bar{\varphi} = \varphi/\alpha$  y  $\bar{\psi} = \psi/\beta$ .

Por la condición  $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  ver [4],  $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  se escribe como  $\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ , con  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ .

Es claro que  $U \cap V \neq \emptyset$

En particular, como  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$  tenemos

$$* \quad \varphi \circ \psi^{-1}(x, b) = (h_1(x, b), h_2(b)), a).$$

Como  $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$

y  $\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\})$ , de \* obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(\beta \cap U) &= \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})) \subset \\ &\subset \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V) \end{aligned}$$

es decir  $\varphi(\beta \cap U) \subset \varphi(\alpha \cap V)$ , o sea  $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$

Análogamente  $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$ ; luego  $\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$ .

Esto prueba la afirmación, es decir  $\alpha \cap \beta$  es abierto en  $\alpha$  y  $\beta$ .

Como  $\bar{\varphi}$  y  $\bar{\psi}$  son homeomorfismos, obtenemos que

$\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  y  $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

La aplicación  $\bar{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1}: \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \longrightarrow \bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$  es  $C^r$  porque  $\psi \circ \psi^{-1}(x) = h_1(x, b)$  si  $x \in \psi(\alpha \cap \beta)$ .

Análogamente  $\bar{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1}$  es  $C^r$ , por tanto  $\bar{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1}$  es  $C^2$  difeomorfismo.

Esto define una estructura intrínseca de F.

Puede verificarse que las hojas tienen base enumerable

Ver

Observación 1.7.1.

1. Observemos que la topología de F asociada al atlas  $\Phi$  es tal que el conjunto de todas las placas  $\alpha$  de  $\mathcal{F}$  con  $\alpha \subset F$ , constituye una base de abiertos de F. Esta Topología en general no coincide con aquella inducida naturalmente por la topología de M. La razón es que la hoja F puede eventualmente interceptar el dominio U de una carta  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  en una sucesión de placas  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , las cuales se acumulan en una placa  $\alpha \subset F$  o sea cualquier vecindad de  $\alpha$  contiene una infinidad de placas en F y, por tanto F no es localmente conexa con la topología inducida por M en cuanto que en la topología intrínseca F es una variedad y por tanto localmente conexa.
2. Consideremos ahora la inclusión canónica  $i: F \longrightarrow M$ ,  $i(p) = p$ , y F con una estructura intrínseca de variedad. Verificase fácilmente que  $\underline{i}$  es una inmersión

biunívoca de clase  $C^r$ . Cuando  $i$  es una inmersión difeomorfa de clase  $C^r$ , decimos que  $F$  es una hoja inmersa difeomórficamente. Esto ocurre si y solamente si la topología intrínseca de  $F$  coincide con la topología inducida por la de  $M$ .

Resumimos lo anterior de esta sección en el siguiente:

Teorema 1.7.2.

Sea  $M$  una variedad foliada por una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $n$  y clase  $C^r$ . Toda hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  posee una estructura de variedad  $C^r$  de dimensión  $n$ , tal que los dominios de las cartas locales son placas de  $\mathcal{F}$ . La aplicación  $i : F \longrightarrow M$  definida por  $i(p) = p$  es una inmersión biunívoca de clase  $C^r$ , cuando en  $F$  consideramos una estructura de variedad intrínseca. Además  $F$  es una subvariedad  $C^r$  de  $M$  si y solo si  $i$  es una inmersión difeomorfa.

1.8 Aplicaciones Distinguidas.

Definición 1.8.1.

Una foliación  $\mathcal{F}$  de Codimensión  $s$  y clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  de  $M$  está definida por una colección maximal de pares  $(U_i, f_i)_{i \in I}$ , donde los  $U_i$  son abiertos en  $M$  y las  $f_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^s$  son submersiones satisfaciendo:

$$(1) \bigcup_{i \in I} U_i = M$$

$$(2) \text{ Si } U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ existe un difeomorfismo local } g_{ij} \text{ de clase } C^r \text{ tal que } f_i = g_{ij} \circ f_j \text{ en } U_i \cap U_j.$$

Las  $f_i$  son llamadas aplicaciones distinguidas de  $\mathcal{F}$ .

Nota:

En esta foliación las placas de  $\mathcal{F}$  en  $U_1$  son las componentes conexas de los conjuntos  $f_1^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^s$

Proposición 1.8.1.

La definición 1.8.1 es equivalente a la definición de foliación dada en 1.6.1.

Antes de verificar esta equivalencia, demostraremos el siguiente Lema.

Lema 1.8.2.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de una variedad  $M$ . Existe un cubrimiento abierto  $C = \{ U_i / i \in I \}$  de  $M$  por dominios de cartas locales de  $\mathcal{F}$  tal que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cup U_j$  está contenido en el dominio de una carta local de  $\mathcal{F}$ .

Demostración:

Siendo un espacio de Hausdorff, localmente compacto, con base enumerable,  $M$  puede ser escrito como reunión enumerable,  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  de compactos tales que  $K_i \subset \text{int } K_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots$ , (Ver [28] ).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , fijemos un cubrimiento de  $K_n$  por dominios de cartas de  $\mathcal{F}$ ,  $\{V_i^n / i=1, \dots, k_n\}$  es decir dado

$$x \in K_n, \quad V_x^n \cap K_n \neq \emptyset$$

Tenemos así que para  $\forall x \in K_n, \bigcup_{x \in K_n} V_x^n \supset K_n$ ; como  $K_n$  es compacto  $\exists \{V_{x_1}^n, V_{x_2}^n, \dots, V_{x_{k_n}}^n\}$  tales que  $\bigcup_{i=1}^{k_n} V_{x_i}^n \supset K_n$ ; o sea dado  $K_n$ , existen un cubrimiento finito  $\{V_i^n\}_{1 \leq i \leq k_n}$  de él.

Las variedades son metrizablees. (ver [28] ).

Sea  $\delta_n > 0$  el número de Lebesgue de este cubrimiento con relación a alguna métrica fija en  $M$ . Como  $M$  es metrizable, entonces  $M$  es un espacio métrico. Ahora  $K_n \subset M$  es un espacio métrico con la métrica inducida de la de  $M$ .

(\*) Tenemos así  $K_n$ , un espacio métrico compacto y  $\{V_i^n\}_{i=1, \dots, k_n}$  un cubrimiento abierto finito de  $K_n$ . Existe entonces el número positivo  $\delta_n > 0$ , tal que todo subconjunto de  $K_n$  de diámetro menor que  $\delta_n$  está contenido en uno por lo menos de los elementos de  $\{V_i^n\}_{i=1, \dots, k_n}$ , o sea si  $U \subset K_n$  y  $\text{diam}(U) < \delta_n$ . Entonces  $\exists V_j^n$  tal que  $U \subseteq V_j^n$ .

Podemos suponer que la sucesión  $(\delta_n)$  es decreciente. Basta ahora considerar una cubierta de  $K_n$  por dominios de cartas de  $\mathcal{F}, \{U_j^n / j=1, \dots, l_n\}$  tal que el diámetro de  $U_j^n$  sea menor que  $\delta_n/2$ , para todo  $j = 1, \dots, l_n$ .

Es claro que si  $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$  entonces  $U_i^n \cup U_j^n \subset V_\mu^n$  para algún  $\mu \in \{1, \dots, k_n\}$ .

En efecto:

Sean  $U_i^n \subset K_n$  y  $U_j^n \subset K_n$  tales que  $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$ . Entonces  $U_i^n \cup U_j^n \subset K_n$  y  $\text{diam.}(U_i^n \cup U_j^n) \leq d(U_i^n, U_j^n) + \text{diam.}(U_i^n) + \text{diam.}(U_j^n)$ .

Como  $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$  implica  $d(U_i^n, U_j^n) = 0$ .

Entonces  $\text{diam.}(U_i^n \cup U_j^n) \leq \text{diam.} U_i^n + \text{diam.} U_j^n < \frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_n}{2}$

Luego  $\text{diam.}(U_i^n \cup U_j^n) < \delta_n$

Por la proposición (\*)  $\exists \mu \in \{1, \dots, k_n\}$  tal que

$$U_i^n \cap U_j^n \subseteq V_\mu^n \quad \blacklozenge$$

Demostración de la Proposición 1.8.1.

Vamos a demostrar que la definición 1.6.1 implica la definición 1.8.1.

Supongamos ahora que  $M$ , posee un atlas  $\mathcal{F}'$  que define una foliación de codimensión  $s$ , siguiendo la definición 1.6.1, consideremos un cubrimiento abierto  $C = \{U_i / i \in I\}$  de  $M$  por dominios de cartas locales de  $\mathcal{F}'$ , como en el Lema 1.8.2.

Dado un abierto  $U_i \in C$ ,  $i \in I$ , tenemos definida  $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$  en  $\mathcal{F}'$ , tal que  $\varphi_i(U_i) = U_1^i \times U_2^i$ , donde  $U_1^i$  y  $U_2^i$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^s$  respectivamente.

Entonces  $f_i = p_2 \circ \varphi_i : \longrightarrow \mathbb{R}^s$  es una submersión (por la forma local de las submersiones) y para todo  $c \in U_2^i$ ,  $f_i^{-1}(c)$  es placa de  $U_i$ .

si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $U_i \cup U_j$  está contenido en el dominio de una carta  $(V, \varphi) \in \mathcal{F}'$  con  $\varphi(V) = V_1 \times V_2$ . Por tanto, siendo  $\alpha$  y  $\beta$  placas de  $U_i$  y  $U_j$  con  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , se tiene que  $\alpha \cup \beta$  está contenido en una placa  $\delta$  de  $V$ . Luego  $\beta \cap U_i \subset \alpha$  de modo que  $f_i(\beta \cap U_i)$  contiene un único punto.

Esto implica que dado  $y \in f_j(U_i \cap U_j)$ ,  $f_i(f_j^{-1}(y))$  contiene un único punto  $g_{ij}(y)$ .

Vamos a verificar que:

$$g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo  $C^r$ .

Como  $g_{ij}(y) = f_i(f_j^{-1}(y))$  y  $f_i$  es diferenciable, puesto que  $f_i = p_2 \circ \varphi_i$

Entonces  $g_{ij}$  es diferenciable.

Por otro lado  $g_{ij}(y) \in f_i(f_j^{-1}(y))$  y  $f_j(f_i^{-1}(g_{ij}(y)))$  contiene un único punto  $g_{ji}(g_{ij}(y))$ .

$g_{ji}$  es diferenciable, puesto que  $f_j$  es diferenciable

Ahora se obtiene  $g_{ij} \circ g_{ji}(g_{ij}(y)) = g_{ij}(y)$

Entonces  $g_{ij} \circ g_{ji}(g_{ij}(y)) = g_{ij}(y)$ .

$$\text{Luego } g_{ij} \circ g_{ji} = I_{f_j(U_i \cap U_j)}$$

Análogamente

$$g_{ji} \circ g_{ij}(y) = y$$

Entonces  $g_{ji} \circ g_{ij}(y) = y$ .

$$\text{Luego } g_{ji} \circ g_{ij} = I_{f_i(U_i \cap U_j)}$$

En conclusión  $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$

Vamos a demostrar ahora que la definición 1.8.1 implica la definición 1.6.1.

Supongamos ahora que existe una colección de pares  $(U_i, f_i)$  satisfaciendo la definición 1.8.1.

Como para  $\forall i \in I$ ,  $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$  es submersión  $C^r$ , por el teorema de la forma local de las submersiones, dado  $p \in U_i$ , existen  $V_1$  y  $V_2$  discos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^s$



respectivamente, con  $V_2 \subset f_i(U_i)$  y una carta local

$$\varphi : V \longrightarrow V_1 \times V_2 \text{ de clase } C^r \text{ con } V \subset U_i, \text{ tales que}$$
$$f_i \circ \varphi^{-1} : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \text{ es una segunda proyec-}$$

ción.

El conjunto de todas las cartas  $(V, \varphi)$  construidas de esta manera es un atlas  $C^r$  de una foliación en  $M$ .

De hecho, si  $(V, \varphi)$  y  $(W, \psi)$  son dos cartas como arriba tales que  $V \cap W \neq \emptyset$ , entonces  $V \subset U_i$  y  $W \subset U_j$  con  $i, j \in I$ .

Por otro lado  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \longrightarrow \varphi(V \cap W)$  puede escribirse como:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$$

Por tanto resulta  $h_2(x, y) = p_2 \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = g_{ij}(y)$

Luego  $h_2(x, y) = g_{ij}(y)$  solo depende de  $y$ .

## CAPITULO 2

### VARIEDADES (NO SEPARADAS) DE DIMENSION UNO Y ESTRUCTURA FOLIADA DEL PLANO

#### 2.1 Propiedades de las variedades de dimensión uno.

##### 2.1.1 Definiciones y ejemplos.

###### Definición 2.1.1.1.

Una variedad topológica  $M^n$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico donde cada punto admite una vecindad abierta homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .

Se llama carta de  $M^n$  en  $\mathbb{R}^n$  a un homeomorfismo  $h$  de un abierto  $U \subset M^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ ; el abierto  $U$  es el dominio de la carta  $h$ . El cambio de cartas asociado a las cartas  $h_i$  y  $h_j$  de  $M^n$  en  $\mathbb{R}^n$  con dominios respectivos  $U_i$  y  $U_j$  es el homeomorfismo  $h_i^{-1} \circ h_j$  del abierto  $h_i(U_i \cap U_j)$  sobre el abierto  $h_j(U_i \cap U_j)$ .

Observación 2.1.1.1. De acuerdo a la definición anterior, existe una familia de cartas tal que sus dominios recubren a la variedad  $M^n$ . A esa familia llamaremos un atlas de  $M^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Un procedimiento de construcción general.

Definición 2.1.1.2.

Se dice que una aplicación continua  $p$  de un espacio topológico  $E$  en un espacio topológico  $E'$  es una identificación de  $E$  en  $E'$  si todo punto  $x$  de  $E$  admite una vecindad abierta  $U$  tal que la restricción de  $p$  a  $U$  sea un homeomorfismo sobre un abierto de  $E'$ .

Proposición 2.1.1.1.

Sea  $M^n$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $\rho$  una relación de equivalencia abierta en  $M^n$  tal que la restricción de  $\rho$  a una vecindad suficientemente pequeña de todo punto  $x$  de  $M^n$  se reduce a la identidad. Entonces el espacio topológico cociente  $M'^n = M^n/\rho$  de  $M^n$  por la relación de equivalencia  $\rho$  es una variedad de dimensión  $n$  y la aplicación canónica  $p$  de  $M^n$  sobre  $M^n/\rho$  es una identificación de  $M^n$  sobre  $M'^n$ .

Demostración:

Por hipótesis, si  $U$  es una vecindad abierta de  $x$  tal que la restricción de  $\rho$  a  $U$  sea la identidad, entonces la restricción de  $p$  a  $U$  es un homeomorfismo de  $U$  sobre un abierto  $U' = U/\rho_U$  de  $M'^n$ . Por otro lado cada punto de  $M^n$  admite una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $p^{-1} \circ \varphi$  de  $U/\rho_U \subset M/\rho$  en  $\mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo; donde la aplicación  $\varphi$  de  $U$  sobre  $\mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo.

Luego  $M' = M/p$  es una variedad de dimensión  $n$ . Además  $p$  es una identificación, puesto que  $p/U$  es un homeomorfismo.

Observación 2.1.1.2.

Si  $M^n$  es una variedad separada, o de Hausdorff en general  $M'^n$  no será necesariamente separada, como lo muestran los ejemplos que siguen.

El procedimiento de construcción de variedades dado por la proposición 2.1.1.1 es general en el sentido siguiente.

Proposición 2.1.1.2.

Dada una variedad  $M^n$  de dimensión  $n$ , existe una familia de cartas  $h_i$  de  $M^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , donde los dominios de las cartas recubren a  $M^n$  ( $i$  pertenece a una familia de índices  $I$ ), entonces la variedad  $M^n$  es isomorfa al cociente del espacio  $I \times \mathbb{R}^n$  por la relación de equivalencia asociada a la aplicación:

$$(i, x) \sim h_i^{-1}(x)$$

de  $I \times \mathbb{R}^n$  sobre  $M^n$ ,

Demostración:

Por hipótesis tenemos la familia  $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ , con  $h_i: U_i \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ .

Además, la suryección  $H; I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M$  definida por:

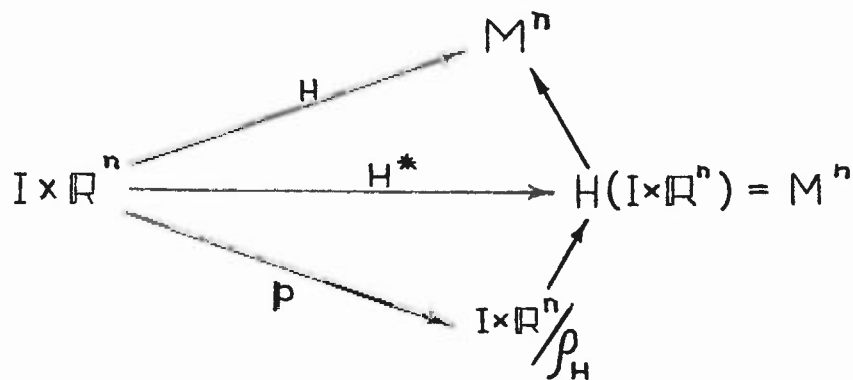
$$H(i, x) = h_i^{-1}(x)$$

Como  $h_i$  es homeomorfismo, para  $\forall i \in I$ , es continua.

$\rho_H$  es la relación correspondiente a  $H$ , definida como sigue:

$$(i, x) \rho_H (j, y) \text{ si y sólo si } H(i, x) = H(j, y)$$

Se tiene el siguiente diagrama de descomposición natural:



$I \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  son espacios topológicos, a  $I \times \mathbb{R}^n / \rho_H$  se provee de la topología cociente. Por ser  $H$  continua y suryectiva,  $h$  es continua y biyectiva.

En las condiciones anteriores las tres afirmaciones que siguen son equivalentes:

- a)  $H$  es abierta.
- b)  $p, h, i$  son abiertas.
- c)  $\rho_H$  es abierta,  $h$  es homeomorfismo y  $H(I \times \mathbb{R}^n)$  es abierto en  $M^n$ .

Ver [ 2 ] .

Vamos a demostrar que  $H$  es abierta.

Sea  $\{i\} \times U' = \{(i, x) / x \in U'\}$  un abierto en  $I \times \mathbb{R}^n$ , donde  $U'$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{i\}$  es abierto en  $I$ ; donde  $I$  está provista de la topología discreta.

Luego  $H(\{i\} \times U') = h_i^{-1}(U')$ . Entonces  $H$  es abierta.

Tenemos entonces:  $\rho_H$  es abierta y  $h$  es un homeomorfismo; además  $p$  es abierta. Entonces  $p$  es una identificación.

Luego  $I \times \mathbb{R}^n / \rho_H$  es una variedad de dimensión igual a  $\dim(I \times \mathbb{R}^n) = \dim I + \dim \mathbb{R}^n$   
 $= \dim I + n$

además  $I \times \mathbb{R}^n / \rho_H \cong M^n$ .

Definición 2.1.1.3.

Un punto  $x$  de una variedad  $M^n$  es un punto de ramificación, si existe un punto  $z$  de  $M^n$  ( $z \neq x$ ) que no es separado de  $x$ , es decir, que toda vecindad de  $x$  interseca a toda vecindad de  $z$ .

Observación 2.1.1.3.

La relación "  $x$  no es separado de  $z$  " es simétrica y reflexiva, más ella no es transitiva en general.

Ejemplos.

La proposición 2.1.1.1 permite la construcción de una multitud de ejemplos de variedades. Nos limitaremos ahora a las variedades de dimensión 1 que satisfacen el

segundo axioma de numerabilidad.

Ejemplo 2.1.1.1.

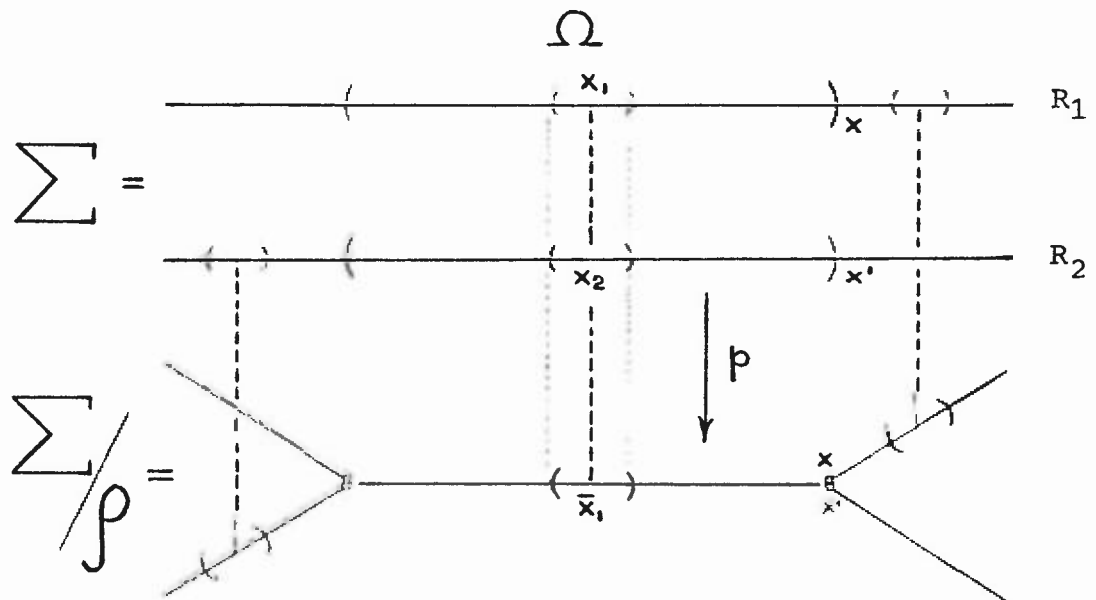
Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos ejemplares de la recta numérica real  $\mathbb{R}$  y sea  $\Sigma$  la suma topológica de  $R_1$  y  $R_2$ . Considérese un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$ ; la relación de equivalencia  $\rho$  en  $\Sigma$  definida de la siguiente manera:

Identifica los puntos de  $R_1$  y  $R_2$  con la misma abscisa  $t \in \Omega$

Se reduce a la identidad para los otros puntos.

$\rho$  definida de esa manera satisface la condición de la proposición 2.1.1.1

En efecto:



$\rho$  es abierta, puesto que  $p$  es abierta.

Sea  $(\dots x_1 \dots) + (\dots x_2 \dots)$  un abierto de  $(\Sigma, \mathcal{C})$  tal que todo punto de  $(\dots x_1 \dots)$  y de  $(\dots x_2 \dots)$  pertenecen a  $\Omega$  y  $x_1 \not\sim x_2$ .

Luego la imagen por  $p$  del abierto  $(\dots x_1 \dots) + (\dots x_2 \dots)$  es el abierto  $(\dots x_1 \dots)$  y  $p(x_1) = p(x_2) = \bar{x}_1 = \{x_1, x_2\}$ ;  $x_1 \not\sim x_2$ .

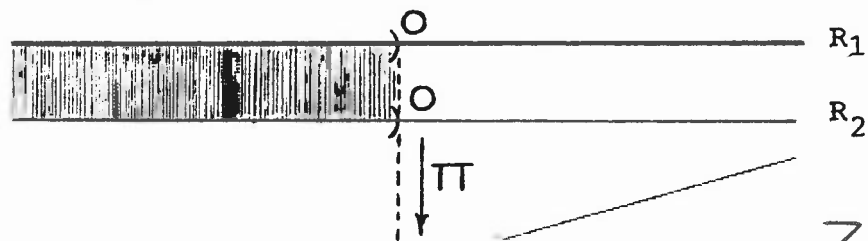
Entonces  $p$  no solamente es una identificación; sino también es un homeomorfismo

Luego el cociente  $\Sigma/p$  es una variedad de dimensión 1.

Los puntos de ramificación son aquellos donde la abscisa es un punto frontera de  $\Omega$  (Las abscisas de los puntos de ramificación  $x, x^1$  de  $\Sigma/p$  constituyen las abscisas de los puntos de  $\Sigma$  que son proyectados sobre  $x$  y  $x^1$  por la aplicación canónica de  $\Sigma$  sobre  $\Sigma/p$ ). Esto es importante ilustrar en cualquier de los casos particulares.

a) La ramificación simple  $\mathbb{Z}$

Aquí  $\Omega$  es el conjunto de los números reales con  $t < 0$ . Los puntos de la ramificación son aquellos de abscisa 0.

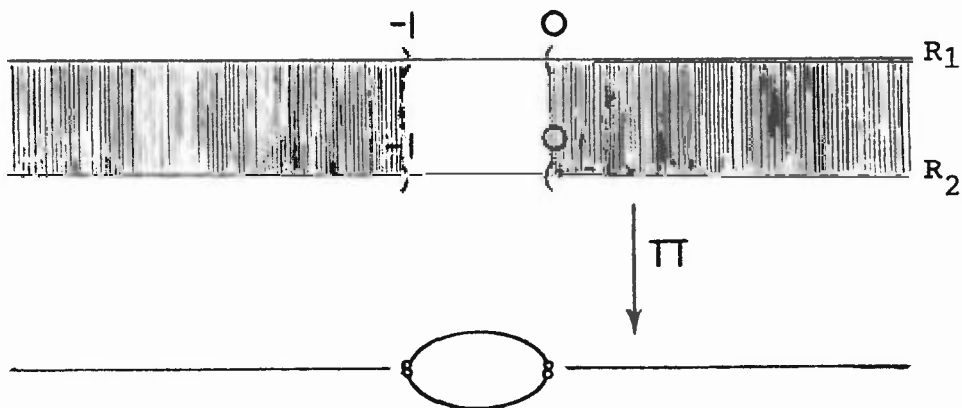




b) El lazo.

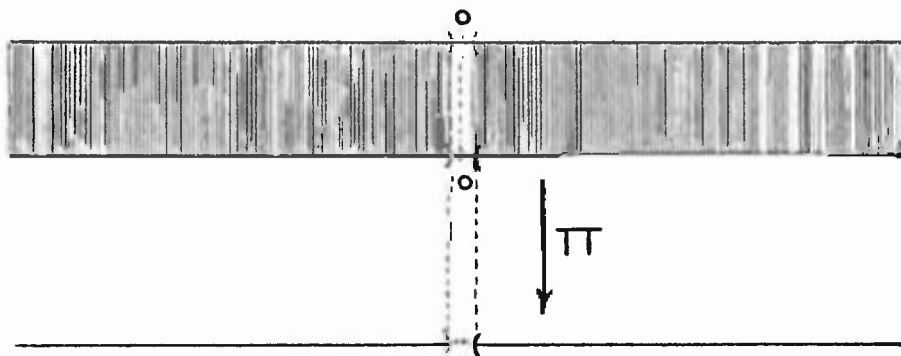
$$\text{Aquí } \Omega = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Los puntos de ramificación son los puntos de abscisa 0 y -1.



c) El lazo estrangulado:

$\Omega$  es el conjunto de los números reales  $t \neq 0$ . Los puntos de la ramificación son los de abscisa 0.



d)  $\Omega$  es el complementario del conjunto perfecto de Cantor.

sabemos que para cualquier intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ ,

$$[a, b]^* = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \cup [a + \frac{2}{3}(b-a), b]$$

es el conjunto obtenido de  $[a, b]$ , suprimiendo el intervalo abierto del medio  $]\frac{a + (b-a)}{3}, \frac{a + 2(b-a)}{3}[$

Por ejemplo para  $K_0 = [0, 1]$

Sucesivamente construimos conjuntos

$$K_1 = K_0^* = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

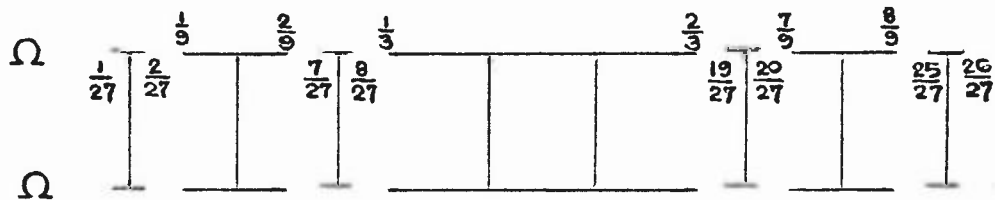
$$K_2 = K_1^* = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

$$\vdots$$

$$K_{n+1} = K_n^*$$

Retirando del intervalo  $[0, 1]$  la reunión de todos los intervalos extraídos obtenemos el conjunto de cantor.

Luego  $\Omega = (1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup (1/27, 2/27) \cup \dots$



Este es  $\Omega$  en cada copia del intervalo  $[0, 1]$

Al pasar al cociente del intervalo  $[0, 1]$  por la relación de equivalencia  $\rho$ , este va a ser como en la figura:



En una doble copia de  $\mathbb{R}$  el cociente  $\Sigma/\rho$  va estar formado de manera indefinida por cocientes semejantes a  $\Sigma_{[0,1]}/\rho$

Aquí el conjunto de los puntos de ramificación tiene la potencia del continuo.

Ejemplo 2.1.1.2. El Boucle.

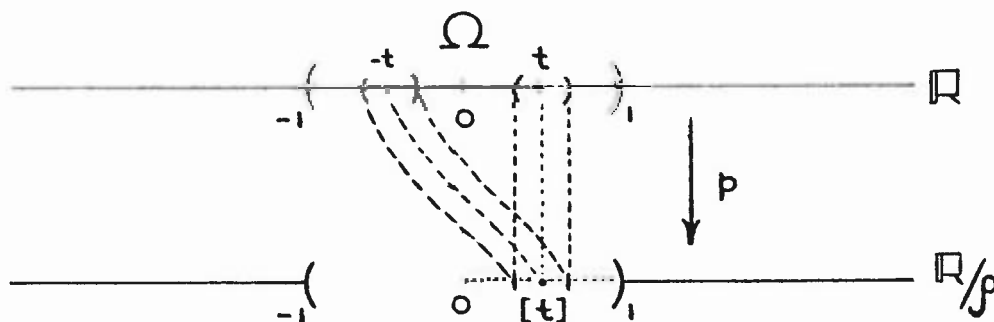
Sea  $\rho$  la relación de equivalencia en la recta  $\mathbb{R}$  que identifica los puntos de abscisa  $t$  y  $-t$  para  $\forall t$  tal que  $|t| < 1$  y que se reduce a la identidad para los otros puntos.

Aquí  $\Omega = ]-1,1[$ .

$\rho$  definida de esa manera satisface la condición de la proposición 2.1.1.1

En efecto.

Sea



$\rho$  es abierta, puesto que  $p$  es abierta

Sea  $(\dots t, \dots)$  un abierto de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  tal que todo punto de  $(\dots, t, \dots)$  pertenece a  $\Omega$  y  $t \in \rho^{-1}([t])$ .

Luego la imagen por  $p$  del abierto  $(\dots t, \dots)$  es el abierto  $(\dots [t] \dots)$  y  $p(t) = p(-t) = [t] = \{ t, -t \}$ ,  $t \neq -t$

Entonces  $p$  es una identificación, pero localmente es un homeomorfismo.

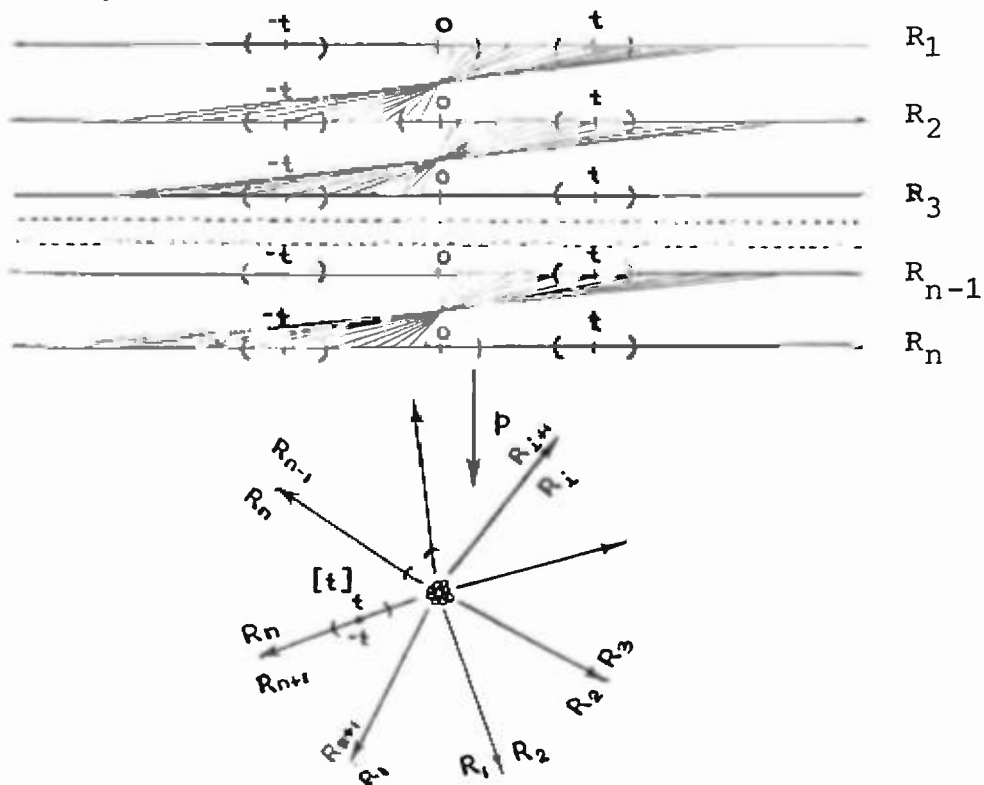
Luego el espacio cociente, que es el bucle es una variedad de dimensión 1; y los puntos de ramificación son los puntos 1 y -1.

Ejemplo 2.1.1.3. La estrella.

Sea  $\Sigma$  la suma topológica de  $n$  ejemplares  $R_1, R_2, \dots, R_n$  de la recta numérica. Sea  $\rho$  la relación de equivalencia en  $\Sigma$  que identifica cada punto de abscisa  $t > 0$  de  $R_i$  con el punto de abscisa  $-t$  de  $R_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ; se hace  $R_{n+1} = R_1$ ).

$\rho$  definida de esa manera satisface la condición de la proposición 2.1.1.1.

En efecto:



$$[t] = \{t, -t\}$$

$p$  es abierta, puesto que  $p$  es abierta.

Sea  $(\dots, t, \dots) + (\dots, -t, \dots)$  un abierto de  $(\Sigma', \tau')$  tal que todo punto de  $(\dots, t, \dots)$  y de  $(\dots, -t, \dots)$  pertenecen a  $\Omega$  ( $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$ ) y  $t \neq -t$ .

Luego la imagen por  $p$  del abierto  $(\dots, t, \dots) + (\dots, -t, \dots)$  es el abierto  $(\dots, [t], \dots)$  y  $p(t) = p(-t) = [t] = \{t, -t\}$ ,  $t \neq -t$ .

Entonces  $p$  es una identificación, pero localmente es un homeomorfismo.

Luego el espacio cociente es una variedad de dimensión 1 que llamamos una estrella con  $n$  ramificaciones

Los puntos de ramificación son aquí los puntos de abscisa 0.

se puede considerar una estrella con una infinidad de ramificaciones.

Ejemplo 2.1.1.4. La pluma.

El ejemplo 2.1.1.1 (a) muestra de qué manera es posible injertar al punto  $t = 0$  de una recta  $\mathbb{R}$  una ramificación simple. Evidentemente se puede injertar una tal ramificación en un punto cualquiera de  $\mathbb{R}$ . Si en todos los puntos de coordenadas racionales de  $\mathbb{R}$  se injerta simultáneamente una ramificación simple se

obtiene una variedad de dimensión 1 que recibe el nombre de pluma simple.

La recta  $\mathbb{R}$  es el soporte o tronco sobre el cual son injertadas las plumillas o ramas. Aquí los puntos de ramificación forman un subconjunto denso en todas partes de  $\mathbb{R}$ .

Al injertar una plumilla o rama en cada punto de  $\mathbb{R}$  se obtendrá una variedad de dimensión 1, que no tiene de ningún modo una base numerable.

Ejemplo 2.1.1.5. La pluma completa.

Si en una pluma se reemplaza cada plumilla por una nueva pluma, se define así una variedad de dimensión, uno que se llama pluma doble. En una pluma doble se puede reemplazar cada plumilla por una simple, obteniéndose así, una pluma triple, se procede reiteradamente  $n$  veces y se obtiene una pluma  $n$ -uple. Efectuando una sucesión numerable de estas operaciones se obtiene la variedad de dimensión 1 que recibe el nombre de la pluma completa.

La pluma completa posee la propiedad notable siguiente: El conjunto de los puntos de ramificación, que es numerable, es denso en todas partes en el espacio examinado.

Los diversos ejemplos muestran la gran diversificación de variedades de dimensión 1, conexas y con base numerable.

2.1.2 Variedades de dimensión uno simplemente conexas,

Definición 2.1.2.1.

El par  $(\tilde{V}, p)$  formado por un espacio topológico y una aplicación continua  $p$  de  $\tilde{V}$  sobre un espacio topológico  $V$  es llamado un espacio de recubrimiento de  $V$ , si todo punto de  $V$  posee una vecindad abierta  $U$  tal que  $p^{-1}(U)$  admite una partición en subconjuntos abiertos  $U_i$  tales que la restricción de  $p$  a cada  $U_i$  sea un homeomorfismo sobre  $U$ .

Definición 2.1.2.2.

Un espacio topológico  $V$  se dice que es simplemente conexo, si es conexo y si para todo recubrimiento conexo  $(\tilde{V}, p)$  de  $V$  la proyección  $p$  es un homeomorfismo de  $\tilde{V}$  en  $V$ .

Definición 2.1.2.3.

Una variedad  $V^n$  de dimensión  $n$ , se dice orientable, si existe un atlas  $A$  de  $V$  sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que todo cambio de cartas asociado a dos cartas de  $A$  sea un homeomorfismo directo, es decir que conserva la orientación.

Proposición 2.1.2.1.

Si existe una aplicación  $f$  de una variedad  $V$  de dimensión 1 en la recta numérica  $\mathbb{R}$  tal que  $f$  sea una identificación, entonces  $V$  es orientable. (Ver [ 3 ])

Por el contrario, si  $V$  es una variedad de dimensión 1, orientable, la aplicación  $f$  de  $V$  en  $\mathbb{R}$  no tiene que ser necesariamente una identificación. Es suficiente de considerar el caso de la circunferencia  $S^1$ .  $S^1$  es el compactificado de  $\mathbb{R}^1$ , por lo tanto existe una inmersión difeomórfica  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  en  $S^1$ .

Por lo tanto  $\varphi^{-1}: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$  no es una identificación, sin embargo  $S^1$  es orientable.

Proposición 2.1.2.2.

Sea una variedad  $V$  de dimensión 1, simplemente conexa y con base numerable. Existe una aplicación continua  $f$  que es una identificación de  $V$  en la recta numérica  $\mathbb{R}$ .

En las demostraciones utilizaremos el siguiente:

Lema 2.1.2.3.

Si una variedad  $V$  de dimensión 1 es simplemente conexa, el complementario de un punto cualquiera  $x$  de  $V$  tiene dos componentes conexas.

Demostración:

Sea  $U$  una vecindad de  $x$  homeomorfa a un intervalo, el complemento de  $x$  en  $U$  tiene dos componentes conexas  $U_+$  y  $U_-$ . Consideremos también dos ejemplares  $V'$  y  $V''$  del complemento de  $x$  en  $V$  y sean  $U'_+, U'_-, U''_+, U''_-$  los



correspondientes de  $U_+$ ,  $U_-$  en  $V'$  y  $V''$ . Completamos el espacio suma  $V' + V''$  con los puntos  $x'$  y  $x''$  admitiendo respectivamente las vecindades  $U'$  y  $U''$  tal que

$$U' \cap V' = U'_+ , U'' \cap V' = U'_- , U' \cap V'' = U''_- , U'' \cap V'' = U''_+ ;$$

donde

$$U' = U'_+ \cup U''_- \cup \{x'\}$$

$$U'' = U'_- \cup U''_+ \cup \{x''\}$$

Se obtiene así un espacio  $\tilde{V} = (V' + V'') \cup \{x', x''\}$  que provista de la proyección natural  $p$  sobre  $V$ , es un recubrimiento de dos hojas de  $V$ ; donde  $p(x') = p(x'') = x$ . Se comprueba fácilmente que  $\tilde{V}$  es conexo.

Tenemos así, por hipótesis que  $V$  es simplemente conexo, y hemos construido un espacio recubrimiento conexo  $(\tilde{V}, p)$  de  $V$ . Entonces la proyección  $p: \tilde{V} \rightarrow V$  es un homeomorfismo.

Vamos a suponer que el complemento de  $x$  en  $V$  sería conexo; resulta que se llegará a contradecir la hipótesis de que  $V$  es simplemente conexo; en el sentido de que la proyección natural  $p$  no sería un homeomorfismo de  $\tilde{V}$  en  $V$ .

Pasaremos ahora a la demostración de la proposición 2.1.2.2.

Es posible de encontrar una familia enumerable de cartas  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de  $V$  en  $\mathbb{R}$ , donde los dominios

$\Theta_i$  recubren  $V$ . Como  $V$  es conexo se puede suponer que la numeración de los  $\Theta_i$  es hecha de tal manera que  $\Omega_n = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$  sea conexa para cualquier entero  $n$ . Estableceremos esto por recurrencia.

Supóngase definida sobre  $\Omega_n$  una aplicación continua  $f_n$  de  $\Omega_n$  en el intervalo  $(-n, +n)$  que sea una identificación. Mostraremos que  $f_n$  puede extenderse a la aplicación siguiente  $f_{n+1}$  de  $\Omega_{n+1}$  en el intervalo  $(-n-1, n+1)$  que sea una identificación.

Resulta del lema 2.1.2.3 que  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$  es conexa porque si no es así, se puede hallar un punto  $x$  tal que el complemento de  $x$  en  $V$  sea conexo, lo cual contradice al lema 2.1.2.3.

Luego  $h_{n+1}(\Omega_n \cap \Theta_{n+1}) = I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y la aplicación  $f_n \circ h_{n+1}^{-1} : I \rightarrow ]-n, n[$  es una función continua, estrictamente monótona e inferior en valor absoluto a  $n$ ; es decir

$$|f_n \circ h_{n+1}^{-1}(x)| < n$$

Ella puede extenderse a una función  $\psi$  continua sobre  $\mathbb{R}$ , estrictamente monótona e inferior en valor absoluto a  $n+1$ , es decir

$$\begin{aligned} & \psi : \mathbb{R} \longrightarrow ]-n-1, n+1[ \\ \text{y} & \quad |\psi(x)| < n+1 \end{aligned}$$

La aplicación  $\varphi \circ h_{n+1} : \Theta_{n+1} \longrightarrow ]-n-1, n+1[$  si se restringe a  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$  coincide con la restricción de  $f_n : \Omega_n \longrightarrow (-n, n)$  a  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$

Ahora definimos  $f_{n+1} : \Omega_{n+1} = \Omega_n \cup \Theta_{n+1} \longrightarrow (-n-1, n+1)$  por la condición

$$f_{n+1} / \Omega_n = f_n$$

y

$$f_{n+1} / \Theta_{n+1} = \varphi \circ$$

luego  $f_{n+1}$  es una función de pegamento. Además  $f_{n+1}$  es una identificación puesto que  $f_n$  es una identificación,  $h_{n+1}$  es una identificación de  $\Theta_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow ]-n-1, n+1[$  es una identificación.

Entonces:

$$f_n : \Omega_n = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i \longrightarrow (-n, n)$$

$$f_{n+1} : \Omega_{n+1} \longrightarrow (-n-1, n+1)$$

$$f_{n+2} : \Omega_{n+2} \longrightarrow (-n-2, n+2)$$

Definimos  $f : V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Theta_i \longrightarrow (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  como la función de pegamento, de manera que

$$f / \Omega_n = f_n$$

Se observa que  $f$  es una identificación de  $V$  que es conexo en  $\mathbb{R}$ .

### 2.1.3 Variedades provistas de estructuras diferenciables.

Recordemos las nociones que siguen; de Topología Diferencial que utilizaremos.

#### Definición 2.1.3.1.

Una estructura diferenciable de clase  $C^r$ , donde  $r$  es un entero positivo ó  $\infty$  (respectivamente una estructura analítica), sobre una variedad topológica  $V^n$  de dimensión  $n$  es definida mediante un atlas  $A$  de  $V^n$  tal que, para todo par de cartas  $h_i, h_j \in A$ , el cambio de cartas  $h_i^{-1} \circ h_j$  sea un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^r$  (respectivamente analítica) de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición 2.1.3.2.

Una función diferenciable  $f$  de clase  $C^r$  sobre  $V^n$  es de rango 1 en el punto  $x \in V^n$ , si para una carta  $h_i$  cuyo dominio contiene a  $x$ , la aplicación  $f \circ h_i^{-1}$  es una función donde por lo menos una derivada parcial en el punto  $h_i(x)$  es diferente de cero, es decir la matriz del diferencial de la función  $f \circ h_i^{-1}$  es de orden  $1 \times n$ .

Observación 2.1.3.1. La definición 2.1.3.2 es evidentemente independiente de la carta escogida,  $h_i \in A$ .

#### Definición 2.1.3.3.

Una carta  $f$  de  $V^n$  en  $\mathbb{R}^n$  se dice compatible con el atlas  $A$ , si para  $\forall h \in A$ , los cambios de cartas

$h \circ f^{-1}$  y  $f \circ h^{-1}$  son dos homeomorfismos diferenciables de clase  $C^r$  (o analíticos) de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Observación 2.1.3.2.

El conjunto de todas las cartas compatibles con el atlas  $A$  de la definición 2.1.3.3 forman un atlas maximal  $\bar{A}$  generado por  $A$ ; o sea en  $\bar{A}$  están todas las cartas de  $A$  y las que son compatibles con las cartas de  $A$ .

Definición 2.1.3.4.

Sean  $A_1$  y  $A_2$  atlas diferenciables sobre  $X$ . Decimos que  $A_1$  y  $A_2$  definen la misma estructura diferenciable sobre  $X$  si y solo si coinciden las atlas maximales  $\bar{A}_1$  y  $\bar{A}_2$ . En particular si;  $A$  es un atlas diferenciable sobre  $X$ ; entonces dos subatlas de  $\bar{A}$  definen una misma estructura diferenciable sobre  $X$ .

Proposición 2.1.3.1.

Sean  $A_1$  y  $A_2$  atlas diferenciables sobre  $X$ .  $A_1$  y  $A_2$  definen la misma estructura diferenciable si y solo si existen un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^r$ .

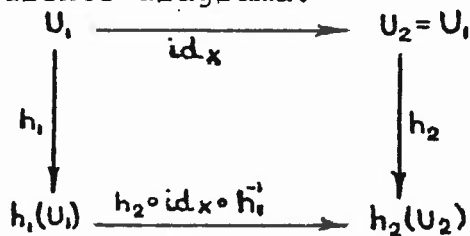
$$f: (X, A_1) \longrightarrow (X, A_2)$$

Demostración:

Sea  $id_x: X \longrightarrow X$ , que es un homeomorfismo.

o bien  $id_x: (X, A_1) \longrightarrow (X, A_2)$

Se tiene el siguiente diagrama:



Por hipótesis  $(U_1, h_1)$  es compatible con  $(U_2, h_2)$ ; luego  $h_2 \circ h_1^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$ . Entonces  $h_2 \circ \text{id}_x \circ h_1^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$ .

Por lo tanto  $\text{id}_x$  es un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^r$ .

Vamos a demostrar ahora la condición suficiente.

$$\text{Sea } A_1 = \left\{ (U_{1_i}, h_{1_i}) \right\}_{i \in I}$$

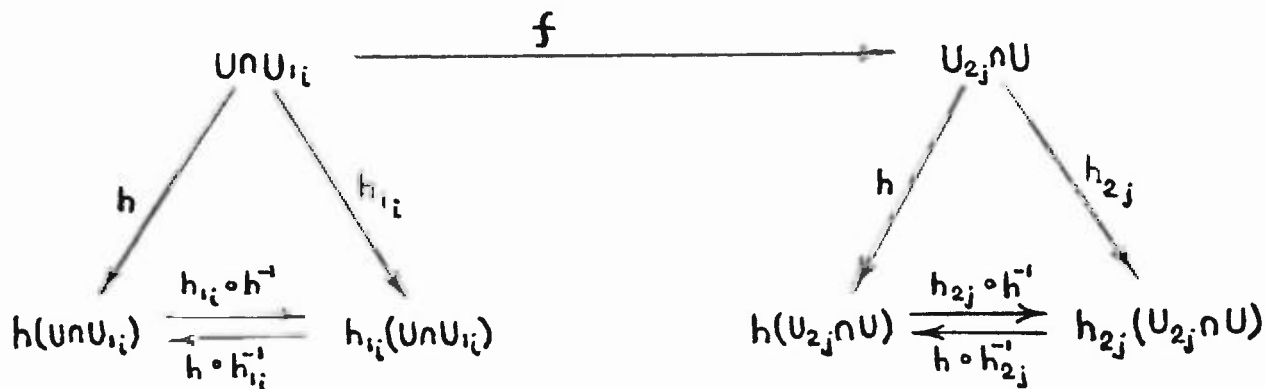
$$A_2 = \left\{ (U_{2_j}, h_{2_j}) \right\}_{j \in J}$$

$$\text{Por demostrar : } \bar{A}_1 = \bar{A}_2$$

Sea  $(U, h) \in \bar{A}_1$ . Entonces  $h$  es compatible con el atlas  $A_1$

Sea  $h_{1_i} \in A_1$ , entonces los cambios de cartas  $h \circ h_{1_i}^{-1}$  y  $h_{1_i} \circ h^{-1}$  son diferenciables de clase  $C^r$ .

Se tiene el siguiente diagrama



Demostraremos que  $h_{2j} \circ h^{-1}$  y  $h \circ h_{2j}^{-1}$  son diferenciables de clase  $C^r$ ,

Por hipótesis existe  $f$  un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^r$  de  $(X, A_1)$  en  $(X, A_2)$ . Como  $(U \cap U_1, h_{1i})$  es una carta de  $(X, A_1)$  tal que  $x \in U \cap U_{1i}$  y  $(U_{2j} \cap U, h_{2j})$  es una carta de  $(X, A_2)$  con  $f(x) \in U_{2j} \cap U$ ; la composición  $h_{2j} \circ f \circ h_{1i}^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Además  $((U_{2j} \cap U), h)$  es una carta de  $(X, A_2)$  con  $f(x) \in U_{2j} \cap U$ . Entonces  $h \circ f \circ h_{1i}^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Por otro lado:  $h_{2j} \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h_{1i}^{-1} = h_{2j} \circ f \circ h_{1i}^{-1}$

Luego  $h_{2j} \circ h^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$

Además  $h \circ f \circ h_{1i}^{-1} = h \circ h_{2j}^{-1} \circ h_{2j} \circ f \circ h_{1i}^{-1}$

Entonces  $h \circ h_{2j}^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^r$ .

Luego  $(U, h) \in \bar{A}_2$ . Por tanto  $\bar{A}_1 \subseteq \bar{A}_2$ .

La otra inclusión;  $A_2 \subseteq A_1$  se obtiene de manera análoga

Propiedad 2.1.3.1: La ramificación simple, así como el lazo estrangulado, es una variedad de dimensión 1 con dos estructuras de variedades diferenciables de clase  $C^\infty$  no isomorfas o no idénticas.

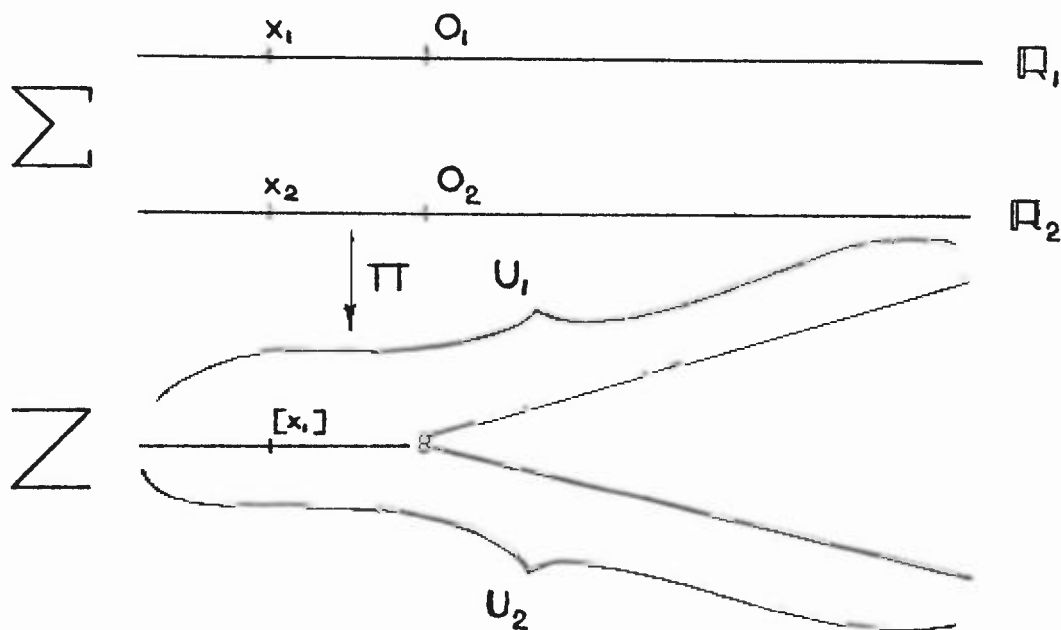
Dicho de otro modo se puede proveer a la ramificación simple de dos estructuras diferenciables de clase  $C^\infty$  tales que no existe ningún homeomorfismo de clase  $C^\infty$  de

$Z$  provista de la primera estructura sobre  $Z$  provista de la segunda estructura.

Al tomar otra vez las notaciones del ejemplo 2.1.1.1,  $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$  (identificando a sus imágenes en  $Z$ ) son dos abiertos que forman un recubrimiento de  $Z$ .

En efecto:

Según el ejemplo 2.1.1.1, (a);  $\mathbb{R}_1$  y  $\mathbb{R}_2$  son dos ejemplares de  $\mathbb{R}$  y  $\Sigma$  su suma topológica



Como el espacio  $\Sigma$  es un abierto y  $\Sigma \cap \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1$ ,  $\Sigma \cap \mathbb{R}_2 = \mathbb{R}_2$ ; entonces  $\mathbb{R}_1$  y  $\mathbb{R}_2$  son abiertos en los subespacios  $\mathbb{R}_1$  y  $\mathbb{R}_2$  respectivamente.

Ahora  $U_1 = \pi(\mathbb{R}_1)$  y  $U_2 = \pi(\mathbb{R}_2)$  son dos abiertos de  $Z$ .

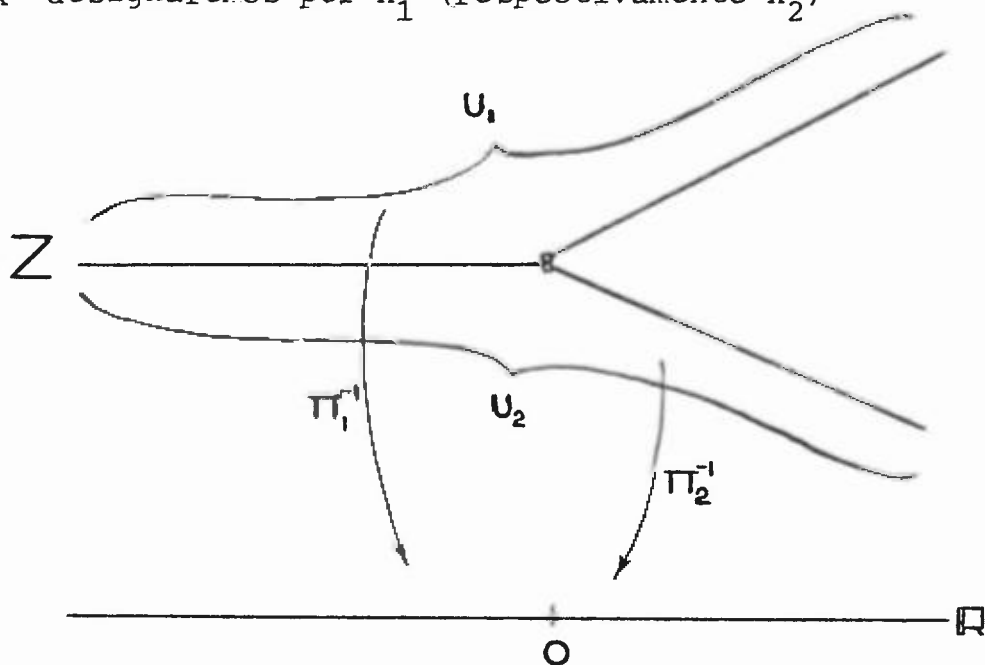


Pongamos  $U = U_1 \cap U_2$  que se identifica a  $(-\infty, 0)$ .  
 $U_1$  y  $U_2$  son dos abiertos que forman un recubrimiento de  $Z$ .

Las restricciones  $\pi_1 = \pi|_{\mathbb{R}_1}$  y  $\pi_2 = \pi|_{\mathbb{R}_2}$  son homeomorfismos y  $\pi_1 = \pi_2$  sobre  $U$ .

Las cartas  $(U_1, \pi_1^{-1})$  y  $(U_2, \pi_2^{-1})$  definen sobre  $Z$  una estructura diferenciable que llamaremos estructura trivial.

El punto de  $\mathbb{R}_1$  (respectivamente de  $\mathbb{R}_2$ ) de abscisa  $x$  designaremos por  $x_1$  (respectivamente  $x_2$ )



La primera estructura es definida mediante

$$\pi_1^{-1}(x_1) = x ; \pi_2^{-1}(x_2) = x, \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = x \end{matrix}$$

$A = \{ (U_1, \pi_1^{-1}); (U_2, \pi_2^{-1}) \}$  es un atlas de  $Z$ .

La segunda estructura es definida por:

$$h_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h_1(x_1) = x \quad ; \quad x_1 = x$$

$$h_2: U_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h_2(x_2) = x^3 \quad ; \quad x_2 = x$$

$B = \{ (U_1, h_1), (U_2, h_2) \}$  es un atlas de  $Z$ .

Los atlas A y B, definen cada uno en  $Z$  una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Tenemos que  $(Z, A)$  y  $(Z, B)$  no son homeomorfos, puesto que los atlas diferenciable A y B sobre  $Z$  no definen la misma estructura diferenciable.

Propiedad 2.1.3.2; Existen variedades de dimensión 1 (por ejemplo: la pluma completa) con una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$  tales que todas las funciones de clase  $C^1$  sobre estas variedades se reducen a las constantes.

Observación 2.1.3.3: Las propiedades patológicas puestas en evidencia en la propiedad 2.1.3.2 muestra que es necesario una noción de estructura diferenciable con más restricciones para que no aparezcan como por ejemplo la propiedad precedente.

Definición 2.1.3.5.

Una estructura diferenciable de clase  $C^r$  sobre una

variedad  $V^n$  es llamada regular si para toda función  $f$  diferenciable de clase  $C^r$  definida sobre una vecindad de  $x \in V^n$ , existe una función  $f'$  diferenciable de clase  $C^r$  definida sobre  $V^n$  tales que  $f$  y  $f'$  coinciden sobre una vecindad de  $x$ .

Proposición 2.1,3.2.

Toda estructura diferenciable de clase  $C^r$  sobre una variedad separada o de Hausdorff  $V^n$  es regular.

Demostración.

La demostración es constructiva.

Sean la variedad  $V^n$ , separada,  $x$  un punto de  $V^n$  y  $U$  una vecindad de  $x$ .

Sean además  $f$  una función diferenciable de clase  $C^r$  definida sobre  $U$ , y  $y$  un punto de  $V^n$  tal que  $y \notin U$ .

Como  $V^n$  es separada existen  $W$  y  $W'$  vecindades de  $x$  e  $y$  respectivamente tales que  $W \cap W' = \emptyset$ .

Supongamos que  $W \not\subset U$ , entonces tomamos la vecindad  $W^* = U \cap W$  de  $x$ .

Definamos ahora una nueva función  $f'$  de la siguiente manera:

$$f' : W^* \cup W' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f' / W^* = f$$

$$f' / W' = \text{cte}$$

Por construcción  $f'$  es diferenciable de clase  $C^r$ ,

Observación 2.1.3.4.

La segunda estructura diferenciable definida sobre la ramificación simple no es regular.

Lema 2.1.3.3.

Sea  $V$  una variedad provista de una estructura diferenciable regular de clase  $C^r$ . Si una función  $f$  diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $V$  es de rango 1 en un punto  $x$  de  $V$ , ella es igualmente de rango 1 en todo punto y no separado de  $x$ .

Demostración.

Para simplificar las notaciones, demostraremos este lema, en el caso donde  $V$  es una variedad de dimensión uno. Sean  $h_1$  y  $h_2$  dos cartas de  $V$  en  $\mathbb{R}$  tales que  $h_1(x)=0$  y  $h_2(y)=0$ .

La aplicación  $h = h_2 \circ h_1^{-1}$  es un homeomorfismo diferenciable de clase  $C^r$ , además también su inversa, que es de un abierto  $U_1$  de  $\mathbb{R}$  sobre un abierto  $U_2$  de  $\mathbb{R}$ ; el origen 0 pertenece a la adherencia de  $U_1$  y  $U_2$ .

Sean las funciones  $f_1 = f \circ h_1^{-1}$  y  $f_2 = f \circ h_2^{-1}$ , que son diferenciables de clase  $C^r$  y la derivada  $f_1'(0)$  de  $f_1$  en el origen no es pues nula.

Sea  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  una sucesión de puntos de  $U_1$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ .

Ahora tomamos  $\bar{t}_n = h(t_n)$ ;  $\{\bar{t}_n\}$  es una sucesión de puntos de  $U_2$  y también  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{t}_n = 0$

$$f'_1(t_n) = f'_2(\bar{t}_n) \circ h'(t_n) \text{ para } \forall n$$

Si el  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_2(\bar{t}_n) = f'_2(0)$  fuera nulo, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} h'(t_n)$  sería infinito.

Pero entonces si  $g$  es una función de clase  $C^r$  sobre  $V$  y de rango 1 en  $y$  (una tal función existe siempre en virtud de la hipótesis de regularidad). Con las notaciones correspondientes,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g'_1(t_n)$  sería infinito, lo que es imposible, puesto que  $g$  es de rango 1 en  $y$ .

Entonces  $f'_2(0) \neq 0$ , para que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h'(t_n)$  exista. La proposición 2.1.2.2, de la sección 2.1.2 puede ser precisada de la manera siguiente:

Proposición 2.1.3.4.

sobre toda variedad  $V$  de dimensión 1, provista de una estructura diferenciable regular de clase  $C^r$ , simplemente conexa y con base enumerable, existe una función  $f$  diferenciable de clase  $C^r$ , de rango 1 en todo punto de  $V$ .

En la demostración utilizaremos el siguiente:

Lema 2.1.3.5.

Sea  $f(t)$  una función diferenciable de clase  $C^r$  definida sobre un intervalo  $I'$  de la recta numérica  $\mathbb{R}$  y cuya derivada es diferente de cero en todo punto de un inter-

valo cerrado  $I \subset I'$ , Entonces la restricción de  $f$  a  $I$  puede ser extendida a una función diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $\mathbb{R}$  y de derivada no nula en todo punto de  $\mathbb{R}$ . (Ver [9]).

Demostración de la proposición 2.1.3.4.

Sea  $A$  un atlas de  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  que define una estructura diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $V$ . El procedimiento general de la demostración es similar al de la proposición 2.1.2.2 de la sección 2.1.2. Utilizaremos las mismas notaciones.

Así tenemos que es posible encontrar una familia enumerable de cartas  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de  $V$  en  $\mathbb{R}$ , donde los dominios  $\Theta_i$  recubren  $V$ . Supongamos que cada  $\Theta_i$  es la pre-imagen de un intervalo abierto  $I = ] -1, 1 [$  por un homeomorfismo  $h_i$  que se extiende a un homeomorfismo  $\tilde{h}_i \in A$  de  $V$  en  $\mathbb{R}$ .

Como  $V$  es conexo se puede suponer que la numeración de los  $\Theta_i$  es hecha de tal manera que  $\Omega_n = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$  sea conexa.

Supongamos definida sobre  $\Omega_n$  una función  $f_n$  diferenciable de clase  $C^r$ , de rango 1 en todo punto y tal que para  $\forall \Theta_i, 1 \leq i \leq n$ , la función  $f_n \circ h_i^{-1}$  que es definida sobre  $I$  se extiende a una función diferenciable de clase  $C^r$  sobre  $\mathbb{R}$  de rango 1 en todo punto.

Vamos a mostrar que  $f_n$  puede ser extendida a la siguiente función  $f_{n+1}$  diferenciable de clase  $C^r$ , sobre  $\Omega_{n+1}$  con las mismas propiedades.

Como  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$  es conexo,  $h_{n+1}(\Omega_n \cap \Theta_{n+1})$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ; supongamos que sea  $]t_0, t_1[$ ; luego  $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$  es una función diferenciable de clase  $C^r$  sobre el intervalo  $]t_0, t_1[$  contenido en  $I$  y con derivada no nula. Los conjuntos  $h_{n+1}(\Theta_i \cap \Theta_{n+1})$   $1 \leq i \leq n$  son intervalos abiertos que recubren a  $]t_0, t_1[$ ; sea  $\Theta_k$  un abierto tal que  $h_{n+1}(\Theta_k \cap \Theta_{n+1})$  sea un intervalo de la forma  $]t_0, t_2[$  con  $t_2 \leq t_1$ . Por la hipótesis de recurrencia, la función  $f_n \circ h_k^{-1}$  se extiende sobre  $\mathbb{R}$  a una función  $\hat{f}_k$  de rango 1 en todo punto.

sea  $t'_0$  el punto del intervalo  $] -1, +1 [$  definido por:

$$t'_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} h_k \circ h_{n+1}^{-1}(t) \quad \text{y sea } x' = \tilde{h}_k^{-1}(t'_0)$$

El punto  $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$  no es pues separado de  $x'$ . Existe una función  $g$  diferenciable de clase  $C^r$  en  $V$  que coincide con  $\hat{f}_k \circ \tilde{h}_k$  sobre una vecindad de  $x'$ , porque  $V$  es regular. Como  $g$  es de rango 1 en  $x'$ , puesto que  $\hat{f}_k \circ \tilde{h}_k$  es de rango 1 en  $x'$ , también es de rango 1 en  $x$  por el lema 2,1,3.3.

La función que es igual a  $g \circ \tilde{h}_{n+1}$  sobre el intervalo  $] -\infty, t_0 [$  y a  $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$  sobre  $] t_0, t_1 [$  es diferen-

ciable de clase  $C^r$  sobre  $] -\infty, t_1 [$ . Puesto que las dos funciones  $g \circ \tilde{h}_{n+1}^{-1}$  y  $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$  coinciden en el intervalo  $] t_0, t_1 [$ , la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} g \circ \tilde{h}_{n+1}^{-1}(x) & x \in ] -\infty, t_0 [ \\ f_n \circ h_{n+1}^{-1}(x) & x \in ] t_0, t_1 [ \end{cases}$$

es una función de pegamento.

Al repetir la misma construcción para  $t_1$ , se obtiene una función definida sobre  $\mathbb{R}$  de rango 1 sobre el intervalo  $] t_0, t_1 [$  y cuya restricción a  $] t_0, t_1 [$  coincide con  $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$ .

Por el Lema 2.1.3.5, existe una función  $\hat{f}_{n+1}$  diferenciable de clase  $C^r$  que extiende a  $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$  y que es de rango 1 en todo punto.

Luego la función buscada  $f_{n+1}$  es la definida por

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in \Omega_n \\ \hat{f}_{n+1} \circ h_{n+1}(x) & x \in \Theta_{n+1} \end{cases}$$

Luego  $f_{n+1}$  es una función diferenciable de clase  $C^r$ , sobre  $\Omega_{n+1}$ , que satisface propiedades análogas a las de  $f_n$ .



Tenemos:

$$h_{n+1}: \Theta_{n+1} \longrightarrow ]-1, +1 [$$

$$\hat{f}_{n+1}: \mathbb{R} \longrightarrow ]-n-1, n+1 [$$

Luego  $\hat{f}_{n+1} \circ h_{n+1}: \Theta_{n+1} \longrightarrow ]-n-1, n+1 [$

La aplicación  $h_{n+1}$  si se restringe a  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$  coincide con la restricción de  $f_n$  a  $\Omega_n \cap \Theta_{n+1}$

Entonces, por recurrencia:

$$f_n : \Omega_n \longrightarrow ]-n, n [$$

$$f_{n+1} : \Omega_{n+1} \longrightarrow ]-n-1, n+1 [$$

$$f_{n+2} : \Omega_{n+2} \longrightarrow ]-n-2, n+2 [$$

⋮

⋮

Definimos la función de pegamento  $f$  de  $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Theta_i$  a  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  de manera que

$$f|_{\Omega_n} = f_n$$

Luego  $f$  es una función diferenciable de clase  $C^r$  y de rango 1 en todo punto de  $V$ ,

Corolario 2.1.3.5.

Todas las estructuras diferenciables sobre la recta numérica  $\mathbb{R}$  son equivalentes.

Demostración:

Sea  $\mathbb{R}$  la recta numérica provista de la estructura diferenciable ordinaria dada por el atlas  $\{(\mathbb{R}, I_d)\}$  y  $\mathbb{R}'$  recta numérica provista de una estructura diferenciable de clase  $C^r$  dada por el atlas  $\{(\mathbb{R}, \mathcal{F}')\}$ .  $\mathbb{R}'$  es de dimensión 1;  $\mathbb{R}'$  es regular, puesto que toda estructura diferenciable de clase  $C^r$  sobre una variedad separada es regular;  $\mathbb{R}'$  con la topología usual satisface el 2º axioma de numerabilidad y su base global es  $\mathcal{B} = \{b_p(x) / x, p \text{ racionales}\}$ ; además es simplemente conexo.

De acuerdo a la proposición 2.1.3.4, existe una aplicación diferenciable de clase  $C^r$  de rango 1 en todo punto de  $\mathbb{R}'$  sobre  $\mathbb{R}$ ,

Sea esta aplicación la homotecia siguiente:

Fijamos  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}'$  y definimos

$$g_a: \mathbb{R}' \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por} \\ g_a(t) = at$$

Como esta aplicación es biunívoca, ella será un isomorfismo de clase  $C^r$  de  $\mathbb{R}'$  sobre  $\mathbb{R}$ ; es decir un difeomorfismo.

2.2 Las estructuras foliadas del plano.

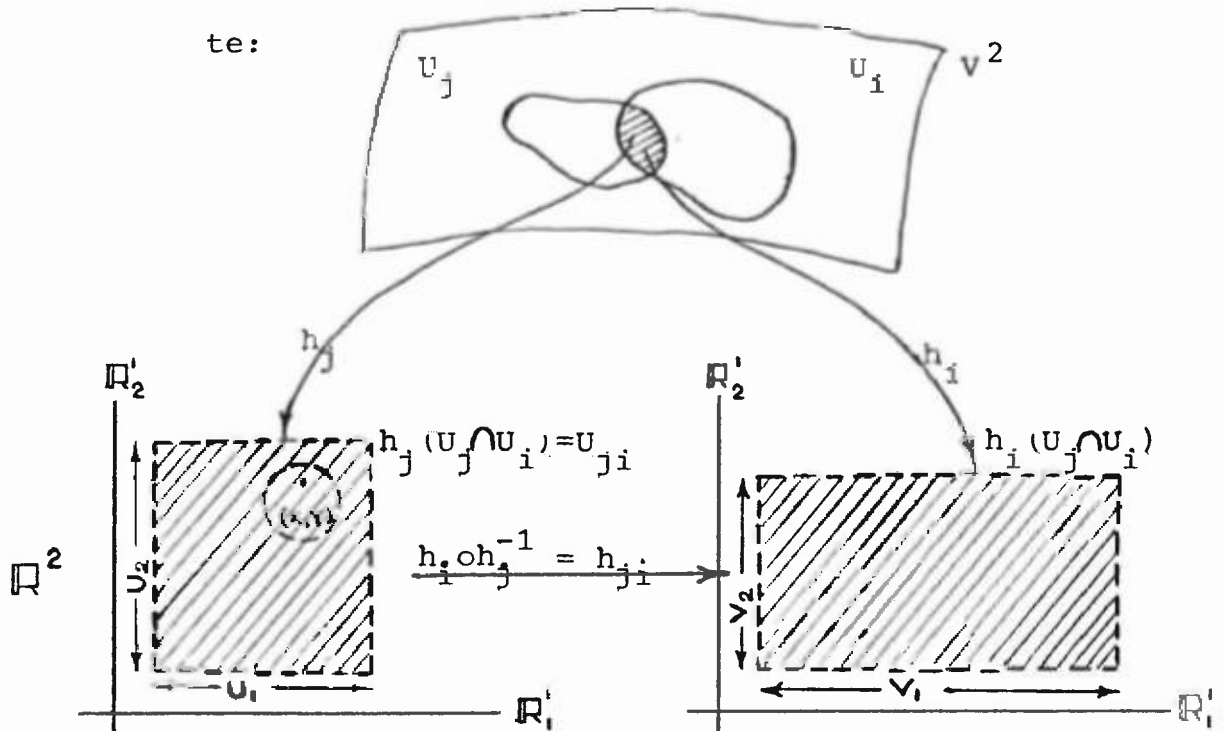
2.2.1 Revisión de algunas definiciones y propiedades clásicas.

Definición 2.2.1.1.

Una estructura foliada (F) de dimensión uno sobre una variedad diferenciable  $V^2$  de dimensión 2 es definida por un atlas A de  $V^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  tal que si  $h_i$  y  $h_j$  son dos cartas cualesquiera de A, el cambio de cartas  $h_{ji} = h_i \circ h_j^{-1}$  es un homeomorfismo de un abierto  $U_{ji}$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que en la vecindad de todo punto de  $U_{ji}$  está expresado por las ecuaciones de la forma:

$$x' = g_{ji}(x, y) \quad y' = k_{ji}(y) \quad (1)$$

Ilustramos esta definición con el diagrama siguiente:



donde:

$$h_j(U_j) = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$$

$$h_i(U_i) = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$$

$$h_j(U_j \cap U_i) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$$

$$h_i(U_j \cap U_i) = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$$

$$\begin{aligned} \text{además} \quad h_i \circ h_j^{-1}(x, y) &= h_{ji}(x, y) = (x', y') \\ &= (g_{ji}(x, y), k_{ji}(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donde,} \quad g_{ji} : U_{ji} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_1 \\ (x, y) &\longmapsto g_{ji}(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ji} : U_2 \subset \mathbb{R}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}_2 \\ y &\longmapsto k_{ji}(y) \end{aligned}$$

Observación 2.2.1.1.

- 1.- Si los cambios de cartas  $h_{ji}$  son diferenciables de clase  $C^r$  (respectivamente analítica), se dirá que la estructura foliada (F) es diferenciable de clase  $C^r$  (respectivamente analítica).
- 2.- Cuando se hace mención a la condición "Analítica", se está haciendo referencia a funciones analíticas reales.

Definición 2.2.1.2.

- 1.- Decimos que una carta  $f$  de  $V^2$  en  $\mathbb{R}^2$  es compatible con A, si para toda carta  $h \in A$ , el cambio de carta  $h \circ f^{-1}$  es de la forma (1); es decir:

$$\begin{aligned} h \circ f^{-1}(x, y) &= (x', y') \\ &= (g_{ji}(x, y), k_{ji}(y)) \end{aligned}$$

(además es diferenciable de clase  $C^r$  o analítica en los casos en que  $(F)$  sea una estructura diferenciable de clase  $C^r$  o analítica).

- 2.- El conjunto de todas las cartas compatibles con  $A$  forman el atlas maximal generada por  $A$  y definen sobre  $V^2$  la estructura foliada  $(F)$ ,  
Supondremos en lo sucesivo, o desde ahora que  $A$  es un atlas maximal.

Observación 2.2.1.2.

De acuerdo a la definición 1.6.1 de foliación del Capítulo I, diremos que  $V^2$  es foliada por  $A$  o que  $A$  es la estructura foliada  $(F)$  de dimensión uno. En la definición 2.2.1. no se exige que la foliación o la estructura foliada  $(F)$  sea diferenciable de clase  $C^r$ , como en la definición 1.6.1.

Se demuestra sin dificultad la

Proposición 2.2.1.1.

El conjunto de cartas de  $A$  cuyos dominios están en un abierto  $U$  forman un atlas de  $U$  sobre  $\mathbb{R}^2$  que define la estructura foliada  $(F_U)$  inducida por  $F$  sobre  $U$ ,

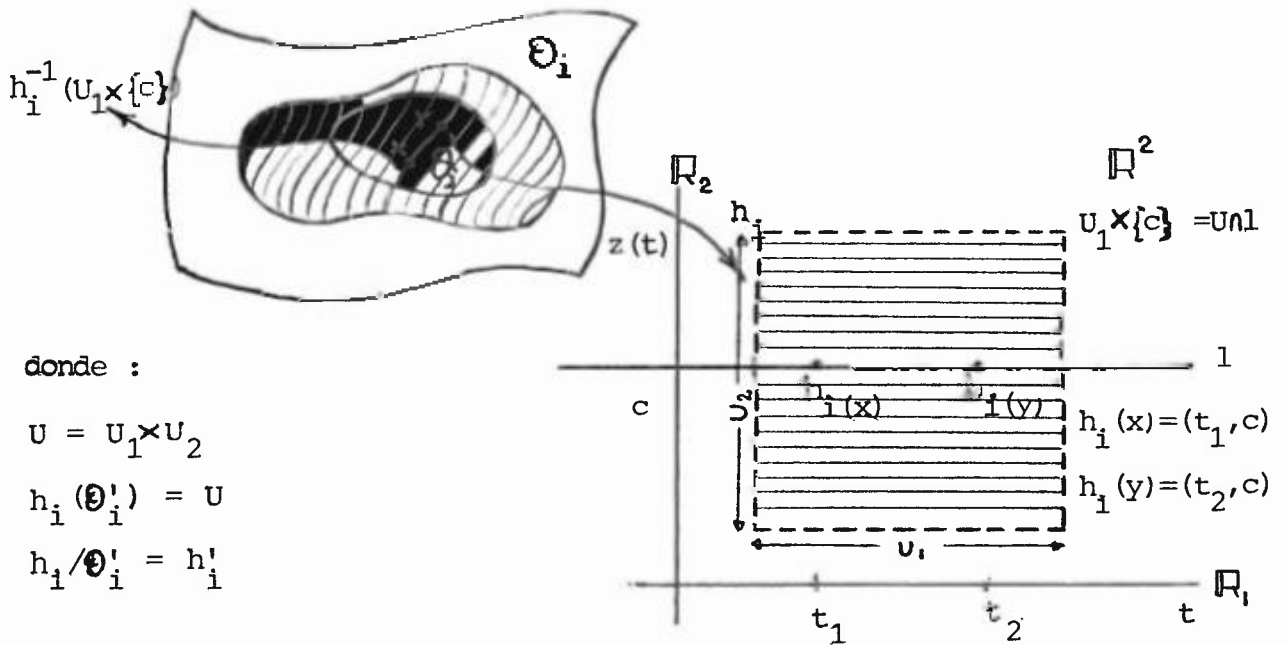
Definición 2.2.1.3.

Si  $(F)$  y  $(F')$  son dos estructuras foliadas sobre  $V^2$  y  $V'^2$  respectivamente, definidas por los atlas  $A$  y  $A'$ , un isomorfismo de  $(F)$  sobre  $(F')$  es un homeomorfismo  $\psi$

de  $V^2$  sobre  $V^{1,2}$  tal que  $A' = \psi(A)$  (esto nos dice que toda carta de  $A'$  es de la forma  $\psi h$ , con  $h \in A$ ).

En los dominios  $\Theta_i$  de cada carta  $h_i \in A$  está definida una relación de equivalencia  $\rho_i$  donde las clases de equivalencia son las pre-imágenes por  $h_i$  de las rectas de funciones constantes.

Sea el diagrama



donde :

$$U = U_1 \times U_2$$

$$h_i(\Theta_i) = U$$

$$h_i / \rho_i = h'_i$$

Además  $x \rho_i y$  si y solo si  $h_i(x), h_i(y) \in 1$

La clase  $x$  denotada por  $[x]$  es de la forma:

$$[x] = h_i^{-1}(i) = \{ y \in \Theta_i / y \rho_i x \}$$

Sea  $p: \Theta_i \rightarrow \Theta_i / \rho_i$ , la suryección canónica.

Aquí también las placas son de la forma:

$$h_i^{-1}(U_1 \times \{c\}), \quad c \in U_2$$

y en este caso se les llaman placas de  $\Theta_i$  o también placas de la estructura foliada (F).

Proposición 2.2.1.2.

Si la estructura foliada (F) es diferenciable de clase  $C^r$ ; entonces las placas son subvariedades conexas de dimensión 1 y clase  $C^r$  de M.

Demostración:

Se utiliza un razonamiento análogo al dado en la demostración de la proposición 1.6.1.

Se demuestra con facilidad la siguiente

Proposición 2.2.1.3.

De las relaciones (1) resulta que para todo punto  $x \in \Theta_i \cap \Theta_j$ , las relaciones de equivalencia inducidas por  $\beta_i$  y  $\beta_j$  en una vecindad suficientemente pequeña de x coinciden.

Sea  $\beta$  la relación de equivalencia generada por las  $\beta_i$ .

Definición 2.2.1.4.

Las clases de  $\beta$  en  $V^2$  son llamadas las hojas de la estructura foliada (F). El espacio de las hojas llamado el espacio cociente de  $V^2$  por la relación de equivalencia  $\beta$  (provisto de la topología cociente) juega un papel esencial en lo sucesivo.

Observación 2.2.1.3.

- 1.- Observemos que la relación de equivalencia  $\rho$  es abierta puesto que es generada por las relaciones  $\rho_i$  que son abiertas.
- 2.- En la definición 1.6.1 de foliación la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  se definió sobre la variedad  $M$ ; para dos puntos  $p$  y  $q$  cualesquiera; mientras que en la definición 2.2.1.1 de foliación, la relación de equivalencia  $\rho$  definida sobre la variedad  $V^2$  es generada por las relaciones de equivalencia  $\rho_i$  definida sobre los dominios  $\mathcal{O}_i$  de las cartas  $h_i$ ; donde las clases de equivalencia por la relación  $\rho_i$  en cada  $\mathcal{O}_i$  constituyen caminos de placas en (según la definición 1.6.1). Estos caminos de placas determinan una partición de cada  $\mathcal{O}_i$ .
- 3.- Las clases de equivalencia en la relación  $\mathcal{R}$  se componen de la misma forma que las clases de equivalencia de la relación  $\rho$ , En ambos conceptos las clases de equivalencia reciben el nombre de hojas de la estructura foliada.
- 4.- Según la definición 1.6.1, las clases de equivalencia son caminos de placas (cada clase es un camino de placas) que cubren a la variedad  $M$ , ya que las placas cubren a los abiertos  $U$  (dominios de cartas)



y estos cubren a la variedad. Según la definición 2,2.1.1, las clases de equivalencia también son caminos de placas (cada clase es un camino de caminos de placas).

- 4.- Los conjuntos abiertos que cubren a los dominios de cartas de la variedad  $V^2$ , con sus respectivas cartas constituyen atlas de dichos dominios de cartas; definiendo así la estructura foliada  $(F_U)$  inducida por  $F$  sobre cada dominio  $U$ .
- Entonces en cada dominio de carta  $U$  se está aplicando la definición 1.6.1 de foliación con la diferencia de que las imágenes de los conjuntos abiertos que cubren a un dominio de carta  $U$  por ejemplo, por sus respectivas cartas son abiertos básicos de  $\mathbb{R}^2$  que cubren a  $\mathbb{R}^2$ .

Recordemos ahora, que todo campo de vectores  $E$  definido sobre una variedad  $V^2$  separada que verifica las dos condiciones siguientes:

- (i)  $E$  es diferenciable de clase  $C^r$  (o analítica)
- (ii)  $E(z) \neq 0$  en todo punto  $z$  de  $V^2$ .

está asociada una estructura foliada diferenciable de clase  $C^r$  (o analítica).

Las hojas son las trayectorias del campo de vectores  $E$ .

Recíprocamente; a toda estructura foliada diferenciable  $(F)$  de clase  $C^r$  en  $V^2$  se le puede hacer corresponder un campo de vectores  $E$  sobre  $V^2$  cuyas trayectorias son las hojas de  $(F)$ .

Ejemplo: Las curvas que son soluciones de la ecuación diferencial (en coordenadas polares  $r$  y  $w$ ):  $\frac{dr}{dw} = r(1-r^2)$ , son las hojas de una estructura foliada analítica del plano sin origen.

La circunferencia  $r=1$  es una hoja, las otras hojas se enrollan asintóticamente alrededor de la circunferencia. (Ver [22] )

El espacio cociente de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  por la relación de equivalencia  $\rho$  asociada a la estructura foliada admite en este caso una partición en un subespacio abierto homeomorfo a dos circunferencias y un punto que admite como única vecindad todo el espacio cociente.

Definición 2.2.1.5.

Aí par  $(\mathcal{O}_i, h_i)$  formado por una carta  $h_i \in A$  y su dominio  $\mathcal{O}_i$  se le llama un abierto distinguido de la estructura foliada  $(F)$ .

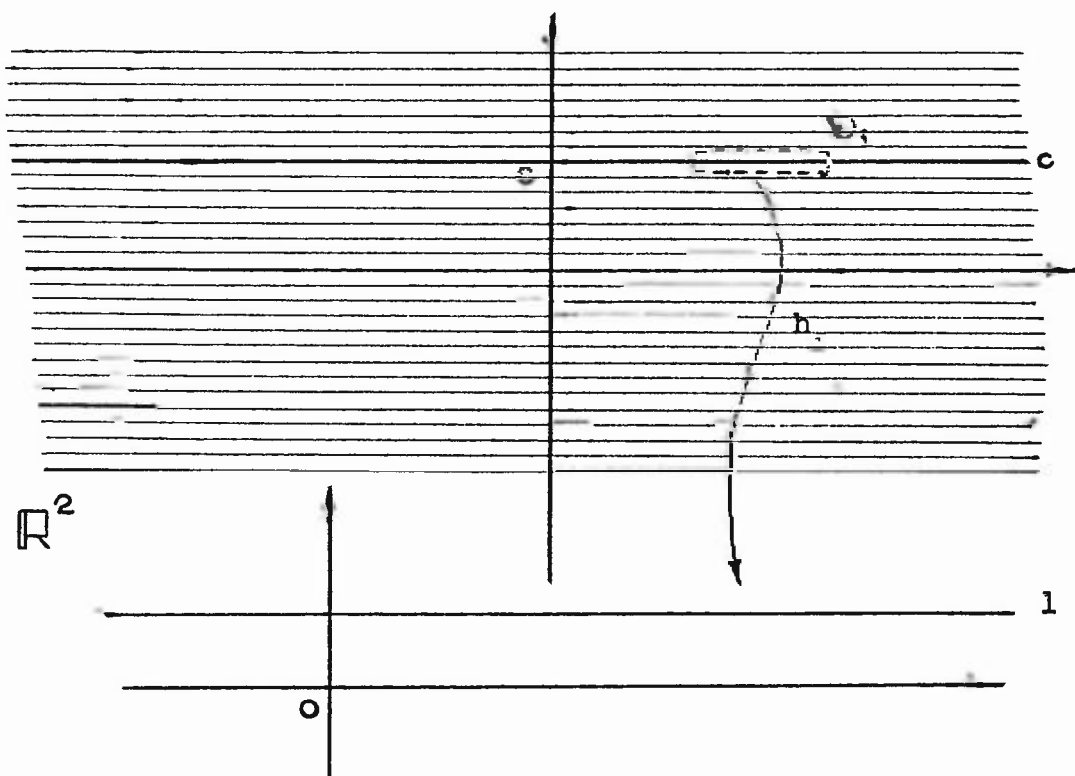
Estableceremos los principales resultados relativos a las estructuras foliadas del plano.

El teorema 2.2.1.4 que sigue es clásica; su demostración se basa en el teorema de Jordan.

Teorema 2.2.1.4. (Poincaré, Bendixon)

Sea  $(\mathcal{O}_i, h_i)$  un abierto distinguido de una estructura foliada del plano; la imagen por  $h_i$  de la intersección de  $\mathcal{O}_i$  con una hoja cualquiera se reduce al conjunto vacío o a una recta  $l$  de una función constante  $z(t) = \text{cte.}$

Interpretación: Sea la estructura foliada trivial del plano  $\mathbb{R}^2$ .



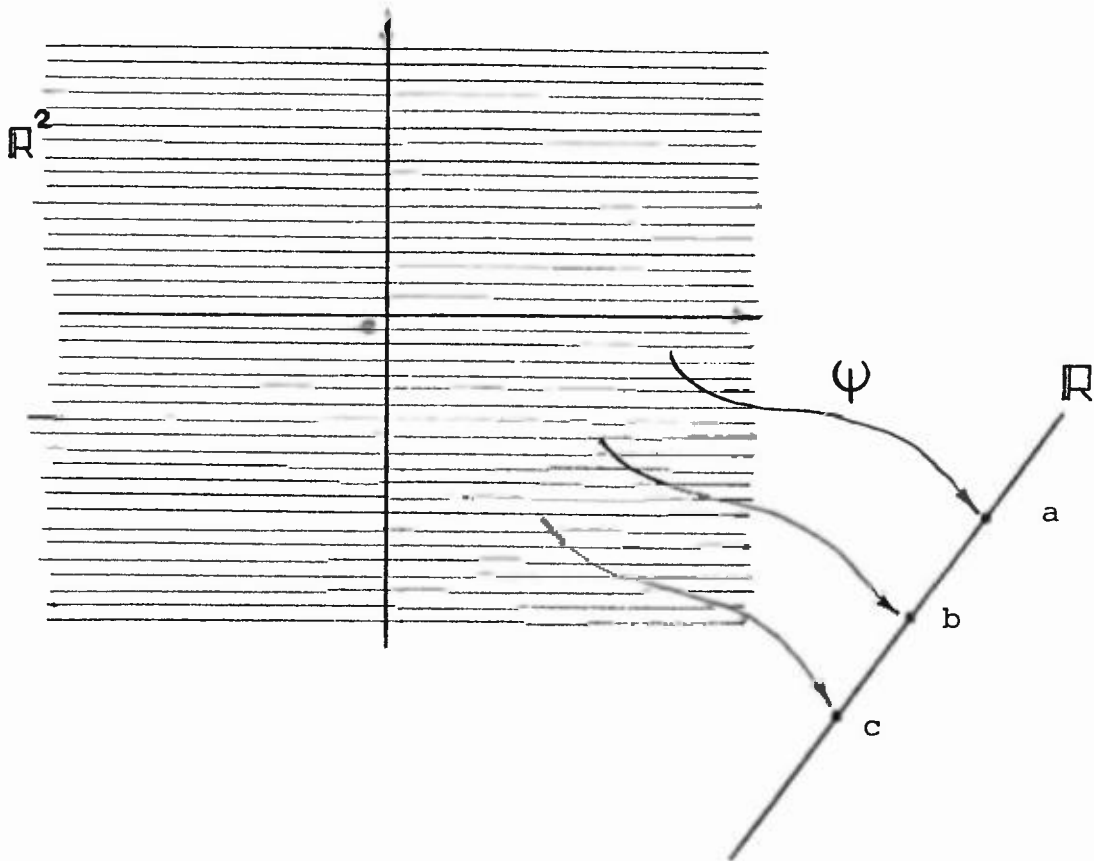
Es decir; para toda foliación de dimensión uno se tiene:

$$h_i(\mathcal{O}_i \cap c) = l \quad \text{ó} \quad h_i(\mathcal{O}_i \cap c) = \emptyset$$

Teorema 2.2.1.5. (Kaplan)

Es posible asociar a toda foliación continua del plano una función de valor real continua definida en  $\mathbb{R}^2$

que no admite máximo ni mínimo local y que es constante sobre cada hoja.



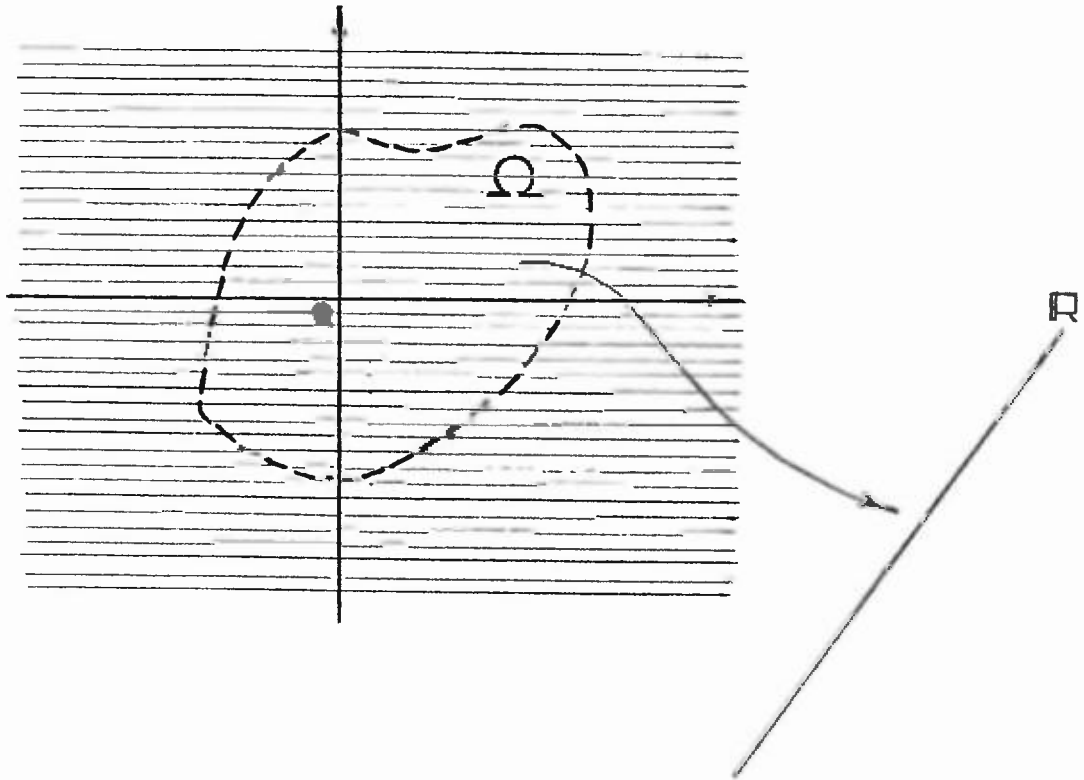
Teorema 2.2.1.6. (Kamke)

Sea  $(F)$  una estructura foliada de clase  $C^r$  del plano  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\Omega$  un abierto acotado del plano.

Existe una función de valor real  $\psi$  definida en  $\Omega$  y que verifica las propiedades siguientes:

- (1)  $\psi$  es diferenciable de clase  $C^r$  y el gradiente de  $\psi$  es diferente de cero en todo punto de  $\Omega$ .

ii)  $\psi$  es constante sobre las hojas de la estructura foliada inducida por  $(F)$  sobre  $\Omega$ .



Teorema 2.2.1.7. (Wazewsky)

Existe una foliación  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que toda función en  $\mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ , constante sobre las hojas, es constante.

Los teoremas 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, fueron demostrados por Haefliger y Reeb en [ 12 ] , mediante un análisis de los espacios de hojas de foliaciones del plano. Ellos observaron que el espacio de hojas de una foliación de clase  $C^r$  de  $\mathbb{R}^2$  es una variedad en general no Hausdorff, de dimensión uno, simplemente conexa, de

clase  $C^r$ . El teorema de Kaplan se sigue de este hecho y también de que sobre una variedad de dimensión uno, simplemente conexa (Hausdorff o no) siempre existe una función continua estrictamente monótona. El teorema de Kamke se deduce del hecho de que el espacio de hojas de  $F/\Omega$  está provisto de una estructura de variedad (Hausdorff) de clase  $C^\infty$ . Finalmente el teorema de Wazewski se deduce del hecho de existir sobre la pluma completa una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$  tal que toda función de clase  $C^1$  definida en ella es necesariamente constante.

Ejemplos de estructuras Foliadas del plano.

- 1.- Las rectas de funciones constantes  $z(t) = Cte$  son evidentemente las hojas de una estructura foliada del plano.
- 2.- Sea  $C$  una curva de Jordan en el plano  $\mathbb{R}^2$ . La estructura foliada precedente induce sobre el abierto acotado por  $C$  y que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  una estructura foliada analítica.
- 3.- El complemento  $U$  en  $\mathbb{R}^2$  del conjunto de los puntos de coordenadas  $x = 0, y \geq 0$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Las componentes conexas de las curvas de nivel de la función  $\psi = x.y$  son las hojas de una estructura analítica de  $U$ .

2.2.2 El espacio de las hojas de una estructura foliada del plano.

La proposición siguiente es una consecuencia esencial del teorema 2.2.1.4 de 2.2.1.

Proposición 2.2.2.1.

Sea  $(F)$  una estructura foliada del plano  $\mathbb{R}^2$ . El espacio cociente  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  por la relación de equivalencia  $\rho$  asociada a la foliación (definición 2.2.1.4 de 2.2.1) es una variedad de dimensión uno con base numerable y simplemente conexa.

Si  $(F)$  es una estructura foliada diferenciable de clase  $C^r$  (o analítica), el espacio de las hojas  $V$  está provisto canónicamente de una estructura de variedad de dimensión uno de clase  $C^r$  (o analítica).

Demostración:

Como  $\mathbb{R}^2$  es conexo y con base numerable,  $V$  es igualmente conexo y con base numerable. Para mostrar que  $V$  es una variedad de dimensión uno, es suficiente de verificar que todo punto  $z$  de  $V$  admite una vecindad abierta homeomorfa a la recta numérica.

Sea  $\pi$  la proyección canónica de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V$ ; la hoja  $\pi^{-1}(z)$  intersecta por lo menos a un abierto distinguido  $\theta_i$ . La relación de equivalencia inducida por  $\rho$  en  $\theta_i$  es, por el teorema 2.2.1.4; la relación  $\rho_i$

Luego  $\pi(\Theta_i)$  que es una vecindad abierta de  $z$ , puesto que  $\rho$  es una relación de equivalencia abierta, es homeomorfo a  $\Theta_i/\rho_i$ , es decir a la recta numérica.

En virtud del teorema de Jordan, el complemento de toda hoja (que es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$ ) tiene dos componentes conexas; luego el complemento de todo punto de  $V$  tiene igualmente dos componentes conexas. Esta propiedad es equivalente al hecho de que  $V$  es simplemente conexo (Lema 2.1.2.3)

Sea  $A$  un atlas definiendo sobre  $\mathbb{R}^2$  la estructura foliada diferenciable considerada,

Supongamos que la estructura foliada del plano  $\mathbb{R}^2$  sea la trivial.

Sea  $h_i: \Theta_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una carta del atlas  $A$  tal que  $h_i^{-1}/\text{recta } x=0 = \tilde{h}_i^{-1}$

Luego  $\tilde{h}_i^{-1}(\text{recta } x=0) \subset \Theta_i$ ; donde

$$\tilde{h}_i^{-1}(\text{recta } x=0) = \Theta_i \cap (\text{recta } x=a) ; \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

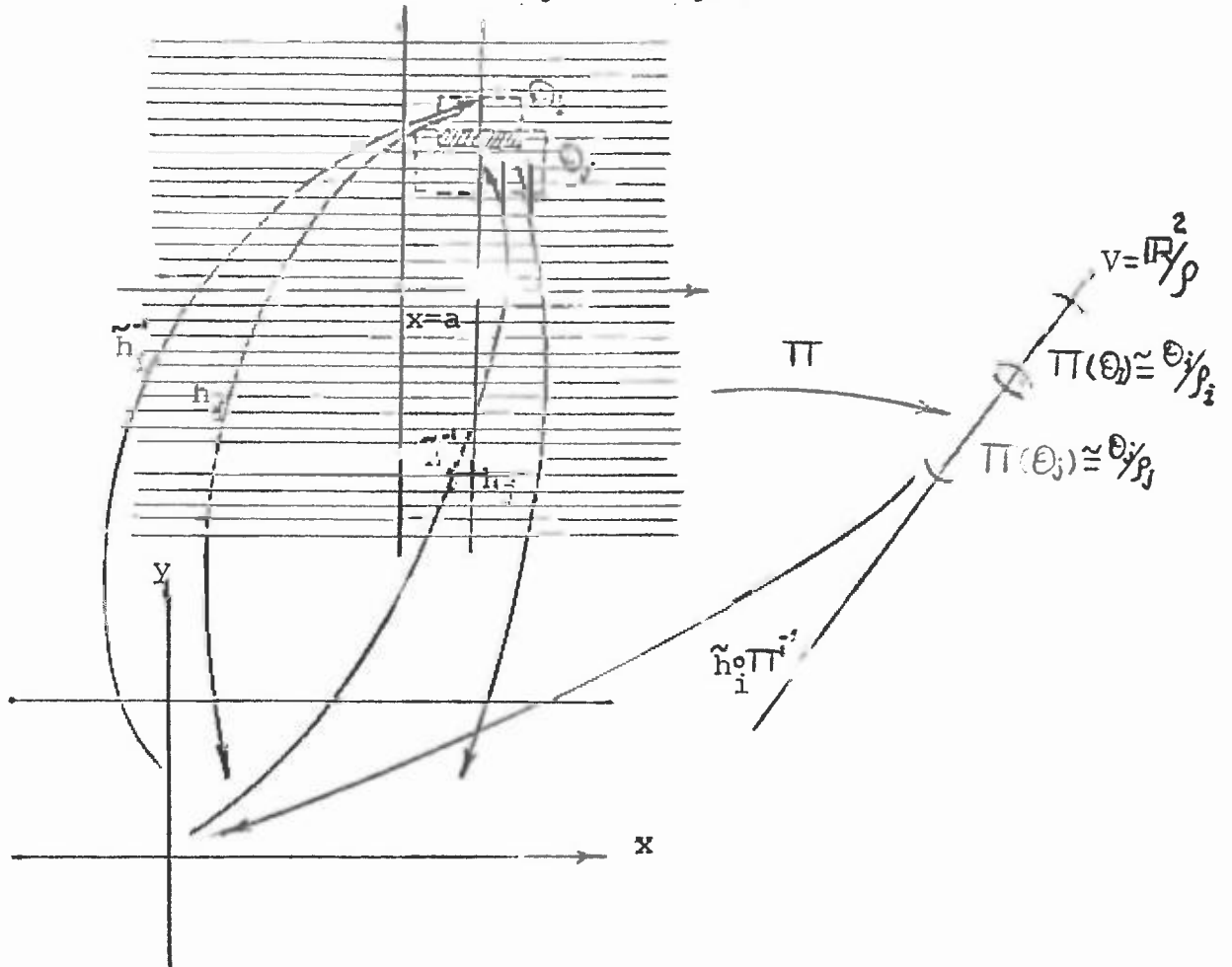
Ahora, cada punto sobre  $\tilde{h}_i^{-1}(\text{recta } x=0)$  es un representante de su clase; luego  $\pi' = \pi/\tilde{h}_i^{-1}(\text{recta } x=0)$  es un homeomorfismo de  $\tilde{h}_i^{-1}(\text{recta } x=0)$  sobre  $\Theta_i/\rho_i$

Entonces la familia  $\left\{ (\Theta_i/\rho_i, h_i \circ \pi'^{-1}) \right\}_{i \in I}$



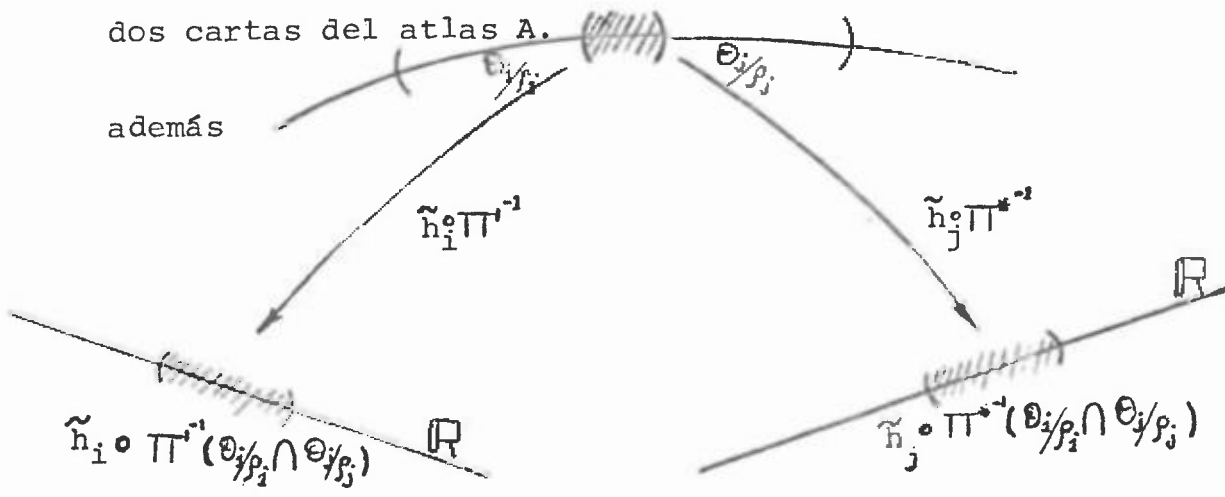
constituye un atlas de la variedad  $V$

Ilustremos con el diagrama siguiente:



donde:  $(\theta_i, h_i), (\theta_j, h_j)$  son dos cartas del atlas  $A$ .

además



donde  $\pi' = \pi / \tilde{h}_i^{-1} \Big|_{x=0}$  (recta) y  $\pi^* = \pi / \tilde{h}_j^{-1} \Big|_{x=0}$  (recta)

En  $\Theta_i \cap \Theta_j$   $\pi(t) = \pi^*(t)$ , para  $\forall t \in \tilde{h}_i^{-1} \Big|_{x=0} \cap \tilde{h}_j^{-1} \Big|_{x=0}$

$$\begin{aligned} \text{Luego } (\tilde{h}_j \circ \pi^*) \circ (\tilde{h}_i \circ \pi')^{-1} &= \tilde{h}_j \circ \pi^* \circ \pi' \circ \tilde{h}_i^{-1} \\ &= \tilde{h}_j \circ \tilde{h}_i^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(\tilde{h}_j \circ \pi^*) \circ (\tilde{h}_i \circ \pi')^{-1}$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$  (o Analítica)

Entonces  $V$  está provisto de una estructura de variedad de dimensión uno de clase  $C^r$  (o Analítica).

CAPITULO 3

FIBRACIONES POR RECTAS Y FOLIACIONES DEL PLANO

3.1 Propiedades de toda foliación del plano.

Toda foliación  $\mathcal{F}$  del plano  $\mathbb{R}^2$  tiene las siguientes propiedades.

(i)  $\mathcal{F}$  es orientable

El plano  $\mathbb{R}^2$  tiene una orientación que es compatible con la orientación de las hojas.

Estas hojas están compuestas de los caminos de placas que son orientables.

(ii) Cada hoja de  $\mathcal{F}$  es cerrada en  $\mathbb{R}^2$  y homeomorfa a la recta  $\mathbb{R}$ .

Como los abiertos distinguidos  $\mathcal{O}_i$  constituyen un cubrimiento del plano  $\mathbb{R}^2$ , resulta que en cada hoja  $H_i$  los caminos de placas  $\alpha_i$  constituyen un cubrimiento abierto  $\Gamma$  de la hoja.

Para cada miembro (camino de placas) del cubrimiento abierto  $\Gamma$  es dado un homeomorfismo  $h_i$  sobre  $\mathbb{R}$  tal que

$$h_i / \alpha_i \cap \alpha_j = h_j / \alpha_i \cap \alpha_j$$

para cada par de miembros  $\alpha_i, \alpha_j$  de  $\Gamma$ .

Podemos definir una función, llamada de Pegamento,

$$f : H_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $f/\alpha_i = h_1$

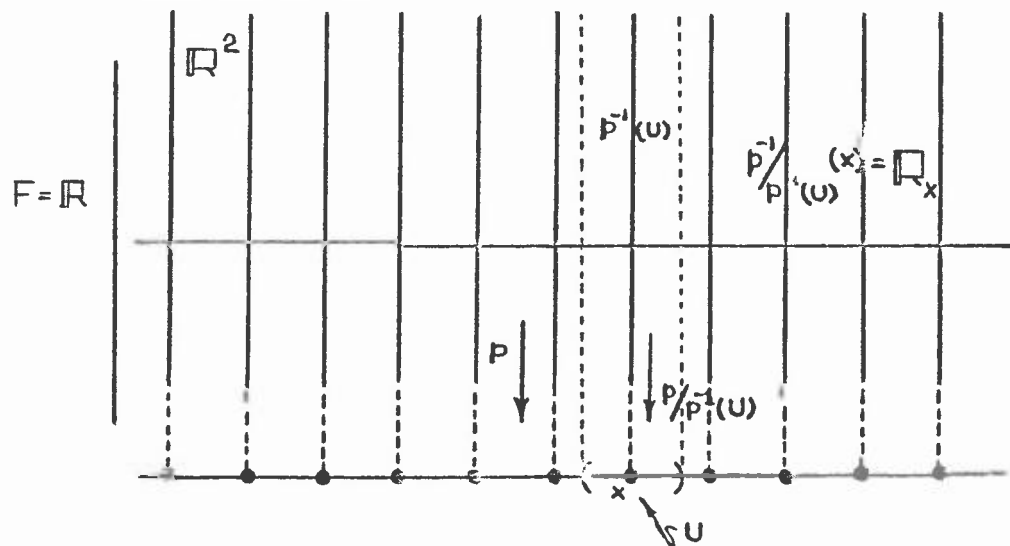
Luego  $f$  es un homeomorfismo de la hoja  $H_i$  sobre  $\mathbb{R}$ .

- (iii) El espacio de hojas  $X$  de  $\mathcal{F}$  es una variedad topológica de dimensión uno con base enumerable y simplemente conexa (en general no separada).

Esto es por la proposición 2.2.2.1.

La suryección canónica  $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$  es una identificación, pero no un homeomorfismo.

- (iv) La proyección  $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$  es una fibración localmente trivial.



Whitney (Ver [10]) estableció la afirmación (iv).

Esto significa que; para  $\forall x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que;  $\xi = (p^{-1}(U), p/p^{-1}(U), U, \mathbb{R})$  es un haz fibrado equivalente al haz producto (haz trivial)  $(U \times \mathbb{R}, p_1, U, \mathbb{R}, \{I_{\mathbb{R}}\})$ ; es decir el haz  $\xi$  tiene como grupo estructural al grupo  $\{I_{\mathbb{R}}\}$  (Ver corolario 1.3.2.6).

Es bien sabido que la fibra sobre  $x$ ,  $p^{-1}/p^{-1}(U)^{(x)} = \mathbb{R}_x$  es homeomorfa a la fibra tipo  $\mathbb{R}$ . Esto coincide con el hecho de que cada hoja de  $\mathcal{F}$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}$ . Entonces la fibra sobre  $x$ ,  $\mathbb{R}_x$  constituye una hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  y que a cada punto de esa hoja le corresponde a  $x$  como imagen en el cociente.

Recíprocamente, si  $X$  es una variedad topológica de dimensión uno con base enumerable y simplemente conexa, y si  $\eta = (E, p, X, \mathbb{R})$  es un haz fibrado localmente trivial en rectas reales sobre  $X$ , el espacio total  $E$  es una variedad de dimensión dos con base enumerable y contractible. Si  $E$  es de Hausdorff, es homeomorfo al plano  $\mathbb{R}^2$  y las fibras de  $\eta$  determinan una foliación del plano.

Observación 3.1.1.

$\eta = (E, p, X, \mathbb{R})$  es un haz fibrado con grupo estructural  $G$ , el grupo de los automorfismos de la recta real  $\mathbb{R}$ , provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos.

Demostración de la parte recíproca,

E es de dimensión 2, puesto que:

$$\dim p^{-1}(x) = \dim E - \dim X, \text{ para } \forall x \in X$$

$$1 = 2 - 1$$

Esto se debe a que las fibraciones constituyen ejemplos de foliaciones y como  $\eta = (E, p, X, \mathbb{R})$  es un haz fibrado localmente trivial, la proyección  $p/p^{-1}(U)$  es una submersión de  $p^{-1}(U)$  sobre U, para todo U abierto de X.

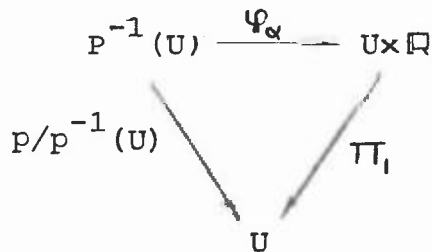
Tenemos que X tiene una base enumerable.

En efecto:

supongamos que para  $\forall x \in X$  existe un abierto U de la base enumerable de X tal que  $\xi = \{(p^{-1}(U), p/p^{-1}(U), U, \mathbb{R})\}$  es un haz fibrado equivalente al haz fibrado trivial.

Sabemos que:

1.  $\varphi_\alpha : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}$  es un homeomorfismo tal que el diagrama



es conmutativo.

2. Además  $\mathbb{R}$  tiene una base global numerable.

Entonces el producto de  $U$  por cada abierto de la base numerable de  $\mathbb{R}$  constituye una base numerable de  $U \times \mathbb{R}$ .

Como los abiertos  $U$  son abiertos de una base numerable de  $X$ , la familia  $\{U \times \mathbb{R}\}_{U \subset X}$  de abiertos es numerable; luego la familia  $\{p^{-1}(U)\}_{U \subset X}$  de abiertos de  $E$  es numerable.

Como cada  $U \times \mathbb{R}$  contiene una base enumerable, la familia  $\{U \times \mathbb{R}\}_{U \subset X}$  va a contener una unión de bases numerables; luego esta unión es numerable.

Entonces la familia  $\{p^{-1}(U)\}_{U \subset X}$  va a contener una unión de bases numerables.

Por otro lado  $E$  tiene una base numerable.

Por otro lado  $\mathbb{R}$  es contractible. Entonces para  $\forall U \subset X$ ,  $U \times \mathbb{R}$  es contractible, y como  $p^{-1}(U)$  es homeomorfo a  $U \times \mathbb{R}$ , es contractible.

Por lo tanto  $E$  es contractible.

Tenemos así que:

$E$  es de dimensión 2, con base enumerable, contractible (simplemente conexo).

Todas estas propiedades se conservan bajo homeomorfismo, además de la propiedad de ser de Hausdorff.

$\mathbb{R}^2$  satisface esas propiedades.

Luego  $E$  es homeomorfismo a  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.2 Foliaciones Conjugadas o Equivalentes.

#### Definición 3.2.1.

Dos foliaciones (orientadas)  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  de  $\mathbb{R}^2$  son conjugadas si existe un homeomorfismo  $\psi$  del plano  $\mathbb{R}^2$  sobre sí mismo que transforma las hojas de una en las hojas de la otra.

#### Observación 3.2.1.

Se puede exigir que el homeomorfismo  $\psi$  ;

1. Preserve la orientación del plano  $\mathbb{R}^2$ .
2. Sea compatible con las orientaciones de las foliaciones.
3. Tenga simultáneamente las propiedades (1) y (2) que preceden (esta última situación ha sido estudiada por Kaplan).
4. En cada uno de los casos anteriores los espacios de hojas  $X$  y  $X'$  de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son homeomorfos y los fibrados  $p: \mathbb{R} \longrightarrow X$  y  $p': \mathbb{R} \longrightarrow X'$  son isomorfos. Esto último es una consecuencia del homeomorfismo entre las hojas de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$ ,



### 3,3 Clasificación de las foliaciones del plano.

El problema de clasificación de las foliaciones del plano se puede dividir en los dos problemas siguientes:

- i) Clasificar las variedades topológicas de dimensión una.

El sentido de esto es el siguiente: Cada foliación determina un espacio de hojas y clasificar las variedades topológicas de dimensión uno con base numerable y simplemente conexa significa clasificar las foliaciones del plano.

- ii) Clasificar sobre una tal variedad los haces fibrados por rectas localmente triviales con espacio total de Hausdorff.

El sentido de esto es el siguiente: Clasificar los haces fibrados por rectas localmente triviales sobre variedades de dimensión uno con base numerable y simplemente conexa con espacio total de Hausdorff; significa clasificar las foliaciones del plano.

### 3.4 La ramificación simple $Z$ ,

#### Proposición 3.4.1.

Dar un haz fibrado por rectas localmente trivial  $\eta = (E, p, Z, \mathbb{R})$  sobre  $Z$  es equivalente a dar una función continua  $g$  de  $U$  en el grupo  $G$  de los homeomorfismos de  $\mathbb{R}$ .

#### Demostración:

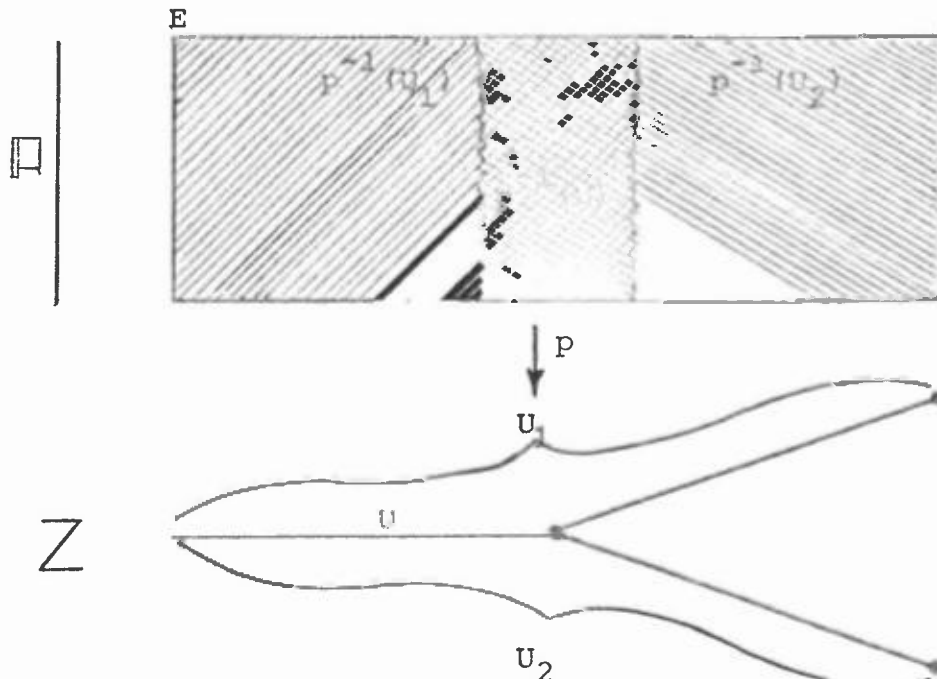
Esta proposición es consecuencia de un teorema general.

Para la condición necesaria, ver [1.1.4] : Grupo estructural de un haz.

Para la condición suficiente, ver [1.5.1] : Teorema de existencia y unicidad.

#### Interpretación:

Ilustraremos con el diagrama siguiente:



Corolario 3.4.2.

Los fibrados inducidos sobre los abiertos  $U_1$  y  $U_2$  son triviales (es decir son equivalentes al haz producto respectivo). Dos trivializaciones  $\phi_1: U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow p^{-1}(U_1)$  y  $\phi_2: U_2 \times \mathbb{R} \rightarrow p^{-1}(U_2)$  de  $\eta/U_1$  y  $\eta/U_2$  (esto indica que  $(U_1, \phi_1^{-1})$  y  $(U_2, \phi_2^{-1})$  constituyen cada uno el atlas del haz fibrado respectivo) determinan una función continua  $g: (-\infty, 0) \rightarrow G$  (que denotaremos con  $x \rightsquigarrow g_x$ ) tal que

$$\phi_1(x_1, y) = \phi_2(x_2, g_x(y)) \text{ para } x_1 = x_2 = x < 0$$

Recíprocamente una función continua  $g$  de  $(-\infty, 0)$  en  $G$  permite construir un haz fibrado  $\eta = (E, p, Z, \mathbb{R})$  sobre  $Z$ ;  $g$  determina además las trivializaciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de  $\eta/U_1$  y  $\eta/U_2$ . Ver [1.5.1]

Proposición 3.4.3.

Considerando lo anterior, sea  $g'$  otra función continua de  $(-\infty, 0)$  en  $G$  y sean  $\eta' = (E', p', Z, \mathbb{R})$  el haz fibrado asociado,  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$  las trivializaciones correspondientes de  $\eta'/U_1$  y  $\eta'/U_2$ . Un isomorfismo  $F$  de  $\eta$  sobre  $\eta'$  determina un homeomorfismo  $f$  de  $Z$ . Si  $0_1$  es un punto fijo de  $f$ , existen dos funciones continuas  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  en  $G$  tales que

$$(*) \quad \begin{cases} F \phi_1(x_1, y) = \phi'_1(f(x_1), \alpha_{x_1}(y)) \\ F \phi_2(x_2, y) = \phi'_2(f(x_2), \beta_{x_2}(y)) \end{cases}$$

la condición de compatibilidad se escribe

$$g'_{f(x)} \alpha_x = \beta_x g_x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Sea  $F$  un isomorfismo de  $\eta$  sobre  $\eta'$ .

Como las fibraciones son foliaciones del espacio total,  $F$  es un isomorfismo de la estructura foliada de  $E$  sobre la estructura foliada de  $E'$ ; pero un tal isomorfismo es un homeomorfismo de  $E$  sobre  $E'$ ; es decir las hojas de la foliación de  $E$  son homeomorfas a las hojas de la foliación de  $E'$ .

Luego se tiene un homeomorfismo  $f: Z \longrightarrow Z$  ver [3.2.] (Los espacios de hojas  $Z$  y  $Z'$  son homeomorfos). Definimos  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  de tal manera que satisfacen (\*).

Vamos a demostrar ahora que se cumple la condición de compatibilidad.

$$\begin{aligned} & F [\phi_1(x_1, y)] = F [\phi_2(x_2, y)] \\ \implies & \phi'_1(f(x_1), \alpha_{x_1}(y)) = \phi'_2(f(x_2), \beta_{x_2}(y)) \\ \implies & \phi'_2(f(x_2), g'_{f(x)}(\alpha_{x_1}(y))) = \phi'_2(f(x_2), \beta_{x_2}(y)) \\ \implies & g'_{f(x)} \circ \alpha_{x_1}(y) = \beta_{x_2}(y) \quad (1) \end{aligned}$$

Además  $F [\phi_1(x, y)] = F [\phi_2(x_2, y)]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(x_1, y) = \phi(x_2, y) &\Rightarrow \phi_2(x_2, g_x(y)) = \phi_2(x_2, y) \\ &\Rightarrow g_x(y) = y \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) resulta que:

$$g'_{f(x)} \circ \alpha_x = \beta_x \circ g_x \quad \text{para todo } x = x_1 = x_2 < 0$$

El recíproco lo establecemos en la:

Proposición 3.4.4

Dadas dos aplicaciones continuas  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  en  $G$  y un homeomorfismo  $f$  de  $(-\infty, 0)$  que satisface la condición de compatibilidad anterior, se construye un isomorfismo  $F$  de  $\eta$  sobre  $\eta'$ .

Observación 3.4.1.

Si por el contrario  $f$  intercambia  $\theta_1$  y  $\theta_2$  la condición de compatibilidad es

$$\alpha_x = g'_{f(x)} \circ \beta_x \circ g_x \quad \text{para todo } x < 0.$$

Definición 3.4.1.

Los haces fibrados  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes en  $G$  si existe un isomorfismo  $F$  para el cual  $f$  es la identidad.

Proposición 3.4.5.

Sea  $\eta = (E, p, Z, \mathbb{R})$  un haz fibrado sobre  $Z$ .

Se puede reducir el grupo estructural de  $\eta$  al subgrupo  $G^+$  de los homeomorfismos crecientes de  $\mathbb{R}$ .

Demostración:

Sea  $\mathcal{N} = (E, p, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, G)$ ; donde  $(G, o)$  es el grupo de los homeomorfismos de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$ .

Sea  $(G^+, o)$  el grupo de los homeomorfismos crecientes de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$ .

$(G^+, o)$  es un subgrupo de  $(G, o)$ .

Tenemos así que;  $G^+ \subseteq G$  y  $G$  está provista de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Entonces  $G^+$  está provista de la topología inducida por la de  $G$ .

Por lo tanto  $G^+$  es un grupo topológico con la topología de la que queda dotada  $G^+$  en tanto que subespacio del espacio  $G$ .

Observación 3.4.2.

$G^+$  es un subconjunto cerrado del espacio topológico  $G$ . (\*\*)

Proposición 3.4.6.

Una condición necesaria y suficiente para que el espacio total  $E$  sea de Hausdorff es que para todo  $y \in \mathbb{R}$  se tenga.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty \quad (o \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty)$$

(Ver [10]).

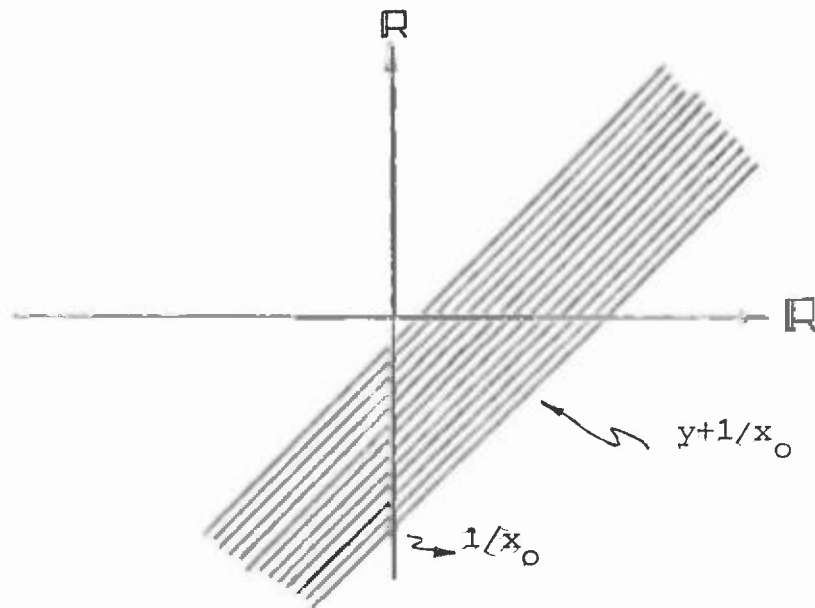
(\*\*) Ver una demostración en el apéndice.

Ejemplo 1.

Si  $g: U \longrightarrow G$  es la función que asocia a  $x \in (-\infty, 0)$  la traslación  $y \rightsquigarrow y + 1/x$ , el espacio total  $E$  del fibrado  $\eta: E \xrightarrow{P} Z$  correspondiente a  $g$  es de Hausdorff; o sea dada, la familia  $\{y + 1/x\}_{x \in U}$ ; donde  $\forall x \in U, g_x(y) = y + 1/x$ ; resulta que  $\{y + 1/x\}_{x \in U} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ ; es decir  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$

Observación 3.4.3.

La familia  $\{y + 1/x\}_{x \in U'}$  donde cada elemento es un homeomorfismo creciente, decrece indefinidamente; ver la gráfica siguiente:



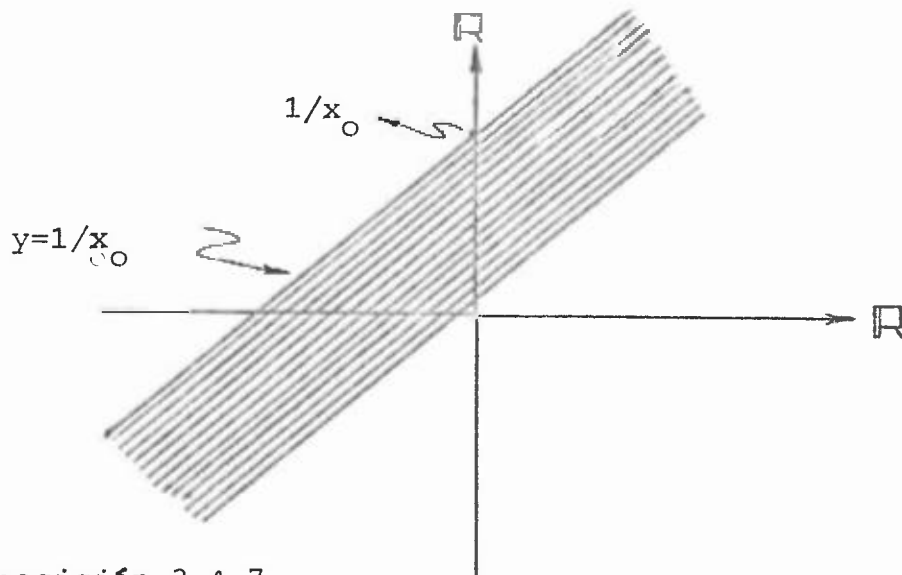
Ejemplo 2.

Si  $\bar{g}: U \longrightarrow G$  es la función que asocia a  $x \in (-\infty, 0)$  la traslación  $y \rightsquigarrow y - 1/x$ , el espacio total  $E'$  del fibrado  $\eta': E' \longrightarrow Z$  correspondiente

a  $\bar{g}$  es de Hausdorff; o sea dada, la familia  $\{y-1/x\}_{x \in U}$  donde  $\forall x \in U, \bar{g}_x(y) = y-1/x$ ; resulta que  $\{y-1/x\}_{x \in U} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ ; es decir  $\lim_{x \rightarrow 0} \bar{g}_x(y) = +\infty$

Observación 3.4.4.

La familia  $\{y-1/x\}_{x \in U}$ , donde cada elemento es un homeomorfismo creciente, decrece, indefinidamente; ver la gráfica siguiente:



Proposición 3.4.7.

Considerando los ejemplos 1 y 2, entonces

- (i)  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes por el grupo  $G$ .
- (ii)  $\eta$  y  $\eta'$  no son equivalentes por el grupo  $G^+$ .
- (iii)  $\eta$  y  $\eta'$  son isomorfos por el grupo  $G^+$ .

Demostración:

Sean  $\alpha, \beta$  dos aplicaciones continuas de  $\mathbb{R}$  en  $G$  definidos de la siguiente manera:



Para  $\forall x \in U$ ,  $\alpha_x(y) = y$  y  $\beta_x(y) = y - 2/x$ .

Hay que encontrar un homeomorfismo  $f$  de  $(-\infty, 0)$  que satisfice la condición de compatibilidad de la proposición 3.4.3, para luego aplicar la proposición 3.4.4, y la definición 3.4.1.

Sea  $\bar{g}_{f(x)} \alpha_x = \beta_x g_x$

De aquí se deduce que  $f(x) = x$  o sea  $f$  es la identidad.

Entonces se tiene un isomorfismo  $F$  de  $\eta$  en  $\eta'$ .

Por lo tanto los fibrados  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes en  $G$ .

Vamos a demostrar que  $\eta$  y  $\eta'$  son isomorfos por el grupo  $G^+$ .

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos aplicaciones continuas de  $\mathbb{R}$  en  $G$  definidas de la siguiente manera.

$$\forall x \in U \quad \alpha_x(y) = y + 3/x \quad y \quad \beta_x(y) = y$$

También hay que encontrar un homeomorfismo de  $(-\infty, 0)$  que satisfice la condición de compatibilidad de la proposición 3.4.3; para luego aplicar la proposición 3.4.4.

Sea  $\bar{g}_{f(x)} \alpha_x = \beta_x g_x$

De aquí resulta que  $f(x) = x/2$

Entonces se tiene un isomorfismo  $F$  de  $\eta$  en  $\eta'$  por el grupo  $G^+$ .

Por lo tanto los haces fibrados  $\eta$  y  $\eta'$  son isomorfos por el grupo  $G^+$ .

Supongamos ahora que:

$$\left. \begin{aligned} \beta_x(y) &= y + 1/x \\ \alpha_x(y) &= y + 3/x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Entonces como  $\bar{g}_{f(x)}(\alpha_x(y)) = \beta_x(g_x(y))$  se deduce que

$$\alpha'_x(y) = y \quad \text{y} \quad \beta'_x(y+1/x) = y+1/x-2/x \quad (2)$$

Es decir las funciones (1) se obtienen de las funciones (2) de la siguiente manera:

$$\beta'_x(y) = \beta_x(y) - 3/x = y - 2/x$$

$$\alpha'_x(y) = \alpha_x(y) - 3/x = y$$

Entonces estaríamos demostrando nuevamente que  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes por el grupo  $G$ .

Luego  $\eta$  y  $\eta'$  no son equivalentes por el grupo  $G^+$ .

Teorema 3.4.8. (Godbillon-Reeb)

Sean  $\eta$  y  $\eta'$  dos fibrados por rectas sobre  $Z$  correspondientes a dos funciones continuas  $g$  y  $g'$  de  $Z$  en  $\mathbb{R}$  y cuyos espacios totales son de Hausdorff. Una condición necesaria y suficiente para que  $\eta$  y  $\eta'$  sean equivalentes por el grupo  $G^+$  es que para todo  $y \in \mathbb{R}$

se tenga:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$$

Demostración:

Supongamos que  $\eta$  y  $\eta'$  sean equivalentes por el grupo  $G^+$ .

Como los espacios totales de  $\eta$  y  $\eta'$  son de Hausdorff; entonces

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty \quad (\text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = +\infty \quad (\text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty)$$

Como  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes por el grupo  $G^+$

Entonces no se dan los casos:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = +\infty$$

Por la proposición 3.4.7, (ii)

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$$

Para la condición suficiente, Ver [10].

Observación 3.4.5.

1.- Los fibrados por rectas localmente triviales sobre la ramificación simple con espacio total de Hausdorff se reparten en:

2 clases de equivalencia por el grupo  $G^+$ .

1 clase de isomorfismo por el grupo  $G^+$ .

1 clase de equivalencia por el grupo  $G$ .

Ejemplo 1:

Sea  $g: U \longrightarrow G^+$

$$x \rightsquigarrow g_x: y \rightsquigarrow y-1/x$$

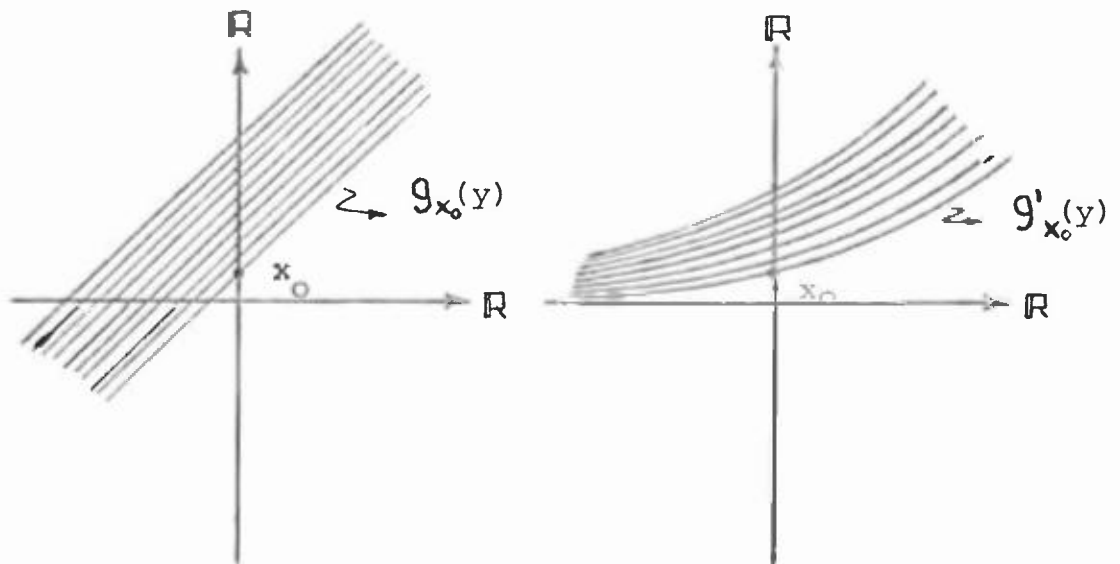
asociada al haz

y  $g': U \longrightarrow G^+$

$$x \rightsquigarrow g'_x: y \rightsquigarrow e^{y-1/x}$$

asociada al haz

Graficamente tenemos:



$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$$

Entonces  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes por el grupo  $G^+$  por el teorema 3.4.8.

Por lo tanto  $\eta' \in [\eta]$

Ejemplo 2:

$$\text{Sea } h: U \longrightarrow G^+$$

$$x \rightsquigarrow h_x: y \rightsquigarrow y+1/x$$

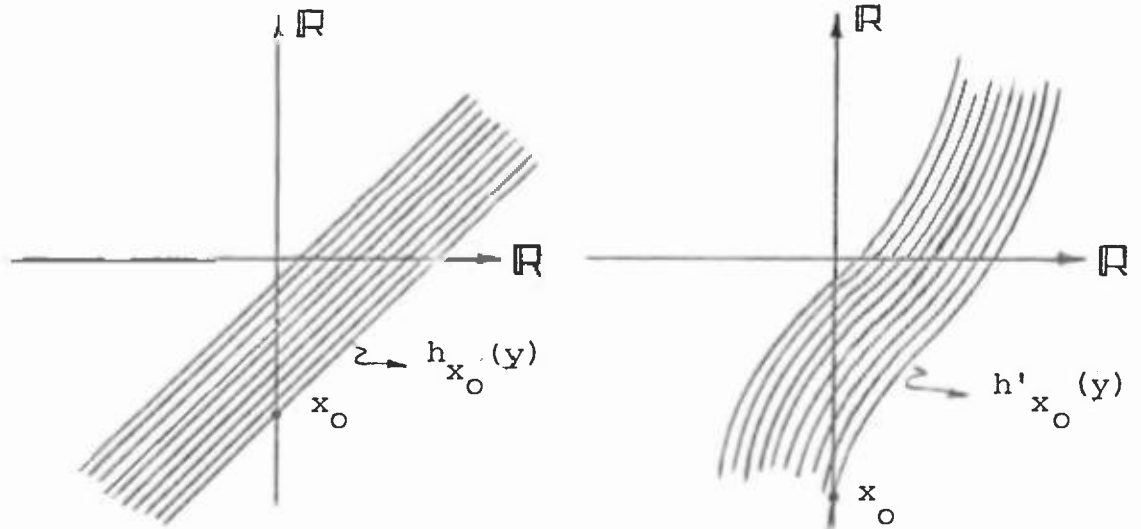
asociada al haz  $\xi$

$$y \quad h': U \longrightarrow G^+$$

$$x \rightsquigarrow h'_x: y \rightsquigarrow y^3+1/x$$

asociada al haz  $\xi'$

Graficamente tenemos



$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 0} h_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} h'_x(y)$$

Entonces  $\xi$  y  $\xi^*$  son equivalentes por el grupo  $G^+$ .

Por lo tanto  $\xi' \in [\xi]$

$\eta$  no es equivalente a  $\xi$  por el grupo  $G^+$ .

$\eta'$  no es equivalente a  $\xi'$  por el grupo  $G^+$ .

2. El teorema de Godbillon-Reeb establece una caracterización para la equivalencia entre dos haces fibrados por rectas  $\eta$  y  $\eta'$  sobre  $Z$  por el grupo  $G^+$ . Esta caracterización está dada por:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) \quad (1)$$

donde  $g$  y  $g'$  son las funciones de transición asociados respectivamente a  $\eta$  y  $\eta'$ .

La condición (1) es equivalente a decir que  $\eta$  y  $\eta'$  son equivalentes en  $G^+$ , si existe un isomorfismo  $F$  para el cual  $f$  es la identidad; donde  $f$  satisface la condición de compatibilidad.

Utilizaremos esta última caracterización para verificar que  $\eta \sim \eta'$  y  $\xi \sim \xi'$

Definiremos funciones continuas  $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow G$

en ambos casos, tales que  $f$  que satisface la condición de compatibilidad sea la identidad

$$\begin{aligned} \text{Sea } \beta_x(y) &= e^y & ; & & \alpha_x(y) &= y. \\ \forall x \in U \quad g_x(y) &= y^{-1/x} & ; & & g'_x(y) &= e^{y-1/x} \end{aligned}$$

Luego  $g'_{f(x)} \alpha_x = \beta_x g_x$  . De aquí resulta que

$$f(x) = x$$

De manera análoga tenemos:

$$\text{Sea } \beta_x(y) = y \quad ; \quad \alpha_x(y) = y^{1/3}$$

$$\forall x \in U \quad h_x(y) = y + 1/x \quad ; \quad h'_x(y) = y^3 + 1/x$$

Luego  $h'_{f(x)} \alpha_x = \beta_x h_x$  y de aquí se obtiene

$$f(x) = x$$

### 3.5 Clasificación de Estructuras Diferenciables sobre $Z$ .

#### Definición 3.5.1.

Dos estructuras diferenciables de clase  $C^r$  sobre  $Z$  son  $C^p$ -equivalentes ( $p \leq r$ ) si existe un difeomorfismo de clase  $C^p$  de  $Z$  provista de una de las estructuras, sobre  $Z$  provista de la otra estructura.

#### Notaciones.

Pongamos  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ .

sea  $D^r(\mathbb{R}^+)$  el subgrupo de los homeomorfismos de  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  tales que  $f(0) = 0$  y  $f/\mathbb{R}^+$  es un  $C^r$ -difeomorfismo de  $\mathbb{R}^+$ .  
 $D_p^r(\mathbb{R}^+)$  es el conjunto de los elementos de  $D^r(\mathbb{R}^+)$  que se extienden a  $C^r$ -difeomorfismo de  $\mathbb{R}$ .

Es un subgrupo de  $D^r(\mathbb{R}^+)$ .

#### Definición 3.5.2.

Todo elemento  $f \in D^r(\mathbb{R}^+)$  determina una  $C^r$ -estructura sobre  $Z$ , definida por el atlas

$$(v_1, \pi_1^{-1}), (v_2, f \circ \pi_2^{-1})$$

y que llamaremos estructura definida por  $f$  sobre  $Z$ .

#### Estructuras diferenciables sobre $Z$ .

#### Proposición 3.5.1.

Para toda estructura  $S$  de clase  $C^r$  sobre  $Z$ , existe  $f \in D^r(\mathbb{R}^+)$  tal que  $S$  sea  $C^r$ -equivalente a la estructura definida por  $f$  sobre  $Z$ .



Demostración:

La demostración no es difícil ya que utiliza el hecho de que todas las  $C^r$ -estructuras sobre  $\mathbb{R}$  son equivalentes por el corolario 2.1.3.5.

Proposición 3.5.2.

Las dos  $C^r$ -estructuras sobre  $Z$ , respectivamente definidas por los elementos  $f_1$  y  $f_2$  de  $D^r(\mathbb{R}^+)$  son  $C^s$ -equivalentes ( $s \leq r$ ) si y solo si existe un par  $(d_1, d_2)$  de elementos de  $D_p^s(\mathbb{R}^+)$  tal que se verifican una de las igualdades siguientes:

$$(f_1/\mathbb{R}^+) \circ d_1 = d_2 \circ (f_2/\mathbb{R}^+) \quad \text{ó} \quad (f_1/\mathbb{R}^+) \circ d_1 = d_2 \circ (f_2^{-1}/\mathbb{R}^+)$$

Demostración:

Supongamos que  $(Z, S_{f_1})$  es  $C^s$ -equivalente a  $(Z, S_{f_2})$ .

Tenemos por hipótesis:

$$f_1/\mathbb{R}^+ \text{ es } C^r\text{-difeomorfismo de } \mathbb{R}^+,$$

$$d_1 \text{ es } C^r\text{-difeomorfismo de } \mathbb{R}^+$$

Entonces  $f_1/\mathbb{R}^+ \circ d_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  es un  $C^r$ -difeomorfismo.

De manera análoga resulta que:

$$d_2 \circ (f_2/\mathbb{R}^+) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ es } C^r\text{-difeomorfismo.}$$

$$\text{y} \quad d_2 \circ (f_2^{-1}/\mathbb{R}^+) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ es } C^r\text{-difeomorfismo.}$$

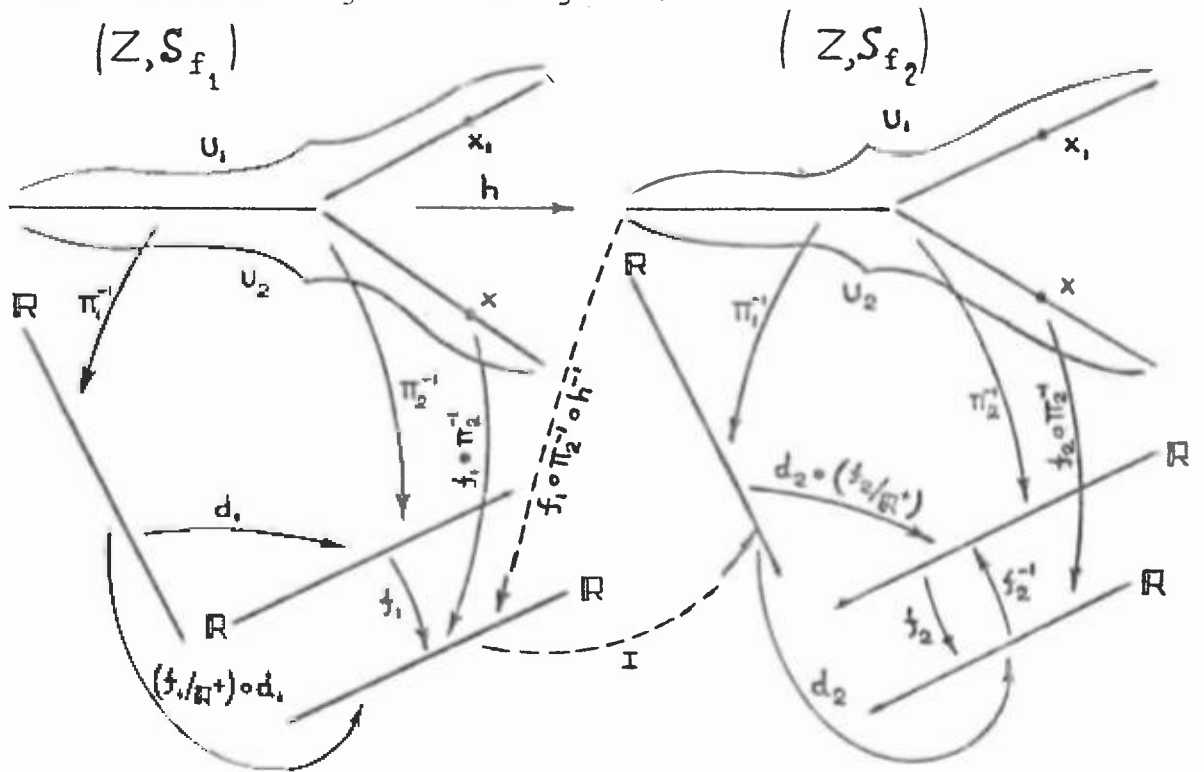
Como  $(Z, S_{f_1})$  es  $C^s$ -equivalente a  $(Z, S_{f_2})$ . Entonces existe un difeomorfismo  $h$  de clase  $C^s$  ( $s \leq r$ ) de

$(Z, S_{f_1})$  sobre  $(Z, S_{f_2})$ . Todo homeomorfismo de  $Z$  sobre

Z o bien deja  $U_1$  y  $U_2$  globalmente invariante, o bien cambia  $U_1$  y  $U_2$ .

Supongamos que h intercambia a  $U_2$  y  $U_1$ ; es decir  $h(U_2) = U_1$  y  $h(U_1) = U_2$

Considérese el siguiente diagrama:



Sea  $x \in \mathbb{R}^+ = U_2 - U \cup \{0\}$ ; luego  $d_1(x) \in \mathbb{R}^+$

Resulta fácil verificar que:  $[(f_1/\mathbb{R}^+) \circ d_1](x) = \pi_1^{-1}(x_1)$

Sea  $d_2(f_2/\mathbb{R}^+)(x) = d_2(f_2/\mathbb{R}^+(x))$

Es claro que  $h(U_2 - U) = U_1 - U$

Entonces es fácil verificar que:  $(d_2 \circ f_2/\mathbb{R}^+)(x) = \pi_1^{-1}(x_1)$

Por lo tanto  $(f_1/\mathbb{R}^+) \circ d_1 = d_2 \circ f_2/\mathbb{R}^+$

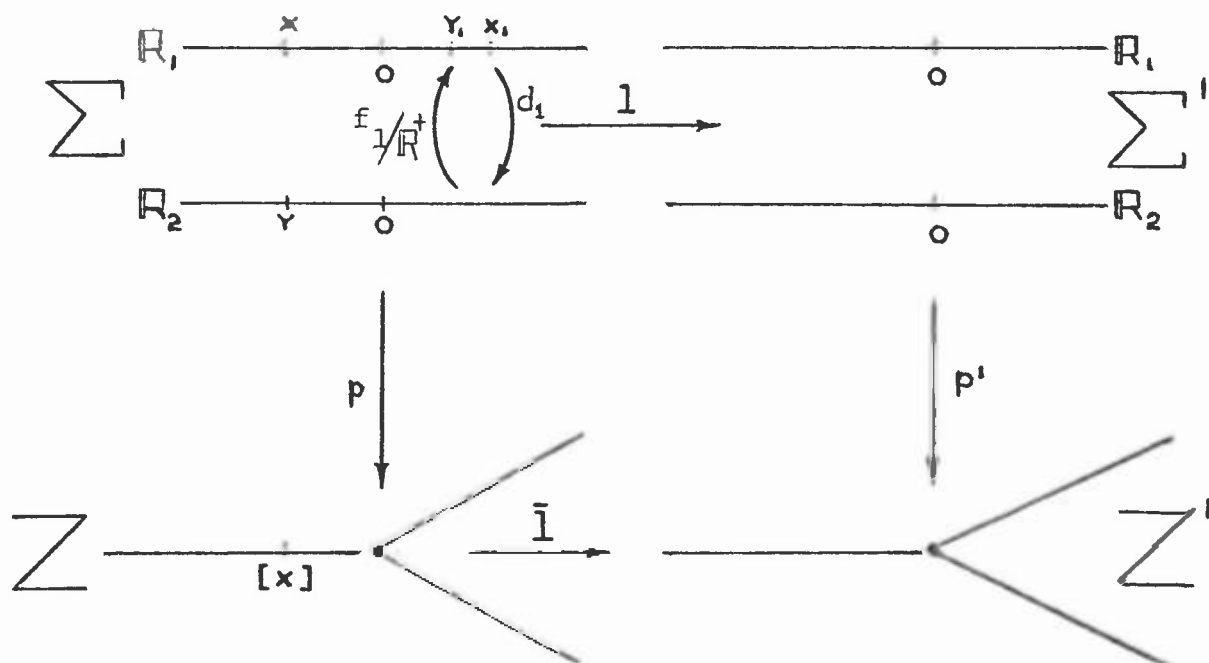
De manera análoga, considerando la composición

$d_2 \circ (f_2^{-1}/\mathbb{R}^+)$  se verifica que

$$(f_1/\mathbb{R}^+) \circ d_1 = d_2 \circ (f_2^{-1}/\mathbb{R}^+)$$

Vamos a demostrar ahora que la condición suficiente:

Considérese el siguiente diagrama:



sea  $l : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ , definida por

$$l(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (f_1/\mathbb{R}^+ \circ d_1)(x) & \text{si } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  las relaciones de equivalencia definidas sobre  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  respectivamente para obtener el espacio de ramificación simple  $Z$ . Se verifica fácilmente que es compatible con  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ .

Luego existe  $\bar{\Gamma}: Z \rightarrow Z$  tal que el diagrama es conmutativo.

Se comprueba fácilmente, gracias a la conmutatividad del diagrama, que  $\bar{\Gamma}$  es un difeomorfismo de clase  $C^S$ .

Observación 3.5.1.

- (i) La proposición 3.5.2 introduce una relación de equivalencia  $\rho$  sobre  $D^r(\mathbb{R}^+)$  y traslada el estudio de las  $C^r$ -estructuras sobre  $Z$  a las de  $D^r(\mathbb{R}^+)/\rho$ .
- (ii) La estructura definida por  $f \in D^r(\mathbb{R}^+)$  es determinada, salvo una equivalencia, dada la restricción de  $f$  a  $\mathbb{R}^+$ .

Teorema 3.5.3. (Fedida)

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos números reales tales que  $1 < \alpha < \beta$  existe un entero  $r$ , tal que las estructuras analíticas definidas respectivamente, salvo una equivalencia, por

$$f(x) = x^\alpha \quad \text{y} \quad g(x) = x^\beta, \quad x > 0$$

no son  $C^r$ -equivalentes.

En la demostración se utiliza el lema siguiente.

Lema 3.5.4.

Sean  $a$  y  $b$  dos números reales y  $r$  un entero tales que  $1 \leq a < r \leq b$ . Las dos estructuras sobre  $Z$ , respectivamen-

te definida por

$$f_1(x) = x^a \text{ y } f_2(x) = x^b, \quad x > 0$$

no son  $C^r$ -equivalentes.

Demostración:

Supongamos que las dos estructuras son equivalentes.

Por la proposición 3.5.2, existe el par  $(h_1, h_2) \in D_p^r(\mathbb{R}^+) \times D_p^r(\mathbb{R}^+)$

tal que

$$(1) f_1 h_1 = h_2 f_2^{-1} \quad \text{o} \quad (2) f_1 h_1 = h_2 f_2$$

Resulta que (1) es imposible, puesto que:

(1) es equivalente con  $[h_1(x)]^a = h_2(x^{1/b})$ , para  $x > 0$ , de donde  $a[h_1(x)]^{a-1} h_1'(x) = \frac{1}{b} x^{1/b-1} h_2'(x^{1/b})$  para  $x > 0$

Entonces cuando  $x$  tiende a cero, el primer miembro tiende a un límite finito y el segundo a  $+\infty$ .

De  $a < r \leq b$  resulta imposible la igualdad (2); puesto que:

(2) es equivalente con  $[h_1(x)]^a = h_2(x^b)$ , para  $x > 0$ .

y se comprueba con facilidad que:

$$\lim_{dx^r} \frac{d^r}{dx^r} [h_1(x)] = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{dx^r} \frac{d^r}{dx^r} [h_2(x^b)] = l, l \text{ finito}$$

Demostración del teorema 3.5.3.

Como  $1 \leq \alpha \leq \beta$  existe un número racional  $r/s$  tal que

$$\alpha < r/s \leq \beta$$

Si las dos estructuras definidas respectivamente, salvo una equivalencia, por

$$f(x) = x^\alpha \quad g(x) = x^\beta, \quad x > 0.$$

fuesen  $C^r$  equivalentes; se mostraría que las dos estructuras definidas por:

$$k_1(x) = x^a = x^{\alpha^s} \quad \text{y} \quad k_2(x) = x^b = x^{\beta^s}$$

serían también  $C^r$ -equivalentes; lo que es imposible por el lema 3.5.4, ya que  $1 \leq a < r \leq b$ .

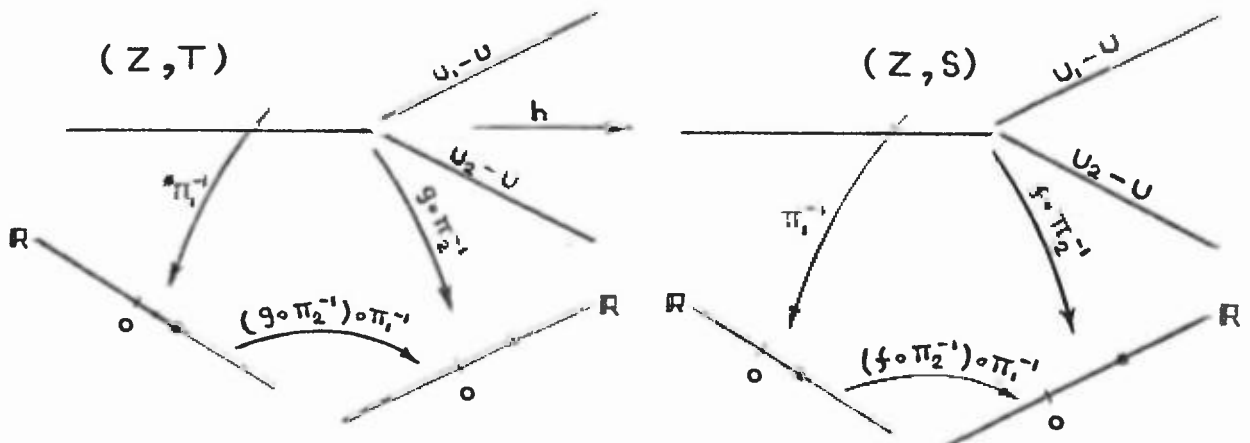
Teorema 3.5.5.

Para toda  $C^r$ -estructura  $S$  sobre  $Z$  ( $r \geq 1$ ) existe una estructura analítica  $T$  tal que  $S$  y  $T$  son  $C^1$ -equivalentes.

Demostración:

En la demostración esencialmente se utiliza la propiedad siguiente: El conjunto de las funciones analíticas sobre  $[0, +\infty)$  es denso en el espacio de funciones continuas sobre  $[0, +\infty)$  con la topología de Whitney, ver [16].

Considerese el diagrama siguiente:



Sea  $h$ , aplicación de  $(Z, T)$  sobre  $(Z, S)$  definida por:

$$h(x) = \begin{cases} * \pi_1^{-1}(x) & , \quad x \in U_1 - U \\ g \circ \pi_2^{-1}(x) & , \quad x \in U_2 - U \\ x & , \quad x \in U \end{cases}$$

donde  $* \pi_1^{-1}$  y  $g \circ \pi_2^{-1}$  son funciones analíticas sobre  $[0, +\infty)$

Podemos observar que las funciones  $\pi_1^{-1}$  y  $f \circ \pi_2^{-1}$  son diferenciables de clase  $C^r$ .

Luego existen  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  tales que:

$$\begin{aligned} | * \pi_1^{-1}(x) - \pi_1^{-1}(x) | &< \epsilon(x) \\ | g \circ \pi_2^{-1}(x) - f \circ \pi_2^{-1}(x) | &< \epsilon'(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|h(x) - \pi_1^{-1}(x)| < \epsilon(x)$  y  $|h(x) - f \circ \pi_2^{-1}(x)| < \epsilon'(x)$

Entonces  $h \in W'(\pi_1^{-1}, \epsilon)$  y  $h \in W'(f \circ \pi_2^{-1}, \epsilon')$

Tenemos así que:

$h$  es analítica y como  $h \in W'([0, +\infty), [0, +\infty))$

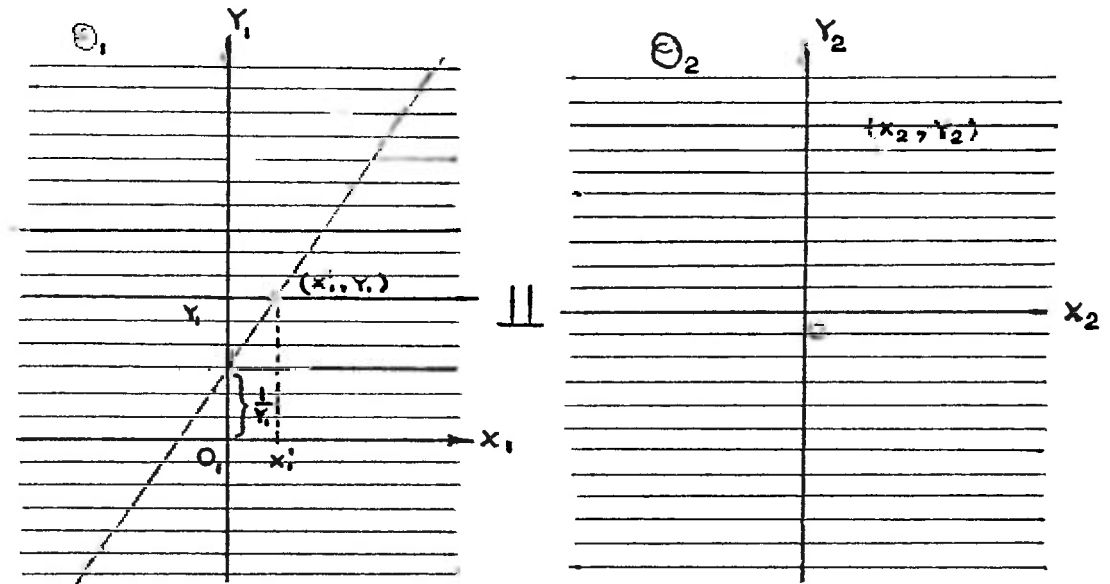
Entonces  $h$  es de clase  $C^1$ .

Como  $* \pi_1^{-1}$ ,  $g \circ \pi_2^{-1}$ ,  $I_U$  tienen una inversa analítica cada una; entonces  $h$  tiene una inversa analítica.

Luego  $h$  es un difeomorfismo indefinidamente derivable de  $(Z, T)$  sobre  $(Z, S)$ .

3.6 Realización de una estructura dada sobre  $Z$  por una foliación del plano.

sea  $f \in D^r(\mathbb{R}^+)$ . Consideremos dos ejemplares  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  del plano  $\mathbb{R}^2$  foliadas por las horizontales ( $y_1 = \text{Cte}$  y  $y_2 = \text{Cte}$ )



En el espacio topológico suma  $\Theta_1 \parallel \Theta_2$  definimos la siguiente relación binaria

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$  si y solo si  $x_2 = x_1 + \frac{1}{y_1}$ ,  $y_2 = f(y_1)$ ; para  $y_1 > 0$  que identifica los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ ; es decir para un  $y_1$  fijo se tiene una traslación  $x_1 + \frac{1}{y_1}$  que interseca a la constante  $y_1$  en el punto  $(x'_1, y_1)$ . Este punto se identifica con el punto  $(x'_1 + \frac{1}{y_1}, f(y_1))$ ; donde  $x_2 = x'_1 + \frac{1}{y_1}$  y  $y_2 = f(y_1)$ .



Se comprueba que esta relación es de equivalencia. Además se reduce a la identidad para los puntos tales que  $y_1 \leq 0$  o  $y_1 \leq 0$  y que sea compatible con las foliaciones de  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$

Ejemplo:

Vamos a definir a  $f$  para  $y_1 > 0$  de la siguiente manera:

$$f(y_1) = y_1^3 \quad (1)$$

Para cada  $y_1 > 0$  tenemos explicitado un homeomorfismo creciente,  $g_{y_1}(x_1) = x_1 + \frac{1}{y_1}$  (2)

Vamos a encontrar ahora los puntos de  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  que se identifican por medio de las relaciones (1) y (2).

Sea  $y_1 = 2$ . Entonces se tiene la traslación  $x_1 + 1/2$ .

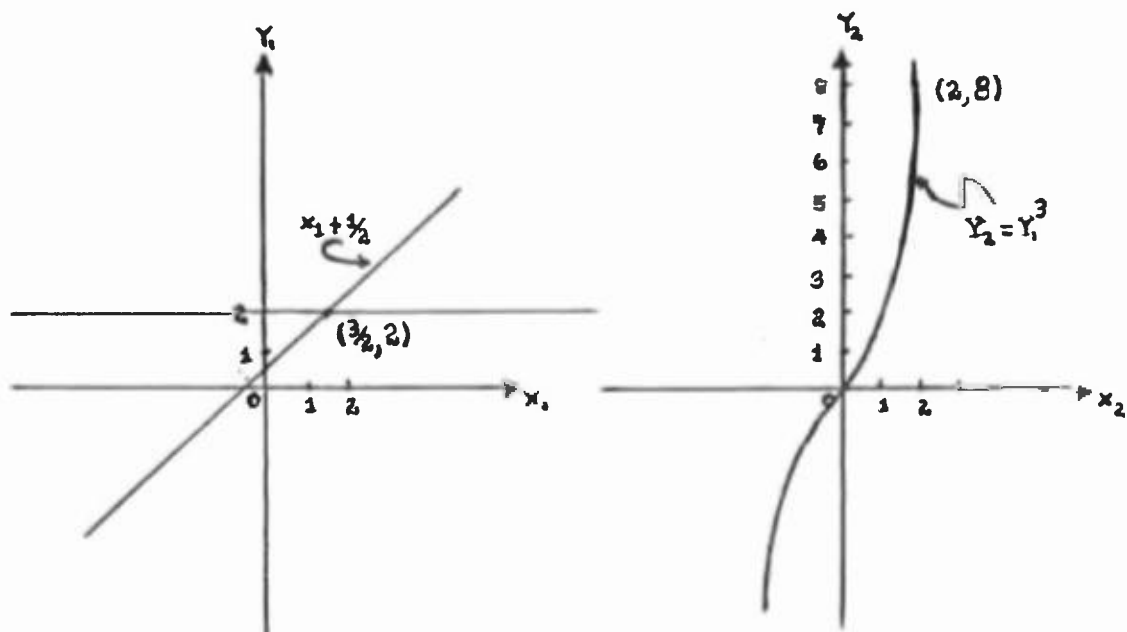
Resolviendo el sistema 
$$\begin{cases} g_2(x_1) = x_1 + 1/2 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Resulta que  $x_1 = 3/2$ . Entonces se tiene el punto  $(3/2, 2)$  en  $\Theta_1$

Luego  $x_2 = 2$ .

Ademas  $y_2 = f(2) = 2^3 = 8$

Por lo tanto se tiene el punto  $(2, 8)$  en  $\Theta_2$ .



Toda la discusión anterior resumimos en la siguiente:

Proposición 3.6.1.

El espacio cociente de la suma topológica de  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  por esta relación de equivalencia provisto de la foliación inducida por las de  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$ , es el plano provisto de la foliación diferenciable, que induce sobre su espacio cociente que es la ramificación simple, una estructura diferenciable (ver prop. 2.2.2.1) equivalente a la definida por  $f$  sobre esta ramificación simple.

Observación 3.6.1.

Como  $y_1 \leq 0$  es compatible con las foliaciones de  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  se tiene que al encontrarse el punto  $(x_1, y_1)$  en una hoja de  $\mathcal{D}_1$ , el punto correspondiente  $(x_2, y_2)$  en  $\mathcal{D}_2$ , al hallar  $y_2$  por medio de la relación  $y_2 = f(y_1)$ , se va a encontrar también en una hoja.

## CAPITULO 4

### FOLIACIONES DEL PLANO DETERMINADAS POR FLUJOS

#### 4.1 Campos vectoriales y Espacios de Fase.

Consideremos campos vectoriales  $X$  determinados por ecuaciones diferenciales polinomiales de grado a lo más  $m$ , sin puntos críticos en el plano real, que llamaremos campos vectoriales polinomiales.

##### Definición 4.1.1.

Dos campos vectoriales polinomiales  $X$  e  $Y$  sobre  $\mathbb{R}^2$  son topológicamente equivalente si y sólo si existe un homeomorfismo  $\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que lleva las trayectorias de  $X$  sobre las trayectorias de  $Y$ , y que preserva las orientaciones.

##### Observación 4.1.1.

1. Bajo  $\phi$  la imagen de los puntos críticos (puntos de equilibrio, estacionario o puntos singulares) de  $X$  son puntos críticos de  $Y$  ; la imagen de órbitas periódicas (órbitas cerradas, soluciones periódicas) de  $X$  son órbitas periódicas de  $Y$  .

También la imagen de  $\omega$ -límite de la órbita  $\Theta_x(p)$  por  $\phi$  es el  $\omega$ -límite de  $\Theta_y(h(p))$ ; análogamente para el  $\alpha$ -límite. (Ver [24] ).

2. En el plano  $\mathbb{R}^2$  cada órbita de  $X$  separa el plano exactamente en dos regiones.
  3. La familia de órbitas del campo vectorial polinomial  $X$  define una foliación  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R}^2$ ; y la equivalencia topológica entre estas foliaciones del plano  $\mathbb{R}^2$  se define como en la definición 4.1.1. (Ver también 3.2.1)
- Sea  $\mathcal{P}^2(m)$  el conjunto de todos los campos vectoriales determinados por:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde cada componente de  $f(x)$  es un polinomio de grado a lo más  $m$  y sin puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ . Denotamos con  $B^2(m)$  el cardinal del conjunto (conjunto cociente) de todas las clases de equivalencia topológica en  $\mathcal{P}^2(m)$ .

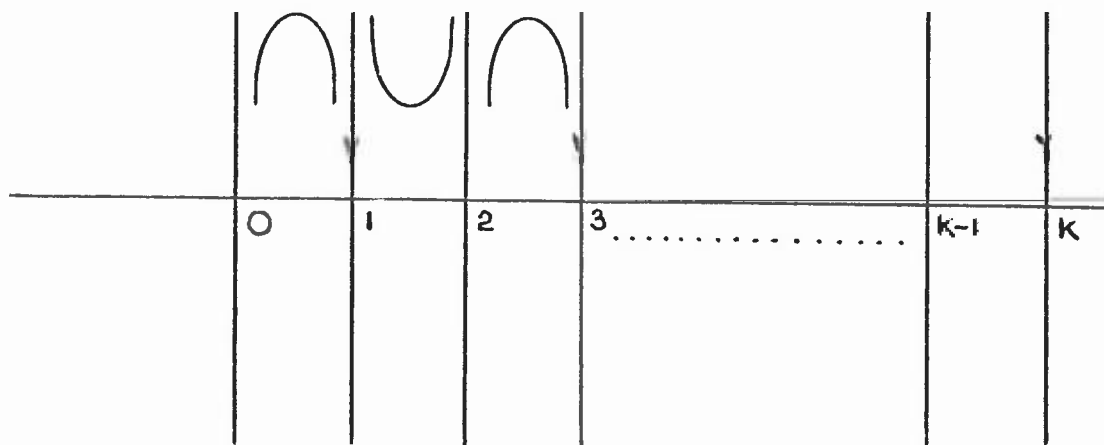
Ejemplo 1.

Consideremos en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x-1)(x-2) \dots (x-k) \\ (1.1) \quad \dot{y} &= (x-1/2)(x-3/2) \dots (x-k+1/2) \end{aligned}$$

para enteros  $k \geq 1$ .

Cada una de las rectas verticales  $x=0, x=1, \dots, x=k$  son trayectorias y ellas determinan  $k$  franjas o regiones.



Cada una de las franjas se llenan con trayectorias de la forma  $\cap$  o  $\cup$  dependiendo del signo de la derivada  $\dot{x}$  en esas franja.

Observación 4.1.2.

1. Observamos que la descripción anterior de familia de trayectorias utiliza invariantes topológicos.
2. Cada una de las trayectorias  $x=0, x=1, \dots, x=k$  es una separatriz, es decir, en el espacio cociente de orbitas cada una de estas  $k+1$  órbitas determinan un elemento que es inseparable mediante conjuntos abiertos de algún otro elemento. Esto es, son elementos no Hausdorff del espacio de órbitas.

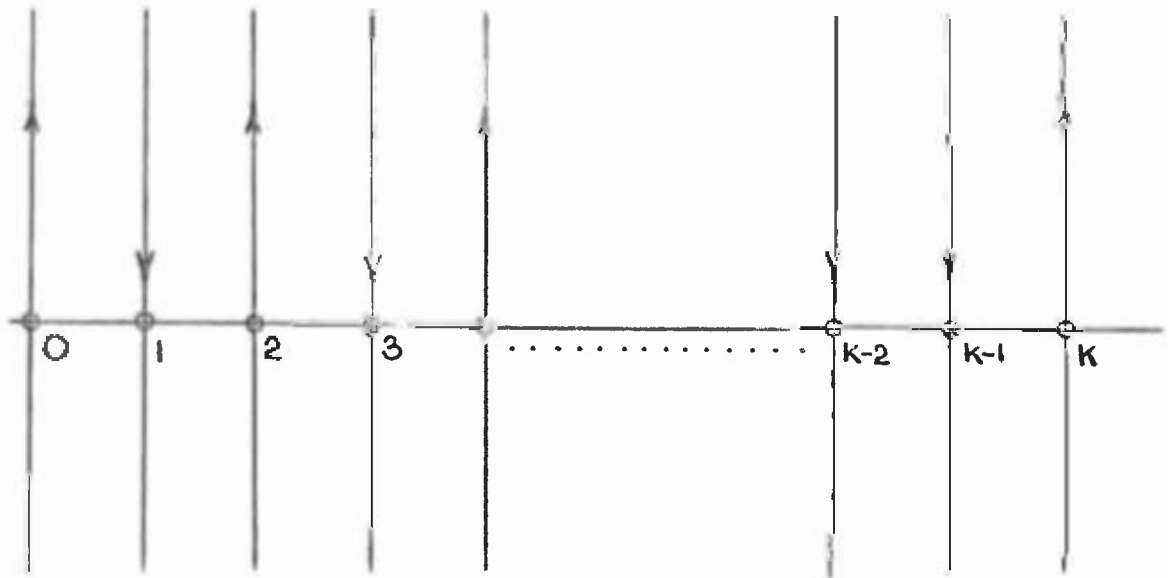
3. Claramente estas  $k+1$  rectas son las únicas separatrices del campo polinomial, porque cualquier trayectoria  $S$  que no sea separatriz tiene trayectorias vecinas  $S_1$  y  $S_2$  tal que  $S_1$  y  $S_2$  constituyen la frontera de una franja topológica cerrada  $[S_1, S_2]$  que contiene a  $S$  y no contiene ternas cíclicas de trayectorias (tres trayectorias distintas siempre están dispuesta de manera que una separa a las otras dos en el plano o ninguna separa a las otras dos, en tal caso decimos que las tres trayectorias constituyen una terna cíclica).
4. El número de separatrices de un campo polinomial es un invariante topológico del campo.

Ahora consideremos el campo polinomial en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x-1)^{\alpha_1} (x-2)^{\alpha_2} \dots (x-k+2)^{\alpha_{k-2}} (x-k+1)^{\alpha_{k-1}} (x-k)^{\alpha_k} \\ (1.2) \quad \dot{y} &= (x-1/2)(x-3/2) \dots (x-k+5/2)(x-k+1/2) \end{aligned}$$

para enteros  $k \geq 3$  y enteros  $\alpha_j = 1$  ó  $2$ .

Aquí también cada una de las rectas verticales  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2, \dots, x=k-1$ ,  $x=k$  son trayectorias y determinan  $k$  regiones.



Las primeras  $k-3$  regiones se llenan con  $\cup$  o  $\cap$  dependiendo del signo de  $\dot{x}$  en aquella franja, esto es, dependiendo de las elecciones de  $\alpha_j = 1$  o  $2$ .

Así el espacio fase consiste de  $k+1$  trayectorias que determinan  $k$  franjas; las primeras  $k-3$  regiones se llenan de una manera cíclica (cíclica con las dos trayectorias frontales) y las últimas tres regiones con dos regiones cíclicas y del otro lado de una región sin conjunto cíclico de trayectorias (aún en la cerradura de la región).

Observación 4.1.2.

1. También observamos que la descripción anterior del espacio fase es esencialmente topológica.



2. Cada una de las trayectorias  $x=0, x=1, \dots, x=k$  es una separatriz y éstas son las únicas separatrices. Así topológicamente se distinguen las  $k+1$  separatrices, junto con las  $k+2$  regiones llamadas regiones canónicas que ellas determinan en el plano. También son topológicamente distinguidas las  $k-1$  regiones canónicas, cada una de las cuales, contiene una terna cíclica de trayectorias en la región cerrada.

Proposición 4.1.1.

Dados campos vectoriales polinomiales de la forma (1.2). Entonces para varias elecciones de  $\alpha_j$  ellos determinan al menos  $2^{k-1}/4$  tipos topológicos de campos polinomiales en  $\mathbb{P}^2(2k)$ .

Demostración.

Fijemos  $k \geq 4$  y consideremos dos campos polinomiales  $X_\alpha$  y  $X_{\bar{\alpha}}$  para  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$  y  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{k-2}, \bar{\alpha}_{k-1}, \bar{\alpha}_k)$

Si  $X_\alpha$  es topológicamente equivalente a  $X_{\bar{\alpha}}$  entonces las  $k+1$  separatrices de ambos se corresponden y en el orden lineal (o su inverso). Supondremos que el homeomorfismo  $\phi$ , que lleva  $X_\alpha$  sobre  $X_{\bar{\alpha}}$  preserva la orientación de  $\mathbb{R}^2$  de manera que las ternas cíclicas positivas de trayectorias de  $X_\alpha$  tienen por imágenes bajo  $\phi$  ternas cíclicas positivas de  $X_{\bar{\alpha}}$ . (Ver observación 3.2.1).

Anora observamos que si  $\alpha_k = 1$  entonces  $\dot{x}$  en  $X_\alpha$  cambia de signo en  $x = k$ ; luego las tres trayectorias  $x = k$ ,  $x = k-1$  y la trayectoria de la región canónica que estas dos separatrices determinan, forman una terna cíclica que vamos a denominar terna cíclica positiva.

Si  $\alpha_k = 2$  entonces  $\dot{x}$  en  $X_\alpha$  no cambia de signo en  $x = k$ , así la correspondiente terna cíclica la denominaremos terna cíclica negativa.

Como hemos supuesto que  $X_\alpha$  y  $X_{\bar{\alpha}}$  son topológicamente equivalentes bajo un homeomorfismo  $\phi$  que preserva la orientación concluimos que  $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$ . De manera análoga probamos que  $\bar{\alpha}_j = \alpha_j$  para  $j = 1, 2, 3, \dots, k-2$ .

Desde que son  $2^{k-1}$  elecciones de los exponentes  $\alpha$  hemos construido  $2^{k-1}$  diferentes campos polinomiales todos de grado a lo más  $m = 2(k-1) + 2 = 2k$ . Sin embargo,  $\phi$  puede intercambiar el orden de las separatrices de  $X_\alpha$ , o invertir la orientación de  $\mathbb{R}^2$ ; podemos asegurarnos de solo  $2^{k-1}/4$  clases topológicamente distintas en  $\mathcal{P}^2(2k)$ . Pero la región distinguida entre  $x = k-1$  y  $x = k$  podría ubicarse en una de las  $k-t$  regiones (para  $t = 1, \dots, k-2$ ) intermedias entre la primera y la última franja; así construimos  $(k-t)2^{k-1}/4$  campos polinomiales topológicamente distintos de  $\mathcal{P}^2(2k)$ .

Ejemplo 2.

Consideremos el conjunto  $\mathcal{P}^2(\omega)$  de campos analíticos reales sin puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ .

Sean los campos vectoriales  $X_\alpha$  de la forma:

$$\dot{x} = E(x) x(x+1)^{\alpha_1} (x+2)^{\alpha_2} \dots (x+k)^{\alpha_k} \dots$$

$$\dot{y} = E(x) (x+1/2) (x+3/2) (x+5/2) \dots$$

donde  $E(x)$  es un exponencial conveniente para garantizar que los productos infinitos convergan a funciones enteras.

El parámetro  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  es una sucesión de  $\alpha_k = 1$  ó  $2$ .

Las únicas separatrices de  $X_\alpha$  son  $x=0, x=-1, x=-2, \dots, x = -k$ .

Estas separatrices determinan un conjunto enumerable de regiones canónicas que contienen trayectorias  $\cup$  ó  $\cap$  según el signo de  $\dot{x}$  o el valor de  $\alpha$ . Utilizando los argumentos del ejemplo anterior se demuestre que  $X_\alpha$  es topológicamente equivalente a  $X_{\bar{\alpha}}$  si y sólo si  $\alpha = \bar{\alpha}$ . Como el conjunto de sucesiones  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  tiene la cardinalidad del continuo concluimos que

$$\mathcal{P}^2(\omega) \text{ es } N_1 \text{ (aleph. 1).}$$

4.2 Separatrices y equivalencia topológica de campos vectoriales en el plano.

Consideremos el campo vectorial  $X$ .

$$(*) \quad \dot{x} = f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = g(x, y)$$

con  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  y sin puntos críticos.

Estudiaremos la foliación  $\mathcal{F}$  (espacio fase) definida por  $X$  y llamaremos hojas de  $\mathcal{F}$  a las trayectorias u orbitas de  $X$ .

Definición 4.2.1.

Sean  $S_1, S_2, S_3$  tres hojas distintas de  $\mathcal{F}$ , diremos que  $S_2$  separa  $S_1$  y  $S_3$  y escribiremos  $S_1 | S_2 | S_3$  ó  $S_3 | S_2 | S_1$  cuando  $S_1$  y  $S_3$  se encuentran en diferentes componentes de  $\mathbb{R}^2 - S_2$ . Si ninguna de estas tres hojas separa las otras dos diremos que  $S_1, S_2, S_3$  forman una terna cíclica y denotamos con  $|S_1, S_2, S_3|$ .

Definición 4.2.2.

Un conjunto de hojas tal que cada terna de sus elementos es cíclica llamamos conjunto cíclico.

Observación 4.2.1.

Kaplan y Markus han estudiado foliaciones del plano determinadas por un campo vectorial.

Han establecido que:

1. Un conjunto cíclico es finito o enumerable y constituye la frontera de una región simplemente conexa.
2. Para un conjunto cíclico enumerable, las hojas tienden uniformemente al infinito, es decir, solo un número finito de las trayectorias pueden cortar cualquier conjunto compacto dado de  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora en la restricción de  $\mathcal{F}$  al disco unitario abierto (que es difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ ) cada hoja de  $\mathcal{F}$  tiende a la circunferencia unitaria (no necesariamente como un punto límite) con ambos extremos. Por consiguiente las hojas de  $\mathcal{F}$  en el disco aún satisfacen las propiedades de separación correspondientes a  $S_1|S_2|S_3$  y  $|S_1S_2S_3|$ . Como las cuerdas de la circunferencia también satisfacen propiedades similares Kaplan llama un sistema cordal a la foliación  $\mathcal{F}$  cuando enfatiza las relaciones de separación.

Utilizando las trayectorias de  $\mathcal{F}$  (espacio fase) definimos el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  como el espacio cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la relación de equivalencia de puntos que están sobre la misma trayectoria de  $\mathcal{F}$ , (confrontar capítulo 2). Se demuestra que el espacio de hojas  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  es conexo, tiene una base enumerable y es un  $T_1$ -espacio.

El espacio  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  no necesariamente es  $T_2$ , [ver 3.1.]

Definición 4.2.3.

Dos trayectorias  $S_1$  y  $S_2$  de  $\mathcal{F}$  son inseparables en  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  cuando todo par de vecindades abiertas de  $S_1$  y  $S_2$  en  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  se intersectan.

Observación 4.2.2.

Si dos trayectorias  $S$  y  $\bar{S}$  no pueden separarse por dos conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  entonces cada par de puntos  $p \in S$  y  $\bar{p} \in \bar{S}$  tienen vecindades arbitrariamente pequeñas en  $\mathbb{R}^2$  que se unen por alguna otra trayectoria  $\hat{S}$  de  $\mathcal{F}$  que está en  $[S, \bar{S}]$ . Como  $S \mid \hat{S} \mid \bar{S}$  es falso, resulta que  $S, \hat{S}, \bar{S}$  forman una terna cíclica; es decir se da  $|S \hat{S} \bar{S}|$ .

Definición 4.2.4.

Una trayectoria  $S$  de  $\mathcal{F}$  es una separatriz cuando está en la cerraduras del conjunto de elementos inseparables de  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$

Nota:

A veces nos referimos a un elemento inseparable de  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  como una separatriz ordinaria y a las otras separatrices como separatrices límites.

Consideremos ahora el conjunto de todas las separatrices límites, que vamos a denotar por  $\Sigma$ . Entonces resulta que  $\Sigma$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^2$  y a las componentes de  $\mathbb{R}^2 - \Sigma$  llamamos regiones canónicas de  $\mathcal{F}$ . La frontera de cada región canónica es un conjunto cíclico (vacío, finito o enumerable) de hojas separatrices. Por

consiguiente, cada región canónica es una región simplemente conexa del plano.

Definición 4.2.5.

Dada una hoja  $S_\alpha$  (separatriz ordinaria) en cada región canónica  $R_\alpha$ . La configuración separatriz  $S\Sigma$  de  $\mathcal{F}$  consiste de  $\Sigma$  y todas las hojas  $S_\alpha$  conjuntamente con las dos relaciones;  $S_1 | S_2 | S_3$  y  $|S_1 S_2 S_3|$  entre ternas  $S_1, S_2, S_3$  distintas.

Teorema 4.2.1. (Kaplan-Marcus).

Sean  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  foliaciones de  $\mathbb{R}^2$  definidas por campos vectoriales del tipo (\*),  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  conjuntos separatrices y  $S\Sigma_1$ ,  $S\Sigma_2$  configuraciones separatrices respectivamente. Entonces existe una equivalencia topológica  $\Phi$  de las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  si y solo si existe un isomorfismo  $\Psi$  de  $S\Sigma_1$  y  $S\Sigma_2$  tal que  $\Psi$  se restringe a un isomorfismo de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

Demostración:

Sea  $\Phi$  una equivalencia topológica de las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ . Entonces el campo vectorial  $X_1$  sobre  $\mathbb{R}^2$  determinado por  $f_1(x,y)=\dot{x}$ ,  $g_1(x,y)=\dot{y}$ , que define la foliación  $\mathcal{F}_1$  es topológicamente equivalente al campo vectorial  $X_2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  determinado por  $f_2(x,y)=\dot{x}$ ,  $g_2(x,y)=\dot{y}$ , que define la foliación  $\mathcal{F}_2$ .

Luego  $\phi$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  tal que lleva órbitas de  $X_1$  (hojas de  $\mathcal{F}_1$ ) en órbitas de  $X_2$  (hojas de  $\mathcal{F}_2$ ) preservando la orientación.

Por lo tanto  $\phi$  es una biyección del conjunto de hojas  $S_\alpha$  de la foliación  $\mathcal{F}_1$ , sobre el conjunto de hojas  $S'_\alpha$  de la foliación  $\mathcal{F}_2$  tal que  $\phi(S_\alpha) = S'_\alpha$ .

Como la equivalencia  $\phi$  lleva puntos críticos en puntos críticos, definamos para todo punto crítico  $x$  la función  $h$  por:

$$h: \{x\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{\phi(x)\} \times \mathbb{R}$$

$$h(x,y) = (\phi(x), y)$$

$$= (\phi(x), I(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$h$  es una biyección para todo  $x$  punto crítico, que lleva separatrices límites de  $\Sigma_1$ , en separatrices límites de  $\Sigma_2$ .

Definamos entonces

$$\psi: S\Sigma_1 \longrightarrow S\Sigma_2 \quad \text{por}$$

$$\psi(S_\alpha) = \phi(S_\alpha)$$

$$\psi[(x,y)] = h(x,y) \quad \text{para todo } x \text{ punto}$$

crítico.

$\psi$  es una biyección



Vamos a demostrar ahora que  $\psi$  preserva las relaciones de separación,

Sean  $(x, y), (x', y) \in \Sigma_1$  y  $S_\alpha$  una separatriz ordinaria tal que  $(x, y), S_\alpha, (x', y)$  constituyen un conjunto cíclico; luego satisfacen la relación  $|(x, y) S_\alpha (x', y)|$

Puesto que  $\psi$  es una biyección que lleva separatrices ordinarias en separatrices ordinarias, separatrices límites en separatrices límites y puesto que las separatrices límites se corresponden en el orden lineal (o su inverso) resulta que  $\psi(S_\alpha)$  no separa a  $\psi(x, y)$  y  $\psi(x', y)$  luego  $\psi |(x, y) S_\alpha (x', y)| = |\psi(x, y) \psi(S_\alpha) \psi(x', y)|$ .

Supongamos ahora que  $(x, y), (x', y), (x'', y) \in \Sigma_1$  Son tales que  $(x, y) |(x', y) | (x'', y)$ ; es decir  $(x', y)$  separa a  $(x, y)$  y  $(x'', y)$ .

Por las mismas razones presentadas en el caso anterior, resulta que  $\psi(x', y)$  separa a  $\psi(x, y)$  y  $\psi(x'', y)$ ; luego  $\psi((x, y) |(x', y) | (x'', y)) = \psi(x, y) |\psi(x', y) | \psi(x'', y)$

Para el recíproco ver [ 17 ].

CAPITULO 5

REPRESENTACION DE UNA FOLIACION DEL PLANO

5.1 Representaciones de dos foliaciones que tienen el mismo espacio de hojas (cociente).

Consideremos los diagramas siguientes:

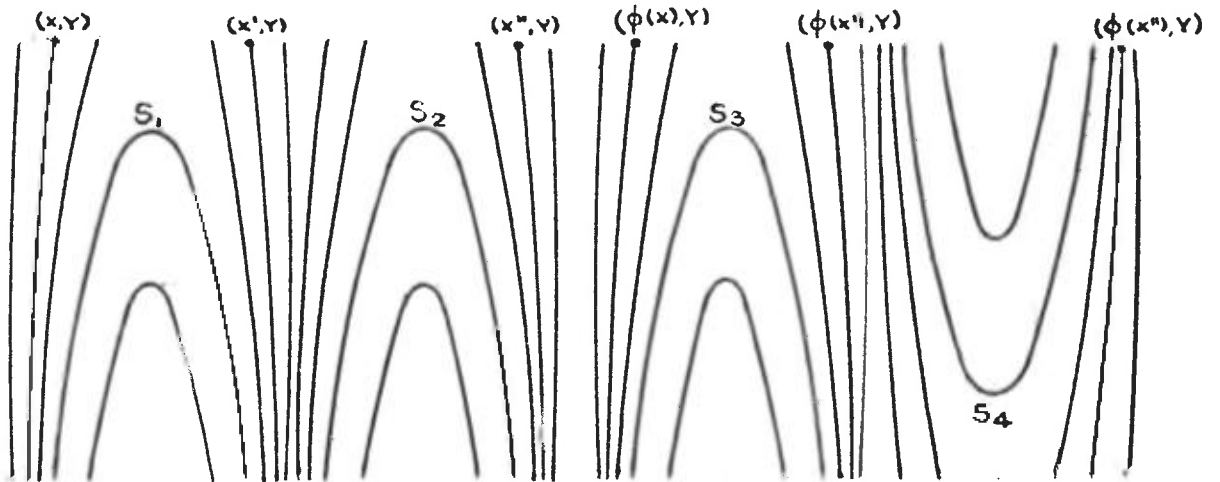


Fig. 1a (Foliación  $\mathcal{F}_1$ )

Fig. 1b (Foliación  $\mathcal{F}_2$ )

Estas figuras representan dos foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  no topológicamente equivalentes, puesto que se observa que el homeomorfismo  $\phi$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  que lleva hojas de  $\mathcal{F}_1$  en hojas de  $\mathcal{F}_2$  no preserva la orientación. Por lo tanto no se satisface el Teorema de Marcus-Kaplan. Sin embargo las dos foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  tienen el mismo espacio cociente.

Otra forma de comprobar que las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  no son topológicamente equivalente, se deduce de:

Definición 5.1.1.: Un sistema total de transversales a una foliación, es una familia de transversales que cortan todas las hojas.

Ejemplo:

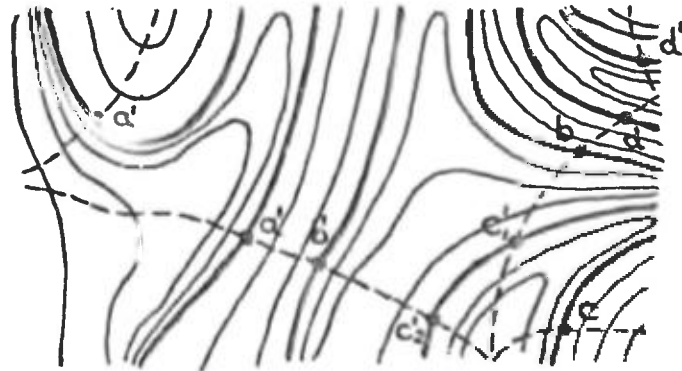


Fig. 2

Figura 2: Una foliación del plano.

Trazos continuos: Separatrices.

Trazos discontinuos: Sistema total de transversales.

Consideremos ahora sistemas totales de transversales a las foliaciones  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  tal como se ilustra en los diagramas siguientes:

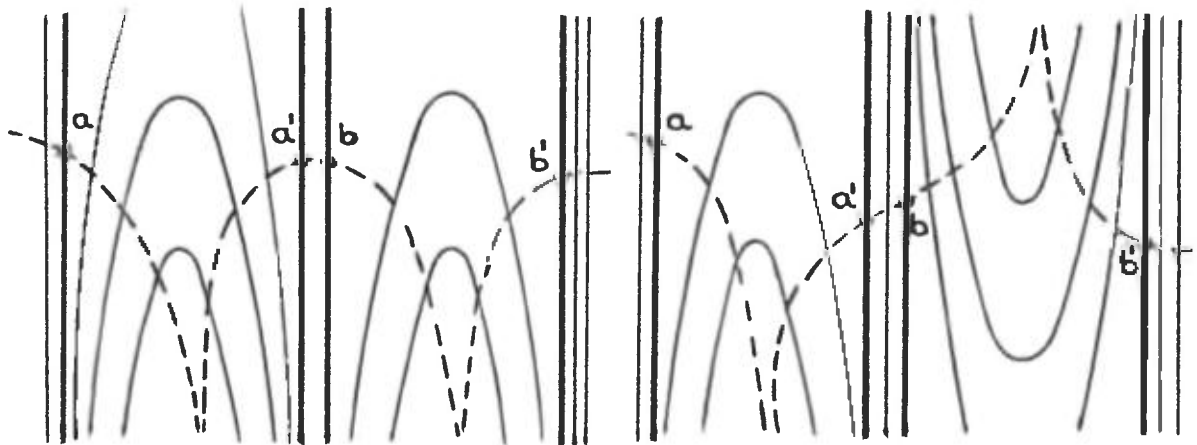


Fig. 3a

Fig. 3b

En el diagrama de la figura 3a cada una de las transversales delimita una región del plano que contiene las otras dos transversales, mientras que en el diagrama de la figura 3b una de las transversales delimita dos regiones cada una de las cuales contiene una de las otras dos transversales.

Ahora veamos sobre las figuras siguientes las representaciones respectivas de estas dos foliaciones.

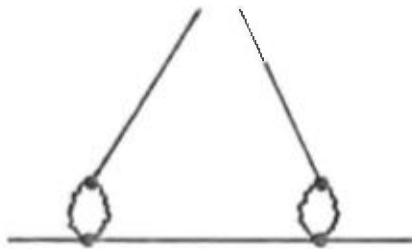


Fig. 4a

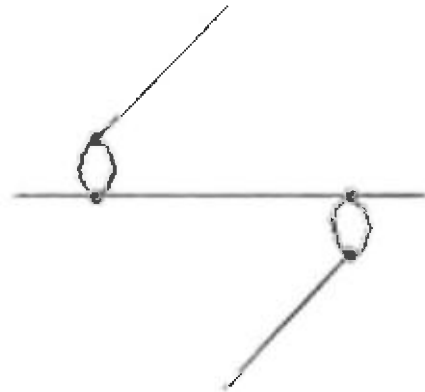


Fig. 4b

Nota:

Los dos trazos que unen ciertos puntos no tienen significación puntual. Ellos indican los puntos no separados.

5.2 Representación de una foliación del plano por medio de una recta y semirrectas del plano.

Orientemos el plano. Sea  $\mathcal{F}$  una foliación del plano. Sabemos que es orientable y transversalmente orientable. Con una hipótesis de diferenciabilidad una hoja y una transversal  $\mathcal{C}$ , orientadas, definen en un punto un referencial de vectores tangentes  $\vec{U}_f$  y  $\vec{U}_c$  respectivamente. Cambiando si es necesario una de las dos orientaciones podemos suponer que el referencial  $(\vec{U}_c, \vec{U}_f)$  es directo.

Ahora consideremos un homeomorfismo directo del plano sobre el plano  $(0xy)$  que lleva a  $\mathcal{C}$  sobre el eje  $0x$  con su orientación. En el cociente, con respecto a los puntos no separados de los puntos de  $\mathcal{C}$ , podremos distinguir aquellos que son enviados en el semiplano superior de aquellos que son enviados en el semiplano inferior determinados por el eje  $0x$ , a una distancia arbitraria pero respetando su posición con respecto a  $0x$  (arriba o abajo) y uniremos por dos trazos para indicar su no separación (ver figura 5), recordando que estos dobles trazos no tienen significado puntual en la representación.



Fig. 5

Considèrese ahora el siguiente diagrama:

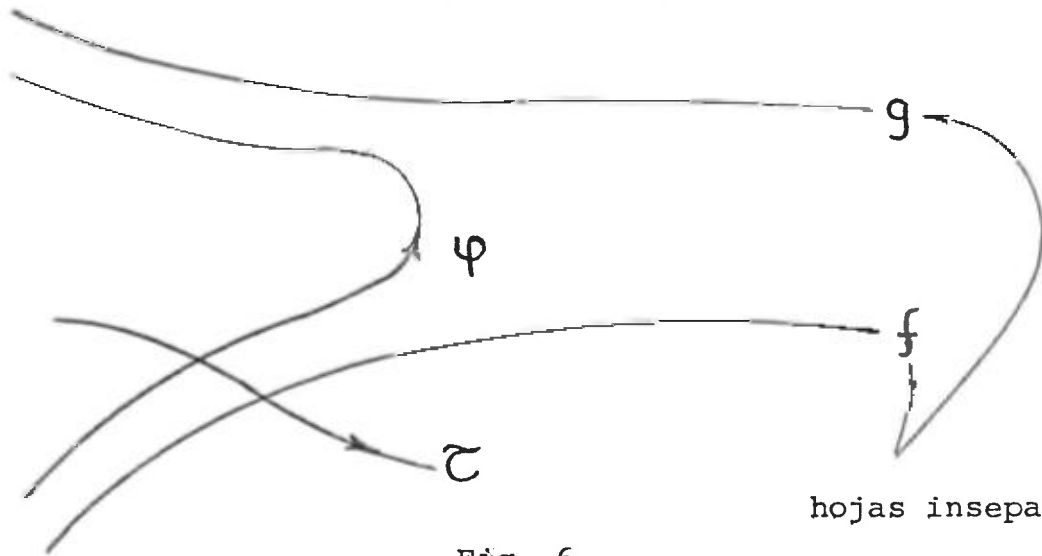


Fig. 6

hojas inseparables  
en el cociente.

Si se consideran tal como en la figura 6 las vecindades saturadas respectivas de dos separatrices (correspondientes a los puntos del cociente no separados), donde una corta la transversal  $\tau$ ; estas vecindades siempre contienen una hoja  $\varphi$ , en su intersección. Para los homeomorfismos directos del plano que llevan  $\tau$  orientado sobre  $Ox$  orientado, existe al menos uno que envía  $\varphi$  sobre una paralela a  $Oy$ , (ver Fig. 7).

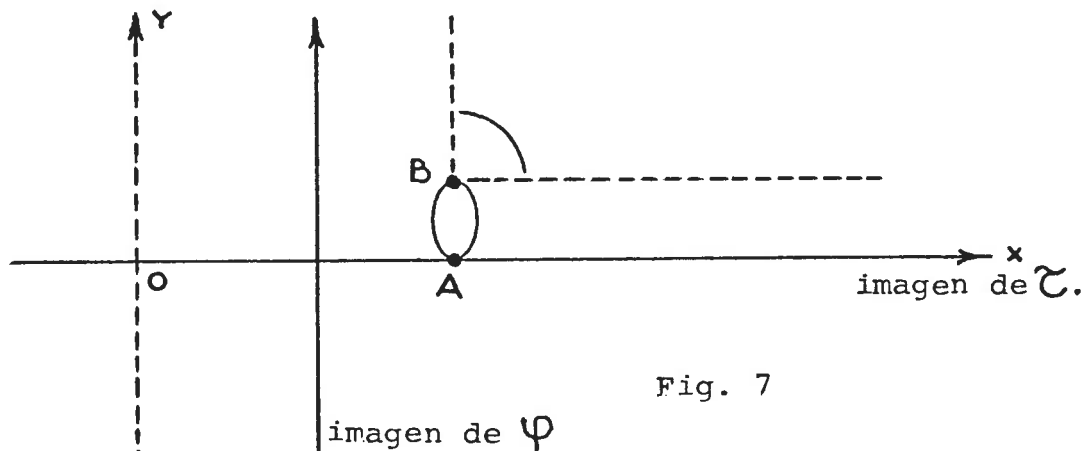


Fig. 7

Observación 5.2.1.

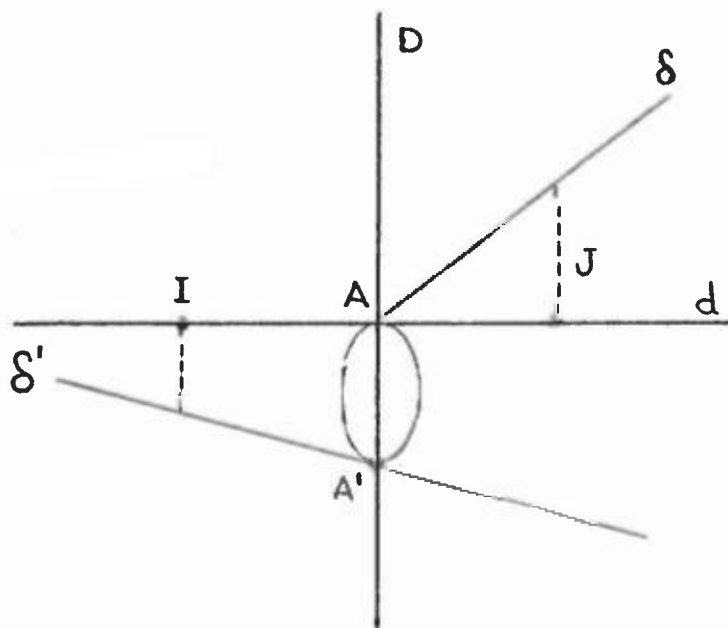
1. Se observa que A y B son los puntos que corresponden a los dos puntos inseparables considerados.
2. Si se conviene que una semitransversal sea representada por una semirrecta de origen B, esta semirrecta no deberá cortar ni la imagen de  $\psi$ , ni  $0x$ . Excluyendo los casos límites, se asigna en definitiva a esta semirrecta de origen B (excluido B) un cuadrante del plano abierto, delimitado por una paralela a  $0x$  y su perpendicular en B. Esta semirrecta es orientada por la orientación de la semitransversal correspondiente.

Prosiguiendo así paso a paso a partir de la transversal  $\tau$  escogida, se obtiene una representación, no solamente del espacio cociente sino también de la foliación.

### 5.3 Topología de una representación.

Vamos a introducir una topología mediante un sistema fundamental de vecindades:

1. En todo punto que no sea origen de una semirrecta consideramos la base de vecindades de la topología inducida por la del plano.
2. En el siguiente diagrama:



Fig, 8

Sea A origen de una semirrecta  $\delta$ . Por A pasa un doble trazo cuya recta soporte designamos con D. Sea d la perpendicular en A a D y que no contiene  $\delta$ . D y d determinan cuatro cuadrantes en el plano.



Sea  $Q$  el cuadrante opuesto al que contiene  $\delta$ .  
 También sea  $\Delta$  la unión de las semirrectas incluidas en la representación, que tienen un origen sobre el doble trazo y que corta  $Q$  en una vecindad de este origen. Se puede afirmar que  $\Delta$  no es vacío. Una de estas semirrectas que designamos con  $\delta'$  se representa sobre la figura 8.

Se obtiene un sistema fundamental de vecindades de  $A$  de la siguiente manera: se parte de un segmento abierto  $IJ$  de  $d$  que contiene  $A$ , se levanta  $AJ$ , incluido  $A$ , sobre  $\delta$  e  $IA$  (excluido  $A$ ) sobre  $\Delta$  y que llamaremos levantamiento de la proyección ortogonal sobre  $d$ .

Considerese ahora para  $\forall A$  origen de una semirrecta (punto no separado de puntos de  $\mathcal{C}$ ) una familia de partes de  $\mathbb{R}^2$ , denotada  $\mathcal{W}^p(A)$  y que definiremos como sigue:

$$\mathcal{W}^p(A) = \left\{ W \subseteq \mathbb{R}^2 / \exists V (\text{levantamiento de la proyección ortogonal sobre } d) \in \beta : \forall \subseteq W \right\}$$

Nota:

$\beta$  es base de vecindades restringida a los puntos no separados de los puntos de  $\mathcal{C}$ .

Es fácil demostrar que  $\mathcal{W}^p(A)$  verifica las siguientes propiedades:

- (i)  $\forall W', \forall W \in \mathcal{W}(A): W' \supseteq W$  implica  $W' \in \mathcal{W}(A)$
- (ii) Si  $W_1, W_2, \dots, W_n \in \mathcal{W}(A)$  entonces  $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{W}(A)$
- (iii) Para cada  $W \in \mathcal{W}(A)$  se tiene  $A \in W$ .
- (iv)  $\forall W \in \mathcal{W}(A), \exists W' \in \mathcal{W}(A): \forall y \in W' \quad W \in \mathcal{W}(y)$ .

Tenemos así que en el plano  $\mathbb{R}^2$  a cada  $x \in \mathbb{R}^2$  se le ha asociado una familia de partes de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{W}(x)$  con las propiedades (i), (ii), (iii), (iv).

Entonces existe una única topología  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  sobre  $\mathbb{R}^2$  tal que para  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \mathcal{W}(x) = \mathcal{V}(x, \mathcal{C}_{\mathbb{R}})$

Definición 5.3.1. A la topología arriba construida se le llama topología de una representación.

Observación 5.3.1. En resumen, toda foliación del plano admite una representación por medio de una recta y semi-rectas del plano. Esta representación permite distinguir los puntos inseparables del espacio de hojas, además, está provista de una topología.

## CONCLUSIONES

Establecemos a continuación como hemos utilizado las referencias bibliográficas, así como las modificaciones que hicimos para los resultados de nuestro trabajo.

Capítulo 1: Preliminares.

Para este capítulo hemos utilizado las referencias [1], [3], [4], [13], [15], [16], [27] y [28].

Iniciamos con la definición 1.1.2 de Haz fibrado. En el conjunto de todos los haces con la misma base, fibra tipo y grupo estructural se introduce una relación binaria (definición 1.3.2.1) y en el lema 1.3.2.1 demostramos que esta relación binaria es de equivalencia.

En la proposición 1.3.2.2 se establece una relación entre las funciones de transición. Luego se da una condición necesaria y suficiente, proposición 1.3.2.4, para que dos haces con la misma base, fibra tipo, grupo estructural y vecindades coordenadas sean equivalentes.

El teorema 1.5.1 establece la existencia y unicidad de un haz fibrado, dado un sistema de transición.

Introducimos el concepto de foliación (def. 1.6.1), damos ejemplos de foliaciones determinadas por submersiones (1.6.1), por fibraciones (1.6.2), por campos vectoriales sin singularidades (1.6.4), por acciones de grupo de Lie (1.6.5.5) y la foliación de Reeb de la esfera unitaria  $S^3$

En la proposición 1.7.1 se establece la estructura intrínseca de toda hoja de una foliación.

Damos una nueva definición de foliación (definición 1.8.1) y en la proposición 1.8.1 se establece la equivalencia entre las definiciones 1.8.1 y 1.6.1.

Capítulo 2: Varietades de dimensión uno y Estructuras Foliadas del Plano.

Para este capítulo fundamentalmente hemos utilizado las referencias [12], [14], [15], [27], [29] y como complementarias [2], [4], [9], [16], [18], [22], [23], [24], [25].

Hemos realizado algunas modificaciones para las demostraciones de los resultados siguientes.

En la proposición 2.1.1.1 se da una construcción general de una variedad topológica a partir de una dada con una relación de equivalencia abierta tal que su restricción a una vecindad suficientemente pequeña de cada punto se reduce a la identidad.

Se introduce el concepto de punto de ramificación (def. 2.1.1.2), se dan algunos ejemplos de variedades de dimensión 1 y de puntos de ramificación.

La proposición 2.1.2.2 establece la existencia de una función de valor real sobre una variedad de dimensión 1, simplemente conexa y con base enumerable que resulta una identificación.

La propiedad 2.1.3.1 establece dos estructuras diferenciables de clase  $C^\infty$  no isomorfas sobre la ramificación simple.

La propiedad 2.1.3.2 da la existencia de variedades di-

ferenciables de clase  $C^\infty$  y de dimensión uno sobre las cuales todas las funciones de clase  $C^1$  son constantes.

Luego se define una variedad regular (def.2.1.3.5) y se demuestra (proposición 2.1.3.2) en forma constructiva que toda estructura diferenciable de clase  $C^r$  sobre una variedad topológica de Hausdorff es regular.

Después de recordar la definición de rango de una función diferenciable en un punto, se demuestra (proposición 2.1.3.4) que sobre toda variedad diferenciable de clase  $C^r$ , de dimensión uno, regular, simplemente conexa y con base enumerable existe una función diferenciable de clase  $C^r$ , de rango uno en todo punto.

Luego se introduce la noción de estructura foliada de dimensión uno sobre una variedad diferenciable de dimensión 2 (def. 2.2.1.1), isomorfismo entre dos estructuras foliadas (def. 2.2.1.3) y se demuestra la proposición 2.2.1.2, que en una estructura foliada diferenciable de clase  $C^r$  las placas son submersiones conexas de dimensión uno y clase  $C^r$ .

Finalmente se recuerdan los teoremas de Kaplan (Teorema 2.2.1.5); Kamke (Teorema 2.2.1.6); Wazewsky (Teorema 2.2.1.7), se comenta la redemostración dada por Haefliger y Reeb y se demuestra que (proposición 2.2.2.1) dada una estructura foliada del plano, el espacio cociente por la relación de equivalencia asociada a la foliación es una variedad de dimensión uno con base enumerable y simplemente conexa. Si la estruc-

tura foliada es diferenciable de clase  $C^r$  (o analítica), entonces el espacio de las hojas está provista canónicamente de una estructura de clase  $C^r$  (o analítica).

### Capítulo 3: Fibraciones por rectas y foliaciones del plano.

Hemos utilizado las referencias fundamentales [7], [8], [10], [11], [26] y la complementaria [16], e introducimos algunas modificaciones para mayor coherencia lógica.

Iniciamos estableciendo las cuatro propiedades de toda foliaciones conjugadas (def. 3.2.1). Analizamos en 3.3 dos problemas fundamentales que aparecen en el problema de clasificación de las foliaciones del plano.

Se recuerda la definición de haces equivalentes (def. 3.4.1) y se demuestra la condición necesaria dada por el Teorema de Godbillon-Reeb (Teorema 3.4.8) utilizando las proposiciones 3.4.7, 3.4.1 y 3.4.4. 3.4.6.

Se recuerda también cuando dos estructuras diferenciables de clase  $C^r$  sobre la ramificación simple son  $C^p$ -equivalentes (def. 3.5.1) y se demuestra la proporción 3.5.2. Luego se demuestra el importante Teorema de Fedida (Teorema 3.5.3) utilizando el lema 3.5.4; así como el teorema 3.5.5 que establece que dada una  $C^r$ -estructura sobre la ramificación simple, existe una estructura analítica  $C^1$ -equivalente a ella.

Finalmente se analiza en 3.6 la realización de una estructura dada sobre la ramificación simple por una foliación del plano utilizando la proporción 3.5.1.

#### Capítulo 4: Foliaciones determinadas por flujos.

En este capítulo hemos utilizado fundamentalmente las referencias [17] y [26], realizando algunas modificaciones.

Iniciamos con una motivación a través de los ejemplos 1.1 y 1.2, luego demostramos la proposición 4.1.1.

Se definen separación entre tres hojas de una foliación y ternacíclica (def. 4.2.1), conjunto cíclico (def. 4.2.2), trayectorias inseparables (def. 4.2.3), separatriz (def. 4.2.4) configuración separatriz (def. 4.2.5).

Concluimos el capítulo demostrando la condición necesaria dada por el Teorema de Kaplan-Marcus (Teorema 4.2.1).

#### Capítulo 5: Representación de una foliación del plano.

En este capítulo ampliamos los resultados contenidos en las referencias [6] y [26].

Iniciamos con una motivación considerando dos foliaciones no-equivalentes topológicamente para definir un sistema total de transversales a una foliación (def. 5.1.1). Discutimos algunos ejemplos.

Con el objeto de distinguir los puntos inseparables del espacio de hojas de una foliación del plano damos una representación por medio de una recta y semirrectas del plano (ver 5,2). Finalmente introducimos para esta representación una topología (ver 5.3) utilizando un sistema fundamental de vecindades.



## REFERENCIAS

- [1.] J.L. Arraut-S. Gitler. Espacios Fibrados, Centro de Investigación del I.P.N., México, (1968).
- [2.] N. Bourbaki. Elements of Mathematics: General Topology, (Una traducción de E'LEMENTS DE MATHEMATIQUE, TOPOLOGIE GÉNÉRALE, originalmente publicado en Francés), Addison-Wesley Publishing Company, Palo alto, (1966).
- [3.] F. Brickell and R.S. Clark. Differentiable Manifolds: An Introduction, Van Nostrand Reinhold Company, London, (1970).
- [4.] C. Camcho-A. Lins Neto. Teoría Geométrica das Folheações. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Ríos de Janeiro, Brasil, (1979), Projeto Euclides.
- [5.] E. Fedida-F.Pluvinage. Feuilletages du Plant et équations Polynomiales. C.R. Acad. Sc.PARIS, t.267.p.101-104, (1968).
- [6.] E. Fedida-F.Pluvinage. Feuilletages transverses du Plan et feuilletages polynomiaux, prepublicación, Institut de Recherche Mathématique Avancee, Universite Louis Pasteur, Strasbourg, (1979).

- [7.] E.Fedida. Structures différentiables sur le branchement simple et équations différentielles dans le plan. C.R. Acad. Sc. PARIS, t.276.p. 1657-1659, (1973).
- [8.] E.Fedida. "Feuilletages du plan-Feuilletages de Lie" (Thèse de Docteur Es-Sciences Mathématiques), Universidad Louis Pasteur, Strasbourg I, (1973).
- [9.] W.H. Fleming. Funciones de diversas variables (Una traducción de Functions of Several Variables). Compañía Editorial Continental. S.A., México, (1969).
- [10.] C. Godbillon. Fibrés en Droites et Feuilletages du plan, Enseignement Math, 18, 3-4, (1972).
- [11.] C. Godbillon-G.Reeb. Fibrés sur le branchement simple, Enseignement Math. 12, p. 277, (1966).
- [12.] A. Haefliger-G.Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, Enseignement Math. (2) 3, 1957 p. 107-125.
- [13.] J. G. Hocking-G.S. Young. Topología. (Una traducción de Topology), Editorial Reverté S.A. Barcelona. (1966).
- [14.] E.Kamke. Über die partielle differentialgleichung  

$$f(x,y) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y) \frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y)$$
 I.- Math. Zeitschrift, vol. 41(1936).pag.56-66.  
 II.- Math. Zeitschrift, vol. 42(1936).pag.287-303.

- [15.] W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane  
I.- Duke Math. J, Vol. 7(1940), 154-155  
II.- Duke Math. J, vol. 8(1941), 11-46
- [16.] E.L. Lima. Variedades Diferenciáveis. Monografías de Matemática, Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Río de Janeiro, Brasil, (1973).
- [17.] L. Markus. Global Structure of ordinary differential equations in the plane; Trans. Amer. Math. Soc. 76(1954) p. 127-158.
- [18.] J. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint, the University Press of Virginia Charlottesville, (1965)
- [19.] J. Palis Jr.-W. de Melo. Introdução aos sistemas dinâmicos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, Brasil, (1978), Projeto Euclides.
- [20.] L.S. Pontrjaguín. Grupos Contínuos. (Traducido al español), Editorial MIR, Moscú, (1978).
- [21.] G.Reeb. Structures Feuilletées. Proc. of Diff. Top; Fol. and Gelfand-Fuks Cohom. Lecture Notes in Math, vol. 652 (1978) pag. 104-113.
- [22.] E.D.Roxín. Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control, Tomo I, Editorial Universitaria de Buenos Aires, (1968).

- [23.] I.M. Singer-J.A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer-Verlag, NEW YORK, Heidelberg, Berlin, (1967).
- [24.] J. Sotomayor, Lições de equações diferenciais ordinárias, Institute de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, (1979), Projeto Euclides.
- [25.] O. Valdivia. Introducción a la Topología Diferencial, Universidad de Panamá, (1980).
- [26.] O. Valdivia. Sobre Foliaciones del Plano, prepublicación, conferencias dictadas en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, (1979).
- [27.] O. Valdivia. Metodología de la Investigación Matemática, Universidad de Panamá, (1981).
- [28.] F.W. Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman and Company, London, (1971).
- [29.] T. Wazewski. Sur l'équation  
 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ , Mathematica, vol. 8, (1934),  
pag. 103-116 y vol. 9 pag. 179-182.

**APENDICE**

(\*) Un ejemplo desarrollado de grupo de Lie.

El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  de todas las matrices  $n \times n$  no singulares es un grupo de Lie de dimensión  $n^2$ .

En efecto:

Sea la aplicación  $f: M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  definida por

$$f(a_{ij}) = (a_{1_1}, \dots, a_{1_n}; a_{2_1}, \dots, a_{2_n}; \dots; a_{n_1}, \dots, a_{n_n})$$

Es claro que  $f$  es una biyección.

Como  $\mathbb{R}^{n^2}$  es una variedad diferenciable, consideramos en  $M(n, \mathbb{R})$  la estructura diferenciable tal que  $f$  sea un difeomorfismo.

Además, como la función determinante,

$$\det: M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es continua, se tiene que  $GL(n, \mathbb{R})$  es un subconjunto abierto de  $M(n, \mathbb{R})$ .

Luego  $GL(n, \mathbb{R})$  es una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Sea ahora  $M$  una variedad diferenciable y sea

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \text{ la aplicación } a_{ij}: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto a_{ij}(t)$$

Se tiene entonces la aplicación  $\psi: M \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$

definida por  $t \longmapsto (a_{ij}(t))$

Observación: Es claro que  $\varphi$  es  $C^\infty$  - diferenciable si y solo si cada función  $a_{ij}(t)$  es  $C^\infty$  -diferenciable.

Sean  $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  dos endomorfismos y  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  ;  $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  sus correspondientes matrices.

Luego  $\beta \circ \alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es un endomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ , cuya matriz  $(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  es el producto de las matrices

$$(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{y} \quad (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad ; \quad \text{donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (*)$$

De la observación anterior y de la fórmula (\*) se sigue que el producto de matrices

$$(a_{ij}(t)) \cdot (b_{ij}(t)) = (c_{ij}(t))$$

es una función diferenciable de clase  $C^\infty$

Además si  $(a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in GL(n, \mathbb{R})$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , los coeficientes  $b_{ij}(t)$  de la matriz inversa  $(a_{ij}(t))^{-1}_{1 \leq i, j \leq n}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$

Por la observación anterior la matriz

$$(a_{ij}(t))^{-1}$$

es una función diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Luego las aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) \\ ((a_{ij}), (b_{ij})) & \longmapsto & (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) \\ GL(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) \\ (a_{ij}) & \longmapsto & (a_{ij})^{-1} \end{array}$$

Son diferenciables de clase  $C^\infty$ .

(\*\*) Demostración de que:  $G^+$ , conjunto de los automorfismos crecientes de  $\mathbb{R}$  es un subconjunto cerrado de  $G$ , conjunto de los automorfismos de  $\mathbb{R}$ .

En efecto:

Sea  $f \in \overline{G^+}$ .

Luego existe una sucesión,  $\{f_n\}$  de homeomorfismos crecientes de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Esto significa que;

$$\forall K \text{ compacto, } K \subset \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \geq N \text{ implica } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \\ \forall x \in K.$$

Por demostrar;  $f$  es creciente; es decir

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, x \leq x' \text{ se tiene que } f(x) \leq f(x').$$

Sean  $x, x' \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq x'$ . Como  $\forall n, f_n$  es creciente;

$$\text{entonces } \forall n, f_n(x) \leq f_n(x') \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x') \\ \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

Luego  $f \in G^+$ .

Por consiguiente  $G^+ = \overline{G^+}$