TECNOLOGÍA EDUCATIVA
SOCIALIZANDO TUS EXPERIENCIAS

# EL SOFTWARE GEOGEBRA COMO RECURSO PARA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EN GEOMETRÍA ESPACIAL

*GEOGEBRA SOFTWARE AS A RESOURCE FOR SOLIDS OF REVOLUTION IN SPATIAL GEOMETRY*

Esp. Renata Teófilo de Sousa
rtsnaty@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – campus Fortaleza, Ceará, Brasil

M.Sc. Italândia Ferreira de Azevedo
italandiag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4684-5397
Secretaria de Educação Básica do Estado do Ceará – SEDUC – Fortaleza, Ceará, Brasil

Dr.C. Francisco Régis Vieira Alves
fregis@gmx.fr
http://orcid.org/0000-0003-3710-1561
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – campus Fortaleza, Ceará, Brasil

**Tipo de contribución:** Artículo de investigación científica
**Recibido:** 04-05-2021
**Aceptado para su publicación:** 02-06-2021

**Resumen:** Este trabajo presenta una recomendación metodológica para facilitar la transposición didáctica del tema sólido de revolución, dirigida al público de estudiantes de 15 a 17 años y teniendo en cuenta la importancia de comprender la Geometría Espacial y su carácter tridimensional. El objetivo es presentar una propuesta didáctica que involucre la enseñanza de áreas y volúmenes a partir de sólidos de revolución con el aporte del software GeoGebra. La metodología aplicada es la investigación cualitativa, de tipo exploratorio, donde se concibió una propuesta didáctica con dos preguntas, brindando apoyo alternativo al docente de Matemáticas para impartir esta temática. GeoGebra puede brindar apoyo en la visualización y percepción geométrica de sólidos de revolución de acuerdo con la propuesta didáctica presentada, lo que resalta la importancia de este estudio. Se espera contribuir con el docente de matemáticas, ayudándolo a desarrollar un enfoque que combine tecnología, transposición didáctica y Geometría espacial, mejorando su trabajo y buscando como consecuencia apalancar el razonamiento geométrico de los estudiantes.

**Palabras clave**: geometría espacial; sólidos de revolución; transposición didáctica; GeoGebra

**Abstract:** This work presents a methodological recommendation to facilitate the didactic transposition of the solid subject of revolution, targeting the audience of students aged 15-17 years and bearing in mind the importance of understanding Spatial Geometry and its three-dimensional character. The objective is to present a didactic proposal involving the teaching of areas and volumes from solids of revolution with the contribution of the GeoGebra software. The applied methodology is qualitative research, of the exploratory type, where a didactic proposal with two questions was conceived, providing alternative support to the Mathematics teacher to teach this theme. GeoGebra can provide support in the visualization and geometric perception of solids of revolution according to the didactic proposal presented, which highlights the importance of this study. It is expected to contribute with the mathematics teacher, helping him to develop an approach that combines technology, didactic transposition and Spatial Geometry, improving his work and seeking as a consequence to leverage the students' geometric reasoning.

**Keywords**: spatial geometry; solids of revolution; didactic transposition; GeoGebra

## 1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría ha sido un desafío para los educadores en lo que respecta a la elección metodológica y la comprensión de conceptos geométricos por parte de los estudiantes. Nobre (1996) señala que el docente no siempre es consciente de que el conocimiento detrás del contenido a enseñar, que aparece listo en los libros, ha sufrido modificaciones y mejoras a lo largo de la historia de las Matemáticas, lo que a su vez aporta el fundamento teórico y las respuestas a los muchos porqués que impregnan los pensamientos de los estudiantes.

El alumno necesita comprender ciertos puntos en Geometría para el desarrollo de su percepción del espacio y la forma, que son la ubicación de números en líneas, figuras o configuraciones en el plano cartesiano y en el espacio tridimensional, dirección y sentido, ángulos, paralelismo y perpendicularidad, transformaciones de geometrías isométricas y homotéticas, así como su aplicación en situaciones problemáticas.

Según Leivas y Oliveira (2017), la geometría, por su carácter visual, tiene el potencial de desarrollar la percepción y autonomía del pensamiento y razonamiento del alumno, desprendiéndose de estructuras y fórmulas listas. Dichos temas pertenecientes al campo de la Geometría refuerzan la necesidad de que el docente busque metodologías de trabajo que logren el aprendizaje efectivo del alumno.

La asociación de Geometría y tecnología es importante para el desarrollo del estudiante a través de actividades investigativas con el uso de software dinámico que interrelacionan conceptos geométricos y realidad, proponiendo la resolución de problemas como metodología para que este desarrollo ocurra.

Para contribuir a la labor del docente de Matemáticas en el campo de la Geometría Espacial, el objetivo de este trabajo es presentar una propuesta didáctica que involucre la enseñanza de áreas y volúmenes a partir de sólidos de revolución con el aporte del software GeoGebra.

En cuanto a GeoGebra, se eligió porque es un software gratuito y fácil de usar, con recursos que exploran la cognición del alumno. Según Abar (2020a) los recursos que GeoGebra hace posible pueden apoyar las estrategias metodológicas del docente, modernizando el conocimiento escolar.

Enfrentamos dificultades para encontrar propuestas metodológicas sobre la transición de la Geometría Plana a la Geometría Espacial con sesgo tecnológico, lo que nos muestra la relevancia de este tema en el campo científico. Por tanto, esta investigación puede ser utilizada por los docentes como una herramienta para optimizar la enseñanza de la Geometría, brindando apoyo al docente.

En los siguientes apartados se abordarán características presentes en la enseñanza de sólidos de revolución, así como GeoGebra como recurso para llevar a cabo la transposición didáctica de esta asignatura, la metodología del trabajo y la presentación de la propuesta didáctica elaborada, así como las consideraciones finales de los autores.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

En esta sección se presentan los materiales y procedimientos metodológicos utilizados en la elaboración de esta investigación de manera sucinta.

Para organizar esta investigación, estructuramos el texto partiendo de un relevamiento bibliográfico sobre las características de la enseñanza de sólidos de revolución en la escuela, así como sobre el potencial de GeoGebra como recurso para realizar la Transposición didáctica en el campo de la Geometría Espacial.

Así, se elaboró, a partir del marco teórico presentado en este trabajo, una propuesta metodológica que tiene como objetivo dotar al docente de una metodología alternativa para trabajar con la Geometría Espacial, utilizando el software GeoGebra.

Por tanto, la descripción del camino metodológico busca enfatizar la relevancia y potencialidad del software GeoGebra para ayudar a los docentes al trabajar con sólidos de revolución, en el aula, en la formalización de conceptos y propiedades, a partir de la construcción y resolución de dos cuestiones propuestas en este trabajo, con la ayuda de GeoGebra.

## 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 3.1. Características de la enseñanza de sólidos de revolución

Es común utilizar métodos para facilitar el aprendizaje de la Geometría, como el uso de analogías, diagramas, imágenes, comparaciones, entre otros, que deberían, en teoría, ayudar a construir el conocimiento del alumno. Sin embargo, en realidad, esto no ocurre correctamente, excepto en los casos en que el contenido está bien articulado por los profesores. A partir del momento en que las actividades empíricas que experimentan los estudiantes en su vida cotidiana resultan en una asimilación inadecuada, se forman los llamados obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1996).

La geometría plana forma parte del currículo escolar y sus postulados sirven de base para comprender la geometría espacial, donde existe una relación entre estos dos campos. Alves y Borges Neto (2011) señalan que el sujeto (alumno) se apoya en imágenes mentales, vividas en su vida cotidiana a partir de objetos del mundo físico para comprender la Geometría. Por otro lado, cuando este sujeto / alumno se somete a algún entrenamiento formal, se espera que manifieste percepciones geométricas como linealidad, regularidad, profundidad de las figuras. En cuanto a la profundidad, esto merece ser destacado, pues, a pesar de exhibir un sesgo intuitivo, en general, en la enseñanza de la Geometría Espacial, las representaciones se despliegan en el plano, transmitiendo una ilusoria impresión de pertenencia a un espacio tridimensional.

Fischbein (1993) afirma que los objetos geométricos tienen dos componentes esenciales, que son el concepto y la imagen, que conciben el aprendizaje de la geometría de manera considerable. Además, para realizar un experimento de abstracción, debe existir un equilibrio entre estos componentes, que a su vez puede verse favorecido por el uso de software matemático, como el caso GeoGebra, presentado en este trabajo.

Es importante que el alumno encuentre sentido a los problemas geométricos, identificando conceptos y desarrollando estrategias para su resolución, considerando el análisis de modelos preexistentes y verificando su validación para las situaciones propuestas.

Para Fischbein (1982), la intuición o el razonamiento intuitivo en geometría puede ocurrir en la resolución de problemas, ya que se anima al estudiante a analizar, experimentar, evolucionar, abstraer y sistematizar para construir su conocimiento matemático, siendo las estructuras intuitivas componentes esenciales de todas las formas. de comprensión activa y pensamiento productivo. En este sentido, el software GeoGebra tiene un gran potencial para desarrollar la intuición y el razonamiento geométrico del alumno a través de la percepción visual. Al ser un software de geometría dinámica con una ventana 3D disponible en su interfaz, permite la visualización de figuras en un plano xyz.

Sin embargo, aún con su probada relevancia, existe una ruptura en la transición de la Geometría Plana a la Geometría Espacial, con dificultades en la percepción y asociación de entidades geométricas fundamentales y su respectiva asociación con la composición de figuras espaciales. Según Sulistiowati, Herman y Jupri (2018) “el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes influye en su competencia matemática en general y en sus habilidades de pensamiento geométrico específicamente”.

Camilo, Alves y Fontenele (2020) explican que existe un rechazo por parte de los estudiantes a este contenido, debido a la dificultad que enfrentan los docentes de matemáticas para presentar la exposición visual de manera comprensible, porque en muchos casos solo cuentan con recursos pedagógicos limitados a los medios tradicionales.

Los autores han desarrollado investigaciones sobre la enseñanza de la Geometría en la educación básica, con el objetivo de otorgar subsidios a los docentes con el fin de mejorar la comprensión de la geometría espacial. Algunos de los autores mencionados en esta investigación son Leivas y Oliveira (2017), Dantas y Mathias (2017).

Oliveira y Leivas (2017) señalan que “es pertinente trabajar con situaciones de aprendizaje que lleven al alumno a establecer relaciones entre figuras espaciales y sus representaciones planas, involucrando su observación desde diferentes puntos de vista, construyendo e interpretando sus representaciones”. Por ello, es importante abordar métodos que exploren la percepción geométrica del alumno, ayudándolo en la construcción de conceptos, conjeturas y desarrollo de su visión espacial.

En cuanto al cálculo de volúmenes, Dantas y Mathias (2017) afirman que muchos estudiantes comprenden la aplicación de fórmulas tradicionales para calcular el volumen de diferentes figuras geométricas espaciales, generalmente presentadas en los materiales didácticos. Sin embargo, el conocimiento sobre el tema se limita a estas aplicaciones, donde estos estudiantes rara vez logran utilizar los conocimientos sobre volúmenes en situaciones que involucran formas que no son similares a las tradicionales (cubo, adoquín, cilindro, cono y esfera). De esta forma, defiende la importancia de construir el pensamiento geométrico de forma coherente y aplicable a diferentes situaciones.

Así, buscamos proponer en este trabajo una aproximación utilizando el software GeoGebra para calcular el área y volumen de sólidos geométricos clásicos en libros de texto, extendiéndose a situaciones en las que el eje no pasa por un lado del objeto girado, haciendo referencia al espacio objetos presentes en la vida diaria de los estudiantes. Como complemento, se utilizará una aplicación del Teorema de Pappus-Guldin asociado a GeoGebra, como alternativa metodológica al docente.

### 3.2. El geogebra como recurso para la transposición didáctica

En resumen, la Transposición Didáctica según Chevallard (1991) traduce la transición del conocimiento científico al conocimiento a enseñar, así como la forma en que este conocimiento llega al aula. Dentro de este proceso, el docente como mediador realiza lo que Chevallard (1991) denomina trabajo de transposición interna.

En cuanto al contexto de transformación del conocimiento científico para saber cómo ser enseñado, es fundamental prestar atención a los aspectos epistemológicos - en relación con el docente - y a los conocimientos e hipótesis previos - relativos al alumno - para que esta adaptación tenga un impacto positivo. Arsac (1992) en línea con Chevallard (1991) señala:

> La teoría de la transposición didáctica destaca dos puntos fundamentales:
>
> - el problema de la legitimación de los contenidos educativos.
>
> - La aparición sistemática de una brecha entre los conocimientos enseñados y las referencias que los legitiman, brecha debido a las limitaciones que pesan sobre el funcionamiento del sistema educativo. (Arsac, 1992, p. 10. Traducción de los autores).

Lo que Arsac (1992) llama "brecha" son las brechas de contenido preexistentes, que pasan de una serie a la siguiente. Para que estas brechas se minimicen, es necesario buscar metodologías que den sentido al alumno, consolidando los conocimientos en su mente y relacionando temas similares entre sí.

Vergnaud y col. (1983) lo explica claramente al señalar que una experiencia didáctica se articula en torno a una intención de enseñanza. Esto se refleja en particular en el hecho de que no solo le interesa analizar las concepciones de los estudiantes, sino también su evolución en relación con las situaciones propuestas y los problemas a resolver. Así, en busca de esta evolución, en el proceso de transposición didáctica, el docente es el principal responsable de la transformación del conocimiento para el alumno, aportando sus aspectos particulares y subjetivos, convirtiéndolo en un conocimiento enseñable. En cuanto a esta transformación, se señala a GeoGebra como un recurso para ello.

El *software* GeoGebra es un recurso dinámico e interactivo, con el potencial de ayudar a visualizar y estructurar las percepciones geométricas. Según Alves y Borges Neto (2012) la exploración de GeoGebra como herramienta tecnológica permite la visualización de situaciones inimaginables, cuando se restringe a lápiz y papel.

Hall y Hermidas (2017) dicen que la enseñanza de la geometría articulada a las representaciones gráficas que brindan los programas informáticos es bastante destacada por los investigadores que refuerzan la importancia de la visualización, así como un importante reconocimiento visual de las relaciones espaciales.

La transposición didáctica a través de tecnologías ya ha sido estudiada por varios autores en el área de las Matemáticas, algunos de ellos: Silva y Abar (2016), Abar (2020a, 2020b).

Silva y Abar (2016) muestran que la construcción de actividades con GeoGebra permite una modernización del conocimiento escolar, ya que el *software* ofrece recursos visuales y manipulables, con potencial para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

GeoGebra es un recurso que facilita la práctica docente, sin embargo, muchos profesores aún tienen dificultades para manejarlo. Una justificación para esto, según Abar (2020a), es que desarrollar estrategias innovadoras por parte del docente requiere una mayor dedicación a su desarrollo profesional, exigiendo más tiempo para que pueda absorber toda la información, estudiar, analizar y trasponer todas estas ideas para su práctica.

El Portal GeoGebra (https://geogebra.org/) es una comunidad formada por millones de usuarios alrededor del mundo, donde se comparten varias construcciones realizadas en el *software* en diferentes áreas como Álgebra, Geometría, Cálculo Diferencial, Probabilidad, Trigonometría y dinámica. matemáticas en general, siendo soporte para la enseñanza y el aprendizaje en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. Estas construcciones pueden ser utilizadas por sus usuarios, tanto en GeoGebra online como en software informático, facilitando el trabajo del profesor de matemáticas.

Los recursos computacionales deben explorarse en el entorno escolar de forma más activa y frecuente para que puedan seguir la evolución tecnológica de la sociedad. Abar (2020b) destaca que “el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, así como su implantación en las escuelas y entornos formativos, va acompañado de fenómenos del mismo orden que los de la transposición didáctica". Es decir, se facilita la comprensión del alumno ya que el soporte tecnológico tiene un gran dinamismo, otorgando subsidios para que la transposición didáctica se produzca de manera significativa. Así, "es importante comprender el complejo proceso de transformación por el que atraviesa la matemática hasta convertirse en un elemento a enseñar" (Abar, 2020b).

Para ilustrar una posibilidad metodológica que aporta la transposición didáctica de sólidos de revolución, el siguiente apartado presenta una propuesta didáctica para el desarrollo de percepciones geométricas sobre este tema, a través de la visualización en el entorno GeoGebra.

### 3.3. Metodología: una propuesta didáctica sobre sólidos de revolución

Para la organización de este trabajo se adoptó como metodología una investigación cualitativa de tipo exploratorio. Según Gil (2002), este tipo de investigación proporciona una mayor familiaridad con el problema, con el objetivo de hacerlo más explícito, así como construir hipótesis al respecto, buscando una mejora de ideas, lo que propicia el logro del objetivo de este estudio.

Para ello, se elaboró una propuesta didáctica con dos preguntas que presentan un acercamiento dinámico a la Geometría Espacial, ilustrando el tema de los sólidos de revolución, así como las formas de calcular el área y el volumen. La resolución de las preguntas se estructura con el aporte del software GeoGebra y estas se contextualizan a partir de las posibilidades de una situación real.

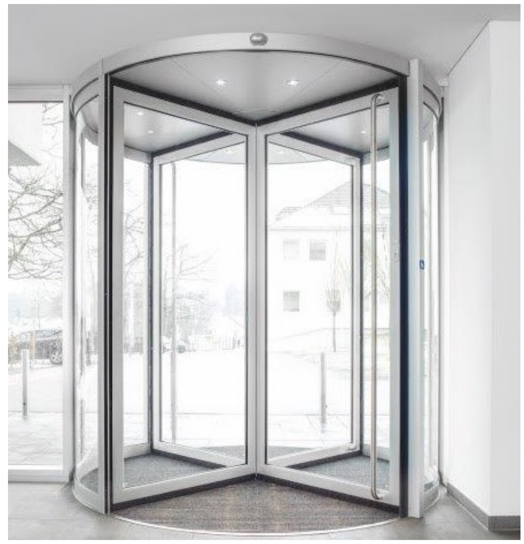
Mariotti y Fischbein (1997) sostienen que existe un vínculo entre la geometría y la realidad, pero, aun así, la geometría no es una ciencia empírica. Sin embargo, la geometría necesita que la realidad sirva de modelo para demostrar sus diversos aspectos.

Por lo tanto, buscamos crear las preguntas con el fin de explorar una evolución de la percepción geométrica de los estudiantes sobre el contenido matemático en cuestión, estimulando la construcción del conocimiento y la relación entre la geometría plana y la geometría espacial a partir de la exploración de la asociación entre GeoGebra y las preguntas presentadas.

#### 3.3.1. Pregunta 1: Área y volumen de un sólido clásico de revolución

Las puertas giratorias son comunes en muchos edificios como hoteles y bancos. Estas puertas están destinadas a controlar el tráfico de personas, mantener la seguridad del entorno, vigilar la entrada de objetos metálicos e incluso ayudar a controlar la temperatura ambiente. Las puertas giratorias más comunes consisten en tapas de vidrio rectangulares llamadas paneles. Comúnmente, estas puertas tienen dos, tres o cuatro paneles, que giran sobre un eje central, como en la Figura 1.

**Figura 1. Modelo de puerta giratoria.**



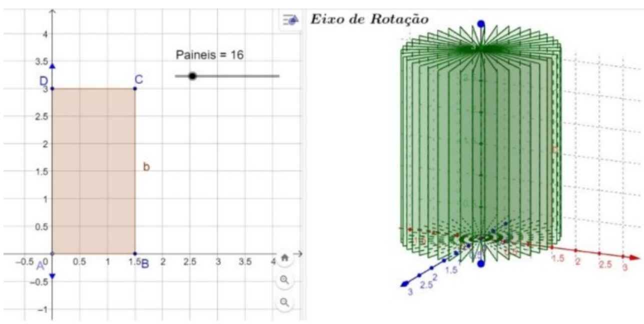
Fuente: Blog Door Industry (2017)

Considere que los paneles giran con cierta velocidad y, a partir de su rotación, llenan todo el espacio de la puerta giratoria, componiendo un sólido de revolución. Utilizar como medidas para cada ala 3,0 metros de altura por 1,50 metros de base. Bajo estas condiciones, determine qué tipo de revolución sólida forma la rotación de la puerta en el espacio, calcule su área y su volumen.

*Propuesta de solución*: De la Figura 1, el maestro puede instigar a la clase a visualizar y comprender qué sólido de revolución se formó por la rotación de la puerta giratoria y se espera que el estudiante concluya que es un cilindro. El maestro en este momento puede dilucidar el concepto de sólido de revolución, generalizando a otras figuras geométricas. En la Figura 2 el alumno tiene la posibilidad de visualizar que la rotación del rectángulo genera un cilindro de revolución.

Dada la Figura 2, parece que la construcción en GeoGebra proporciona apoyo visual para que el estudiante se dé cuenta de que la base del rectángulo en la figura de la izquierda corresponde al radio de la base del cilindro recto, en la figura de la derecha, y su altura en metros, sigue siendo el mismo. Leivas y Oliveira (2017) afirman que "la ayuda visual geométrica puede ser el elemento para atravesar, de manera interdisciplinar, la Geometría como componente curricular". Otros autores que complementan el pensamento de Leivas y Oliveira son Hall y Hermidas (2017) cuando afirman que las imágenes mentales provienen de representaciones externas como objetos físicos, dibujos y asociaciones con la realidad. De esta forma, el proceso de comprensión a partir de la visualización se realiza convirtiendo información abstracta en imágenes visuales o bien entendiendo e interpretando estas representaciones visuales, extrayendo información y construyendo conceptos.

**Figura 2. Los paneles giran a mayor velocidad.**




Fuente: Elaboración de los autores.

De esta forma, podemos combinar tecnología y geometría para brindar esta ayuda, como soporte visual para que el alumno comprenda la Geometría Espacial, ofreciendo la visualización de elementos presentes en figuras espaciales, que muchas veces no aparecen con claridad en los libros.

A medida que aumenta la corredera de "paneles", también aumenta el número de alas, llenando el espacio interior de la puerta giratoria y, en consecuencia, formando el citado cilindro de revolución. Para el cálculo del área total, observe la Figura 3, que muestra el cilindro y su forma aplanada, facilitando la visualización de sus elementos geométricos.

Cabe mencionar que la planificación de este cilindro se realizó de forma manual, ya que GeoGebra no presenta una herramienta para la planificación de cuerpos redondos de forma automática. Por lo tanto, la figura necesitaba construirse aparte.

Por lo tanto, su área total ($A_t$) se puede calcular duplicando el área base ($A_b$) añadido al área lateral ($A_l$), es decir, el área de dos círculos de radio $r = 1{,}5\,m$ y el área lateral está compuesta por el producto de la longitud de la circunferencia de una de las bases y la altura $h = 3{,}0\,m$ del cilindro. Si se adopta el valor $3{,}14$ como una aproximación de $\pi$, en lenguaje matemático, tenemos:

$$A_t = 2.A_b + A_l \rightarrow A_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h \rightarrow A_t = 2.\pi.r(r+h)$$

$$A_t = 2.\pi.1{,}5.(1{,}5 + 3{,}0) \rightarrow A_t = 3{,}0.\pi.4{,}5 \rightarrow A_t = 13{,}5.\pi$$

$$A_t = 13{,}5\,.3{,}14 \rightarrow A_t \cong 42{,}39\,m^2$$

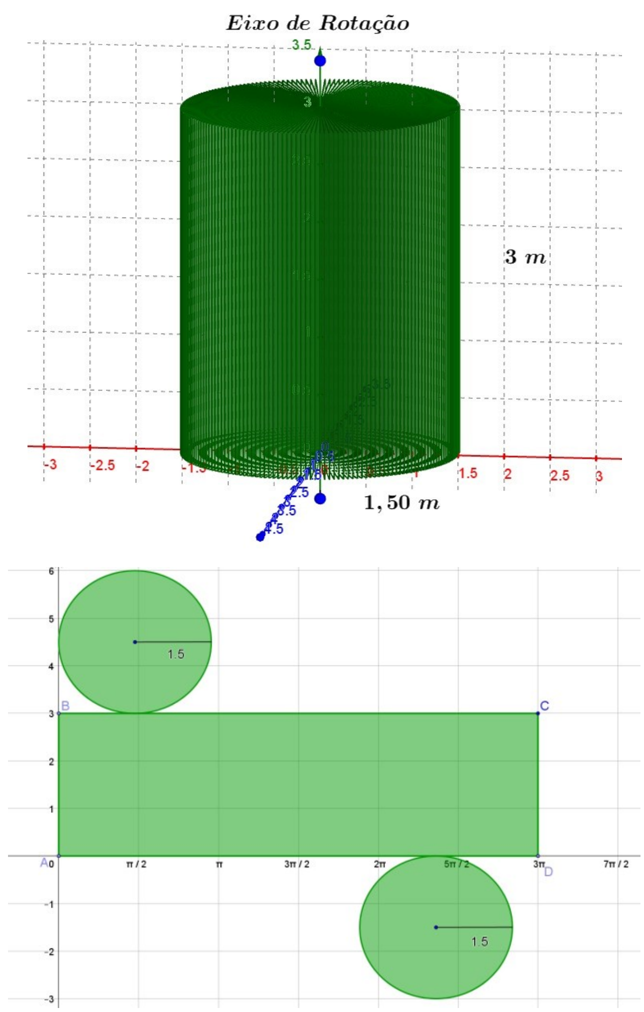
Mediante la representación de la Figura 3, para obtener el valor volumétrico del espacio ocupado por la rotación de la puerta giratoria, se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$V = A_b\,.h \rightarrow V = \pi\,.r^2.h$$

Al reemplazar los valores presentados en el problema y adoptar el valor 3,14 como una aproximación de $\pi$, ese volumen es aproximadamente:

$$V = 3{,}14\,.1{,}5^2.3 \rightarrow V = 21{,}19\,m^2$$

**Figura 3. El cilindro y su planificación.**




Fuente: Elaboración de los autores.

Cabe mencionar la importancia de la visualización y percepción de los estudiantes con GeoGebra, ya que este recurso permite la inferencia de información más allá de lo que presenta la pregunta, convirtiéndose en un elemento que facilita el pensamiento geométrico. Fischbein (1993), en su perspectiva, señala que, en el razonamiento matemático, los objetos materiales - sólidos o dibujos - son solo modelos materializados de entidades mentales con las que trata el matemático. Por tanto, una figura geométrica no es un mero concepto, sino una imagen visual.

Abar (2020a) afirma que el uso del software GeoGebra permite articular conocimientos que se enseñan y que no se pueden perder en el tiempo, corroborando el pensamiento de Chevallard (1991), donde los contenidos relacionados con los conocimientos a enseñar cambian para adaptarse de manera más eficiente a los objetivos de la educación. En este caso, al solicitar el cálculo del área y volumen, la visualización y percepción geométrica del alumno es diferente y se facilita con el uso de GeoGebra.

### 3.3.2. Pregunta 2: Área y volumen de un sólido de revolución no convencional

Muchas personas tienen la costumbre de llevar botellas de agua a lugares para mantenerse hidratados. Muchas de estas botellas no tienen la forma de las clásicas sólidas de la Geometría Espacial, comúnmente estudiadas en las clases de matemáticas. Sin embargo, después de una aproximación a los sólidos de revolución, un profesor de matemáticas decidió investigar formas geométricas no clásicas con su clase, con el fin de encontrar medidas como el área y el volumen de estos objetos. De esta forma, el profesor realizó una breve introducción sobre el Teorema de Pappus, con el fin de despertar la curiosidad y ampliar el conocimiento de los estudiantes hacia otros conceptos relacionados con el tema en discusión. El enunciado del teorema dice:

> *Teorema 1*: (Área) "Si una línea gira alrededor de un eje de su plano, el área de superficie generada es igual a la longitud de esa línea multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita, con un radio igual a la distancia entre el eje de rotación y el centro de gravedad de esa línea". (Menezes, 2015).
>
> *Teorema 2*: (Volumen) "Si una figura plana gira alrededor de un eje de su plano, el volumen generado es igual al área de esa figura multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por su baricentro." (Lima *et al.* 2006)

A partir del enunciado de estos teoremas y teniendo en cuenta un modelo de botella de agua presentado en el aula (Figura 4), calcule sobre este objeto:

a) Superficie aproximada de la botella.

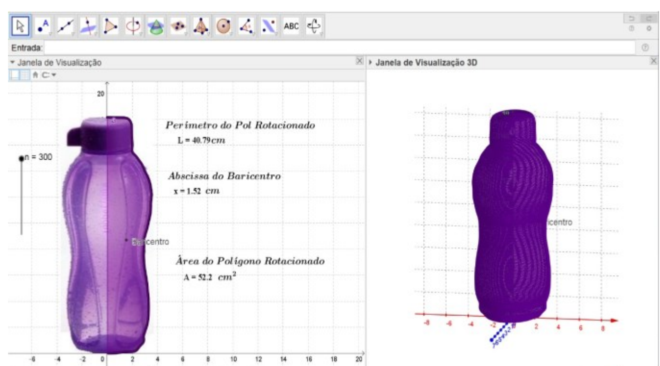
b) El volumen aproximado de la botella.

La representación de la botella en el entorno de GeoGebra, con sus respectivas medidas se puede ver en la Figura 5.

**Figura 4. Modelo de botella de agua.**

Fuente: Mundo Tupperware (2020)

**Figura 5. Representación de la botella en GeoGebra.**




Fuente: Elaboración de los autores.

*Propuesta de solución:* Dado que la situación propuesta se basa en un objeto cotidiano, considere las medidas del eje coordinadas en centímetros. Algunos errores de aproximación se justifican redondeando a dos lugares decimales utilizados en los cálculos. La figura 6 muestra la rotación de la botella desde el eje central.

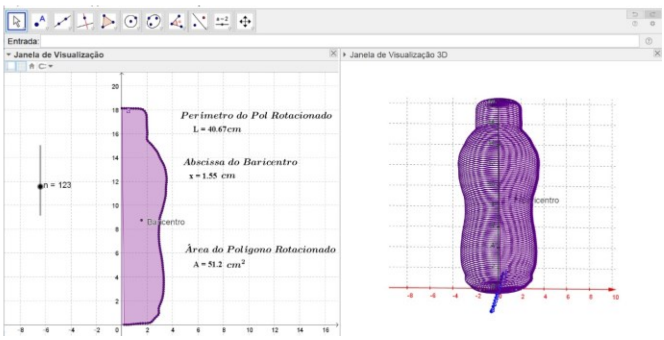
a) Por el enunciado del Teorema 1 de Pappus-Guldin y los datos de las Figuras 5 y 6, es posible decir que el área de la Superficie (S) de la botella en centímetros cuadrados se puede dar por: $S = 2.\pi.\bar{x}.\ L$, dónde $\bar{x}$ es la abscisa del baricentro del polígono en el eje de rotación y $L$ es el perímetro del polígono girado. Así:

$$S = 2\,.\,3{,}14\,.\,1{,}55\,.\,40{,}67 \rightarrow S \cong 395{,}88\ cm^2$$

b) A partir del enunciado del teorema 2 de Pappus-Guldin y los datos de las figuras 5 y 6, queda claro que el volumen de la botella puede estar dado por: $V = 2\,.\,\pi\,.\,\bar{x}\,.\,A$, dónde $\bar{x}$ es la abscisa del baricentro del polígono al eje de rotación y $A$ es el área del polígono girado. De ese modo:

$$V = 2\,.\,3{,}14\,.\,0{,}15\,.\,0{,}52 \rightarrow V = 0{,}498\ cm^3 \rightarrow V = 498\ ml$$

**Figura 6. Rotación de la botella desde el eje.**




Fuente: Elaboración de los autores.

Con base en lo expuesto en esta pregunta y en lo dilucidado por Dantas y Mathias (2017) es posible calcular el volumen de una manera obtenida a través de una revolución, incluso si el sólido es una figura poco convencional, sin recurrir a “fórmulas clásicas” para el cálculo del volumen. Dantas y Mathias (2017) afirman que existe una dificultad en el cálculo de áreas y volúmenes de sólidos de revolución por parte de los estudiantes. Una de las principales dificultades es dibujar o visualizar una forma de revolución y elegir un método adecuado para determinar su volumen, especialmente cuando estas formas no son habituales. Este tipo de pregunta / situación asociada a GeoGebra como recurso tecnológico puede desarrollar habilidades visuales y despertar potencial en el alumno con respecto a la comprensión de este tema.

## 4. CONCLUSIONES

Con la propuesta didáctica presentada y asociada al *software* GeoGebra, existe una posibilidad metodológica diferente para la transposición didáctica de la asignatura de sólidos de revolución, siendo un enfoque creativo para el docente de Matemáticas, en el que las preguntas elaboradas tienen el potencial de ayudar la percepción geométrica del alumno.

La transposición didáctica del contenido de sólidos de revolución se puede realizar a través de GeoGebra, ya que este software, al permitir visualizaciones y construcciones tridimensionales, permite la construcción de objetos para la experimentación y exploración de conceptos dentro de la Geometría Plana y Espacial, como un recurso dinámico e interactivo.

Alves y Borges Neto (2012) muestran que la tecnología puede afectar el proceso de mediación en la enseñanza de determinados temas, sin embargo, su uso de manera complementaria enfatiza un cambio dimensional, con el objetivo de identificar elementos de carácter cualitativo.

Así, el uso de GeoGebra en el sesgo de esta investigación trae una propuesta didáctica relevante para mejorar la asimilación de esta asignatura, a través del desarrollo de la percepción geométrica del alumno, lo cual sería muy diferente si el enfoque se llevara a cabo utilizando métodos tradicionales, restringiéndose al uso de lápiz y papel.

Por tanto, se sugiere que se difunda el estudio de esta área a partir del formato de la investigación realizada, aplicándose en el aula con miras a romper barreras y obstáculos preexistentes en el proceso de comprensión de este tema. Por tanto, las dos preguntas presentadas en este trabajo pueden ser utilizadas por los docentes como una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría, con énfasis en los sólidos de revolución.

Se pretende, en una perspectiva futura, recoger datos de la aplicación de esta propuesta didáctica con los alumnos, dando continuidad a esta investigación, con el objetivo de mejorar la relación de los alumnos con la Geometría y analizando la viabilidad de replicar este modelo de actividad por parte del docente de Matemáticas.

## 5. APOYOS Y AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento al Instituto Federal de Ciencia y Tecnología del Estado de Ceará – IFCE, campus Fortaleza, Brasil y al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico – CNPq por apoyar esta investigación.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abar, C. A. A. P. (2020a). A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9(1), 59-75. doi: http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75

Abar, C. A. A. P. (2020b). Teorias da Transposição

Didática e Informática na criação de estratégias para a prática do professor com a utilização de tecnologias digitais. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 5(1), 29-45. doi: https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.11893

Alves, F. R. V., & Borges Neto, H. (2011). A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. *Conexão, Ciência e Tecnologia*, 5(1), 38-54. doi: https://doi.org/10.21439/conexoes.v5i1.441

Alves, F. R. V., & Borges Neto, H. (2012). Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da regra de L'Hospital. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 337-367. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9445

Arsac, G. L'évolution d'une théorie en didactique: l'exemple de la transposition didactique. (1992). Recherches En *Didactique Des Mathématiques*, 12(1), 7–32. Recuperado de: https://revue-rdm.com/1992/l-evolution-d-une-theorie-en/

Bachelard, G. (1996). A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto.

Camilo, A. M. S., Alves, F. R. V., & Fontenele, F. C. F. (2020). A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 64-82. Recuperado de: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/127

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Paris: Ed. La pensée Sauvage.

Dantas, S. C., & Mathias, C. V. Formas de revolução e cálculo de volume. *Ciência e Natura,* Santa Maria, 39(1), 142-155, 2017. doi: https://doi.org/10.5902/2179460X24428

Door Industry Journal (2019, May 21). Introducing dormakaba's New Access Solution. *Blog Door Industry Journal – DIJ*. Recuperado de: https://blog.doorindustryjournal.co.uk/2019/05/introducing-dormakabas-new-access-solutions.html

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139-162. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3482943

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18, Recuperado de: https://www.jstor.org/stable/40248127?seq=1

Gil, A. C. (2002). Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas.

Hall, P. R. V., & Hermidas, N. V. C. (2017). El software de geometría dinámica: geogebra, una alternativa para favorecer el aprendizaje de la geometría en la formación del licenciado en matemática. *Revista de Tecnologia Educacional*, 2 (1). Recuperado de: https://tecedu.uho.edu.cu/index.php/tecedu/article/view/33

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* - volume 2, Rio de Janeiro: SBM.

Mariotti, M. A., Fischbein, E. (1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248. Recuperado de: https://doi.org/10.1023/A:1002985109323

Menezes, J. C. (2015). *Áreas e volumes: uma abordagem complementar ao livro "a matemática do ensino médio"* SBM – vol. 2, E. L. Lima, et al. Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Sergipe, Aracaju Recuperado de: https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/6517

Mundo Tupperware. (2020). Tupperware eco tupper plus garrafa roxa. Tupperware. Recuperado de: https://mundotupperware.com.br/tupperware-eco-tupper-plus-garrafa-roxa-500ml/p

Nobre, S. (1996). Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a educação matemática. *Cadernos CEDES – História e Educação Matemática*. São Paulo: Papirus, v. 40, 29-35.

Oliveira, M. T., & Leivas, J. C. P. (2017). Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. *Ciência e Natura*, 39(1), 108-117. Recuperado de: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/23170/pdf

Silva, H. N., & Abar, C. A. A. P. (2016). A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do imagiciel. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. *Anais…* São Paulo. Recuperado de: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6064_2835_ID.pdf

Sulistiowati, D. L., Herman, T., & Jupri, A. (2018). Student difficulties in solving geometry problem based on Van Hiele thinking level. *International Conference on Mathematics and Science Education* (ICMScE 2018). IOP Publishing, v. 1157, n. 4. doi:10.1088/1742-6596/1157/4/042118

Vergnaud, G., Rouchier, A., Des-moulières, S., Landré, C., Marthe, P., Ricco, G., Samurçay, R., Rogalski, J., & Viala, A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). Recherches En *Didactique Des Mathématiques*, 4(1), 71-120. Recuperado de: https://revue-rdm.com/1983/une-experience-didactique-sur-le-concept-de-volume-en-classe-de-cinquieme-12-a-13-ans/