UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POST GRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

EL METODO DE LIAPUNOV - SCHMIDT

POR

OCTAVIO JOFFRE MATOS S.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA.

UNIVERSIDAD DE PANAMA

ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, ______________________

Aprobado por:

Director de Tesis ______________________
Mario Zuluaga U., Ph D.

Miembro del Jurado ______________________
Elmir Carvalho, M.Sc.

Miembro del Jurado ______________________
José Del R. Garrido., Ph D.

Fecha ______________________

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi esposa Querube, mis hijos Octavio Jofre, Raúl Fernando y a mi madre Cecilia. Estas personas han sido mi estimulo durante los años de estudio.

AGRADECIMIENTO

Quiero dejar escrito mi eterno agradecimiento al profesor y amigo Dr. Mario Zuluaga Uribe por el gran apoyo y amistad que me ha brindado. Con sus consejos y asesorias hemos culminado con el objetivo trazado.

CONTENIDO

INTRODUCCION

El tercer programa de Maestría en Matemática Pura se propuso impulsar las áreas de Algebra y Ecuaciónes Diferenciales. Aunque era la primera vez que se dirigian trabajos de graduación en estas áreas, me incline hacia las ecuaciones diferenciales por su gran variedad de aplicaciones.

En este trabajo estudiamos las soluciones de la Ecuación Diferencial Parcial Eliptica

$$\triangle U + g(x,u) = 0 \quad (I)$$

En $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $u(x) = 0$ en la frontera de Ω , Ω una región acotada.

Utilizando algunos métodos variacionales encontramos soluciones de la ecuación (I). Una de las técnicas de gran utilidad en el estudio de las soluciones de las ecuaciones Diferenciales, es el método de Liapunov-Schmidt.

Una parte de este trabajo lo dedicamos al estudio de esta técnica, de aquí el nombre de la tesis.

Este trabajo se ha dividido en dos capitulos. En el Primer Capitulo presentamos la relación existente entre las soluciones de la Ecuación Diferencial (I) y los puntos criticos de un funcional definido sobre un espacio de Hilbert real.

Luego estudiamos los puntos criticos de funcionales con el concepto de Semi-continuidad débil y el principio del Mini Max., en ambos casos presentamos condicioness para la existencia de soluciones de la Ecuación Diferencial (I).

En el Segundo Capitulo nos dedicamos a trabajar con la técnica de Liapunov-Schmidt.

Al inicio hacemos una descripción de la técnica, después presentamos algunos teoremas de ecuaciones diferenciales, donde la demostración esta basada en el método de Liapunov-Schmidt.

En este capitulo presentamos condiciones para la solución de la ecuación (I), además presentamos ciertos teoremas de puntos fijos y difeomorfismo global, ya que tienen una gran utilidad en la teoría de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Finalizamos el trabajo con el estudio de las soluciones periodicas de la ecuación diferencial

$$x''(t) + f(x(t)) = p(t).$$

CAPITULO I

METODOS VARIACIONALES

I.1. PROBLEMAS ABORDABLES MEDIANTE METODOS VARIACIONALES.

El estudio de la ecuación

$$f(x) = 0 \qquad \text{(I)}$$

Siendo f una función no lineal, definida en cierto subconjunto de un espacio de funciones y con valores en otro espacio de funciones constituye la teoría conocida como Análisis Funcional no Lineal.

Consideremos H un expacio de Hilbert real y sea

$J : H \longrightarrow R$ una función de clase C^1; o sea que para cada $u \in H$ existe una funcional lineal continua,

$$\ell(u) : H \longrightarrow R \quad \text{tal que:}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{J(u+rv)-J(u)}{r} = \ell(u)(v) \quad \forall\, v \in H.$$

y tal que $\ell(u)$ depende continuamente de u.

Denotemos mediante $\nabla J(u)$ al único elemento de H que satisface:

$$\ell(u)(v) = \langle \nabla J(u), v \rangle \qquad \text{para todo } v \in H,$$

donde $\langle \;,\; \rangle$ es el producto interno en H. Notemos que ∇J es una función en H con valores en H.

El cálculo variacional, en Análisis Funcional no Lineal estudia la ecuación (I) en el caso particular que f tome la forma ∇J. Así pues, encontrar las soluciones de (I) se reduce a encontrar los puntos críticos de J.

La ecuación (I) comprende diferentes tipos de problemas que aparecen en las Ecuaciones Diferenciales e Integrales. Para concretar, estamos interesados en la existencia de soluciones del problema

$$\triangle u + g(x,u) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{II}$$

Con $u(x) = 0$ en $\partial\Omega$ donde $\Omega \subset R^n$ es una región acotada, $\partial\Omega$ la frontera y

$$g: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad y \quad \triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} .$$

La ecuación II es conocida como una Ecuación Eliptica no lineal con condiciones de frontera y las técnicas que usaremos para resolver esta ecuación seran los métodos variacionales.

Más adelante nos dedicaresmos a dar condiciones para encontrar soluciones de (II).

Pasaremos a dar ejemplos de algunas ecuaciones reducibles a la forma (I).

Ejemplo # 1 Sea Ω una región acotada en $\mathbb{R}^n$ y $C'_o(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C' tales que la adherencia de $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ esta contenido en Ω .

En $C'_o(\Omega)$ definimos

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u.v + \sum_{i=1}^{n} (\partial u/\partial x_i)(\partial v/\partial x_i)$$

se puede comprobar que $\langle \, , \rangle$ define un producto interno en C'_o . Al espacio de Hilbert resultante de completar $(C'_o, \langle \, , \rangle)$ lo denotaremos $\overset{o}{H}{}'(\Omega)$.

Si $\{u_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $(C'_o, \langle \, , \rangle)$ entonces $\{u_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\Omega)$, lo mismo que

$\{\partial u_k / \partial x_i\}$ para todo $i = 1,2, \ldots, n,$.

De aqui tenemos que cada elemento de $\overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega)$ lo podemos identificar con una función $u \in L_2(\Omega)$, para las cuales existen funciones $v_i, u_i \in L_2(\Omega)$ que se comportan como derivadas parciales de u en el sentido que

$$\int_{\Omega} u_i v = - \int_{\Omega} u v_i \quad i=1,2,\ldots n \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega).$$

Así usaremos la notación: $v_i, u_i = \partial u / \partial x_i$ donde v_i, u_i es llamada derivada generalizada de u,v respectivamente con respecto a x_i .

Sea
$$g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,u) \longrightarrow g(x,u)$$

Donde g es una función medible en x para cada u fijo y continua en u para cada x fijo.

El problema de Dirichlet que vamos a estudiar consiste en encontrar una función

$$u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$\Delta u(x) + g(x,u(x)) = 0 \quad x \in \Omega \qquad u(x) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad ,$$

Diremos que $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega)$ es una solución débil de (II) si para todo $v \in \overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega)$ se tiene:

$$\int_{\Omega} \left[(\nabla u(x), \nabla v(x)) - g(x,u(x))v(x) \right] dx = 0 \qquad \text{(III)}$$

Donde (,) denota el producto usual en $\mathbb{R}^n$ y

$$\nabla u(x) = ((\partial u / \partial x_1)(x), \ldots, (\partial u / \partial x_n)(x)).$$

Se puede verificar que si u es una solución de II entonces es una solución débil de II.

En este capítulo solo encontraremos soluciones débiles de II.

Sea $J : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J(u) = \int_\Omega \left[(\nabla u(x), \nabla v(x))/2 - G(x,u(x)) \right] dx$$

donde $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds.$

si g satisface una condición de crecimiento de la forma

$$|g(x,u)| \leq A|u| + B \quad A,B \in \mathbb{R}$$

(ver Critical Point Theory A. Castro A.C. Lazer),
por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se comprueba que

$$\lim_{r \to o} \frac{J(u+rv)-J(u)}{r} = (III)$$

Para todo $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ y todo $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Luego J es un funcional DIFERENCIABLE.

Luego J es una solución débil de II si y sólo si $\nabla J(u) = 0$. Entonces encontrar las soluciones débiles de I es equivalente a resolver la ecuación (I) con $f = \nabla J$.

Ejemplo # 2. Un Problema de Newman

Sean Ω , $\partial\Omega$, $\triangle$ y g como en el Ejemplo # 1.
El problema de Newman consiste en encontrar una función

$$u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$\triangle u(x) + g(x,u(x)) = 0 \quad x \in \Omega \qquad (IV)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0 \quad \text{en } x \in \partial\Omega$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección normal a $\partial\Omega$.

Ahora, se introduce el concepto de solución débil de IV. Para tal efecto es necesario definir el espacio $H'(\Omega)$. Consideremos el espacio prehilbertiano cuyos elementos son las funciones

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C' y tales que $u \in L_2(\Omega)$ y $(\partial u/\partial x_i) \in L_2(\Omega)$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

El producto interno de este espacio prehilbertiano es

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega} \left[u.v + \sum \, u/\partial x \, (\partial v/\partial x_i) \right]$$

$H'(\Omega)$ es el completado de este espacio prehilbertiano.

Se dice que $u \in H'(\Omega)$ es una solución débil de IV si para todo $v \in H'(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left[(\nabla u, \nabla v) - g(x,u)v \right] = 0$$

Se puede comprobar que toda solución de IV es también solución débil. [ver 4]

Definiendo $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[(\nabla u, \nabla u)/2 - G(x,u) \right]$$

donde $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$. Se ve que

$\nabla J(u) = 0$ si y solamente si u es solución débil de IV.

Así pues encontrar soluciones débiles de IV es equivalente a resolver (I) con $f = \nabla J$.

I.2. SEMI CONTINUIDAD DEBIL

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua sobre cualquier conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en D. Si además f es diferencial con r,s puntos máximos y mínimos respectivamente y estos se encuentran en $\overset{\circ}{D}$ entonces $f'(r) = f'(s) = 0$. La primera afirmación deja de ser cierta si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, donde la dimensión de E es infinita.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $E = \ell^2(\mathbb{R})$ sea $\{x_n\} \subset E$ tal que $\|x_n\|=1$ y $\|x_n - x_m\| \geq 1$ para $n \neq m$. Definimos

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ asi}$$

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = x_n \\ n - 2n\|x-x_n\| & \text{si } \|x-x_n\| < 1/2 \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Se puede comprobar que f es continua en E, pero en la bola cerrada y acotada $\overline{B}(0, 3/2)$ f no alcanza un máximo, puesto que por ejemplo $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$

Este ejemplo pone en evidencia las diferencias existentes entre dimensión finita e infinita. Esta diferencia se produce porque en $\ell_2(\mathbb{R})$ la bola cerrada $\overline{B}(0,r)$ no es compacta.

Es claro que si f es diferenciable en un punto u donde f alcanza un máximo o un mínimo, entonces $f'(u) = 0$. Es por esto la importancia de tener criterios para decidir cuando f tiene máximos y mínimos.

<u>Definición:</u> Sea E un espacio de Banach real y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es debilmente inferiormente semi continua en x_o si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \longrightarrow x_o$ entonces $f(x_o) \leq \underline{\lim}\, f(x_n)$. Denotaremos debilmente inferiormente semi continua D.I.S.C.

Si $f(x_o) \geq \overline{\lim}\, f(x_n)$ diremos que f es debilmente superiormente semi continua y se simboliza D.S.S.C.

Ejemplo: Sea H un espacio de Hilbert. Sea $A : H \longrightarrow H$ un operador lineal completamente continuo (envia conjuntos acotados en relativamente compactos). Entonces el funcional

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle \qquad \text{es D.I.S.C.}$$

El símbolo $\langle\ ,\ \rangle$ indica el producto interno en H.

Sea $x_n \longrightarrow x_o$ entonces

$$|f(x_n)-f(x_o| = | \langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax_o, x_o\rangle |$$

$$| \langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax_o, x_n\rangle |+| \langle Ax_o, x_n\rangle - \langle Ax_o, x_o\rangle |$$

pero

$$| \langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax_o, x_n\rangle | \leq \|x_n\| \, \|A(x_n - x_o\| .$$

Como $\{x_n\}$ es acotada y $Ax_n \longrightarrow Ax_o$, (A es completamente continuo) entonces el primer sumando del miembro derecho tiende a cero puesto que $x_n \longrightarrow x_o$. Por lo tanto f es debilmente semi continua y en particular D.I.S.C.

Una condición suficiente para que f sea D.I.S.C. es esta:

<u>Teorema # 1.</u> Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in E$. E un espacio de Banach. Supongamos que para cada $x \in \overline{B}(x_o, r)$

(para algún $r > 0$)

$$f(x)-f(x_o) \geq f'(x_o)(x-x_o) \quad \text{entonces } f \text{ es D.I.S.C. en } x_o .$$

<u>Demostración:</u> Sea $\{x_n\} \subset \bar{B}(x_o,r)$ tal que $x_n \longrightarrow x_o$.

Como $f'(x_o)$ es un funcional lineal continua entonces

$$\lim_{n\to\infty} f'(x\ )(x_n-x_o) = \lim_{n\to\infty} f'(x_o)(x_n-x_o) = 0$$

como $$f(x_n) \geq f'(x_o)(x-x_o) + f(x_o) \quad \text{entonces}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} f(x_o) = f(x_o|$$

Luego f es D.I.S.C. en x_o.

<u>Teorema # 2.</u> Sea E un espacio de Banach y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supongamos que f es dos veces diferenciable en $\bar{B}(0,r)$ tal que

$$f''(x)(h,h) \geq 0$$

Entonces f es D.I.S.C. en $\bar{B}(0,r)$.

<u>Demostración:</u> Por el teorema del valor medio tenemos:

$$f(x) - f(x_o) = f'(x_o+t(x-x_o))\ (x-x_o)\ 0 \leq t \leq 1$$

Como

$$f(x)-f(x_o) = f'(x_o)(x-x_o)+f'(x_o+t(x-x_o))(x-x_o)-f'(x_o)(x-x_o)$$

$$= f'(x_o)(x-x_o)+f''(x_o+t(x-x_0))\ [x-x_o,\ x-x_o]$$

entonces de la hipotesis del teorema tenemos:

$f(x) - f(x_o) \geq f'(x_o)(x-x_o)$. Luego por el teorema 1

f es D.I.S.C en $\bar{B}(0,r)$.

Teorema # 3. Sea $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$. f debilmente semi continuo. H un espacio de Hilbert. Sea $A \subset H$ cerrado acotado y convexo. Sea $x_o \in \mathring{A}$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in \partial A$ tal que

$$\| f(x_o) - f(a) \| < \varepsilon$$

Demostración: Sea $\{x_n\} \subset H$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $x_n \rightharpoonup 0$ (converge debilmente). Consideremos las rectas $x_o + tx_n$ $t \geq 0$ y sea $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $x_o + t_n x_n \in \partial A$. Como A es acotado entonces $\{t_n\}$ es acotado por lo tanto $t_n x_n \rightharpoonup 0$ (debilmente). Como f es debilmente continua $f(x_o + t_n x_n) \rightharpoonup f(x_o)$. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = x_o + t_n x_n \in \partial A$ que cumple

$$|f(x_o) - f(a)| < \varepsilon$$

Puntos extremos de un Funcional.

Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ E un espacio de Banach. Decimos que $x_o \in E$ es un punto extremo de f si existe una vecindad de x_o $\mathcal{V}(x_o)$ tal que:

$$f(x) \geq f(x_o) \quad o \quad f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in \mathcal{V}(x_o).$$

Teorema # 4. Sea $f : E \longrightarrow R$ diferenciable. Si x_o es un punto extremo de f entonces $f'(x_o) = 0$. [ver 6]

<u>Teorema # 5.</u> Sea E un espacio de Banach reflexivo y f D.I.S.C. Sea $A \subset E$ cerrado y acotado. Entonces f alcanza en A un mínimo.

[Ver 6]

<u>Teorema # 6.</u> Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, E un espacio de Banach Reflexivo. Supongase que f es dos veces diferenciable y satisface:

$$f''(x)\,(h,h) \geq \|h\| \; \gamma(\|h\|) \qquad *$$

Donde γ es una función no negativa definida para $t \geqslant 0$ tal que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \gamma(t) = +\infty$$

Entonces f tiene un mínimo relativo.

<u>Demostración:</u> Por el Teorema # 2 f es D.I.S.C en cada bola de E. Como E es reflexivo cada $\overline{B}(x,r)$ es debilmente compacta. Luego por Teorema # 5 f alcanza un mínimo en $\overline{B}(x,r)$.

Veamos que existe $B(0,R)$ tal que el mínimo de f se encuentra en su interior. En dicho punto f' es cero. Consideremos

$$\frac{d}{dt} f(tx) = f'(tx)(x)$$

Integrando de 0 a 1 tenemos

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)(x)dt$$

Analogamente

$$f'(x) - f'(0)(x) = \int_0^1 f''(tx)(x,x)dt \qquad **$$

Luego de * y ** obtenemos

$$f'(x)(x) > f'(0)(x) + \|x\| \, \gamma(\|x\|) \qquad ***$$

Por consiguiente

$$\int_0^1 f'(tx)(tx)\,\frac{1}{t}\,dt = f(x) - f(0), \quad \text{para} \quad \|x\| = R$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &> f'(0)x + \|x\| \int_0^1 \gamma(t\|x\|)dt \\ &= f'(0)(x) + R \int_0^1 (t\,R)dt \geq \\ & R(-\|f'(0)\| + \int_0^1 \gamma(tR)dt) \end{aligned}$$

como $\gamma(tR) \longrightarrow \infty$ si $R \longrightarrow \infty$ entonces para R suficientemente grande $f(x) > f(0)$ en $\|x\| = R$. Esto dice que el mínimo de f en $\overline{B}(0,R)$ se encuentra en $B(0,R)$. El teorema queda demostrado.

<u>Teorema # 7.</u> Sea $F : H \longrightarrow H$ un operador potencial ($f'(x) = F(x)$) tal que $\forall x,h \in H$

$$* \qquad \langle F'(x)(h),h\rangle \geq C\|h\|^2 \quad \text{para algun } C > 0.$$

Entonces cualquiera que sea $y \in H$ la ecuación

$$F(x) = y \quad \text{tiene solución.}$$

<u>Demostración:</u> Sea $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = F(x)$ suponiendo que $f(0) = 0$ tenemos que

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(tx),x\rangle \, dt$$

Consideremos $\varphi(x) = f(x) - \langle x,y\rangle$ luego

$$\varphi'(x) = f'(x) - y = F(x) - y$$

$$\varphi''(x)(h,h) = \langle F'(x)h,h\rangle$$

De la hipotesis * tenemos

$$\varphi''(x)(h,h) \geq C\|h\|^2$$ del Teorema # 6

se tiene existe $x_o \in H$ tal que $\varphi'(x_o) = 0$ o sea $F(x_o) = y$.

Hemos presentado condiciones para encontrar soluciones al problema del tipo II.

I.3. EL LEMA DE LA DEFORMACION Y EL PRINCIPIO DEL MINIMAX

En esta sección E denota un espacio de Banach real, separable y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C'.

Para cada $u \in E$ denotaremos $f'(u)$ la diferencial de f en u.

$E^* = \{u \in E;\ f'(u) \neq 0\}$

Para abordar el teorema principal de esta sección presentaremos los siguientes Lemas.

<u>Lema 1</u>: Si $f : E^* \longrightarrow E$ es una función localmente Lipschitziana entonces:

a) Para cada $x \in E^*$ existe un intervalo $(t^-(x), t^+(x)) \subset \mathbb{R}$ y una función $\varphi(x, \ ) : (t^-(x), t^+(x)) \longrightarrow E^*$ tal que

$$\varphi(x,0) = 0 \quad y \quad \varphi'(x,t) = f(\varphi(x,t))$$

b) Si $t^-(x) \neq -\infty$ (respectivamente $t^+(x) \neq +\infty$) entonces $\varphi(x,t)$ no tiene puntos límites en E^* cuando $t \longrightarrow t^-(x)$ (respectivamente $t \longrightarrow t^+(x)$)

c) El conjunto $\{(x,t)\ ;\ t^-(x) < t < t^+(x)\}$ es abierto en $E^* \times R$ y la función φ es continua. A la función φ se le llama el flujo definido por f.

[Para la demostración vease R. Palais, Lusternif-Schneirelman Theory on Banach Manifold. Topology 1966, 115-132.]

Lema 2: Si M es una variedad de Banach paracompacta y $\{u_\alpha , \alpha \in A\}$ es un recubrimiento abierto de M, entonces existe una partición de la unidad $\{\phi_\beta ; \beta \in B\}$ subordinado a un recubrimiento localmente finito de $\{u_\alpha , \alpha \in A\}$ donde todas las funciones ϕ_β son localmente Lipchitzianas.

[Para la demostración ver referencia del Lema 1.]

Definición. Sea $U \subset E$ y $g : U \longrightarrow E$ una función tal que

1) $\|g(x)\| \leq 2 \|f'(x)\| \quad \forall x \in U$

2) $f'(x)g(x) \geq \|f'(x)\|^2 \quad \forall x \in U.$

Entonces decimos que g es un seudo-gradiente de f en U. Observese que si E es un espacio de Hilbert entonces ∇f definido anteriormente es un seudo-gradiente de f.

Lema 3: Existe una función $w : E^* \longrightarrow E$ que es localmente Lipchitziana y también es un seudo-gradiente de f en E^*. Si f es par w puede ser escogida impar.

Demostración: [ver 1]

Definición: Diremos que f satisface la condición de Palais-Smale o simplemente la simbolizaremos P.S, si toda sucesión $\{u_n\} \subset E$ tal que $\{f(u_n)\}$ este acotada y

$f'(u_n) \longrightarrow 0$ tiene una subsucesión convergente.

Para la demostración del siguiente teorema conocido como "El Lema de la Deformación", el cual fue presentado por David Clark en su trabajo "A Variant of the Lusternick-Schnierelmann Theory" (1972), emplearemos los conjuntos

$$k = \{ x \in E \ ; \ f'(x) = 0 \}$$

$$k_c = \{ x \in E \ ; \ f'(x) = 0 \quad f(x) = c \}$$

$$f_c = \{ x \in E \ ; \ f(x) \leq c \}$$

Teorema # 8. [David Clark] . Supongamos que f satisface P-S. Sea $c \in R$ y U una vecindad de k_c, entonces existe d_o tal que si $d_o > d_1 > d > 0$, existe una función continua $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ que satisface:

1. $\eta(0,x) = x \quad \forall x \in E$
2. Para todo t $\eta(t,x) = x$ si $|f(x) - c| > d_1$
3. Para todo t $\eta(t,x)$ es un homeomorfismo de E sobre E.
4. $f(\eta(t,x)) \leq f(x)$ para todo $(t,x) \in [0,1] \times E$.
5. $f(\eta(1,x)) \leq c-d$ si $f(x) \leq c + d$ y $x \notin U$.
6. Si $k_c = \phi$ se puede tomar $U = \phi$
7. Si f es impar η es par en x.

Demostración: Consideremos el caso donde $k_c \neq \phi$. como f satisface P.S, k_c es compacto, luego U contiene una vecindad de k_c de la forma

$$U_\varepsilon = \{ x \in E \ ; \ d(x,k_c) < \varepsilon \} \qquad \varepsilon > 0$$

Como f satisface P.S obtenemos que existen $b > 0, d_o > 0$ tales que

$$\|f'(x)\| \geq b \quad \text{si} \quad x \in f_{c+d_1} - (f_{c-d_1}) \cup (U_{\varepsilon/2})$$

Suponiendo $\quad d_o \leq \min(b/4,\ b^2/4,\ b\varepsilon/12)$ *

Sean d y d_1. tales que

$$0 < d < d_1 \leq d_o \qquad \text{y definiendo}$$

$$g(x) = \frac{\text{dist}(x,A)}{\text{dist}(x,A) + \text{dist}(x,B)} \qquad \text{donde}$$

$$A = (E - f_{c+d_1}) \cup f_{c-d_1} \quad \text{y} \quad B = f_{c+d} - f_{c-d}$$

Se puede comprobar que g es Liptchiziana, par si f es par.

Además

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x \in A \quad g(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in B$$

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

Por el Lema 3 sabemos que existe $w : E^* \longrightarrow E$ que es seudo gradiente de f, localmente Lipchitziana. Extendiendo w a E de la siguiente manera $w(x) = 0$ si $f'(x) = 0$. Luego w extendido a E es un seudo gradiente de f en E.

Del Lema 3 se obtiene que si f es par w puede suponerse que es impar. Sean h y v las funciones definidas así

$$h(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{1}{s} & s > 1 \end{cases}$$

$$v(x) = g(x) \quad h(\|w(x)\|)w(x)$$

Claramente la función v es acotada impar si f es par, localmente lipchitziana en E^*. Sea η el flujo generado por v (Lema 1). Extendemos η a $[0,1] \times E$ definiendo

$$\eta_b(t,x) = x \quad \text{si} \quad w(x) = 0.$$

Para cada $x \in E^*$ sean

$$\alpha(t) = f(\eta_b(t,x))$$

$$\beta(t) = \|\eta_b(t,x) - x\|$$

Queremos probar que para cada $x \in f_{c+d} - U_\varepsilon$

$$t^+(x) > 1 \quad \text{y} \quad \alpha(1) < c - d$$

Es inmediato que las desigualdades anteriores se obtienen si $x \in f_{c-d_1}$. Es suficiente considerar el caso donde

$$x \in D = f_{c+d} - f_{c-d_1} - U_\varepsilon$$

Sea $x \in D$ por la definición de seudo gradiente tenemos

$$\alpha'(t) = (f'(\eta_b(t,x))\ v\ (\eta_b(t,x)))$$

$$- \frac{1}{2}\|f'(\eta_b(t,x))\|\|v(\eta_b(t,x))\|$$

como $v = 0$ en f_{c-d_1} para $0 \leq t \leq t^+(x)$ tenemos

$$0 \leq \alpha(0) - \alpha(t) \leq d_1 - d < 2d_1 \qquad **$$

Sea $T = \min(t^+(x), \inf\{t \in [0,t^+(x)] \ ; \eta_b(tx) \in U_{\varepsilon/2}\})$

Luego obtenemos

$$\alpha(0) - \alpha(t) \geq \frac{1}{2}\int_0^t \|f'(\eta_b(s,x))\|\|v(\eta_b(s,x))\|ds$$

$$\geq \frac{1}{2} b \left\|\int_0^t v(\eta_b(s,x))ds\right\| \geq \frac{1}{2} b\beta(t)$$

donde por *, y ** $\beta(t) < \varepsilon/3$ para $0 \leq t < T$.

Luego por la continuidad de η_b en t $T=t^+(x)$ y

$$\eta_b(t,x) \notin U_{\varepsilon/2} \quad \text{si} \quad x \in D \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq t^+(x).$$

Comprobemos $t^+(x) = \infty$ si $x \in D$.

Supongamos lo contrario, sea pues $x_0 \in D$ tal que

$t^+(x) < \infty$. Sea $\{t_j\}$ una sucesión de números reales que tiende a $t^+(x_o)$ por la izquierda. Como v es acotada $\{\eta_b(t_j, x_o)\}$ es una sucesión de Cauchy en E*, como $\beta(t_j) < \varepsilon/3$ el límite de tal sucesión esta en E*, pero esto contradice el Lema 1. Luego para $x \in D$ tenemos

$$t^+(x) = \infty \quad \text{y luego} \quad t^+(x) > 1$$

Para verificar $\alpha(1) < c-d$ tenemos que

$$\alpha'(t) \leq -\frac{1}{2}\|f'(\eta_b(t,x))\| \, \|v(\eta_b(t,x))\|$$

Como $\|f'(x)\| \geq b$ si $x \in f_{c+d_1} - \left[(f_{c-d_1}) \cup (u_{\varepsilon/2})\right]$

y además $g(x) = 0$ si $x \in A$ y $g(x) = 1$ si $x \in B$

Donde $0 \leq g(x) \leq 1$ y como $d_o \leq \min(b/4,\ b^2/4,\ b\varepsilon/12)$

Se obtiene

$$\alpha(1) < c - d$$

Como η_b es el flujo generado por V de la parte a del Lema 1 obtenemos $\eta_b(0,x) = x \quad \forall x \in E$.

Como v es localmente Lipchitziana, del teorema de unicidad para la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\,\varphi(x,t)}{dt} = v(\varphi(x,t)) \quad \text{obtenemos que}$$

$\eta_b(t,\ )$ es continua e inyectiva. Considerando -v en lugar de v tenemos que si $G(t,c)$ es el flujo generado por -v entonces

$G(t, \eta_b(t,x) = x$ lo cual comprueba 3

Como g y h son funciones no negativas y w es el seudo gradiente de f obtenemos $f(\eta_b(t,x))$ es una función no creciente en t. Luego $f(\eta_b(t,x)) \leq f(x)$ lo cual demuestra 4.

Tomando $\alpha(1) < c-d$ se obtiene 5.

La parte 6 y 7 se pueden hacer tomando modificaciones de esta demostración.

El siguiente teorema es una versión infinito dimensional del teorema de Rolle.

Teorema # 9. Sea E un espacio de Banach y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C' que satisface P-S si existen $x_o, x_1 \in E$ y $r > 0$ tales que

1. $b = \inf\left\{ f(y) : |y-x_o| = r\right\} > f(x_1)$
2. $|x_o-x_1| > r \qquad f(x_o) < b$

Entonces f tiene un punto crítico de minimax.

Demostración: Sea $\sum = \left\{ \sigma : [0,1] \longrightarrow E, \text{ continua con } \sigma(0)=x_o \text{ y } \sigma(1)=x_1\right\}$

como para cada $\sigma \in \sum$ $\sigma[0,1]$, es un compacto entonces f toma un valor máximo en $[0,1]$.

Sea

$$c = \inf_{\sigma\in\sum} \max_{0\leq t\leq 1} f(\sigma(t)) \qquad *$$

por 1 y 2 $\qquad c \geq b > f(x_1)$

Queremos demostrar que existe $\bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = c$ y $f'(\bar{x}) = 0$.

Consideremos lo contrario, por el Lema de la deformación podemos encontrar números $d_1 > d > 0$ y una función

$$\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E \text{ tal que}$$

$$d_1 < \min\left\{ \frac{b - f(x_o)}{2} , \frac{b - f(x_1)}{2}\right\}$$

$$\eta_b(0,x) = x \quad \eta_b(1, f_{c+d}) \subset f_{c-d} \quad \text{y}$$

$$\eta_b(t,x) = x \quad \text{si} \quad x \in f_{c-d_1}$$

De * podemos encontrar $\sigma \in \Sigma$ tal que

$\max \left\{ f(\sigma(t)) : 0 \leq t \leq 1 \right\} < c + d.$ Como

$c \geq b > f(x_1)$ y de las propiedades de d_1 tenemos

$$f(\sigma(0)) = f(x_o) < c - d_1 \quad \text{y}$$

$$f(\sigma(1)) = f(x_1) < c - d_1 \quad \text{luego}$$

$$\eta_b(t,x_o) = x_o \quad \text{y} \quad \eta_b(t,x_1) = x_1 \quad \forall t \in [0,1]$$

Si consideramos $\tilde{\sigma} : [0,1] \longrightarrow E$ definida por

$$\tilde{\sigma}(t) = \eta_b(1, \sigma(t)) \quad \text{entonces} \quad \tilde{\sigma} \in \Sigma$$

como $\sigma([0,1]) \subset f_{c+d}$, $f(\tilde{\sigma}(t)) = f(\eta_b(1, \sigma(t))) \leq c-d$ para todo $t \in [0,1]$.

Luego

$\max \left\{ f(\tilde{\sigma}(t)) ; 0 \leq t \leq 1 \right\} \leq c-d$ lo cual contradice

$$c = \inf_{\sigma \in \Sigma} \max_{0 \leq t \leq 1} f(\sigma(t))$$

Esta contradicción comprueba que existe $\bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = c$ y $f'(x) = 0$. Luego el teorema esta demostrado.

Consideremos X, Y dos subespacios cerrados de E tales que $E = X \oplus Y$. Bajo esta condición presentaremos el siguiente teorema.

<u>Teorema # 10.</u> Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C' que satisface (P-S). Si existen $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ tales que:

1. $b_1 \equiv \inf \left\{ f(y) ; y \in Y, \| y \| = r_2 \right.$

$$c_1 \equiv \text{Sup}\left\{ f(x),\ x \in X,\ \|x\| \leq r_1 \right\}$$

2. $$b_2 \equiv \text{Sup}\left\{ f(x),\ x \in X,\ \|x\| = r_1 \right\}$$

$$c_2 \equiv \text{Inf}\left\{ f(Y);\ y \in Y\ \|y\| \leq r_2 \right\}$$

Entonces f tiene un punto crítico.

Teorema # 11. Sea E un espacio de Banach real separable y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C' que satisface (P-S). Si f esta acotada inferiormente entonces f tiene un punto mínimo.

Demostración: Sea $c = \inf\{f(y);\ y \in Y\}$

Si no existiera $y \in E$ tal que $f(y) = c$ por el teorema # 8 existirian

$\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ continua y $d > 0$ tales que $\eta(1, f_{c+d}) \leq f_{c-d}$, pero esto es una contradicción a la definición de c, ya que $f_{c+d} \neq \phi$ y $f_{c-d} = \phi$. Luego el teorema queda demostrado.

I.4. APLICACIONES DE LOS PRINCIPIOS DE MINIMAX.

En esta sección demostraremos la existencia de soluciones débiles del problema

$$\triangle u(x) + g(x,u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega \quad \subset \mathbb{R}^n$$
$$u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega$$

Antes de demostrar estos teoremas es necesario presentar algunos conceptos sobre "Operadores Compactos" y el "Lema de Rellich".

Operadores Compactos

<u>Definición:</u> Sean E,F dos espacios de Banach y $k : E \longrightarrow F$ un operador no necesariamente lineal. Decimos que k es un operador compacto si toda sucesión $\{k(u_n)\}$ tal que $\{u_n\}$ sea acotada, tiene una subsucesión convergente

<u>Definición:</u> Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $\langle , \rangle$ el producto interno en H. Sea $\bar{k} : H \longrightarrow H$ un operador lineal, decimos que $\bar{k}$ es auto adjunto si:

$$\langle \bar{k}(x), y \rangle = \langle x, \bar{k}(y) \rangle \quad \forall x,y \in H.$$

<u>Teorema # 12.</u> [Lema de Relich] La inclusión $i : H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ es un operador compacto. En particular la inclusión de $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ en $L_2(\Omega)$ es un operador compacto.

[Teorema de Sobolev]

$$\text{Si} \quad 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} \qquad \text{enotnces} \quad H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$$

Demostración; Ver "Sobolev Spaces" R Adams. Teoremas 5.4 y 5.6.

Teorema # 13. Existe un conjunto ortonormal completo $\{\varphi_k ; k = 1,2,\dots\}$ en $L_2(\Omega)$ tal que φ_k es una solución débil de $\Delta u + \lambda_k u = 0$ en Ω, $u(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$. La sucesión $\{\lambda_k\}$ tiende a $+\infty$. Asi podemos suponer que:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots .$$

Demostración: Ver Análisis Funcional no Lineal y Métodos Variacionales. Alfonso Castro. 1980.

Lema 4. Sea $g(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible en x para cada u fija y continua en x para cada u fija. Si existen números reales a,b tales que $|g(x,u)| \leq a|u|^{p/q} + b$ entonces la función $u(x) \longrightarrow g(x,u(x))$ es una función continua con dominio en todo $L_p(\Omega)$ y rango en todo $L_q(\Omega)$.

Demostración: Ver variational Methods for the Study of Nonlinears Operators. M.M. Vainberg. Cap. 6.

Este Lema fue demostrado originalmente por Nyemitsky. Para los teoremas 14 y 15 consideremos que g tiene la forma $g(x,u) = f(u) - p(x)$ con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $p \in L_2(\Omega)$

Teorema # 14. Si $\lim\limits_{|u|\to\infty} \operatorname{Sup}(\frac{f(u)}{(u)}) < \lambda_1$, y para $n \geq 2$

Existen números reales a,b y S tales que

$$1 \leq S < \frac{n+2}{n-2} \quad y \quad |f(u)| \leq a|u|^S + b$$

Entonces el problema

$\triangle u(x) + g(x,u(x)) = 0$ tiene por lo menos

una solución débil.

<u>Demostración:</u> Primero veamos que J es un funcional de clase C'. (J definido en pág. 2)

Como

(1) $$\langle J(u), v\rangle_1 = \langle u,v\rangle_1 + \langle \hat{f}(u), v\rangle_1 + \int pv$$

Donde f (u) es el ´único elemento de $\overset{o}{H}'(\Omega)$ tal que

(2) $$\langle f(u), v\rangle_1 = - \int f(u)\, v$$

De la expresión (1) vemos que es suficiente probar que $\hat{f}$ es un operador continuo.

Supongamos que $u_k \longrightarrow u$ en $\overset{o}{H}'(\Omega)$ luego por el Teorema # 12 $u_k \longrightarrow u$ en $L_s(\Omega)$. Luego por el Lema 4 $f(u_k) \longrightarrow f(u)$ en $L_{2n/n+2}(\Omega)$.

De la expresión (2) $\int (f(u_k) - f(u))v \longrightarrow 0$

Luego J es de clase C' y en particular $\hat{f}$ es continua.

Por el Teorema # 12 la inclusión de $\overset{o}{H}'(\Omega)$ en $L_s(\Omega)$ es compacta se puede comprobar con argumento parecido al siguiente que f es un operador compacto: si $s = \frac{n+2}{n-2}$ f no es compacto puesto que $iH_o^2 \hookrightarrow L_{\frac{2n}{n+2}}$ no es compacto $iH_o^1 \hookrightarrow L^p$. $p < \frac{2n}{n+2}$ si es compacto.

Ahora veremos que J esta acotado inferiormente.

Como $\lim \operatorname{Sup}(\frac{f(u)}{u}) \equiv \wp < \lambda_1$, existe $M > 0$ tal que

si $|u| \geq M$ $f(u)/u \leq \frac{\lambda_1 + \wp}{2}$ luego para $u \geq 0$

$$(3)\ F(u) \equiv \int_0^u f(s)ds \leq \frac{(\lambda_1+\gamma)u^2}{4-(\lambda_1+\gamma)\frac{m^2}{4}} - \int_0^M (\lambda_1+\gamma)(\tfrac{s}{2})ds - \int_0^M f(s)ds$$

$$\equiv \frac{(\lambda_1+\gamma)u^2}{4} + k_1$$

En forma similar obtenemos una expresión para $u \leq 0$. Resumiento estas dos expresiones obtenemos la existencia de $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(4) \qquad F(u) \leq \frac{(\lambda_1+\gamma)u^2}{4} + k \qquad u \in \mathbb{R}$$

luego

$$J(u) \geq \|u\|_1^2 - k \text{ medida } (\Omega) - \frac{\lambda_1\gamma}{4}\int u^2 - \|p\|_0 \|u\|_0$$

como $\int(\nabla u, \nabla u) \geq \lambda_1 \int u^2$ obtenemos

$$(5) \quad J(u) \geq (1-(\lambda_1+\gamma)/2\lambda_1)\|u\|_1^2/2 - k \text{ medida } (\Omega) - \|p\|_0 \|u\|_1/\sqrt{\lambda_1}$$

Luego J esta acotada inferiormente

Demostraremos que J satisface (P-S). Sea $\{u_n\} \subset \overset{\circ}{H}{}'(\Omega)$ tal que $\{J(u_n)\}$ este acotado y $\nabla J(u_n) \longrightarrow 0$.

De la expresión (5) tenemos que $\{u_n\}$ esta acotada . Como $\hat{f}$ es compacta existe una subsucesión $\{u_{nj}\}$ tal que $\hat{f}(u_{nj})$ converge.

De (2) tenemos que $\nabla J(u_{nj}) = u_{nj} + \hat{f}(u_{nj}) + \tilde{p} \rightarrow 0$

donde $\langle \tilde{p}, v \rangle = \int pv$ para toda $v \in \overset{\circ}{H}{}'(\Omega)$ entonces u_{nj} converge. Luego J satisface (P-S), como J es de clase C' y esta acotada inferiormente por el Teorema # 11 tenemos que J tiene un punto crítico/ Luego el teorema esta demostrado.

Teorema # 15. Si existe un entero positivo N tal que

$$\lambda_N < \min\left\{\lim_{u\to-\infty} \frac{f(u)}{u}, \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u}\right\}$$

$$\leq \max\left\{\lim_{u\to-\infty} \frac{f(u)}{u}, \lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u}\right\} < \lambda_{n+1}$$

Entonces la ecuación II tiene por lo menos una solución débil.

Demostración: Denotaremos $\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = f'(\infty)$ y

$$\lim_{u\to-\infty} \frac{f(u)}{u} = f'(-\infty)$$

y supongamos que $f'(\infty) \geq f(-\infty)$. Es claro que la hipotesis nos indica que J es de clase C'. Ahora comprobaremos que f satisface una condición de crecimiento de la forma

$$|f(u)| < a|u| + b$$

Esto se puede comprobar tomando $a = 2\, f'(\infty)$ y $b = \max |f(u)|$

Demostraremos que J satisface P-S. Sea X el subespacio de $\mathring{H}'(\Omega)$ generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ y Y el subespacio cerrado de $\mathring{H}'(\Omega)$ generado por $\{\varphi_{n+1}, \ldots \quad . \quad . \}$

Supongamos que $\{u_k\} \subset \mathring{H}'(\Omega)$ es tal que $\{J(u_k)\}$ es acotada y que $\nabla J(u_k) \longrightarrow 0$. Denotemos por x_k la proyección ortogonal de u_k sobre X y por Y_k la proyección ortogonal de u_k sobre Y. Es evidente que $u_k = x_k + y_k$.

Como $\|x_k - y_k\|_1 = \|x_k + y_k\|$ tenemos

$$\left\langle \frac{\nabla J(u_k), (z_n - y_k)}{\|x_k + y_k\|^2} \right\rangle, \longrightarrow 0$$

Luego

$$\left\langle \frac{\nabla J(u_k),(x_k - y_k)}{\|x_k + y_k\|} \right\rangle_1 = \frac{1}{\|x_k + y_k\|} \left(\int (\nabla(x_k+y_k), \nabla(x_k-y_k)) \right.$$

$$\left. - \int f(x_k+y_k)(x_k-y_k) - p(x_k-y_k) \right)$$

Sea $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido asi

$$f_1(u) = f'(\infty)u \quad \text{si} \quad u \geq 0 \quad y \quad f_1(u) = f'(-\infty)u \quad \text{si} \quad u < 0$$

Luego $\dfrac{f_1(u) - f(u)}{u} \longrightarrow 0$ cuando $|u| \longrightarrow 0$ lo cual implica que existe $M_1 > 0$ tal que:

$$\left| \frac{1}{\|x_k + y_k\|^2} \int (f(x_k + y_k) - f_1(x_k + y_k))(x_k - y_k) \right| \leq M_1$$

También se tiene que

$$\int (f_1(x_k + y_k))(x_k - y_k) = \int f'(-\infty)(x_k^2 - y_k^2)$$

Donde $\Omega' = \{\xi \in \Omega \; ; \; (u_k)(\xi) \geq 0\}$ luego

$$\int (f_1(u_k))(x_k-y_k) \geq f'(-\infty) \int x_k^2 - f'(\infty) \int Y_k^2$$

Por lo tanto

$$\left\langle \frac{\nabla J(u_k) \, , \, (x_k-y_k)}{|x_k + y_k|_1^2} \right\rangle_1 \leq \frac{\|x_k\|_1^2 - |y_k|_1^2}{|x_k + y_k\|^2} + M_1$$

$$+ \frac{(-f'(-\infty)) \int x_k^2 + f'(\infty) \int Y_k^2}{|x_k + y_k|_1^2}$$

$$+ \frac{|p|_0 \, |x_k + y_k|_0}{|x_k + y_k|_1^2}$$

$$\left\langle \frac{\nabla J(u_k),\ (x_k - y_k)}{|x_k + y_k|_1^2} \right\rangle \leq \left(\frac{1-f'(-\infty)}{\lambda n}\right) |x_k|_1^2 + \frac{f'(\infty)}{\lambda_{N+1}-1} |y_k|_1^2$$

$$+ \frac{|p|_o\ |x_k + y_k|_1}{|x_k + y_k|_1^2} + M_1$$

Como x_k y y_k estan en espacios mutuamente ortogonales

$$|x_k + y_k|_1^2 = |x_k|_1^2 + |y_k|_1^2 .$$

Por hipotesis tenemos

$$\frac{1-f'(-\infty)}{\lambda_N} < 0 \qquad y \qquad \frac{f'(\infty)}{\lambda_{N+1}-1} < 0$$

Luego reemplazando en la expresión anterior, obtenemos:

$$\left\langle \frac{\nabla J(u_k)\ (x_k - y_k)}{|x_k + y_k|_1^2} \right\rangle \leq c + \frac{(|p|_o |x_k + y_k|_o}{|x_k + y_k|_1^2} + M$$

Luego $\{u_k\}$ es una sucesión acotada en $\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$. Como consecuencia de el Teorema de Relich, el Lema de Niemitsky y que $|f(u)| \leq 2\ f'(\infty)\ |u| + b$ tenemos que existe una subsucesión $\{u_{kj}\}$ tal que $\{f(u_{kj})\}$ converge.

Como $\nabla J(u_{kj}) = u_{kj} + \hat{f}(u_{kj}) + p \longrightarrow 0$ [vease (1)]

tenemos que $\{u_{kj}\}$ converge luego J satisface (P-S).

Ahora: $J(y) \geq (|y|_1^2 - \gamma' \int y^2/2 - c'|y|_o\ [\text{medida } (\Omega)]^{1/2}$

$$+ |p|_o\ |y|_o$$

$$\geq 1/2\left(\frac{1-\gamma'}{\lambda_{N+1}}\right)|y|_1^2 - (c'\ [\text{medida } (\Omega)]^{1/2} + |p|_o)|y|_o/\sqrt{\lambda_1}$$

y

$$J(x) \leq 1/2\left(\frac{1-\hat{\gamma}}{\lambda_N}\right)\|x\|_1^2 + (k\ [\text{medida } (\Omega)]^{1/2} + |p|_o)|x|_o/\sqrt{\lambda_1}$$

Entonces existen $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ que satisfacen la hipotesis del Teorema # 10. Como J satisface (P-S) y es de clase C' tenemos que J tiene un punto crítico.

Luego la ecuación

$\Delta u(x) + g(x,u(x)) = 0$ tiene una solución débil y el teorema queda demostrado.

CAPITULO II

EL METODO DE LIAPUNOV - SCHMIDT

1. EL METODO DE LIAPUNOV - SCHMIDT.

En el capítulo anterior estudiamos condiciones para obtener los puntos críticos de un funcional. Esto nos permitía estudiar las soluciones de la ecuación diferencial parcial Eliptica

$$\Delta u + g(x,u) = 0$$

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad u(x) = 0 \ \text{ en } \ \partial\Omega$$

La idea del método de Liapunov-Schmidt, consiste en reducir el estudio de los puntos críticos de un funcional definidos en E (espacio de Banach), al estudio de funcionales definidos en un subespacio $X \subset E$ con $\text{Dim } X < \infty$.

En forma resumida, consideremos X, Y dos subespacios cerrados de E, con $\text{Dim } X < \infty$ y $E = X \oplus Y$. Consideremos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, bajo ciertas condiciones del funcional f, existe $T : X \longrightarrow Y$ tal que $x_o \in X$ es un punto crítico de

$$G : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{donde} \quad G(x) = f(x+T(x))$$

si y sólo si $x_o + T(x_o)$ es un punto crítico de f.

Ahora comentaremos algunos teoremas claves de artículos dedicados a estudiar ecuaciones diferenciales parciales Elipticas y cuya parte principal es la técnica de Liapunov-Schmidt.

Teorema # 16. Sea H un espacio de Hilbert real. Sea $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2. Sean X, Y subespacios cerrados de $H : H = X \oplus Y$ y $\text{Dim } X < \infty$.

Sean $m_1, m_2 > 0$ tales que $\forall u \in H \quad x \in X \quad y \in Y$

$$f''(u)(x,y) = \langle f''u(x),\ x\rangle \leq \ -m_1\|x\|^2$$

$$f''(u)(y,y) = \langle f''u(y),\ y\rangle \leq \ m_2\|y\|^2$$

Entonces existe un único $u_o \in H$ tal que

$$f'(u_o) = 0 \quad y \quad f(u_o) = \max_{x\in X}\ \min_{y\in Y}\ f(x+y)$$

$(u_o$ es un puntò de silla)

<u>Demostración.</u> Utilizando el desarrollo de Taylor

$$f(u) - f(v) = f'(v)(u-v) + \frac{1}{2}\, f(z)\,[(u-v),\ (u-v)]$$

Aplicando a $v = x_o + y_o \qquad u = x + y_o$

Considerando la hipótesis del teorema tenemos que si $x_o + y_o$ es un punto crítico de f.

$$f(x_o,y_o) \geq f(x+y_o) \qquad \forall\, x \in X$$

En forma similar tomando

$$v = (x_o+y_o) \qquad u = x_o + y$$

$f(x_o,y_o) \leq f(x_o,y) \quad \forall\, y \in Y$ o sea (x_o+y_o) es un punto de silla.

Analizemos la unicidad

Sea $x \in X$ fijo y consideremos la función

$$g : Y \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(y) = f(x+y)$$

De la hipótesis del teorema tenemos

$$g''(y)\ (h,h) \geq m_2\|h\|^2$$

Luego por el Teorema 6 g tiene un punto mínimo, aplicando el Teorema 2 se comprueba que ese punto mínimo es único. Es claro que dicho mínimo depende de $x \in X$ que hemos fijado.

Sea $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x)$ es el único punto de mínimo de g o sea $g(T(x)) < g(y)$ $\forall y \in Y$, esto es

$$f(x,T(x)) = \min_{y \in Y} f(x+y)$$

y además para $h \in Y$

$$\langle \nabla f(x,T(x)),h \rangle = 0 \qquad *$$

Para comprobar que $T : X \longrightarrow Y$ es de clase C' tendremos que apoyarnos en el teorema de la función implicita

Consideremos

$$G : X \longrightarrow R$$

$$G(x) = f(x,T(x))$$

Tomando el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 tenemos

$$G(x) < f(x) < f(0) + \|f'(0)\|\|x\| - \frac{1}{2} m_1 \|x\|^2 .$$

Se puede comprobar que $G(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$.

Como Dim $X < \infty$ existe $x_o \in X$ punto de máximo de G o sea

$$G'(x_o) = 0$$

Tomando la expresión * tenemos

$$0 = \langle \nabla G(x_o),h \rangle = \frac{d}{dt} (x_o+th)_{t=0} \qquad \forall h \in X$$

$$= \langle \nabla f(x_o+T(x_o)),\ h + T'(x_o)h \rangle$$

$$0 = \langle \nabla f(x_o+T(x_o)),\ h \rangle$$

Luego tenemos $\forall w \in H$ $\quad w = h + k \quad h \in X \quad k \in Y.$

$$\langle \nabla f(x_o+T(x_o),\ w \rangle = 0$$

Lo que comprueba que $x_o + T(x_o)$ es un punto crítico de f.

Luego $\quad f(x_o+T(x_o)) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x+y)$

<u>Teorema # 17.</u> Supongamos que

1. $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C' en $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ y continua en $\Omega \times \mathbb{R}$

2. Existen $N \in \mathbb{N}$ $\quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \gamma_1 < \gamma_2$ tales que

$$\lambda_n < \gamma_1 \leq \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \leq \gamma_2 < \lambda_{N+1}$$

donde $\lambda_{N}, \lambda_{N+1}$ son dos valores propios consecutivos del operador $\triangle$. Entonces el problema

II $\quad \triangle U + g(x,u) = 0$

en Ω $\quad U(x) = 0$ en $\partial\Omega$.

Tiene una única solución débil.

<u>Demostración.</u> El funcional asociado a II es

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \int_\Omega \int_0^u g(x,s)ds\, dx.$$

Haciendo algunos cálculos tenemos

$$\frac{d}{dt} f(u+tv)|_{t=0} = f'(u)N = \langle u,v \rangle_1 - \int_\Omega g(x,u)v.$$

También

$$\frac{d}{dt} f'(u+tv)|_{t=0} = f''(v,w) = \langle w,v \rangle_1 - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial u}(x,u)wv.$$

Con estas derivadas en el sentido de Gatuaux debemos verificar que son continuas con respecto a la variable u.

para comprobar que son derivadas en el sentido de Frechet se utiliza la condición 1 y comprobamos que $f \in C^2$.

Sea X el subespacio generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y Y el generado por $\{\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_{n+k}, \ldots\}$

Consideremos $x \in X$

$$f''(u)(x,x) \leq -m_1 \|x\|_1^2 \qquad \text{con} \quad m_1 = \frac{\gamma_1}{\lambda_N} - 1 > 0$$

y
$$f''(u)(y,y) \geq m_2 \|y\|_1^2 \qquad \text{con} \quad m_2 = 1 - \frac{\gamma_2}{\lambda_{N+1}}; y \in Y.$$

Luego se cumplen las condiciones del Teorema 16 y entonces la ecuación II tiene una solución débil.

2. ALGUNOS TEOREMAS DE APLICACION DEL METODO DE LIAPUNOV - SCHMIDT.

Ahora presentamos otros teoremas aplicables a las ecuaciones diferenciales donde la técnica mencionada es parte principal de la demostración.

Teorema # 18. Sea H un espacio de Hilbert, con $H = X \oplus Y$. $f: H \longrightarrow H$ un operador completamente continuo y de clase C'. Sea $\varepsilon > 0$ $\beta > 0$ tal que

1. a) $\langle f(x+y), y \rangle \leq \varepsilon^2$ $\qquad \|x\| \leq \beta \qquad \|y\| = \varepsilon$

   b) $\langle f(x+y), x \rangle \leq \beta^2$ $\qquad \|y\| \leq \varepsilon \qquad \|x\| = \beta$

2. $\forall u \in H \qquad \forall y \in Y \qquad$ con $\|y\| = 1$

$$\langle f'(u)\, y, y \rangle \neq 1$$

Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración Sea $x_o \in X$ con $\|x_o\| \leq \beta$. La función $P_2 f(x_o + \ ): Y \longrightarrow Y$ es completamente continua.

De la condición la

$$\langle P_2 f(x_o+y), y \rangle \leq \varepsilon^2 \qquad \text{para} \quad \|y\| = \varepsilon$$

Luego por el teorema de funto fijo de Kranosselski $P_2 f(x_o +$ tiene un punto fijo en $\overline{B(0,\varepsilon} \cap Y$ que lo llamaremos y_o.

Sea $Q : X \oplus Y \longrightarrow Y$

$Q(x,y) = P_2(f(x+y)) - y_o$. Entonces $Q(x_o,y_o) = 0$

De la definición de Q tenemos

$$D_Y Q(x+ \ ) = D_y P_2 f(x+ \ ) - I/Y=$$

Como $D_Y P_2 f(x+ \ )$ es completamente continua y además D_y es inyectiva entonces D_y es sobre.

Utilizando el teorema de la función implicita tenemos que existe $V(x_o) \subset X$ tal que $g(x_o) = Y_o$ donde

$$g : V(x_o) \longrightarrow Y$$

Luego $g(x) = P_2 f(x+g(x))$ para todo $x \in V(x_o)$

Como g se puede extender continuamente a $\overline{V(x_o)}$ para cada $x_d \in V(x_o) \subset \overline{B(0,\beta)}$ podemos construir una g_α única que satisface $g(x) = P_2(f(x,g(x))$ $\forall x \in V(x_\alpha)$.

Luego $g_\alpha(x_\alpha) = g(x_\alpha)$ lo que indica que podemos extender a g continuamente por fuera de $\overline{V(x_o)}$ manteniendo su definición.

Se puede extender g continuamente hasta un punto $x_1 \in \overline{B(0,\beta)} \cap X$ con $x_1 \neq x_o$. Luego existe

$$g : \overline{B(0,\beta)} \cap X \longrightarrow Y \text{ continua tal que}$$

* $g(x) \in \overline{B(0,\varepsilon)} \cap Y$. Como $P_2 f(x+g(x))=g(x)\ \forall x \in \overline{B(0,\beta)} \cap X$

Sea $G : X \cap \overline{B(0,\beta)} \longrightarrow X \quad G(x) = P_1 f(x+g(x))$

De la definición de g vemos que es completamente continua, por lo tanto G es completamente continua.

De la condición 1b tenemos

** $$\langle G(x), x\rangle \leq \beta^2 \qquad \|x\| < \beta$$

Por el teorema de Kranosselski G tiene un punto fijo. Luego de * y ** obtenemos $f(x_o+g(x_o))=x_o+g(x_o)$ lo cual demuestra el teorema.

Teorema # 19. Sea H un espacio. Sean X, Y dos subespacios cerrados tal que $H = X \oplus Y$ y Dim $X < \infty$. Sean P_1 y P_2 las proyecciones sobre X e Y respectivamente.
Consideremos $f : H \longrightarrow H$ completamente continuo. Consideremos ε, $\beta > 0$ tal que $x \in X$ con $\|x\| < \beta$ $y \in Y$ con $\|Y\| < \varepsilon$ tal que se verifica:

a) $P_2 \circ f(x+\ \ ) : Y \longrightarrow Y$ es una contracción, $\|y\| < \varepsilon$ $x \in X$ fijo.

b) $\|P_1 f(x+y)\| < \beta$ con $x \in X : \|x\| < \beta$

Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración Sea $x_o \in X$ un valor fijo. Consideremos $y \in Y : \|y\| < \varepsilon$ y la función $P_2 \circ f(x_o+\ \ ) : Y \longrightarrow Y$ por a. $P_2 \circ f(x+\ \ )$ es una contracción en $B(0, \varepsilon)$. Como H es un espacio de Hilbert $\Longrightarrow$ H es un espacio completo.

Por el teorema de contracción de Banach tenemos

P_2 of $(x_o+ \quad)$ tiene un único punto fijo que llamaremos Y_o.

Construiremos ahora la función

$$T : X \longrightarrow Y \quad \text{que cumpla:}$$

$x_o \in X : \|x_o\| < \beta \Longrightarrow T(x_o) = y_o$ único punto fijo de $P_2f(x_o+$

$x_1 \in X : \|x_o\| < \beta \Longrightarrow T(x \;) = y_1$ único punto fijo de $P_2f(x_1+$

La función T esta bien definida, por lo tanto probaremos que T es continua.

Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ $x_n \in X : \|x_n\| < \beta$ con la condición $x_n \longrightarrow x_o$. ·go

$$\|T(x_n)-T(x_o)\| = \|P_2f(x_n+y_n) - P_2f(x_o+y_o)\|$$

$$= \|P_2f(x_n+y_n) - P_2f(x_o+y_o) + P_2(x_o+y_n) - \quad +v_n)\|$$

$$\leq \|P_2f(x_n+y_n) - P_2f(x_o+y_n)\|+\|P_2f(x_o+y_n)- P_2f(x_o+y_o)\|$$

$$\leq K\|x_n-x_o\| + K\|y_n-y_o\|$$

$$= K\|x_n-x_o\| + K\|T(x_n) - T(y_o)\|$$

Luego

$$\|T(x_n) - T(x_o)\| \quad \frac{K}{1-K} \quad \|x_n-x_o\| \qquad \text{con } x_n \longrightarrow x_o \qquad \exists \varepsilon > 0$$

$$\|T(x_n) - T(x_o)\| \leq \varepsilon \left(\frac{K}{1-K}\right) \qquad \text{luego T es continua.}$$

Como T es continua entonces f($\quad$ +T $\quad$) es continua.

Consideremos la función

$$G(x) = P_1f(x+T(x)) \text{ con } x \in X : \|x\| < \beta$$

$$G : \overline{B(0,\beta)} \cap X \longrightarrow X.$$

Comprobaremos que G es completamente continua.

Como f es continua y P_1 es continua entonces P_1 of es continua, luego G es continua.

Sea $A \subset \overline{B(0,\beta)} \cap X$. Por la condición b

$\|P_1 f(x+y)\| < \beta$ cuando $\|x\| < \beta$, entonces $\forall x \in X : \|x\| < \beta$

$\|P_1 f(x+T(x))\| < \beta$ lo que indica que G aplica $\overline{B(0,\beta)} \cap X$ En si misma. Luego $G(A) \subset \overline{B(0,\beta)} \cap X$ es acotada.

Ya que f es completamente continua, $f(A+T(A))$ es relativamente compacto luego $P_1 f(A+T(A))$ es relativamente compacto y por lo tanto G es completamente continua.

Por el teorema de punto fijo de Schauder existe por lo menos un $x_k \in B(0,\beta) \cap X$ tal que

$$P_1 f(x_k + T(x_k)) = x_k$$

Recordando la definición de T obtenemos

$$f(x_k + T(x_k)) = x_k + y_k$$

Es un punto fijo de f.

A continuación presentaremos un teorema que aparece en el Journal de Ecuaciones Direrenciales en 1978 escrito por Antonio Ambroseti y Giovanni Mancini, En su artículo "Existence and Multiplicity Results For Nonlinear Elliptic Problems with Linear Part at Resonance. The case of the Simple Eigen Value".

La referencia inicial para este artículo es el trabajo de la Landesman y Lazer donde demuestran condición necesaria y suficiente para encontrar solución de la ecuación:

$$\text{I} \qquad \mathcal{L}u + \lambda_k u + f(x,u) = g \quad \text{en } \Omega \qquad g \in L^2(\Omega)$$

$$B(u) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde $\mathcal{L}u = -\sum (-1)^{\alpha} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} u)$ es un operador uniforme eliptico y auto adjunto definido en Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. B expresa la condición de frontera de Dirichlet y λ_k es un valor propio de $-\mathcal{L}u = \lambda u$ con $B(u) = 0$

La notación empleada para este articulo es la siguiente:

$\|u\|$ la norma usual del espacio de Sobolev $W_0^{m,2}(\Omega) = E$

$\|u\|_{op}$ la norma en $L^P(\Omega)$

$\|u\|_0$ la norma en $L^2(\Omega)$.

El producto escalar en E sera indicado por $(u,v)_m$ y el producto escalar en L^2 es (u,v)

$\mathcal{L} = -\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^{\alpha} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta})$ un operador diferencial.

Para desarrollar la parte que sigue asumiremos:

1. $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in L^{\infty}(\Omega) \quad \exists \gamma > 0: \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} > \gamma |\xi|^{2m}$
$\forall \xi \in \mathbb{R}$

Para

$$u,v \in E \ ((u,v)) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \quad D^{\alpha} u$$

Definiremos

$$(Lu,v)_m = -((u,v)) \quad \text{un operador lineal acotado}$$

auto adjunto de E en E con infinitos valores propios $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ y con un correspondiente conjunto ortogonal completo de funciones propias $v_1, v_2 \ldots$.

Recordemos que λ_k tiene la caracterización variacional

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{((v,v))}{\|v\|_o^2} : v \in E,\ (v,v_i) = 0 \quad i=0,1,2,\ldots k-1 \right\}$$

Denotaremos

$$(L_k u,v)_m = (Lu,v)_m + \lambda_k (u,v)$$

2. Sea $f(x,s) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional tal que f es medible en $x \in \Omega$ $\forall s \in \mathbb{R}$ y $f \in C^1$ en S $\forall x \in \Omega$

Denotaremos $f'(x,s)$ la derivada parcial $\partial/_{\partial s}\, f(x,s)$. Para simplificar la notación escribiremos $f(s)$ y $f'(s)$ para $f(x,s)$ y $f'(x,s)$ respectivamente.

3. λ_k es un valor propio

4. $\lambda_{k-1} < \text{const} \leq \lambda_k + f'(x) \leq \text{const} < \lambda_{k+1}$ si $k > 1$

$\text{const} \leq \lambda_1 + f'(s) \leq \text{const} < \lambda_2$ si $k = 1$

5. f es acotada.

Para estudiar I consideremos como soluciones debiles a $u \in E$ tales que:

$$-\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha(u) D^\beta(v) + \lambda_k \int_\Omega uv + \int_\Omega f(u)v = \int_\Omega gv \quad v \in E$$

y por consiguiente son las soluciones de

$$L\,u + F(u) = g \quad u \in E \qquad **$$

Donde

$F : E \longrightarrow E$ y g estan definidas por

$$(Fu,v)_m = \int_{\Omega} f(u)v \quad \forall\, v \in E$$
$$(g,v)_m = \int_{\Omega} gv \quad v \in E$$

Aplicando (4) y (5) podemos comprobar que $f \in C^1$ en E.

Denotaremos por V el Kerf L_k y por $V^{\perp}$ el complemento ortogonal en L^2. Luego $E = V \oplus V^{\perp}$ y asi cada $u \in E$ tiene la forma $u = t_{v_k} + w$ con $t_{v_k} \in V$ y $w \in V^{\perp}$.

Consideremos P_1 y P_2 las proyecciones sobre V y $V^{\perp}$ respectivamente.

Considerando P_1 y P_2 sobre ** obtenemos

$$\left.\begin{aligned} P_1F(t_{v_k}+w) &= P_1 g \\ L_k(w) + P_2F(t_{v_k}+w) &= P_2 g \end{aligned}\right\} \quad ***$$

Consideremos el siguiente lema.

La ecuación $L_k\, u + F(u) = g$ es equivalente al sistema

$$P_1F(tv_k+w) = P_1 g$$
$$L_k(w) + P_2F(tv_k+w) = P_2 g$$

La demostración queda al lector.

Para efecto del teorema que presentaremos analizaremos la ecuación:

$$L_k(w) + P_2F(tv_k+w) = P_2 g \qquad \text{en } V^{\perp}$$

Para esto consideremos

$$\phi_t = L_k(w) + P_2F(tv_k+w) \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{fijo.}$$

Además usaremos los siguientes conceptos.

Sean X,Y dos espacios de Banach. $U \subset X$ abierto y $\phi : U \longrightarrow Y$ una función continuamente diferenciable según Frechet, $\phi \in C^1(U,Y)$.

ϕ se dice localmente invertible en $u \in U$ si ϕ induce un difeomorfismo de clase C^1 de una vecindad $u \in U$ en una vecindad de $V = \phi(u) \in Y$.

$\phi : X \longrightarrow Y$ se dice una aplicación propia si para cada compacto $K \subset Y$, $\phi^{-1}(K)$ es un compacto en X.

Si $\phi \in C^1(X,Y)$ es localmente invertible en $u \in U$ induce que $\phi'(u) \in \mathcal{L}(X,Y)$ es invertible

Si $\phi \in C^1(X,Y)$, ϕ localmente invertible y propio. Entonces ϕ es un difeomorfismo global de X en Y.

Ahora presentaremos el teorema de Ambroseti - Mancini donde la técnica de demostración es la de Liapunov -Schmidt.

<u>Teorema # 20.</u> Consideremos que las condiciones 1 al 5 se cumplen. Entonces $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ϕ_t es un difeomorfismo global de $V^{\perp}$ en si mismo.

<u>Demostración</u> Comprobaremos que ϕ_t es localmente invertible en cada punto $w \in V^{\perp}$ y que ϕ_t es propio.

Consideremos $\phi_t'(w) : z \longrightarrow L_k z + P_2 F'(tv_k+w)z \quad z \in V^{\perp}$

Probaremos que la ecuación $\phi_t'(w)z = 0$ tiene una única solución, la solución cero.

El conjunto $V^{\perp} = W_1 \oplus W_2$ con $W_1 = [v_i] \quad i \geq k+1$

$$W_2 = [v_i] \quad i < k-1$$

$$z = z_1 + z_2 \qquad z \in V^{\perp} \qquad z_i \in W_i \qquad i = 1,2$$

Consideremos π_i la proyección sobre W_i de

$$L_k z + P_2 F'(tv_k+w)z = 0$$

donde obtenemos

$$L_k z_1 + \pi_1 P_2 F'(tv_k+w)z = 0$$

$$L_k z_2 + \pi_2 P_2 F'(tv_k+w)z = 0$$

De estas dos ultimas expresiones obtenemos:

$$((z_2,z_2)) - ((z_1,z_1)) - \lambda_k \|z_2\|_o^2 + \lambda_k \|z_1\|_o^2$$

$$= \int_{\Omega} f'(tv_k+w)z_2^2 - \int_{\Omega} f'(tv_k+w)z_1^2$$

Utilizando 4 en la expresión anterior, para algún $\varepsilon > 0$

$$((z_2,z_2)) - ((z_1,z_1)) \geq \lambda_{k-1}\|z_2\|_o^2 + \varepsilon \|z_2\|_o^2 - \lambda_{k+1}\|z_1\|_o^2 + \varepsilon \|z_1\|^2$$

Por la caracterización variacional de λ_k y como

$(z_i, v_i) = 0$ para $i=1,2,\ldots k$ tenemos

$$((z_2,z_2)) \leq \lambda_{k-1}\|z_2\|_o^2 \quad \text{y} \quad -((z_1,z_1)) \leq -\lambda_{k+1}\|z_1\|_o^2$$

Reemplazando estas dos expresiones en la desigualdad anterior obtenemos $\varepsilon \|z\|_o \leq 0$ luego $\|z\|_o = 0$ y obtenemos

$$L_k z + P_2 F'(tv_k+w)z = 0$$ solo tiene la solución $z = 0$. Luego por el Lema 1 ϕ_t es localmente invertible.

Para probar que ϕ_t es propia observemos que L_k tiene una aplicación inversa acotada T en $V^{\perp}$. Aplicando T a la expresión

$$L_k(e) + P_2F(tv_k+w) = P_2g$$ obtenemos

$$w = TP_2(g-F(tv_k+w))$$

Si g pertenece a un conjunto compacto en E, como f es acotada entonces F es acotada. Luego w pertenece a un conjunto compacto en E. Esto comprueba que ϕ es propia lo cual concluye la demostración.

PROBLEMAS DE APLICACION

Soluciones periódicas de la Ecuación

$$x''(t) + f(x(t)) = p(t) \qquad \text{(I)}$$

Donde $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π periódica $p \in L^2 [0,2\pi]$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$

Sea H el espacio de las funçiones u $2\text{-}\pi$ - periódicas $u \in L^2 [0,2\pi]$ tal que $u'(t)$, la derivada generalizada de u pertenece a $L^2 [0,2\pi]$. El producto interno esta definido así:

$$\langle u,v \rangle = \int_0^{2\pi} u(t)\, v(t)dt + \int_0^{2\pi} u'(t)\, v'(t)dt.$$

Consideremos $X \subset H$ constituido por las funciones constantes, Y H el subespacio de H consituido por la funciones de promedio cero.

Esto es $y \in Y$ si

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$$

Se puede comprobar que

a) $H = X \oplus Y$

b) $X \perp Y$

Además se cumple la desigualdad

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (y(t))^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} (y'(t))^2\, dt.$

Ver (Adams "Sobolev-Spaces").

Decimos que $u \in H$ es una solución débil de (I) si u es un punto crítico del funcional

$$J : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \qquad J(u) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(u')^2}{2} - F(u(t)) + P(t)\, u(t) \right\} dt$$

donde

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds.$$

Basado en estas condiciones tenemos el siguiente teorema.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\cdot f \in C^1$ que satisface:

a) Existe $b \in \mathbb{R}$ $0 \leq b < 1$ tal que

$$|f'(t)| \leq b$$

b) Existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(t)}{t} \leq \gamma_1 < \bar{p}(t) < \gamma_2 \leq \lim_{t \to \infty} \frac{F(t)}{t}$$

Entonces el problema (1) tiene por lo menos, una solución débil.

Demostración Sea $u \in H$, entonces $u = x + y$ con $x \in X$ $y \in Y$.

Consideremos $x_o \in X$, x_o fijo y consideremos el funcional

$$J_{x_o} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J_{x_o}(Y) = J(x_o + y) \quad \text{como en (1).}$$

Utilizando [3] podemos afirmar que J es C^2 y por lo tanto J_{x_o} también es C^2.

Ahora para $y, z \in Y$ tenemos

$$\langle \nabla J_{x_o}(y), z \rangle = \frac{d}{dt} J_{x_o}(y+tz)|_{t=0}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ y'z - f(x+y)z + p.z \right\} dz \tag{2}$$

También para y,z,w $\in$ Y

$$\langle D^2 J_x(y)z,w \rangle = \frac{d}{dt} \langle \nabla J_x(y+tz),w \rangle \Big|_{t=0}$$

Utilizando (2) obtenemos

$$\langle D^2 J_x(y)z,w \rangle = \int_0^{2\pi} z'w' - f'(x+y)zw \tag{3}$$

De la desigualdad c se deduce que la norma en Y es equivalente a:

$$\|z\| = \left(\int_0^{2\pi} (z')^2 \right)^{1/2}$$

De (3), la desigualdad (c) y la condición (b) del teorema tenemos que

$$\langle D^2 J_{x_o}(y)z,z \rangle \geq (1-b)\|z\|^2 \tag{4}$$

De la desigualdad (4) se obtiene que J_{x_o} tiene un mínimo. (Ver [5] pág. 79-80).

Ahora

$$\langle \nabla J_{x_o}(y_1) - \nabla J_{x_o}(y_2), y_1 - y_2 \rangle =$$

$$\langle D^2 J_{x_o}(y_2 + S(y_1-y_2))(y_1-y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq$$

$$(1-b) \|y_1 - y_2\|^2 \tag{5}$$

De (5) se deduce que el punto de mínimo de J_{x_o} es único.

Ahora : Sea $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x_o)$ es el único punto de mínimo de J_{x_o}.

$$J_{x_o}(T(x)) \leq J_{x_o}(y) \qquad (6)$$

Cualquiera que sea $y \in Y$.

También $$\langle J_{x_o}(y), z \rangle = 0 \qquad (7)$$

$\forall z \in Y$ si y solo si $y = \hat{T}(x_o)$.

Haciendo uso del teorema de la función implicita se comprueba que $T : X \longrightarrow Y$ es C'.

Sea ahora

$$G : X \longrightarrow R \quad \text{definida asi:}$$

$$G(x_o) = J(x_o+T(x_o))$$

Es claro que $G \in C'$. De la desigualdad 6 se obtiene

$$G(x_o) \leq J_{x_o}(0) = J(x_o) \qquad (8)$$

pero

$$J(x_o) = 2\pi\ \bar{p}\ .\ x - 2\pi\ F(x)$$

De (9) y la propiedad b) $J(x_o) \longrightarrow -\infty$ cuando $|x_o| \longrightarrow \infty$. De (8) obtenemos que $G(x_o) \longrightarrow -\infty$ cuando $|x_o| \longrightarrow \infty$. Como Dim X = 1 entonces G tiene un máximo $x_1 \in X$ por lo tanto $G'(x_1) = 0$

Luego se puede comprobar usando la definición de 6 que $x_1 + T(x_1)$ es un punto crítico de J o sea:

$$\nabla J(x_1 + T(x_1)) = 0$$

y $x_1 + T(x_1)$ es la solución débil buscada.

CONCLUSIONES

Al escoger el área de Ecuaciones Diferenciales para el trabajo de graduación, no imagine la riqueza matemática que encontraría. Gran parte del desarrollo de este trabajo descansa en conceptos de Algebra Lineal y Análisis Funcional.

La forma de presentar las soluciones de la ecuación diferencial $\triangle U + g(x,u) = 0$ (I), mediante conceptos de semi continuidad - débil y el principio del mini-max hace que esta teoría tenga parecido con algunos conceptos del cálculo.

Al usar la técnica del Liapunov-Schmidt presentamos condiciones para la soluciones de (I) en forma inmediata e independiente de lo presentado en el Capitulo I.

Concluimos que el método es una herramienta de gran utilidad, pero su uso nos exige mucha preparación, ya que esta ligado a conceptos como: Espacios de Hilbert, Espacios de Sobolev, Teorema de la Función Implicita, Teoría de Puntos Fijos, Teoría de Grado, etc.

Es posible observar que este método se usa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, luego su aplicación es extensa.

BIBLIOGRAFIA

1 ALFONSO CASTRO. "Métodos Variacionales y Análisis Funcional no Lineal". Sociedad Colombiana de Matemática. Monografía 1980.

2 AMBROSETTI ANTONIO Y MANCINI GIOVANNI. "Existence and Multiplicity Results for Nonlinear Elliptic Problems with Linear part at Resonance". The Case of the Simple Eigenvalue. Journal of Differential Equations 28, 220-245 1978.

3 LAZER A.C., LANDESMAN E. M., MEYER DAVID R. "On Sadole Pint Problems in the Calculus Variations, the Ritz Algorithm, and Monotone Convergence". Journal of Mathematical, Analysis and Applications. Vol. 52 Nº 3 December 1975.

4 CASTRO A. AND LAZER A. C. "Critical Pint Theory an the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichelt Problem". Annali Di Mat. Purta ed Applicate (IV)". Vol CXX 1979. 113-137.

5 VAIN BERG M. "Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators". Holden - Day San Francisco 1964.

6 ZULUAGA MARIO. "Métodos Variacionales en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales". Apuntes de Seminario. Maestría Centroamericana en Matemática. 1987.

7 MELVYN S. BERGER. "nonlinearity and Functional Analysis". Acadmic Press - 1977.

8 BRUNO PINI. Lezioni di Analisi Matematica di Secondo Livello . Editorial Blueb Bologna 1978.

9 A. N. KOLMOGOROV; S.V. FOMIN. "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional". Editorial -

Mir-Moscú. 1975.

10 V. P. MIJAILOV. "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales". Editorial - Mir - Moscú. P. Edición 1978. S. Edición 1982.

11 V. A. TRENOGUIN; T. S. SOBOLEVA. "Análisis Funcional". Editorial - Mir - Moscú - 1984.