UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS $\mathcal{C}(X)$ ULTRABORNOLOGICOS

por:

Teresita Jaén de Ruiz

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

FEB. 22 1983

Aprobado por:

Director de Tesis ______ Jorge Rojo Ph.D.

Miembro del Jurado ______ Oscar Valdivia G., Ph.D.

Miembro del Jurado ______ Rogelio Rosas Dr.

Fecha 4 de Agosto de 1982.

A César, quien en todo momento me impulsó a seguir adelante. Quien se desveló por que finalizara primero los estudios y luego este trabajo.

A mis hijos; Leticia Josefina, Juan Sebastián, María del Carmen y Teresa Raquel, quienes con sus voces infantiles me alentaron en todo momento.

A mis padres; Lencho y Tere, quienes me inculcaron el deseo de superación.

A todos ellos dedico este trabajo.

A G R A D E C I M I E N T O

Quiero manifestar mi gratitud a mi director de tesis, profesor Jorge Guillermo Rojo, por su orientación, sus enseñanzas y la bibliografía que me brindó en todo momento.

También quiero agradecer a mis compañeros de estudio Egbert, Jorge y Lupe, quienes fueron apoyo y estímulo.

INTRODUCCION

Los espacios localmente convexos constituyen la generalización de los espacios normados.

Es bien conocido que si f: $E \longrightarrow \mathbb{K}$, lineal, con E normado, entonces f es continua si y sólo si f es acotada, es decir si f transforma las partes acotadas de E en partes acotadas de $\mathbb{K}$.

La clase de los espacios bornológicos justamente resuelve la generalización del problema: Cuáles son los espacios localmente convexos para los cuales el problema anterior tiene respuesta positiva?

Es evidente que el conocimiento de las propiedades de tales espacios es de gran interés, ya que es frecuente en análisis la presencia de funcionales que no son continuos pero si acotados. Así si E es bornológico, todo funcional acotado es automáticamente continuo.

Es claro también que la clase de los espacios localmente convexos bornológicos, si bien es rica en propiedades, es ya bastante general en relación al punto de partida que lo constituyen los espacios normados.

Por otra parte, todo espacio bornológico es límite inductivo de espacios normados; esto sugiere de inmediato considerar los espacios localmente convexos que sean límite inductivo de espacios de Banach. En esta forma se llega de una manera natural a una nueva clase de espacios localmente convexos denominados "Espacios Ultrabornológicos" y cuyas propiedades estarán más próximas a aquellas de los espacios de Banach. Esto justifica el estudio de dichos espacios.

Es claro también que todo espacio ultrabornológico es bornológico. Naturalmente que el recíproco es falso.

Durante muchas décadas el estudio del espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(X)$, sobre un espacio completamente regular, provisto de su topología natural (compacta-abierta) ha sido la fuente de inspiración de numerosas investigaciones. En particular, siendo este espacio localmente convexo, él ha sido objeto de numerosas clasificaciones según fuesen las propiedades que se asignen a X.

El problema planteado por Jean Dieudonné: Existen espacios tonelados que no sean bornológicos? Inspiró independientemente a Nachbin y Shirota para demostrar que $\mathcal{C}(X)$ es bornológico si y sólo si X es un Q-espacio.

Una de las preguntas naturales que surge entonces es: Qué condiciones debe verificar X para que $\mathcal{C}(X)$ sea un espacio ultrabornológico? La respuesta a esta pregunta fue resuelta por De Wilde y ella es: $\mathcal{C}(X)$ es ultrabornológico si y sólo si $\mathcal{C}(X)$ es bornológico. Es decir si y sólo si X es un O-espacio.

El objeto de este trabajo es desarrollar este problema resuelto por De Wilde.

El esquema seguido es el siguiente:

En el primer capítulo se caracterizan los espacios bornológicos y se estudian algunas propiedades relacionadas con límites inductivos. También se presenta el concepto de "convergencia de Mackey".

El segundo capítulo está consagrado a la caracterización de los espacios ultrabornológicos y su relación con las sucesiones "fast-convergentes" basándonos en el artículo de De Wilde "Ultrabornological Spaces and the Closed Graph". En el cual hemos debilitado las hipótesis de la proposición 6 y hemos llegado a la misma conclusión en la proposición 2.3.

En el tercer capítulo se desarrolló el artículo de De Wilde "Caractérisation des espaces $\mathcal{C}(X)$ ultrabornologiques". Una vez introducida la topología compacta-abierta se demuestra el resultado fundamental para $\mathcal{C}(X)$ que da su caracter bornológico o ultrabornológico.

Señalemos aquí, finalmente que, la demostración presentada recoge numerosas ideas encontradas en los artículos de

Nachbin y Shirota. Se ha hecho una acentuación en el aspecto didáctico de la demostración al presentarla bajo una serie de proposiciones previas que permiten una asimilación más rápida del resultado final.

CAPITULO 1

ESPACIOS BORNOLOGICOS

En este capítulo damos una interesante caracterización de los espacios bornológicos.

El teorema 1.1 lo hemos formulado para este trabajo. Y el teorema 1.2 es una variación de la proposición 7.1 de [5]

Ubicamos aquí los espacios ultrabornológicos dentro de los espacios bornológicos y los espacios tonelados.

1. DEFINICION Y EJEMPLOS.

<u>Definición</u> 1.1 Un espacio $(E, \mathcal{T})$ localmente convexo es <u>bornológico</u> si todo disco bornívoro es vecindad de cero.

<u>Ejemplo</u> 1.1 Todo espacio normado es bornológico.

En efecto sea $(E, \|\ \|)$, un espacio normado y D un disco bornívoro. Como $B_1 = \{x \in E \ / \ \|x\| < 1\}$ es acotada en $(E, \|\ \|)$, tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que $B_1 \subseteq \alpha D$, con lo cual $1/\alpha\ B_1 \subseteq D \in \mathcal{V}(0, \|\ \|)$.

Ejemplo 1.2. El espacio de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, con la topología determinada por las semi normas $p_K : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

donde K es un compacto de $\mathbb{R}$, con la topología usual de $\mathbb{R}$.

Este espacio de funciones continuas es bornológico pero no normado.

2. CONVERGENCIA SEGUN MACKEY

Definición 1.2. Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ es Mackey-convergente a $x_o \in E$, si existe un disco acotado, $D \subseteq E$ tal que x_n converge a x_o en el espacio normado

$$(E_D, \mathcal{G}_D).$$

Donde E_D es la envoltura lineal de D. Y $\mathcal{G}_D$: $E_D \longrightarrow \mathbb{R}$, el calibrador de D. El cual en este caso resulta ser una norma, proposición 6, página 207 de [5] .

Indicaremos esta convergencia como $x_n \xrightarrow{M} x_o$

<u>Proposición</u> 1.1 Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ es Mackey-convergente a cero si y sólo si existe una sucesión de números estrictamente positivos $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ convergente a $+\infty$ tal que $\lambda_n x_n$ converge a 0 en $(E, \mathcal{T})$.

<u>Demostración</u>.$\Rightarrow$) Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$, disqueada. Como $x_n \xrightarrow{M} 0$, existe un disco acotado D, tal que $\mathcal{G}_D(x_n)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$. Sea

$$\lambda_n = \begin{cases} 1/\sqrt{\mathcal{G}_D(x_n)} & \text{para } x_n \neq 0 \\ n & \text{para } x_n = 0 \end{cases}$$

$(\lambda_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números estrictamente positivos tal que λ_n converge a $+\infty$. Ahora

$$\mathcal{G}_D(\lambda_n x_n) = \begin{cases} \lambda_n \mathcal{G}_D(x_n) = \sqrt{\mathcal{G}_D(x_n)} & \text{para } x_n \neq 0 \\ n\, \mathcal{G}_D(x_n) = 0 & \text{para } x_n = 0 \end{cases}$$

De esta forma $\mathcal{G}_D(\lambda_n x_n)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$.

Como D es acotado en $(E, \mathcal{T})$, existe $\alpha > 0$ tal que para toda $n \geq 1$

$$\mathcal{G}_V(\lambda_n x_n) \leq \alpha \mathcal{G}_D(\lambda_n x_n) \longrightarrow 0$$

De tal manera que existe $m \geq 1$ tal que para $n \geq m$

$$\lambda_n x_n \in V.$$

Luego $(\lambda_n x_n)_{n \geq 1}$ converge a cero en $(E, \mathcal{T})$.

$\Leftarrow$) Como $(\lambda_n x_n)_{n \geq 1}$ converge a cero en $(E, \mathcal{T})$, tenemos que

$$A - (\lambda_n x_n)_{n \geq 1}$$

es acotada en $(E, \mathcal{T})$. Por consiguiente $\Gamma(A)$ es un disco acotado en $(E, \mathcal{T})$ y tal que para $n \geq 1$ $\lambda_n x_n \in \Gamma(A)$. Por tanto $x_n \in 1/\lambda_n \, \Gamma(A)$. Así por definición del calibrador de $\Gamma(A)$ tenemos:

$$\mathcal{G}_{\Gamma(A)}(x_n) \leq 1/\lambda_n \longrightarrow 0.$$

De esta forma x_n converge a 0 en $(E_{\Gamma(A)}, \mathcal{G}_{\Gamma(A)})$.

3. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS BORNOLOGICOS

Como vimos en la sección 1, los espacios bornológicos generalizan a los espacios normados.

Si dotamos a un espacio localmente convexo de una topología Hausdorff, obtenemos una interesante equivalencia que veremos a continuación.

Teorema 1.1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(1) $(E, \mathcal{T})$ es bornológico.

(2) $(E, \mathcal{T})$ es límite inductivo de espacios normados.

(3) Todo disco que absorbe las sucesiones Mackey-convergentes a cero es vecindad del origen.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $(A_i)_{i \in I}$ la familia de los discos acotados en $(E, \mathcal{T})$. $E_i = E_{A_i}$, $\| \|_i = \mathcal{G}_{A_i}$, $\mathcal{T}_i$ la topología en E_i determinada por $\| \|_i$.

En estas condiciones $((E_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ es una familia de espacios normados.

Si $f_i : E_i \hookrightarrow E$ es la inmersión canónica, resulta que

$$\bigcup_{i \in I} f_i(E_i) = \bigcup_{i \in I} E_i = E.$$

Vamos a demostrar que $(E, \mathcal{T})$ es límite inductivo de

$$((E_i, \mathcal{T}_i), f_i)_{i \in I}$$

Para ello demostraremos que si $\mathcal{T}'$ es la topología localmente convexa final respecto a las f_i entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

En efecto si $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$ disqueada, entonces $f_i^{-1}(V) = V \cap E_i$ es vecindad de cero en $(E_i, \mathcal{T}_i)$ para cada $i \in I$. Luego para cada $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i A_i \subset V$. Por consiguiente V absorbe A_i para toda $i \in I$. Lo cual equivale a que $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$, ya que $(E, \mathcal{T})$ es bornológico. Así $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$.

Veamos el otro sentido de la desigualdad. Si $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$, disqueada, entonces para cada $i \in I$ existe $\gamma_i > 0$ tal que $\gamma_i A_i \subseteq V$, por ser los A_i acotados en $(E, \mathcal{T})$. Con lo cual $\gamma_i A_i \subseteq f_i^{-1}(V)$ para cada $i \in I$. De allí que $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_i)$ para cada $i \in I$ y por consiguiente $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea U un disco bornívoro de $(E, \mathcal{T})$ y

$$((E_i, \| \ \|_i), f_i)_{i\in I}$$

una familia de espacios normados con sus respectivas aplicaciones lineales tal que $(E, \mathcal{T})$ es su límite inductivo.

Para cada E_i, su bola unitaria B_i es acotada en $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Luego $f_i(B_i)$ es acotada en $(E, \mathcal{T})$ para cada $i \in I$, por ser las f_i $\mathcal{T}_i$-$\mathcal{T}$ continuas. Y así existe para cada $i \in I$ $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i f_i(B_i) \subset U$. Con lo cual $\alpha_i B_i \subset f_i^{-1}(U)$ para cada $i \in I$. Como los $\alpha_i B_i$ son elementos basales en cada $(E_i, \mathcal{T}_i)$, resulta que para cada $i \in I, f_i^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_i)$. Con lo cual $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ y de esta forma $(E, \mathcal{T})$ es bornológico.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea D un disco que absorbe las sucesiones Mackey-convergentes a cero, entonces D absorbe los discos acotados.

Supongamos lo contrario, entonces existe un disco acotado K, tal que D no absorbe K. O sea existe para cada $n \geq 1$ $x_n \in K$ tal que $x_n \notin n^3 D$.

La sucesión $(x_n/n^2)_{n\geq 1}$ es Mackey-convergente a cero. En efecto $g_K(x_n/n^2) \leq 1/n^2 \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$. Con lo cual $(x_n/n^2)_{n\geq 1}$ converge a 0 en el espacio normado (E_K, g_K).

Esto implica que existe $m \geq 1$ tal que para $n \geq m$ x_n/n^2

$\in nD$ porque D absorbe $(x_n/n^2)_{n\geq 1}$. Lo cual contradice el hecho que $x_n \notin n^3 D$ para todo $n \geq 1$.

Concluimos que D es un disco bornívoro y por lo tanto vecindad de cero, por ser (E,τ) bornológico.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea D un disco bornívoro, por demostrar, $D \in \mathcal{V}(0,\tau)$.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión Mackey-convergente a cero. Existe entonces un disco acotado, A, tal que x_n converge a 0 en $(E_A, \mathcal{G}_A)$. Así $(x_n)_{n\geq 1}$ es acotada en $(E_A, \mathcal{G}_A)$. Lo cual equivale a que A absorbe $(x_n)_{n\geq 1}$ y como D absorbe A, entonces D absorbe $(x_n)_{n\geq 1}$ por ser A y D discos. Así resulta $D \in \mathcal{V}(0,\tau)$ por hipótesis.

<u>Teorema</u> 1.2 Sea (X,τ) un espacio localmente convexo, entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes:

(1) (X,τ) es bornológico.

(2) Para todo espacio lineal normado, $(E, \|\ \|)$, y para toda aplicación lineal $f : X \longrightarrow E$ tenemos:

f acotada implica f continua.

<u>Demostración</u>. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $f: X \longrightarrow E$ una aplicación lineal y acotada. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \| \|)$, disqueada y A un conjunto acotado en $(X, \mathcal{T})$ entonces $f(A)$ es acotado en $(E, \| \|)$ por hipótesis. Con lo cual existe $\alpha > 0$ tal que $f(A) \subset \alpha V$, esto es $A \subset \alpha f^{-1}(V)$. Lo que implica que $f^{-1}(V)$ es un disco bornívoro y por tanto $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$, por ser $(X, \mathcal{T})$ bornológico.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea U un disco bornívoro en $(X, \mathcal{T})$. Vamos a demostrar que $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

$(X, \mathcal{G}_U)$ es un espacio semi-normado, ya que U es disco absorbente.

Sea $(X_U, \bar{\mathcal{G}}_U)$ el espacio normado tal que $X_U = X/\mathcal{G}_U^{-1}(\{0\})$. Y $\bar{\mathcal{G}}_U : X_U \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\bar{\mathcal{G}}_U(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in \bar{x}} \mathcal{G}_U(y)$$

Observemos que si $y, z \in \bar{x}$ entonces $y - z \in \mathcal{G}_U^{-1}(\{0\})$. Por tanto

$$0 \leq |\mathcal{G}_U(y) - \mathcal{G}_U(z)| \leq \mathcal{G}_U(y-z) = 0$$

Luego $\mathcal{G}_U(y) = \mathcal{G}_U(z)$. Así $\bar{\mathcal{G}}_U(\bar{x}) = \mathcal{G}_U(x)$.

Tenemos entonces que la suryección canónica $f : X \rightarrow X_U$ es una aplicación lineal y acotada. En efecto sabemos que f es lineal y si A es acotado en $(X,\mathcal{T})$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda U$, con lo cual $\mathcal{G}_U(x) \leq \lambda$ para todo $x \in A$, de esta forma $f(A) \subseteq \lambda U$ con lo cual resulta $f(A)$ acotado en $(X_U, \bar{\mathcal{G}}_U)$ y por nuestra suposición f es continua.

Sea $\bar{B}_1$ la bola abierta unitaria de $(X_U, \bar{\mathcal{G}}_U)$ y B_1 la bola unitaria abierta de $(X, \mathcal{G}_U)$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \{ \bar{x} \in X_U \ / \ \bar{\mathcal{G}}_U(\bar{x}) < 1 \} \\ &= \{ \bar{x} \in X_U \ / \ \mathcal{G}_U(x) < 1 \} \\ &= f(B_1) \end{aligned}$$

Luego

a) $f^{-1}(\bar{B}_1) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ por ser f continua

b) $$\begin{aligned} f^{-1}(\bar{B}_1) &= f^{-1}(f(B_1)) \\ &= B_1 + \mathcal{G}_U^{-1}(\{0\}) \\ &= B_1 \end{aligned}$$

Luego $B_1 \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$. Por lo tanto $\mathcal{G}_U$ es continua lo cual equivale a que $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$.

<u>Proposición</u> 1.2. Sea $(E,\mathcal{T})$ bornológico, Hausdorff y casi-completo entonces $(E,\mathcal{T})$ es límite inducti-

vo de espacios de Banach.

Demostración. Sea $(A_i)_{i \in I}$ la familia de los discos cerrados y acotados en $(E,\mathcal{T})$. A_i es disco completo para cada $i \in I$, por ser $(E,\mathcal{T})$ casi-completo. De lo cual resulta por la proposición 6, página 207 de [5] , que $(E_i, \| \ \|_i) i \in I$ una familia de espacios de Banach. Donde $E_i = E_{A_i}$; $\| \ \|_i = \mathcal{G} A_i$, el calibrador de A_i, y sea $f_i: E_i \hookrightarrow E$, la inmersión natural. Por demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, topología localmente convexa final respecto a las f_i.

$\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$. En efecto si $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$, disqueada, entonces para todo $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i A_i \subseteq f_i^{-1}(V) = E_i \cap V$, por lo tanto para cada $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i A_i \subset V$. Por ello V es un disco bornívoro y así $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ por ser $(E,\mathcal{T})$ bornológico.

$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ Si $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$, disqueada, entonces para cada $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i A_i \subseteq U$ por ser A_i acotado en $(E,\mathcal{T})$. Así para cada $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i A_i \subseteq f_i^{-1}(U)$. Con lo cual para cada $i \in I$, $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \| \ \|_i)$. Por consiguiente $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$.

De esta forma concluimos que $(E,\mathcal{T})$ es límite inductivo de una familia de espacios de Banach.

4. RELACION ENTRE ESPACIOS BORNOLOGICOS Y ULTRABORNOLOGICOS

Veamos ahora los espacios en los cuales obtenemos la equivalencia en la proposición 1.2. Los cuales generalizan a los espacios de Banach y están contenidos dentro de los espacios tonelados.

Definición 1.3. $(E,\mathcal{T})$ es un espacio ultrabornológico si $(E,\mathcal{T})$ es límite inductivo de espacios de Banach.

Corolario 1.1. Todo espacio localmente convexo, bornológico, Hausdorff y casi-completo es ultrabornológico.

Proposición 1.3. $(E,\mathcal{T})$ ultrabornológico implica $(E,\mathcal{T})$ bornológico y tonelado.

Demostración. Es inmediato que $(E,\mathcal{T})$ es bornológico. Para demostrar que $(E,\mathcal{T})$ es tonelado utilizamos una familia $((E_i,\| \|_i),f_i)_{i\in I}$ de la cual $(E,\mathcal{T})$ es su límite inductivo.

Como todo Banach es tonelado, $(E,\mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la topología localmente convexa final de los $(E_i, \| \|_i)$ con las respectivas f_i, es tonelado.

De esta forma hemos demostrado que los espacios ultrabornológicos son parte de la intersección de los espacios bornológicos y de los espacios tonelados.

Sin embargo, esto no quiere decir que los espacios ultrabornológicos constituyan dicha intersección, ya que en la página 43 de [11] se menciona que si al espacio de las distribuciones definidas en un abierto, Ω, de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, se le dota de una topología $\mathcal{T}$, menos fina que la original, resulta ser bornológico, tonelado pero no ultrabornológico. Este ejemplo, que se indica sólo a título de referencia, lo desarrolla ampliamente el doctor Manuel Valdivia en: "The space of distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ is not Br-complete". Publicado por Mathematische Annalen, 211, 145-149 (1974). Ver apendice A.

Podemos concluir con las siguientes relaciones:

$$\begin{tikzcd}
\text{NORMADO} \arrow[r, Rightarrow] & \text{BORNOLOGICO} & \\
\text{BANACH} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{ULTRABORNOLOGICO} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{TONELADO}
\end{tikzcd}$$

C A P I T U L O   2

E S P A C I O S   U L T R A B O R N O L O G I C O S

En algunas ocasiones resulta difícil comprobar que un espacio es ultrabornológico utilizando su definición. En este capítulo veremos otros caminos para demostrar que un espacio es ultrabornológico.

1. CONVERGENCIA RAPIDA

<u>Definición</u> 2.1 Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}\subseteq E$ es <u>fast-convergente</u> a $x_o\in E$ (<u>converge rápido</u>) si existe un disco compacto $K\subseteq E$ tal que x_n converge a x_o en el espacio de Banach $(E_K,\mathcal{G}_K)$.

Indicaremos esta convergencia como $x_n \xrightarrow{f} x_o$.

<u>Ejemplo</u> 2.1 Sea $E = \mathbb{R}^2$ con la topología euclideana. $x_n = (1-1/n,0)$. $(x_n)_{n\geq 1}$ es fast-convergente a $(1,0)$.

En efecto, si $K = B_1$, bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^2$ tenemos que:

$$\mathcal{G}_{B_1}(x_n - (1,0)) = 1/n \; \mathcal{G}_{B_1}((1,0))$$
$$\leq 1/n \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

<u>Proposición</u> 2.1 Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Sea $(x_m)_{m\geq 1} \subset E$ fast-convergente a x_o. Entonces existe una sucesión de números positivos $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ que convergen a $+\infty$ tal que $(\lambda_m(x_m-x_o))_{m\geq 1}$ es fast-convergente a 0.

<u>Demostración</u>. Por ser $(x_m)_{m\geq 1}$ fast-convergente a x_o, existe un disco compacto $K\subseteq E$ tal que $\mathcal{G}_K(x_m-x_o)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$.

Definimos:

$$\lambda m = \begin{cases} 1/\sqrt{\mathcal{G}_K(x_m-x_o)} & \text{si } x_m \neq x_o \\ m & \text{si } x_m = x_o \end{cases}$$

resultando $(\lambda m)m \geq 1$ una sucesión de números positivos que convergen a $+\infty$. Además

$$\mathcal{G}_K(\lambda_m(x_m-x_o)) = \begin{cases} \sqrt{\mathcal{G}_K(x_m-x_o)} & \text{si } x_m \neq x_o \\ 0 & \text{si } x_m = x_o \end{cases}$$

Con lo cual obtenemos que $(\lambda_m(x_m-x_o))_{m\geq 1}$ es fast-convergente a 0.

Proposición 2.2. Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo, Hausdorff, metrizable y completo. Entonces para toda $(x_n)_{n\geq 1}\subset E$ tenemos:

$$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \text{ si y sólo si } x_n \xrightarrow{f} 0$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $(V_m)_{m\geq 1}$ una base numerable de vecindades disqueadas del origen tal que $V_{m+1}\subseteq V_m$.

Para cada $m\geq 1$ existe n_m, tal que si $n\geq n_m$ entonces: $x_n\in 1/m\ V_m$. Podemos suponer $n_m < n_{m+1}$ para todo $m\geq 1$.

Asumamos $\lambda_n = m$ para $n_m\leq n\leq n_{m+1}$. Tenemos entonces que $\lambda_n\uparrow\infty$. Así para $n\geq n_m$, $x_n\in 1/\lambda_n\ V_m$. Luego $\lambda_n x_n\xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

$A = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}\bigcup\{0\}$ es compacto en $(E,\mathcal{T})$. Luego $\Gamma(A)$ es disco compacto por ser $(E,\mathcal{T})$ completo (proposición 4,3, página 50 de [9]). Con lo cual tenemos $\lambda_n x_n\in\Gamma(A)$ para $n\geq 1$. Y así $x_n\in 1/\lambda n\ \Gamma(A)$ para $n\geq 1$.

Por definición de $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}$ tenemos que $\mathcal{G}_{\Gamma(A)}(x_n)\leq 1/\lambda n\to 0$ en $\mathbb{R}$. Luego x_n converge a 0 en $(E_{\Gamma(A)},\mathcal{G}_{\Gamma(A)})$. Por consiguiente $x_r\xrightarrow{f} 0$.

$\Leftarrow$) Sea $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ disqueada. Como $x_n \xrightarrow{f} 0$, existe un disco compacto K, tal que x_n converge a 0 en $(E_K, \mathcal{G}_K)$. Luego existe $\alpha > 0$ tal que $K \subset \alpha V$ por ser K acotado. Luego para toda $n \geq 1$

$$\mathcal{G}_{\alpha V}(x_n) \leq \mathcal{G}_K(x_n)$$

porque $(x_n)_{n \geq 1} \subset E_K$. Por tanto

$$\mathcal{G}_V(x_n) \leq \alpha \mathcal{G}_K(x_n) \longrightarrow 0$$

en $\mathbb{R}$. Así existe $m \geq 1$ tal que para $n \geq m$

$$\mathcal{G}_V(x_n) \leq 1$$

Con lo cual resulta $x_n \in V$ para toda $n \geq m$.

<u>Proposición</u> 2.3 Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. $D \subseteq E$ un disco. Son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) D absorbe los discos compactos

(2) D absorbe las sucesiones fast-convergentes.

<u>Demostración</u>. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea D un disco que absorbe los discos compactos y sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ fast-convergente a x_o. Entonces existe un disco compacto $K \subset E$ tal que x_n converge a x_o en $(E_K, \mathcal{G}_K)$. De esta forma resulta $A = (x_n)_{n\geq 1} \cup \{x_o\}$ acotado en $(E_K, \mathcal{G}_K)$. Con lo cual K absorbe A por ser los elementos basales de $\mathcal{V}(0, \mathcal{G}_K)$ de la forma αK. Así resulta que D absorbe A porque D absorbe K por ser disco compacto. Resultando así que D absorbe $(x_n)_{n\geq 1}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea D un disco que absorbe las sucesiones fast-convergentes. Vamos a demostrar que D absorbe necesariamente los discos compactos.

En efecto si existe un disco compacto, K, tal que D no absorbe a K entonces para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in K$ tal que $x_n \notin n^2 D$.

Luego existe

$$(x_n)_{n\geq 1} \subseteq K \subseteq E_K$$

tal que para todo $n \geq 1$ $x_n \notin n^2 D$. Esto es para todo $n \geq 1$

$$x_n/n \in K \quad y \quad x_n/n \notin nD.$$

Ahora como $\mathcal{G}_K(x_n) \leq 1/n \longrightarrow 0$ y como $0 \in E_K$, tenemos que

$$x_n/n \xrightarrow{f} 0$$

Luego, por hipótesis $(x_n/n)_{n\geq 1}$ es absorbida por D. Con lo cual existe $m'\geq 1$ tal que para todo $m \geq m'$

$$(x_n/n)_{n\geq 1} \subseteq m\,D.$$

Y así $x_n \in n^2\,D$ para $n \geq m'$. Lo cual contradice nuestra suposición.

2. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS ULTRABORNOLOGICOS

<u>Teorema</u> 2.1 Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Son equivalentes:

(i) $(E, \mathcal{T})$ es ultrabornológico.

(ii) Todo disco que absorbe los discos compactos es vecindad de cero.

(iii) $(E, \mathcal{T})$ es límite inductivo de $(E_K, \mathcal{G}_K), i_K)_{K\in\mathcal{K}}$ donde $\mathcal{K} = \{K \subseteq E \,/ K$ es disco compacto en $(E, \mathcal{T})\}$ e $i_K\colon E_K \hookrightarrow E$ es la inmesión natural.

(iv) Todo disco que absorbe cualquier sucesión fast-convergente es vecindad de cero.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $((E_i, \| \|_i))_{i \in I}$, una familia de espacios de Banach y para cada $i \in I$, $f_i : E_i \longrightarrow E$, aplicación lineal. Si B_i es la bola unitaria de E_i, $f_i(B_i)$ es acotada en $(E, \mathcal{T})$, ya que por ser el límite inductivo de dicha familia, resultan continuas las f_i.

Vamos a demostrar que si $D \subset E$ es un disco que absorbe los discos compactos también absorbe $f_i(B_i)$.

Supongamos que D no absorbe $f_i(B_i)$. Esto implica que para cada $n \geq 1$ existe $b_n \in B_i$ tal que

$$f_i(b_n) \notin n^2 D \qquad (1)$$

Como $(b_n)_{n \geq 1} \subset B_i$ tenemos que b_n/n converge a 0 en $(E_i, \| \|_i)$. Por tanto como $(1/n b_n)_{n \geq 1} \subset E_i$ tenemos que $\Gamma((1/n b_n)_{n \geq 1} \cup \{0\})$ es un compacto por ser $(1/n b_n)_{n \geq 1} \cup \{0\}$ un compacto dentro de un Banach (proposición 4.3, página 50 de [9]). Por consiguiente existe $\alpha > 0$ tal que para todo $|\lambda| \geq \alpha$

$f_i(\Gamma((1/n b_n)_{n \geq 1} \cup \{0\})) \subset \lambda D$ por tanto $f_i(b_n) \in n\lambda D$ para toda $n \geq 1$. Tenemos entonces que para $n \geq \alpha$, $f_i(b_n) \in n^2 D$. Lo cual contradice (1). Por consiguiente D absorbe $f_i(B_i)$. Resultando así que existe $\alpha > 0$ tal que $B_i \subseteq \alpha D$. Con lo cual $D \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si $\mathcal{T}'$ es la topología localmente convexa final de la familia $((E_K, \mathcal{G}_K), i_K)_{K\in\mathcal{K}}$; vamos a demostrar que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$. En efecto si $V\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T}')$ disqueada, entonces

$$E_K \cap V = i_k^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{G}_K)$$

para toda $K\in\mathcal{K}$. Con lo cual existe $\alpha>0$ tal que $\alpha K \subseteq V$, de esta forma V absorbe K para cada $K \in \mathcal{K}$. Con lo cual resulta V un disco que absorbe los discos compactos y por hipótesis $V\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T})$.

$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$. Sea $U\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ disqueada. Para cada $K\in\mathcal{K}$ existe $\alpha>0$ tal que $\alpha K\subseteq U$ por ser K acotado en $(E,\mathcal{T})$, con lo cual $\alpha K = i_k^{-1}(\alpha K) \subseteq i_k^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{G}_K)$. Con lo cual resulta $U\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T}')$

(iii)$\Rightarrow$(iv). Sea D un disco que absorbe las sucesiones fast-convergentes. Entonces D absorbe K para todo $K\in\mathcal{K}$ (proposición 2.3). Así para cada $K\in\mathcal{K}$ existe $\alpha>0$ tal que $\alpha K \subseteq D$. De esta forma

$$\alpha K \subseteq D \cap E_K = i_k^{-1}(D),$$

de lo cual resulta para cada $K \in \mathcal{K}$

$$i_k^{-1}(D) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{G}_K).$$

Por consiguiente $D \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sea $(C_i)_{i \in I}$ la familia de todos los discos compactos de $(E,\mathcal{T})$. Para cada $i \in I$ $(E_{C_i}, \mathcal{G}_{C_i})$ es un espacio de Banach, ya que Ci es completo por ser Ci compacto.

Para cada $i \in I$ $f_i : E_{C_i} \hookrightarrow E$ la inmersión natural y $\mathcal{T}'$, la topología localmente convexa final respecto a las f_i. Probaremos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Sea $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}')$ disqueada, entonces para todo $i \in I$.

$U \cap E_{C_i} = f_i^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{G}_{C_i})$ por ser las f_i continuas. Luego existe $\alpha_i > 0$ tal que $\alpha_i C_i \subset U \cap E_{C_i}$ por ser $\alpha_i C_i$ un elemento basal de $\mathcal{V}(0, \mathcal{G}_{C_i})$. Entonces $C_i \subseteq 1/\alpha_i U$.

Por tanto U absorbe todos los discos compactos y por consiguiente las sucesiones fast-convergentes (proposición 2.3). Podemos afirmar entonces que $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ por hipótesis. Así resulta $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$.

Recíprocamente si $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ disqueada, como cada compacto es acotado tenemos que para toda $i \in I$, existe $\alpha_i > 0$

tal que $C_i \subset \alpha_i V$. Por tanto para cada $i \in I$ existe $\alpha_i > 0$ tal que:

$$1/\alpha_i \ C_i = f_i^{-1}(1/\alpha_i \ C_i) \subseteq f_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{G}_{C_i}).$$

Por consiguiente $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$. Y así $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$.

3. LOS ESPACIOS ULTRABORNOLOGICOS Y EL TEOREMA DE GRAFICO CERRADO.

<u>Definición</u> 2.2 Sea $(E, \mathcal{T})$ y $(F, \mathcal{T}')$ dos espacios localmente convexos y Hausdorff. $h: E \to F$ una aplicación lineal. El gráfico de h es <u>fast-secuencialmente cerrado</u> en EXF si:

$x_m \xrightarrow{f} x$ y $h(x_m) \xrightarrow{f} y$ implica $h(x) = y$. Donde $(x_m)_{m \geq 1} \subseteq E$ y $x \in E$.

<u>Teorema</u> 2.2 Si $(E, \mathcal{T})$ es un espacio ultrabornológico y $(F, \| \ \|)$ es un espacio de Banach, cualquier aplicación lineal de E en F cuyo gráfico es fast-secuencialmente cerrado en EXF es continua.

<u>Demostración</u>. Por ser $(E, \mathcal{T})$ ultrabornológico, $(E, \mathcal{T})$

es límite inductivo de $((E_K, \mathcal{G}_K), i_K)_{K \in \mathcal{K}}$ (teorema 2.1).

Sea $h: E \longrightarrow F$, una aplicación lineal cuyo gráfico es fast-secuencialmente cerrado en $E X F$.

Como τ es la topología localmente convexa final en E, respecto a las i_K tenemos que:

$$\begin{array}{l} E_K \xrightarrow{i_K} E \xrightarrow{h} F \\ \vdots \\ E_{K'} \xrightarrow{i_{K'}} E \end{array} \qquad \begin{array}{l} h_K = h o i_K : E_K \longrightarrow F \\ \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} i_K(E_K) = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} E_K = E \end{array}$$

h_K es la restricción de h sobre E_K. Tenemos entonces que:

h es continua si y sólo si $h_K: E_K \to F$ es continua para toda $K \in \mathcal{K}$.

Por demostrar: h_K es continua para toda $K \in \mathcal{K}$.

Como E_K y F son espacios de Banach por el teorema clásico del gráfico cerrado bastará con que demostremos que el gráfico de h_K, G_K, es cerrado en $E_K \times F$.

Sea $(x,y) \in \overline{G_K}$, entonces existe una sucesión $(x_n, h_K(x_n))_{n \geq 1}$ en G_K tal que $(x_n, h_K(x_n)) \longrightarrow (x,y)$. O sea que existe $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq E_K$ tal que x_n converge a x en $(E_K, \mathcal{G}_K)$ y $h(x_n)$ converge a y en $(F, \| \|)$. Es decir existe una sucesión,

$(x_n)_{n\geq 1}\subset E$, fast-convergente a $x\in E$ y $(h(x_n))_{n\geq 1}\subset F$, fast-convergente a $y\in F$ (proposición 2.2). Ahora como h tiene el gráfico fast-secuencialmente cerrado entonces $h(x) = y$, con lo cual $(x,y)\in G_K$.

De esta forma hemos demostrado que el gráfico de h_K es cerrado en $E_K \times F$ por tanto h_K resulta continua.

Teorema 2.3 Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo, Hausdorff tal que para cualquier espacio normado $(F,\|\ \|)$ y para toda $f:E\longrightarrow F$ lineal tal que el gráfico de f fast-secuencialmente-cerrado implica que f sea continua. Entonces $(E, \mathcal{T})$ es ultrabornológico.

Demostración. Sea U un disco que absorbe los discos compactos. Entonces U es absorbente y luego

$$E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda U = E_u$$

Por consiguiente $\mathcal{G}_U:E\longrightarrow \mathbb{R}$ es una semi-norma.

Sea $F = E/\mathcal{G}_U^{-1}(\{0\})$, el espacio cociente el cual resulta normado con $\tilde{\mathcal{G}}_U(\tilde{x}) = \inf\limits_{x\in\tilde{x}} \mathcal{G}_U(x)$.

Sea $\varphi : E\longrightarrow F$ tal que $\varphi(x) = \tilde{x}$. φ tiene el gráfico fast-secuencialmente cerrado. En efecto sea $(x_n)_{n\geq 1}\subseteq E$, tal que

$(x_n) \xrightarrow{f} x$ y $\varphi(x_n) \xrightarrow{f} y$. Queremos demostrar que $\varphi(x) = \tilde{y}$.

Como $(x_n)_{n\geq 1}$ es fast-convergente a x entonces existe una sucesión de números positivos tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda m = +\infty$ y $\lambda m(x_m - x) \xrightarrow{f} 0$ (proposición 2.1).

Con lo cual existe un disco compacto $K \subseteq E$ tal que $\lambda m(x_m - x)$ converge a 0 en el espacio de Banach $(E_K, \mathcal{G}_K)$.

Por ser K disco compacto, existe $\alpha > 0$ tal que $K \subset \alpha U$ y en consecuencia $\mathcal{G}_{\alpha U} \leq \mathcal{G}_K$. O sea $1/\alpha\ \mathcal{G}_U \leq \mathcal{G}_K$.

Luego

$$1/\alpha\ \mathcal{G}_U(\lambda_m(x_m - x)) \leq \mathcal{G}_K(\lambda_m(x_m - x))$$

Por tanto existe $N \geq 1$: $1/\alpha\ \lambda_m(x_m - x) \in U$ si $m \geq N$. Lo que equivale a que $x_m - x \in \alpha/\lambda_m\, U$ para $m \geq N$. Luego $\mathcal{G}_U(x_n - x) \leq \alpha/\lambda n$. O sea $\mathcal{G}_U(x_n - x) \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$.

Pero $\tilde{\mathcal{G}}_U(\tilde{x}_m - \tilde{x}) \leq \mathcal{G}_U(x_n - x)$. Por tanto $\tilde{\mathcal{G}}_U(\tilde{x}_n - \tilde{x}) \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$. Así $\tilde{y} = \varphi(x)$. Esto implica que φ es continua ($\mathcal{T} - \tilde{\mathcal{G}}_U$ - continua).

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j = i\circ\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{F} \\ F \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\hat{F}$ es el completamiento de F.

j es continua, $\hat{B}_1 = \{ z \in \hat{F}/z = \lim_{m\to\infty} x_m$. Existe $N \geq 1$;
$\mathcal{G}_U(x_n) < 1$ para $n \geq N \}$.

Tenemos entonces que $j^{-1}(\hat{B}_1) \in \mathcal{V}(0,\tilde{\mathcal{T}})$. Donde

$$j^{-1}(\hat{B}_1) = \{x \in E/j(x) \in \hat{B}_1\}$$

$$= \{x \in E/\tilde{x} = \lim \tilde{x}_n, \tilde{x}_n = \tilde{x}, \exists\ N \geq 1,$$

$$n \geq N \text{ implica } \mathcal{G}_U(x_n) = \mathcal{G}_U(x) \leq 1$$

$$j^{-1}(\hat{B}) = \{x \in E/ \mathcal{G}_U(x) < 1\} \subseteq U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}).$$

C A P I T U L O   3

E S P A C I O S   D E   F U N C I O N E S   C O N T I N U A S

Taira Shirota en [10] y Leopoldo Nachbin en [7] dan una caracterización de los espacios de funciones continuas bornológicos y tonelados. Una década después De Wilde y Schmets en [2] dan una caracterización para los espacios de funciones continuas ultrabornológicos.

Vamos aquí a profundizar sobre estos conocimientos.

1. TOPOLOGIA COMPACTA ABIERTA

Indicaremos con $\mathcal{C}(X)$ el espacio de las funciones continuas definidas en X con valores en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Donde $\mathbb{R}$ está dotado de la topología usual o euclideana, $\mathcal{T}u$.

<u>Definición</u> 3.1 Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico $K\subset X$ y $U\subset \mathbb{R}$.

Definimos:

$$\underline{T(K,U)} = \{ f \in \mathcal{C}(x) / \quad f(K) \subset U \}$$

<u>Proposición</u> 3.1 Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces

$$\beta = \{T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset \mathcal{C}(X) / K \text{ compacto y } \varepsilon > 0\}$$

es una pre-base para las vecindades de cero de una topología localmente convexa y Hausdorff sobre $\mathcal{C}(X)$.

<u>Demostración</u>. Para ello vamos a demostrar que para todo compacto $K \subset X$ y para todo $\varepsilon > 0$ se cumple:

a) $T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$ es disco.

En efecto si α, γ son dos escalares tales que $|\alpha| + |\gamma| \leq 1$ y $f, g \in T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$ tenemos entonces que para toda $x \in K$

$$\begin{aligned} |(\alpha f + \gamma g)(x)| &\leq |\alpha|\,|f(x)| + |\gamma|\,|g(x)| \\ &\leq |\alpha|\varepsilon + |\gamma|\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Así para todo $|\alpha| + |\gamma| \leq 1$, $f, g \in T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$ hemos obtenido que $\alpha f + \gamma g \in T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$.

b) $T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$ es absorbente en $\mathcal{C}(X)$

Como $T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$ es disco basta con demostrar que para cada $f\in \mathcal{C}(X)$ existe $\delta>0$ tal que $f\in \delta T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$.

Si $f\in\mathcal{C}(X)$ y $f/_K = 0$ entonces es evidente que $\delta=1$ ya que $f\in T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$. Pero si $f/_K \neq 0$ entonces existe $\alpha>0$ tal que $\alpha = \sup_{x\in K}|f(x)|$ por ser K compacto y f continua. De esta forma para toda $x\in K$

$$\varepsilon/(\alpha+1)\ |f(x)| < \varepsilon$$

Así nuestro $\delta = (\alpha+1)/\varepsilon > 0$ con lo cual $f\in\delta T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$.

c) Existe $\alpha>0$ tal que $T(K,]-\alpha,\alpha[) + T(K,]-\alpha,\alpha[) \subseteq T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$

Sea $\alpha = \varepsilon/2 > 0$ entonces si $f\in T(K,]-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2[) + T(K,]-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2[)$ tenemos que existe $g,\ h\in T(K,]-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2[)$ tal que $f = g + h$, con lo cual para toda $x \in K$

$$|f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)| < \varepsilon$$

Por consiguiente $f\in T(K,]-\varepsilon,\varepsilon[)$.

Como $\mathcal{C}(X)$ es un espacio lineal con las operaciones

$$\psi_1 : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \text{ tal que } \psi_1((f,g)) = f+g$$
$$\psi_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \text{ tal que } \psi_2((k,f)) = kf$$

entonces existe una única topología, $\mathcal{T}$, localmente convexa tal que β es su pre-base, corolario V-3, página 54 de [8] .

d) $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T})$ es Hausdorff.

Por ser $\mathcal{T}$ una topología lineal es suficiente mostrar que para todo $g \in \mathcal{C}(X)$ $g \neq 0$ existe una vecindad de cero tal que g no pertenece a ella.

En efecto si $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $g \neq 0$ entonces existe $x_o \in X$ tal que $g(x_o) \neq 0$. Luego

$$g \notin T(\{x_o\}, \,]-|g(x_o)| \, , \, |g(x_o)|[\,)$$

<u>Definición</u> 3.2 Sea $(X, \dot{\mathcal{T}})$ un espacio topológico. Se denomina <u>topología compacta-abierta</u> la determinada en $\mathcal{C}(X)$ por la colección :

$\{T(K,U) \subset \mathcal{C}(X) / K$ es compacto y U es abierto$\}$. La cual denotaremos $\mathcal{T}_{c-a}$

<u>Corolario</u> 3.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces

$(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es un espacio localmente convexo y Hausdorff.

Para garantizar que $\mathcal{C}(X)$ no está formado unicamente por funciones constantes daremos a X una topología completamente regular.

<u>Definición</u> 3.3 $(X,\mathcal{T})$ es un espacio <u>completamente regular</u> si es Hausdorff y para cada cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X \setminus F$, existe una función $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = \{0\}$.

<u>Ejemplo</u> 3.1 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}u)$ es completamente regular.

Podemos dotar al espacio $\mathcal{C}(X)$ de un orden parcial.

<u>Definición</u> 3.4 Sean $f, g \in \mathcal{C}(X)$ se dice que <u>$f \leq g$</u> si para toda $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$.

<u>Ejemplo</u> 3.2 Sea $X = [0,1]$ con la topología inducida por $(\mathbb{R}, \mathcal{T}u)$

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ y

$g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$.

Evidentemente $f \leq g$.

Hay funciones de $\mathcal{C}(X)$ que no pueden ser comparadas por dicha relación.

<u>Ejemplo</u> 3.3 Sean $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$.

Si $x \leq 1$ $f(x) \geq g(x)$, pero si $x > 1$ entonces $f(x) \leq g(x)$. Por tanto f y g no pueden ser comparadas por esta relación de orden.

<u>Definición</u> 3.5 Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular y $f, g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f \leq g$. Definimos

$$\underline{[f,g]} = \{h \in \mathcal{C}(X) / f \leq h \leq g\}$$

el cual llamaremos <u>segmento</u> de $\mathcal{C}(X)$.

<u>Proposición</u> 3.2 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Para toda $f,\ g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f \leq g$ tenemos que $[f,g]$ es acotado para la topología compacta abierta.

<u>Demostración</u>. Sea $K \subseteq X$ compacto. Por demostrar:

Existe $\alpha > 0$ tal que $[f,g] \subset \alpha T(K,\ ]-1,1[)$

Sea $h \in [f,g]$ y sea $\alpha' = \max\{\sup_{x\in K}|f(x)|, \sup_{x\in K}|g(x)|\}$. El cual sabemos que existe porque K es compacto y $f,\ g \in \mathscr{C}(X)$.

Como para toda $x \in X$ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Entonces $\sup_{x\in K} |h(x)| < \alpha'+1$. Sea $\alpha = \alpha'+1$ entonces $\sup_{x \in K} h(x) < \alpha$. Por tanto $h \in \alpha T(K,]-1,1[\ )$.

De esta forma hemos demostrado que $[f,g]$ es acotado en $(\mathscr{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$.

Proposición 3.3 Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, $f \in \mathscr{C}(X)$, $f \geq 0$. Entonces $[-f,f]$ es un disco acotado en $(\mathscr{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$.

Demostración. a) $[-f,f]$ es disco. En efecto si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ y $g,h \in [-f,f]$. Entonces para cada $x \in X$

$$
\begin{aligned}
(\alpha g + \beta h)(x) &\leq |\alpha||g(x)| + |\beta||h(x)| \\
&\leq |\alpha| f(x) + |\beta| f(x) \leq f(x)
\end{aligned}
$$

Con lo cual $|\alpha g + \beta h| \leq f$ y así

$$\alpha g + \beta h \in [-f,f].$$

b) $[-f,f]$ es $\mathcal{T}_{c-a}$- acotado.

Por la proposición 3.2.

Definición 3.6 Sea $A \subseteq \mathscr{C}(X)$. Decimos que A es acotado según el orden si existe $h \in \mathscr{C}(X)$, $h \geq 0$ tal que $|f| \leq h$ para todo $f \in A$.

Corolario 3.1 $A \subseteq \mathscr{C}(X)$ es acotado según el orden si y sólo si existe $h \in \mathscr{C}(X)$, $h \geq 0$ tal que $A \subseteq [-h, h]$.

Ejemplo 3.4 Sea $f \in \mathscr{C}(X), f \geq 0$. Entonces $[-f, f]$ es acotado según el orden.

Proposición 3.4 Sea $A \subseteq \mathscr{C}(X)$, acotado según el orden. Entonces A es acotado para la topología compacta-abierta.

Demostración. Sea $A \subseteq \mathscr{C}(X)$ acotado según el orden. Para demostrar que A es acotado para la topología compacta abierta basta con mostrar que para cada compacto $K \subseteq X$, existe un $\alpha > 0$ tal que $A \subseteq T(K,]-\alpha, \alpha[)$.

Sea K un compacto de X, por ser A acotado según el orden existe un $h \in \mathscr{C}(x)$, $h \geq 0$ tal que $A \subseteq [-h, h]$.

Sea $\alpha = 1 + \sup\limits_{x \in K} h(x) > 0$. Entonces si $f \in A$ para todo

$x \in K$

$$|f(x)| \leq \sup_{x \in K} h(x) < \alpha$$

Por tanto $f(K) \subset]-\alpha, \alpha[$ con lo cual $f \in T(K,]-\alpha, \alpha[\ )$.

<u>Definición</u> 3.7. Un funcional lineal, $T: \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice <u>acotado según el orden</u> si para todo $A \subseteq \mathcal{C}(X)$, acotado según el orden $\sup_{g \in A} |T(g)| < \infty$

<u>Ejemplo</u> 3.5. Sea $x_0 \in X$. Definimos

$$T_{x_0}: \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ como } T_{x_0}(f) = f(xo)$$

para toda $f \in \mathcal{C}(X)$. Este funcional lineal es acotado según el orden.

En efecto es evidente que T_{x_0} es lineal. Veamos que es acotado según el orden. Sea $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ acotado según el orden, entonces existe $g \in \mathcal{C}(X)$ $g \geq 0$ tal que:

$$A \subseteq [-g, g]$$

Luego

$$T_{x_o}(A) \subseteq T_{x_o}([-g\ g])$$

Y así $\sup\limits_{h \in A} |T_{x_o}(h)| \leq \sup\limits_{h \in [-g,g]} |T_{x_o}(h)| = \sup\limits_{h \in [-g,g]} |h(xo)| \leq g(xo)$

Luego T_{x_o} es acotada según el orden.

Proposición 3.5. Sea $T: \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal.

Entonces:

T es acotado según el orden si y sólo si para todo

$f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$ $\quad \sup\limits_{g \in [-f,f]} |T(g)| < \infty$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f \geq 0$. Entonces como

$[-f,f]$ es acotado según el orden

$\sup\limits_{g \in [-f,f]} |T(g)| < \infty$ por definición de funcional acotado según el orden.

$\Leftarrow$) Sea $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ acotado según el orden. Entonces existe $f_A \in \mathcal{C}(x)$, $f_A \geq 0$ tal que:

$$A \subseteq [-f_A, f_A]$$

Luego

$$\sup_{g \in A} |T(g)| \leq \sup_{g \in [-f_A, f_A]} |T(g)| < \infty$$

2. DISCOS DE BANACH

<u>Definición</u> 3.8 Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo y Hausdorff. Un disco acotado $D \subseteq E$ se denomina <u>disco de Banach</u> si el espacio $(E_D, \mathcal{G}_D)$ es un espacio de Banach y si $D = \{x \in E / \mathcal{G}_D(x) \leq 1\}$.

<u>Ejemplo</u> 3.6 El intervalo real $[-1,1]$ es un disco de Banach en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}u)$.

<u>Proposición</u> 3.6 Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular. Para toda $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$ tenemos que:

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(g) = \sup_{f(x) \neq 0} |g(x)| / f(x)$$

para toda $g \in \mathcal{C}(X)_{[-f,f]}$

<u>Demostración</u>. Para toda $g \in \mathscr{C}(X)_{[-f,f]}$

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(g) = \operatorname{Inf}\{\lambda > 0 \;/\; g \in \lambda[-f,f]\}$$

$$= \operatorname{Inf}\{\lambda > 0 \;/\; |g| \leq \lambda f\}$$ Por definición de intervalo.

Si $g = 0$ es inmediato que se cumple la igualdad

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(g) = 0 = \sup_{f(x) \neq 0} |g(x)| \;/ f(x)$$

Si $g \neq 0$ entonces $\alpha = \sup_{f(x) \neq 0} |g(x)| \;/ f(x) > 0$.

Sea $A = \{\lambda > 0 / \; |g| \leq \lambda f\}$. Vamos a demostrar que $\alpha \in A$.

Con lo cual resulta

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(g) \leq \sup_{f(x) \neq 0} |g(x)| \;/ f(x)$$

En efecto por definición del supremo $|g(x)| \;/ f(x) \leq \alpha$ para toda $f(x) \neq 0$. De lo cual obtenemos $|g(x)| \leq \alpha\, f(x)$ para toda $f(x) \neq 0$.

Si $f(x) = 0$ como $g \in \mathscr{C}(X)_{[-f,f]}$ existen $\lambda > 0$ y $h \in [-f,f]$ tal que $g = \lambda h$. Con lo cual $|g(x)| \leq \lambda f(x)$ para toda $x \in X$. En particular para $f(x) = 0$ resulta $|g(x)| = 0$ con lo cual obtenemos para toda x tal que $f(x) = 0$, $|g(x)| \leq \alpha\, f(x)$. Así para toda $x \in X$ se cumple:

$$|g(x)| \leq \alpha \; f(x) \text{ para } \alpha > 0$$

Por consiguiente como $\alpha > 0$ y $|g| \leq \alpha f$ tenemos que $\alpha \in A$.

Veamos ahora el otro sentido de la desigualdad. Para todo $\lambda \in A$, $|g(x)| \leq \lambda f(x)$ para toda $x \in X$. Por tanto para toda $\lambda \in A$, $|g(x)|/f(x) \leq \lambda$ para $f(x) \neq 0$. Así

$$\sup_{f(x) \neq 0} |g(x)|/f(x) \leq \lambda$$

por la propiedad del supremo. Y luego obtenemos

$$\sup_{f(x) \neq 0} |g(x)|/f(x) \leq \operatorname{Inf} \{\lambda \in A\} = \mathcal{G}_{[-f,f]}(g)$$

<u>Lema</u> 3.1 Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular, $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$. Entonces $[-f,f]$ es un disco de Banach.

<u>Demostración</u>. Para que $[-f,f]$ sea un disco de Banach debe cumplirse:

a) $(\mathcal{C}(X)_{[-f,f]}, \mathcal{G}_{[-f,f]})$ es un espacio de Banach.

b) $[-f,f] = \{ g \in \mathcal{C}(X) / \mathcal{G}_{[-f,f]}(g) \leq 1 \}$

Veamos la demostración de a) y b)

a) En efecto sea $(f_m)_{m \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(X)_{[-f,f]}, \mathcal{G}_{[-f,f]})$. Debemos probar que $(f_m)_{m \geq 1}$ es convergente en $\mathcal{C}(X)_{[-f,f]}$. Para ello es suficiente con demostrar que existe una subsucesión de $(f_m)_{m \geq 1}$ que es convergente.

Como $(f_m)_{m \geq 1}$ es de Cauchy para $k \geq 1$, existe $m_k \geq 1$ tal que:

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(fm - fm_k) \leq 1/2^k$$

para cada $m \geq m_k$. En particular

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}(f_{m_{k+1}} - f_{m_k}) \leq 1/2^k$$

pues podemos suponer $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < m_k + 1 \cdots$

Además:

$$f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \in 1/2^k \, [-f, f]$$

Es decir para cada $k \geq 1$, existe $g_k \in [-f, f]$ tal que

$$f_{m_{k+1}} - f_{m_k} = g_k/2^k$$

Consideremos la subsucesión $(f_{m_{k+1}})_{k \geq 1}$ de $(f_m)_{m \geq 1}$.
Para cada $n \geq 1$ tenemos que:

$$f_{m_{n+1}} = f_{m_1} + \sum_{k=1}^{n} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})$$

$$= f_{m_1} + \sum_{k=1}^{n} g_k/2^k$$

Y así:

$$\lim_{n\to\infty} f_{m_{n+1}} = f_{m_1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k/2^k$$

Luego bastará con demostrar que existe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k/2^k$$

es decir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k/2^k$ es convergente en
$(\mathcal{C}(X)_{[-f,f]} \quad \mathcal{G}_{[-f,f]}\}$.

Sea $s_k = \sum_{m=1}^{k} g_m/2^m$

i) Para cada $x \in X$, tenemos

$$|(s_k - s_e)(x)| = \left| \sum_{m=k+1}^{e} g_m(x)/2^m \right|$$

$$\leq \sum_{m = k+1}^{e} |g_m(x)|/2^m$$

$$\leq \sum_{m = k+1}^{e} f(x)/2^m \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

Luego $(s_k(x))_{k \geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Con lo cual existe

$$\lim_{k \to \infty} s_k(x) = \sum_{m = 1}^{\infty} g_m(x)/2^m$$

Definamos $g(x) = \sum_{m = 1}^{\infty} g_m(x)/2^m$

ii) $g \in \mathcal{C}(X)$. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $V \in \mathcal{V}(x_0, \tau)$ tal que $\sup_{x \in V} f(x) = \alpha < \infty$.

Como $\sum_{k = m}^{\infty} 1/2^k \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$.

Esto equivale a que

$$\sup_{x \in V} \left| \sum_{m = k}^{\infty} g_m(x)/2^m \right| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Luego existe $M \geq 1$ tal que

$$\sup_{x \in V} \left| \sum_{m=k}^{\infty} g_m(x)/2^m \right| \leq \varepsilon/4$$

Consideremos la función $h = \sum_{k=1}^{M} g_m/2^m$ es claro que h es continua y por tanto continua en x_o, con lo cual existe $V' \in \mathcal{V}(x_o, \mathcal{T})$, $V' \subseteq V$ tal que para toda $x \in V'$

$$|h(x) - h(x_o)| \leq \varepsilon/2$$

Es decir

$$\sup_{x \in V'} \left| \sum_{k=1}^{M} g_m(x)/2^m - \sum_{k=1}^{M} g_m(x_o)/2^m \right| \leq \varepsilon/2$$

Pero entonces:

$$\sup_{x \in V'} |g(x) - g(x_o)| - \sup_{x \in V'} \left| \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)/2^m - \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x_o)/2^m \right|$$

$$= \sup_{x \in V'} \left| \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m + \sum_{m=M+1}^{\infty} g_m(x)/2^m - \sum_{m=1}^{M} g_m(x_o)/2^m - \sum_{m=M+1}^{\infty} g_m(x_o)/2^m \right|$$

$$\leq \sup_{x \in V'} \left| \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m - \sum_{m=1}^{M} g_m(x_o)/2^m \right| + \sup_{x \in V'} \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} g_m(x)/2^m \right|$$

$$+ \sup_{x \in V'} \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} g_m(x_o)/2^m \right|$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$$

Es decir $\sup_{x \in V'} |g(x)-g(x_o)| \leq \varepsilon$

Por consiguiente g es continua en x_o. Con lo cual g es continua o sea $g \in \mathscr{C}(X)$.

iii) $g \in [-f, f]$. Para cada $x \in X$,

$$|g(x)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)/2^m\right|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} |g_m(x)|/2^m$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} f(x)/2^m$$

$$\leq f(x)$$

Luego $g \in [-f, f]$.

iv) $\sum_{m=1}^{\infty} g_m/2^m \longrightarrow g$ en $(\mathscr{C}(X)_{[-f,f]}, \mathcal{G}_{[-f,f]})$

Para cada $x \in X$

$$\left|g(x) - \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)/2^m - \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m\right|$$

$$= \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} g_m(x)/2^m \right| \leq \sum_{m=M+1}^{\infty} |g_m(x)|/2^m$$

$$\leq \sum_{m=M+1}^{\infty} f(x)/2^m \leq f(x)/2^m$$

Luego para toda x tal que $f(x) \neq 0$

$$\left| g(x) - \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m \right| /f(x) \leq 2^{-M}$$

Por consiguiente

$$\sup_{f(x)\neq 0} \left| g(x) - \sum_{m=1}^{M} g_m(x)/2^m \right| /f(x) \leq 2^{-M}$$

De lo cual se sigue por proposición 3.6

$$\mathcal{G}_{[-f,f]}\left(g - \sum_{m=1}^{M} g_m/2^m\right) \leq 2^{-M} \longrightarrow 0 \text{ cuando } M \to \infty .$$

Luego $\sum_{m=1}^{\infty} g_m/2^m = g$

b) Sea $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $\mathcal{G}_{[-f,f]} \leq 1$. Entonces existe $0 \leq \alpha \leq 1 : g \in \alpha[-f,f]$. Por tanto existe $0 \leq \alpha \leq 1 : g \in [-\alpha f, \alpha f] \subseteq [-f,f]$.

Ahora si $g \in [-f,f]$ tenemos $|g| \leq f$. Esto equivale a que $|g(x)| \leq f(x)$ para todo $x \in X$ y así $\mathcal{G}_{[-f,f]}(g) \leq 1$.

3. ESPACIOS BORNOLOGICOS Y ULTRABORNOLOGICOS

Si $(E, \mathcal{T})$ es localmente convexo y Hausdorff. Entonces $(E, \mathcal{T})$ ultrabornológico implica $(E, \mathcal{T})$ bornológico. La recíproca no necesariamente es válida. Sin embargo $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es un espacio localmente convexo y Hausdorff y $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ bornológico implica $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es ultrabornológico.

<u>Proposición</u> 3.7 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es completo para la estructura uniforme menos fina que hace uniformemente continuas las funciones numéricas continuas y finitas, definidas en X.

(2) Para todo elemento t de $\beta(X) \setminus X$ ($\beta(X)$ es el compactificado de Stone-Cech de X), existe una sucesión de vecindades de t, en $\beta(X)$, cuya intersección es disjunta de X.

(3) Para todo elemento $t \in \beta(X) \setminus X$, existe una función continua $f: \beta(X) \to [-\infty, \infty]$ tal que $f(t) = +\infty$ pero la restricción a X es finita.

<u>Demostración</u>. Ver página 57 de [1].

<u>Definición</u> 3.9 $(X,\mathcal{T})$ completamente regular es <u>Q-espacio</u> si una de las condiciones de la proposición 3.7 se cumple.

<u>Definición</u> 3.10. Sea V un disco de $\mathcal{C}(X)$, se dice que $K \subseteq \beta(X)$ es un <u>apoyo</u> de V si K es un cerrado (y luego compacto) tal que si una función $f \in \mathcal{C}(X)$, verifica la propiedad:

$$\text{Si } f^*(K) = \{0\} \quad \text{entonces } f \in V$$

Donde f^* designa la única extensión continua de f a $\beta(X)$ y con valores en $[-\infty, \infty]$.

Observese que dado $V \subseteq \mathcal{C}(X)$ disco, siempre existe un apoyo de V. En efecto $\beta(X)$ es un compacto y luego para toda $f \in \mathcal{C}(X)$: si $f^*(\beta(X)) = \{0\}$. Entonces $f^* = 0$. Con lo cual $f = 0$ y así $f \in V$.

<u>Lema</u> 3.2. Sea $V \subseteq \mathcal{C}(X)$ disco, que absorbe los segmentos y sea $K \subseteq \beta(X)$ cerrado; entonces K es apoyo de V si y sólo si para toda vecindad U de K en $\beta(X)$ y para toda

$f \in \mathcal{C}(X)$: $f^*(U) = \{0\}$ implica $f \in V$.

<u>Demostración</u>. $\Rightarrow$) Sea U vecindad de K en $\beta(X)$ y $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f^*(U) = \{0\}$. Entonces $f \in V$ porque $f^*(K) = \{0\}$ y K es apoyo de V por hipótesis.

$\Leftarrow$) Sea $K \subseteq \beta(X)$ cerrado tal que para toda vecindad U de K en $\beta(X)$ y para toda $f \in \mathcal{C}(X)$: $f^*(U) = \{0\}$ implica $f \in V$

Demostraremos que para toda $f \in \mathcal{C}(X)$: $f^*(K) = \{0\}$ implica

Sea $h \in \mathcal{C}(X)$ tal que $h^*(K) = \{0\}$. Como V absorbe los segmentos existe $\alpha > 0$ tal que $[-1,1] \subseteq \alpha V$. Luego $[-1/\alpha, 1/\alpha] \subseteq V$. Es decir existe $\delta = 1/\alpha > 0$ tal que $[-\delta, \delta] \subseteq V$. Entonces $U = \{x \in \beta(X) / |h^*(x)| < \delta/2\}$ es un abierto de $\beta(X)$ por ser h^* continua. Además como $h^*(K) = \{0\}$ tenemos que $K \subseteq U$. Luego U es vecindad abierta de K. Y por tanto para toda $f \in \mathcal{C}(X)$:

$f^*(U) = \{0\}$ implica $f \in V$.

Sea $g = h \vee \delta/2 + h \wedge (-\delta/2)$, entonces $g \in \mathcal{C}(X)$ y $g^* = h^* \vee \delta/2 + h^* \wedge (-\delta/2)$ y $g^*(U) = \{0\}$.

En efecto para toda $x \in U$ se cumple

$$-\delta/2 < h^*(x) < \delta/2$$

entonces

$$h^*(x) \vee \delta/2 = \delta/2 \text{ y } h^*(x) \wedge (-\delta/2) = -\delta/2$$

por tanto $g^*(x) = 0$. Luego tenemos que $(2g)^*(U) = 2g^*(U) = \{0\}$ Y así $2g \in V$. Pero también $2(h-g) \in V$. En efecto sea $x \in X$ entonces si $h(x) < -\delta/2$:

$$h(x) \vee \delta/2 = \delta/2 \text{ y } h(x) \wedge (-\delta/2) = h(x).$$

Por tanto $g(x) = \delta/2 + h(x)$ y así $2(h-g)(x) = -\delta$ si $-\delta/2 \leq h(x) \leq \delta/2$ entonces $h(x) \vee \delta/2 = \delta/2$ y $h(x) \wedge (-\delta/2) = -\delta/2$. Por lo tanto $g(x) = 0$ luego

$$2(h-g)(x) = 2h(x) \leq \delta$$

Si $h(x) > \delta/2$ entonces $h(x) \vee \delta/2 = h(x)$ y $h(x) \wedge (-\delta/2) = -\delta/2$ por tanto $g(x) = h(x) - \delta/2$ y así $2(h-g)(x) = \delta$.

Con lo cual $2(h-g) \in [-\delta, \delta] \subseteq V$.

Luego $h = 1/2 \{2(h-g) + 2g\} \in V$ por ser V convexo.

Con lo cual hemos demostrado que K es un apoyo de V.

Vamos ahora a demostrar que la intersección de todos los apoyos de V es un apoyo de V, el cual llamaremos <u>soporte</u> de V. Sea

$$\mathcal{A} = \{ K \subseteq \beta(X) / K \text{ es apoyo de } V \}$$

1) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ya que $\beta(X) \in \mathcal{A}$. Todos los elementos de $\mathcal{A}$ son no vacios por definición de apoyo de V.

2) Si $K_1, K_2 \in \mathcal{A}$ entonces $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{A}$. En efecto, sea $K = K_1 \cap K_2$ y $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f^*(U) = \{0\}$ para toda U vecindad abierta de K. Debemos probar por el Lema 3.2 que $f \in V$.

Es claro que $K_1 \cap (K_2 \setminus U) = \emptyset$ y que K_1, $K_2 \setminus U$ son cerrados en $\beta(X)$.

Luego existe $\psi: \beta(X) \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $\psi(K_1) = \{1\}$, $\psi(K_2 \setminus U) = \{0\}$. Entonces $K_1 \subseteq W_1 = \psi^{-1}(\,]2/3, 1[\,)$ y $K_2 \setminus U \subseteq W_2 = \psi^{-1}(\,[0, 1/3[\,)$ donde $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$. Luego W_1 y W_2 son dos abiertos con adherencia disjuntas, luego son normalmente separados. O sea que existe $g^*: \beta(X) \longrightarrow [0,1]$ tal que $g^*(\overline{W}_1) = \{1\}$ y $g^*(\overline{W}_2) = \{0\}$ y además $K_1 \subseteq W_1$ y $K_2 \setminus U \subseteq \overline{W}_2$.

En estas condiciones

i) $(2fg)^*(U \cup W_2) = \{0\}$ ya que $f^*(U) = \{0\}$ y $g^*(W_2) = \{0\}$. Además $U \cup W_2$ es vecindad abierta de K_2 en $\beta(X)$ con lo cual $2fg \in V$ porque $K_2 \in \mathscr{A}$.

ii) $(2f + 2fg)^* \ (U \cup W_1) = 2f^*(1-g)^*(U \cup W_1)$
$= \{0\}$

En efecto $f^*(U) = \{0\}$ y $(1-g)^*(W_1) = \{0\}$. Ahora como $U \cup W_1$ es vecindad abierta de K_1 en $\beta(X)$ tenemos que $2f - 2fg \in V$ pues $K_1 \in \mathscr{A}$. Luego $f = 1/2\ (2fg + 2f - 2fg) \in V$ por ser V convexo. Con lo cual $K \in \mathscr{A}$.

3) $K(V) = \bigcap_{K \in \mathscr{A}} K \in \mathscr{A}$

En efecto en primer lugar observemos que por 2) : $\mathscr{A}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Luego

$$K(V) = \bigcap_{K \in \mathscr{A}} K \neq \emptyset$$

pues $\beta(X)$ es compacto.

A fin de mostrar que $K(V) \in \mathscr{A}$, sea U una vecindad abierta de $K(V)$ y $f \in \mathscr{C}(X)$ tal que $f \in V$. En efecto existe una familia $J \neq \emptyset$, $J \subset \mathscr{A}$, finita: $\bigcap_{K \in J} K \subseteq U$. Ya que en caso contrario para cada $J \neq \emptyset$, $J \subset \mathscr{A}$, $(\bigcap_{K \in J} K) \cap {}^{\beta(X)} U \neq \emptyset$.

Ahora $\beta(X) \setminus U$ es cerrado en $\beta(X)$ por tanto $\beta(X) \setminus U$ es compacto y así $\bigcap_{K \in \mathcal{A}} K \cap (\beta(X) \setminus U) \neq \emptyset$. Contrario a la hipótesis de que $K \subseteq U$.

Existe entonces $\emptyset \neq J \subseteq \mathcal{A}$, finita tal que $\bigcap_{K \in J} K \subseteq U$. Como esta intersección está en $\mathcal{A}$ tenemos que $f^*(U) = \{0\}$ implica $f^* (\bigcap_{K \in J} K) = \{0\}$ y así $f \in V$. Luego $K(V) \in \mathcal{A}$.

<u>Teorema</u> 3.1 (Nachbin-Shirota). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular. Son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) $(X, \mathcal{T})$ es Q-espacio

(2) $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es bornológico.

<u>Demostración</u>.(1)⇒(2) Sea $V \in \mathcal{C}(X)$ un disco bornívoro, debemos probar que $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{c-a})$.

Como V es disco bornívoro entonces V absorbe los segmentos. Existe entonces $\delta > 0$ tal que $[-\delta, \delta] \subseteq V$ (ya que V absorbe $[-1, 1]$).

Sea $K(V) \subseteq \beta(X)$ el soporte de V.

Probaremos en primer lugar que $K(V) \subseteq X$. Es decir si $t \in \beta(X) \setminus X$ entonces $t \notin K(V)$.

Como X es un Q-espacio, tenemos que para cada $t \in \beta(X) \setminus X$ existe una sucesión $(V_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{V}(t, \mathcal{T}_{\beta(X)})$ que podemos suponer decreciente tal que:

$$\bigcap_{n \geq 1} V_n \cap X = \emptyset$$

Pero para cada $n \geq 1$ existe $W_n \in \mathcal{V}(t, \mathcal{T}_{\beta(X)})$ abierta tal que $\overline{W}_n \subseteq V_n$. Así $(\bigcap_{n \geq 1} \overline{W}_n) \cap X = \emptyset$.

Probaremos que existe $n_o \geq 1$ tal que $\beta(X) \setminus W_{n_o}$ es un apoyo de V. Si no es así entonces para toda $n \geq 1$ existe $f_n \in \mathcal{C}(X)$ tal que:

$$f_n^*(\beta(X) \setminus W_n) = \{0\} \quad y \quad f_n \notin V \qquad (1)$$

Sea $g = \bigvee_{n=1}^{\infty} n \, | f_n |$. Para toda $m \geq 1$

$$g/_{(X \setminus \overline{W}_m)} = \bigvee_{n=1}^{m} n \, | f_n |$$

En efecto $f_{m+1}(X \setminus \overline{W}_{m+1}) \subseteq f_{m+1}(X \setminus W_{m+1})$
$= \{0\}$

Pero $\overline{W}_{m+1} \subseteq \overline{W}_m$ luego $X \setminus \overline{W}_m \subseteq X \setminus \overline{W}_{m+1}$ por tanto $f_m(X \setminus \overline{W}_m) = \{0\}$.

Análogamente $f_{m+2},\dots$ son nulos sobre $X\setminus\overline{W}_m$. Así para todo $n\geq 1$ tenemos:

a) $g/_{X\setminus\overline{W}_n}$ es continua

b) $X\setminus\overline{W}_n = X\cap(\beta(X)\setminus\overline{W}_n)$ es un abierto de X

c) $X = X\setminus(\bigcap_{n\geq 1}\overline{W}_n)$ y por tanto $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1}(X\setminus\overline{W}_n)$

Luego por a), b) y c) obtenemos $g\in\mathcal{C}(X)$.

Es claro que $g\geq 0$ y como V absorbe los segmentos, V absorbe $[-g,g]$. Con lo cual existe $\alpha>0$ tal que $[-g,g]\subseteq\alpha V$.

Ahora como $g = \bigvee_{n=1}^{\infty} n\,|f_n|$ tenemos $-g\leq n|f_n|\leq g$ para toda $n\geq 1$. Así $nf_n\in\alpha V$ para toda $n\geq 1$. Por ser V disco, para toda $n\geq\alpha$ $f_n\in V$, contrario a (1). De esta manera existe $n_o\geq 1$ tal que $\beta(X)\setminus W_{n_o}$ es un apoyo de V. Por tanto

$$K(V)\subseteq\beta(X)\setminus W_{n_o} \text{ y así } t\notin K(V).$$

Probaremos ahora que

$$T(K(V),\ [-\delta/2,\ \delta/2]\ )\subseteq V.$$

En efecto sea $f\in T(K(V),\ [-\delta/2,\ \delta/2]\ )$ entonces $|f(x)|\leq\delta/2$ para toda $x\in K(V)$.

Sea $g = f\vee\delta/2 + f\wedge(-\delta/2)$. Entonces para toda $x\in K(V)$: $f(x)\vee\delta/2 = \delta/2$ y $f(x)\wedge(-\delta/2) = -\delta/2$. Por tanto $g(x) = 0$ para toda $x\in K(V)$. O sea $2g(K(V)) = \{0\}$ por tanto $2g\in V$ por ser $K(V)$ soporte de V.

Por otro lado tenemos que $2(f-g) \in V$. En efecto sea $x \in X$. Entonces :

1) Si $f(x) < -\delta/2$, $g(x) = \delta/2 + f(x)$ por tanto
   $2(f-g)(x) = -\delta$
2) Si $-\delta/2 \leq f(x) \leq \delta/2$, $g(x) = 0$ y así $2(f-g)(x) = 2f(x)$
   por tanto $-\delta \leq 2(f-g)(x) \leq \delta$
3) Si $f(x) > \delta/2$ tenemos $g(x) = f(x) - \delta/2$ con lo cual
   $2(f-g)(x) = \delta$

De esta forma $2(f-g) \in [-\delta, \delta] \subset V$

Luego $f = 1/2 \{2g - 2(f-g)\} \in V$ por ser V convexo. Con lo cual obtenemos $T(K(V), [-\delta/2, \delta/2]) \subseteq V$ y así $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{c-a})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vamos a demostrar su equivalente. Si X no es Q-espacio entonces $\mathcal{C}(X)$ no es bornológico.

Si X no es Q-espacio entonces por proposición 3.7-(3) existe un $t \in \beta(X) \setminus X$ tal que $f^*(t)$ es finita para toda $f \in \mathcal{C}(X)$.

Sea $\psi_t : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, funcional lineal definida por $\psi_t(f) = f^*(t)$. Entonces (1) ψ_t es discontinua.

En efecto si ψ_t fuera continua tendría un soporte compacto $C \subset X$ (lema 1, página 47 de [1]) tal que si $f(C) = \{0\}$ entonces $\psi_t(f) = 0$. Como C es cerrado en $\beta(X)$ existe una función continua h: $\beta(X) \longrightarrow [0,1]$ tal que $h(C) = \{0\}$ y $h(t) = 1$ con la cual obtenemos:

a) $\psi_t(h) = 0$ por ser C soporte de ψ_t y $h(C) = \{0\}$

b) $\psi_t(h) = h(t) = 1$.

Con lo cual nuestro supuesto de continuidad de ψ_t es falso.

(2) ψ_t es un funcional lineal acotado en $(\mathscr{C}(X), \tau_{c-a})$

Solo nos falta demostrar que ψ_t lleva acotados en acotados.

Sea $Y \subseteq \mathscr{C}(X)$ acotado. Si $\psi_t(Y)$ no fuera acotado podríamos obtener una sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ en Y tal que la sucesión de números

$$(f_n(t))_{n \geq 1} \longrightarrow \infty \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Sea $W_n = \{ x \in \beta(X) / \mid f_n^*(x) \mid > \mid f_n^*(t) \mid -1 \}$ la cual es vecindad abierta de t. Y tal que:

$$X \cap \left(\bigcap_{n \geq 1} W_n \right) \neq \emptyset$$

porque $(X, \mathcal{T})$ no es Q-espacio (proposición 3.7-(2)).

Así resulta que existe $x_o \in X \cap (\bigcap_{n \geq 1} W_n)$ tal que $|f_n(x_o)| > |f_n^*(t)| - 1$ para toda $n \geq 1$. Con lo cual

$$|f_n(x_o)| \to +\infty$$

Contrario a que Y sea acotado. Por tanto $\psi_t(Y)$ es acotado. Lo cual nos dice que ψ_t es un funcional lineal acotado y ψ_t no es continua. Por tanto $\mathcal{C}(X)$ no es bornológico.

Resultado equivalente a que $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ bornológico implique $(X, \mathcal{T})$. Q-espacio.

<u>Proposición</u> 3.8 Sea E un espacio lineal sobre $\mathbb{K}$ y $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una semi-norma. Sea E^* el dual algebraico de E. Y

$$\mathcal{A} = \{ f \in E^* / |f(x)| \leq p(x), \text{ para toda } x \in E \}$$

Entonces para toda $x \in E$

$$p(x) = \sup_{f \in \mathcal{A}} |f(x)|$$

Demostración. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $f = 0 \in \mathcal{A}$. Sea $x_o \in E$, es claro que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} |f(x_o)| \leq p(x_o)$$

Por definición de $\mathcal{A}$.

Si $p(x_o) = 0$ se obtiene la igualdad.

Si $p(x_o) \neq 0$. Consideremos el sub-espacio de E, $F = \langle x_o \rangle = \mathbb{K}\, x_o$. Y sea $h: F \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para $y = \lambda x_o$, $h(y) = \lambda\, p(x_o)$. Entonces h es lineal.

En efecto, sea $y_1, y_2 \in F$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tal que $y_1 = k_1 x_o$ y $y_2 = k_2 x_o$ por tanto

a)
$$\begin{aligned} h(y_1+y_2) &= h((k_1+k_2)x_o) \\ &= (k_1+k_2)\, p(x_o) \\ &= k_1 p(x_o) + k_2 p(x_o) \\ &= h(y_1) + h(y_2) \end{aligned}$$

b) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\begin{aligned} h(\lambda y_1) &= h(\lambda k_1 x_o) \\ &= \lambda k_1 p(x_o) = \lambda h(y_1) \end{aligned}$$

Ahora para todo $y \in F$

$$
\begin{aligned}
|h(y)| &= |h(\lambda x_o)| \\
&= |\lambda| \; p(x_o) \\
&= p(\lambda x_o) \\
&= p(y)
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Hahn-Banach existe $\bar{h} \in E^*$: $\bar{h}/F = h$ y

$$|\bar{h}(x)| \leq p(x)$$

Para toda $x \in E$. En particular $\bar{h} \in \mathcal{A}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ahora } p(x_o) &= h(x_o) \\
&= |\bar{h}(x_o)| \\
&\leq \sup_{f \in \mathcal{A}} |f(x_o)| .
\end{aligned}
$$

<u>Proposición</u> 3.9 Sea $(X, \mathcal{T})$ completamente regular. Para que $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ sea ultrabornológico es suficiente que todo disco $D \subseteq \mathcal{C}(X)$ que absorbe $[-f, f]$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$ $f \geq 0$ sea una vecindad del origen en $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$.

Demostración. Para que $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ sea ultrabornológico es suficiente que $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ sea límite inductivo de los espacios de Banach

$$((\mathcal{C}(X)_{[-f,f]}, \mathcal{J}_{[-f,f]}))_{f \geq 0}$$

Para cada $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$ consideremos la inmersión canónica

$$i_f : \mathcal{C}(X)_{[-f,f]} \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$$

Sea $\mathcal{T}'$ la topología localmente convexa final respecto a las i_f.

Demostraremos que $\mathcal{T}_{c-a} = \mathcal{T}'$

Si $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$ disqueada entonces

$$i_f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{J}_{[-f,f]}).$$

Luego existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\lambda[-f,f] \subseteq U.$$

Lo cual equivale a que existe $\alpha = \frac{1}{\lambda} > 0$ tal que

$$[-f,f] \subseteq \alpha\, U$$

Por hipótesis entonces

$$U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_{c-a}).$$

Así resulta $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}_{c-a}$.

Ahora si $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_{c-a})$ disqueada entonces para todo $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$, $[-f,f]$ es acotado en $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ por proposición 3.3. Luego existe para cada $f \geq 0$, $\alpha_f > 0$ tal que:

$$[-f,f] \subseteq \alpha_f\, V$$

Lo que equivale a que existe $\lambda_f = \frac{1}{\alpha f} > 0$ tal que:

$$\lambda_f\,[-f,f] \subseteq V$$

Por consiguiente

$$i_f^{-1}(V) = V \cap \mathcal{C}(X)_{[-f,f]} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{G}_{[-f,f]})$$

para toda $f \geq 0$.

Así concluimos que $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$ con lo cual se obtiene que $\mathcal{T}_{c-a} \leq \mathcal{T}'$.

Ahora como para toda $g \in \mathcal{C}(X)$, $|g| \in \mathcal{C}(X)$ entonces $g \in [-|g|, |g|]$ y así $g \in \mathcal{C}(X)_{[-|g|,|g|]}$ con lo cual

$$\mathcal{C}(X) \subseteq \bigcup_{f \geq 0} \mathcal{C}(X)_{[-f,f]} = \bigcup_{f \geq 0} i_f(\mathcal{C}(X)_{[-f,f]})$$

Por tanto $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es límite inductivo de los espacios de Banach

$$((\mathcal{C}(X)_{[-f,f]}, \mathcal{G}_{[-f,f]}), i_f)_{\substack{f \in \mathcal{C}(X) \\ f \geq 0}}$$

<u>Teorema</u> 3.2 (De Wilde-Schmels). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular. Son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) $(X, \mathcal{T})$ es $\cap$-espacio

(2) $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es ultrabornológico

(3) $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es bornológico.

<u>Demostración</u>. (1) $\Rightarrow$ (2). Por la proposición 3.9 es suficiente con demostrar que si D es un disco en $\mathcal{C}(X)$ que absorbe los intervalos $[-f, f]$ para $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$. Entonces

$D \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{c-a})$.

D es absorbente en $\mathcal{C}(X)$ ya que para toda $g \in \mathcal{C}(X)$, existe $\alpha > 0$ tal que $g \in [-|g|, |g|] \subseteq \alpha D$.

De esta forma $\mathcal{G}_D$ es una semi-norma en $\mathcal{C}(X)$. Entonces por la proposición 3.8 para cada $g \in \mathcal{C}(X)$

$$\mathcal{G}_D(g) = \sup_{T \in \mathcal{A}} |T(g)|$$

Donde

$$\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{C}(X)^* / |T(g)| \leq \mathcal{G}_D(g) \text{ para toda } g \in \mathcal{C}(X)\}$$

Como todo $T \in \mathcal{A}$ es funcional lineal acotado según el orden en $\mathcal{C}(X)$ y como $(X, \mathcal{T})$ es Q-espacio entonces T es continua (teorema 22 página 179 de [4] , ver apéndice C). Luego $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})'$. Sea

$$\begin{aligned} B &= \{f \in \mathcal{C}(X) / \mathcal{G}_D(f) \leq 1\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}(X) / \sup_T |T(f)| \leq 1\} \\ &= \bigcap_{T \in \mathcal{A}} T^{-1}(B_1) \end{aligned}$$

donde B_1 es la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}$. Entonces

(a) B es disco cerrado por ser intersección de cerrados (cada $T \in \mathcal{A}$ es continua y B_1 es cerrada).

(b) B es absorbente. En efecto sea $g \in \mathcal{C}(X)$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $g \in [-|g|, |g|] \subset \alpha D$. Por tanto $\mathcal{G}_D(g/\alpha) \leq \alpha$. Y así $g/\alpha \in B$ con lo cual $g \in \alpha B$.

Por (a) y (b) B es un tonel. Como $(X, \mathcal{T})$ es Q-espacio entonces $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es tonelado (teorema 1, página 294 de [10], ver apéndice B. Así $B \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{c-a})$. Por tanto como B es la bola unitaria para $\mathcal{G}_D$. Resulta que $\mathcal{G}_D$ es $\mathcal{T}_{c-a}$ continua y necesariamente entonces $D \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{c-a})$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Proposición 1.5

(3) $\Longrightarrow$ (1) Teorema 3.1

C O N C L U S I O N E S

1) $\mathcal{C}(X)$ es no bornológico y no ultrabornológico si X no es un Q-espacio.

   Luego para dar un ejemplo en el cual $\mathcal{C}(X)$ no es bornológico ni ultrabornológico basta encontrar un espacio completamente regular que no sea un Q-espacio.

2) Los espacios bornológicos han sido generalizados por Snipe: Un espacio localmente convexo es s-bornológico si toda semi-norma localmente acotada sobre E, es continua. Un espacio localmente convexo es C - secuencial si toda semi-norma secuencialmente continua sobre E, es continua. La intersección de estas dos familias es exactamente la clase de los espacios bornológicos.

   Los siguientes problemas relativos a $\mathcal{C}(X)$, surgen de manera natural:

   a) Bajo qué condiciones de X, $\mathcal{C}(X)$ es s-bornológico?

   b) Bajo qué condiciones de X, $\mathcal{C}(X)$ es C - secuencial?

   c) Existen espacios s-bornológicos que no sean tonelados?

   d) Existen espacios C - secuenciales que no sean tonelados?

3) En la proposición 3.4 se demuestra que todo conjunto acotado según el orden en $\mathscr{C}(X)$ es acotado para la topología compacta-abierta.

Esto nos dice que la estructura de espacio de Riesz de $\mathscr{C}(X)$ (con el orden usual) juega un papel fundamental en la teoría desarrollada.

Sería interesante entonces examinar en forma detenida las propiedades de $\mathscr{C}(X)$ inherentes a esta estructura.

En forma más general, si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Riesz localmente sólido (es decir $\mathcal{T}$ es una topología lineal tal que la aplicación $E \times E \longrightarrow E$: $(x,y) \longrightarrow x \vee y$ es uniformemente continua), sería de mucho interés examinar las propiedades del espacio $\mathscr{C}(X, E) = \left\{ f / X \xrightarrow{f} E \text{ continua} \right\}$, es decir, examinar bajo qué condiciones este espacio, provisto de la topología compacta-abierta, es bornológico, o tonelado, etc.

En un artículo reciente de Schmets se demuestra que si $\mathscr{C}(X, E)$ (provisto de la topología compacta-abierta) es tonelado, entonces E es tonelado.

Surgen los siguientes problemas:

a) Si $\mathscr{C}(X, E)$ es bornológico, es E bornológico?

b) Si $\mathscr{C}(X, E)$ es s-bornológico, es E s-bornológico?

c) Si $\mathscr{C}(X, E)$ es C - secuencial, es E C - secuencial?

A P E N D I C E

A. El espacio de las distribuciones: $\mathcal{D}'(\Omega)$. sea $\Omega \subseteq R^n$, un abierto.

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio vectorial de todas las funciones definidas en Ω tales que:

   a) Las derivadas parciales de cualquier orden existen y son continuas.

   b) Sus soportes están contenidas en algún subconjunto compacto de Ω.

2. Si $K \subseteq \Omega$ es compacto, definimos $\mathcal{D}(K)$ como el subespacio lineal de $\mathcal{D}(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está contenido en K.

$$\mathcal{D}(K) = \{ f \in \mathcal{D}(\Omega) / \mathrm{sop}(f) \subseteq K \}$$

donde $\mathrm{sop}(f) = \overline{\{ x / f(x) \neq 0 \}}$.

La topología τ_K, en $\mathcal{D}(K)$ está definida por la familia de seminormas (q_p) donde

$$q_{(p_1,p_2,\dots p_n)}(f) \quad \max_{x\in K} \left|\frac{\partial^{p_1+p_2+\dots p_n}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}} f(x)\right|$$

donde $p_j \in \mathbb{N}$

Indicaremos por $V(p_1,\dots,p_n)$ el conjunto :

$$V_{(p_1,\dots p_n)} = \{f \in \mathcal{D}(K)/q_{(p_1,p_2,\dots p_n}(f) \leq 1\}$$

De esta forma $(\mathcal{D}(K),\mathcal{T}_K)$ es un espacio Fréchet por ser $\mathcal{T}_K$ una topología definida por una familia numerable de semi-normas y por ser Hausdorff.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\subsetneq\Omega} \mathcal{D}(K) \quad , \text{ K compacto}$$

3. Topología de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dotaremos a $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topología localmete convexa final $\mathcal{T}$, respecto a los espacios $(\mathcal{D}(K),\mathcal{T}_K)$, y las inyecciones naturales

$$i_K : \mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

4. $(\mathcal{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es completo

Si $K\subseteq K'$ entonces $\mathcal{D}(K)\subseteq \mathcal{D}(K')$.

$\mathcal{D}(K')$ induce sobre $\mathcal{D}(K)$ su propia topología.

Sea $(K_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de subconjuntos compactos de Ω tal que $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ y cada compacto de Ω está contenido en algún K_n.

Entonces $\mathcal{D}(K_n) \subseteq \mathcal{D}(K_{n+1})$, $n\geq 1$ y $\mathcal{D}(\Omega)= \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}(K_n)$.

El espacio $\mathcal{D}(K_n)$ es completo para $n\geq 1$ y por tanto cerrado en $\mathcal{D}(K_{n+1})$. Y así $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo y Hausdorff e induce sobre cada $\mathcal{D}(K)$ su propia topología.

5. $(\mathcal{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es tonelado.

Cada $\mathcal{D}(K)$ es tonelado por ser Fréchet. Luego $\mathcal{D}(\Omega)$ es tonelado por ser límite inductivo de tonelados.

6. $(\mathcal{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es bornológico.

Cada $\mathcal{D}(K)$ es bornológico por ser localmente convexo y metrizable. Luego $\mathcal{D}(\Omega)$ es bornológico.

7. $\mathcal{D}'(\Omega)$

El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topología fuerte, determinada por $\beta(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$.

a) $\mathcal{D}'(\Omega)$ es completo por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ bornológico y estar dotado de la topología fuerte.

b) $\mathcal{D}'(\Omega)$ es tonelado y bornológico porque cada $\mathcal{D}(K)$ es metrizable y distinguido luego $\mathcal{D}(\Omega)$ es metrizable y distinguido y así $\mathcal{D}'(\Omega)$ con la topología fuerte es tonelado y bornológico.

8. $\mathcal{D}'(\Omega)$ es ultrabornológico.

Por ser $\mathcal{D}'(\Omega)$ bornológico y completo entonces $\mathcal{D}'(\Omega)$ es ultrabornológico.

9. Si dotamos entonces al espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de una topología menos fina resulta bornológico, tonelado y no-ultrabornológico.

B. Teorema 1 (Taira Shirota)

Para que $\mathscr{C}(X)$ sea un espacio tonelado es necesario y suficiente que X satisfaga la condición Q_1.

Q_1: Cualquier subconjunto cerrado y relativamente pre-compacto de X es compacto.

Proposición A.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio completamente regular. Si $(X, \mathcal{T})$ es Q-espacio entonces $(X, \mathcal{T})$ satisface la condición Q_1.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un cerrado y relativamente pre-compacto. Vamos a demostrar que A es compacto.

Sea $\bar{A}^{\beta(X)}$ la clausura de A en $\beta(X)$ y $\bar{A}^X$ la clausura de A en X. Es inmediato que $\bar{A}^X \subseteq \bar{A}^{\beta(X)}$. Luego para demostrar que A es compacto bastará con demostrar la igualdad de estas dos clausuras de A ya que como $\beta(X)$ es compacto y $\bar{A}^{\beta(X)}$ cerrado en $\beta(X)$ tenemos que $\bar{A}^{\beta(X)}$ es compacto. Para ello basta con demostrar que $\bar{A}^{\beta(X)} \subseteq X$.

Supongamos que existe $t \in \bar{A}^{\beta(X)} \setminus X$ entonces $t \in \beta(X) \setminus X$ y luego existe $f : \beta(X) \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ continua tal que $f(t) = +\infty$ y $f(X) \subseteq \mathbb{R}$.

Ahora $t \in \bar{A}^{\beta(X)}$ implica que existe una red $(a_\alpha)_{\alpha \in D} \subseteq A$ tal que $a_\alpha \longrightarrow t$. Como f es continua tenemos que $f(a_\alpha) \longrightarrow f(t) = +\infty$. Luego $\sup_{\alpha \in D} |f(a_\alpha)| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como A es relativamente pre-compacto $\infty > \sup_{a \in A} |f(a)| \geq \sup_{\alpha \in D} |f(a_\alpha)| \geq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego obtenemos una contradicción. Por consiguiente $\bar{A}^{\beta(X)} \subseteq X$ con lo cual A es compacto en X.

C. Teorema 22 (Hewit)

Si X es un Q-espacio entonces un funcional lineal en $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{c-a})$ es continuo si y sólo si este es acotado.

B I B L I O G R A F I A

[1] DELFOSSE, JEAN PIERRE.- Les Espaces Bornologiques. Universite Catholique de Louvain. 1968.

[2] DE WILDE Y SCHMETS.- Caractérisation des espaces $\mathscr{C}(X)$ ultrabornologiques. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liege. N° 3-4 (1971) 119-121.

[3] DE WILDE M.- Ultrabornological spaces and the closed graph theorem. Bulletin de la Société des Sciences de Liege. N° 3-4 (1971) 116-118.

[4] HEWITT, EDWIN.- Linear functionals on spaces of continuous functions. Fundamenta Mathematica 37 (1950) 161-189.

[5] HORVATH, JOHN.- Topological vector spaces and distribution volume 1. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1966.

[6] HUSAIN, TAQDIR.- Topology and Maps. Plehum Press, New York, 1977.

[7] NACHBIN, LEOPOLDO.- Topological vector spaces of continuous functions. Proceedings National Academy of Science, U. S. A. 40 (1954), 471-474.

[8] ROJO, JORGE G.- Apuntes del Curso de Análisis Funcional. Programa de Maestría. Universidad de Panamá, 1981.

[9] SCHAEFER HELMUT H.- Topological vector spaces. The Macmillan Company. New York, 1966.

[10] SHIROTA, TAIRA.- On Locally Convex Vector Spaces of Continuous Functions. Proceedings Japan Academy. 30 (1954), 294-298.

[11] VALDIVIA, MANUEL.- Algunos nuevos resultados sobre el teorema de la gráfica cerrada. Real sociedad española Instituto Jorge Juan de matemáticas del Consejo Superior de Investigadores Científicas. Madrid. 39-1 (1979), 27-47.