UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POST-GRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

ACERCA DE LA CLASIFICACION DE LOS ESPACIOS ARQUIMEDIANOS

Por:

SIMON B. VASQUEZ

Tesis presentada ~~como uno de los requisitos~~ para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

TM

UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

CHO DEL VICERRECTOR

Director de Tesis ______________________
Dr. Rogelio Rosas

Miembro del Jurado Luis Moreno A
Dr. Luís Moreno Armella

Miembro del Jurado Jorge Hernández
Maestro en Ciencias Jorge Hernández

Fecha 27 de Junio de 1986.

Obs del autor

218232

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

Una parte considerable de los espacios utilizados en la solución de importantes problemas del análisis son espacios de funciones. El orden usual en estos espacios hace de ellos espacios arquimedianos, este hecho entre otros justifica el interés por el estudio de estos espacios.

En este trabajo se exponen las ideas principales que han servido para clasificar los espacios arquimedianos. Dicha clasificación se ha realizado, básicamente ateniéndose a Propiedades de Proyección y a Propiedades de Completitud.

Zaanen y Luxemburg hacen una clasificación estricta en [4] y la misma relaciona los distintos tipos de espacios arquimedianos. Con posterioridad, Aliprantis y Langford [1] e independientemente Quinn [5] introducen un nuevo tipo de espacio y se amplía el diagrama de inclusión principal.

En este trabajo se introduce una nueva propiedad de proyección y se verifica que la misma define una clase estricta de espacios arquimedianos, y se la ubica dentro del esquema de inclusión principal.

El esquema que hemos seguido es el siguiente:

En el Capítulo I, presentamos las propiedades básicas de los espacios de Riesz. En el Capítulo II estudiamos a los subespacios que gozan de cierta estabilidad, y se introducen los espacios arquimedianos. En el tercer capítulo se demuestra el Teorema de Inclusión Principal. Además, se caracterizan los espacios

$A\sigma$ - DC sin utilizar los d-completamientos, resolviendo un problema planteado en [2] , ejercicio 19, pág. 32. Finalmente, se introduce un nuevo tipo de espacio que modifica sustancialmente el diagrama de inclusión principal.

El trabajo incluye un apéndice en el que se demuestra el Teorema Espectral de Freudenthal, utilizado para probar una de las implicaciones del Teorema de Inclusión Principal. La introducción de este importante resultado se justifica más que nada por razones de autocontenimiento; por el volumen del trabajo preliminar, no directamente relacionado con el objetivo de esta tésis, nos indujeron a presentar este material en forma de apéndice.

CAPITULO I

PROPIEDADES BASICAS DE LOS ESPACIOS DE RIESZ

En este capítulo presentaremos las propiedades básicas de los espacios de Riesz.

En éste y en los capítulos posteriores, denotaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales mayores o iguales a cero, y por θ al vector nulo en el espacio vectorial.

1.1 ESPACIOS VECTORIALES ORDENADOS

Definición 1.1. Un espacio vectorial ordenado es un cuádruple $(E, +, ., \leqslant)$, donde $(E, +, .)$ es un espacio vectorial real y $\leqslant$ es una relación de orden parcial sobre E tal que:

1) $u \leqslant v$ entonces $u + w \leqslant v + w$ para todo u v y w en E.
2) $u \leqslant v$ entonces $\alpha u \leqslant \alpha v$ para todo u, v en E, $\alpha \geqslant 0$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1. Sea E un espacio vectorial ordenado, y

$$P = \left\{ u \in E : u \geqslant \theta \right\}.$$

Entonces:

1) $P \cap (-P) = \left\{ \theta \right\}$, donde $-P = \left\{ -u \in E : u \in P \right\}$
2) $P + P \subseteq P$, donde $P + P = \left\{ u + v : u, v \in P \right\}$
3) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha P \subseteq P$, donde $\alpha P = \left\{ \alpha u : u \in P \right\}$.

Recíprocamente, si $P \subseteq E$ tiene las propiedades (1), (2) y (3), la relación

$$u \leqslant v \text{ si, y sólo si, } v - u \in P,$$

es una relación de orden parcial en E, y $(E, \leqslant)$ es un espacio vectorial ordenado en el cual P es el cono positivo.

Demostración:

($\Longrightarrow$) (1) Sea $u \in P \cap (-P) \Longleftrightarrow u \in P$ y $u \in (-P)$

$\Longleftrightarrow u \geqslant \theta$ y $-u \geqslant \theta$

$\Longleftrightarrow u = \theta$ $\square$

2) Sean $u, v \in P$, $u \geqslant \theta \Longrightarrow u + v \geqslant \theta + v = v \geqslant \theta$

$\Longrightarrow u + v \in P.$ $\square$

3) Sea $u \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$: $u \geqslant \theta \Longrightarrow \alpha u \geqslant \alpha\theta = \theta \Longrightarrow \alpha u \in P$ $\square$

($\Longleftarrow$) 1º $\leqslant$ es una relación de orden en E.

(a) Reflexividad: para todo $u \in E$, $u - u = \theta \in P$, entonces $u \leqslant u$ para todo $u \in E$ $\square$

(b) Antisimétrica Sean $u, v \in E$, $u \leqslant v$ y $v \leqslant u$

$\Longrightarrow v - u \in P$ y $u - v \in P \Longrightarrow v - u \in P$ y

$v - u \in (-P)$

$\Longrightarrow v - u \in P \cap (-P) \Longrightarrow v - u = \theta$

$\Longrightarrow v = u.$ $\square$

(c) Transitividad: Sean $u, v, w \in E$, $u \leqslant v$ y $v \leqslant w$

$\Longrightarrow v - u \in P$ y $w - v \in P$

$\Longrightarrow (v - u) + (w - v) \in P + P \subseteq P \Longrightarrow w - u \in P$

$\Longrightarrow u \leqslant w.$ $\square$

2º Compatibilidad

Sean $v, v, w \in E$, y supongamos que $u \leqslant v$.

(a) $u \leqslant v \Longrightarrow v - u \in P \Longrightarrow (v + w) - (u + w) = v - u \in P \Longrightarrow$ $u + w \leqslant v + w$ $\square$

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y sea $u \leqslant v$

$u \leqslant v \Longrightarrow v - u \in P \Longrightarrow \alpha(v - u) \in \alpha P \subseteq P$

$\Longrightarrow \alpha v - \alpha u \in P \Longrightarrow \alpha u \leqslant \alpha v$ $\square$

Así pues $(E, \leqslant)$ es un espacio vectorial ordenado.

Además, $E^+ = \left\{ u \in E : u \geqslant \theta \right\} = \left\{ u \in E : u - \theta \in P \right\}$

$= \left\{ u \in E : u \in P \right\} = P,$

o sea, P es el cono positivo de E.

Definición 1.2. Sea E un espacio vectorial ordenado, el conjunto $E^+ = \left\{ u \in E : u \geqslant \theta \right\}$ se llama cono positivo de E. Los elementos de E^+ se llaman elementos positivos.

Lema 1.1. Sea E un espacio vectorial ordenado, $u \in E$, A y B partes no vacías de E. Entonces.

(1) $\sup (u + A) = u + \sup A$, si alguno de los dos miembros existe

(2) $\sup (-A) = -\inf A$, si alguno de los dos miembros existe

(3) $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$, si el miembro derecho existe

(4) si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$, si el miembro derecho existe.

Demostración:

(1) Supongamos que existe $u + \sup A$. Entonces, $u + v \in u + A$ para todo $v \in A$ y $u + v \leqslant u + \sup A$, luego $u + \sup A$ es una cota superior de $u + A$. Sea $m \in E$ una cota superior de $u + A$, entonces $u + v \leqslant m$ para todo $v \in A$, por lo tanto $v \leqslant m - u$ para todo $v \in A$. Luego $m - u$ es una cota superior de A, esto implica que $\sup A \leqslant m - u$, entonces $u + \sup A \leqslant m$. Por consiguiente $\sup(u + A) = u + \sup A$.

(2) Supongamos que existe $\sup (-A)$. Entonces, $-v \leqslant \sup(-A)$ para todo $v \in A$, por lo tanto $-\sup(-A) \leqslant v$ para todo $v \in A$, luego

$-\sup(-A)$ es una cota inferior de A. Sea $m \in E$ una cota inferior de A, entonces $m \leqslant v$ para todo $v \in A$, por lo tanto $-v \leqslant -m$ para todo $v \in A$, luego $-m$ es una cota superior de $(-A)$. Por consiguiente $\sup(-A) \leqslant -m$, entonces $m \leqslant -\sup(-A)$, lo que prueba que $-\sup(-A) = \inf A$

Luego $\sup(-A) = -\inf A$. $\square$

(3) Supongamos que: existen supA y supB.

Probaremos primero que: supA + supB es cota superior de A + B.

En efecto, sea $w \in A + B$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $w = a + b$; pero,

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \Longrightarrow a \leqslant \sup A \\ b \in B \Longrightarrow b \leqslant \sup B \end{array}\right| \Longrightarrow w = a+b \leqslant \sup A + \sup B.$$

Luego $w \leqslant \sup A + \sup B$ para todo $w \in A + B$.

Probaremos ahora que: supA + supB es la menor cota superior de A + B.

En efecto, sea $m \in E$ una cota superior de A + B, entonces $a + b \leqslant m$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Sea $a \in A$, arbitrario dado, entonces $a + b \leqslant m$ para todo $b \in B$, luego $b \leqslant m-a$ para todo $b \in B$. Por consiguiente, dado $a \in A$, $m-a$ es cota superior de B, por lo tanto $\sup B \leqslant m-a$ para todo $a \in A$, o equivalentemente, $a \leqslant m - \sup B$ para todo $a \in A$. Luego $m - \sup B$ es cota superior de A, y por consiguiente $\sup A \leqslant m - \sup B$, o equivalentemente, $\sup A + \sup B \leqslant m$.

Así, hemos probado que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.

(4) Supongamos que existe supA en E, y sea $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces si $w \in \alpha A$, existe $a \in A$: $w = \alpha a$, luego $\alpha^{-1} w = a \leqslant \sup A$, entonces $w = \alpha a \leqslant \alpha \sup A$. Luego $\alpha \sup A$ es una cota superior de

αA. Sea ahora, m una cota superior de αA, entonces $\alpha a \leqslant m$ para todo $a \in A$, por lo tanto $a \leqslant \alpha^{-1}m$ para todo $a \in A$. Luego $\alpha^{-1}m$ es una cota superior de A, por consiguiente $\sup A \leqslant \alpha^{-1}m$, entonces $\alpha \sup A \leqslant m$. Luego $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ para todo $\alpha > 0$ en $\mathbb{R}$.

Observación 1.1. Las proposiciones análogas respecto de ínfimo son verdaderas, o sea:

(1) $\inf(u + A) = u + \inf A$, si alguno de los miembros existe.

(2) $\inf(-A) = -\sup A$, si cualquiera de los miembros existe

(3) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ si el miembro derecho existe.

(4) Si $\alpha \geqslant 0$ en $\mathbb{R}$, $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$, si el miembro derecho existe.

1.2 ESPACIOS DE RIESZ

Definición 1.3. Un espacio de Riesz es un espacio vectorial ordenado $(E, \leqslant)$ tal que existe

$\sup\{u, v\} = u \vee v$

Para todo $u, v \in E$.

Definición 1.4. Sea E un espacio de Riesz y $u \in E$, se definen los vectores:

(1) "módulo de u", como: $|u| = u \vee (-u)$

(2) "parte positiva de u", como: $u^{+} = u \vee \theta$

(3) "parte negativa de u", como: $u^{-} = -u \vee \theta$

Proposición 1.2. Sea E un espacio vectorial ordenado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es un espacio de Riesz

(2) Existe $\inf \{u,v\} = u \wedge v$ para todo $u, v \in E$

(3) Existe $u^+ = u \vee \theta$ para todo $u \in E$

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2) En efecto, si $u, v \in E$ entonces $-u, -v \in E$, por lo tanto existe $\sup \{-u, -v\} = -u \vee -v$. Luego existe $\inf \{u, v\} = -\sup \{-u, -v\}$

(2) $\Longrightarrow$ (1) En efecto, si $u, v \in E$ entonces $-u, -v \in E$; por lo tanto existe $\inf \{-u, -v\} = -u \wedge -v$. Luego existe $\inf \{-u, -v\} = -\sup \{u, v\}$

(1) $\Longrightarrow$ (3) Es obvio.

(3) $\Longrightarrow$ (1) En efecto, si $u, v \in E$ entonces $v - u \in E$, por lo tanto existe $\sup \{v- u, \theta\} \in E$. Luego existe $u + \sup \{v - u, \theta\}$. Sea $A = \{v - u, \theta\}$, se tiene que existe $u + \sup A$. Luego existe $\sup (u+A) = u + \sup A$. Pero

$u + A = u + \{v - u, \theta\} = \{u +(v - u), u + \theta\} = \{v, u\} = \{u, v\}$.

Por consiguiente, existe $\sup \{u, v\} \in E$.

Proposición 1.3. Sea E un espacio de Riesz, y sean $u, v, w \in E$. Entonces:

(1) $u \leq v$, entonces $u \vee w \leq v \vee w$ y $u \wedge w \leq v \wedge w$

(2) $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$

(3) $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.

Demostración:

(1) $u \leq v$ y $u \wedge w \leq u$, entonces $u \wedge w \leq v$.

$u \wedge w \leq v$ y $u \wedge w \leq w$, entonces $u \wedge w \leq v \wedge w$.

En forma análoga se prueba que $u \vee w \leq v \vee w$.

(2) a) $u \vee (v \vee w) \geq v \vee w$, $v \vee w \geq v$ y $v \vee w \geq w$, entonces $u \vee (v \vee w) \geq v$ y $u \vee (u \vee w) \geq w$.

b) $u \vee (v \vee w) \geq u$ y $u \vee (v \vee w) \geq v$, entonces $u \vee (v \vee w) \geq u \vee v$

c) $u \vee (v \vee w) \geq u \vee v$ y $u \vee (v \vee w) \geq w$, entonces $u \vee (v \vee w) \geq (u \vee v) \vee w$.

Por otro lado, (d) $(u \vee v) \vee w \geq (u \vee v)$, $u \vee v \geq u$ y $u \vee v \geq v$, entonces $(u \vee v) \vee w \geq u$ y $(u \vee v) \vee w \geq v$.

(e) $(u \vee v) \vee w \geq w$ y $(u \vee v) \vee w \geq v$, entonces $(u \vee v) \vee w \geq v \vee w$

(f) $(u \vee v) \vee w \geq u$ y $(u \vee v) \vee w \geq v \vee w$, entonces $(u \vee v) \vee w \geq u \vee (v \vee w)$.

Por (c) y (f) se deduce que $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$.

(3) Se demuestra en forma análoga a (2).

Proposición 1.4. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio de Riesz E, tales que existen supA y supB. Entonces,

$$\sup A \wedge \sup B = \sup \left\{ u \wedge v : u \in A, v \in B \right\}$$

Demostración.

$u \wedge v \leqslant \sup A \wedge \sup B$ para todo $u \in A$, $v \in B$; luego $\left\{ u \wedge v : u \in A, v \in B \right\}$ esta acotado superiormente. Sea w otra cota superior de este conjunto, entonces $w \geqslant u \wedge v$ para todo $u \in A$, $v \in B$; pero $u \wedge v = u + v - u \vee v$. Por lo tanto $w + u \vee v \geqslant u + v$, entonces $w + \sup A \vee \sup B \geqslant u + v$ para todo $u \in A$, $v \in B$. Luego $w + \sup A \vee \sup B \geqslant \sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Por consiguiente $w \geqslant \sup A + \sup B - \sup A \vee \sup B = \sup A \wedge \sup B$.

Así hemos probado que $\sup A \wedge \sup B = \sup \; u \wedge v : u \in A, v \in B$

Corolario 1.1. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio de Riesz E tales que existen $\inf A$ e $\inf B$.

Entonces,

$$\inf A \vee \inf B = \inf \left\{ u \vee v : u \in A, v \in B \right\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \inf A \vee \inf B &= - \left[-(\inf A \vee \inf B) \right] = - \left[-\inf A \wedge -\inf B \right] \\ &= - \left[\sup(-A) \wedge \sup(-B) \right] \\ &= - \sup \left\{ -u \wedge -v : u \in A, v \in B \right\} \\ &= \inf \left\{ - \left[-u \wedge -v \right] : u \in A, v \in B \right\} \\ &= \inf \left\{ u \vee v : u \in A, v \in B \right\} \end{aligned}$$

Corolario 1.2. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio de Riesz E tales que existen supA e infB. Entonces:

(1) $\sup A \wedge u = \sup \{ v \wedge u : v \in A \}$ para todo $u \in E$

(2) $\inf B \vee u = \inf \{ v \vee u : v \in B \}$ para todo $u \in E$

Demostración.

(1) Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.4

(2) Es una consecuencia inmediata del Corolario 1.1.

Corolario 1.3. Sea E un espacio de Riesz. Entonces:

(1) $(u \vee v) \wedge w = (u \wedge w) \vee (v \wedge w)$ para todo $u, v, w \in E$

(2) $(u \wedge v) \vee w = (u \vee w) \wedge (v \vee w)$ para todo $u, v, w \in E$

Demostración.

(1) Es una consecuencia inmediata del Corolario 1.2.

(2) Es una consecuencia inmediata del Corolario 1.2.

Se tiene el siguiente resultado que proporciona una serie de identidades y desigualdades básicas.

Proposición 1.5. Sean $u, v, w \in E$, y E un espacio de Riesz. Se tiene:

(1) $u + v = u \vee v + u \wedge v$

(2) $u = u^{+} - u^{-}$ y $u^{+} \wedge u^{-} = \theta$

(3) $u \vee v = (u - v)^{+} + v = (v - u)^{+} + u$

(4) $|u| = u^{+} + u^{-}$ y $|u| = \theta \Longleftrightarrow u = \theta$

(5) $\big||u| - |v|\big| \leqslant |u + v| \leqslant |u| + |v|$ (desigualdad triangular)

(6) $u + v \vee w = (u + v) \vee (u + w)$ y $u + v \wedge w = (u + v) \wedge (u + w)$

(7) $\lambda(u \vee v) = \lambda u \vee \lambda v$ y $\lambda(u \wedge v) = \lambda u \wedge \lambda v$ si $\lambda \geqslant 0$

(8) $|\lambda u| = |\lambda||u|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(9) $u - v \wedge w = (u - v) \vee (u - w)$ y $u - v \vee w = (u - v) \wedge (u - w)$

(10) $|u - v| = u \vee v - u \wedge v$

(11) $|u \vee w - v \vee w| + |u \wedge w - v \wedge w| = |u - v|$ (identidad de Birkhoff's)

(12) $|u \vee w - v \vee w| \leqslant |u - v|$ y $|u \wedge w - v \wedge w| \leqslant |u - v|$ (desigualdades de Birkhoff's)

(13) Si $u, v, w \in E^+$: $(u + v) \wedge w \leqslant u \wedge w + v \wedge w$

Demostración.

Solamente probaremos (1), (2), (4), (5), (10), (11) y (13). Las demás identidades y desigualdades se deducen fácilmente.

(1) Probaremos que $u + v - u \wedge v = u \vee v$.

En efecto, $u + v - u \wedge w = u + v + (-u \vee -v)$

$$= (u + v - u) \vee (u + v - v)$$

$$= u \vee v$$

(2) Probaremos que (a) $u + u^- = u^+$

En efecto, $u + u^- = u + (-u \vee \theta) = (u + (-u)) \vee (u + \theta)$

$$= \theta \vee u = u^+$$

Ahora probaremos que $u^+ \wedge u^- = \theta$

En efecto, $\theta = -u^- + u^- = -(-u \vee \theta) + u^-$

$$= u \wedge \theta + u^-$$

$$= (u + u^-) \wedge u^-$$

$$= u^+ \wedge u^- \quad [\text{por (a)}]$$

(4) Probemos que $|u| = u^{+} + u^{-}$

En efecto, $|u| = u \vee -u = (u-(-u))^{+} - u$

$$= (2u)^{+} - u = 2u^{+} - u$$

$$= 2u^{+} - (u^{+} - u^{-})$$

$$= u^{+} + u^{-}$$

Ahora probaremos que $|u| = \theta \Longleftrightarrow u = \theta$

($\Longrightarrow$) Supongamos que $|u| = \theta$

Como $u \leqslant |u| = \theta$ y $-u \leqslant |u| = \theta$, entonces $u \leqslant \theta$ y $u \geqslant \theta$, por lo tanto $u = \theta$

($\Longleftarrow$) es trivial.

(5) Primero probaremos que $|u + v| \leqslant |u| + |v|$

En efecto, $u \leqslant |u|$ y $v \leqslant |v|$, entonces $u + v \leqslant |u| + |v|$

Por otro lado $-u \leqslant |u|$ y $-v \leqslant |v|$ entonces $(-u) + (-v) = -(u + v) \leqslant |u| + |v|$

Luego $|u| + |v|$ es una cota superior de $\{u + v, -(u + v)\}$ por lo tanto $|u + v| = (u + v) \vee -(u + v) \leqslant |u| + |v|$, entonces $|u + v| \leqslant |u| + |v|$

Ahora probaremos que $\big||u| - |v|\big| \leqslant |u + v|$

En efecto, $|u| = |u + v + (-v)| \leqslant |u + v| + |v|$, entonces

$$|u| - |v| \leqslant |u + v|$$

$|v| = |v + u + (-u)| \leqslant |v + u| + |u|$, entonces

$$|v| - |u| \leqslant |u + v|$$

Luego $|u + v|$ es una cota superior de $\{|u| - |v|, -(|u| - |v|)\}$ por lo tanto $\big||u| - |v|\big| = (|u| - |v|) \vee -(|u| - |v|) \leqslant |u + v|$, entonces $\big||u| - |v|\big| \leqslant |u + v|$

(10) $u \vee v - u \wedge v = (u \vee v - u) \vee (u \vee v - v)$

$$= (\theta \vee (v - u) \vee (u - v) \vee \theta)$$

$$= ((u - v) \vee \theta) \vee (-(u - v) \vee \theta)$$

$$= (u - v)^+ \vee (u - v)^-$$

$$= (u - v)^+ + (u - v)^- - \left[(u - v)^+ \wedge (u - v)^-\right]$$

$$= (u - v)^+ + (u - v)^-$$

$$= |u - v|$$

(11) $|u \vee w - v \vee w| + |u \wedge w - v \wedge w| =$

$$= (u \vee w) \vee (v \vee w) - \left[(u \vee w) \wedge (v \vee w)\right] + (u \wedge w) \vee (v \wedge w) - \left[(u \wedge w) \wedge (v \wedge w)\right]$$

$$= w \vee (u \vee v) - \left[w \vee (u \wedge v)\right] + w \wedge (v \vee u) - w \wedge (u \wedge v)$$

$$= \left[w \vee (u \vee v) + w \wedge (v \vee u)\right] - \left[w \vee (u \wedge v) + w \wedge (u \wedge v)\right]$$

$$= \left[w + (u \vee v)\right] - \left[w + (v \wedge u)\right]$$

$$= u \vee v - v \wedge u = |u - v|$$

(13) Sean $u, v, w \in E^+$

$$(u + v) \geqslant u \Rightarrow (u + v) \wedge w \geqslant u \wedge w \Rightarrow \theta \leqslant (u + v) \wedge w - u \wedge w$$

Luego $(u + v) \wedge w - u \wedge w = |(u + v) \wedge w - u \wedge w| \leqslant |u + v - u| = |v| = v$

Por otro lado $(u + v) \wedge w - u \wedge w \leqslant (u + v) \wedge w \leqslant w$. Por lo tanto $(u + v) \wedge w - u \wedge w \leqslant v \wedge w$.

Definición 1.5. Sea E un espacio de Riesz, y sean $u, v \in E$. Entonces, se dice que u y v son ortogonales o disjuntos si y sólo si $|u| \wedge |v| = \theta$; y se denota por $u \perp v$.

Si A y B son disjuntos, entonces $u \perp v$ para todo $u \in A$, $v \in B$, y se denota por $A \perp B$.

Proposición 1.6. Sea E un espacio de Riesz, y sean $u, v, w \in E$. Entonces:

(1) Si $u \perp v$ y $|w| \leqslant |u|$ entonces $w \perp v$,

(2) Si $u \perp v$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u \perp v$,

(3) Si $u \perp v$ y $w \perp v$, entonces $(u + w) \perp v$,

(4) $u \perp v$ si, y sólo si, $u^+ \perp v$ y $u^- \perp v$.

Demostración.

(1) Es claro que $\theta \leqslant |w| \wedge |v|$

Como $|w| \leqslant |u|$, entonces $|w| \wedge |v| \leqslant |u| \wedge |v| = \theta$, luego $|w| \wedge |v| = \theta$

(2) Primero observemos que si $u \perp v$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u \perp \lambda v$.

Ahora, si $u \perp v$ es equivalente a $|u| \perp |v|$, y también $(|\lambda| + 1)|u| \perp (|\lambda| + 1)|v|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Puesto que $|\lambda u| = |\lambda||u| \leqslant (|\lambda| + 1)|u|$, y por (1) tenemos que $\lambda u \perp (|\lambda| + 1)|v|$

Como $|v| \leqslant (|\lambda| + 1)|v|$, entonces $\lambda u \perp v$.

(3) $|u + w| \leqslant |u| + |w|$, entonces

$$
\begin{aligned}
|u + w| \wedge |v| &\leqslant (|u| + |w|) \wedge |v| \\
&\leqslant |u| \wedge |v| + |w| \wedge |v| \\
&= \theta + \theta = \theta
\end{aligned}
$$

Luego $(u + w) \perp v$.

(4) Puesto que, $|u^+| = u^+ \leqslant |u|$ y $u \perp v$, entonces $u^+ \perp v$

En forma análoga se prueba que $u^- \perp v$.

Recíprocamente, si $u^+ \perp v$ y $u^- \perp v$, entonces $(u^+ + u^-) \perp v$, por lo tanto $|u| \perp v$, luego $u \perp v$.

Proposición 1.7. Sea E un espacio de Riesz, y sean

$u, v, w \in E$. Entonces:

(1) $u \perp v$, $u \perp w$, entonces

$u \perp (\lambda v + \mu w)$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) Si $u \perp v$, entonces

$|u + v| = |u - v| = |u| + |v| = \big||u| - |v|\big| = |u| \vee |v|$

(3) Si $|u + v| = |u - v|$, entonces $u \perp v$

Demostración.

(1) Si $u \perp v$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $u \perp \lambda v$. $u \perp w$ y $\mu \in \mathbb{R}$, entonces $u \perp \mu w$, luego $u \perp (\lambda v + \mu w)$

(2) a) $|u| \vee |v| = |u| + |v|$

En efecto, $|u| + |v| = |u| \vee |v| + |u| \wedge |v| = |u| \vee |v|$

b) $|u| \vee |v| = \big||u| - |v|\big|$

En efecto, $|u| \vee |v| = \frac{1}{2}\left[|u| + |v| + \big||u| - |v|\big|\right]$

$= \frac{1}{2}\left[|u| \vee |v| + \big||u| - |v|\big|\right]$

Por lo tanto $2\left[|u| \vee |v|\right] - (|u| \vee |v|) = \big||u| - |v|\big|$,

luego $|u| \vee |v| = \big||u| - |v|\big|$, y también $\big||u| - |v|\big| = |u| + |v|$

c) $|u + v| = |u| + |v|$

En efecto, sabemos que $|u + v| \leqslant |u| + |v|$

Ahora probaremos que $|u| + |v| \leqslant |u + v|$

Como $\big||u| - |v|\big| \leqslant |u + v|$, entonces $|u| + |v| \leqslant |u + v|$, luego $|u + v| = |u| + |v|$

d) $|u + v| = |u - v|$

En efecto, $|u - v| = |u + (-v)| = |u| + |-v| = |u| + |v|$,

luego $|u + v| = |u - v|$

(3) Supongamos que $|u+v| = |u-v|$

$$\begin{aligned} |u| \wedge |v| &= \frac{1}{2}\left[|u| + |v| - \big||u| - |v|\big|\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[|u| + |v| - \big||u| + |v|\big|\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[|u| + |v| - (|u| + |v|)\right] \\ &= \theta \end{aligned}$$

Luego $u \perp v$

Proposición 1.8. (Teorema de descomposición de Riesz).
Supongamos que en el espacio de Riesz E resulta:
$|u| \leqslant |v_1 + \dots + v_n|$. Entonces, existen $u_1, \dots, u_n \in E \cdot |u_i| \leqslant |v_i|$ $(i = 1,2, \dots, n)$ y $u = u_1 + \dots + u_n$. Si u es positivo, los u_i pueden seleccionarse positivos.

Demostración. (Por inducción)

Si $n = 1$, entonces se toma $u_1 = u$.

Ahora, verifiquemos el resultado para $n = 2$ Supongamos que $|u| \leqslant |v_1 + v_2|$, y sea $u_1 = (u \vee -|v_1|) \wedge |v_1|$, entonces $u_1 \leqslant |v_1|$ y $-u_1 = (-u \wedge |v_1|) \vee -|v_1| \leqslant |v_1|$, luego $|u_1| \leqslant |v_1|$

Ahora, pongamos $u_2 = u - u_1$, entonces

$$\begin{aligned} u_2 = u - u_1 &= u + (-u \wedge |v_1|) \vee -|v_1| \\ &= (u + (-u \wedge |v_1|) \vee (u - |v_1|) \\ &= \theta \wedge (u + |v_1|) \vee (u - |v_1|) \end{aligned}$$

Pero $|u| \leqslant |v_1| + |v_2|$, entonces $-|v_1| - |v_2| \leqslant u \leqslant |v_1| + |v_2|$, luego $-|v_2| = (-|v_2|) \wedge \theta \leqslant (u + |v_1|) \wedge \theta \leqslant u_2 \leqslant \theta \vee (u - |v_1|) \leqslant |v_2|$

Por consiguiente $|u_2| \leqslant |v_2|$

Finalmente, supongamos que $u \in E^+$

$u_1 = [u \vee (-v_1)] \wedge v_1$ con $v_1 \geqslant \theta$

$= u \wedge v_1 \leqslant u.$

Luego $\theta \leqslant u_1 \leqslant u$. Como $u_2 = u - u_1$, entonces $u_2 \geqslant \theta$.

Con este preliminar, la demostración es inmediata.

Definición 1.6. (1) Se dice que el par $(D, \leqslant)$ es un conjunto dirigido si:

(a) $\leqslant$ es reflexiva

(b) $\leqslant$ es transitiva

(c) para todo $\alpha, \beta \in D$, existe $\delta \in D$: $\alpha \leqslant \delta$ y $\beta \leqslant \delta$

(2) Una red en un conjunto parcialmente ordenado es una aplicación de un conjunto dirigido $(D, \leqslant)$ en X·

$$u: (D, \leqslant) \longrightarrow X$$
$$\alpha \longmapsto u(\alpha) = u_\alpha$$

y que anotamos $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ o simplemente $\{u_\alpha\}$

(3) Una red $\{\alpha\}_{\alpha \in D}$ se dice creciente (resp. decreciente), y se denota por $u_\alpha \nearrow$ (resp. $u_\alpha \searrow$) si:

Para todo $\alpha, \beta \in D : \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow u_\alpha \leqslant u_\beta$ (resp. $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow u_\beta \leqslant u_\alpha$).

Observación 1.2. (1) La notación $u_\alpha \nearrow \leqslant u$ significa que $u_\alpha \nearrow$ y u es una cota superior de $\{\alpha\}_{\alpha \in D}$

(2) La notación $u_\alpha \nearrow u$ significa que

$u_\alpha \uparrow$ y $u = \sup \{ u_\alpha : \alpha \in D \}$

(3) La notación $u_\alpha \downarrow u$ significa que $u_\alpha \downarrow$ y $u = \inf \{ u_\alpha : \alpha \in D \}$

Proposición 1.9. Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$, dos redes en un espacio de Riesz E, y u, v $\in$ E, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

(1) $u_\alpha \uparrow u$, entonces $-u_\alpha \downarrow -u$ y $u - u_\alpha \downarrow \theta$

(2) $u_\alpha \uparrow u$, $\lambda \geqslant 0$, entonces $\lambda u_\alpha \uparrow \lambda u$

(3) $u_\alpha \uparrow u$, $v_\beta \uparrow v$, entonces $u_\alpha + v_\beta \uparrow u + v$

(4) $u_\alpha \uparrow u$, $v_\beta \uparrow$, $u_\alpha + v_\beta \uparrow u + v$, entonces $v_\beta \uparrow v$

Demostración.

(1) Son obvias

(3) Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$, dos redes en un espacio de Riesz E. Consideremos el conjunto dirigido producto

$D \times D' = \{ (\alpha, \beta) : \alpha \in D \quad \beta \in D' \}$,

donde $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha' \; \beta')$ si, y sólo si, $\alpha \leqslant \alpha'$ y $\beta \leqslant \beta'$

(a) Demostraremos primero que $u_\alpha + v_\beta \uparrow$

En efecto, supongamos que $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha', \beta')$ con $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta') \in D \times D'$, entonces $\alpha \leqslant \alpha' \quad \beta \leqslant \beta'$, luego $u_\alpha \leqslant u_{\alpha'}$ y $v_\beta \leqslant v_{\beta'}$, por lo tanto $u_\alpha + v_\beta \leqslant u_{\alpha'} + v_{\beta'}$.
Así pues $u_\alpha + v_\beta \uparrow$

(b) $\sup \{ u_\alpha + v_\beta : \alpha \in D \; \beta \in D' \} = \sup \{ u_\alpha : \alpha \in D \} + \sup \{ v_\beta . \beta \in D' \}$
$= u + v$

Así hemos probado que $u_\alpha + v_\beta \uparrow u + v$.

(2) Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en un espacio de Riesz E

Es claro que $\lambda u_\alpha \uparrow$. Por otra parte

$\sup\{\lambda u_\alpha : \alpha \in D\} = \lambda \sup\{u_\alpha : \alpha \in D\} = \lambda u$ para todo $\lambda \geqslant 0$

Luego $\lambda u_\alpha \uparrow \lambda u$.

(4) Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$ dos redes en un espacio de Riesz E, y $u, v \in E$.

Sea $\beta \in D'$, es claro que $u_\alpha + v_\beta \leqslant u + v$ para todo $\alpha \in D$, entonces $v_\beta \leqslant (u - u_\alpha) + v$, por lo tanto $v_\beta \leqslant \inf\{u - u_\alpha : \alpha \in D\} + v$, por consiguiente $v_\beta \leqslant \theta + v = v$. Así hemos probado que v es una cota superior de $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$

Supongamos ahora que $v_\beta \leqslant h$ para todo $\beta \in D'$, entonces $v_\beta + u_\alpha \leqslant u_\alpha + h$ para todo $\alpha \in D$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\sup\{u_\alpha + v_\beta : \alpha \in D, \beta \in D'\} &\leqslant \sup\{u_\alpha + h : \alpha \in D\} \\ &= \sup\{u_\alpha : \alpha \in D\} + h \\ &= u + h,\end{aligned}$$

luego $u + v \leqslant u + h$, entonces $v \leqslant h$. Así pues $v_\beta \uparrow v$.

Proposición 1.10. Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$ dos redes en un espacio de Riesz E, y $u, v \in E$ tales que $u_\alpha \uparrow u$ y $v_\beta \uparrow v$.

Entonces

(1) $u_\alpha \vee v_\beta \uparrow u \vee v$

(2) $u_\alpha \wedge v_\beta \uparrow u \wedge v$

En particular se tiene: si $u_\alpha \nearrow u$, entonces $u_\alpha \vee v \nearrow u \vee v$ y $u_\alpha \wedge v \nearrow u \wedge v$.

Demostración.

Sea $D \times D'$ el conjunto dirigido producto, y sean $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in D \times D'$.

(1) Sea $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha', \beta')$, entonces $\alpha \leqslant \alpha'$ y $\beta \leqslant \beta'$, por lo tanto $u_\alpha \leqslant u_{\alpha'}$ y $v_\beta \leqslant v_{\beta'}$, luego $u_\alpha \vee v_\beta \leqslant u_{\alpha'} \vee v_{\beta'}$.
Así pues $u_\alpha \vee v_\beta \nearrow$
Ahora probaremos que $u \vee v = \sup \left\{ u_\alpha \vee v_\beta \quad \alpha \in D, \beta \in D' \right\}$
En efecto, (a) $u_\alpha \leqslant u$ para todo $\alpha \in D$, y $v_\beta \leqslant v$ para todo $\beta \in D'$, entonces $u_\alpha \vee v_\beta \leqslant u \vee v_\beta$ y $u \vee v_\beta \leqslant u \vee v$ para todo $\alpha \in D$, $\beta \in D'$.

Luego $u_\alpha \vee v_\beta \leqslant u \vee v$ para todo $\alpha \in D$, $\beta \in D'$.

(b) Sea w cota superior de $\left\{ u_\alpha \vee v_\beta \ : \ \alpha \in D, \ \beta \in D' \right\}$, entonces

$u_\alpha \leqslant u_\alpha \vee v_\beta \leqslant w$ y $v_\beta \leqslant u_\alpha \vee v_\beta \leqslant w$ para todo $\alpha \in D$, $\beta \in D'$. Por lo tanto $u \leqslant w$ y $v \leqslant w$, luego $u \vee v \leqslant w$. Así hemos probado que

$u \vee v = \sup \left\{ u_\alpha \vee v_\beta \ : \ \alpha \in D, \ \beta \in D' \right\}$

(2) Sea $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha', \beta')$, entonces $\alpha \leqslant \alpha'$ y $\beta \leqslant \beta'$, por lo tanto

$u_\alpha \leqslant u_{\alpha'}$ y $v_\beta \leqslant v_{\beta'}$, para todo $\alpha, \alpha' \in D$; $\beta, \beta' \in D'$.
Luego $u_\alpha \wedge v_\beta \leqslant u_{\alpha'} \wedge v_{\beta'}$, para todo $\alpha, \alpha' \in D$; $\beta, \beta' \in D'$. Por consiguiente $u_\alpha \wedge v_\beta \nearrow$

Por otro lado

$$\sup\{u_\alpha \wedge v_\beta : \alpha \in D, \beta \in D'\} = \sup\{u_\alpha : \alpha \in D\} \wedge \sup\{v_\beta . \beta \in D'\}$$
$$= u \wedge v.$$

Así hemos probado que $u_\alpha \wedge v_\beta \uparrow u \wedge v$

Definición 1.7. Una red $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ en un espacio de Riesz E, se dice convergente en orden a $u \in E$, y se denota por $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, si existe una red $\{v_\alpha\}_{\alpha \in D}$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha$ para todo $\alpha \in D$ con $v_\alpha \downarrow \theta$ (ambas condiciones se denotan $|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha \downarrow \theta$)

Proposición 1.11. Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$ dos redes en un espacio de Riesz E, y $u, v \in E$. Entonces

(1) Si $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$ y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} v$, entonces $u = v$

(2) Si $u_\alpha \downarrow u$ o $u_\alpha \uparrow u$, entonces $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$

(3) Si $u_\alpha \uparrow$ o $u \downarrow$, y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces $u_\alpha \uparrow u$ o $u_\alpha \downarrow u$ respectivamente.

(4) Si $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$ y $v_\beta \xrightarrow{(o)} v$, entonces

(a) $\lambda u_\alpha + \mu v_\beta \xrightarrow[(\alpha\,\beta)]{(o)} \lambda u + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $u_\alpha \vee v_\beta \xrightarrow[(\alpha\,\beta)]{(o)} u \vee v$ y $u_\alpha \wedge v_\beta \xrightarrow[(\alpha,\beta)]{(o)} u \wedge v$

(c) $u_\alpha^+ \xrightarrow{(o)} u^+$, $u_\alpha^- \xrightarrow{(o)} u^-$ y $|u_\alpha| \xrightarrow{(o)} u$

(5) Si $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, y $u_\alpha \leqslant w$ para todo $\alpha_1 \leqslant \alpha$, entonces $u \leqslant w$

Demostración

(1) Sean $u, v \in E$, y $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en E.

$u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces existe $v_\alpha \searrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha$;

$u_\alpha \xrightarrow{(o)} v$, entonces existe $v'_\alpha \searrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - v| \leqslant v'$

Ahora $|u - v| = |(u_\alpha - u) + (v - u_\alpha)| \leqslant |u_\alpha - u| + |u_\alpha - v|$

$$\leqslant v_\alpha + v'_\alpha \ ,$$

Por lo tanto existe $v_\alpha + v'_\alpha = w_\alpha \searrow \theta$ en E tal que

$\theta \leqslant |u - v| \leqslant w_\alpha$, entonces

$\theta \leqslant |u - v| \leqslant \inf w_\alpha = \theta$, luego $|u - v| = \theta$. Así pues $u = v$

(2) Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en E, y $u \in E$.

Supongamos que $u_\alpha \nearrow u$, entonces $u - u_\alpha \searrow \theta$, luego existe una red $w_\alpha = u - u_\alpha \searrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leqslant w_\alpha$. Así hemos probado que $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$.

En forma análoga se demuestra para $u_\alpha \searrow u$.

(3) Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en E, $u \in E$.

Supongamos que $u_\alpha \nearrow$ y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$. Probaremos que $u_\alpha \nearrow u$.

En efecto, $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces existe $v_\alpha \searrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha$ para todo $\alpha \in D$.

Pero $|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha$ si, y sólo si, $-v_\alpha \leqslant u_\alpha - u$ y $u_\alpha - u \leqslant v_\alpha$ para todo $\alpha \in D$, por lo tanto $u_\alpha - u \leqslant \theta$ para todo $\alpha \in D$, luego θ es cota superior de $\{u_\alpha - u\}$

Sea v' cota superior de $\{u_\alpha - u\}$. Como $-v_\alpha \leqslant u_\alpha - u \leqslant v'$ para todo $\alpha \in D$, entonces v' es cota superior de $\{-v_\alpha\}$.

Pero $\sup\{-v_\alpha : \alpha \in D\} = -\inf\{v_\alpha : \alpha \in D\} = \theta$, luego $\theta \leqslant v'$.

Por lo tanto $\theta = \sup\{u_\alpha - u : \alpha \in D\} = \sup\{u_\alpha + (-u) . \alpha \in D\}$

$$= \sup\{u_\alpha : \alpha \in D\} + (-u),$$

luego $u = \sup\{u_\alpha : \alpha \in D\}$. Así pues $u_\alpha \nearrow u$.

En forma análoga se prueba que si $u_\alpha \searrow$ y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces $u_\alpha \searrow u$.

(4) Sean $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y $\{v_\beta\}_{\beta \in D'}$, dos redes en E, u, v $\in$ E y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Además sea D x D' el conjunto dirigido producto, y $(\alpha, \beta) \in D \times D'$.

Supongamos que:

$u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces existe $v_\alpha \searrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leq v_\alpha$, y

$v_\beta \xrightarrow{(o)} v$, entonces existe $v'_\beta \searrow \theta$ en E tal que $|v_\beta - v| \leq v_\beta$

(a) Probaremos que $\lambda u_\alpha + \mu v_\beta \xrightarrow[(\alpha,\beta)]{(o)} \lambda u + \mu v$.

En efecto,

$$|(\lambda u_\alpha + \mu v_\beta) - (\lambda u + \mu v)| \leq |\lambda (u_\alpha - u)| + |\mu (v_\beta - v)| =$$

$$= |\lambda|\, |u_\alpha - u| + |\mu|\, |v_\beta - v| \leq |\lambda| v_\alpha + |\mu|\, v'_\beta$$

luego existe $w_\delta = |\lambda| v_\alpha + |\mu| v'_\beta \searrow \theta$ en E:

$$|(\lambda u_\alpha + \mu v_\beta) - (\lambda u + \mu v)| \leq w_\delta \text{ con } \delta = (\alpha, \beta) \in D \times D'$$

(b) Es claro que $|u_\alpha^+ - u^+| \leq |u_\alpha - u|$ y $|u_\alpha^- - u^-| \leq |u_\alpha - u|$ para todo $\alpha \in D$.

Probaremos que $u_\alpha \vee v_\beta \xrightarrow{(o)} u \vee v$.

En efecto, $|u_\alpha \vee v_\beta - u \vee v| = |(u_\alpha - v_\beta)^+ + v_\beta - [(u - v)^+ + v]| =$

$$= |[(u_\alpha - v_\beta)^+ - (u - v)^+] + (v_\beta - v)|$$

$$\leq |(u_\alpha - v_\beta)^+ - (u - v)^+| + |v_\beta - v|$$

$$\leq |(u_\alpha - v_\beta) - (u - v)| + |v_\beta - v|$$

$$\leq |u_\alpha - u| + 2\,|v_\beta - v| \leq v_\alpha + 2\, v'_\beta ,$$

luego existe $w_\delta = v_\alpha + 2 v'_\beta \searrow \theta$ en E con $\delta = (\alpha, \beta) \in D \times D'$ tal que $|u_\alpha \vee v_\beta - (u \vee v)| \leq w_\delta$

Ahora probaremos que $u_\alpha \wedge v_\beta \xrightarrow{(o)} u \wedge v$.

En efecto,

$$|u_\alpha \wedge v_\beta - u \wedge v| = |u_\alpha + v_\beta - u_\alpha \vee v_\beta - (u + v - u \vee v)|$$

$$= |(u_\alpha + v_\beta) - (u + v) + (u \vee v - u_\alpha \vee v_\beta)|$$

$$\leqslant |(u_\alpha - u) + (v_\beta - v)| + |u_\alpha \vee v_\beta - u \vee v|$$

$$\leqslant |u_\alpha - u| + |v_\beta - v| + |u_\alpha \vee v_\beta - u \vee v|$$

$$\leqslant v_\alpha + v'_\beta + w_\delta \downarrow \theta \text{ en } E,$$

luego $u_\alpha \wedge v_\beta \xrightarrow{(o)} u \wedge v$.

(c) Son inmediatas

(5) Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en un espacio de Riesz E; u, w $\in$ E. Supongamos que $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces existe $w_\alpha \downarrow \theta$ en E tal que $|u_\alpha - u| \leqslant w_\alpha$ para todo $\alpha \in D$. Como $u_\alpha \leqslant w$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_1$ y $-w_\alpha \leqslant u_\alpha - u$ entonces $-w_\alpha \leqslant u_\alpha - u \leqslant w - u$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_1$, luego $\theta \leqslant w - u$. Así hemos probado que $u \leqslant w$.

Proposición 1.12. Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en un espacio de Riesz E, y u, v $\in$ E. Entonces

(1) Si $u_\alpha \perp v$ y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces $u \perp v$.

(2) Si $u_\alpha \uparrow u$ y $u_\alpha \perp v$, entonces $u \perp v$

Demostración.

(1) Supongamos que, $u_\alpha \perp v$, entonces $|u_\alpha| \wedge |v| = \theta$ para todo $\alpha \in D$; y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} u$, entonces existe $v_\alpha \downarrow \theta$ en E tal que

$$|u_\alpha - u| \leqslant v_\alpha \quad \text{para todo } \alpha \in D.$$

Por otro lado $|u| = |-u| = |u_\alpha - u + (-u_\alpha)|$

$$\leqslant |u_\alpha - u| + |u_\alpha|$$

$$\leqslant v_\alpha + |u_\alpha|$$

luego $|u| \leqslant v_\alpha + |u_\alpha|$, entonces $\theta \leqslant |u| \wedge |v| \leqslant (v_\alpha + |u_\alpha|) \wedge v$

$$\leqslant v_\alpha \wedge |v| + |u_\alpha| \wedge |v|$$

Por lo tanto $\theta \quad |u| \wedge |v| \leqslant v_\alpha \wedge |v| \leqslant v_\alpha$, luego $\theta \leqslant |u| \wedge |v| \leqslant \theta$.

Así pues $|u| \wedge |v| = \theta$, o sea, $u \perp v$.

(2) Es inmediato.

Lema 1.2. Sea $(E, \leqslant)$ un espacio de Riesz y $A \subseteq E$. Entonces

(1) Existe una red $\{u_\beta\}$ en E tal que $u_\beta \uparrow$ y $A \subseteq \{u_\beta\}$, y además, A y $\{u_\beta\}$ poseen las mismas cotas superiores.

(2) Sea $\{u_\beta\}$ una red en E con $u_\beta \uparrow$ y si u_{β_0} es un elemento cualquiera de $\{u_\beta : \beta \in D\}$, entonces $\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\}$. Además $\{u_\beta\}$ y $\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\}$ poseen las mismas cotas superiores. En particular $\{u_\beta\}$ posee supremo si, y sólo si, $\{u_\beta - u_{\beta_0} : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\}$ tiene supremo en E^+.

Demostración.

Existe $n \in \mathbb{N}$, y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(1) Sea $D = \{\beta : \beta = \{a_1, \ldots, a_n\}\}$ (todos los subconjuntos finitos de A).

Consideremos en D, la relación $\leqslant \; = \; \subseteq$. Es claro que $(D, \subseteq)$ es un conjunto dirigido. Sea la red de E definida por:

$$u_\beta : D \longrightarrow E$$
$$\beta = \{a_1, \ldots, a_n\} \rightsquigarrow u_\beta = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\}$$

esta relación está bien definida puesto que E es de Riesz.

Si $\beta = \{a\}$ con $a \in A$, entonces $u = \sup\{a\} = a$, luego $u_\beta = a$. Por consiguiente $A \subseteq \{u_\beta\}_{\beta \in D}$. Además, si $\beta_1 \leqslant \beta_2$ entonces $\beta_1 \subseteq \beta_2$. Por lo tanto $\sup \beta_1 \leqslant \sup \beta_2$, luego $u_{\beta_1} \leqslant u_{\beta_2}$. Por consiguiente $u_\beta \uparrow$

Además si h es cota superior de A, entonces para todo $\beta = \{a_1, \ldots, a_n\}$: $a_i \leqslant h$, por lo tanto $\sup \beta \leqslant h$. Luego h es una cota superior de $\{u_\beta\}_{\beta \in D}$. Recíprocamente, si h es una cota superior de $\{u_\beta\}_{\beta \in D}$, entonces $u_\beta \leqslant h$, para todo $\beta \in D$. Por lo tanto $a \leqslant h$ para todo $a \in A$, luego h es cota superior de A

(2) Sea $\{u_\beta\} \uparrow$ en E y $u_{\beta_0} \in \{u_\beta\}$

(a) Probaremos que $\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\} \uparrow$

En efecto, sea $D' = \{\beta \in D : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\}$, es claro que D' es un conjunto dirigido y la escribiremos $\{u_\beta\}_{\beta \in D'}$. Sea ahora $\beta, \beta' \in D'$, $\beta \leqslant \beta'$, entonces $u_\beta \leqslant u_{\beta'}$, luego $\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\} \uparrow$

(b) Probemos que $\{u_\beta\}_{\beta \in D}$ y $\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\}$ poseen las mismas cotas superiores. Sea h cota superior de $\{u_\beta\}$, entonces $u_\beta \leqslant h$, para todo $\beta \in D$, por lo tanto $u_\beta \leqslant h$, para todo $\beta \in D'$.

Luego h es cota superior de $\{u_\beta : \beta \in D'\}$

Sea u cota superior de $\{u_\beta : u_\beta \leqslant u_{\beta_0}\}$. Sea $u_\beta \in \{u_\beta : \beta \in D\}$, luego existe $\beta_2 \in D$ tal que $\beta_1 \leqslant \beta_2$ y $\beta_0 \leqslant \beta_2$

Como la red es creciente, $u_\beta \leqslant u_{\beta_2}$ y $u_{\beta_0} \leqslant u_{\beta_2}$, entonces $u_{\beta_2} \in \{u_\beta : u_\beta \leqslant u_{\beta_0}\}$, por lo tanto $u_{\beta_2} \leqslant u$, luego $u_\beta \leqslant u$. Así pues u es cota superior de $\{u_\beta : \beta \in D\}$

Además $s = \sup\{u_\beta : \beta \in D\} \Longleftrightarrow s = \sup\{u_\beta : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow s = \sup\{u_\beta - u_{\beta_0} : u_\beta \geqslant u_{\beta_0}\} + u_{\beta_0}$

Ejemplo 1.1 (Los espacios de Riesz).

(1) Sean $X \neq \phi$, $F(X) = \left\{ f \;/\; f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ función} \right\}$,

con $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $f,\ g \in F(X)$, $x \in X$,

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todo $f \in F(X)$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f \leqslant g$, si, y sólo si, $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $f,\ g \in F(X)$, $x \in X$

Entonces, $(F(X), +, \cdot, \leqslant)$ es un espacio de Riész.

(2) Sea $E = \mathbb{R}^2$. En E definimos el orden lexicográfico $\leqslant$, por

$(\alpha, \beta) \leqslant (\gamma, \delta)$ si, y sólo si, $(\alpha < \delta) \vee (\alpha = \delta \wedge \beta \leqslant \delta)$

Entonces, $(\mathbb{R}^2, \leqslant)$ es un espacio de Riesz.

(3) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida fijo, $0 < p < \infty$, y sea

$\mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ f : f \in \mathfrak{M} \text{ y } |f|^p \in \mathcal{L} \right\}$. Entonces

$(\mathcal{L}_p(\mu), +, \cdot, \leqslant)$ es un espacio de Riesz.

CAPITULO II

IDEALES Y BANDAS

ESPACIOS DE RIESZ ARQUIMEDIANOS

2.1 SUBESPACIOS DE RIESZ, IDEALES Y BANDAS

Definición 2.1 Sea E un espacio de Riesz y $S \subseteq E$. S se dice:

(1) Sólido si: para todo $u, v \in E$; $u \in S$, $|v| \leq |u|$, entonces $v \in S$

(2) Equilibrado si: $u \in S$, entonces $\lambda u \in S$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq 1$

De la definición anterior se deduce fácilmente la siguiente proposición:

Proposición 2.1 Sea S un conjunto sólido en un espacio de Riesz E. Entonces:

(1) $|u|$, u^+, $u^- \in S$ para todo $u \in S$

(2) S es equilibrado.

Definición 2.2 Sea E un espacio de Riesz y K un subespacio vectorial de E. Entonces:

(1) K es un subespacio de Riesz si para cada par $u, v \in K$, $\sup_E(u, v) \in K$.

(2) K es un ideal de E si K es sólido

(3) K es una banda de E si K es un ideal de E y si para todo $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, existe $\sup A \in E$, entonces $\sup A \in K$.

(4) K se denomina σ - ideal si K es un ideal de E y si para toda $\{ f_n \}_{n \geq 1} \subseteq K$, existe $f = \sup_{n \geq 1} f_n$ en E, entonces $f \in K$

Proposición 2.2 En un espacio de Riesz, se verifican solamente las siguientes implicaciones banda $\Longrightarrow$ σ - ideal $\Longrightarrow$ ideal $\Longrightarrow$ subespacio de Riesz.

Demostración.

Las implicaciones, banda $\Longrightarrow$ σ-ideal $\Longrightarrow$ ideal, son consecuencias inmediatas de la definición anterior.

La implicación, ideal $\Longrightarrow$ subespacio de Riesz, es una consecuencia de la proposición 2.1 (1).

Ejemplo 2.1 Los siguientes ejemplos garantizan que las inclusiones de la proposición 2.2, son propias:

(1) (Un subespacio de Riesz que no es ideal)

Sean $X \neq \emptyset$, (X, τ) un espacio topológico. Consideremos el siguiente conjunto $\mathfrak{F}(X) = \left\{ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ función} \right\}$.

Entonces el conjunto $\mathcal{C}(X) = \left\{ f \in \mathfrak{F}(X)\colon f \text{ es continua} \right\}$ es un subespacio de Riesz, pero en general no es un ideal de $\mathfrak{F}(X)$.

(2) (Un ideal que no es σ -ideal).

Sea el siguiente conjunto $\mathcal{C}([0, 1]) = \left\{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua} \right\}$

Entonces el conjunto $E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1])\colon f(0) = 0 \right\}$ es un ideal, pero no es σ-ideal de $\mathcal{C}([0, 1])$.

(3) (Un σ-ideal que no es banda).

Consideremos el siguiente conjunto

$E = \mathcal{L}([0, 1]) = \left\{ f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ Lebesgue integrable} \right\}$

Entonces el conjunto $N = \left\{ f \in \mathcal{L}([0,1])\colon f = 0 \text{ C.T.P} \right\}$

es un σ-ideal, pero no es banda.

Proposición 2.3. Sean E un espacio de Riesz y K un subespacio de Riesz de E, son equivalentes.

(1) K es un ideal.

(2) para todo $u, v \in E : \theta \leqslant v \leqslant u$, $u \in K$, entonces $v \in K$

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Es inmediato, puesto que K es un sólido.

(2)$\Longrightarrow$(1) Probaremos que K es sólido.

En efecto, sean $u, v \in E : |v| \leqslant |u|$, $u \in K$. Como K es un subespacio de Riesz, tenemos que $|u| \in K$.

Luego se tiene $\theta \leqslant v^+ \leqslant |v| \leqslant |u|$ entonces $v^+ \in K$, y

$\theta \leqslant v^- \leqslant |v| \leqslant |u|$ entonces $v^- \in K$,

por lo tanto $v = v^+ - v^- \in K$. Luego K es un ideal.

Proposición 2.4. Sea E un espacio de Riesz y K un ideal de E. Entonces son equivalentes

(1) K es una banda de E

(2) para toda red $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq K$, $\theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$ en E, entonces $u \in K$.

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2). Es inmediato, puesto que K es una banda.

(2)$\Longrightarrow$(1). Sea $\emptyset \neq A \subseteq K$ tal que existe supA en E. Como K es un ideal, K es un espacio de Riesz. Luego por el lema 1.2, existe una red $\{u_\alpha\}$ en K tales que $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$ y A poseen las mismas cotas superiores, entonces $\sup A = \sup\limits_{\alpha \in D} u_\alpha$. Sea $u_{\alpha_0} \in \{u_\alpha\}_{\alpha \in D}$, entonces $\{u_\alpha : \alpha \in D, u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} \uparrow$ y tiene las mismas cotas superiores que

$\{u_\alpha\}_{\alpha\in D}$, luego $\sup\{u_\alpha . \alpha\in D, u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} = \sup_{\alpha\in} u_\alpha = \sup A$.

$\operatorname{Sup}\{u_\alpha : \alpha\in D, u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} = \sup\{u_\alpha - u_{\alpha_0} : u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} + u_{\alpha_0}$,

pero $\theta \leqslant u_\alpha - u_{\alpha_0} \nleqslant \sup\{u_\alpha - u_{\alpha_0} : u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\}$ Como

$u_\alpha - u_{\alpha_0} \in K$, entonces por (2)

$\sup\{u_\alpha - u_{\alpha_0} : u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} \in E$, por lo tanto

$\sup\{u_\alpha - u_{\alpha_0} : u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} \in K$. Luego

$\sup A = \sup\{u_\alpha - u_{\alpha_0} : u_\alpha \geqslant u_{\alpha_0}\} + u_{\alpha_0} \in K$.

Así, hemos probado que K es una banda.

Proposición 2.5. Sean E un espacio de Riesz y $(S_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ y una familia de partes de E. Entonces:

(1) Si S_i es subespacio de Riesz de E, para todo $i\in\mathfrak{J}$ y, entonces $\bigcap_{i\in\mathfrak{J}} S_i$ es subespacio de Riesz.

(2) Si S_i es ideal, para todo $i\in\mathfrak{J}$ y, entonces $\bigcap_{i\in\mathfrak{J}} S_i$ es ideal

(3) Si S_i es banda para todo $i\in\mathfrak{J}$ y, entonces $\bigcap_{i\in\mathfrak{J}} S_i$ es banda

Demostración:

Son consecuencias inmediatas de las definiciones.

Proposición 2.6. Sea E un espacio de Riesz, y sea $A \subseteq E$ Consideremos los siguientes conjuntos.

$I = \{B \subseteq E : A \subseteq B,\ B \text{ es ideal}\}$

$J = \{D \subseteq E : A \subseteq D,\ D \text{ es banda}\}$

entonces: (1) $\bigcap I$ es ideal

(2) $\bigcap J$ es banda

Además, $\bigcap I$ (resp. $\bigcap J$) es el menor ideal (resp. banda) que contiene el conjunto A.

Demostración.

Se deduce de la proposición 2.5

Definición 2.3. Sean E un espacio de Riesz, y $A \subseteq E$. Los conjuntos $I(A) = \bigcap\{B \subseteq E : A \subseteq B,\ B \text{ ideal}\}$

$b(A) = \bigcap\{D \subseteq E : A \subseteq D,\ D \text{ banda}\}$

se llaman ideal (resp. banda) generado por el conjunto A.

Si A consiste de un solo elemento u, el ideal (resp. banda) generado por u, se llama ideal (resp. banda) principal, y lo denotaremos por I(u)(resp. b(u)).

Proposición 2.7. Sean E un espacio de Riesz y $A \subseteq E$.

Entonces

$$I(A) = \left\{u \in E \;\begin{matrix} \exists u_1,\dots,u_n \in A \\ \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0 \end{matrix} : |u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |u_i| \right\}$$

Es particular, si $u \in E$, entonces $I(u) = \{v \in E / \exists \lambda \geq 0 : |v| \leq \lambda u\}$

Demostración.

(a) $I(A) \neq \emptyset$, puesto que $\theta \in I(A)$.

En efecto, sea $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, entonces $|\theta| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |u_i|$

(b) I(A) es un subespacio vectorial de E.

En efecto, sean $v, w \in I(A)$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$; existen $v_1,\dots,v_n \in A$, y $w_1,\dots,w_m \in A$, además existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n \geqslant 0$, y $\mu_1,\dots,\mu_m \geqslant 0$ tales que

$$|v| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |v_i|, \quad |w| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, |w_j|, \text{ entonces}$$

$$|v+w| \leqslant |v|+|w| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i| + \sum_{j=1}^{m} \mu_j |w_j|$$

reordenando se tiene el resultado, o sea, $v + w \in I(A)$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in I(A)$, entonces existen $u_1,\dots,u_n \in A$, y $\lambda_1,\dots\lambda_n \geqslant 0$ tal que $|u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda i \; |u_i|$. Sea ahora $|\lambda u| = |\lambda|\,|u| \leqslant$

$$\leqslant |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |u_i|, \text{ entonces } |\lambda u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda|(\lambda_i)|u_i|, \text{ con } |\lambda|(\lambda_i) \geqslant 0$$

luego $\lambda u \in I(A)$.

Así hemos probado que $I(A)$ es un subespacio vectorial de E.

(c) Claramente $I(A)$ es un sólido, así pues $I(A)$ es un ideal

(d) $A \subseteq I(A)$. En efecto, sea $a \in A$, luego existe $n = 1$, $\lambda_1 = 1 : |a| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; |a_i| = |a|$, entonces $a \in I(A)$.

Ahora, sea C otro ideal tal que $A \subseteq C$. Probaremos que $I(A) \subseteq C$. En efecto, $u \in I(A) \Longrightarrow |u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; |u_i|$ con $u_1,\dots,u_n \in A$; $\lambda_1,\dots,\lambda_n \geqslant 0$, luego $u_1,\dots,u_n \in C$, entonces

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |u_i| \in C$. Como C es sólido, se tiene que $u \in C$.

Así $I(A) \subseteq C$

Proposición 2.8. Sea F un ideal de un espacio de Riesz E.

Sea

$H = \{u \in E \,/\,$ existe una red $\{u_\alpha\}_{\alpha\in} \subseteq F \; : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u\}$,

entonces:

(1) Para todo $u \in E^+ : u \in H$ si, y solo si, $u = \sup\{w \in F: \theta < w < u\}$

(2) $b(F) = H$

Demostración.

(1) Sean $B = \{u \in E^+$ existe una red $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u\}$

$y, C = \{u \in E^+ : u = \sup \{w \in F : \theta \leqslant w \leqslant u\}\}$

Probaremos que $B = C$

En efecto, sea $u \in B$, entonces existe

$\{u_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$. Es claro que el conjunto $\{w \in F : \theta \leqslant w \leqslant u\}$ esta acotado superiormente por u. Sea v otra cota superior del conjunto $\{w \in F : \theta \leqslant w \leqslant u\}$, entonces para todo $y \in \{w \in F . \theta \leqslant w \leqslant u\}$. $y \leqslant v$. Ahora $\theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$, $\{u_\alpha\} \subseteq F$, implica que $u_\alpha \in \{w \in F \;\; \theta \leqslant w \leqslant u\}$ entonces $u_\alpha \leqslant v$ para todo α, por lo tanto $u \leqslant v$ Así pues $u = \sup \{w \in F, \; \theta \leqslant w \leqslant u\} \in C$, entonces $B \subseteq C$

Ahora probaremos que $C \subseteq B$.

En efecto, sea $u \in C$, entonces $u \in E^+ : u = \sup \{w \in F : \theta \leqslant w \leqslant u\}$

Sea $A = \{w \in F : \theta \leqslant w \leqslant u\}$. claramente $(A, \leqslant)$ es un conjunto dirigido, puesto que F es un ideal.

Si $w_1, w_2 \in A$, entonces $\theta \leqslant w_1 \leqslant u$ y $\theta \leqslant w_2 \leqslant u$, luego $\theta \leqslant w_1 \vee w_2 \leqslant u$ y $w_1 \vee w_2 \in A$.

Consideremos la red

$$(A, \leqslant) \longrightarrow A$$

$$w \longmapsto w_w = w$$

luego tenemos que $\theta \leqslant w_w \uparrow u$, entonces $u \in B$.

Así, hemos probado que $B = C$

(2) (a) H es sólido.

En efecto, sea $v \in E$, $u \in H$, $|v| \leqslant |u|$ entonces

$|u| \wedge |v| = |v|$

$u \in H$, entonces existe una red

$\{u_\alpha\}_{\alpha\in} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow |u|$, por lo tanto

$\theta \leqslant u_\alpha \wedge |v| \uparrow |u| \wedge |v|$. Pero $|u_\alpha| \wedge |v| \leqslant |u_\alpha| = u_\alpha \in F$,

como F es sólido, entonces $u \wedge |v| \in F$ para todo

Luego existe una red

$\{u_\alpha \wedge |v|\} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \wedge |v| \uparrow |v|$, entonces

$v \in H$.

Así hemos probado que H es sólido.

(b) H es un subespacio vectorial de E.

(b.1) Sean $u, v \in H$, entonces existen dos redes

$\{u_\alpha\} \subseteq F$ y $\{v_\alpha\} \subseteq F$ tal que

$\theta \leqslant u_\alpha \uparrow |u|$ y $\theta \leqslant v_\alpha \uparrow |v|$ por lo tanto

$\theta \leqslant u_\alpha + v_\alpha \uparrow |u| + |v|$ con $\{u_\alpha + v_\alpha\} \subseteq F$,

luego $|u| + |v| \in H$.

Pero $|u + v| \leqslant |u| + |v|$, y como H es sólido,

se tiene que $u + v \in H$.

(b.2) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H$. Probaremos que $\lambda u \in H$.

En efecto, sea $u \in H$, entonces existe una red

$\{u_\alpha\} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow |u|$, luego $\theta \leqslant |\lambda| |u_\alpha| \uparrow |\lambda u|$

Por lo tanto existe una red

$\{|\lambda| u_\alpha\} \subseteq F : \theta \leqslant |\lambda| u_\alpha \uparrow |\lambda u|$,

luego $\lambda u \in H$.

Así pues H es un subespacio vectorial de E. De (a) y (b) tenemos que H es un ideal.

(c) Ahora probaremos que $F \subseteq H$

Sea $u \in F$, entonces $|u| \in F$, luego existe una red $\{u_\alpha\} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow |u|$, con $u_\alpha = |u|$, por consiguiente $u \in H$.

Así pues $F \subseteq H$.

(d) Ahora probaremos que para toda red $\{u_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq H : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$ en E, entonces $u \in H$.

Sean $C = \{u_\alpha : \alpha \in D\}$

y $E = \{v \in F \,/\, \exists \alpha \in D : \theta \leqslant v \leqslant u_\alpha\}$

Claramente $D \neq \emptyset$

(d.1) C y E poseen las mismas cotas superiores

En efecto, sea h una cota superior de C, entonces $u_\alpha \leqslant h$ para todo $\alpha \in D$. Sea $v \in E$, entonces existe $\alpha \in D : \theta \leqslant v \leqslant u_\alpha$, por lo tanto $v \leqslant h$, luego h es cota superior de E.

Sea ahora w una cota superior de E sea $\alpha_0 \in D$, entonces existe $\theta \leqslant v_\beta \uparrow u_{\alpha_0}$, por lo tanto $v_\beta \in E$, luego $u_{\alpha_0} \leqslant w$. Lo cual prueba que w es una cota supeior de C. Así pues $u = \sup C = \sup E$. Por consiguiente existe una red $\{z_\beta\} \subseteq F : \theta \leqslant z_\beta \uparrow u = |u|$, entonces $u \in H$. Así pues H es una banda que contiene a F.

(e) Finalmente, probaremos que H es la menor banda que contiene a F.

En efecto, supongamos que G es otra banda que contiene a F. Sea $u \in H$, entonces existe una red $\{u_\alpha\} \subseteq F : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow |u|$, lo cual implica que existe $\{u_\alpha\} \subseteq G$, por lo tanto $|u| \in G$, luego $u \in G$. Así pues $H \subseteq G$.

Todo lo anterior, prueba que $H = b(F)$.

Proposición 2.9. Sea E un espacio de Riesz y $A \subseteq E$.

Si $T = \bigcap \{B \subseteq E : A \subseteq B,\ B \text{ banda}\}$

entonces $T = b\,(I(A))$

Demostración.

Como T es una banda, entonces T es un ideal y además $A \subseteq T$, por lo tanto $I(A) \subseteq T$. Pero $b(I(A))$ es la menor banda que contiene a $I(A)$, luego $b(I(A)) \subseteq T$. Por otro lado, como $A \subseteq I(A) \subseteq b(I(A))$, entonces $b(I(A))$ es una banda que contiene a A, pero como T es la menor banda que contiene A, se tiene que $T \subseteq b(I(A))$.

Así, hemos probado que $T = b(I(A))$.

Proposición 2.10. Sea E un espacio de Riesz, y sean A y B ideales en E. Entonces $A + B$ es un ideal

Demostración.

(a) Claramente $A + B$ es un subespacio vectorial de E.

(b) Probemos que $A + B$ es sólido.

En efecto, sean $u \in E$, $v \in A + B$ tal que $|u| \leqslant |v|$ Como $v \in A + B$, existen $a \in A$, $b \in B : v = a + b$, así tenemos que $|u| \leqslant |a + b|$, por la proposición 1.8 existen

u_a, u_b : $|u_a| \leqslant |a|$, $|u_b| \leqslant |b|$ y $u = u_a + u_b$.

Pero A y B son sólidos, por lo tanto $u_a \in A$ y $u_b \in B$; luego $u = u_a + u_b \in A + B$.

Así, hemos probado que A + B es un ideal.

Proposición 2.11. Todo ideal de un espacio de Riesz, finitamente generado es principal.

Demostración

Sea E un espacio de Riesz, y $u, v \in E$.

(a) Primero probaremos que $I(u) = I(|u|)$.

En efecto, claramente $u \in I(|u|)$, luego

$I(u) \subseteq I(|u|)$ Sea ahora $v \in I(|u|)$, entonces existe $\lambda \geqslant 0$ tal que $|v| \leqslant \lambda |u|$, por lo tanto

$v \in I(u)$.

Así, hemos probado que $I(u) = I(|u|)$.

(b) Afirmamos que $I(u) + I(v) = I(\{u, v\}) = I(|u| \vee |v|)$

En efecto, sean $u, v \in I(u) + I(v)$, entonces

$|u| \wedge |v| \in I(u) + I(v)$, luego

$I(|u| \vee |v|) \subseteq I(u) + I(v)$.

Ahora, sea $z \in I(u) + I(v)$, entonces existen

$z_u \in I(u)$, $z_v \in I(v)$ tal que $z = z_u + z_v$. Por la proposición 2.7, existen

$\lambda, \lambda' \leqslant 0$: $|z_u| \leqslant \lambda |u|$, $|z_v| \leqslant \lambda' |v|$, entonces

$|z| = |z_u + z_v| \leqslant \lambda |u| + \lambda' |v| \leqslant (\lambda + \lambda')(|u| \vee |v|)$.

Por lo tanto $z \in I($ u v v $)$.

Así, hemos probado que $I(u) + I(v) = I(|u| \vee |v|)$.

Ahora probaremos que $I(\{u, v\}) = I(|u| \vee |v|)$

En efecto, como $u, v \in I(\{u, v\})$, entonces

$|u|, |v| \in I(\{u, v\})$, por lo tanto

$|u| \vee |v| \in I(\{u, v\})$, luego

$I(|u| \vee |v|) \subseteq I(\{u, v\})$.

En forma análoga se prueba que

$I(\{u, v\}) \subseteq I(|u| \vee |v|)$.

Así pues $I(u) + I(v) = I(\{u, v\}) = I(|u| \vee |v|)$.

Ahora fácilmente se prueba por inducción que si $u_1, \ldots, u_n \in E$, entonces $I(\{u_1, \ldots, u_n\}) = I(\bigvee_{i=1}^{n} |u_i|)$, lo que prueba la proposición.

De la proposición anterior se deduce fácilmente el siguiente corolario:

Corolario 2.1. Toda banda de un espacio de Riesz, finitamente generada es principal.

2.2. HOMOMORFISMOS DE RIESZ.

Definición 2.4. Sean E y M espacios de Riesz, y

$$\Pi : E \longrightarrow M$$

una aplicación lineal, Π es un

(1) Homomorfismo de Riesz; si $u \wedge v = \theta$ en E, entonces $\Pi(u) \wedge \Pi(v) = \theta$ en M.

(2) σ - homomorfismo de Riesz; si Π es un homomorfismo de Riesz y $u_n \xrightarrow{(o)} \theta$ en E, entonces $\Pi(u_n) \xrightarrow{(o)} \theta$ en M

(3) Homomorfismo normal de Riesz; si Π es un homomorfismo

de Riesz y $u_\alpha \xrightarrow{(o)} \theta$ en E, entonces $\Pi(u_\alpha) \xrightarrow{(o)} \theta$ en M.

(4) Isomorfismo de Riesz; si Π es un homomorfismo de Riesz y Π es biyectiva.

Proposición 2.12. Sean E y M espacios de Riesz y

$\Pi : E \longrightarrow M$

una aplicación lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) Π es un homomorfismo de Riesz.

(2) $\Pi(u \wedge v) = \Pi(u) \wedge \Pi(v)$ para todo $u, v \in E$

(3) $\Pi(u \vee v) = \Pi(u) \vee \Pi(v)$ para todo $u, v \in E$

(4) $\Pi(u^+) = [\Pi(u)]^+$ y $\Pi(u^-) = [\Pi(u)]^-$ para todo $u \in E$

(5) $\Pi(|u|) = |\Pi(u)|$ para todo $u \in E$.

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Sean $u, v \in E$. Pongamos $w = u \wedge v$, entonces

$(u - w) \wedge (v - w) = (u - u \wedge v) \wedge (v - u \wedge v) =$

$= [(u - u) \vee (u - v)] \wedge [(v - u) \vee (v - v)]$

$= [\theta \vee (u - v)] \wedge [\theta \vee - (u - v)]$

$= (u - v)^+ \wedge (u - v)^- = \theta$

Por hipótesis tenemos que $\Pi(u - w) \wedge \Pi(v - w) = \theta$

Ahora $\Pi(u) = \Pi[w + (u - w)] = \Pi(w) + \Pi(u - w)$

$\Pi(v) = \Pi[w + (v - w)] = \Pi(w) + \Pi(v - w)$

luego, $\Pi(u) \wedge \Pi(v) = [\Pi(w) + \Pi(u - w)] \wedge [\Pi(w) + \Pi(v - w)]$

$= \Pi(w) + [\Pi(u - w) \wedge \Pi(v - w)] = \Pi(w) = \Pi(u \wedge v)$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Obsérvese que $u \vee v = u + v - u \wedge v$ para todo $u, v \in E$.

Ahora $\Pi(u \vee v) = \Pi(u + v) - \Pi(u \wedge v) = [\Pi(u)+\Pi(v)]-[\Pi(u)\wedge\Pi(v)]$

$= [\Pi(u) + \Pi(v) - \Pi(u)] \vee [\Pi(u) + \Pi(v) - \Pi(v)]$

$= \Pi(v) \vee \Pi(u) = \Pi(u) \vee \Pi(v)$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Es trivial, puesto que $\Pi(u^+) = \Pi(u \vee \theta)$ y $\Pi(u^-) = \Pi(-u \vee \theta)$.

(4) $\Longrightarrow$ (5) En efecto, $\Pi(|u|) = \Pi(u^+ + u^-) = \Pi(u^+) + \Pi(u^-)$

$= [\Pi(u)]^+ + [\Pi(u)]^-$

$= |\Pi(u)|$, para todo $u \in E$

(5) $\Longrightarrow$ (1). En efecto, supongamos que $u \wedge v = \theta$, con $u, v \in E$.

Como $u \wedge v = \theta$, entonces $u + v = u \vee v$.

Por otro lado $u \wedge v = u \vee v - |u \quad v| = u + v - |u - v|$, luego

$\Pi(u)\wedge\Pi(v) = \Pi(u) + \Pi(v) - |\Pi(u) - \Pi(u)| = \Pi(u+v) - |\Pi(u - v)|$

$= \Pi(u + v) - \Pi(|u - v|) = \Pi(u + v - |u - v|)$

$= \Pi(u \wedge v) = \Pi(\theta) = \theta$

Definición 2.5. Se dice que dos espacios de Riesz L y M son isomorfos si existe un isomorfismo de Riesz entre L y M.

Proposición 2.13. Sea $\Pi: L \longrightarrow M$ un homomorfismo de Riesz, y sea $S \subseteq L$, si S es sólido, entonces $\Pi(S)$ es un sólido de M.

Demostración.

Sean $u, v \in L \cdot |\Pi(u)| \leqslant |\Pi(v)|$ con $v \in S$, entonces $\Pi(v) \in \Pi(S)$. Ahora $|\Pi(u)| \leqslant |\Pi(v)|$ si, y sólo si,

$-|\Pi(v)| \leqslant \Pi(u) \leqslant |\Pi(v)|$

Pongamos $w = [(-|v|) \vee u] \wedge |v| \in L$, obsérvese que

$|w| \leqslant |v|$, entonces $w \in S$, por lo tanto $\Pi(w) \in \Pi(S)$.

Además $\Pi(w) = [-|\Pi(v)| \vee \Pi(u)] \wedge |\Pi(v)|$

* $\Pi(w) \leqslant -|\Pi(v)| \vee \Pi(u) = \Pi(u)$

** $\Pi(u) \leqslant -|\Pi(v)| \vee \Pi(u)$, entonces $\Pi(u) \wedge |\Pi(v)| \leqslant \Pi(w)$

Pero $\Pi(u) = \Pi(u) \wedge |\Pi(v)| \leqslant \Pi(w)$. Luego por (*) y (**) tenemos que $\Pi(w) = \Pi(u) \in \Pi(S)$.

Así, hemos probado que $\Pi(S)$ es sólido.

2.3 COMPLEMENTO DISJUNTO

Definición 2.6. Sea E un espacio de Riesz, y sea $\emptyset \neq D \subseteq E$. El conjunto

$$D^d = \{u \in E \,.\, u \perp v \text{ para todo } v \in D\},$$

se denomina el complemento disjunto de D

El conjunto $(D^d)^d$ lo denotaremos por D^{dd}.

Proposición 2.14. Sea E un espacio de Riesz y D un subconjunto no vacío de E. Entonces.

(1) D^d es una banda en E

(2) $D \cap D^d = \emptyset$ o $D \cap D^d = \{\theta\}$

(3) $D \subseteq D^{dd}$

(4) $D \subseteq B$, entonces $B^d \subseteq D^d$ con $B \subseteq E$.

(5) $D^d = D^{ddd}$

(6) $D^d = [b(D)]^d$

Demostración.

(1) (a) D^d es un subespacio vectorial de E.

En efecto, sean $u, v \in D^d$, entonces $u \perp w$ y $v \perp w$

para todo $w \in D$, por lo tanto $(u + v) \perp w$ para todo $w \in D$, luego $u + v \in D^d$.

Ahora sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y sea $u \in D^d$, entonces $u \perp w$ para todo $w \in D$, por lo tanto $\lambda u \perp w$ para todo $w \in D$, luego $\lambda u \in D^d$.

Así, hemos probado que D^d es un subespacio vectorial de E.

(b) D^d es sólido.

En efecto, sean $u, v \in E$ tal que $|u| \leqslant |v|$ con $v \in D^d$.

Como $v \in D^d$, entonces $v \perp w$ para todo $w \in D$, luego $u \perp w$ para todo $w \in D$, por lo tanto $u \in D^d$

Por (a) y (b), D^d es un ideal de E.

(c) Finalmente, probaremos que para toda red $\{u_\alpha\} \subseteq D^d \cdot \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$ en E, entonces $u \in D^d$.

En efecto, sea $\{u_\alpha\} \subseteq D^d : \theta \leqslant u_\alpha \uparrow u$ en E.

Como $\theta \leqslant u_\alpha \in D^d$, entonces $\theta \leqslant u_\alpha \wedge |w| \uparrow u \wedge |w|$ para todo $w \in D$.

Pero $u_\alpha \wedge |w| = \theta$ para todo $w \in D$, por lo tanto $u \wedge |w| = \theta$ para todo $w \in D$, luego $u \in D^d$.

Así, hemos probado que D^d es una banda en E.

(2) Supongamos que $D \cap D^d \neq \emptyset$, entonces existe $w \in D \cap D^d$, por lo tanto $w \in D$ y $w \in D^d$, luego $w \perp w$, o sea, $|w| \wedge |w| = \theta$. Por consiguiente $D \cap D^d = \{\theta\}$.

(3) Supongamos que $u \in D$ y $u \notin D^{dd}$

$u \notin D^{dd}$, entonces existe $v \in D^d : |u| \wedge |v| > \theta$. Pero $u \in D$ y $v \in D^d$, implica que $|u| \wedge |v| = \theta$, lo que es una contradicción, por lo tanto $u \in D^{dd}$.

Así, hemos probado que $D \subseteq D^{dd}$.

(4) Sean D y B subconjuntos del espacio de Riesz E tal que $D \subseteq B$.

Sea $u \in B^d$, entonces $u \perp v$ para todo $v \in B$, por lo tanto $u \perp v$ para todo $v \in D$, luego $u \in D^d$.

Así pues $B^d \subseteq D^d$

(5) Se deduce fácilmente de (3) y (4).

(6) Como $D \subseteq b(D)$, entonces $[b(D)]^d \subseteq D^d$

Ahora, $D \subseteq D^{dd}$ y $D \subseteq b(D)$, entonces $b(D) \subseteq D^{dd}$, por lo tanto $D^{ddd} = D^d \subseteq [b(D)]^d$. Luego $D^d = [b(D)]^d$

Proposición 2.15. Sea E un espacio de Riesz, y sean A, B y D subconjuntos no vacíos de E. Si

(1) $A \subseteq B$, entonces $A \perp B^d$

(2) $D \perp E$, entonces $D^{dd} \perp E^{dd}$

(3) $A \perp B$, entonces $b(A) \perp b(B)$

Demostración.

(1) Sea $u \in A$, y $v \in B^d$, entonces $w \perp v$ para todo $w \in B$. Como $u \in B$, entonces $u \perp v$, por lo tanto $A \perp B^d$

(2) (a) Afirmamos que si $D \perp E$, entonces $D \subseteq E^d$.

En efecto, sea $u \in D$, entonces $u \perp v$ para todo $v \in E$, luego $u \in E^d$. Así pues $D \subseteq E^d$, luego por (1) tenemos que $D \perp E^{dd}$.

Si $D \perp E^{dd}$, entonces $E^{dd} \perp D$, por lo tanto $E^{dd} \subseteq D^{d}$, luego $E^{dd} \perp D^{dd}$.

(3) (a) Afirmamos que si $A \perp B$, entonces $A \perp I(B)$.

En efecto, sean $u \in A$ y $v \in I(B)$.

$v \in I(B)$, entonces existen $v_1,\dots,v_n \in B$ y $\lambda_1,\dots,\lambda_n \geqslant 0$ tal que $|v| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i v_i|$

Ahora, $|u| \wedge |v| \leqslant |u| \wedge \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i v_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u| \wedge |\lambda_i v_i|$,

por hipótesis, tenemos que

$|u| \wedge |\lambda_i v_i| = \theta$ $(i = 1, 2,\dots,n)$.

Luego, $\theta \leqslant |u| \wedge |v| \leqslant \theta$, entonces $|u| \wedge |v| = \theta$.

(b) Ahora probaremos que $A \perp b(B)$.

En efecto, sean $u \in A$ y $v \in b(B)$.

$v \in b(B) = b(I(B))$, entonces existe una red $\{v_\alpha\} \subseteq I(B) : \theta \leqslant v_\alpha \uparrow |v|$, por lo tanto $u \perp v_\alpha$ y $v_\alpha \uparrow |v|$ para todo α, entonces $u \perp |v|$, luego $u \perp v$.

Así, hemos probado que $A \perp b(B)$.

(c) Finalmente, probaremos que $b(A) \perp b(B)$.

Es una consecuencia inmediata de la parte (b).

2.4 SUBESPACIOS DE ORDEN DENSO Y SUPER ORDEN DENSO.

Definición 2.7. Sea E un espacio de Riesz y K un subespacio de Riesz en E. Se dice que K es:

(1) Orden denso en E, si para todo $u \in E$: $\theta < u$, existe $v \in K$ con $\theta < v \leqslant u$.

(2) Super orden denso en E, si para todo $u \in E$: $\theta < u$, existe $\{u_n\} \subseteq K$ con $\theta \leqslant u_n \uparrow u$ en E.

(3) Lleno, si para todo $u \in E$, existe $v \in K$ con $|u| \leqslant v$.

Proposición 2.16. Sea E un espacio de Riesz, y sea A un ideal en E, entonces A es orden denso en A^{dd}.

Es particular A es orden denso en E si, y sólo si, $A^d = \{\theta\}$

Demostración.

Sea A un ideal de E. Supongamos que A no es orden denso en A^{dd}. Entonces, existe $u \in A^{dd}$ con $u > \theta$ tal que para todo $v \in A$ no se verifica $\theta < v \leqslant u$.

Como A es un ideal, $|v| \wedge u = \big| |v| \wedge u \big| \leqslant |v|$ con $v \in A$, entonces $|v| \wedge u \in A$ para todo $v \in A$, luego $|v| \wedge u = \theta$ para todo $v \in A$, por lo tanto $u \in A^d$.

Ahora, $u \in A^d$ y $u \in A^{dd}$ implica que $u \in A^d \cap A^{dd} = \{\theta\}$, luego $u = \theta$ lo que es una contradicción.

Así, hemos probado que A es orden denso en A^{dd}.

Probemos que si A es orden denso en E, entonces $A^d = \{\theta\}$.

En efecto, sea $u \in A^d$, y supongamos que $u > \theta$.

Entonces $u \perp v$ para todo $v \in A$, por lo tanto $|u| \wedge |v| = \theta$ para todo $v \in A$.

Como A es orden denso en E, existe $w \in A$ tal que $\theta < w \leqslant u$, entonces $w \wedge u = w > \theta$. Pero $u \in A^d$ y $w \in A$, implica que $u \wedge w = \theta$, lo cual es una contradicción. Luego $u = \theta$.

Recíprocamente, si $A^d = \{\theta\}$, entonces A es orden denso en E.

En efecto, $A \subseteq E$, entonces $E^d \subseteq \{\theta\}$, luego $E^d = \{\theta\}$. $E^d = \{\theta\}$, entonces $E^{dd} = \{\theta\}^d$, por lo tanto $E \subseteq \{\theta\}^d$, luego $E = \{\theta\}^d$, por consiguiente $E = A^{dd}$.

Así, hemos probado que A es orden denso en E.

Proposición 2 17. Para cada ideal A de un espacio de Riesz E, el ideal $A \oplus A^d$ es orden denso en E

Demostración.

Sea A un ideal de E.

$A \subseteq A \oplus A^d$ y $A^d \subseteq A \oplus A^d$, entonces $(A \oplus A^d)^d \subseteq A^d$ y $(A \oplus A^d)^d \subseteq A^{dd}$, luego $(A \oplus A^d)^d \subseteq A^d \cap A^{dd} = \{\theta\}$, por lo tanto $(A \oplus A^d)^d = \{\theta\}$. Así, por la proposición 2.16, $(A \oplus A^d)$ es orden denso en E.

2.5 ESPACIOS DE RIESZ ARQUIMEDIANOS

DEfinición 2.8. Un espacio de Riesz E es arquimediano, si, y sólo si, para todo $u, v \in E$: $n v \leqslant u$, $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces $v \leqslant \theta$.

Proposición 2.18. Sea E un espacio de Riesz. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) E es arquimediano

(2) para todo $u, v \in E^+$: $n v \leqslant u (n = 1, 2, \ldots)$, entonces $v = \theta$

(3) $\inf\left\{\frac{1}{n} u : n \geqslant 1\right\} = \theta$ para todo $u \in E^+$

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Es obvio.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $u \in E^+$, entonces $\theta \leqslant \frac{1}{n} u$, para todo $n \geqslant 1$, luego θ es cota inferior del conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} u : n \geqslant 1 \right\}$. Sea w otra cota inferior de A, entonces $w \leqslant \frac{1}{n} u$ para todo $n \geqslant 1$, por lo tanto $n\, w \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$.

Si $w \in E^+$, entonces $w = \theta$ (por (2)).

Si $w \notin E^+$, $w \leqslant \frac{1}{n} u$, entonces $w^+ \leqslant \frac{1}{n} u^+ = \frac{1}{n} u$, puesto que $u \in E^+$.

Por lo tanto $nw^+ \leqslant u$, para todo $n \geqslant 1$, entonces $w^+ = \theta$.

Luego $w = w^+ - w^- = -w^-$, entonces $-w \in E^+$, por lo tanto $w \leqslant \theta$.

Así pues $\theta = \inf \left\{ \frac{1}{n} u : n \in \mathbb{N} \right\}$

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $u, v \in E$ tales que $nv \leqslant u$, para todo $n \geqslant 1$. Entonces $n\, v^+ \leqslant u^+$, por lo tanto $v^+ \leqslant \frac{1}{n} u^+$ para todo $n \geqslant 1$. Luego $v^+ \leqslant \inf \left\{ \frac{1}{n} u : n \geqslant 1 \right\} = \theta$, entonces $v^+ \leqslant \theta$, por lo tanto $v^+ = \theta$. Así tenemos que $v \leqslant \theta$.

Corolario 2.2. Todo subespacio de Riesz de un espacio arquimediano, es también arquimediano.

Demostración. Obvio.

Ejemplo 2.2.

(1) Sea $\mathfrak{F}(X) = \left\{ f: X \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f \text{ es una función} \right\}$ con el orden puntual $\leqslant$.

Cualquier subespacio de Riesz de $\mathfrak{F}(X)$ es arquimediano.

En efecto, sea S un subespacio de Riesz de $\mathfrak{F}(X)$.

Sea $f, g \in S^+ : n\, f \leqslant g$ para todo $n \geqslant 1$, entonces $\theta \leqslant n\, f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$. Luego $f(x) = 0$ para todo

$x \in X$, puesto que $\mathbb{R}$ es arquimediano, entonces $f = \theta$.

(2) Sea $E = \mathbb{R}^2$ provisto del orden lexicográfico, entonces $(\mathbb{R}^2, \leqslant)$ es un espacio de Riesz no arquimediano.

En efecto, para $x = (0, 1)$ y, $y = (1, 0)$ tenemos que $n\,x \leqslant y$ para todo $n \geqslant 1$, sin embargo $x > (0,0)$. Luego E no es arquimediano.

Proposición 2.19. Sea K un subespacio de Riesz, de un espacio arquimediano E. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) K es orden denso en E.

(2) para todo $u \in E^+$, $u = \sup\left\{ v \in K : \theta \leqslant v \leqslant u \right\}$

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $\theta < u \in E$, y supongamos que no se cumple que $u = \sup\left\{ v \in K : \theta \leqslant v \leqslant u \right\}$. Esto significa que existe $\theta < w \in E$ tal que $v \in K$ y $\theta \leqslant v \leqslant u$, entonces $v \leqslant u-w$.

Escojamos $x \in K$ tal que $\theta < x \leqslant w$, y obsérvese que $x \leqslant (u - w) + w = u$. Repitiendo el mismo argumento, implica que $2x = x + x \leqslant (u - w) + w = u$, y $2x \leqslant u - w$. Por inducción, tenemos que $\theta < nx \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$, lo que contradice que E es arquimediano.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Es obvio.

Proposición 2.20. Sea E un espacio de Riesz arquimediano y sea $u \in E^+$. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente (resp. inferiormente).

Entonces

(1) $(\sup A)u = \sup\left\{ \alpha u : \alpha \in A \right\}$

(2) $(\mathrm{Inf}A)u = \inf\left\{ \alpha u : \alpha \in A \right\}$

Demostración. (1) Sea $w = (\sup A)u$, luego w es cota superior de $B = \left\{ \alpha u : \alpha \in A \right\}$

Para todo $\alpha \in A$, $\alpha \leqslant \sup A$, entonces $(\sup A - \alpha) \geqslant 0$, por lo tanto $(\sup A - \alpha)u \geqslant \theta$, puesto que $u \in E^{+}$, luego $(\sup A)u \geqslant \alpha u$ para todo $\alpha \in A$.

Sea y otra cota superior de B

Probaremos que $n(w-y) \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$.

En efecto, para todo $n \geqslant 1$, existe $\alpha_n \in A$: $\sup A - \frac{1}{n} \leqslant \alpha_n \leqslant \sup A$, entonces $0 < \alpha_n - (\sup A - \frac{1}{n})$, por lo tanto $\theta < \alpha_n u - (\sup A - \frac{1}{n})u$, para todo $n \geqslant 1$, $u \in E^{+}$.

Luego $(\sup A - \frac{1}{n})u \leqslant \alpha_n u \leqslant y$, entonces $(\sup A - \frac{1}{n})u \leqslant y$, por lo tanto $n(\sup A)u - u \leqslant ny$, por consiguiente $n\left[(\sup A)u - y\right] \leqslant u$, para todo $n \geqslant 1$. Así pues $n(w-y) \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$.

Como $n\left[(\sup A)u - y\right] \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$, entonces $(\sup A)u - y \leqslant \theta$, puesto que E es arquimediano, entonces $(\sup A)u \leqslant y$.

Así hemos probado que $(\sup A)u = \sup\left\{ \alpha u : \alpha \in A \right\}$

En forma análoga se prueba para el ínfimo.

Proposición 2.21. Sea E un espacio de Riesz arquimediano, y sea A un subconjunto no vacío de E.

Entonces $b(A) = A^{dd}$.

Demostración.

(a) Supongamos que A es banda, probaremos que $A = A^{dd}$.

En efecto, sabemos que $A \subseteq A^{dd}$.

Recíprocamente, como A es un ideal, es orden denso en A^{dd}, luego $u = \sup([\theta, u] \cap A)$ para todo $u \in A^{dd+}$

Por lo tanto, si $u^+, u^- \in A^{dd}$, entonces $u^+, u^- \in A$.

Así, hemos probado que si $u = u^+ - u^- \in A^{dd}$, entonces $u \in A$, o sea, $A^{dd} \subseteq A$.

(b) Supongamos ahora que A es un subconjunto no vacío de E.

Sabemos que $A^d = [b(A)]^d$, entonces

$$A^{dd} = [b(A)]^{dd} = b(A) \text{ por (a).}$$

CAPITULO III

COMPLETITUD SEGUN EL ORDEN

Y

PROPIEDADES DE PROYECCION

3.1 COMPLETITUD SEGUN EL ORDEN

Definición 3.1. Sea E un espacio de Riesz. Sean $u, v \in E$ con $u \leqslant v$, se llama intervalo de orden de extremos u y v, al subconjunto de E, denotado $[u, v]$ y definido por:

$$[u, v] = \{ w \in E : u \leqslant w \leqslant v \}$$

Definición 3.2. Un espacio de Riesz E es:

(1) Dedekind completo (DC) si todo subconjunto no vacío acotado superiormente, posee supremo.

(2) σ-Dedekind completo (σ - DC) si todo subconjunto contable acotado superiormente, posee supremo.

(3) Casi σ- Dedekind completo (Aσ - DC) si es isomorfo a un subespacio de Riesz super orden denso en un σ - DC.

Definición 3.3. Se dice que un espacio de Riesz E tiene la propiedad contable del supremo si para todo subconjunto S provisto de supremo, existe un subconjunto contable de S con el mismo supremo.

Definición 3.4. Un espacio de Riesz E es super Dedekind completo (S D C) si es Dedekind completo y tiene la propiedad contable del supremo.

Observación 3.1. Es inmediato que

$S\ D\ C \Rightarrow D\ C \Rightarrow \sigma\text{-}D\ C \Rightarrow A\sigma\text{-}\ D\ C$

Proposición 3.1. Sea E un espacio de Riesz σ-D C. Entonces, E es arquimediano.

Demostración:

Sean $u, v \in E^+$ con $\theta \leqslant nu \leqslant v$ para todo $n \geqslant 1$. Entonces, existe $w = \sup \{nu \cdot n \geqslant 1\}$. Ahora bien: $nu = (n+1)u-u \leqslant w-u$, entonces $w \leqslant w-u$, por lo tanto $u \leqslant \theta$, luego $u = \theta$.

Observación 3.2. Como todo subespacio de Riesz de un espacio arquimediano, es arquimediano, los espacios $A\sigma$ - DC son arquimedianos.

Definición 3.5. Un espacio de Riesz Dedekind completo E^δ se llama d - completamiento de un espacio de Riesz E, si se verifica las siguientes condiciones:

(1) Existe un subespacio de Riesz E_o de E^δ tal que E y E_o son isomorfos.

(2) E_o es lleno y orden denso en E^δ.

Identificando E con el subespacio E_o podemos escribir, con abuso del lenguaje $E \subseteq E^\delta$.

Obsérvese que cada subespacio de Riesz de un Dedekind completo, es arquimediano; y también un espacio de Riesz E posee d-completamiento, solamente si E es arquimediano (ver [4], p.191).

Definición 3.6. El σ- d- completamiento E^{σ} de un espacio de Riesz arquimediano se define de la siguiente manera: E^{σ} es la intersección de la familia de todos los subespacios de Riesz entre E y E^{δ}, que son σ-Dedekind completo.

Como E^{δ} es σ- Dc, la familia de los subespacios de Riesz E' σ-Dc tales que $E \subseteq E' \subseteq E^{\delta}$ es no vacía, y por lo tanto E^{σ} está bien definida.

Claramente E^{σ} es σ- Dc.

Obsérvese que si E es casi σ- Dedekind completo, entonces E es super orden denso en E^{σ}.

Proposición 3.2. Sea E un espacio de Riesz Aσ - Dc
Sea E^{σ} su σ-d-completamiento y $u \in E^{\sigma^+}$.
Entonces existen dos sucesiones

$\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en E : $\theta \leqslant x_n \uparrow u$, $y_n \downarrow u$.

Demostración.

E es super orden denso en E^{σ}, entonces existe

$\{x_n\}$ en E : $\theta \leqslant x_n \uparrow u$ en E .

Como E es orden denso y lleno en E^{σ} existen p, q $\in E^+$: $p \leqslant u \leqslant q$. Luego $-q \leqslant -u \leqslant -p$, por lo tanto $\theta \leqslant q-u \in E^{\sigma+}$.

Por consiguiente existe $\{z_n\}$ en E: $\theta \leqslant z_n \uparrow q-u$.

Ahora bien: $q-u = \sup z_n$, entonces

$$u = q-\sup z_n = \inf(q-z_n) \text{ y } q-z_n \downarrow \text{ o sea,}$$

existe $\{y_n\} = \{q-z_n\}$ en E: $y_n \downarrow u$.

Proposición 3.3. Sea E un espacio de Riesz. Entonces, son equivalentes.

(1) E es $A\sigma$ - DC

(2) Para toda $\theta \leq u_n \downarrow$ en E, existe $\theta \leq v_n \uparrow$ tal que $v_m \leq u_n$ para todo n, m ≥ 1 y $u_n - v_n \downarrow \theta$.

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea E $A\sigma$- Dc y E^σ su σ- d- completamiento.

Dado $\theta \leq u_n \downarrow$ en E, como E^σ es σ-Dc, existe $\inf \{u_n : n \geq 1\} = u \in E^\sigma$ y como E es $A\sigma$- Dc, existe $\theta \leq v_n \uparrow u$ en E^σ. Entonces, $v_m \leq u \leq u_n$ para todo m, n ≥ 1; es decir $v_m \leq u_n$ y $u_n - v_n \downarrow \theta$.

($\Longleftarrow$) Probaremos directamente que E es $A\sigma$- Dc.

En efecto,

(a) Para toda $\{x_n\} \subseteq E$ tal que existe $a \in E$: $a \leq x_n \downarrow$, existe $\{y_n\} \subseteq E$: $y_n \uparrow$; y :

(i) $y_n \leq x_m$ para todo n, m

(ii) $x_n - y_n \downarrow \theta$

En efecto, sea $\{x_n\}$ tal que para un $a \in E$ resulta: $a \leq x_n \downarrow$ para todo n. Entonces, $\theta \leq x_n - a \downarrow$; luego existe $\{z_n\}$: $\theta \leq z_n \uparrow$ tal que $z_n \leq x_m - a$ y $(x_n - a) - z_n \downarrow \theta$, por lo tanto $z_n + a \leq x_m$ para todo n, m y $z_n + a \uparrow$ además $x_n - (a + z_n) \downarrow \theta$. Luego basta tomar $y_n = z_n + a$.

Obsérvese que en cualquier caso $\{y_n\}$ es acotada superiormente, por ejemplo por x_1.

(b) Sea $\mathcal{S}=\{\{x_n\}\subseteq E$: existe $a\in E$: $a\leqslant x_n\downarrow\}$.

En $\mathcal{S}$ definamos las siguientes operaciones

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$$

$$\lambda\{x_n\}=\{\lambda x_n\},\ \lambda\geqslant 0.$$

Se verifica que estas son operaciones en $\mathcal{S}$ en el sentido

$$\{x_n\}+\{y_n\},\lambda\{x_n\}\in\mathcal{S},\lambda\geqslant 0\Rightarrow\{x_n+y_n\},\ \{\lambda x_n\}\in\mathcal{S}$$

Las operaciones son asociativas, conmutativas. La sucesión constante $x_n=\theta$ es un "neutro" de (+). La multiplicación y la suma son distributivas.

Además: para toda $\{x_n\}\in\mathcal{S}$, existe $\{x'_n\}\in\mathcal{S}$: $\inf\{x_n+x'_n\}=\theta$

En efecto, dada $\{x_n\}\in\mathcal{S}$, existe a: $a\leqslant x_n\downarrow$, por (a) existe $\{y_n\}\subseteq E$: $y_n\uparrow$ y $x_n-y_n\downarrow\theta$, para todo n, m $y_n\leqslant x_m$.

Si ponemos: $x'_n=-y_n$, entonces $x'_n\downarrow$ y $-x_1\leqslant x'_n$ para todo n.

Luego $\{x'_n\}\in\mathcal{S}$, y por otra parte $x_n+x'_n=x_n-y_n\downarrow\theta$

(c) Defínase en $\mathcal{S}$ la relación

$\{x_n\}\simeq\{x'_n\}\Leftrightarrow\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ tienen las mismas cotas inferiores.

c.1 $\simeq$ Es evidentemente una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$.

c.2 $\simeq$ Es compatible con las operaciones, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}\simeq\{x'_n\}\\ \{y_n\}\simeq\{y'_n\}\end{array}\right\},\ \lambda\geqslant 0\Rightarrow\begin{array}{l}\{x_n+y_n\}\simeq\{x'_n+y'_n\}\\ \lambda\{x_n\}\simeq\lambda\{x'_n\}\end{array}$$

c.3 Sea $x_n=x\in E$ para todo n.

Si $\{x'_n\} \in \mathcal{A}$ y $\{x'_n\} \simeq \{x_n\}$, entonces $x = \inf x'_n$ y recíprocamente.

En efecto, x es cota inferior de $\{x_n\}$ y como $\{x'_n\}$ tiene las mismas cotas inferiores de $\{x_n\}$. En particular $x \leqslant x'_n$ para todo n. Si y es cota inferior de $\{x'_n\}$ también lo es de $\{x_n\}$, luego $y \leqslant x$, entonces $\inf x'_n = x$.

Recíprocamente, si $\inf x'_n = x \in E$, entonces $\{x'_n\} \simeq \{x_n\}$ donde $x_n = x$ para todo n.

Esto origina que en $\mathcal{A}/\simeq$, se pueda dar una estructura cociente.

(d) Pongamos $\mathcal{A}/\simeq\, = E'$.

E' es un espacio vectorial real con las operaciones:

$x + y = \overline{\{x_n + y_n\}}$, $\lambda x = \overline{\{\lambda x_n\}}$ $\lambda \geqslant 0$, donde $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$.

d.1 Obviamente $\{\overline{o}\}$ es el neutro de $(E', +)$.

d.2 Existencia de opuestos.

Para todo $x = \overline{\{x_n\}}$, existe $x' = \overline{\{x'_n\}}$ tal que $x + x' = \overline{\{x_n + x'_n\}} = \overline{\{\theta\}} = \theta$, puesto que $\inf \{x_n + x'_n\} = \theta$. O sea que $\overline{\{x'_n\}} = -\overline{\{x_n\}}$

d.3 Multiplicación por escalares negativos.

Si $\lambda < 0$, ponemos $\lambda x = (-\lambda)(-x)$ con $x \in E'$

Así en $(E', +, .)$ tenemos una estructura de espacio vectorial.

(e) Orden en E'.

Definamos en $\mathcal{S}$: $\{x_n\} \geqslant \theta \Longleftrightarrow x_n \geqslant \theta$ para todo n.

Obviamente si $\{x'_n\} \simeq \{x_n\}$ $\{x'_n\} \geqslant \theta$.

En E' definamos $\leqslant$ como sigue:

$x \geqslant \theta \Longleftrightarrow x = \overline{\{x_n\}}$, $\{x_n\} \geqslant \theta$.

El conjunto $E'+ = \left\{x = \overline{\{x_n\}} \in E' : x_n \geqslant \theta \quad \text{para todo } n\right\}$ es un cono, por lo tanto induce en E' una estructura de espacio vectorial ordenado.

(f) El orden $x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in E'^{+}$ hace de E' un espacio de Riesz.

En efecto, sea $x \in E'$, $x = \overline{\{x_n\}}$

Como $x_n^+ = x_n \vee \theta$ y $x_n \downarrow$, entonces $x^+_n \downarrow$. Además para todo n $x^+_n \vee \theta \geqslant \theta$, entonces $u = \overline{\{x_n \vee \theta\}} \geqslant \theta$

Por otra parte: para todo n $x_n \geqslant x_n \vee \theta$, entonces $x \leqslant u$.

Sea ahora $v \in E'^{+}$: $x \leqslant v$ y $v = \overline{\{v_n\}}$, entonces para todo n $x_n \leqslant v_n$, por lo tanto $x_n^+ \leqslant v_n$ para todo n, luego $v \geqslant u$.

Así hemos probado que existe $x^+ = x \vee \theta$.

(g) (E', +,.) es σ-Dc.

g.1. Observamos que si $x = \overline{\{x_n\}}$, entonces $x = \inf x_n$.

En efecto, $x_n \geqslant x$ para todo n.

Si para todo n $x'_n \leqslant x_n$, entonces $\overline{\{x'_n\}} \leqslant x$. Luego $x = \inf x_n$

g.2. Dado un conjunto numerable A es posible construir una sucesión $\{u_n\}$ decreciente tal que a es cota inferior de A si, y sólo si, $u_n \geqslant a$ para todo n.

En efecto, sea $A = \{x_k\}$ y pongase

$$u_n = \bigwedge_{k=1}^{n} x_k$$

Si a es cota inferior de los x_k, entonces

$\bigwedge_{k=1}^{n} x_k \geqslant a$, luego $u_n \geqslant a$ para todo n.

Recíprocamente, si $u_n \geqslant a$, entonces $x_n \geqslant \bigwedge_{k=1}^{n} x_k \geqslant a$, luego $x_n \geqslant a$ para todo n.

g.3. Considerese una sucesión $\{z_n\}$ decreciente tal que ella tiene las mismas cotas inferiores que $\left\{x_{n,k} : k, n \in \mathbb{N} \quad x_n = \overline{\{x_{n,k}\}}\right\}$

y sea $z = \overline{\{z_n\}}$, entonces $z = \inf z_n$, luego $z = \inf x_n$.

Así, hemos probado que E' es σ-Dc.

(h) E es super orden denso en E'.

En efecto, sea $\theta < u = \overline{\{u_n\}} \in E'$, luego existe $\{u_n\} \subseteq E : u_n \downarrow u$

Por lo tanto existe $\{y_n\} \subseteq E$:

$\theta \leqslant y_n \uparrow$, $y_m \leqslant u_n$ para todo n, m $\geqslant 1$ y $u_n - y_n \downarrow \theta$.

Como $\theta \leqslant y_n \leqslant u_1$ para todo n, entonces $-u_1 \leqslant -y_n$ y $-y_n \downarrow$, por lo tanto $\{-y_n\} \in \Delta$. Luego podemos considerar $y' = \overline{\{-y_n\}} \in E'$, por lo tanto $y' = \inf \{-y_n\} = -\sup\{y_n\}$, luego $\sup \{y_n\} = -y'$.

* Probaremos que $u = -y'$.

En efecto, $\theta = \inf \{u_n - y_n\} = -\sup \{y_n - u_n\}$

$$= -\left[\sup \{ y_n \} + \sup \{-u_n\}\right]$$

$$= -\left[-y' + (-u)\right]$$

$$= y' + u,$$

luego $u = -y'$

Así, hemos probado que E es super orden denso en E'.

3.2 PROPIEDADES DE PROYECCIONES

Definición 3.7. Sea E un espacio de Riesz. El elemento $v \in E$ se llama componente de $u > \theta$ si $v \wedge (u - v) = \theta$.

Definición 3.8. Una banda A en un espacio de Riesz E es una banda de proyección si, y sólo si, $E = A \oplus A^d$. Si $u \in E$ es tal que $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$, a u_1 y u_2 se le denomina los componentes de u en A y A^d respectivamente.

Definición 3.9. Sea A una banda de proeycción de un espacio de Riesz E, las proyecciones:

$$P_A : E = A \oplus A^d \longrightarrow A$$

$$\text{y} \quad P_{A^d}: E = A \oplus A^d \longrightarrow A^d,$$

definidas por $P_A(u) = u_1$ y $P_{A^d}(u) = u_2$

donde $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$,

se denominan proyección de bandas.

Proposición 3.4 Toda proyección de banda es un homomorfismo de Riesz.

Demostración.

Sea A una banda de Proyección en un espacio de Riesz E. Claramente P_A es un homomorfismo. Para todo $u \in E$, $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$, se tiene $|u| = |u_1 + u_2|$. Como $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$ entonces $|u_1| \wedge |u_2| = \theta$, por lo tanto $|u_1 + u_2| = |u_1| + |u_2|$, luego $|u| = |u_1| + |u_2|$, $|u_1| \in A$ y $|u_2| \in A^d$; por consiguiente $P_A(|u|) = |u_1| = |P_A(u)|$ Esto prueba que P_A es un homomorfismo de Riesz.

En forma análoga se prueba para P_{A^d}.

Proposición 3.5 Sea A una banda en un espacio de Riesz E. Entonces A es una banda de proyección si, y sólo si, existe $u_1 = \sup\, [\theta, u] \cap A$ para todo $u \in E^+$.

Además, si A es una banda de proyección, entonces $P_A(u) = u_1$ para todo $u \in E^+$.

Demostración.

Supongamos que A es una banda de proyección, entonces $E = A \oplus A^d$. Sea $u \in E^+$, entonces existen $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$ tal que $u = u_1 + u_2$. Como $|u| = u$ y $P_A(u) = u_1$, entonces $P_A(|u|) = u_1$. Como P_A es un homomorfismo de Riesz y $|u| \geqslant \theta$, entonces $P_A(|u|) \geqslant \theta$, luego $u_1 \geqslant \theta$.

De igual manera $P_{A^d}(u) = u_2$, entonces $P_{A^d}(|u|) = u_2$, luego $u_2 \geqslant \theta$. Como $u = u_1 + u_2$, entonces $\theta \leqslant u_1 \leqslant u$, luego $u_1 \in [\theta, u] \cap A$. Ahora probemos que $u_1 = \sup [\theta, u] \cap A$. En efecto, sea $v \in [\theta, u] \cap A$, entonces $\theta \leqslant v \leqslant u$ y $v \in A$; como $u - v \geqslant \theta$, implica que $\theta \leqslant u-v = u_1 + u_2 - v = (u_1 - v) + u_2$ con $u_1 - v \in A$, $u_2 \in A^d$. Luego $\theta \leqslant P_A(u - v) = u_1 - v$, entonces $v \leqslant u_1$, así u_1 es cota superior de $[\theta, u] \cap A$, y $u_1 \in [\theta, u] \cap A$, luego $u_1 = \sup [\theta, u] \cap A$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $u \in E^+$, existe $u_1 = \sup [\theta, u] \cap A$. Sea $u \in E$, como $u = u^+ - u^-$, basta considerar los elementos positivos. Además como $A \cap A^d = \{\theta\}$ basta probar que $E = A + A^d$. Sea $u \in E^+$, por hipótesis existe $u_1 = \sup [\theta, u] \cap A$. Sea $u_2 = u - u_1$, claramente $u_1 \leqslant u$, entonces $u_2 \geqslant \theta$.

Como $[\theta, u] \cap A \subseteq A$ y A es una banda, entonces $u_1 = \sup [\theta, u] \cap A \in A$.

Probemos que $u_2 \in A^d$. En efecto, si $u_2 \notin A^d$, entonces existe $v \in A$: $w = |u_2| \wedge |v| = u_2 \wedge |v| > \theta$, por lo tanto $\theta \leqslant w \leqslant |v|$. Como $v \in A$ y A es banda, entonces $w \in A$. Ahora $\theta < w \leqslant u_2 = u - u_1 \leqslant u$, por lo tanto $\theta < w + u_1 \leqslant u$, luego $w + u_1 \in [\theta, u]$. Como $w, u_1 \in A$ y A es banda, entonces $w + u_1 \in A$. Así pues $w + u_1 \in [\theta, u] \cap A$, entonces $\theta \leqslant w + u_1 \leqslant u_1$, por lo tanto $w = \theta$, lo cual es una contradicción. Así hemos probado que $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in A$ y $u_2 \in A^d$ para todo $u \in E^+$.

Sea $u \in E$, entonces $u = u^+ - u^-$, por lo anterior existen $u_1, u_2 \in E^+$, tal que

$$u^+ = u_1^+ + u_2^+ \quad \text{con } u_1^+ \in A \text{ y } u_2^+ \in A^d$$
$$u^- = u_1^- + u_2^- \quad \text{con } u_1^- \in A \text{ y } u_2^- \in A^d,$$

Por lo tanto $u = u^+ - u^- = u_1^+ + u_2^+ - (u_1^- + u_2^+)$, luego $u = (u_1^+ - u_1^-) + (u_2^+ - u_2^-)$ con $u_1^+ - u_1^- \in A$ y $u_2^+ - u_2^- \in A^d$, puesto que A y A^d son bandas, entonces $u \in A + A^d$. Así pues $E = A + A^d$ y A es una banda de proyección.

Proposición 3.6. Sea E un espacio de Riesz, $u \in E^+$ y $A_u = b(u)$.

Entonces A_u es banda de proyección, si y sólo si, existe $\sup(v \wedge nu) = v_1$ para todo $v \in E^+$.

Además, si A_u es una banda de proyección, entonces $P_u(v)=v_1$ para todo $v \in E^+$, donde P_u es la proyección de banda determinado por A_u.

Demostración.

Por la proposición anterior sabemos que A_u es una banda de proyección, si y sólo si, existe $v_1 = \sup\,[\theta, v] \cap A_u$ para todo $v \in E^+$. Luego basta probar que $\sup\,[\theta, v] \cap b(u) = \sup(v \wedge nu)$. Por consiguiente basta probar que $[\theta,v] \cap b(u)$ y $C = \{v \wedge nu\colon n \geqslant 1\}$ poseen las mismas cotas superiores.

(a) $C \subseteq [\theta, v] \cap b(u)$.

En efecto, sea $w \in C$, entonces $w = v \wedge nu$ con $n \geqslant 1$, por lo tanto $\theta \leqslant w \leqslant v$ y $\theta \leqslant w \leqslant nu$. Como $nu \in b(u)$, entonces $w \in b(u)$, luego $w \in [\theta, v] \cap b(u)$. Por consiguiente, toda cota superior de $[\theta,v] \cap b(u)$ lo es de C.

(b) Sea z una cota superior de C Probaremos que z es una cota superior de $[\theta, v] \cap b(u)$.

En efecto, sea $y \in [\theta, v] \cap b(u)$, entonces $\theta \leqslant y \leqslant v$ e $y \in b(u)$. Por lo tanto existe una red $\{y_\alpha\} \subseteq I(u)\colon \theta \leqslant y_\alpha \nearrow y$, luego $\theta \leqslant y_\alpha \leqslant v$.

Ahora bien: $y_\alpha \in I(u)$, entonces para todo α, existe $\lambda_\alpha \geqslant 0$ tal que $y_\alpha \leqslant \lambda_\alpha u$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$: $\lambda_\alpha < n_\alpha$, luego $y_\alpha < n_\alpha u$ para todo α.

Así para todo α, existe $1 \leqslant n_\alpha \in \mathbb{N}$: $y_\alpha \leqslant n_\alpha u$, entonces $y_\alpha \leqslant v \wedge n_\alpha u \leqslant z$, luego $y_\alpha \leqslant z$ para todo α.

Como $\theta \leqslant y_\alpha \uparrow y$ y $y_\alpha \leqslant z$, entonces $y \leqslant z$, por lo tanto z es una cota superior de $[\theta, v] \cap b(u)$. Por consiguiente C y $[\theta, v] \cap b(u)$ poseen las mismas cotas superiores.

Así, $A_u = b(u)$ es una banda de proyección si, y sólo si, existe $v_1 = \sup [\theta, v] \cap b(u)$ para todo $v \in E^+$, si y sólo si, existe $v_1 = \sup(v \wedge nu)$ para todo $v \in E^+$

Además $v_1 = P_u(v)$.

Definición 3.10 Un espacio de Riesz E se dice que tiene

(1) La propiedad de proyección (PP), si toda banda de E es una banda de proyección.

(2) La propiedad principal de proyección (PPP), si cada banda principal de E es una banda de proyección.

(3) Mucha banda de proyección (SMP) si cada banda no nula de E, contiene una banda de proyección no nula.

Proposición 3.7. Sea E un espacio de Riesz. Se tiene

(1) DC $\Rightarrow$ PP $\Rightarrow$ PPP $\Rightarrow$ SMP

(2) σ - DC $\Rightarrow$ PPP

Demostración.

(1.a) (DC $\Rightarrow$ PP). Sea A una banda de E. Como el conjunto $[\theta, u] \cap A$ es siempre acotado superiormente por u, y como E es DC, entonces existe sup $[\theta,u] \cap A$, luego A es una banda de proyección.

(1.b) (PP $\Rightarrow$ PPP). Es obvio.

(1.c) (PPP $\Rightarrow$ SMP). En efecto, sea A una banda no nula de E, entonces A contiene un elemento $u \neq \theta$. Sea B_u la banda principal generada por u, entonces $\{\theta\} \neq B_u \subseteq A$. Por hipótesis B_u es una banda de proyección. Por lo tanto E es SMP. Así hemos probado que PP $\Rightarrow$ PPP $\Rightarrow$ SMP.

(2) (σ- DC $\Rightarrow$ PPP). En efecto, sea B_u una banda principal de E, generada por $u \in E$. Sean $v \in E^+$, y el conjunto $C = \{ v \wedge nu.\ u \in E^+,\ n \geqslant 1 \}$,

C es contable y acotado superiormente. Como E es σ-DC, existe $\sup\{ v \wedge nu.\ u \in E^+,\ n \geqslant 1 \}$, luego B_u es una banda de proyección.

Proposición 3.8. Sea E un espacio de Riesz. Sean $u, v \in E^+$ con $\theta \leqslant nv \leqslant u (n = 1,2,\dots)$. Sea B_v una banda generada por v. Entonces
$|w| \leqslant u$ para todo $w \in B_v$.

Demostración.

Primero observemos que

$$B_v = b(I(v)) = \{ w \in E: \text{ existe } \{u_\alpha\} \subseteq I(v): \theta \leqslant u_\alpha \uparrow |w| \}$$

Sea $w \in B_v$, entonces existe $\{u_\alpha\} \subseteq I(v)$: $\theta \leqslant u_\alpha \uparrow |w|$. Como $u_\alpha \in I(v)$, entonces existe $\lambda \geqslant 0$: $u_\alpha \leqslant \lambda v$ para todo α. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$: $\lambda < n$, luego $\lambda v < nv \leqslant u$. Pero $|w| \leqslant \lambda v$, por lo tanto $|w| \leqslant u$.

Proposición 3.9. Sea E un espacio de Riesz con la propiedad SMP, entonces E es arquimediano.

Demostración.

Supongamos que E tiene la propiedad SMP. Sean $u, v \in E^+$ tal que $\theta \leqslant nv \leqslant u$ para todo $n \geqslant 1$. Probaremos que $v = \theta$.

En efecto, supongamos que $v \neq \theta$ $(v > \theta)$ Sea B_v la banda generada por v, entonces por hipótesis existe una banda de proyección $B \neq \{\theta\}$ tal que $B \subseteq B_v$. Luego para todo $u \in E^+$: $u=u_1 + u_2$ con $u_1 \in B$ y $u_2 \in B^d$, se satisface $u_1 = \sup\ [\theta,u] \cap B$.

(a) Ahora probemos que: $B^+ = [\theta,u] \cap B$

Claramente $[\theta,u] \cap B \subseteq B^+$. Sea ahora, $w \in B^+$, entonces $\theta \leqslant w \in B \subseteq B_v$, por lo tanto $w \in B_v$, luego $\theta \leqslant w \leqslant u$, por consiguiente $w \in [\theta,u] \cap B$. Así, hemos probado que $B^+ = [\theta,u] \cap B$. Por lo tanto $u_1 = \sup B^+$.

(b) Probemos que $u_1 = \sup 2B^+$.

En efecto, como $2B^+ \subseteq B^+$, entonces $\sup 2B^+ \leqslant \sup B^+$.

Por otra parte, $u \leqslant 2u$ para todo $u \in B^+$, entonces $\sup B^+ \leqslant \sup 2B^+$. Así, hemos probado que $\sup B^+ = \sup 2B^+ = u_1$. Luego $u_1 = 2u_1$ entonces $u_1 = \theta$, por lo tanto $z = \theta$ para todo $z \in B^+$, por consiguiente $B = \{\theta\}$, lo cual es una contradicción.

Proposición 3.10. Sea E un espacio de Riesz arquimediano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E posee PP

(2) Sean $v \in E^{\delta}$ y $u \in E$ con $v \wedge (u-v) = \theta$, entonces $v \in E$

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $v \in E^{\delta}$ con $v \wedge (u-v) = \theta$ para algún $u \in E$. Sea B_v la banda generada por v en E^{δ}, entonces $B = B_v \cap E$ es una banda en E, y por hipótesis B es una banda de proyección en E. Luego existe

$u_1 = \sup [\theta,u] \cap B$ con $u = u_1 + u_2$, y $u_1 \in B$, $u_2 \in B^d$.

(a) Probaremos que $u_2 \wedge v = \theta$

En efecto, sea $p \in E : \theta \leqslant p \leqslant v \wedge u_2$.

Claramente $p \in B_v$, luego $p \in B$. Además

$\theta \leqslant p \leqslant u_2 \leqslant u$, entonces $p \in [\theta,u] \cap B$, por lo tanto $p \leqslant u_1$. Así pues $p \leqslant u_1 \wedge u_2 = \theta$, por consiguiente $p = \theta$. Como E es orden denso en E^{δ}, entonces $v \wedge u_2 = \theta$.

(b) Ahora probaremos que $v = u_1$

En efecto, $v = v \wedge u = v \wedge (u_1 + u_2)$

$$\begin{aligned} &\leqslant v \wedge u_1 + v \wedge u_2 \\ &= v \wedge u_1 \\ &\leqslant u_1 \end{aligned}$$

Por otro lado $u_1 = \sup [\theta,u] \cap B \leqslant \sup [\theta,u] \cap B_v = v$

Luego $u_1 = v \in E$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea B una banda de E y $u \in E^+$. Sea

$u^* = \sup \{ v \in B : \theta \leqslant v \leqslant u \}$ en E^{δ}.

Si $u^* \wedge (u - u^*) > \theta$, entonces existe $w \in E$ con

$\theta \leqslant w \leqslant u^* \wedge (u - u^*)$.

Probaremos que $w \in B$.

En efecto, $\theta \leqslant w \leqslant u^*$, $w \in E$.

Para todo $v \in [\theta, u] \cap B$, $\theta \leqslant w \wedge v \leqslant v$, entonces $w \wedge v \in B$.

Por otra parte en E^δ: $\sup(w \wedge v) = w \wedge u^* = w \in E$.

Como B es banda en E, entonces $w \in B$. Pero entonces $w + u^* = \sup\{w + v: v \in B: \theta \leqslant v \leqslant u\}$. Como B es una banda, y $w, v \in B$, entonces $\theta \leqslant w + v \in B$.

Como $v \leqslant u^* \Longrightarrow v + w \leqslant u^* + w \leqslant u$

$\Longrightarrow v + w \leqslant u^*$

$\Longrightarrow \sup(v + w) \leqslant u^*$

$\Longrightarrow w + u^* \leqslant u^*$

$\Longrightarrow w \leqslant \theta$,

lo cual es una contradicción.

Esto prueba que $u^* \wedge (u-u^*) = \theta$, luego por hipótesis, $u^* \in E$.

Así hemos probado que B es una banda de proyección.

Proposición 3.11 Sea E un espacio de Riesz. Si E es PP, entonces E es $A\sigma$ - DC.

Demostración.

Sea E PP y $\theta \leqslant x_n \downarrow$ en E.

Sea $x = \inf\limits_{n \geqslant 1} x_n$ en E^σ, $x \geqslant \theta$. x pertenece, junto con todos los $x_n (n = 1,2,\ldots)$ al ideal de E^σ generado por x_1.

$x \in E^\sigma$: $x = |x| \leqslant |x_1| = x_1$,

$0.x_1 \leqslant x \leqslant 1.x_1$

Dada una sucesión de particiones de $[0,1]$ con $\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1}$ y $\lim\limits_{n \to \infty} |\Pi_n| = 0$, como todos los componentes de x_1 están en E $\mathcal{S}(\Pi_n, x) \in E$, $\mathcal{S}(\Pi_n, x) \uparrow x$ (T.E.F.)

Luego E es Aσ -DC.

La siguiente proposición que se refiere a la clasificación de espacios arquimedianos, se llama Teorema de inlcusión principal.

Proposición 3.12 (Teorema de inclusión principal). Supongamos que los espacios de Riesz poseen las siguientes propiedades: super Dedekind completo (SDC), Dedekin completo (DC), σ-Dedekin completo(σ- DC), casi σ- Dedekind completo (Aσ -DC), la propiedad de proyección (PP), la propiedad principal de proyección (PPP), (SMP), y la propiedad arquimediana (arq.). Entonces, se verifica solamente las siguientes implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & & \sigma\text{-DC} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & & A\sigma\text{-DC} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{SDC} \arrow[r, Rightarrow] & \text{DC} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \text{Arq.} \\
 & & \text{PP} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[uurr, Rightarrow] & \text{PPP} \arrow[r, Rightarrow] & \text{SMP} \arrow[uur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Esta proposición, ha sido demostrado en observación 3.1, proposición 3.1, obs. 3.2, prop. 3.7, pro.3.9, prop.3.11.

Ejemplo 3.1 Los siguientes ejemplos garantizan que las inclusiones del Teorema de inlcusión principal son propias

1. (Un espacio de Riesz Dedekind completo que no es Super Dedekind completo).

Sea X un conjunto no contable, y consideremos el siguiente conjunto

$$E = \left\{ f: X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ función} \right\}$$

Claramente E es un espacio de Riesz Dedekind completo.
Ahora sea $S = (\chi_{\{a\}})_{a \in X}$ el conjunto de las funciones características de los conjuntos unitarios $\{a\}_{a \in X}$. Obsérvese que S tiene como supremo a la función característica χ_X , sin embargo ninguna parte contable de S tiene como supremo esta función. En efecto, si $A \subseteq X$ es contable y $S_A = (\chi_{\{a\}})_{a \in A}$ resulta $\sup S_A = \chi_A \neq \chi_X$. Así, hemos probado que E no es Super Dedekind completo.

2. (Espacio de Riesz σ- DC que no es DC, ni PP).

Sea $L = \left\{ \lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ \lambda \text{ Lebesgue-mesurable} \right\}$

L es un espacio de Riesz con el orden $\geqslant$ dado por $u \geqslant v$ si, y sólo si $u(x) \geqslant v(x)$ para todo $u,v \in E$, $x \in [0,1]$.

Sea $E \subseteq [0,1]$ no mesurable, y sea $\{\chi_\alpha\}$ la red de funciones características de los subconjuntos finitos de E. Entonces, $\theta \leqslant \chi_\alpha \uparrow \leqslant e$ donde $e(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$.

* Probaremos que $\{\chi_\alpha\}$ no tiene supremo en L.

En efecto, sea u cota superior de $\{\chi_\alpha\}$ en L, luego $u^{-1}([1, +\infty[)$ es un conjunto mesurable, y $E \subsetneqq u^{-1}([1, +\infty[)$;

puesto que para todo $t \in E$ $u(t) \geqslant \chi_{\{t\}}(t) = 1$, por lo tanto $t \in u^{-1}([1, +\infty[)$. Si $t_0 \in u^{-1}([1, +\infty[) - E$, la función u' definida por $u'(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases}$

es mesurable y $u' < u$, pues $u' \leqslant u$ y $u' \neq u$, ya que $u'(t_0) = 0$ mientras que $u(t_0) \geqslant 1$.

u' también es cota superior de $\{\chi_\alpha\}$, luego no existe cota superior mínima de la familia.

Así, hemos probado que L no es DC.

** Ahora probaremos que L es σ- DC.

En efecto, sea $\theta \leqslant u_n \uparrow \leqslant u$ en L, obsérvese que $v(x) = \sup\{u_n(x): n = 1, 2, \dots\} < \infty$ para todo $x \in [0,1]$, entonces $v \in L$.

*** Finalmente probemos que L no es PP.

En efecto, consideremos el siguiente conjunto

$$B_E = \{ u \in L : u(x) = 0 \text{ para todo } x \in E \}$$

(i) Claramente B_E es una banda en L.

(i) Ahora probaremos que B_E no es una banda de proyección.

En efecto, sea $M = \left[\theta, \chi_{[0,1]}\right] \bigcap B_E$, y sea w cota superior de M. Para todo $t \in [0,1] - E$, $\chi_{\{t\}}(x) \in M$, luego

$1 = \chi_{\{t\}}(x) \leqslant w(x)$ para todo $t \in [0,1] - E$

Ahora bien: $w^{-1}(\{o\}) \subseteq w^{-1}([0,1[) \underset{\neq}{\subset} E$, luego existe $x_o \in E$: $w(x_o) > 0$. La función w' definida por

$$w'(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \neq x_o \\ \frac{1}{2} w(x_o) & \text{si } x = x_o \end{cases}$$

es mesurable y $w' < w$, pues $w' \leqslant w$ y $w' \neq w$; ya que $w'(x_o) < w(x_o)$. Pero w' es también cota superior de M, luego M no tiene cota superior mínima, por lo tanto B_E no es una banda de proyección.

Así, hemos probado que L no es PP.

3. (Un espacio de Riesz con PP que no es σ- DC, ni DC).

Sea $X = \{1, 2, \ldots\}$, y sea

$L = \{ f: X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ acotado y } f(X) \text{ finito} \}$ con el orden puntual.

(i) L tiene PP

En efecto, sea A una banda arbitraria en L, y sea el conjunto $X_1 = \{ x \in X: f(x) \neq 0 \text{ por lo menos para un } f \in A \}$, y $X_2 = X - X_1$. Entonces $A^d = \{ f \in L : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in X_1 \}$ y $A = A^{dd} = \{ f \in L : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in X_2 \}$

Sea $f \in L$, es claro que

$f\chi_{X_1} \in A$, $f\chi_{X_2} \in A^d$ y $f = f\chi_{X_1} + f\chi_{X_2}$, luego $L = A \oplus A^d$.

Así, hemos probado que L tiene PP.

(ii) Ahora probaremos que L no es σ - DC

La sucesión $u_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$

$$u_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right\}$$

esta acotado superiormente por $u_o = \{1, 1, 1, \dots\}$, pero no tiene supremo en L.

En efecto, sea $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ cota superior de los u_n. Entonces $w \geqslant u_n$ para todo n, luego $w_n \geqslant \frac{1}{n}$.

Como w es de rango finito, existe $n_o \geqslant 1$ tal que $\inf_{n \geqslant 1} w_n = w_{n_o} \geqslant \frac{1}{n_o}$. Si $n > n_o$ y $\frac{1}{n_o + 1} < \frac{1}{n_o} \leqslant w_{n_o + 1}$ definimos:

$$w'_n = \begin{cases} w_n & \text{si } n \neq n_o + 1 \\ \frac{1}{n_o + 1} & \text{si } n = n_o + 1 \end{cases}$$

Luego $w' = \{w'_1, w'_2, \dots, w'_n, \dots\} = \left\{w_1, w_2, \dots, w_{n_o}, \frac{1}{n_o + 1}, \dots\right\}$

es cota superior de los u_n y $w' < w$. Por lo tanto no existe cota superior mínima de la sucesión $\{u_n\}_{n \geqslant 1}$.

(iii) Como L tiene PP y no es σ- DC, entonces L no es DC; ver [4] p.280.

4. (Un espacio de Riesz Aσ - DC y PPP, pero que no es σ- DC, ni PP).

Sea L el espacio de Riesz de todas las sucesiones constantes a partir de cierto índice con el orden puntual.

(i) Es obvio que L es $A\sigma$ - DC y PPP.

(ii) L no es σ- DC

Se prueba en forma análoga al ejemplo 3 (ii).

(iii) L no es PP.

En efecto, sea $B = \left\{ \{u_n\} \in L : u_n = 0 \text{ para todo } n \text{ par} \right\}$

Claramente B es un subespacio vectorial de L.

Probaremos que B es sólido.

En efecto, sean $u, v \in L : |v| \leqslant |u|$ con $u \in B$. Entonces $|v_n| \leqslant |u_n|$ para todo n. Si n es par tenemos que $|u_n| = 0$, entonces $|v_n| \leqslant 0$, por lo tanto $v_n = 0$, luego $v \in B$.

Ahora probaremos que para toda red $\{u_\alpha\} \subseteq B : u_\alpha \uparrow u$ en L, entonces $u \in B$.

En efecto, para todo n $u_{\alpha, n} \uparrow u_n$, si n es par $u_{\alpha, n} = 0$ para todo α, luego $u_n = 0$.

Así, hemos probado que $u \in B$, luego B es una banda.

Finalmente, probaremos que B no es una banda de proyección.

En efecto, el vector $e = \{1, 1, 1, \ldots\}$ no se puede descomponer respecto a B y $B^d = \left\{ \{x_n\} \in L: x_n = 0 \text{ para todo } n \text{ impar} \right\}$.

5. (Un espacio de Riesz $A\sigma$ - DC y SMP, pero que no es PPP).

Sea L un espacio de Riesz de todas las sucesiones reales convergentes con el orden puntual.

L es $A\sigma$ - DC, puesto que es super orden denso en L_∞.

Obsérvese que L es SMP; pero L no tiene PPP, puesto que la banda $B_u = \left\{ \{v_n\} \in L : v_n = 0 \text{ para todo n par} \right\}$ generada por $u = \left\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots \right\}$, no es una banda de proyección, ya que el vector $e = \{1, 1, 1, \ldots\}$ no se puede descomponer respecto a B_u.

y $B_u^d = \left\{ \{z_n\} \in L : z_n = 0 \text{ para todo n impar} \right\}$

6. (Un espacio de Riesz con PPP, pero que no es $A\sigma$ - DC)

Sea $L = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ f función} \right\}$ con la siguiente propiedad. existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in Z}$ real con .... $x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$ tal que $x_n \longrightarrow \infty$ y $x_{-n} \longrightarrow -\infty$ Cuando $n \longrightarrow \infty$, y f es constante en cada intervalo abierto (x_i, x_{i+1}) $i \in \mathbb{Z}$

Obsérvese que L es un espacio de Riesz con el orden puntual. El espacio L no tiene la propiedad de proyección, puesto que la banda $B = \{ u \in L : u(x) = 0 \text{ para todo irracional } x \}$ no es una banda de proyección. Es claro que L tiene la propiedad principal de proyección, pues si $v \in L$, entonces la banda generada por v es

$B_v = \{ u \in L : u(x) = 0 \text{ siempre que } v(x) = 0 \}$, ésta es una banda de proyección. Obsérvese que L no es $A\sigma$ - DC.

7. (Un espacio de Riesz $A\sigma$ - DC, pero que no posee la propiedad SMP).

Sea $L = \mathcal{C}[0,1]$, el espacio de Riesz de funciones continuas a valores reales sobre $[0,1]$, con el orden puntual.

Obsérvese que L no tiene SMP, pero satisface la propiedad de supremo contable, puesto que

$\varphi : \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(u) = \int_0^1 u(x)dx$, es un operador estrictamente positivo (ver [2] , T. 26), por lo tanto L es super orden denso en su d-completamiento, así pues L es A σ - DC.

3.3 MODIFICACION DEL TEOREMA DE INCLUSION PRINCIPAL

Sea E un espacio de Riesz. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E^+$, la banda generada por $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es principal. En efecto, si $u = \bigvee_{i=1}^{n} u_i$ resulta $b(\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}) = b(u)$. Si el espacio es PPP, resulta que toda banda finitamente generada es de proyección, por ser principal.

Si en lugar de considerar conjuntos generadores finitos, tomamos en cuenta los conjuntos numerables, la banda generada no necesariamente resulta principal, y por lo tanto, aún en los espacios PPP, estas bandas pueden no ser de proyección. Consideramos así, la siguiente definición.

Definición 3.11 (Espacio σ- PP). Sea E un espacio de Riesz. Se dice que E es σ- PP si toda banda generada por una parte numerable de E, es banda de proyección.

Observación 3.3 Es inmediato que

$$PP \Longrightarrow \sigma\text{-PP} \Longrightarrow PPP$$

Proposición 3.1.3. Sea E un espacio de Riesz. Si E es σ-DC, entonces E es σ- PP.

Demostración.

Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq E$ una parte numerable de E, y sea B la banda generada por $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$

(a) Como E es PPP, toda banda finitamente generada es banda de proyección, pues es banda principal.

(b) Sea $B_n = b(\{x_1, \dots, x_n\})$, entonces $B_n \subseteq B$ para todo $n \geqslant 1$.

Claramente $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es un ideal.

(c) Probaremos que $B = b(\{x_n\}_{n \geqslant 1}) = b(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$

En efecto, $B_n \subseteq B$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq B$, luego

$b(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subseteq B$. Por otra parte,

$\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subseteq B$ y $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces

$b(\{x_n\}_{n \geqslant 1}) \subseteq b(\bigcup B_n)$

Así, hemos probado que $B = b(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$

(d) Sea $u \in E^+$, entonces existe $\sup([\theta, u] \cap B_n) = u_n$

Como $\theta \leqslant u_n \leqslant u$ para todo n, luego por hipótesis existe $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = u_o$

(e) Finalmente, probaremos que $u_o = \sup([\theta, u] \cap B)$.

En efecto, es claro que $u_o \in B$.

Como u es cota superior de los u_n, tenemos que $\theta \leqslant u_o \leqslant u$.

Así, hemos probado que $u_o \subset [\theta, u] \cap B$.

Ahora probemos que u_o es cota superior de $[\theta, u] \cap B$.

En efecto, sea $x \in [\theta, u] \cap B$, entonces $x \in B$, por lo tanto existe $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$: $\sup F = x$ (prop. 2.8).

Ahora, sea $\theta \leqslant y \in F$, entonces existe n_y: $y \in B_{n_y}$. Además $\theta \leqslant y \leqslant x \leqslant u$, luego $y \in [\theta, u] \cap B_{n_y}$, entonces

$y \leqslant u_{n_y} \leqslant u_o$, por lo tanto u_o es cota superior de F, por consiguiente $x \leqslant u_o$. Así tenemos que u_o es cota superior de $[\theta, u] \cap B$ y como $u_o \in [\theta, u] \cap B$, entonces $u_o = \sup([\theta, u] \cap B)$, luego B es una banda de proyección.

Así, hemos probado que E es σ-PP.

Para ubicar correctamente el espacio σ-PP; veremos tres ejemplos. El primero es de un espacio PPP que no es σ- PP, el segundo de un σ-PP que no es PP, y el tercero de un σ-PP que no es σ-DC.

Ejemplo 3.2

(1) Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{R}$ un anillo de partes de X, ordenado por la inclusión. Sea $S(\mathcal{R})$ la colección de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones características de los elementos de $\mathcal{R}$. Entonces, es claro que $S(\mathcal{R})$ es un espacio de Riesz.

Definición: Sea $f \in S(\mathcal{R})$, se define

$$S(f) = \{ x \in X : f(x) \neq 0 \} \in \mathcal{R}.$$

Sea $\mathcal{R}$ un anillo de conjuntos que no sea σ- anillo. En este caso, existe $A_n \uparrow$ en $\mathcal{Q}$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{Q}$. En $S(\mathcal{Q})$

Consideremos la banda generada por la n familia $(\chi_{A_n})_{n \geq 1}$. Entonces, es claro que $B = \{ f \in S(\mathcal{Q}) : S(f) \subseteq A \}$ es una banda generada por $(\chi_{A_n})_{n \geq 1}$.

Probaremos que B no es una banda de proyección. Para ello probaremos que no existe $\sup [\theta, \chi_x] \cap B$. En efecto, si $A' \in \mathcal{Q}$ y $A' \subseteq A$, entonces

$\varphi_{A'} \in [\theta, \chi_x] \cap B$. Si φ es cota superior, entonces

$\varphi_{A'} \leq \varphi$ para todo $A' \subseteq A$.

En particular para todo n $\varphi_{A_n} \leq \varphi$, entonces para todo n $S(\varphi_{A_n}) = A_n \subseteq S(\varphi)$, por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq S(\varphi) \subseteq A$, luego $S(\varphi) = A \notin \mathcal{Q}$.

Por lo tanto $S(\mathcal{Q})$ es no σ - PP, pero claramente $S(\mathcal{Q})$ es PPP.

(2) El ejemplo 3.1 (2) es un ejemplo de un espacio σ-PP que no es PP.

(3) El ejemplo 3.1 (3) proporciona un espacio σ-PP que no es σ-DC.

CONCLUSIONES

1. Los σ-PP constituyen una nueva clase de Espacios Arquimedianos que amplia los PP y σ- DC.

2. El diagrama de inclusión principal queda de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
 & & \sigma\text{-DC} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[ddrr, Rightarrow] & & A\sigma\text{- DC} \arrow[drrr, Rightarrow] & & & \\
\text{SDC} \arrow[r, Rightarrow] & \text{DC} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & & & & \text{arq.} \\
 & & \text{PP} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[uurr, dashed, Rightarrow] & & \sigma\text{-PP} \arrow[r, Rightarrow] & \text{PPP} \arrow[r, Rightarrow] & \text{SMP} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

3. El autor de este trabajo esta convencido de que vale también la implicación.

$$\sigma\text{- PP} \Longrightarrow A\sigma\text{ - DC}$$

Sin embargo los esfuerzos en esta dirección no han fructificado hasta la fecha.

A P E N D I C E

TEOREMA ESPECTRAL DE FREUDENTHAL'S

A. SISTEMA ESPECTRAL

En esta sección, supondremos que E es un espacio de Riesz con la propiedad principal de proyección (PPP). La banda generada por $f \in E$, la denotaremos por B_f, y la proyección en B_f, la denotaremos por P_f.

Además, consideraremos a e, como un elemento no nulo de E^+.

Lema A.1 Un elemento $p \in E$ es un componente de e si, y sólo si, existe $v \in E^+$ tal que $p = P_v(e)$

Además, cada componente p de e satisface $\theta < p \leqslant e$.

Demostración.

Es claro que $\theta \leqslant p \leqslant e$.

Probaremos que existe $v \in E^+$ tal que $p = P_v(e)$. En efecto, sean $e > \theta$ y p en E tal que $p \perp (e-p)$. Luego existe $\theta \leqslant p \in B_p$; y $\theta \leqslant e - p \in B_p^d$: $e = p + e - p$, por lo tanto $P_p(e) = p$

Recíprocamente, sea B_f la banda principal generada por f, entonces B_f es una banda de proyección, y $e = P_f(e) + (e-P_f(e))$ con $P_f(e) \in B_f$, $e-P_f(e) \in B_f^d$, luego $P_f(e) \perp (e-P_f(e))$, por lo tanto $P_f(e)$ es un componente de e.

Sea $f \in Be$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $-\infty < \alpha < \infty$.

Sea $u_\alpha = (\alpha e - f)^+$, la banda generada por u_α, la denotaremos por B_α, la proyección en B_α por P_α, y el componente de e en B_α por p_α, así pues $p_\alpha = P_\alpha(e)$.

Obsérvese que $B_{p_\alpha} = B_\alpha$, ver [4] p. 182.

Lema A.2 Se verifica lo siguiente,

$$-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty \Longrightarrow u_\alpha \leqslant u_\beta \Longrightarrow B_\alpha \subseteq B_\beta \Longrightarrow p_\alpha \leqslant p_\beta$$

Demostración.

(a) $\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \alpha e \leqslant \beta e \Longrightarrow \alpha e + (-f) \leqslant \beta e + (-f)$

$$\Longrightarrow u_\alpha \leqslant u_\beta$$

(b) Como $u_\beta \in B_\beta$ y B_β es un ideal, entonces $u_\alpha \in B_\beta$,

luego $B_\alpha \subseteq B_\beta$

(c) Ahora probaremos que $p_\alpha \leqslant p_\beta$

Como $B_\alpha \subseteq B_\beta$, entonces $[\theta,\ e] \cap B_\alpha \subseteq [\theta,\ e] \cap B_\beta$,

por lo tanto $\sup [\theta,\ e] \cap B_\alpha \leqslant \sup [\theta,\ e] \cap B$,

luego $p_\alpha \leqslant p_\beta$

Lema A.3. Si $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \gamma < \delta$, entonces

$$p_\beta - p_\alpha \perp p_\delta - p_\gamma$$

Demostración.

En efecto, $\theta \leqslant p_\beta - p_\alpha \leqslant p_\beta \leqslant p_\delta$ y $r_\delta = e - p_\delta \perp p_\delta$, entonces $p_\beta - p_\alpha \perp r_\delta$.

En forma análoga se prueba que $p_\beta - p_\alpha \perp r_\delta$

Luego $p_\beta - p_\alpha \perp r_\gamma - r_\delta = p_\delta - p_\gamma$

Proposición A.1. (1) $P_\alpha(f) \leqslant \alpha p_\alpha$ para todo α ; en particular $P_\alpha(f) \leqslant \theta$ para $\alpha \leqslant 0$

(2) $\alpha(e - p_\alpha) \leqslant f - P_\alpha(f)$ para todo α ; en particular, $P_\alpha(f) \leqslant f$ para $\alpha \geqslant 0$.

(3) Si $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$, entonces

$$\alpha(p_\beta - p_\alpha) \leqslant (P_\beta - P_\alpha)(f) \leqslant \beta(p_\beta - p_\alpha).$$

(4) Si $\alpha \nearrow \beta$, entonces $B_\alpha \nearrow B_\beta$ y $p_\alpha \nearrow p_\beta$

Además, tenemos que

(a) Si $\alpha \searrow -\infty$, entonces $P_\alpha(v) \searrow \theta$ para todo $v \geqslant \theta$,

(b) Si $\alpha \nearrow \infty$, entonces $P_\alpha(v) \nearrow v$ para todo $v \geqslant \theta$ con $v \in B_e$.

En particular, si $\alpha \searrow -\infty$, entonces $p_\alpha \searrow \theta$, y si $\alpha \nearrow \infty$ entonces $p_\alpha \nearrow e$.

Demostración.

(1) Sabemos que $P_{g^+}(g) = g^+ \geqslant \theta$.

Escogiendo $g = \alpha e - f$, obtenemos $P_\alpha(\alpha e - f) \geqslant \theta$.

Como P_α es lineal, tenemos que

$P_\alpha(\alpha e - f) = \alpha P_\alpha(e) - P_\alpha(f) \geqslant \theta$, entonces $P_\alpha(f) \leqslant \alpha P_\alpha(e)$, luego $P_\alpha(f) \leqslant \alpha p_\alpha$ para todo α .

Es claro que si $\alpha \leqslant 0$, entonces $P_\alpha(f) \leqslant \theta$.

(2) Obsérvese que $g - P_{g^+}(g) = g - g^+ = -g^- \leqslant \theta$.

Pongamos $g = \alpha e - f$, luego

$\alpha e - f - P_\alpha(\alpha e - f) = \alpha e - f - [P_\alpha(\alpha e) - P_\alpha(f)] \leqslant \theta$,

entonces $\alpha e - \alpha P_\alpha(e) - f + P_\alpha(f) \leqslant \theta$, por lo tanto $\alpha(e - P_\alpha e) \leqslant f - P_\alpha(f)$.

Así, hemos probado que $\alpha(e - p_\alpha) \leqslant f - P_\alpha(f)$ para todo

Es claro que si $\alpha \geqslant 0$, entonces $P_\alpha(f) \leqslant f$.

(3) Obsérvese que si $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$, entonces

$B_\alpha \subseteq B_\beta$, y $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\alpha$, ver [4] p. 171

Aplicando P_β a ambos lados de la desigualdad

$\alpha(e - p_\alpha) \leqslant f - P_\alpha(f)$, se tiene

$$P_\beta(\alpha(e - p_\alpha)) \leqslant P_\beta(f - P_\alpha(f)),$$

entonces $\alpha(p_\beta - p_\alpha) \leqslant (P_\beta - P_\alpha)(f)$.

Ahora bien: $(P_\beta - P_\alpha)(f) = P_\beta P_\beta f - P_\beta P_\alpha f$

$$= P_\beta P_\beta f - P_\alpha P_\beta f$$

$$= (P_\beta - P_\alpha)(P_\beta f)$$

Pero, por (1) tenemos que $P_\beta f \leqslant \beta p_\beta$ para todo β, luego

$$(P_\beta - P_\alpha)(P_\beta f) \leqslant (P_\beta - P_\alpha)(\beta p_\beta)$$

$$= \beta(P_\beta(p_\beta) - P_\alpha(p_\beta))$$

$$= \beta(p_\beta - p_\alpha)$$

Así, hemos probado que

$$(P_\beta - P_\alpha)(f) = (P_\beta - P_\alpha)(P_\beta f) \leqslant (P_\beta - P_\alpha)(\beta p_\beta) = \beta(p_\beta - p_\alpha)$$

(4) Primero probaremos que si $\alpha \uparrow \beta$, entonces

$(\alpha e - f)^+ \uparrow (\beta e - f)^+$

Claramente $(\alpha e - f)^+ \uparrow$

Ahora probemos que $(\beta e - f)^+ = \sup\{(\alpha e - f)^+ : \alpha \in \mathbb{R}\}$

En efecto, como $\alpha \uparrow \beta$, el conjunto

$A = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$, esta acotado superiormente, y

$\beta = \sup A$ en $\mathbb{R}$. Luego, por prop. 2.20, tenemos que

$\beta e = (\sup A)e = \sup\{\alpha e : \alpha \in A\}$ en E, entonces

$$\beta e + (-f) = \sup\{\alpha e : \alpha \in A\} + (-f)$$

$$= \sup\{\alpha e + (-f) : \alpha \in A\}$$

Afirmamos que $(\beta e - f)^+ = \sup\{(\alpha e - f)^+ : \alpha \in A\}$

En efecto, como $\beta = \sup A$, entonces $\alpha \leqslant \beta$ para todo $\alpha \in A$, luego $(\alpha e - f)^+ \leqslant (\beta e - f)^+$ para todo $\alpha \in A$, por lo tanto

$(\beta e - f)^+$ es una cota superior del conjunto

$$\{(\alpha e - f)^+ : \alpha \in A\} = M$$

Sea w una cota superior de M, entonces

$\theta \leqslant (\alpha e - f)^+ \leqslant w$ para todo $\alpha \in A$. Como $(\alpha e - f) \leqslant (\alpha e - f)^+$, entonces $\alpha e - f \leqslant w$, por lo tanto $\sup\{\alpha e - f : \alpha \in A\} = \beta e - f \leqslant w$, luego $(\beta e - f)^+ \leqslant u^+ = u$. Así pues $(\beta e - f)^+ = \sup\{(\alpha e - f)^+ : \alpha \in A\}$

Así, hemos probado que $(\alpha e - f)^+ \uparrow (\beta e - f)^+$.

Como $B_\beta = \{\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha\}$, luego B_β es el supremo del conjunto $\{B_\alpha : \alpha<\beta\}$ por lo tanto $B_\alpha \uparrow B_\beta$. También se verifica que

$P_\alpha \uparrow P_\beta$, ver [4] p. 175

Ahora probaremos que si $\alpha \downarrow -\infty$, entonces $P_\alpha(v) \downarrow \theta$ para todo $v \geqslant \theta$.

Para demostrar lo anterior, es suficiente probar que

$$\bigcap_\alpha B = \{\theta\}$$

En efecto, sea $\theta \leqslant w \in \bigcap_\alpha B_\alpha$, entonces $w \in {}_\alpha$ para todo α

Como $(\alpha e - f)^- \perp (\alpha e - f)^+$, entonces $(\alpha e - f)^- \perp B_\alpha$.

En particular, $w \perp (\alpha e - f)^-$. Ahora bien, $(\alpha e - f)^- = -(\alpha e - f) \vee \theta$

$$= (f - \alpha e) \vee \theta$$

$$= (f - \alpha e)^+$$

Si $\alpha \leqslant \theta$, entonces $(f - \alpha e)^+ = (f + |\alpha|\, e)^+$, luego $w \perp (f + |\alpha|\, e)^+$ para todo $\alpha \leqslant \theta$, y además $w \perp (e + |\alpha|^{-1} f)^+$ para todo $\alpha < \theta$.

Por demostrar $w \perp e$.

En efecto, tomemos $\alpha = -n$, entonces $|\alpha| = n$, por lo tanto $|\alpha|^{-1} = \frac{1}{n}$

Como $-f \leqslant |f|$, entonces $-|f| \leqslant f$, por lo tanto $-\frac{1}{n}|f| \leqslant \frac{1}{n} f$, luego $e - \frac{1}{n}|f| \leqslant (e + \frac{1}{n} f)^+$. Por otro lado $(e + \frac{1}{n} f)^+ \leqslant (e + \frac{1}{n} f^+)$. Por consiguiente $-\frac{1}{n}|f| \leqslant (e + \frac{1}{n} f)^+ - e \leqslant \frac{1}{n} f^+ \leqslant \frac{1}{n}|f|$, por lo tanto $|(e + \frac{1}{n} f)^+ - e| \leqslant (\frac{1}{n}|f|) \searrow \theta$, puesto que E es arquimediano.

Luego $|(e + \frac{1}{n} f)^+ - e| = \theta$, entonces $(e + \frac{1}{n}f)^+ = e$. Así, hemos probado que $w \perp e$.

Por otra parte, $w \in B_\alpha$, entonces $w \in B_\theta = B_{f^-} \subseteq B_{|f|} = B_f \subseteq B_e$, luego $w \in B_e$.

Por demostrar $w = \theta$.

En efecto, $w \in B_e$, entonces existe una red $\{x_\alpha\} \subseteq I(e)$. $\theta \leqslant x_\alpha \nearrow w$, por lo tanto $\theta \leqslant x_\alpha \wedge w \nearrow w$ para todo α. Para todo α, $x_\alpha \in I(e)$, entonces existe $\lambda_\alpha \geqslant \theta$: $x_\alpha \leqslant \lambda_\alpha e$ para todo α, por consiguiente existe $\lambda_\alpha \geqslant \theta$: $\theta \leqslant \lambda_\alpha \wedge w \leqslant \lambda_\alpha e \wedge w = \theta$ para todo α, luego $x_\alpha \wedge w = \theta$. Así pues $w = \sup_\alpha \{x_\alpha \wedge w\} = \sup_\alpha \{\theta\} = \theta$

Por demostrar $P_\alpha(v) \searrow \theta$

En efecto, sea u una cota inferior de $\{P_\alpha(v)\}_{\alpha<0}$ Supongamos que $u \geqslant \theta$, entonces $\theta \leqslant u \leqslant P_\alpha(v) \in B_\alpha$, por lo tanto $u \in B_\alpha$ para todo α, luego $u \in \bigcap_\alpha B_\alpha = \{\theta\}$, por consiguiente $u = \theta$. En este caso, tenemos que $P_\alpha(v) \searrow \theta$.

Ahora supongamos que existe u cota inferior de $\{P_\alpha(v)\}_{\alpha<0}$ no comparable con θ. Entonces $u' = u \vee \theta$ es una cota inferior, y $\theta < w \vee \theta = w^+$, lo cual es una contradicción.

Finalmente, probaremos que si $\alpha \uparrow \infty$, entonces $P_\alpha(v) \uparrow v$ para todo $v \geqslant \theta$.

Para demostrar lo anterior, basta probar que $\bigcap_\alpha R_\alpha = \{\theta\}$, donde R_α es la banda generada por $e - p_\alpha$. En efecto, como $e = P_\alpha e + e - P_\alpha e$; con $P_\alpha(e) \in B_\alpha$, $e - P_\alpha(e) \in B_\alpha^d$, luego $e - P_\alpha(e) \perp P_\alpha(e)$, entonces $R_\alpha \perp B_\alpha$.

Sea $w \in R_\alpha$, y $w \perp B_\alpha$, enotnces $w \perp (\alpha e - f)^+$ para todo α, y también $w \perp (e - \alpha^{-1} f)^+$ para todo $\alpha > 0$.

En forma análoga, concluimos que $w = \theta$. Por lo tanto $P_\alpha(v) \uparrow v$.

Corolario A.1. Sea E un espacio de Riesz con PPP. Sea $f \in I(e)$, y si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a\,e \leqslant f \leqslant b\,e$, entonces $p_\alpha = \theta$ para todo $\alpha \leqslant a$, y $p_\alpha = e$ para todo $\alpha > b$.

Demostración.

(a) $a\,e \leqslant f$, implica que $\alpha e - f \leqslant \alpha e - a\,e = (\alpha - a)e$.

Como $\alpha \leqslant a$, entonces $\alpha\, e \leqslant a\, e$, por lo tanto $(\alpha - a)\,e \leqslant \theta$. Así pues $\alpha e - f \leqslant \theta$, luego $u_\alpha = (\alpha e - f)^+ = \theta$. Esto prueba que $B_\alpha = \{\theta\}$, por lo tanto $p_\alpha = \theta$ para todo $\alpha \leqslant a$.

(b) Ahora probaremos que $p_\alpha = e$ para todo $\alpha > b$.

En efecto, $f \leqslant b\,e$, entonces $\alpha e - f \geqslant \alpha e - b\,e = (\alpha - b)e$ Como $\alpha > b$, entonces $\alpha e > b\,e$, por lo tanto $(\alpha - b)e > \theta$, luego $(\alpha e - f) > \theta$. Así, tenemos que

$$u_\alpha = (\alpha e - f)^+ = (\alpha e - f) \geqslant (\alpha - b)\,e > \theta$$

Afirmamos que $e \in B_\alpha$

Como $(\alpha e - f)^+ \geqslant (\alpha - b)e > \theta$, entonces $\frac{1}{\alpha - b}(\alpha e - f)^+ \geqslant e$

Pero $e = |e| \leqslant \left| \frac{1}{\alpha - b} (\alpha e - f)^+ \right| = \frac{1}{\alpha - b}(\alpha e - f)^+$, luego $e \in B_\alpha$.

Ahora bien, $P_\alpha (e) = \sup [\theta, e] \cap B_\alpha$

Como $e \in [\theta, e]$ y $e \in B_\alpha$, entonces $e \in [\theta, e] \cap B_\alpha$. Además e es cota superior del conjunto $[\theta, e] \cap B_\alpha$, luego $p_\alpha = e$ para todo $\alpha > b$.

El conjunto $\{ p_\alpha : -\infty < \alpha < \infty \}$ de los componentes de e se denomina el sistema espectral de los elementos de f respecto al elemento fijo e.

B. SUCESIONES UNIFORMES DE CAUCHY

Sea E un espacio de Riesz, y sea $e \in E$ con $e > \theta$.

Definición B. 1. La sucesión $\{ f_n : n = 1, 2, \dots \}$ en E, se dice que es e-uniformemente convergente a un elemento $f \in E$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural $n_o(\varepsilon)$ tal que $|f - f_n| \leqslant \varepsilon e$ para todo $n \geqslant n_o$

Definición B.2. Una sucesión $\{ f_n : n = 1, 2, \dots \}$ en E se llama sucesión e - uniforme de Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tal que $|f_m - f_n| \leqslant \varepsilon e$ para todo $m, n \geqslant n_1$

Proposición B. 1. Toda sucesión e- uniformemente convergente en un espacio de Riesz E, es una sucesión e-uniforme de Cauchy.

Demostración.

Sea $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión e-uniformemente convergente en E, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} e$ para todo $n \geq n_o(\varepsilon)$.

Ahora $|f_m - f_n| = |f_m - f + f - f_n| \leq |f_m - f| + |f - f_n|$

Si $m, n \geq n_o(\varepsilon)$, tenemos que $|f_m - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} e + \frac{\varepsilon}{2} e = \varepsilon e$.

Proposición B. 2. Toda sucesión e - uniforme de Cauchy en un espacio de Riesz E, es acotado.

Demostración.

Sea $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión e-uniforme de Cauchy en E, entonces dado $\varepsilon = 1$, existe un número natural n_1 tal que $|f_n - f_{n_1}| \leq e$ para todo $n, n_1 \geq n_1$. Como $\big||f_n| - |f_{n_1}|\big| \leq |f_n - f_{n_1}|$ entonces $|f_n| \leq e + |f_{n_1}|$ para todo $n \geq n_1$ por lo tanto $|f_n| \leq e + \sup(|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_{n_1}|)$ para todo n.

Proposición B.3. Si E es arquimediano, y si la sucesión $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tiene límite e-uniforme, entonces es único.

Demostración.

Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge e-uniformemente a f y g, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen n_o', n_o'' tal que $n \geq n_o'$, entonces $|f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{2} e$,

$n \geqslant n_o''$, entonces $|f_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e$.

Sea $n_o = \max\{n_o', n_o''\}$. Entonces para todo $n \geqslant n_o$.

$|f - g| = |f - f_n + f_n - g| \leqslant |f - f_n| + |f_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e + \frac{\varepsilon}{2} e = \varepsilon e$.

Asi $|f - g| \leqslant \varepsilon e$ para todo $\varepsilon > 0$.

Como E es arquimediano, se tiene que $|f - g| = \theta$, luego $f = g$.

Lema B.1. Sea $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ es una sucesión creciente y e-uniforme de Cauchy en un espacio de Riesz arquimediano E.

$\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ es e-uniformemente convergente a un elemento f de E si, y sólo si, $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ tiene un supremo y es igual a f.

En forma análoga se tiene para sucesiones decrecientes

En particular, en el espacio σ- DC, cada sucesión monótona e-uniforme de Cauchy, es e-uniformemente convergente.

Demostración.

Supongamos que $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ es creciente, y e-uniformemente convergente a f. Sea n fijo, y $m > n$, entonces $f_m > f_n$, por lo tanto $f_n = \inf\{f_m, f_n\}$.

Por la desigualdad de Birkhoff's, tenemos que

$|f_n - \inf\{f, f_n\}| = |\inf\{f_m, f_n\} - \inf\{f, f_n\}| \leqslant |f_m - f|$.

Sea $\varepsilon > \theta$, entonces por hipótesis, tenemos que

$|f_n - \inf\{f, f_n\}| \leqslant |f_m - f| \leqslant \varepsilon e$. Como E es arquimediano, se tiene $|f_n - \inf\{f, f_n\}| = \theta$, entonces $f_n = \inf\{f, f_n\}$, por lo tanto $f_n \leqslant f$ para todo n, luego $\theta \leqslant f - f_n \leqslant \varepsilon e$.

Así pues $f - f_n \downarrow \theta$, entonces $f = \sup f_n$.

Recíprocamente, sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ tal que $f_n \uparrow f$, y e-uniforme de Cauchy, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o(\varepsilon)$ tal que $\theta \leq f_m - f_n \leq \varepsilon e$ para $m \geq n \geq n_o(\varepsilon)$.

Por lo tanto $(f_m - f_n) \uparrow_m (f - f_n)$, entonces $\theta \leq f - f_n \leq \varepsilon e$ para todo $n \geq n_o$, luego $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge e-uniformemente a f.

Definición B.3. Un espacio de Riesz E se llama e-uniformemente completo, si cada sucesión e-uniformemente Cauchy, tiene un límite e-uniforme

Proposición B.4. Si E es arquimediano, entonces E es e-uniformemente completo si, y sólo si, cada sucesión monótona, e-uniforme de Cauchy, tiene un límite e-uniforme.

Demostración.

($\Longrightarrow$) Es obvio, por definición.

Recíprocamente, sea $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión arbitraria, e-uniforme de Cauchy, en un espacio arquimediano E.

Entonces, existe una subsucesión $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots <$ y $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 2^{-k} e$, para $k = 1, 2, \ldots$

Las sumas parciales de las series

$$f_{n_1}^+ + (f_{n_2} - f_{n_1})^+ + (f_{n_3} - f_{n_2})^+ + \ldots$$

$$f_{n_1}^- + (f_{n_2} - f_{n_1})^- + (f_{n_3} - f_{n_2})^- + \ldots$$

forman sucesiones crecientes, e-uniformes de Cauchy.

En efecto, sean $g_{k+p} = f^{+}_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1})^{+} + \ldots + (f_{n_{k+p+1}} - f_{n_{k+p}})^{+}$

$$g_k = f^{+}_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1})^{+} + \ldots + (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})^{+},$$

luego $|g_{k+p} - g_k| \leqslant \left|(f_{n_{k+2}} - f_{n_{k+1}})^{+}\right| + \ldots + \left|f_{n_{k+p+1}} - f_{n_{k+p}})^{+}\right|$

$$\leqslant 2^{-(k+1)}e + \ldots + 2^{-(k+p)}e$$

$$\leqslant 2^{-(k+1)}(1 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-(p-1)}).$$

Como la serie $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = 2$, luego

$|g_{k+p} - g_k| \leqslant 2\ 2^{-(k+1)}\ e = 2^{-k}\ e.$

En forma análoga se prueba para

$f^{-}_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1})^{-} + \ldots + (f_{n_3} - f_{n_2})^{-} + \ldots$

Por hipótesis, las sucesiones anteriores tienen límites e-uniformes g_1 y g_2 respectivamente. Por lo tanto las sumas parciales de

$f_{n_k} = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \ldots$, para $k = 1,2,\ldots$

Convergen e-uniformemente a $g = g_1 - g_2$, puesto que

$f_{n_k} = \left[f^{+}_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1})^{+} + \ldots + (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})^{+}\right] - \left[f^{-}_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1})^{-} + \ldots + (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})^{-}\right]$

En otras palabras, f_{n_k} convergen e-uniformemente a g cuando $k \to \infty$.

Finalmente, probaremos que f_n converge e-uniformemente a g. En efecto, consideremos

$$|f_p - g| \leqslant |f_p - f_{n_p}| + |f_{n_p} - g| ,$$

Como f_n es e-uniforme de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1(\varepsilon)$: $|f_p - f_g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e$ para todo $n \geqslant n_1(\varepsilon)$.

Como $f_{n_p} \to g$ e-uniformemente, existe $n_2(\varepsilon)$.

$$\left| f_{n_p} - g \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e \text{ para todo } p \geqslant n_2(\varepsilon).$$

Sea $n(\varepsilon) = \max \{ n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \}$, entonces para todo $p, q \geqslant n(\varepsilon)$

$|f_p - g| \leqslant |f_p - f_{n_p}| + |f_{n_p} - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e + \frac{\varepsilon}{2} e = \varepsilon e$, es decir $f_p \to g$ e-uniformemente.

C. TEOREMA ESPECTRAL DE FREUDENTHAL'S(T.E.F.).

Sea E un espacio de Riesz con PPP, y sean $e \in E^+$ con $e > \theta$, $f \in I(e)$. Sean a y b dos números reales tal que, para un conveniente $\varepsilon > 0$, se tiene

$$a e \leqslant f \leqslant (b - \varepsilon)e.$$

Si $\{ p_\alpha : -\infty < \alpha < \infty \}$ es el sistema espectral de f con respecto a e, se tiene por el Corolario A.1, que $p_\alpha = \theta$ para $\alpha \leqslant a$ y $p_\alpha = e$ para $\alpha \geqslant b$.

Denotaremos por $\Pi = \Pi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde

$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$, la partición del intervalo cerrado $[a,b]$; y por

$$|\Pi| = \max\ (|\alpha_{k+1} - \alpha_k| : 0 \leqslant k \leqslant n - 1),$$

la máxima longitud del subintervalo en la partición Π.

Dada la partición Π_1, Π_2 de $[a, b]$, escribiremos $\Pi_1 \leqslant \Pi_2$, para indicar que Π_2 es más fino que Π_1, o sea, $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$. El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ es parcialmente ordenado.

Para cada partición $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $[a,b]$, introducimos ahora los elementos $s(\Pi;\ f)$ y $t(\Pi:\ f)$ en E, definidos por

$$s(\Pi;\ f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}\ (p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$$t(\Pi;\ f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$s\ (\Pi:\ f)$ se llama suma inferior y $t(\Pi:\ f)$ suma superior de f con respecto a Π.

En el siguiente lema, se tiene algunos resultados pre-liminares acerca de suma inferior e superior.

Lema C.1. (1) Para toda partición Π_1, Π_2 se tiene

$$s(\Pi_1:\ f) \leqslant f \leqslant t\ (\Pi_2:\ f)$$

(2) Si $\Pi_1 \leqslant \Pi_2$, entonces

$$s(\Pi_1;\ f) \leqslant s(\Pi_2:\ f) \leqslant t(\Pi_2:\ f) \leqslant t(\Pi_1:\ f).$$

(3) Si $a\,e \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant (b - \varepsilon)e$ para convenientes números reales a, b, y para algún $\varepsilon > 0$, en-

tonces

$$s(\Pi;\ f_1) \leqslant s(\Pi;\ f_2) \text{ y } t(\Pi;\ f_1) \leqslant t(\Pi;\ f_2)$$

para cada partición Π de $[a, b]$

(4) se tiene $\theta \leqslant f - s(\Pi;\ f) \leqslant |\Pi| e$,

$$\theta \leqslant t(\Pi;\ f) - f \leqslant |\Pi| e$$

En particular, se tiene

$$\theta \leqslant t(\Pi_1;\ f) - s(\Pi_2:\ f) \leqslant (\Pi_1 + \Pi_2)e$$

para todo partición Π_1 Π_2 de $[a, b]$

Demostración.

(1) Es suficiente probar que para toda partición

$\Pi = \Pi(\alpha_o, \ldots, \alpha_n)$, se tiene $s(\Pi;\ f) \leqslant f \leqslant t(\Pi:\ f)$.

En efecto, de $P_b = P_b - P_a = \sum_{k=1}^{n} (P_{\alpha_k} - P_{\alpha_{k-1}})$,

resulta que $f = P_b\ f = \sum_{k=1}^{n} (P_{\alpha_k} - P_{\alpha_{k-1}}) f$, $(\alpha_k \leqslant b;\ k = 1, 2, \ldots n)$

y por la proposición A.1(3) se tiene

$$s(\Pi;\ f) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}) \leqslant f \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}) = t(\Pi;\ f).$$

Por lo anterior, tenemos que

$$s(\Pi_1:\ f) \leqslant f \leqslant t(\Pi_2,\ f).$$

(2) Sea $\Pi_1 = \Pi(\alpha_o, \ldots, \alpha_n)$ y sea Π_2 otra partición que contiene un punto β más que Π_1.

Supongamos que entre α_{k-1} y α_k se tiene

$$\alpha_{k-1} < \beta < \alpha_k.$$

Para probar $s(\Pi_1; f) \leqslant s(\Pi_2\cdot f)$, basta demostrar que

$$\alpha_{k-1}(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}) \leqslant \alpha_{k-1}(p_\beta - p_{\alpha_{k-1}}) + \beta(p_{\alpha_k} - p_\beta),$$ lo

cual es evidente. Luego $s(\Pi_1; f) \leqslant s(\Pi_2: f)$.

En forma análoga se prueba que

$$t(\Pi_2:f) \leqslant t(\Pi_1: f).$$

(3) Primero supongamos que f satisface a $e \leqslant f \leqslant (b-\varepsilon)e$, y sea el conjunto $\{p_\alpha : -\infty < \alpha < +\infty\}$ el sistema espectral de f. Dada la partición $\Pi(\alpha_o, \ldots, \alpha_n)$ de $[a,b]$, y los números $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$, consideremos la suma

$$u = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}$$

Introducimos para cada número real α, el elemento $r_\alpha = e - p_\alpha$, y obsérvese que

$$p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}} = r_{\alpha_{k-1}} - r_{\alpha_k},$$

y $r_\alpha = e$ para $\alpha \leqslant a$, y $r_\alpha = \theta$ para $\alpha \geqslant b$.

Obsérvese también que todos los términos en

$$u = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(r_{\alpha_{k-1}} - r_{\alpha_k}),$$

por lema A.3, son otorgonales y positivos.

Por lo tanto

$$u = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\beta_k(r_{\alpha_{k-1}} - r_{\alpha_k})\} \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\beta_k \quad r_{\alpha_{k-1}}\}$$

Por otra parte

$$\beta_k \; r_{\alpha_{k-1}} = \beta_k \sum_{j=k}^{n} (r_{\alpha_{j-1}} - r_{\alpha_j}) \leqslant \sum_{j=k}^{n} \beta_j (r_{\alpha_{j-1}} - r_{\alpha_j}) \leqslant u, \text{ para}$$

todo $k = 1,\ldots,n$.

Luego $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \beta_k \, r_{\alpha_{k-1}} \leqslant u$

Así, hemos probado que

$$u = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \beta_k \; r_{\alpha_{k-1}}$$

Así pues

$$s(\Pi: f) - a\,e = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}}) - a \sum_{k=1}^{n} (p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - a)(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$$= \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \left\{ (\alpha_{k-1} - a) r_{\alpha_{k-1}} \right\}$$

Finalmente supongamos que se tiene,

$$a\,e \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant (b - \varepsilon)e$$

para apropiados números reales a, b y para algún $\varepsilon > 0$

Sean $(p'_\alpha : -\infty < \alpha < \infty)$ y $(p''_\alpha : -\infty < \alpha < \infty)$, el sistema espectral de f_1 y f_2 respectivamente.

Puesto que $(\alpha e - f_2)^+ \leqslant (\alpha e - f_1)^+$ para todo α, la banda generada por $(\alpha e - f_2)^+$ está contenido en la banda generada por $(\alpha e - f_1)^+$. También se tiene que

$$p''_\alpha \leqslant p'_\alpha \text{ y } r'_\alpha \leqslant r''_\alpha \quad \text{para todo } \alpha$$

De todo lo anterior, se sigue que

$$s(\Pi: f_1) - a\,e = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\{ (\alpha_{k-1} - a)\, r'_{\alpha_{k-1}} \right\}$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\{ (\alpha_{k-1} - a) r''_{\alpha_{k-1}} \right\}$$

$$= s(\Pi: f_2) - a\,e$$

Así pues $s(\Pi: f_1) \leqslant s(\Pi : f_2)$

En forma análoga se prueba que

$$t(\Pi: f_1) \leqslant t(\Pi: f_2)$$

(IV). Se tiene

$$\theta \leqslant f - s(\Pi: f) \leqslant t(\Pi: f) - s(\Pi : f)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})(p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$$\leqslant |\Pi| \sum_{k=1}^{n} (p_{\alpha_k} - p_{\alpha_{k-1}})$$

$$= |\Pi| e$$

En forma análoga, se prueba que $\theta \leqslant t(\Pi: f) - f \leqslant |\Pi| e$.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del lema anterior, y de la observación sobre la convergencia e-uniforme de las sucesiones monótonas de la sección B .

Proposición C.1. (Teorema Espectral de Freudenthal's)

Sea E un espacio de Riesz con ppp, y sea $e \in E$ con $e > \theta$ un punto fijo. Para cada f elemento del ideal generado por e, y para cada partición Π del intervalo $[a, b]$, donde los números reales a y b son tales que $a\,e \leqslant f \leqslant (b - \varepsilon)e$ para algún $\varepsilon > 0$. Sea $s(\Pi : f)$ y $t(\Pi : f)$ suma inferior y superior respecto a Π. Entonces

$$\sup s(\Pi : f) = f = \inf t(\Pi : f)$$

Más precisamente, si $\{\Pi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que Π_{n+1} es más fina que Π_n para cada n y tal que $|\Pi_n| \searrow 0$, entonces

$$s(\Pi_n : f) \nearrow f \text{ y } t(\Pi_n : f) \searrow f$$

e-uniformemente.

BIBLIOGRAFIA

[1.] Aliprantis, C. D. and E. Langford. Almost -Dedekind Complete Riesz Spaces and the main inclusion Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 421-426.

[2.] Aliprantis, C. D. and O. Burkins Haw. Locally solid Riesz spaces, Academic Press, Inc. (1978).

[3.] Fremlin, D. H. "Topological Riesz spaces and Measure Theory", Cambridge Univ. Press, London y New York, (1974).

[4.] Luxemburg, W. A. J., and A.C. Zaanen. "Riesz spaces I", North-Holland Publ, Amsterdam (1971).

[5.] Quinn, J. Intermediate Riesz spaces, Pacific J. Math. 56 (1975), 225-263.