

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DE ROBOTS MÓVILES PARA EL  
SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

POR

SUSANA VIRIDIANA GUTIÉRREZ MARTÍNEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

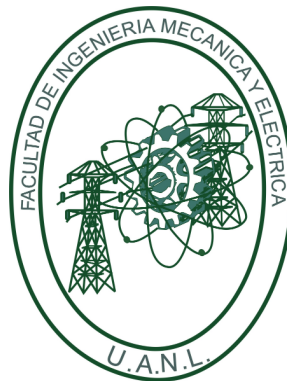
DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

AGOSTO 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CONTROL DE ROBOTS MÓVILES PARA EL  
SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

POR

SUSANA VIRIDIANA GUTIÉRREZ MARTÍNEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

AGOSTO 2021



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Control de robots móviles para el seguimiento de trayectorias.”, realizada por el alumno Susana Viridiana Gutiérrez Martínez, con número de matrícula 1836860, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

Dr. Jesús de León Morales  
Director

Dr. Luis Martín Torres Treviño  
Revisor

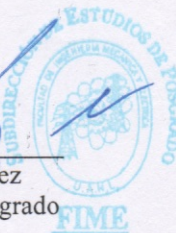
Dr. Oscar Salvador Salas Peña  
Revisor

Dr. Alberto Cavazos González  
Revisor

Dr. Herman Castañeda Cuevas  
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Mayo 2021

136



*A mi madre Leticia Martínez Romo por todo su apoyo.*

# Agradecimientos

A **Dios** por permitirme terminar este proyecto, adquirir nuevos conocimientos y lograr mis sueños. A **mi familia** mi mamá Leticia Martínez Romo y mis hermanos Rosa Yadira y Erick Cristhofer por su apoyo.

A **mi asesor de tesis el Dr. Jesús de León Morales** por compartir su conocimiento, su guía, su formación y apoyo necesario para lograr este trabajo. También por brindarme su amistad y tiempo. Quiero agradecer especialmente al **Dr. Frank Plestan** por permitirme realizar una estancia de investigación con su equipo de trabajo en el laboratorio de ciencias digitales de Nantes por su apoyo, comentarios y sobre todo su tiempo.

A **los doctores** que de alguna manera me apoyaron y que compartieron su conocimiento y su tiempo durante el desarrollo de este proyecto: **Dr. Oscar Salvador Salas Peña, Dr. Ignacio Ayala, Dr. Marco Tulio Mata Jimenez, Dr. Rene Galindo Orozco, Dr. Alberto Cavazos González, Dr. José Antonio de la O Serna, Dr. Miguel Escalante Gutiérrez.**

A **mis compañeros y amigos** que me acompañaron a lo largo de estos 4 años: José Benedicto, Casanova, José Ángel Cano Gonzalez, Carlos Enrique Alvarado, Aldo Flores Guerrero y Marco Michelle Vazquez Rodriguez por los momentos de apoyo y valiosa amistad.

**Agradezco al MC. Mario Alberto Gonzalez Vázquez, al Dr. Fernando Salinas Salinas y compañeros** que durante mi estancia en laboratorio de Sistemas Eléctricos de Potencia y Protecciones, me apoyaron y me brindaron un espacio para trabajar durante la experimentación de este proyecto.

**Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por las becas otorgadas para realizar mis estudios de posgrado y por el apoyo recibido mediante la convocatoria de **Movilidad académica 2018.**

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Susana Viridiana Gutiérrez Martínez, Doctorado en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2021

## **Profesor asesor: Dr. Jesús de León Morales**

Este trabajo se centra en la propuesta de una versión simplificada del algoritmo de control super-twisting para el seguimiento de trayectorias de robots móviles terrestres y aéreos en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. El algoritmo de control “super-twisting” es uno de los más populares debido a su robustez y su convergencia en tiempo finito. Además, de ser robusto ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Para el diseño del controlador de modo deslizante para el seguimiento de trayectoria se construyó una función fuerte de Lyapunov que se inspira en el diseño del observador de alta ganancia. La principal contribución es la simplificación de las ganancias al reducir a un solo parámetro de ajuste las ganancias del control, esto permite una sintonización más sencilla con respecto a los métodos clásicos. Sin embargo, en el super-twisting las ganancias dependen de la cota de la perturbación, la cual generalmente se supone desconocida, lo que ocasiona que se sobrestime el valor de la ganancia incrementando el esfuerzo de control. Para evitar la sobrestimación se propone una versión adaptativa de la ganancia del super-twisting que permite el auto-ajuste de las ganancias.

Para validar el rendimiento del algoritmos propuestos se utilizan resultados experimentales y simulaciones en el seguimiento de trayectoria de robots móviles terrestres y aéreos. Los resultados experimentales se muestran en robots móviles terrestres llamados e-puck mediante la estrategia líder-seguidor utilizando la simplificación de ganancias en el algoritmo de control super twisting. Finalmente, se muestran los resultados en simulación del control de seguimiento de un cuadrírotor para mostrar la eficiencia del algoritmo adaptativo super-twisting.

# Índice General

<b>Resumen</b> . . . . .	VI
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	X
<b>Índice de Tablas</b> . . . . .	XII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Objetivo . . . . .	4
1.3. Estructura de la Tesis . . . . .	4
<b>2. Generalidades</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Robots móviles terrestres . . . . .	6
2.3. Modelos matemáticos . . . . .	11
2.3.1. Modelo cinemático no-holonómico . . . . .	12
2.3.2. Modelo cinemático holonómico . . . . .	13
2.3.3. Modelo cinemático expresado en coordenadas polares . . . . .	14
2.3.4. Modelo dinámico estructura Euler-Lagrange . . . . .	16
2.3.5. Modelo dinámico expresado en variables de estado . . . . .	17
2.3.6. Seguimiento de trayectoria . . . . .	18
2.4. Estrategia Líder-Seguidor . . . . .	20
2.5. Robots móviles aéreos . . . . .	24
2.5.1. Cuadrirrotor . . . . .	26
2.5.2. Análisis del modelado de los cuadrirrotos . . . . .	32



2.5.3. Modelo dinámico del cuádrirrotor . . . . .	36
2.6. Conclusiones . . . . .	43
<b>3. Control basado en modos deslizantes</b>	<b>44</b>
3.1. Introducción . . . . .	44
3.2. Preliminares . . . . .	44
3.2.1. Difeomorfismo . . . . .	44
3.2.2. Grado Relativo . . . . .	45
3.2.3. Derivada de Lie . . . . .	45
3.2.4. Paréntesis de Lie . . . . .	47
3.2.5. Controlabilidad . . . . .	49
3.2.6. Índice característico de controlabilidad . . . . .	50
3.3. Control por modos deslizantes . . . . .	51
3.3.1. Fundamentos del control basado en modos deslizantes . . . . .	54
3.4. Algoritmo Super Twisting . . . . .	58
3.5. Control Adaptativo del algoritmo super-twisting . . . . .	63
3.5.1. Control adaptable del algoritmo super-twisting modificado . . . . .	63
3.6. Conclusión . . . . .	70
<b>4. Diseño del control super-twisting modificado para el robot móvil terrestre bajo la estrategia líder-seguidor</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Modelo matemático del robot diferencial . . . . .	71
4.3. Control de seguimiento bajo la estrategia Líder-seguidor . . . . .	75
4.4. Resultados experimentales . . . . .	80
4.5. Conclusiones . . . . .	85
<b>5. Diseño del control adaptativo super-twisting para el cuádrirrotor</b>	<b>86</b>
5.1. Modelo matemático del cuádrirrotor . . . . .	86
5.2. Diseño del control adaptativo super-twisting para el cuádrirrotor . . . . .	89



5.3. Simulación del Cuadrirrotor . . . . .	94
5.4. Conclusiones . . . . .	102
<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>104</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
<b>A. Robot E-puck</b>	<b>118</b>
<b>B. Publicaciones</b>	<b>122</b>
B.1. Revistas . . . . .	122
B.2. Congresos . . . . .	122

# Índice de figuras

2.1. Diferentes aplicaciones de los robots móviles terrestres . . . . .	7
2.2. Diferentes sistemas de locomoción de los robots móviles terrestres . . . . .	7
2.3. Configuración Síncrona . . . . .	8
2.4. Configuración con direccionamiento diferencial . . . . .	9
2.5. Configuración de triciclo clásico . . . . .	9
2.6. Configuración Ackerman . . . . .	10
2.7. Robot con tracción diferencial no-holonómico . . . . .	13
2.8. Robot con tracción diferencial modelo holonómico . . . . .	14
2.9. Arquitecturas de control. . . . .	21
2.10. Clasificación de los UAV de acuerdo al tipo de despegue y aterrizaje . . . . .	25
2.11. Esquema de un cuádrirrotores junto con el sistema de referencia inercial {E} y el sistema de referencia {B} unido al centro de masa del cuádrirrotores . . . . .	32
2.12. Movimiento de cabeceo. . . . .	34
2.13. Movimiento de alabeo. . . . .	35
2.14. Movimiento de guiñada. . . . .	36
3.1. Función Signo . . . . .	55
3.2. Representación del Modo deslizante . . . . .	55
3.3. Función de Saturación . . . . .	56
3.4. Trayectorias del sistema que evolucionan en el dominio de $\Omega^+$ y $\Omega^*$ . . . . .	65
4.1. Differential mobile robot . . . . .	72

4.2. Estrategia Líder-Seguidor . . . . .	76
4.3. Robot e-puck . . . . .	80
4.4. Diseño de comunicación basado en un enfoque líder-seguidor . . . . .	81
4.5. Seguimiento de trayectoria de de los robot líder y seguidor . . . . .	82
4.6. Distancia entre el líder y el seguidor . . . . .	83
4.7. Error de seguimiento . . . . .	83
4.8. Velocidades del seguidor . . . . .	84
5.1. Marco de referencia del cuadrirrotor . . . . .	87
5.2. Esquema de control. . . . .	89
5.3. Trayectoria en 3D del cuadrirrotor controlado por los tres controladores. . . . .	96
5.4. Entradas de control $U_c$ , $U_\phi$ , $U_\theta$ y $U_\psi$ versus tiempo (s) con los tres controladores - <b>Primera Columna.</b> control ASTW . <b>Segunda columna.</b> control ASMC . <b>Tercera co-</b> <b>lumna.</b> control SAST . . . . .	96
5.5. Ganancia Adaptable en las coordenadas $x$ , $y$ y altura $z$ versus tiempo (s). <b>Superior.</b> Controlador ASTW . <b>Central</b> Controlador ASMC. <b>Inferior</b> Controlador SAST . . . . .	97
5.6. Ganancia Adaptable en los ángulos de Euler versus tiempo (s). <b>Superior.</b> Controlador ASTW . <b>Central</b> Controlador ASMC. <b>Inferior</b> Controlador SAST . . . . .	98
5.7. Índices de rendimiento de los errores de seguimiento mediante la Integral del error absoluto (IAE). . . . .	99
5.8. Índices de rendimiento de los errores de seguimiento mediante la Integral del error cuadrático (ISE). . . . .	99
5.9. Índices de rendimiento en la entrada de control $U_C$ . . . . .	100
5.10. Índices de rendimiento en las entradas de control $U_\phi$ , $U_\theta$ y $U_\psi$ . . . . .	100
5.11. Perturbación $\delta_z(t)$ y estimación versus tiempo(s). . . . .	101
A.1. Robot móvil e-puck . . . . .	119
A.2. La estructura mecánica del robot e-puck en una vista explosionada. . . . .	121

# Índice de tablas

- 5.1. Parámetros del cuadrirrotor. . . . . 94
- 5.2. Parametros para los controladores ASTW, ASMC y SAST. . . . . 95

# Capítulo 1

## Introducción

La robótica móvil ha tenido gran auge en la última década gracias a los avances mostrados en la industria, la medicina, la agricultura, las aplicaciones militares, entre otros. En la industria, se pueden encontrar robots que realizan trabajos de soldadura, pintura y de desplazamiento de piezas, por mencionar algunos. En desastres naturales como los terremotos los robots ha sido utilizados para búsqueda y rescate [1].

Los robots móviles se pueden clasificar de acuerdo al medio en el que se desplacen: aéreos, acuáticos y terrestres [2]. Los robots móviles se caracterizan por su capacidad de desplazarse de forma autónoma en un entorno desconocido o conocido parcialmente.

El problema de control de seguimiento para robots móviles terrestres, generalmente se ha resuelto mediante la utilización de controles cinemáticos. Además, si se conoce la posición de los motores se puede alcanzar el seguimiento [3]. Sin embargo, los robots móviles bajo cargas variables, o vehículos que se mueven en diferentes terrenos, la fricción cambia. Entonces los modelos cinemáticos no describen las condiciones en las que opera el robot. Por lo tanto, no resuelven el problema de seguimiento. Entonces es necesario obtener modelos que describan de manera completa las condiciones de operación, para diseñar controles que resuelvan el problema de seguimiento. Sin embargo, a pesar de que estos modelos describen de manera más adecuada el comportamiento del sistema, resulta que algunos parámetros que aparecen en el modelo no se conocen de manera precisa. Entonces, resolver el problema de seguimiento de trayectorias en

presencia de incertidumbres paramétricas es un problema abierto. Por otro lado, entre las principales aplicaciones de los robots móviles aéreos como los cuadricópteros se encuentran la toma de fotografías de estructuras elevadas. Por lo que es necesario mantener la aeronave en vuelo estacionario estable, de tal manera que se le permita recolectar información necesaria, por lo cual es necesario contar con controladores que mantengan la estabilidad de la aeronave. Sin embargo, dadas las pequeñas dimensiones los cuadricópteros están expuestos a perturbaciones importantes tales como ráfagas de viento, las cuales dificultan mantener la posición deseada. Además, el comportamiento dinámico de estos vehículos es no lineal y está fuertemente acoplado, por lo que se requiere de controladores que sean lo suficientemente robustos para mantener la estabilidad bajo diferentes condiciones de operación. En la literatura, el diseño de leyes de control que proporcionen el rendimiento deseado del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones y/o incertidumbres paramétricas es uno de los problemas que se han estudiado en la comunidad científica. Esto ha generado un gran interés en el desarrollo de los llamados métodos de control robustos, que se supone que resuelven este problema. A pesar del desarrollo extenso y exitoso del control adaptativo robusto [4]- [5], el control  $H_\infty$  [6] y las técnicas predictivas [7], el control de modo deslizante (SMC) sigue siendo una técnica muy utilizada gracias a sus ventajas que son su robustez ante perturbaciones externas y su convergencia en tiempo finito [8], [9], [10]. Siendo el control de modos deslizantes el que ha dado mejores resultados para resolver problemas con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas [11–13]. La idea básica del control por modo deslizante (SMC) consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una variedad o superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. Así, el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. Sin embargo, un inconveniente importante del control de modo deslizante es la existencia de oscilaciones indeseables de alta frecuencia en la entrada de control denominado efecto de “*chattering*”, cuando se implementa en aplicaciones prácticas.

Entre los algoritmos de modo deslizante de orden superior, el algoritmo de control “super-twisting” (STA) es uno de los más populares debido a que es robusto y con una disminución considerable del efecto de “*chattering*”, lo que lo hace atractivo para el control [14]. Sin embargo, el controlador STA necesita conocer la cota de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el

sistema, las cuales no son siempre medibles o fáciles de estimar. Al sobrestimar la cota de la perturbación, la ganancia del controlador es mayor de la necesaria. Como solución, las técnicas de ganancia adaptativa buscan ajustar continuamente el esfuerzo del controlador, por lo tanto atenuar el “*chattering*” [15–17].

Por este motivo, en esta tesis se propone el diseño de estrategias de control robusto basada en modos deslizantes para el seguimiento de trayectorias de robots móviles terrestres con tracción diferencial y aéreos - cuadrirotor.

## 1.1. Motivación

El control de modo deslizante es un método robusto para tratar con sistemas no lineales en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas [18, 19]. Este enfoque se basa en el diseño de una “superficie deslizante”, que se define a partir de los objetivos de control. Por lo tanto, el control deslizante obliga a la trayectoria del sistema a alcanzar, en tiempo finito, la superficie y permanecer en ella; a pesar de las perturbaciones e incertidumbres. Sin embargo, un inconveniente importante del control de modo deslizante es la existencia de oscilaciones indeseables de alta frecuencia en la entrada de control, cuando se implementa en aplicaciones prácticas. Estas oscilaciones de alta frecuencia se conocen como fenómeno de “*chattering*” y pueden dañar tanto el sistema como los actuadores.

Se han realizado varios esfuerzos para prevenir este fenómeno, como el remplazo de la función de control discontinuo por una de saturación [20], el uso de observadores [21] y el control de modo deslizante de alto orden [18].

Entre los algoritmos de modo deslizante de alto orden, el control “*super-twisting*” es uno de los más populares debido a su robustez y su convergencia en tiempo finito. Se han propuesto varias metodologías para el ajuste de las ganancias del algoritmo *super twisting* [21, 22]. Sin embargo, cuando se tienen perturbaciones acotadas y cuya cota es desconocidas, suele sobrestimar se el valor de la ganancia; una solución a este problema es el desarrollo de ganancias adaptativas. Se han propuesto diferentes estrategias de controladores con ganancias adaptativas [8, 23–25].



En los trabajos de [24,25] que permiten conducir a cero la variable de deslizamiento en presencia de las perturbaciones e incertidumbres; sin embargo, se sobrestima la ganancia adaptativa. Un enfoque basado en disminuir la ganancia cuando la variable deslizante tiende a cero, se ha desarrollado en el trabajo de [19], permitiendo superar el problema de la sobrestimación de ganancias; sin embargo, estas estrategias de control requieren numerosos parámetros, y la selección de sus valores carecen de un método sistemático. En [26] se ha propuesto una ley de adaptación basada en el algoritmo de modo deslizante difuso. Sin embargo, el desempeño del seguimiento no está garantizado.

En este trabajo se pretende superar estos inconvenientes mediante la simplificación del algoritmo de control super-twisting, permitiendo la reducción en el número de parámetros a sintonizar a uno. Conservando su robustez y reduciendo considerablemente el efecto de “chattering”.

La principal contribución del trabajo es proponer una nueva versión del controlador adaptativo de super-twisting (ASTW) para un clase de sistemas no lineales inciertos.

## 1.2. Objetivo

En este trabajo de tesis se propone el diseño de una versión simplificada del algoritmo de control super-twisting para el seguimiento de trayectorias de robots móviles terrestres y aéreos en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Permitiendo la reducción de parámetros utilizados en las ganancias de ajuste de control, para posteriormente generar un controlador adaptativo super-twisting.

## 1.3. Estructura de la Tesis

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: En el capítulo 2, se introducen conceptos de control no lineal, así como estrategias de control basadas en modos deslizantes. Posteriormente, se describen el modelo matemático del robot diferencial, el diseño del control para el seguimiento de trayectorias basado en la estructura líder seguidor, y los resultados obtenidos en la experimentación. En el capítulo 4 se describen el modelo matemático del cuadrirotor, el diseño del control

adaptable super-twisting, donde la ganancia del control es la solución de una ecuación diferencial, generando una ganancia dinámica que depende de la superficie deslizante; posteriormente, se presentan los resultados obtenidos en simulación, mostrando la efectividad del algoritmo propuesto. Finalmente, se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Generalidades

### 2.1. Introducción

La robótica, es una de las áreas de investigación más importantes en la comunidad científica [27], el estudio de la robótica móvil juega un papel muy importante en diversas áreas y aplicaciones, tales como el sector industrial, militar, exploración espacial, entretenimiento, asistencia médica, seguridad, entre otras muchas aplicaciones.

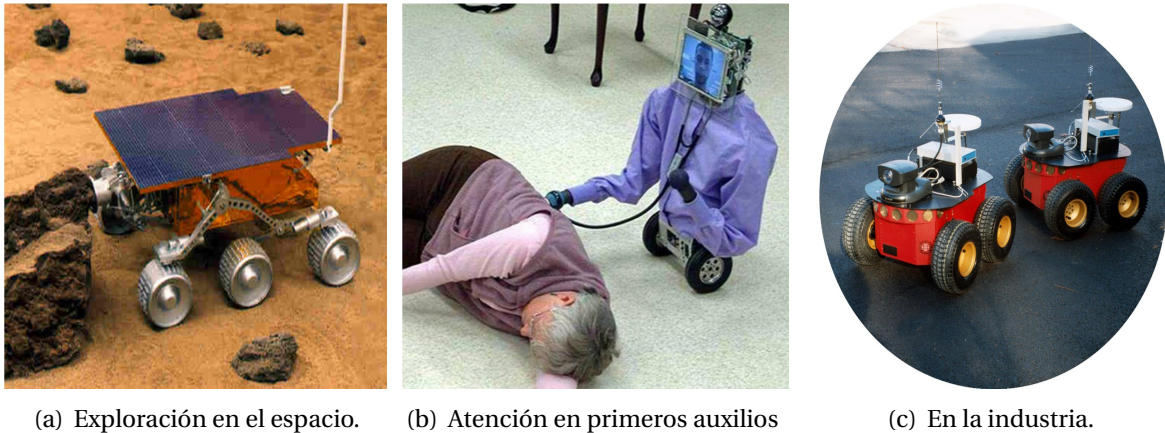
Los robots móviles se pueden clasificar de acuerdo al medio en el que se desplacen: aéreos, acuáticos y terrestres [2]. Los robots móviles se caracterizan por su capacidad de desplazarse de forma autónoma en un entorno desconocido o conocido parcialmente.

Este trabajo se centra en el control de seguimiento de trayectorias de robots móviles terrestres y aéreos. Este capítulo ofrece una introducción a las bases de los robots móviles terrestres y aéreos.

### 2.2. Robots móviles terrestres

Los robots móviles terrestres destacan por sus múltiples aplicaciones en la medicina, agricultura, exploración de minas, en la milicia, entre otros. La figura 2.1 muestra robots móviles terrestres en algunas de sus diferentes aplicaciones.

Los robots móviles terrestres distribuyen sus sistemas de tracción y dirección sobre los ejes de sus ruedas de acuerdo a las exigencias de velocidad, maniobrabilidad y características del terreno. La



(a) Exploración en el espacio. (b) Atención en primeros auxilios (c) En la industria.

Figura 2.1: Diferentes aplicaciones de los robots móviles terrestres

precisión y rapidez con que el robot móvil debe alcanzar su destino, implica tener un sistema de tracción confiable y un sistema de dirección que dote de maniobrabilidad al robot. Esta confiabilidad y maniobrabilidad que debe tener el robot móvil, determinan las características del sistema de tracción y dirección, no sólo en lo que respecta a la técnica, sino también al número de ruedas necesarias y al tipo y disposición de éstas para lograr una estructura mecánica estable [28], [29]. En el caso de los robots móviles terrestres pueden tener diferentes tipos de sistemas de locomoción como son robots con patas [30], robots con ruedas [31] y robots de orugas [32] (mostradas en la Figura 2.2).



(a) Robot con patas (b) Robot con ruedas (c) Robot de oruga

Figura 2.2: Diferentes sistemas de locomoción de los robots móviles terrestres

A pesar del amplio estudio de la movilidad de robots con patas y de orugas, el desarrollo más significativo se ha dado en la locomoción por ruedas. La principal ventaja por la que es convenien-

te utilizar ruedas como medio locomotor es la facilidad para construirlas; otras ventajas es que solo es necesario suministrar energía al eje de las ruedas motrices. Los robots móviles terrestres con ruedas son vehículos capaces de realizar un movimiento autónomo (sin intervención humana), debido a que está equipado para que su movimiento se efectúe por medio de una computadora que controla los actuadores. Los robots móviles terrestres con ruedas cuentan con diversas configuraciones [28, 29] que han sido de interés en múltiples estudios, dentro de las cuales se encuentran la configuración Ackerman, triciclo, skid steer, síncrona, tracción omnidireccional y tracción diferencial.

- **Configuración síncrona ó synchro-drive.** En esta configuración existen transmisiones que permiten orientar las tres ruedas simultáneamente con una velocidad angular,  $\omega$ , y permite que el vehículo se desplace con una velocidad lineal  $v$ . En esta configuración se tiene una restricción no holónomica como se verá más adelante y dos grados de libertad. La orientación es no controlable. (figura 2.3)

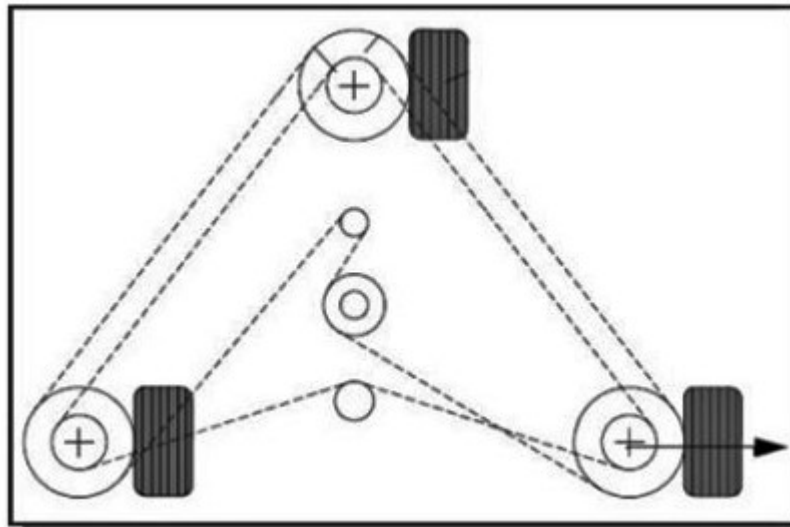


Figura 2.3: Configuración Síncrona

- **Configuración con direccionamiento diferencial.** Se caracteriza porque el movimiento se consigue con dos ruedas, acopladas cada una a su propio motor, teniendo normalmente una o dos ruedas de apoyo. De esta forma se logra que el robot avance en línea recta fijando ambos motores a la misma velocidad, también se le puede hacer girar en una u otra dirección

cuando se aplican velocidades diferentes, y se logra que gire sobre su propio eje cuando las velocidades tienen igual magnitud con sentidos opuestos (Figura 2.4).

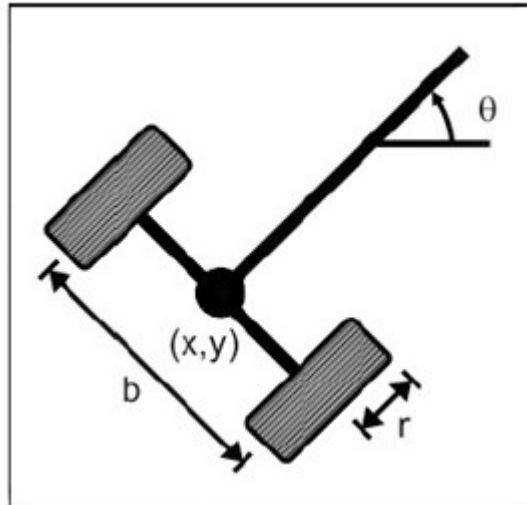


Figura 2.4: Configuración con direccionalidad diferencial

- Configuración de triciclo clásico** La rueda delantera se utiliza para la orientación y la tracción. En este caso las variables de control suelen tomarse como el ángulo de dirección de la rueda delantera (velocidad angular) y la velocidad de giro de la misma rueda (velocidad lineal). Se supone que el punto guía  $(x, y)$  está en el centro del eje trasero (figura 2.5).

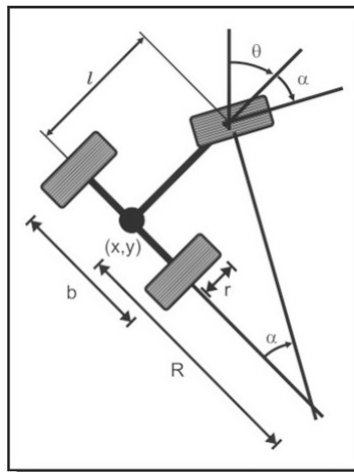


Figura 2.5: Configuración de triciclo clásico

- Configuración Ackerman** Es la configuración que tienen las ruedas del automóvil. Se supone que el centro de guiado del vehículo está situado a la mitad del eje de las ruedas de

tracción (ruedas traseras). Esta configuración tiene una pobre maniobrabilidad (Figura 2.6).

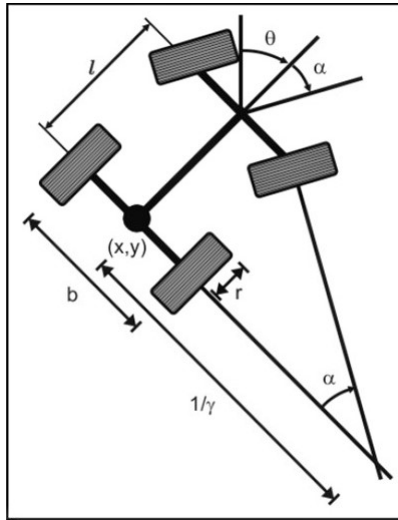


Figura 2.6: Configuración Ackerman

En este trabajo los experimentos se realizaron con robots móviles terrestres con ruedas con tracción diferencial mediante la estrategia líder-seguidor. Introduciendo las siguientes hipótesis en de diseño y operación:

**Hipótesis 1.** *El robot se mueve sobre una superficie plana*

**Hipótesis 2.** *El deslizamiento en la ruedas izquierda y derecha son despreciables*

**Hipótesis 3.** *El robot es rígido y no cuenta con partes flexibles*

**Hipótesis 4.** *El robot tiene restricciones no holonómicas, las cuales se caracterizan por estar sujetos a restricciones no integrables en las velocidades, es decir, su plano de velocidades está restringido [33, 34].*

Estas hipótesis permiten obtener modelos simplificados, para los cuales es posible diseñar algoritmos de control y/u observación. Entre ellos se encuentran los sistemas no-holónomicos, estos sistemas se caracterizan por tener un número menor de grados de libertad controlables respecto al número de grados de libertad totales, en el caso de un robot móvil terrestre de tracción diferencial, el número total de grados de libertad son 3 (posición  $x$ ,  $y$  y su orientación  $\phi$ ). Sin embargo únicamente se puede controlar el desplazamiento en los ejes  $x$ ,  $y$  así como su orientación,



sin permitir controlar el desplazamiento transversal [35]. Matemáticamente se dice que el sistema esta sujeto a restricciones no integrables en las velocidades, es decir, su plano de velocidades está restringido.

El control del movimiento de los robots móviles terrestres, se puede clasificar en cuatro tareas fundamentales;

- localización,
- planificación de trayectoria,
- seguimiento de trayectoria y
- evasión de obstáculos.

Existen diversos trabajos donde se han estudiado estos tópicos de manera detallada, no obstante, sólo se mencionarán los más relevantes relativo al seguimiento de trayectoria. Para lograr el control de seguimiento de trayectoria se muestran los diferentes modelos matemáticos de los robots móviles con ruedas de tracción diferencial.

### **2.3. Modelos matemáticos**

La cinemática es el estudio de la matemática del movimiento, sin tener en cuenta los efectos de las fuerzas sobre él; es decir, de las relaciones geométricas que gobiernan el sistema, y de la relación entre parámetros de control y comportamiento de sistemas en el espacio estado [36]. La cinemática estudia el movimiento de un robot considerando un sistema de referencia dado, mientras que un modelo cinemático relaciona posiciones, velocidades y orientación. En esta sección se revisan algunos modelos cinemáticos para un robot móvil de tracción diferencial considerando que se cumplen las hipótesis 1-4 presentadas en la sección 2.2.

La representación de las ecuaciones cinemáticas del robot móvil para el control de la trayectoria se puede clasificar en coordenadas cartesianas [37], [38] y coordenadas polares [39], [40], [41]. Aunque la postura del robot móvil se puede representar fácilmente con respecto al marco de destino utilizando las coordenadas polares, la representación de coordenadas cartesianas se adopta

con más frecuencia debido a los posibles puntos singulares en la representación de coordenadas polares. En [35, 37], el problema de seguimiento global con errores de seguimiento iniciales arbitrarios se resuelve cuando se restringen las velocidades lineales y angulares deseadas, lo que ha sido eliminado recientemente en [42]. Aunque un solo controlador está diseñado tanto para seguimiento como para estabilización en [42], el parámetro de control debe ajustarse según las trayectorias de referencia, y debe incluirse la entrada de control de excitación persistente. Por otro lado, como existen incertidumbres en el robot móvil real, las teorías de control de modo deslizante y adaptativo se emplean en [43–45] para resolver este problema. Los errores de seguimiento simplemente se atenúan en [43] y las velocidades deseadas deben restringirse para un seguimiento exacto en [44]. En el caso de [45], las perturbaciones externas se consideran utilizando superficies de deslizamiento en coordenadas polares, pero la postura debe estar restringida y, por lo tanto, las trayectorias arbitrarias no pueden seguirse globalmente. Por lo tanto, es necesario desarrollar una ley de control para que el seguimiento de la trayectoria arbitraria sea posible incluso con grandes errores de seguimiento inicial y perturbaciones sin ninguna restricción en las velocidades deseadas.

La dinámica, por su parte, se define como el estudio del movimiento a partir del modelado de las fuerzas aplicadas, teniendo en cuenta la energía y velocidad asociadas a él [46]. Por lo tanto, es posible conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas que actúan en el robot. Se presentan dos modelos dinámicos de robot móvil, un modelo basado en la formulación Euler-Lagrange y el otro modelo basado en la formulación presentada en [47].

### 2.3.1. Modelo cinemático no-holonómico

La posición y orientación del robot móvil de tracción diferencial pueden ser descritos por la coordenada  $(x, y)$  y el ángulo  $\theta$  respectivamente, la posición y orientación son medidas con respecto a un sistema de referencia fijo. En el robot no-holonómico (ver Figura 2.7), la velocidad  $(\dot{x}, \dot{y})$  está restringida en una sola dimensión, mientras que la posición del centro geométrico  $(x, y)$  no tiene restricción en el plano. El modelo cinemático 2.1 tiene la característica de ser no-

holonómico, es decir, tiene restricciones en la velocidad [33].

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $v$  es la velocidad lineal en dirección perpendicular al eje de sus ruedas y  $\omega$  es la velocidad angular.

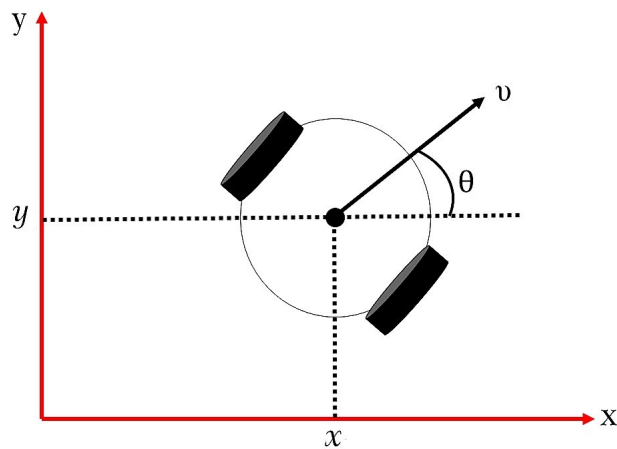


Figura 2.7: Robot con tracción diferencial no-holonómico

Considerando la siguiente condición no-holonómica

$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta = 0 \quad (2.2)$$

### 2.3.2. Modelo cinemático holonómico

Un robot móvil es holonómico si no tiene restricciones de velocidad en el plano coordenado, es decir, que la posición del robot móvil denotada por  $(x, y)$  puede moverse en cualquier dirección. Ahora considérese un robot móvil de tracción diferencial, y supóngase que la posición  $(x, y)$  se encuentra a una distancia “a” del centro geométrico (eje imaginario que une las ruedas) tal como

se muestra en la Figura 2.8. Entonces se obtiene un modelo holonómico dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta - a\dot{\theta} \\ v \sin \theta + a\omega \cos \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Este modelo presenta restricciones del tipo holonómicas para  $a \neq 0$ , las cuales no involucran

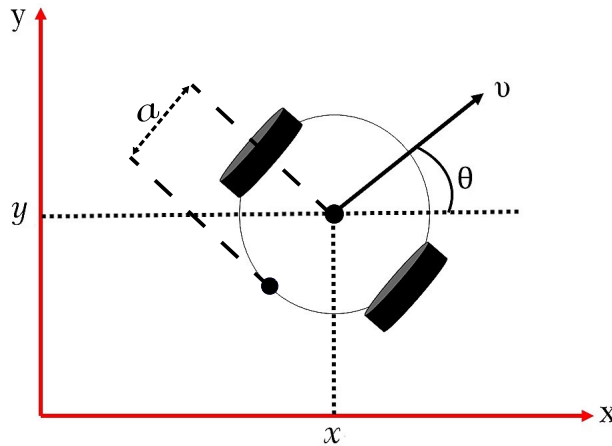


Figura 2.8: Robot con tracción diferencial modelo holonómico

variables de velocidad [48].

### 2.3.3. Modelo cinemático expresado en coordenadas polares

En [39] se presenta un modelo cinemático expresado en coordenadas polares. Considerando el modelo cinemático de los robots móviles en coordenadas en el espacio de coordenadas presentado en la ecuación (2.1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

donde  $(x, y)$  es la posición del robot móvil,  $\theta$  es el ángulo de orientación entre la dirección traslacional y el eje  $X$ ,  $v$ ,  $\omega$  son la velocidad lineal y la velocidad angular, respectivamente. En coordenadas polares, son

$$x = r \cos \phi \quad (2.4)$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi$$

donde  $r$  es la magnitud polar y  $\phi$  el ángulo polar, respectivamente. Derivando con respecto al tiempo la ecuación 2.4, se obtiene

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi \dot{\phi} \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi \dot{\phi}$$

combinando (2.1) y (2.5), el modelo cinemático del robot móvil en coordenadas polares puede escribirse como

$$\dot{r} = v \cos(\phi - \theta)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.6)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{v}{r} \operatorname{sen}(\phi - \theta)$$

donde  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  y  $\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ . Con el fin de satisfacer la condición no-holonómica de los robots móviles  $\theta$  en la ecuación (2.1) es el ángulo tangencial, descrito por  $(r, \phi)$  en coordenadas polares como

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi - \tan^{-1}\left(\frac{\dot{r}}{r}\right) \quad (2.7)$$

A partir de la ecuación 2.7 se tiene que  $(\phi - \theta) \in [-\pi, 0]$ .

### 2.3.4. Modelo dinámico estructura Euler-Lagrange

En esta sección, se presenta un modelo dinámico Euler-Lagrange para un robot móvil con tracción de tipo diferencial. A partir de la ecuación de Lagrange dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = T_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  es el vector de pares o fuerzas externas y  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$  corresponde a la función de Lagrange, la cual es definida como una diferencia entre la energía cinética  $K(q(t), \dot{q}(t))$  y la energía potencial  $U(q(t))$ , es decir, donde la matriz de pares inerciales  $M(q, \dot{q})$  es simétrica y definida positiva de dimensión  $n \times n$ ;  $C(q, \dot{q})$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, que es una matriz de dimensión  $n \times n$  y satisface la siguiente propiedad

$$\dot{q}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0, \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

A partir de la formulación lagrangiana, del modelo dinámico no lineal de un robot móvil de tracción diferencial, donde el centro de masa se encuentra ubicado en el centro geométrico, está descrito por

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

donde  $m$  y  $I_z$  corresponden a la masa y el momento de inercia del robot móvil, respectivamente;  $\dot{v}$  es la aceleración lineal;  $\dot{\omega}$  es la aceleración angular;  $T = [T_1 \quad T_2]^T$  corresponde al vector de fuerzas y pares externos.

Si la posición del robot móvil  $q = [xy]^T$  se encuentra a una distancia  $a$  del centro geométrico, entonces la velocidad del robot móvil en el plano coordenado está descrita por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -a \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & a \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\frac{1}{a}\text{sen}\theta & \frac{1}{a}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega\text{sen}\theta & \omega\cos\theta \\ -\frac{\omega}{a}\cos\theta & \frac{\omega}{a}\text{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Ahora, sustituyendo (2.12) en (2.10), el modelo dinámico puede escribirse en función de la posición del punto  $q = [x \ y]^T$  en el plano coordenado como

$$\begin{pmatrix} m\cos\theta & m\text{sen}\theta \\ -\frac{I_z}{a}\text{sen}\theta & \frac{I_z}{a}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega\text{sen}\theta & m\omega\cos\theta \\ -\frac{I_z}{a}\omega\cos\theta & \frac{I_z}{a}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

el cual es válido en los intervalos  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ , de modo que  $\cos(\theta) > 0$ .  $u$  y  $\omega$  son la velocidad lineal y la velocidad angular, respectivamente; la orientación del robot es denotado por  $\theta$ ;  $\dot{q} = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$  y  $\ddot{q} = [\ddot{x} \ \ddot{y}]^T$  corresponden a la velocidad y aceleración en el plano coordenado;  $a$  es una distancia que es definida a partir del centro geométrico. Se observa que el término correspondiente a los pares de fuerzas gravitacionales son nulos, esto es debido a que el robot móvil se desplaza en un plano bidimensional horizontal, donde el gradiente de la energía potencial es nulo. Por otra parte, el ángulo  $\theta$  es calculado a partir de  $q = [x \ y]^T$ , el cual es definido para  $x \neq 0$ .

### 2.3.5. Modelo dinámico expresado en variables de estado

Otra formulación para un modelo dinámico de un robot móvil con tracción diferencial holonómico con dos ruedas accionadas es presentado en [49]. El modelo dinámico esta representado por

$$\dot{X} = f(X) + g(X)u + \delta(X, \gamma) \quad (2.14)$$

donde  $\gamma$  es el vector de variables no medidas,  $X = [x \ y \ \theta \ v \ \omega]^T$  es el vector de estados, y  $u = [T_v \ T_\omega]^T$  representa la entrada del sistema, como se muestra en la figura 2.7.



El modelo dinámico mostrado esta definido como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta - a \theta \\ v \sin \theta + a \omega \cos \theta \\ \omega \\ \frac{mbr^2}{\Theta_v} \omega^2 \\ -2 \frac{bmr^2}{\Theta_\omega} v \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2r}{\Theta_v} & 0 \\ \frac{2rd}{\Theta_\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde  $T_v = \frac{1}{2}(T_r) + (T_\omega)$  y  $T_\omega = \frac{1}{2}(T_r) + (T_\omega)$ ;  $T_r$  y  $T_l$  son pares aplicados a las ruedas izquierda y derecha respectivamente;  $I_z$ ,  $m$  y  $r$  corresponden al momento de inercia con respecto al eje  $z$ , la masa y radio de las ruedas respectivamente.  $\Theta_v$  y  $\Theta_\omega$  son definidos como  $\Theta_v = mr^2 + 2I_e$ , y  $\Theta_\omega = I_e d^2 + 2rr(I_z + mb^2)$ ;  $I_e$  es el momento de inercia de la combinación del rotor y reductor y la rueda.  $\delta$  es el vector de incertidumbres y/o perturbaciones.

En el modelo dinámico (2.15) se considera que la masa está a una distancia  $b \neq 0$  con respecto al centro geométrico. Además, las imprecisiones asociadas con la simplificación corresponden al vector de incertidumbres.

En este trabajo se utiliza una simplificación del modelo dinámico del robot con tracción diferencial, donde se desconocen la masa, el radio de las ruedas y el momento de inercia con respecto al eje  $z$ , considerando esta información como parte de las incertidumbres del sistema.

### 2.3.6. Seguimiento de trayectoria

En relación al seguimiento de trayectoria, existen diferentes métodos para lograr esta tarea, como en la propuesta de un controlador diferenciable de [50], esta técnica se basa en el control de campos de velocidad (VFC, por sus siglas en inglés) junto con un control adaptativo, aquí la trayectoria deseada se describe por un vector de velocidad y la principal ventaja del VFC reside en el hecho que el error en el control del campo de velocidad impide que el robot deje la trayectoria deseada, en este estudio se considera un modelo lineal. En el diseño de controladores de seguimiento de trayectoria para robots móviles, algunos fueron diseñados con base en el modelo cinemático del robot, como aquellos presentados en [40] y [37]. Sin embargo, para ejecutar ta-

reas que requieren altas velocidades o transporte de cargas pesadas, es fundamental considerar la dinámica del robot, además de su cinemática. Por eso, algunos estudios presentan el diseño de controladores que compensan la dinámica del robot. Por ejemplo, [33] presentó una ley de control para robots móviles no-holonómicos que lleva en consideración la dinámica del vehículo, aunque las señales de control generadas por este controlador sean pares y que solamente se mostraron resultados en simulación. El diseño de un controlador adaptable para seguimiento de trayectoria que genera señales de pares, basado en modelo dinámico, fue presentado en [38] sin embargo, solamente se mostraron resultados en simulación. En [26] fue propuesto un controlador adaptable con incertidumbres del sistema que son estimadas por un sistema basado en lógica difusa y sus parámetros son ajustados en línea. El modelo dinámico usado en dicho trabajo incluye la dinámica de los actuadores, y las señales generadas son voltajes para los motores del robot. Las señales de control generadas por los controladores dinámicos presentados en la literatura son, en general, pares o voltajes para los motores del robot, como en los trabajos mencionados anteriormente. Sin embargo, robots comerciales usualmente reciben comandos de velocidades lineal y angular. En este contexto, en [34] fue presentado un modelo dinámico para robots tipo unicycle que tiene la ventaja de aceptar velocidades lineal y angular como entradas, además de un controlador el seguimiento de trayectoria diseñado con base en dicho modelo. Los métodos de control de seguimiento existentes incluyen principalmente la retroalimentación de estados lineal [51], el método de control backstepping [52], [53], [54] y métodos basados en modos deslizantes [39], [55]. Entre los métodos de control anteriores, el método de retroalimentación de estados es un método de control común, pero la precisión es baja cuando el modelo del robot no es lineal, así como su trayectoria. Por otro lado, el proceso de diseño del controlador backstepping es complicado y el costo es alto, es difícil satisfacer las necesidades en tiempo real del control de los robots. El método de cálculo del momento depende del modelo dinámico del robot controlado, pero el modelado dinámico es un trabajo muy complejo. Considerando los trabajos [52], [53], [54], la principal deficiencia es que las incertidumbres del modelo no se han considerado en el diseño del controlador. Las incertidumbres pueden desequilibrar o desestabilizar el robot móvil bajo algunas circunstancias. Para estudiar este problema, algunos investigadores han recurrido a métodos robustos y técnicas adaptables de control [6], [56], [57], [58], [7]. Aunque estos métodos de control pueden superar

las incertidumbres, algunos de ellos implican cálculos complejos. El control de modo deslizante (SMC) es una estrategia que se ha utilizado con éxito para controlar los robots [35], [39], [13]. Las principales ventajas de SMC son insensibilidad a la variación de los parámetros, independencia de perturbaciones externas, respuesta rápida y fácil implementación. En [13], se diseñó un SMC adaptativo para un robot móvil para lograr el seguimiento de la trayectoria en presencia de variaciones de parámetros e incertidumbres del modelo. Los resultados fueron verificados en simulaciones numéricas.

En este trabajo se propone el seguimiento de trayectorias de robots móviles diferenciales utilizando el control por modos deslizantes de alto orden, específicamente el algoritmo super-twisting bajo la estrategia líder-seguidor.

## 2.4. Estrategia Líder-Seguidor

La autonomía de los sistemas móviles ha sido un tema de investigación en la comunidad científica e industrial por sus innumerables aplicaciones. Sin embargo, en muchas de estas aplicaciones no es suficiente el empleo de un solo robot. En este caso, es necesario utilizar grupos de robots para realizar tareas cooperativas donde las operaciones de cada robot están coordinadas y son coincidentes respecto al tiempo de ejecución. Esto es lo que se conoce como sincronización en grupos de robots.

La coordinación de los robots implica un control de seguimiento para realizar la tarea de manera eficiente. Algunos trabajos en donde se trata de dar solución a este problema, ya sea mediante técnicas de consenso [59], técnicas de sincronización [60] o utilizando técnicas basadas en el comportamiento grupal de animales o personas [61].

En la literatura, las estrategias de control de robots puede clasificarse en centralizado [62] y descentralizado [63]. El control centralizado se basa en el monitoreo y control de todos los robots por un procesador central, donde la información del modelo, proveniente de los sensores y el control resultante de cada uno de los robots es procesada (Figura 2.9 a). El control descentralizado consiste en un controlador implementado en cada robot; por lo tanto, no hay supervisor, y la retroalimentación de control es solo la posición relativa detectada de cada robot con respecto a

sus robots vecinos (Figura 2.9 b).

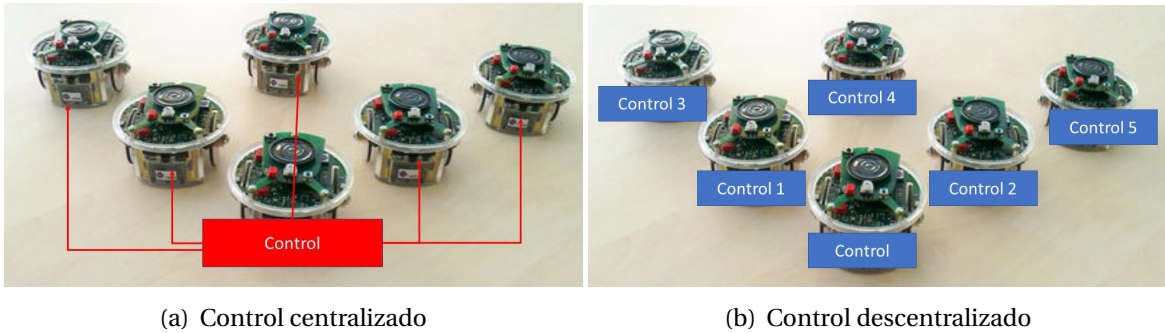


Figura 2.9: Arquitecturas de control.

Los grupos de robots pueden ser de dos tipos; de estructura homogénea o de estructura heterogénea. Los grupos de estructura homogénea están conformados por sistemas cuyas dinámicas no lineales son descritas por la misma ecuación, es decir, todos los robots del grupo son iguales. Mientras que los grupos de robot de estructura heterogénea, están conformados por robots cuyos modelos dinámicos son diferentes entre sí.

Para solucionar el problema de seguimiento en múltiples robots se ha propuesto la estrategia de control líder-seguidor [64], debido a que el control se puede ver como una extensión del problema tradicional de seguimiento de trayectoria. El enfoque de líder-seguidor se compone de asignar a un robot como líder que se mueve a lo largo de una trayectoria predefinida, mientras que el robot o los robots del grupo actúan como seguidores, para mantener una distancia deseada con el líder [64]. Una vez que se da el movimiento del líder, se puede lograr la separación deseada del seguidor con el líder eligiendo una ley de control local sobre cada seguidor en función de su dinámica de posición relativa. Entonces, la estabilidad del grupo de robots está garantizada, es decir, todo el grupo puede lograr y mantener la trayectoria deseada.

Aunque, el principal inconveniente del enfoque líder-seguidor es que depende en gran medida del líder para lograr el objetivo y la dependencia excesiva de un solo robot puede ser indeseable, especialmente en condiciones adversas [65]. A pesar de esto el enfoque líder-seguidor es común en la literatura por su simplicidad y escalabilidad.

En la literatura se han propuesto diferentes técnicas para el control de seguimiento de trayectoria de robots móviles no autónomos [31], [42], [54] que consta del diseño de modelado y controlador para el líder siguiendo el control de seguimiento para los robots móviles denominados seguidores. Se han presentado algunos modelos y controladores en la literatura [39–41] que utilizan principalmente la representación basada en coordenadas polares. Sin embargo, los modelos tienen un problema de singularidad en la representación de coordenadas polares. En [51] presentan un controlador basado en la linealización de entrada-salida, pero es localmente estable. El controlador basado en modos deslizantes es globalmente estable pero complejo, se presenta en [55]. Como se conoce, la representación del modelo cinemático de los robots móviles para el seguimiento de trayectoria puede utilizar coordenadas cartesianas o coordenadas polares. Aunque la distancia y la orientación del robot se pueden representar fácilmente mediante coordenadas polares, la representación de coordenadas cartesianas puede evitar los posibles puntos singulares que se presentan en la representación de coordenadas polares. Se han planteado trabajos bajo la estrategia líder-seguidores para el seguimiento de trayectoria siguiendo una formación específica mediante el control super-twisting clásico en [66,67]; sin embargo, solo se realizan simulaciones sin lograr la implementación. En este trabajo se explora la representación de coordenadas cartesianas y se deriva un nuevo modelo cinemático para la configuración líder-seguidor de robots móviles con tracción diferencial.

En los trabajos de robots móviles colaborativos se tienen limitaciones físicas para realizar la implementación, y los modelos intuitivos que se utilizan a menudo para describir tales sistemas no siempre los capturan con la precisión adecuada. Para demostrar esto de manera efectiva, se han utilizado la simulación y los robots reales. Como se observó en el estudio de la literatura mostrada en los párrafos anteriores la mayoría se centran en estudios verificados por medio de simulaciones, ya que requiere de una inversión significativamente menor de tiempo, dinero y mantenimiento, pero para comprender realmente las diferencias entre la simulación y la realidad, también es necesario llevar a cabo experimentos en robots reales, por lo que los laboratorios de investigación han considerado robots a pequeña escala con el fin de minimizar el espacio físico y el mantenimiento. Generalmente, los laboratorios han diseñado y construido sus propios robots y sus plataformas. Además, en el mercado hay una serie de robots móviles disponibles comercialmen-

te adecuados para la investigación de robots en conjunto como Khepera II y III de K-Team, Lego Mindstorms de la empresa lego y Create de iRobot. Sin embargo, el robot móvil educativo e-puck de hardware abierto desarrollado por el *École Polytechnique Fédérale de Lausanne* (EPFL) se volvió muy popular debido a la investigación que ha desarrollado en robots colaborativos en los últimos años [45].

En la literatura se encuentran algunos estudios realizados con robots e-pucks como el presentado por [68] donde utilizan varios robots e-pucks trabajando como un enjambre permitiendo el intercambio de información entre robots y también con cualquier otro dispositivo compatible. En [69] se presenta la implementación por medio de robots e-puck para la evasión de obstáculos utilizando una estrategia de control basada en lógica difusa. En [70] se propone una estrategia para transportar un objeto grande a una meta utilizando una gran cantidad de robots móviles que son significativamente más pequeños que el objeto, empujando el objeto en posiciones donde la línea de visión directa a la meta está obstruida por el objeto. Esta estrategia está totalmente descentralizada y no requiere comunicación explícita ni mecanismos de manipulación específicos. En aplicaciones como mapeo de áreas en [71] se propone formar una representación del entorno del robot basada en una Red Neuronal Recurrente (RNN) para diferentes escenarios. En [42] se plantea una técnica para el seguimiento de líneas y la prevención de colisiones en los sistemas robóticos móviles en tiempo real.

En este trabajo se aborda el problema de seguimiento por medio de la estrategia líder-seguidor de robots diferenciales, este esquema es uno de los más conocidos y estudiados, una característica importante de este esquema es que al estar sujeto a la trayectoria del líder, la trayectoria del seguidor se verá afectada por perturbaciones externas. Para lograr el seguimiento se propone una nueva versión del controlador de super-twisting con menos parámetros para ajustar a fin de preservar las propiedades de robustez y reducir el esfuerzo de control. Este trabajo implementa la estrategia líder-seguidor mediante el control simplificado de super-twisting de robots diferenciales que realizan un seguimiento de trayectoria con una distancia específica entre líder y el seguidor. Además, para comprobar la efectividad del control propuesto se realizan experimentos con robots e-pucks.

## 2.5. Robots móviles aéreos

Los robots móviles aéreos generalmente denominados vehículos aéreos no tripulados (en inglés *Unmanned Aerial Vehicle*, y con siglas UAV) los cuales se emplearon durante la primera guerra mundial. Posteriormente, se utilizaron como objetivos en entrenamientos tanto en Estados Unidos como en Gran Bretaña. Durante la guerra de Vietnam, los UAV fueron utilizados por el ejército estadounidense en tareas de reconocimiento, lanzamiento de proyectiles y distribución de comunicados.

Actualmente, los UAV son utilizados en diversas aplicaciones, tales como: vigilancia, reconocimiento e inspección de áreas estratégicas poco accesibles para las aeronaves tripuladas convencionales. Entre los diferentes tipos de UAV, los cuadrirrotores han extendido su uso en los ámbitos militar y civil debido a características importantes tales como: capacidad de miniaturización, gran maniobrabilidad, ser relativamente económicos y de fácil mantenimiento [72].

Los UAV se pueden clasificar según diferentes criterios, entre los cuales se tienen los siguientes: el tipo de despegue, el tipo de alas y de la manera en que estos se sustentan. Con respecto al tipo de despegue se tienen: las aeronaves de despegue vertical y las de despegue no vertical. Dentro de la categoría de despegue vertical se encuentran los UAV de ala rotativa o hélice (helicópteros y cuadrirrotores) y los auto-sustentados (dirigibles y globos). Con respecto a la categoría de despegue no vertical se encuentran: las aeronaves de ala flexible (parapentes o ala delta) y las de ala fija (aeroplanos). En la Figura 2.10 se muestran los diferentes tipos de aeronaves en los que se clasifican los UAV de acuerdo a su despegue y aterrizaje. [72].

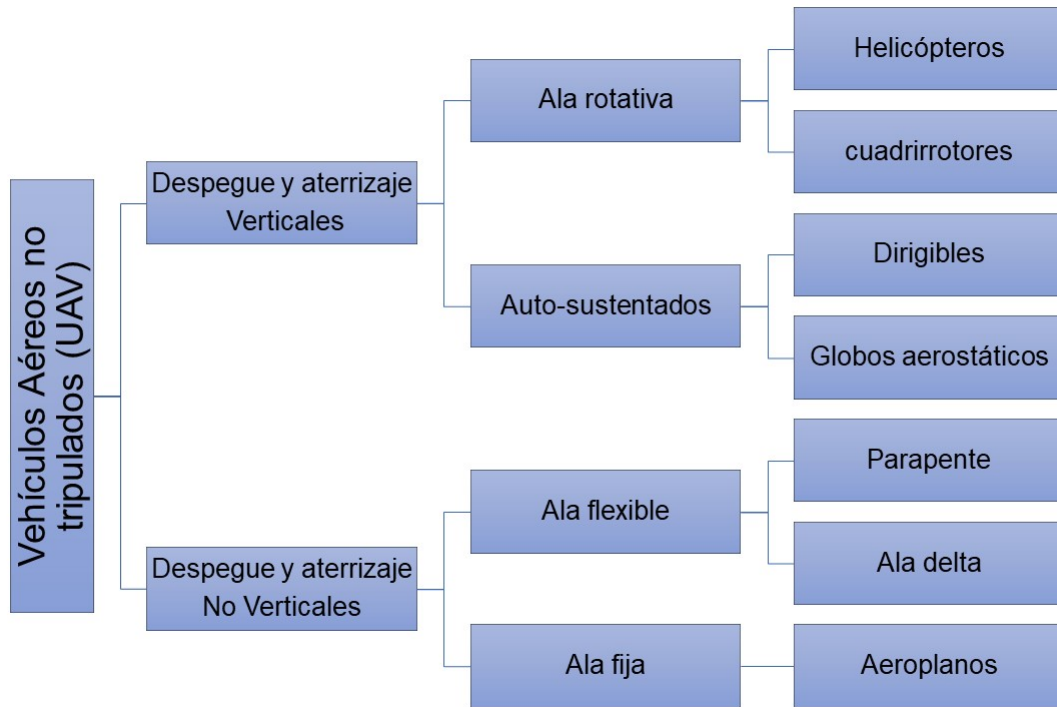


Figura 2.10: Clasificación de los UAV de acuerdo al tipo de despegue y aterrizaje

Este trabajo propondrá una estrategia de control adaptable, basada en la técnica de modos deslizantes, para el control de altitud y posición de un UAV del tipo cuadrirrotor. Entre las principales aplicaciones de los cuadrirrotores se encuentran la toma de fotografías o radiografías industriales de estructuras elevadas, edificios, columnas de puentes, cables de alta tensión, entre otros. Para dichas aplicaciones es necesario mantener la aeronave en vuelo estacionario estable, de tal manera que se le permita recolectar información necesaria, por lo cual es necesario contar con controladores que mantengan la estabilidad de la aeronave y así mejore su desempeño. Además, el uso del cuadrirrotor como transporte de carga de un lugar a otro, ha implicado que su peso total cambie durante el desarrollo de la tarea. Estos cambios deben considerarse en la propuesta del controlador con el fin de que no generen pérdidas de desempeño, lo que ocasiona cambios en línea o cada que se realiza la entrega de un paquete diferente, es por esto que se proponen controles robustos que permitan realizar esta tarea sin necesidad de hacer cambios que puedan generar un accidente.



### 2.5.1. Cuadrirrotor

Hasta el momento se ha hablado de los robots móviles aéreos de modo general. Sin embargo, uno de los temas principales en este trabajo se centra en el estudio de una clase especial de los UAV, los cuadrirrotores o cuadrirrotor. Actualmente, han ganado popularidad y son de gran importancia debido a la gran variedad de aplicaciones que los involucran. Con base en la clasificación mostrada en la Figura 2.10 es posible definir a los cuadrirrotor de la siguiente manera [73]:

*DEFINICIÓN 2.1. Un cuadrirrotor es un Vehículo Aéreo no Tripulado (UAV) de despegue vertical y ala rotativa, que consiste en una estructura mecánica con cuatro rotores unidos a un cuerpo rígido en forma de cruz ubicado de forma equidistante de su centro de masa.*

En el centro de la estructura se encuentran localizados diferentes elementos, tales como la batería que proporciona la energía al equipo, los sensores de posición, velocidad, de presión; el procesador, la estación de comunicación y equipos para transmisión de datos de vídeo e imagen. Esta clase de UAV realiza vuelo estacionario estable y efectúa maniobras precisas al equilibrar las fuerzas de empuje producidas por cada uno de los 4 rotores. Al cambiar la velocidad de al menos un rotor, se logra el desplazamiento del cuadrirrotor. El seguimiento de trayectoria previamente calculada es uno de los problemas en el control de los cuadrirrotores, debido a que el control de la posición depende de la orientación y la dirección; además de la de velocidad que permite el control del vuelo. El interés de estudiar este tipo de vehículos radica en su versatilidad y de su maniobrabilidad permitiendo un gran número de tareas. Sin embargo, la navegación se ve afectada por requerir tener una percepción del ambiente que no en todos los casos se consigue. Por otro lado, debido a su tamaño, la estabilidad del vehículo durante el vuelo se ve fácilmente afectada por perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Algunos factores a los que se enfrentan son a un medio altamente cambiante, como consecuencia de la fricción con el viento, velocidades de viento variables y cambio en la humedad del entorno, la dinámica de rotación, variaciones en el peso, ráfagas de viento, ruido en las mediciones, entre otras. Adicionalmente, el control automático del cuadrirrotor ha despertado el interés en los investigadores, debido a que las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del cuadrirrotor son no lineales y están fuertemente acopladas. Adicionalmente, el sistema del cuadrirrotor es subactuado debido a que cuenta con seis

grados de libertad (GDL) y cuatro actuadores independientes que son las entradas de control. Los cuadrirrotores se caracterizan por dinámicas complejas, un comportamiento no lineal entre las diversas variables de interés e incertidumbres paramétricas. Como una alternativa para estos problemas se utilizan técnicas de control adaptativas y robustas que permiten una solución al problema de regulación y seguimiento de trayectorias en lazo cerrado para un cuadrirrotor, para contar con un sistema eficiente de navegación y estabilización. Además, las técnicas de control por lo general requieren de un conocimiento exacto de los estados del sistema, y en el cuadrirrotor, se tiene una reducida cantidad de sensores disponibles. También, la medición de los sensores puede estar corrompida por el ruido. La técnica de control apropiada depende principalmente de los objetivos de aplicación para los que se diseñe al cuadrirrotor. Se han propuesto diversos controladores lineales y no lineales, buscando como un objetivo principal conseguir un alto nivel de estabilidad ([74], [75], [76], [77], [78], [79]). Entre las principales técnicas de control resaltan controladores proporcional derivativo (PD), proporcional integral derivativo (PID), backstepping,  $H_\infty$ , estimadores de estado basados en filtros de Kalman, regulador lineal cuadrático (LQR por sus siglas en inglés), redes neuronales, algoritmos difusos, etc. ([80], [76], [81], [82], [83]). Existen controladores implementados para diferentes modelos del cuadrirrotor, cada uno definido con sus respectivas particularidades dependiendo de los objetivos. Esto propicia que algún controlador presente ventajas con las particularidades del caso. No obstante, éstos pueden exhibir alguna degradación en su desempeño, para condiciones de operación distintas para las cuales fue diseñado. Más aún, información exacta de los parámetros constantes o variables del sistema podría no estar disponible para la implementación de algún controlador. El modelo no lineal es de gran utilidad, debido a que proporciona mayor información del comportamiento físico del sistema [76]. Sin embargo, el modelo linealizado se emplea ampliamente en la literatura, debido a que en general presenta buenos resultados de regulación alrededor de un punto de equilibrio. Este modelo se utiliza con condiciones definidas de vuelo (hover) siendo estables y efectivos sólo en rangos de operación que corresponden a ángulos razonablemente pequeños. Dentro de las ventajas de estos diseños basados en controladores lineales se puede mencionar: presentan desempeño aceptable, tienen una estructura simple y pueden ser sintonizados con un modelo lineal aproximado. Para implementaciones en tiempo real, es importante considerar una ley de control robusta que considere un

desempeño aceptable para diversas condiciones operativas, un controlador basado en el modelo linealizado reduce su aplicabilidad [84]. El controlador PID funciona calculando los errores o diferencia entre la salida medida y el valor de referencia asignado, definiendo las entradas de control para ajustar la velocidad de los motores. Aunque este método de control ha sido propuesto inicialmente para sistemas lineales, también se ha utilizado para el control de sistemas no lineales [78]. En ([85], [79], [81], [82], [83], [86]) los estudios se enfocan en determinar un control óptimo a través de algoritmos de control convencionales PD y PID, cada trabajo tiene su propia metodología de sintonización. En [81] se presenta un algoritmo PD para mejorar la respuesta transitoria principalmente ante diferentes perturbaciones, la orientación del cuadricóptero se analiza mediante el uso de cuaterniones para evitar singularidades. En [79] se utiliza un algoritmo PID aplicado a un modelo matemático derivado a partir de la aproximación de Lagrange, en este estudio no se consideran los efectos giroscópicos, obteniendo un modelo relativamente simple, esto permite contar con un primer acercamiento en el modelado, simulación e implementación de un cuadricóptero de estas características. En [87] se considera una versión del modelo incluyendo efectos giroscópicos, realizando un análisis dinámico con controladores PD, backstepping y control inverso, el último tiene como objetivo el control del sistema a través de dinámica inversa. El algoritmo LQR es una forma de control óptimo lineal que tiene como objetivo reducir la magnitud de la entrada de control sin afectar su desempeño. En [85] se emplea este regulador para obtener los parámetros de ajuste que minimizan las alteraciones no deseadas (altura), y al mismo tiempo limitar la energía de la acción de control usando un algoritmo que minimice una función de costo o índice de desempeño con factores de ponderación. En [88] se compara el desempeño del controlador LQR contra un controlador no lineal basado en el análisis de Lyapunov, el modelo se desarrolla a partir de la formulación LaGrange-Euler. En [83] se encuentran algoritmos PID y LQR, primero se presentan las constantes del controlador PID derivadas de la teoría LQR, posteriormente se sintoniza el algoritmo PID con un procedimiento utilizando como función la integral del tiempo por el error absoluto (ITAE). De igual manera los controles convencionales se utilizan como complementos de controladores más complejos y robustos, en [89] se fundamenta el diseño de controladores no lineales backstepping. En [86] se implementa un controlador backstepping especificando los parámetros empleados en la etapa de simulación, donde se proponen condiciones iniciales adversas para el vuelo estable

del cuádrirrotor, los resultados muestran un desempeño adecuado ante perturbaciones. En [90] el algoritmo de modos deslizantes se utiliza como observador de estado para estabilizar el sistema, adicionalmente se diseña un observador-estimador que pretende desprestigiar las perturbaciones inherentes del sistema con el menor número de sensores, esto se logra mediante una estrategia de linealización en la retroalimentación. Es importante citar que en la literatura donde se desarrollan algoritmos complejos de control, su desempeño se compara bajo diversas circunstancias con controladores convencionales analizando su capacidad de controlabilidad. En [84] se implementa una estrategia de modos deslizantes y posteriormente se discuten beneficios del controlador frente a las características de operación que entrega un controlador PID. En [57] se contempla el uso de un controlador por modos deslizantes, proporcionando detalles de las simulaciones que validan su desempeño considerando algunos objetivos como la estimación de variables aerodinámicas y el seguimiento de trayectorias. Por su parte en ([80]; [78]; [91]; [58]; [56]) se optimizan controladores convencionales con algoritmos adaptativos, en [86] se presentan consideraciones del entrenamiento de la red neural, tanto en línea como fuera de línea, definiendo una sola capa oculta para estimar parámetros desconocidos en el modelo. En [78] un neuro-controlador PID realiza el cálculo de los coeficientes óptimos para un adecuado desempeño, se enfatiza una correcta caracterización de los valores primarios por ejemplo la regla de aprendizaje, en este tipo de algoritmos se busca disminuir la demanda de operaciones en la etapa de procesamiento. En [83] se lleva a cabo un control adaptativo con una estrategia complementada utilizando modos deslizantes. Las diferentes representaciones del modelo dinámico para esta clase de sistemas, convergen a cierto nivel de complejidad dependiendo de los factores que se reconocen y afectan al sistema. Algunos trabajos enfocan sus esfuerzos en estudios más detallados, como en [92], donde se proponen controladores PVA (posición-velocidad-aceleración) basados en observaciones de las velocidades del cuádrirrotor y se evalúan en un modelo denominado flexible. En el modelo se analizan las vibraciones del cuerpo asociadas al movimiento de los rotores, y otro modelo simplificado que es equivalente al descrito en gran parte de los trabajos relacionados al control de este vehículo. Por otra parte, en [93] se comparan dos controladores basados en el aprendizaje mediante iteraciones (ILC), para verificar el desempeño de los esquemas se realizan diversas simulaciones para el seguimiento de trayectorias planificadas variables. En [89] se hace un análisis de contribuciones

previas [94], [88] concluyendo su desarrollo con un mayor número de variables que describen la dinámica del sistema, además, describen algunas de las consideraciones que se deben tomar en cuenta en la etapa de implementación del control al sistema cuadrirrotor. Finalmente, se puede apreciar que el uso de estimadores y observadores de estado es una opción importante para este tipo de tareas de control. En [95] se tiene el diseño con un filtro de Kalman lineal, e incluye una versión no lineal del filtro del Kalman extendido, diseñado mediante una estrategia lineal cuadrática para mejorar el desempeño del primero y comparar los resultados. Algunas plataformas experimentales como el Starmac [96] y el OS4 [43] han permitido evaluar el seguimiento de trayectorias mediante algunos de los esquemas de control citados, con resultados satisfactorios tanto en ambientes interiores como exteriores. Las diversas técnicas de control tienen un desempeño satisfactorio pero en general quedan limitadas a algunas condiciones operativas y condiciones de diseño, en tal sentido, es necesario mejorar el desempeño del cuadrirrotor contando con un controlador adaptativo que permita hacer frente a variaciones paramétricas, perturbaciones del sistema y operaciones desconocidas, con características importantes para una implementación en tiempo real. De forma particular un inconveniente que tienen algunos esquemas de control robustos y adaptativos reportados en la literatura es que al realizar su diseño se necesita conocer su modelo, la magnitud de las perturbaciones internas o externas, ocasionando que el procedimiento de análisis y diseño sea muy complejo y a la vez difícil ([76]; [97]).

Por otro lado, las estrategias de control basadas en el control por modos deslizantes (SMC) han demostrado ser un método efectivo para el rechazo a perturbaciones e incertidumbres paramétricas lo cual elimina la necesidad de un modelado exacto del sistema. Adicionalmente, esta técnica de control tiene ventajas como convergencia en tiempo finito y estabilidad asintótica. Sin embargo, debido a la naturaleza discontinua de los controles basado en modos deslizantes se tiene como principal inconveniente el fenómeno llamado “*chattering*” o ruido de alta frecuencia, el cual puede dañar tanto al sistema como a los actuadores. Con el objetivo de reducir el efecto del “*chattering*” se han llevado a cabo diversos esfuerzos, un ejemplo de esto es el control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC) [98], el cual conserva la principal ventaja del SMC, mientras que al mismo tiempo presenta un mejor desempeño en relación a los efectos del “*chattering*” [16]. Entre las estrategias de control por modos deslizantes de alto orden, destaca el algoritmo de con-

trol super twisting, ofrece las mismas ventajas que los SMC tradicionales, solamente requiere del conocimiento de la variable deslizante  $s$  y, además, proporciona una señal de control continua lo cual reduce significativamente el “*chattering*”. Cabe mencionar que el “*chattering*” no puede ser eliminado, solo es posible ajustarlo. Estas técnicas han sido aplicadas exitosamente a cuadrirrotores en [99] para el control de orientación, donde se estabilizan los ángulos de Euler logrando buenos resultados a una altura de 1 m. Sin embargo, se observa “*chattering*” en las entradas de control debido a la presencia de ruido en los sensores. En [100] se demostró su estabilidad y la convergencia en tiempo finito basada en el análisis de Lyapunov. Ya que la superficie de deslizamiento está compuesta por los errores de seguimiento, se requiere de un conocimiento completo de los estados del sistema. Para solucionar este problema, en la literatura podemos encontrar controles por modos deslizantes basados en la información proporcionada por observadores. En [101] se presenta un control por modos deslizantes basado en un observador de perturbaciones, donde se logra un seguimiento óptimo de trayectorias y el “*chattering*” es reducido en la señal de control. Por otra parte, los observadores basados en técnicas por modos deslizantes, han sido ampliamente usados debido a ventajas como convergencia en tiempo finito e insensibilidad ante incertidumbres e.g. observados super twisting (STO), observador de alto orden por modos deslizantes (HOSMO). En [102], [103] se presentan resultados para un controlador super twisting (STC) basado en observadores STO y HOSMO, donde se demuestra que implementar un STC basado en STO no es posible debido a los términos discontinuos que aparecen en la ley de control que no permiten satisfacer la condición del segundo orden deslizante. Para solucionar este problema, se propuso la implementación de un STC basado en un HOSMO, donde se logran suficientes condiciones para alcanzar el segundo orden deslizante ( $s = \dot{s} = 0$ ).

### 2.5.2. Análisis del modelado de los cuadrirrotores

En la Figura 2.11 se muestra el esquema del cuadrirrotor. Para describir la posición del vehículo se emplea el denominado sistema de referencia, el cual consta de un origen y tres ejes orientados conforme a la regla de la mano derecha [2]. En la Figura 2.11 el sistema de referencia inercial se representa como  $\{E\}$  y el sistema de referencia unido al cuerpo del cuadrirrotor se representa como  $\{B\}$ . Los rotores 1 y 3 giran en el sentido de las manecillas del reloj mientras que los otros dos rotores lo hacen en sentido opuesto.

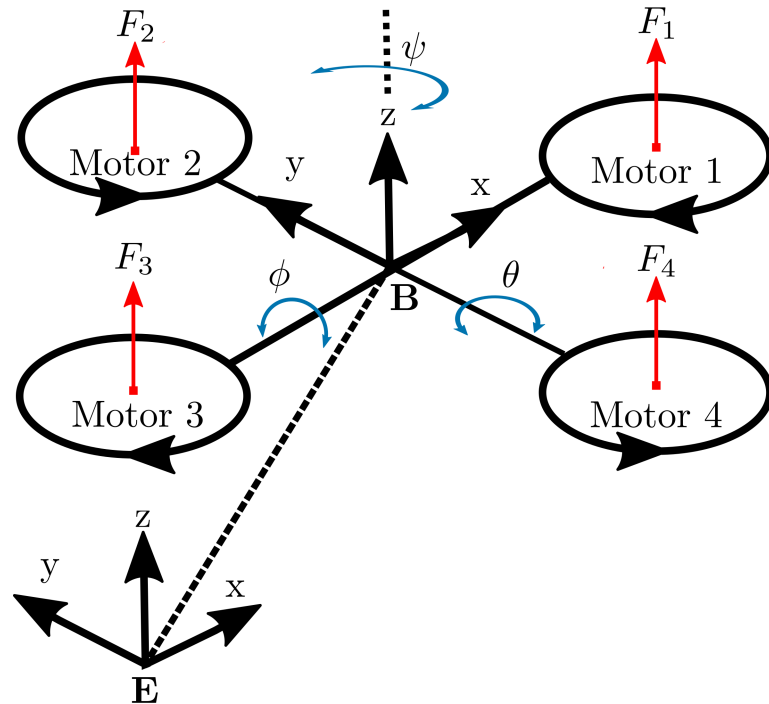


Figura 2.11: Esquema de un cuadrirrotor junto con el sistema de referencia inercial  $\{E\}$  y el sistema de referencia  $\{B\}$  unido al centro de masa del cuadrirrotor

Al conjunto de variables independientes que permiten determinar la posición y orientación de un sistema de forma única se le denomina grados de libertad (GDL). Los elementos que proveen la fuerza para que un dispositivo se mueva se denominan actuadores.

Los sistemas en los que el número de GDL es igual al número de actuadores se denominan *sistemas completamente actuados*. Sin embargo, existen casos en los que el número de GDL es mayor que el número de actuadores disponibles. Los sistemas con esta característica se denominan *sistemas subactuados*.

Los cuadrirrotores se mueven y se orientan de modo arbitrario en el espacio dado que poseen tres GDL para su movimiento traslacional  $(x, y, z)$  y tres para su movimiento rotacional  $(\phi, \theta, \psi)$ . Sin embargo, el movimiento deseado en un cuadrirrotor se obtiene al controlar de modo adecuado cuatro motores, es decir, poseen cuatro actuadores. Por lo tanto, los cuadrirrotores son sistemas subactuados, debido a que cuentan con seis GDL y sólo cuatro actuadores.

En un cuadrirrotor, los actuadores generan los pares que corresponden a las entradas de control del sistema lo que permite posicionarlo y orientarlo. Los grados de libertad del cuadrirrotor son los ejes cartesianos  $(x, y, z)$ , y los ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , que representan los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada (en inglés roll , pitch y yaw), respectivamente. Los 4 grados de libertad que se pretenden controlar son:

- Altura  $z$ : Es el desplazamiento vertical en el eje  $Z$  para alcanzar una altura deseada. Para esto se debe generar un fuerza de empuje igual en cada uno de los 4 rotores, y dependiendo de está fuerza de empuje, el cuadrirrotor puede despegar, ascender, descender o aterrizar.
- Cabeceo  $\phi$ : El cabeceo (pitch) es el ángulo de giro en torno al eje  $Y$  y se logra manteniendo la misma velocidad en los rotores 2 y 4, y una variación de empujes entre los rotores 1 y 3, dependiendo si se desea desplazar el cuadrirrotor hacia adelante o hacia atrás, como se muestra en la Figura2.12.



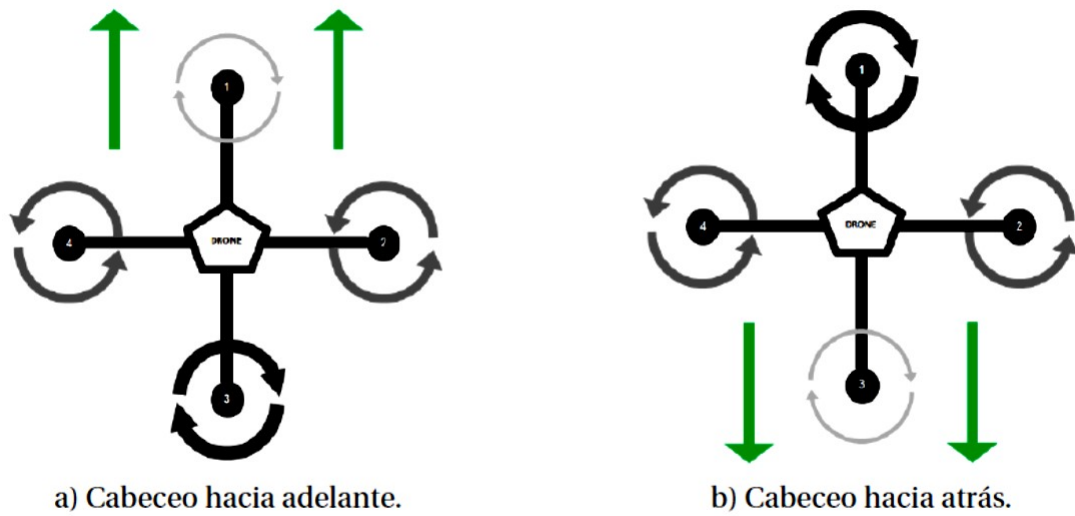


Figura 2.12: Movimiento de cabeceo.

- Alabeo  $\theta$ : El alabeo (roll) es el ángulo de giro en torno al eje X y se logra manteniendo la misma velocidad en los rotores 1 y 3, y una variación de empujes entre los rotores 2 y 4, dependiendo si se desea desplazar el cuadrirrotor hacia la izquierda o derecha, como se muestra en la Figura 2.13.

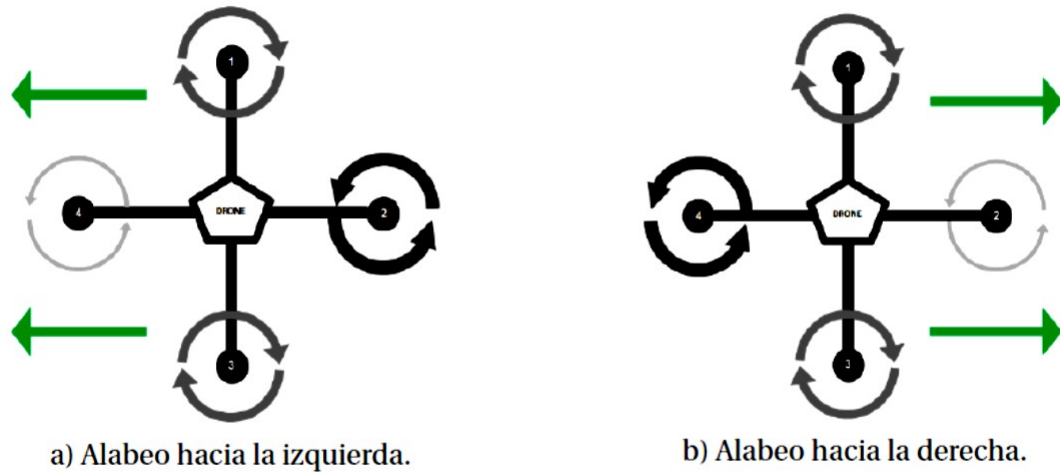


Figura 2.13: Movimiento de alabeo.

- Guiñada  $\psi$ : La guiñada (yaw) es el ángulo de giro en torno al eje Z, ya sea para girar en sentido horario o anti-horario. Para girar en sentido horario se necesita mantener el mismo empuje en los rotores 2 y 4, y el mismo empuje en el par de rotores 1 y 3, pero en mayor proporción a los del primer par. Para girar en sentido anti-horario se debe mantener el mismo empuje en el par de rotores 1 y 3, y el mismo en los rotores 2 y 4, pero en mayor proporción al primer par, como se muestra en la Figura 2.14.

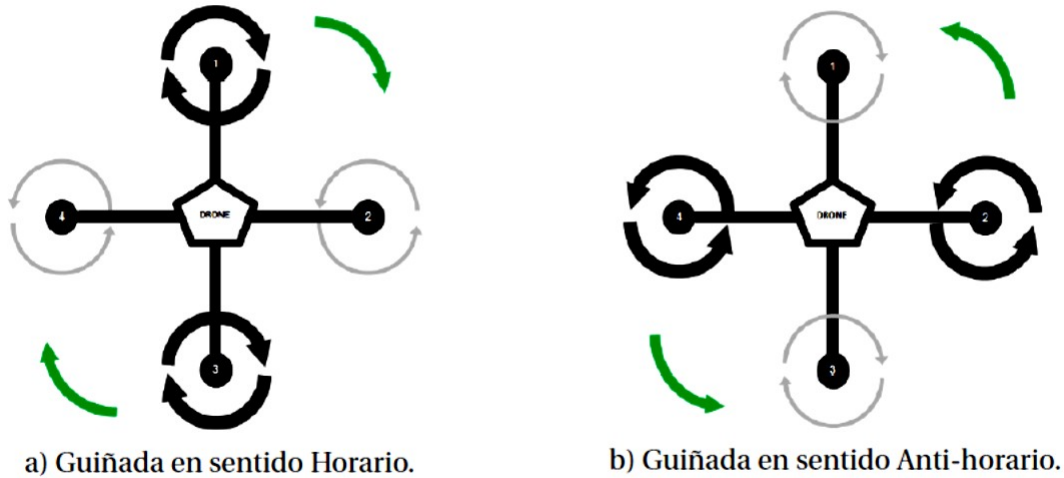


Figura 2.14: Movimiento de guiñada.

Al tener la misma velocidad en los cuatro rotores, los pares estarán balanceados, por lo tanto el cuadricóptero no girará, manteniéndose en una posición estable y al incrementar la velocidad de los cuatro rotores de forma sincronizada, se afectará la altura del cuadricóptero.

### 2.5.3. Modelo dinámico del cuadricóptero

Las ecuaciones de movimiento que describen a un cuadricóptero se obtienen empleado distintos enfoques tales como el método cuasi-lagrangiano, las ecuaciones de Euler-lagrange, las ecuaciones de Newton-Euler basadas en el balance de fuerzas y pares. En este trabajos se emplea el método Newton-Euler. A continuación se muestran los modelos dinámicos Euler-langrange y Newton-Euler empleados en los cuadricópteros.

Considerando las siguientes hipótesis para el desarrollo del modelo dinámico del cuadricóptero:

**Hipótesis 5.** *Las hélices del cuadricóptero se consideran rígidas.*

**Hipótesis 6.** *La estructura del cuadricóptero se supone rígida y simétrica.*

**Hipótesis 7.** *El origen del centro de referencia del cuadrirrotor coincide con el centro de gravedad.*

**Hipótesis 8.** *Las fuerzas de empuje producidas por los rotores, son proporcionales a la velocidad de giro de la hélice.*

**Hipótesis 9.** *Se supone que todas las perturbaciones están uniformemente acotadas y son Lipschitz continuas.*

Estas hipótesis se utilizan para simplificar el modelo del cuadrirrotor para poder controlar su movimiento.

### Modelo dinámico Euler-Lagrange

Las coordenadas generalizadas del cuadrirrotor son

$$q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^6 \quad (2.16)$$

donde  $(x, y, z)$  denotan la posición en el plano cartesiano, y  $\phi, \theta, \psi$  son los tres ángulos de Euler (alabeo, cabeceo y guiñada) y representan la orientación del cuadrirrotor. Por lo tanto, el modelo se puede dividir en coordenadas de traslación y rotación

$$\epsilon = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \eta = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{S}^3 \quad (2.17)$$

La energía cinética de traslación del cuadrirrotor es

$$T_{trans} \triangleq \frac{m}{2} \dot{\epsilon}^T \dot{\epsilon} \quad (2.18)$$

donde  $m$  es la masa del cuadrirrotor. Le energía cinética de rotación es

$$T_{rot} \triangleq \frac{1}{2} \dot{\eta} \mathbb{J} \dot{\eta} \quad (2.19)$$

La matriz  $\mathbb{J}$  actúa como la matriz de inercia para la energía cinética rotacional completa del cuadrirrotor expresada en términos de las coordenadas generalizadas  $\eta$ . La única energía potencial

que toma en cuenta la fuerza gravitacional ( $g$ ) está dada por

$$U = mgz \quad (2.20)$$

donde  $m$  es la masa del cuadricóptero,  $g$  la fuerza de gravedad.

El Lagrangiano es

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T_{trans} + T_{rot} - U \\ &= \frac{m}{2} \dot{\epsilon}^T \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta} - mgz \end{aligned} \quad (2.21)$$

El modelo para la dinámica completa del cuadricóptero para las ecuaciones Euler-Lagrange con fuerzas externas generalizadas está dado por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F \quad (2.22)$$

donde  $F = (F_c, T)$ .  $T$  es el momento generalizado y  $F_c$  es la fuerza de translación aplicada al cuadricóptero debido a las entradas de control. Despreciando las fuerzas del cuerpo pequeño, por que generalmente son de magnitudes menores que las entradas de control  $u$  y  $T$ , entonces se escribe como

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

donde (ver la Figura 2.11)

$$u = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.24)$$

y

$$F_i = k_i \omega_i^2, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.25)$$

donde  $k_i > 0$  es una constante y  $\omega_i$  es la velocidad angular del motor "i" ( $M_i, i = 1, \dots, 4$ ), entonces

$$F_c = R\hat{F} \quad (2.26)$$

donde  $R$  es la matriz de transformación que representa la orientación del cuadrirrotor,

$$R = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\psi s_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta c_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

donde, dado un ángulo  $v$ , las expresiones de la matriz de rotación corresponden  $c_v = \cos(v)$ ,  $s_v = \sin(v)$ . Los momentos generalizados en las variables  $\eta$  son

$$\tau \triangleq \begin{pmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\tau_\psi = \sum_{i=1}^n \tau M_i$$

$$\tau_\theta = (F_2 - F_4)l$$

$$\tau_\phi = (F_3 - F_1)l$$

donde  $l$  es la distancia de los motores al centro de gravedad y  $\tau_{M_i}$  es el par producido por el motor  $M_i$ .

Dado que el lagrangiano no contiene términos cruzados en la combinación de energía cinética  $\dot{\epsilon}$  y  $\dot{\eta}$  (ver (2.21)), la ecuación de Euler-Lagrange se puede dividir en la dinámica para las coordenadas  $\epsilon$  y la dinámica  $\eta$ . Se obtiene

$$m\ddot{\epsilon} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\epsilon \quad (2.29)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + \mathbb{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau \quad (2.30)$$

Definiendo el vector de Coriolis

$$\bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \mathbb{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \quad (2.31)$$

Se puede escribir

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} + \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \tau \quad (2.32)$$

También, se puede reescribir  $\bar{V}(\eta, \dot{\eta})$  como

$$\begin{aligned} \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) &= \left( \mathbb{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \\ &= C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde  $C(\eta, \dot{\eta})$  se refiere a los términos de Coriolis asociados con  $\eta$  que depende de  $\mathbb{J}$ .

Finalmente, se obtiene

$$m\ddot{\mathbf{e}} = u \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta}) + \tau \quad (2.35)$$

Con el objetivo de simplificar el modelo, se propone el cambio de variables de entrada, como

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta}) + \mathbb{J}\tilde{\tau} \quad (2.36)$$

donde

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

son las nuevas entradas. Entonces,

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau} \quad (2.38)$$

Reescribiendo las ecuaciones (2.34)-(2.35)

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -u\text{sen}\theta \\
 m\ddot{y} &= u\cos\theta\text{sen}\phi \\
 m\ddot{z} &= u\cos\theta\cos\phi - mg \\
 \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi \\
 \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\
 \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Las entradas de control  $u$ ,  $\tilde{\tau}_\psi$ ,  $\tilde{\tau}_\theta$  y  $\tilde{\tau}_\phi$  corresponden al empuje total o la entrada colectiva (dirigida desde la parte inferior de la aeronave) y los nuevos momentos angulares (momento de guiñada, momento de cabeceo y momento de alabeo).

### **Modelo dinámico Newton-Euler**

La formulación dinámica de Newton-Euler divide el sistema en dos, uno de traslación y otro de rotación.

Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico del cuadrirrotor (ver la Figura 2.11), en el marco de referencia fijo al cuerpo (marco-B) , cuentan con las siguientes ventajas:

- La matriz de inercia es invariante en el tiempo.
- La simetría del cuerpo simplifica las ecuaciones.

De acuerdo con [104], el modelo dinámico del cuadrirrotor que describe los movimientos de traslación y rotación, representados en un marco de coordenadas fijo con el origen en la masa



central, esta dado por

$$\begin{aligned}
 \ddot{X} &= (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta) \frac{U_c}{m} + \delta_x \\
 \ddot{Y} &= (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi) \frac{U_c}{m} + \delta_y \\
 \ddot{Z} &= (c_\phi c_\theta) \frac{U_c}{m} - g + \delta_z \\
 \ddot{\phi} &= U_\phi I_x^{-1} - (I_z - I_y) \dot{\theta} \dot{\psi} I_x^{-1} + \delta_\phi \\
 \ddot{\theta} &= U_\theta I_y^{-1} - (I_x - I_z) \dot{\phi} \dot{\psi} I_y^{-1} + \delta_\theta \\
 \ddot{\psi} &= U_\psi I_z^{-1} - (I_y - I_x) \dot{\phi} \dot{\theta} I_z^{-1} + \delta_\psi
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

las expresiones en el modelo dinámico correspondientes a  $s_{(\cdot)} = \text{sen}(\cdot)$  y  $c_{(\cdot)} = \text{cos}(\cdot)$ .  $I_x$ ,  $I_y$  y  $I_z$  son los momentos de inercia del vehículo con respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente.

Las entradas de control  $U_*$  ( $* = \{c, \phi, \theta, \psi\}$ ) están dadas por

$$\begin{aligned}
 U_c &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\
 U_\phi &= b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\
 U_\theta &= b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\
 U_\psi &= d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

donde  $\Omega_i$  ( $i = \{1, 2, 3, 4\}$ ) son las velocidades de los cuatro rotores,  $b$  y  $d$  son constantes positivas. Los términos  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ ,  $\delta_\phi$ ,  $\delta_\theta$  and  $\delta_\psi$  representan las perturbaciones e incertidumbres (dinámicas no modeladas y ráfagas de viento) que se suponen acotadas.

El modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadrirrotor consiste en 6 ecuaciones diferenciales de segundo orden, cada uno representa un grado de libertad y se definen en (2.40).

## **2.6. Conclusiones**

En este capítulo se introdujeron las bases de la robótica móvil en robots terrestres y aéreos, permitiendo conocer sus características y clasificaciones, así como algunas aplicaciones. Además, se describió la estrategia líder-seguidor la cual será usada para controlar los robots móviles terrestres. También, se propusieron hipótesis basadas en las características de cada uno de los robots móviles que se utilizaran en los capítulos 4 y 5.

# Capítulo 3

## Control basado en modos deslizantes

### 3.1. Introducción

En este capítulo, se introducen definiciones y conceptos importantes de la teoría de control basado en modos deslizantes para resolver el problema de seguimiento en robots móviles terrestres y aéreos. Se presenta un estado del arte al control no lineal para posteriormente presentar los algoritmos de control basados en modos deslizantes. Posteriormente, se describe el diseño del control adaptable super-twisting, basado en una ganancia dinámica para una clase de sistemas no lineales con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

### 3.2. Preliminares

#### 3.2.1. Difeomorfismo

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $\phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q)) : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo, que es uno a uno y sobre, es decir, biyectivo, con  $\phi$ ,  $\phi^{-1}$  continuas y  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  son los números reales. Si  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son mapeos suaves,  $\phi$  es llamado un difeomorfismo. Si  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son definidas en  $\mathbb{R}^n$  y son mapeos suaves,  $\phi$  es llamado un difeomorfismo global [105].

### 3.2.2. Grado Relativo

El grado relativo es un índice que permite determinar la dimensión del subespacio que es entrada y salida (SISO) controlable [106].

DEFINICIÓN 3.2. *Considere el sistema no lineal entrada y salida (SISO)*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , son funciones vectoriales en el espacio de estados y  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar. Además  $f$ ,  $g$  y  $h$  son suficientemente suaves, tiene grado relativo  $r$ , con  $1 \leq r \leq n$ , en  $x_0$  si

$$1. L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in U_0, \quad 0 \leq k \leq r-2.$$

$$2. L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in U_0$$

donde  $U_0$  es una vecindad en el origen.  $L$  es la derivada de Lie que se definirá en la siguiente sección.

Si

$$L_g L_f^k h(x) = 0, \quad \forall x \in x_0, \quad \forall k \geq 0$$

se dice que  $r = \infty$

Note que el grado relativo se puede interpretar como el número de veces que es necesario derivar la salida del sistema hasta que aparezca la entrada explícitamente.

### 3.2.3. Derivada de Lie

Las propiedades de controlabilidad y observabilidad de los sistemas no lineales, así como el diseño de estrategias de control, pueden ser estudiadas a través de las herramientas de geometría diferencial. Dentro de las operaciones frecuentemente utilizadas son la derivada y el corchete de Lie [106].

DEFINICIÓN 3.3. Sea una función escalar  $h(x)$  y una función vectorial  $f(x)$  en el espacio de estados, con  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La derivada de Lie se define como la función escalar  $L_f h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (3.2)$$

que indica la derivada de  $h(x)$  en a lo largo del campo  $f(x)$ . La expresión  $\frac{\partial h}{\partial x}$  representa el gradiente de  $h(x)$ :

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] \quad (3.3)$$

Se introduce la derivada  $L_f h(x)$  evaluada en el campo  $f$  donde es posible realizar la misma operación de forma repetida.

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x) \quad (3.4)$$

Para el caso donde  $h$  es derivada  $k$  veces a lo largo de  $f$ , se obtiene  $L_f^k h(x)$ , donde

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( L_f^{k-1} h(x) \right) f(x) \quad (3.5)$$

Dados los campos vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$ , el corchete de Lie de  $f$  y  $g$  es un nuevo vector definido por

$$[f, g](x) = ad_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (3.6)$$

El símbolo  $ad$  es una notación compacta que permite representar la operación de corchetes de Lie de forma recursiva. Esta representación se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f g &= [f, g] \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = [f, [f, ad_f g]] \\ &\vdots \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g], \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2.4. Paréntesis de Lie

DEFINICIÓN 3.4. *La derivada de Lie se define como:*

$$[f, g](h) = f(g(h)) - g(f(h)) = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (3.8)$$

*formando un álgebra de Lie no conmutativa sobre  $C^\infty(p)$ . El paréntesis de Lie  $[f, g]$  es un campo vectorial debido a que satisface la regla de Leibniz*

$$\begin{aligned} [f, g](h_1 h_2) &= L_f L_g (h_1 h_2) - L_g L_f (h_1 h_2) \\ &= L_f ((L_g h_1) h_2 + h_1 (L_g h_2)) - L_g ((L_f h_1) h_2 + h_1 (L_f h_2)) \\ &= (L_f L_g h_1 - L_g L_f h_1) h_2 + h_1 (L_f L_g h_2 - L_g L_f h_2) + (L_g h_1) (L_f h_2) + (L_f h_1) (L_g h_2) \\ &\quad - (L_f h_1) (L_g h_2) - (L_g h_1) (L_f h_2) \\ &= [f, g](h_1) h_2 + h_1 [f, g](h_2) \end{aligned}$$

*Es un operador lineal ( $a_1, a_2 \in \mathfrak{R}$ )*

$$\begin{aligned} [f, g](a_1 h_1 + a_2 h_2) &= L_f L_g (a_1 h_1 + a_2 h_2) - L_g L_f (a_1 h_1 + a_2 h_2) \\ &= a_1 [f, g](h_1) + a_2 [f, g](h_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Por ejemplo, la operación  $L_f L_g h$  sobre  $h$  no define un campo vectorial, debido a que no cumple con la regla de Leibniz*

$$\begin{aligned} L_f L_g (h_1 h_2) &= L_f ((L_g h_1) h_2 + h_1 (L_g h_2)) \\ &= (L_f L_g h_1) h_2 + h_1 (L_f L_g h_2) + (L_g h_1) (L_f h_2) + (L_g h_1) (L_f h_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

*El paréntesis de Lie  $[f, g]$  de los campos vectoriales  $f$  y  $g$  esta denotado por  $ad_f g$  o por  $L_f g$ . Los paréntesis de Lie repetidos se denotan como*

$$ad_f^i = ad_f(ad_f^{i-1} g), \quad ad_f^1 g = ad_f g, \quad ad_f^0 = g \quad (3.11)$$

Ya que  $[f, g] = -[g, f]$  el álgebra es no conmutativa.

Dado tres campos vectoriales  $f$ ,  $g$  y  $q$  la identidad de Jacobi se cumple

$$ad_f ad_g q + ad_g ad_q f + ad_q ad_f g = 0 \quad (3.12)$$

El paréntesis de Lie es bi-lineal sobre  $R$ , es decir

$$\begin{aligned} [a_f + b_g, q] &= a[f, g] + b[g, q] \\ [f, a_g + b_q] &= a[f, g] + b[f, q] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dadas dos funciones suaves  $\alpha$ ,  $\beta$  y dos campos vectoriales suaves  $f$ ,  $g$ , se cumple lo siguiente

$$[\alpha_f, \beta_g] = \alpha\beta[f, g] + \alpha(L_f\beta)g - \beta(L_g\alpha)f \quad (3.14)$$

A partir la ecuación (3.14) se puede calcular el paréntesis de Lie en coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$ .

entonces

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad g = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

Los paréntesis de Lie son

$$\begin{aligned} [f, g] &= \left[ \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( f_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} - g_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + f_i g_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por definición

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} (h) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} h \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} h \right) = 0 \quad (3.17)$$

por esto,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (3.18)$$

En conclusión, la formula para calcular los paréntesis de Lie, dada una vecindad de coordenadas es

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} g_i \right) - g_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.19)$$

Denotada por  $\frac{df}{dx}$  o  $J(f)$  el Jacobiano del campo vectorial  $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$  de una matriz de  $n \times n$  esta definida como

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La ecuación (3.19) se puede reescribir en notación vector como

$$[f, g] = \frac{dg}{dx} f - \frac{df}{dx} g \quad (3.21)$$

### 3.2.5. Controlabilidad

DEFINICIÓN 3.5. De la teoría de sistemas lineales, el concepto de **controlabilidad** se refiere a determinar si, a partir de una condición inicial  $x_0$  es posible llevar el vector de estado al origen  $x = 0$  en un tiempo finito, usando la entrada de control  $u(t)$  [75].

#### Controlabilidad en sistemas lineales

Considerando el siguiente sistema lineal

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (3.22)$$

Linealizando alrededor de  $(x, u) = (0, 0)$ , donde

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,0)=(0,0)} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,0)=(0,0)} \quad (3.23)$$

El par  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad,

$$C = \left( \mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right), \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np}$$



donde es de rango  $n$  pleno.

### Controlabilidad de sistemas no lineales

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.24)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control, las funciones  $\mathbf{f}(x)$  y  $\mathbf{g}(x)$  son campos vectoriales suaves.

DEFINICIÓN 3.6. *El sistema 3.24 es controlable si la matriz  $[\mathcal{C}_{f,g}]$*

$$\mathcal{C}_{f,g} = [\mathbf{g}(x), ad_f \mathbf{g}(x), \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}(x)]$$

donde

$$ad_f \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}(x)}{\partial x} \mathbf{f}(x) - \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \mathbf{g}(x)$$

es de rango completo, es decir, el rango de  $\mathcal{C}_{f,g} = n$ , donde  $n$  es la dimensión del sistema.

### 3.2.6. Índice característico de controlabilidad

Considérese el siguiente sistema no lineal con una entrada y una salida dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, u \in \mathbb{R} \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde los términos  $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  son campos vectoriales suaves y la salida medible  $h(x(t))$  es una función suave tal que  $h(0) = 0$ . Ahora, sea  $L_f^l h(x)$  la  $l$ -ésima derivada de Lie de  $h(x)$  con respecto a  $f(x)$ .

Por otra parte, a partir de la definición de grado relativo se pueden extender al caso multiva-

riable. Considérese el sistema no lineal con múltiples entradas y múltiples salidas dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) & x(t) \in \mathbf{R}^{n \times 1}, u \in \mathbf{R} & 1 \leq i \leq m \\ y_j(t) &= h_j(x(t)), & & 1 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (3.26)$$

con  $f, g_1, \dots, g_m$  como campos vectoriales suaves y  $h_1, \dots, h_m$  son funciones suaves de valor real. Además, el campo vectorial  $g_i(x)$  y las funciones  $h_j(x)$  son tal que  $\text{rango}\{g_1(0), \dots, g_m(0)\} = m$  y  $\text{rango}\{dh_1(0), \dots, dh_m(0)\} = m$ . Entonces los índices característicos de controlabilidad están definidos como sigue

DEFINICIÓN 3.7. *Los índices característicos de controlabilidad son un conjunto de  $m$  enteros  $\{r_1, \dots, r_m\}$  que están asociados al sistema 3.26 en una vecindad del origen  $U_0$  como*

$$\begin{aligned} L_{g_j} L_f^k h_i &= 0, & 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq r_i - 2, \quad \forall x \in U_0 \\ L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x) &\neq 0, & \text{para alguna } j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \forall x \in U_0 \end{aligned}$$

Además, el índice característico e controlabilidad  $r_i = \infty$ , si

$$L_{g_i} L_f^k h_i = 0, \quad \forall x \in U_0, \quad \forall k \geq 0$$

para  $1 \leq i \leq m$  [106].

### 3.3. Control por modos deslizantes

El control de sistemas no lineales con incertidumbre es uno de los temas principales de la teoría de control robusto. Debido a que no se dispone de un modelo matemático preciso de la planta a controlar. Esto puede deberse a una falta de conocimiento de la dinámica de la planta, relaciones complejas entre los componentes que interactúan o simplemente parámetros inciertos o perturbaciones desconocidas. Como resultado, en la formulación de cualquier problema de control, siempre hay una discrepancia entre la dinámica real de la planta y su modelo matemático

utilizado para el diseño del controlador. Diseñar leyes de control que proporcionen la eficiencia deseada del sistema en lazo cerrado en presencia de estas perturbaciones y/o incertidumbres paramétricas es un problema abierto en las investigaciones de los últimos años, generado un amplio interés en el desarrollo de los llamados métodos de control robustos, que pretenden resolver este problema.

Los diferentes enfoques tales como los basados en el control robusto adaptativo [107], el control  $H_\infty$  [108, 109], las técnicas predictivas [110] y el control de modo deslizante (SMC) son los más utilizados. La teoría de control  $H_\infty$  es una herramienta que permite atacar el problema de una manera muy general, sin embargo es necesario que los sistemas a controlar sean lineales o puedan ser razonablemente descritos mediante un sistema o conjunto de sistemas lineales en una determinada zona de operación. El control robusto  $H_\infty$  está en la actualidad sólidamente fundamentada, si bien no son frecuentes las aplicaciones a problemas de índole práctica. Esto es debido a que la formulación matemática de estos problemas en el marco no lineal conduce por lo general a expresiones matemáticas complejas que no permiten a menudo obtener soluciones explícitas que resulten fáciles de implementar [111].

El control basado en modos deslizantes (CMD) se desarrolló en la Unión Soviética en la década de los 60s con la aparición del concepto matemático de los "Sistemas de Estructura Variable" (VSS por sus siglas en inglés) considerándose el modo principal de operación para este tipo de sistemas [112]. El control basado en modos deslizantes se ha empleado en diversos sistemas, por las ventajas que presenta desde el punto de vista de robustez en aplicaciones para el control de sistemas no lineales, variantes en el tiempo, sistemas con incertidumbres y con perturbaciones externas [113]. Siendo el control de modos deslizantes el que ha dado mejores resultados para resolver problemas con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas [11–13]. Además, el control por modos deslizantes permite la separación del movimiento del sistema completo en componentes parciales e independientes de dimensiones inferiores, y reduce la sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones.

La idea básica del control por modo deslizante (SMC) consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una variedad o superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. Así, el

comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados.

Sin embargo, su diseño requiere el conocimiento de la cota de las perturbaciones, lo que se considera una tarea difícil desde el punto de vista práctico. Además, la principal desventaja del SMC, es el denominado efecto de “*chattering*” que es la existencia de oscilaciones indeseables de alta frecuencia en el control. Estas oscilaciones dan por resultado una baja precisión en el control, alta disipación de potencia en los circuitos conmutadores y desgaste en los componentes mecánicos [21]. Recientemente se han realizado diversos trabajos, en los cuales se trata solucionar este problema mediante el remplazo de la función de control discontinuo por una de saturación [20], el uso de observadores [21] y el control de modo deslizante de orden superior (HOSM) [18]. Los modos deslizantes de orden superior (HOSM) permiten reducir el inconveniente del “*chattering*” con muy buenas características de robustez, restringiendo el movimiento del sistema sobre la variedad de deslizamiento, estableciendo condiciones de mayor suavidad al mismo.

Entre los algoritmos de modo deslizante de orden superior, el algoritmo de control “super-twisting” (STA) es uno de los más populares debido a que es robusto y con una disminución considerable del efecto de “*chattering*”, lo que lo hace atractivo para el control [14].

Sin embargo, el controlador STA necesita conocer la cota de las incertidumbres y perturbaciones presentes en el sistema, las cuales no son siempre medibles o fáciles de estimar. Al sobreestimar la cota de la perturbación, la ganancia del controlador es mayor de la necesaria. Como solución, las técnicas de ganancia adaptativa buscan ajustar continuamente el esfuerzo del controlador, por lo tanto atenuar el “*chattering*” [15–17]. Se han propuesto varios controladores con ganancias adaptativas basados en la función de Lyapunov [8, 23, 25, 114, 115]. El enfoque en los trabajos de [23] y [8] permiten llevar a cero la variable deslizante en presencia de las perturbaciones e incertidumbres; sin embargo, se sobre-estima la ganancia adaptativa. Un enfoque basado en disminuir la ganancia cuando la variable deslizante tiende a cero, se ha desarrollado en los trabajos de [8, 25] y [19] para superar este problema. Sin embargo, estas estrategias de control requieren numerosas ganancias/parámetros, y la selección de sus valores carece de un método sistemático de ajuste.

Por lo que este trabajo se propone una modificación del control Super Twisting propuesto

en [116], en la cual únicamente se requiere de un parámetro para sintonizar el control, lo cual facilita la implementación y sintonización en un sistema físico. Posteriormente, se propone una ley de adaptación para la ganancia del control super-twisting modificado, obteniendo una ganancia dinámica. El algoritmo super-twisting de control modificado se implementa para el seguimiento de trayectoria de robots móviles terrestres en el capítulo 4 y el algoritmo super-twisting modificado con la ley de adaptación para la ganancia se verifica en robots móviles aéreos capítulo 5.

### 3.3.1. Fundamentos del control basado en modos deslizantes

El diseño de la ley de control de modos deslizantes se puede dividir en dos etapas:

- Etapa 1. consiste en la construcción de una superficie de deslizamiento adecuada para que la distancia de la dinámica del sistema confinado a la superficie deslizante  $S$  produzca un comportamiento deseado.
- Etapa 2. Implica el diseño de una ley de control discontinuo que fuerce a la trayectoria del sistema a la superficie deslizante y la mantenga ahí.

De este modo, es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables. Consideremos el sistema no lineal dado por

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)u(t) \quad (3.27)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$  y  $g(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . La componente de retroalimentación discontinua (ver Figura 3.1) está dada por

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \sigma_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.28)$$

donde  $\sigma_i(x)$  es la  $i$ -ésima superficie deslizante, dada por

$$\sigma(x) = \{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_m(x)\}^T = 0 \quad (3.29)$$

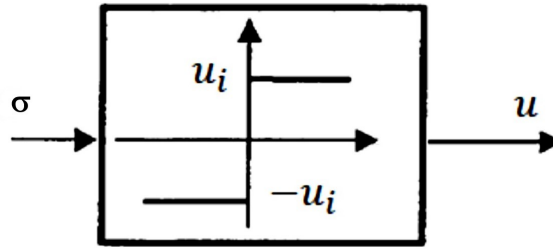


Figura 3.1: Función Signo

El diseño de la ley de control discontinuo que fuerce la trayectoria del sistema a la superficie deslizante y la mantenga ahí esta dada por

$$u = u_i \text{sign}(\sigma)$$

En la Figura 3.2 se muestra la representación del modo de deslizamiento, donde el comportamiento en la trayectoria del estado se desliza sobre la superficie y converge a un estado estable incluido en dicha superficie. También, se puede observar la dinámica del sistema cuando se encuentra por encima de la superficie de deslizamiento ( $\sigma(x) > 0$ ), la cual se encuentra denotada como  $x_0$  y cuando se encuentra por debajo de la región de deslizamiento ( $\sigma(x) < 0$ ).

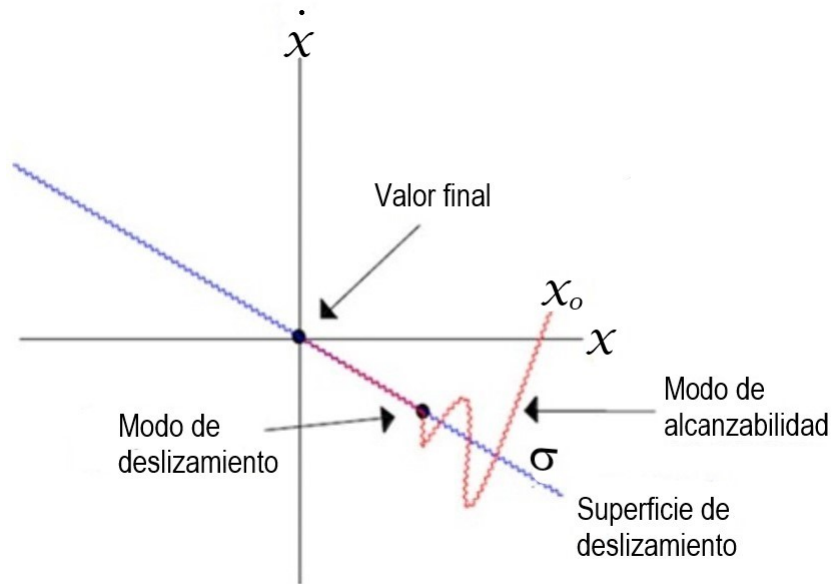


Figura 3.2: Representación del Modo deslizante

Para mantener el régimen de deslizamiento ideal, la señal de control debe ser capaz de con-

mutar con una frecuencia infinita entre valores positivos a negativos, esto produce el efecto de “*chattering*”, así que las trayectorias oscilan alrededor de la superficie de deslizamiento como se muestra en la Figura 3.2. La presencia de estas oscilaciones pueden excitar dinámicas no modeladas, reducir la exactitud del control, introducir grandes pérdidas en circuitos eléctricos de potencia y producir fallas en dispositivos mecánicos. Este efecto puede reducirse por diferentes métodos como:

- **Reemplazo de la función de control discontinuo por una de saturación** [20]. En este caso se reemplaza la parte discontinua por función de saturación, la cual aproxima el término  $sign(u)$  en un límite de la superficie discontinua  $u = 0$ . Sin embargo, la convergencia del vector de estado permanece en la vecindad de la superficie de deslizamiento, cuya amplitud depende de una constante  $\delta$ , dada por

$$sat(\sigma, \delta) = \begin{cases} sign(\sigma) & \text{si } |\sigma| > \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} & \text{si } |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (3.30)$$

donde  $0 < \delta < 1$ . Por lo tanto, el comportamiento del controlador se ve afectado como se muestra en Figura 3.3.

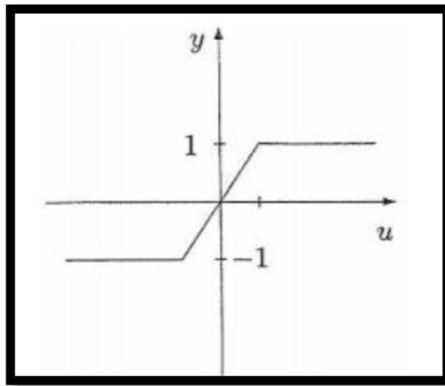


Figura 3.3: Función de Saturación

- **Método basado en observadores** Este método permite pasar por la dinámica de la planta generando un filtro para efecto de “*chattering*”. Este enfoque reduce el problema del control

robusto al problema de la estimación robusta exacta y, en consecuencia, puede deteriorar la robustez con respecto a las incertidumbres de la planta debido al desajuste entre el observador y la dinámica de la planta. Además, el observador necesita una convergencia en tiempo finito, por lo general se utilizan observadores basados en modos deslizantes [21].

- **Control de modo deslizante de orden superior (HOSM)** [18]. Permite la convergencia en tiempo finito a cero de la variable deslizante y sus derivadas. Este enfoque se desarrolló activamente durante las últimas dos décadas [9], [117], [22], [118] no solo como un medio de atenuación del “*chattering*”, sino también como medio de control robusto de plantas de grado relativo dos y superior. Teóricamente, los modos de deslizamiento de orden superior suprimirían totalmente el efecto de “*chattering*” en el modelo del sistema (pero no en el sistema real), cuando se incluyen actuadores y sensores o se tienen incertidumbres en el modelo de la planta.

Existen diferentes enfoques para el análisis del efecto de “*chattering*” que tienen en cuenta diferentes causas para las oscilaciones: la presencia de actuadores y sensores rápidos [119], [120] la existencia de retardo de tiempo e histéresis [12], [17], entre otras. En este trabajo se utiliza el control por modos deslizante de segundo orden (2-SMC), en específico el super-twisting por sus características de robustez en aplicaciones no lineales con salidas de grado relativo 1 y 2. El control de super-twisting tiene las siguientes propiedades:

- El control de super-twisting es un control de modos deslizantes de segundo orden, donde  $\sigma$  y  $\dot{\sigma} \rightarrow 0$  en tiempo finito.
- El control de super-twisting es continuo.

Con base en las investigaciones que se han llevado a cabo sobre los modos deslizantes, el controlador super-twisting es eficiente y suficiente para estabilizar en tiempo finito la dinámica de una planta, mejorar la robustez de la planta, y este ha sido implementado en sistemas electromecánicos y no es difícil su implementación.



### 3.4. Algoritmo Super Twisting

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (3.31)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control. Las funciones  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  son funciones suaves; además,  $f(x, t)$  contiene los términos inciertos/perturbaciones y  $g(x, t) \neq 0$ .

**Hipótesis 10.** *La variable deslizable  $s = s(x, t)$  es diseñada tal que la dinámica deseada de (3.31) se logre cuando  $s(x, t) = 0$ . Además, el grado relativo del sistema (3.31) es igual a 1 con respecto a la variable deslizando y la dinámica interna es estable.* ■

**Hipótesis 11.** *La dinámica de la variable deslizando es la siguiente*

$$\dot{s} = a_0(x) + b_0(x)u + \rho(t) \quad (3.32)$$

con  $a_0(x)$  y  $b_0(x)$  son funciones conocidas.  $\rho(t)$  representa las incertidumbres perimétricas y las perturbaciones externas. ■

**Hipótesis 12.** *La perturbación  $\rho(t)$  y su derivada  $\dot{\rho}(t)$  son acotadas, es decir, existe  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tal que,  $|\rho(t)| \leq \delta_1$  y  $|\dot{\rho}(t)| \leq \delta_2$ .* ■

Considere la siguiente entrada de control  $u$  definida como

$$u = \frac{1}{b_0(x)} (-a_0(x) + v) \quad (3.33)$$

que linealiza la dinámica de la variable deslizando cuando no está actuando ninguna perturbación/incertidumbre, y la entrada de control “ nueva ”  $v$  está dada por

$$v = -2L|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2}{2}\text{sign}(s)d\tau \quad (3.34)$$

Entonces, el control ( $u$ ) esta basado en el algoritmo super-twisting [18] donde  $L$  es la ganancia. Ba-

jo el control (3.33)-(3.34), se deduce que la dinámica de la variable deslizante  $s(x, t)$  es la siguiente

$$\dot{s} = -2L|s|^{1/2}\text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2}{2}\text{sign}(s)d\tau + \rho(t) \quad (3.35)$$

Teniendo en cuenta que el control (3.34) solo depende de la ganancia  $L$ , que simplifica su sintonización. Considere la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= s \\ z_2 &= -\int_0^t \frac{L^2}{2}\text{sign}(s)d\tau + \rho(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Entonces, la dinámica de  $s$  (3.35) se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2L|z_1|^{1/2}\text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{L^2}{2}\text{sign}(z_1) + \dot{\rho}(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Significa que el sistema en lazo cerrado (3.35) es equivalente al sistema (3.37). Entonces, la prueba de convergencia al origen se da de la siguiente manera

**TEOREMA 3.1.** *Considere el sistema (3.32) en lazo cerrado con la entrada de control (3.34). Además, se supone que se cumple la hipótesis 3, donde la perturbación y su derivada son acotadas. Entonces, los estados del sistema en lazo cerrado (3.33) convergen a las referencias dadas en tiempo finito en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas, para  $L > 0$  lo suficientemente grande. ■*

*Demostración.* Se define el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |z_1|^{1/2}\text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= \frac{z_2}{L} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $L > 0$ . A partir del sistema (3.37), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{L}{2|\xi_1|}(-2\xi_1 + \xi_2) \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{L}{2|\xi_1|} \left( -\xi_1 + \frac{2|\xi_1|\dot{\rho}(t, x)}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Entonces, el sistema (3.39) se puede escribir como

$$\dot{\xi} = \frac{L}{2|\xi_1|} \{(\mathbf{A} - \mathbf{S}_\infty^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C})\xi + \Phi\} \quad (3.40)$$

donde

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1, 0], \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2|\xi_1|\dot{\rho}(t, x)}{L^2} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  una matriz simétrica positiva definida que se obtiene mediante la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$\mathbf{S}_\infty + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_\infty + \mathbf{S}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0. \quad (3.41)$$

Ahora, se analiza la convergencia de la dinámica de seguimiento (3.39), considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{(\xi)} = \xi^T \mathbf{S}_\infty \xi \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta que  $V_{(\xi)}$  es continua y diferenciable en todas partes excepto en el conjunto  $\phi = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 | \xi_1 = 0\}$ . Dado que las trayectorias del sistema no permanecen a  $\phi$  antes de alcanzar el origen, la derivada del tiempo de  $V_{(\xi)}$  puede calcularse de la manera habitual en todas partes, excepto cuando las trayectorias se cruzan en  $\phi$ . Si las trayectorias alcanzan el origen después de un tiempo  $T$ , permanecerán ahí.

La derivada del tiempo de  $V_{(\xi)}$  en las trayectorias de (3.39) es la siguiente

$$\dot{V}_{(\xi)} \leq \frac{L}{2|\xi_1|} \{-\xi^T \mathbf{S}_\infty \xi + 2\xi^T \mathbf{S}_\infty \Phi\} \quad (3.43)$$

Considerando la norma cuadrada en el término no lineal  $2\xi^T \mathbf{S}_\infty \Phi$ , y la cota del término que

incluye la perturbación satisfice  $|\Phi(t, \xi)| \leq \delta|\xi|$ , se obtiene

$$\dot{V}_{(\xi)} \leq \frac{L}{2|\xi_1|} \{-\xi^T \mathbf{S}_\infty \xi + 2\|\mathbf{S}_\infty\|\delta\|\xi\|^2\} \quad (3.44)$$

La función  $V_{(\xi)}$  satisfice la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(\mathbf{S}_\infty)\|\xi\|^2 \leq V_{(\xi)} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_\infty)\|\xi\|^2 \quad (3.45)$$

donde  $\lambda_{\min}(\mathbf{S}_\infty)$  y  $\lambda_{\max}(\mathbf{S}_\infty)$  son el mínimo y máximo valor propio de la matriz  $\mathbf{S}_\infty$  respectivamente; se obtiene

$$|\xi_1| \leq \|\xi\| \leq \frac{V_{(\xi)}^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)} \quad (3.46)$$

Entonces, se obtiene que

$$\dot{V}_{(\xi)} \leq -\gamma V_{(\xi)}^{1/2} \quad (3.47)$$

donde

$$\gamma = \frac{L - \mu}{2\lambda_{\min}^{-1/2}(\mathbf{S}_\infty)}, \quad \mu = \frac{2\|\mathbf{S}_\infty\|\delta}{\lambda_{\min}(\mathbf{S}_\infty)}$$

Seleccionando  $L$  lo suficientemente grande, tal que la desigualdad  $L > \mu$  se satisfaga, entonces  $\dot{V}_{(\xi)}$  es negativa definida,  $V_{(\xi)}$  es una función fuerte de Lyapunov y las trayectorias convergen en tiempo finito. Con el fin de estimar el tiempo de convergencia, considere que la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2}, \quad v(0) = v_0 \quad (3.48)$$

cuya solución es

$$v(t) = \left[ v_0^{1/2} - \frac{1}{2}\gamma t \right]^2 \quad (3.49)$$

Considerando el principio de comparación [105], donde  $V_{(\xi)} < v(t)$ , cuando  $V_{(\xi)}(0) < v_0$ , entonces  $\xi$  converge a cero en tiempo finito y alcanza este valor en

$$T \leq \frac{2V_{(\xi, L)}^{1/2}(0)}{\psi} \quad (3.50)$$

Como resultado, cuando los estados  $\xi_1$  y  $\xi_2$  convergen a cero en tiempo finito. Esto implica que los estados  $z_1, z_2$  también convergen a cero en tiempo finito.  $\square$

Se ha propuesto un nuevo algoritmo de control super-twisting, facilitando la sintonización de las ganancias que dependen de un solo parámetro. Sin embargo, es necesario conocer las cotas de las perturbaciones así como las de su derivada para poder encontrar las ganancias adecuadas para lograr los objetivos de control. En muchos de los casos las perturbaciones son desconocidas o variantes en el tiempo, por lo tanto, se requieren valores de los parámetros de las ganancias suficientemente grandes para contrarrestar el efecto de la perturbación en el sistema, lo que conlleva a la sobre estimación de las ganancias. En consecuencia, se incrementa el efecto del “*chattering*”, este inconveniente es una de las razones principales por las que se han desarrollado leyes de adaptación para las ganancias.

### 3.5. Control Adaptativo del algoritmo super-twisting

La principal ventaja para los controladores adaptativos es: que la ganancia es dinámica de acuerdo con la magnitud de las incertidumbres y perturbaciones que puede reducir el efecto de “chattering” mientras conserva las propiedades de SMC [44].

A continuación se presenta la ley de adaptación de la ganancia para el algoritmo super-twisting propuesto en esta sección.

#### 3.5.1. Control adaptable del algoritmo super-twisting modificado

Partiendo de la ecuación (3.37) considerando  $L$  como una función del tiempo, para representarlo en forma conveniente para el análisis de Lyapunov, considere el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\xi_1 &= |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= \frac{z_2}{L(t)}\end{aligned}\quad (3.51)$$

donde  $L(t)$  es una función del tiempo y satisface  $L(t) \geq L^* > 0$ .  $L^* > 0$  arbitrariamente pequeña.

A partir del sistema (3.51), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{L(t)}{2|\xi_1|}(-2\xi_1 + \xi_2) + \rho \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{L(t)}{2|\xi_1|}(-\xi_1) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\xi_2\end{aligned}\quad (3.52)$$

Entonces, el sistema (3.52) se puede escribir como

$$\dot{\xi} = \frac{L(t)}{2|\xi_1|}(\mathbf{A} - \mathbf{S}_\infty^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C})\xi - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\xi + \mathbf{C}^T\rho\quad (3.53)$$

donde

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  una matriz simétrica positiva definida que se obtiene mediante la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$\mathbf{S}_\infty + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_\infty + \mathbf{S}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0. \quad (3.54)$$

Considerando el modo deslizante real de segundo orden (2-SM) a partir de  $|s| \leq \mu_1$  y  $|\dot{s}| \leq \mu_2$  [121], considere la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.8. *Considere el sistema (3.52), y suponga el modo deslizante real de segundo orden 2-SM se ha establecido. Entonces, existe  $\mu^* > 0$  y  $V_{(\xi)} = \xi^T \mathbf{S}_\infty \xi$ , tal que  $\xi \in \Omega^*$  con  $\Omega^* = \{\xi | V_{(\xi)} < \mu^*\}$ .*

■

El tamaño del dominio del modo deslizante real de segundo orden  $\Omega^*$  determina la precisión práctica de la ley de ganancia adaptativa. Como se muestra mas adelante, debido a la ley de adaptación de la ganancia, y dado que las perturbaciones e incertidumbres son desconocidas, la ganancia puede ser demasiado pequeña en comparación con las perturbaciones e incertidumbres; el control asegura que las trayectorias pueden dejar este dominio a un dominio más grande  $\Omega^+$  en tiempo finito. Una vez que las trayectorias se encuentra en el dominio  $\Omega^+$ , las trayectorias regresan a  $\Omega^*$  tan pronto la ganancia de adaptación compensa el efecto de las perturbaciones como se puede ver en la Figura 3.4.

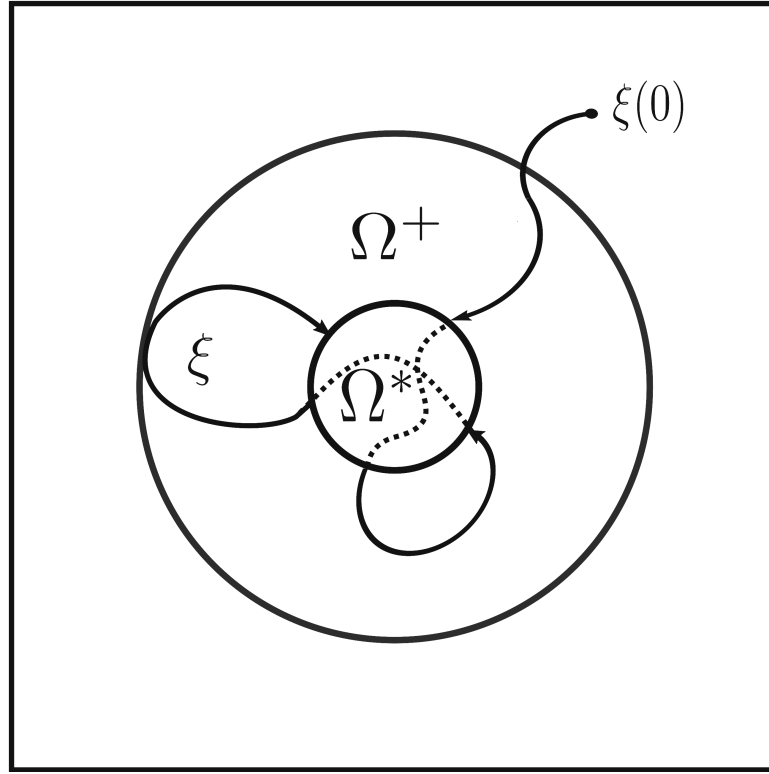


Figura 3.4: Trayectorias del sistema que evolucionan en el dominio de  $\Omega^+$  y  $\Omega^*$ .

Ahora, se establece el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2. *Considere que el sistema no lineal (3.32). Se supone que la perturbación  $\rho(x, t)$  satisface la hipótesis 12. Entonces, el modo deslizante real de segundo orden se establece bajo la acción de la ley de control*

$$u = \frac{1}{b_0(x)} \left[ -a_0(x) - 2L(t)|s|^{1/2}\text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2}\text{sign}(s(\tau))d\tau \right]$$

Con la siguiente ley de adaptación ( $L(0) > L^*$ )

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L(t) - L^*| + \frac{L(t)}{2}|s|^{1/2}}{(L(t) - L^*) + \frac{2}{L^2(t)} \left( |s|^{1/2}\text{sign}(s) + \frac{1}{L(t)} \int_0^t L^2(\tau)\text{sign}(s(\tau))d\tau \right) \left( -\int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2}\text{sign}(s(\tau))d\tau \right)} & \text{if } L(t) \geq L^* \\ L^* & \text{if } L < L^* \end{cases} \quad (3.55)$$



con  $L^* > 0$  y  $k > 0$  definida tal que  $k < \sqrt{2}(\bar{L}\eta_1 - \eta_2)$ , con

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\lambda_{max}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)}{2} \\ \eta_2 &= \frac{\|\mathbf{S}_\infty \mathbf{C}^T\| \delta_1}{\lambda_{min}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)} \\ \bar{L} &> \frac{\eta_2}{\eta_1}.\end{aligned}\tag{3.56}$$

El parámetro  $L^*$  se introduce para garantizar que  $L(t)$  tome valores positivos. Se escoge arbitrariamente pequeño. ■

*Demostración.* El primer paso consiste en demostrar que el sistema (3.52) converge hacia el origen. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{(\xi, L)} = \xi^T \mathbf{S}_\infty \xi + \frac{1}{2} (L(t) - L^*)^2\tag{3.57}$$

con

$$V_{(\xi)} = \xi^T \mathbf{S}_\infty \xi, \quad V_{(L)} = \frac{1}{2} (L(t) - L^*)^2.$$

Considerando la derivada del tiempo de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (3.52), se obtiene

$$\dot{V}_{(\xi, L)} = \frac{L(t)}{2|\xi_1|} [-\xi^T \mathbf{S}_\infty \xi - \xi^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \xi] + 2\xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{C}^T \rho + \dot{L}(t) \left( (L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi \right)\tag{3.58}$$

La función  $V_{(\xi)}$  satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{min}(\mathbf{S}_\infty) \|\xi\|^2 \leq V_{(\xi)} \leq \lambda_{max}(\mathbf{S}_\infty) \|\xi\|^2\tag{3.59}$$

donde  $\lambda_{min}(\mathbf{S}_\infty)$  y  $\lambda_{max}(\mathbf{S}_\infty)$  son los los valores propios mínimo y máximo de la matriz  $\mathbf{S}_\infty$  respectivamente; se tiene

$$|\xi_1| \leq \|\xi\| \leq \frac{V_{(\xi)}^{1/2}}{\lambda_{min}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)}\tag{3.60}$$

Considerando la hipótesis 12, es decir,  $|\rho| \leq \delta_1$ , tomando en cuenta (3.58) y (3.59), se obtiene

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -L(t)\eta_1 V_{(\xi)}^{1/2} - \frac{L(t)}{2} |\xi_1| + \eta_2 V_{(\xi)}^{1/2} + \dot{L}(t) \left[ (L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi \right] \quad (3.61)$$

donde

$$\eta_1 = \frac{\lambda_{max}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\|\mathbf{S}_\infty \mathbf{C}^T\| \rho_M}{\lambda_{min}^{1/2}(\mathbf{S}_\infty)}.$$

Al sumar y restar el término  $\frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*|$  en (3.61), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(\xi,L)} \leq & -\{L(t)\eta_1 - \eta_2\} V_{(\xi)}^{1/2} - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| - \frac{L(t)}{2} |\xi_1| \\ & + \dot{L}(t) \left[ (L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi \right] + \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entonces,

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\psi V_{(\xi)}^{1/2} - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| + \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| - \frac{L(t)}{2} |\xi_1| + \dot{L}(t) \left[ (L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi \right] \quad (3.63)$$

con  $\psi = L(t)\eta_1 - \eta_2$ . Usando la desigualdad de Jensen

$$(|a|^q + |b|^q)^{1/q} \leq |a| + |b|, \quad q > 0$$

y seleccionando  $a = V_{(\xi)}$ ,  $b = V_{(L)}$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , entonces se tiene

$$-\psi V_{(\xi)}^{1/2} - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \leq -\phi V_{(\xi,L)}^{1/2} \quad (3.64)$$

con  $\phi = \min\left(\psi, \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ . Seleccionando la ley de adaptación  $\dot{L}$  como

$$\dot{L}(t) = \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| + \frac{L(t)}{2} |\xi_1|}{(L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} (\xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi)}, \quad L(t) > L^* \quad (3.65)$$

Considerando que la ley de adaptación (3.65) funciona en la ganancia adaptativa  $L(t)$ , la ecuación (3.63) se puede reducir como sigue

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\phi V_{(\xi,L)}^{1/2}. \quad (3.66)$$

Ahora, el estudio se concentrara en el término  $\psi$ , y su signo. Se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Especialmente, se analiza el comportamiento de la derivada del tiempo de la función de Lyapunov. Para asegurar la estabilidad de  $\dot{V}_{(\xi,L)}$ , considera la ecuación (3.66)

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\psi V_{(\xi)}^{1/2} - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \quad (3.67)$$

Además, usando (3.67), la ley de la ganancia adaptativa  $L(t)$  es acotado, lo que se derminará más adelante. Considere los siguientes casos.

**Caso 1.** Suponga que  $L(t) \geq \bar{L}$  y  $\bar{L} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ ; entonces,  $\psi = \bar{L}\eta_1 - \eta_2 > 0$ . Resulta los siguiente

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\phi V_{(\xi,L)}^{1/2} \quad (3.68)$$

Recordando  $\phi = \min(\psi, \frac{k}{\sqrt{2}})$ .  $\phi > 0$ ; Esto implica que los estados  $\xi$  convergen en tiempo finito al domino  $\Omega^*$  que es un conjunto compacto que contiene al origen.

**Caso 2.** Se supone  $L^* < L(t) < \bar{L}$  esto implica  $\psi < 0$ . A partir de (3.67),  $\dot{V}_{(\xi,L)}$  se puede volver indefinido. Tan pronto como el estado  $\xi$  se incremente, se regresa al Caso 1. Entonces, el estado  $\xi$  comienza a converger a  $\Omega^*$  en tiempo finito y así sucesivamente.

Ahora, el dominio  $\Omega^*$  (Definición 1) se determina el valor de  $\mu^*$ . Considere el Caso 2, a partir de la ecuación (3.67), se tiene

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\psi V_{\xi}^{1/2} - \frac{k}{2} (L(t) - L^*) < 0 \quad (3.69)$$

Se tiene

$$V_{(\xi)} < \frac{k^2}{2\psi^2} |\bar{L} - L^*|^2 =: \mu^* \quad (3.70)$$

donde  $\Omega^* = \{\xi \mid V_{(\xi)} \leq \mu^*\}$  es un conjunto compacto que contiene el origen.

El comportamiento de  $\dot{L}$  es evaluado en el máximo valor de  $|L|$  cuando  $L \rightarrow L^*$  y  $\xi \rightarrow 0$ . Considere la ecuación (3.67) en el Caso 1

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\psi V_{(\xi)}^{1/2} - M|L(t) - L^*| \leq -\phi V_{(\xi,L)}^{1/2} < 0$$

donde  $\phi = \min(\psi, \frac{k}{\sqrt{2}})$  es la razón de convergencia de los estados  $(\xi, L)$  en el punto de equilibrio  $(0, L^*)$ .

Definiendo  $\alpha_1 = M|L(t) - L^*|$  donde  $L(t) > \bar{L} > 0$  y  $\alpha_2 = \psi \sqrt{\xi^T \mathbf{S}_\infty \xi} = \psi \|\xi\|$ . Es claro que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones lineales de  $L(t)$  y  $\|\xi\|$ , respectivamente, obteniendo

$$\dot{V}_{(\xi,L)} \leq -\psi \|\xi\| - M|L(t) - L^*|$$

Seleccionando  $L^*$  y  $k$  tal que

$$\psi > M = \frac{k}{\sqrt{2}},$$

esto implica que el estado  $\xi$  converge a cero más rápido que  $L(t)$  converge a  $L^*$ . Considerando este resultado, se determina el límite de  $\dot{L}$  como sigue

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow L^*, \xi \rightarrow 0} \dot{L}(\xi, L) &= \lim_{L \rightarrow L^*, \xi \rightarrow 0} \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L - L^*|L + \frac{L^2|\xi_1|}{2}}{L(L - L^*) - 2\xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi} \\ &= \lim_{L \rightarrow L^*} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-M|L - L^*|L + \frac{L^2|\xi_1|}{2}}{L(L - L^*) - 2\xi^T \mathbf{S}_\infty \mathbf{B} \mathbf{B}^T \xi} \\ &= \lim_{L \rightarrow L^*} \frac{-M|L - L^*|L}{L(L - L^*)} \quad (\text{since } L - L^* > 0) \\ &= \lim_{L \rightarrow L^*} (-M) = -M, \end{aligned} \tag{3.71}$$

Entonces, no existe singularidad en la ecuación (3.67) cuando  $L \rightarrow L^*$  y  $\xi \rightarrow 0$ . Además, cuando  $\psi = L(t)\eta_1 - \eta_2 < 0$ , el estado  $\xi$  se incrementa, en lugar de tender a cero, y viceversa,  $L(t)$  se incrementa hasta que  $\psi$  es positiva y mayor que  $M$ , entonces se regresa al Caso 1.

Ahora, a partir (3.51)-(3.54), se obtiene que  $s$  y  $\dot{s}$  convergen a cero en tiempo finito. Además, cuando  $\xi_2 \rightarrow 0$ , es posible estimar la perturbación como se muestra a continuación

$$\rho(t) = \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s(\tau)) d\tau \quad (3.72)$$

□

### 3.6. Conclusión

En este capítulo se presentaron las definiciones y conceptos básicos de los sistemas no lineales, permitiendo introducir las ideas y los conceptos matemáticos básicos para entender el control por modos deslizantes con adaptación, destacándose sus atractivas características de robustez y la posibilidad de ser aplicados sistemas no lineales. Posteriormente, se planteó el problema para el algoritmo de control super twisting, se propuso el uso de una ganancia, permitiendo mostrar su estabilidad y convergencia al origen por medio de una función fuerte de Lyapunov. Finalmente, se desarrolló una ley de adaptación para la ganancia del control lo que permitió adaptar la ganancia en términos de las variaciones de la perturbación, sin sobrestimar este valor. Además, a través de este algoritmo se puede estimar la perturbación cuando los estados convergen a cero.

# Capítulo 4

## Diseño del control super-twisting modificado para el robot móvil terrestre bajo la estrategia líder-seguidor

### 4.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el modelo matemáticos del robot móvil terrestre con tracción diferencial, se propone el diseño del control bajo la estrategá líder-seguidor con la propuesta del algoritmo super-twisting modificado propuesto en el capitulo 3. Finalmente se muestran los resultados obtenidos en experimentación con dos robots diferenciales llamados e-puck.

### 4.2. Modelo matemático del robot diferencial

En un esquema líder-seguidor con robots idénticos se presenta el modelo cinemático del  $i$ -ésimo robot, el cual es el siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos \theta_i \\ v_i \sin \theta_i \\ \omega_i \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde  $x_i, y_i$  son las coordenadas Cartesianas a partir del centro del masa de cada robot,  $\theta_i$  es el ángulo de orientación,  $v_i$  y  $w_i$  corresponden a la velocidad lineal y la velocidad angular respectivamente del  $i$ -ésimo robot como se muestra en la figura 4.1.

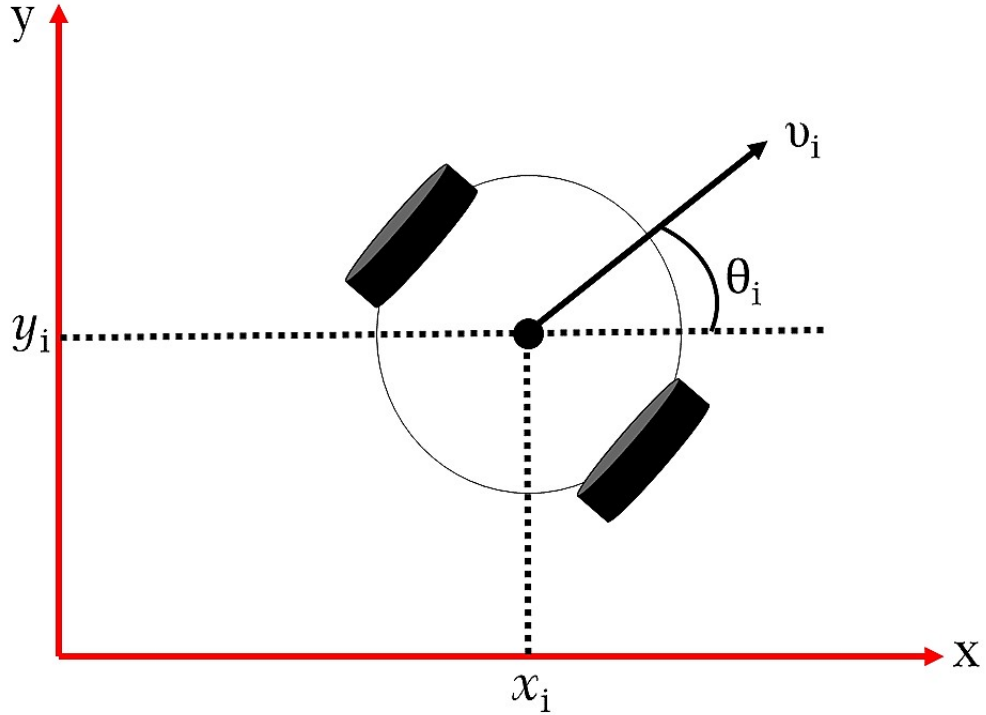


Figura 4.1: Differential mobile robot

Considerando la siguiente condición no-holonómica

$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0 \quad (4.2)$$

A partir de la condición (4.2), el modelo cinemático (4.1) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos \theta_i - \omega_i \sin \theta_i \\ v_i \sin \theta_i + \omega_i \cos \theta_i \\ \omega_i \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

El modelo dinámico considera la evolución de su posición  $x_i, y_i$  y orientación  $\theta_i$ , así como la

evolución de sus velocidades lineal  $v_i$ , angular  $w_i$  y sus respectivas aceleraciones  $\dot{v}_i$  y  $\dot{w}_i$ . Para la obtención de este modelo se consideran las siguientes hipótesis.

**Hipótesis 13.** *Los momentos de inercia del motor, el sistema de engranes y la rueda son despreciados.*

**Hipótesis 14.** *La masa y la inercia de los robots son los parámetros inciertos.*

**Hipótesis 15.** *Se considera que el centro de masa coincide con el centro geométrico de cada robot móvil.*

A partir de las hipótesis 13, 14 y 15, el modelo dinámico para N robots diferenciales es el siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos \theta_i - \omega_i \sin \theta_i \\ v_i \sin \theta_i + \omega_i \cos \theta_i \\ \omega_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_{1i} \\ \rho_{2i} \end{pmatrix}; i \in N = [1, \dots, N] \quad (4.4)$$

donde  $u_{1i}$  y  $u_{2i}$  son las entradas de control del robot  $i$ ,  $\rho_{1i}$  y  $\rho_{2i}$  son los términos inciertos/perturbaciones.

Considerando  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i, \theta_i, v_i, w_i)^T$  el vector de estados,  $\mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i})^T$  es el vector de entradas de control,  $\delta_i = (0, 0, 0, \rho_{1i}, \rho_{2i})^T$  es el vector de perturbaciones y  $\mathbf{Y}_i = (x_i, y_i)^T$  corresponde a la salida del sistema. Entonces, la ecuación (4.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_i &= f(\mathbf{X}_i) + g(\mathbf{X}_i)\mathbf{u}_i + \delta_i \\ \mathbf{Y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{X}_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde

$$f(\mathbf{X}_i) = \begin{pmatrix} v_i \cos \theta_i - \omega_i \sin \theta_i \\ v_i \sin \theta_i + \omega_i \cos \theta_i \\ \omega_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{X}_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Con el fin de verificar la controlabilidad del sistema (4.5), se considera la siguiente transformación  $\psi(X_i)$ :

$$\psi(\mathbf{X}_i) = \begin{pmatrix} h_{1i}(X_i) \\ h_{2i}(X_i) \\ L_f h_{1i}(X_i) \\ L_f h_{2i}(X_i) \\ \xi(X_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ v_i \cos \theta_i - \omega_i \sin \theta_i \\ v_i \sin \theta_i + \omega_i \cos \theta_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

En consecuencia,  $\psi(\mathbf{X}_i)$  es un difeomorfismo cuyo jacobiano es no singular, y los índices característicos de controlabilidad son  $\{2, 2\}$ . Por lo tanto, el sistema (4.5) es retroalimentación de estado parcialmente linealizable.

Con la siguiente transformación de coordenadas, la ecuación (4.5) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{3i} \\ \dot{z}_{2i} &= z_{4i} \\ \dot{z}_{3i} &= (u_{1i} + \rho_{1i}) \cos \xi_i - (u_{2i} + \rho_{2i}) \sin \xi_i - \omega_i z_{4i} \\ \dot{z}_{4i} &= (u_{1i} + \rho_{1i}) \sin \xi_i + (u_{2i} + \rho_{2i}) \cos \xi_i + \omega_i z_{3i} \\ \dot{\xi}_i &= -u_{1i} \sin(\xi_i) + u_{2i} \cos(\xi_i) \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir de (4.7) la dinámica interna es la siguiente

$$\dot{\xi}_i = -u_{1i} \sin(\xi_i) + u_{2i} \cos(\xi_i) \quad (4.8)$$

donde  $\xi_i$  es entrada acotada, estado acotado [122]. Además, el sistema tiene una fase mínima débil, debido a que su dinámica cero  $\dot{\xi}_i = \dot{\theta}_i = \omega_i$  es estable [105].

De la ecuación (4.8) se obtiene la siguiente entrada de control

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi_i & \sin \xi_i \\ -\sin \xi_i & \cos \xi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1i} + \omega_i z_{4i} + \phi_{1i} \\ v_{2i} - \omega_i z_{3i} + \phi_{2i} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

donde  $\phi_{1i} = -\rho_{1i} \cos \xi_i + \rho_{2i} \sin \xi_i$ ,  $\phi_{2i} = -\rho_{1i} \sin \xi_i - \rho_{2i} \cos \xi_i$ ,  $v_{1i}$  y  $v_{2i}$  son las nuevas entradas de

control.

Como resultado, de la linealización de la retroalimentación de estado, el sistema se expresa como

$$\dot{\mathbf{Z}}_i = \mathbf{A}\mathbf{Z}_i + \mathbf{B}(v_i + \delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{Z}_i = (z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, z_{4i})^T$ ,  $v_i = (v_{1i}, v_{2i})^T$  y  $\delta_i = (\phi_{1i}, \phi_{2i})^T$ . Entonces, el sistema resultante se encuentra en la forma de Brunosky y las perturbaciones y errores del modelado satisfacen la *condición de apareamiento* (“matching condition”), es decir, perturbaciones y errores ocurren en el mismo punto del lazo donde se aplica el control, permitiendo diseñar una ley de control robusto. Para poder diseñar la estrategia de control se introduce la siguiente hipótesis

**Hipótesis 16.** *Los términos de perturbación  $\delta_i$  y  $\dot{\delta}_i$  son acotadas, es decir, existe  $D_1 > 0$  y  $D_2 > 0$  tal que  $\|\delta_i\| \leq D_1$  y  $\|\dot{\delta}_i\| \leq D_2$ .*

### 4.3. Control se seguimiento bajo la estrategia Líder-seguidor

Esta sección presenta un esquema de ley de control líder-seguidor para lograr el seguimiento de la trayectoria de los robots móviles, donde la posición de cada robot está representada por

$$\dot{\mathbf{Z}}_i = \mathbf{A}\mathbf{Z}_i + \mathbf{B}(v_i + \delta_i)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathcal{C}\mathbf{Z}_i$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $v_i$  es la entrada de control. En la Figura 4.2 se muestra que el robot seguidor mantiene una separación específica ( $\Delta_{ij}$ ) con respecto al líder, y el robot líder sigue la trayectoria deseada.  $(x_i, y_i)$ .

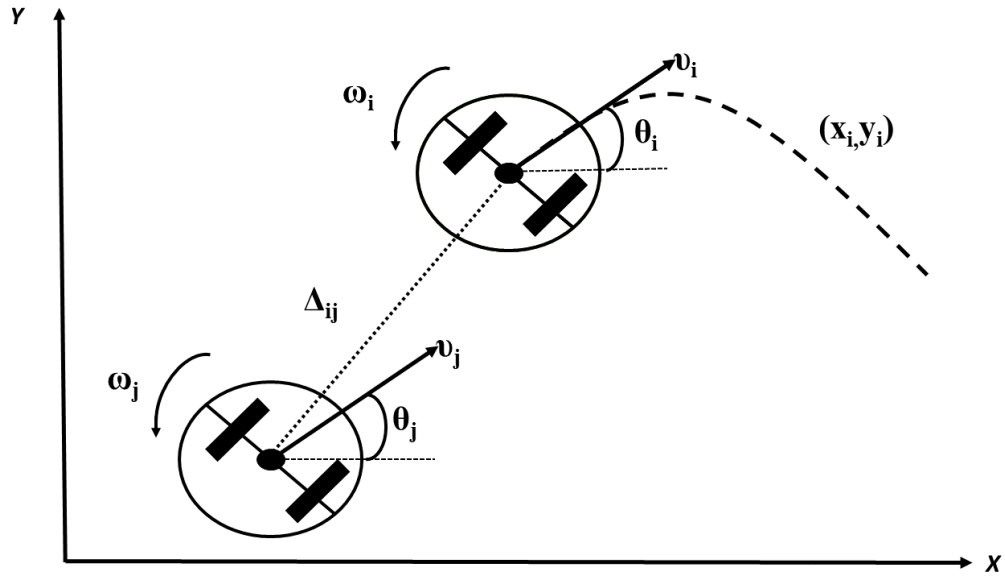


Figura 4.2: Estrategia Líder-Seguidor

Definiendo el error de seguimiento como

$$\mathbf{e}_j = (\mathbf{y}_j - \Delta_{ij} - \mathbf{y}_i), \quad i, j = 1, \dots, N, j \neq i \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{y}_i$  es la trayectoria de referencia seguida por líder y el seguidor. El término escalar  $\Delta_{i,j}$  es la distancia de separación entre líder y el seguidor que siguen la trayectoria deseada.

Entonces, la superficie deslizante diseñada para resolver el problema de seguimiento, bajo la estrategia líder-seguidor es la siguiente

$$\mathbf{S}_j = \Lambda_j (\mathbf{y}_j - \Delta_{i,j} - \mathbf{y}_i) + (\dot{\mathbf{y}}_j - \dot{\mathbf{y}}_i) \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{S}_j = [S_{1j} \ S_{2j}]^T$  es el vector cuyas componentes son las superficies deslizantes,  $\Lambda_j$  es una matriz diagonal cuyas componentes son constantes positivas.

La dinámica de la superficie con respecto al tiempo es la siguiente

$$\dot{\mathbf{S}}_j = \Lambda_j (\dot{\mathbf{y}}_j - \dot{\mathbf{y}}_i) + \mathbf{v}_j + \delta_j - \ddot{\mathbf{y}}_i \quad (4.13)$$

Definiendo la entrada de control auxiliar  $v_j$  para el sistema (4.10) como

$$v_j = -\Lambda_j(\dot{\mathbf{y}}_j - \dot{\mathbf{y}}_i) + \ddot{\mathbf{y}}_i - K_{1j}\Pi_j - K_{2j}\Gamma_j \quad (4.14)$$

$$\Pi_j = \begin{pmatrix} |S_{1j}|^{1/2} \text{sign}(S_{1j}) \\ |S_{2j}|^{1/2} \text{sign}(S_{2j}) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_j = \begin{pmatrix} \int_0^t \text{sign}(S_{1j}) d\tau \\ \int_0^t \text{sign}(S_{2j}) d\tau \end{pmatrix}$$

donde  $K_{1j} = 2\Upsilon_j I_{2 \times 2}$ ,  $K_{2j} = \frac{\Upsilon_j^2}{2} I_{2 \times 2}$ , y  $\Upsilon_j > 0$ . Note, que solo el parámetro ( $\Upsilon_j$ ) es requerido como ganancia, esto simplifica la implementación y la sintonización del control. Sustituyendo el control (4.14) en la ecuación (4.13), es posible escribir la dinámica de la superficie como

$$\dot{\mathbf{S}}_j = -K_{1j}\Pi_j - K_{2j}\Gamma_j + \delta_j \quad (4.15)$$

Introduciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \zeta_{1j} &= \mathbf{S}_j \\ \zeta_{2j} &= -\mathbf{K}_{2j}\Gamma_j + \delta_j \end{aligned} \quad (4.16)$$

Entonces, la dinámica del sistema en las nuevas coordenadas está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{1j} &= -\mathbf{K}_{1j}\Pi_j + \zeta_{2j} \\ \dot{\zeta}_{2j} &= -\mathbf{K}_{2j} \text{sign}(\zeta_{1j}) + \dot{\delta}_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora, considere el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_{1j} &= \Pi_j \\ \xi_{2j} &= \frac{\zeta_{2j}}{\Upsilon_j} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Entonces la dinámica de la ecuación (4.18) está dada por

$$\dot{\xi}_j = \frac{\Upsilon_j}{2\|\xi_{1j}\|} \begin{pmatrix} -2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \xi_j + \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \mathbf{B}\dot{\delta}_j \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

donde  $\xi_j = [\xi_{1j} \quad \xi_{2j}]^T$  y  $\dot{\xi}_j = [\dot{\xi}_{1j} \quad \dot{\xi}_{2j}]^T$ , representándolo de la siguiente manera

$$\dot{\xi}_j = \frac{1}{2\|\xi_{1j}\|} [\mathbf{A} - \mathbf{S}_{\Upsilon_j}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C}] \xi_j + \Phi_j \quad (4.20)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\Upsilon_j}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \mathbf{B}\dot{\delta}_j \end{pmatrix}$$

donde  $\Upsilon_j$  es una constante positiva arbitraria, y  $\mathbf{S}_{\Upsilon_j}$  es la solución de la siguiente matriz algebraica

$$\Upsilon_j \mathbf{S}_{\Upsilon_j} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{\Upsilon_j} + \mathbf{S}_{\Upsilon_j} \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{B} = 0 \quad (4.21)$$

**Hipótesis 17.**  $\Phi_j$  representa los términos inciertos cuyos componentes satisfacen la condición de *Lipshitz*, i.e.,  $\|\Phi_j\| \leq \phi_j \|\xi_j\|$ , para  $\phi_j > 0$ .

Ahora se formula el siguiente teorema

**TEOREMA 4.1.** *Considere el sistema (4.10) en lazo cerrado bajo la acción del control (4.14). Además se satisfacen las hipótesis 16 y 17. Entonces, los estados del sistema (4.17) en lazo cerrado convergen al error de seguimiento que tiende a cero en tiempo finito en presencia de perturbaciones.*

*Demostración.* Considere la función candidata de Lyapunov

$$V_{(\xi_j)} = \xi_j^T \mathbf{S}_{\Upsilon_j} \xi_j \quad (4.22)$$

cuya derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{V}_{(\xi_j)} = \frac{1}{2\|\xi_{1j}\|} \left\{ -\Upsilon_j \xi_j^T S_{Y_j} \xi_j + 2\xi_j^T S_{Y_j} \Phi_j \right\} \quad (4.23)$$

Considerando la norma del término no lineal  $2\xi_j^T S_{Y_j} \Phi_j$ , a partir de la hipótesis 17, i.e.  $\|\Phi_j\| \leq \phi_j \|\xi_j\|$ , para  $\phi_j > 0$ , y usando la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(S_{Y_j}) \|\xi_j\|^2 \leq V_{(\xi_j)} \leq \lambda_{\max}(S_{Y_j}) \|\xi_j\|^2$$

donde  $\lambda_{\min}(S_{Y_j})$  y  $\lambda_{\max}(S_{Y_j})$  son los valores propios mínimos y máximos de la matriz  $S_{Y_j}$ .

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(\xi_j)} &\leq \frac{-\Upsilon_j}{2\|\xi_{1j}\|} \xi_j^T S_{Y_j} \xi_j + \frac{2\phi_j \|S_{Y_j}\| \|\xi_j\|^2}{2\|\xi_{1j}\|} \\ &\leq \frac{-1}{2\|\xi_{1j}\|} (\Upsilon_j - \eta) V_{(\xi_j)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $\eta = \frac{2\phi_j \|S_{Y_j}\|}{\lambda_{\max}(S_{Y_j})}$ . Considere la siguiente desigualdad  $\|\xi_j\| \leq \frac{V_{(\xi)}^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}(S_{Y_j})}$  se satisface entonces, se obtiene

$$\dot{V}_{\xi_j} \leq -\kappa_j V_{\xi_j}^{1/2} \quad (4.25)$$

donde  $\kappa_j = \frac{(\Upsilon_j - \eta) \lambda_{\min}^{1/2}(S_j)}{2}$ . Seleccionando  $\Upsilon_j$  lo suficientemente grande tal que se cumpla la siguiente desigualdad  $\Upsilon_j > \eta$ , entonces  $\dot{V}_{\xi_j}$  es negativa definida.

De forma similar al capítulo anterior, para estimar la convergencia en tiempo finito, considere la siguiente ecuación diferencial escalar

$$\dot{\vartheta} = -\kappa_j \vartheta^{1/2}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0$$

cuya solución está dada por

$$\vartheta(t) = \left( \vartheta_0^{1/2} - \frac{\kappa_j}{2} t \right)^2$$

A partir del principio de separación [123], donde  $V_{(\xi_j)}(t) \leq \vartheta(t)$  cuando  $V_{(\xi_j)}(0) \leq \vartheta_0$ . por lo tanto,  $\xi_j$  converge a cero en tiempo finito y alcanza ese valor en el tiempo dado por

$$T = \frac{2\sqrt{V_{(\xi_j)}(0)}}{\kappa_j}$$

Entonces, cuando los estados  $\xi_{1j}$  y  $\xi_{2j}$  convergen a cero en tiempo finito. Como resultado, los estados  $\zeta_{1j}$  y  $\zeta_{2j}$  convergen a cero también. Por lo tanto,  $\mathbf{S}_j$  y  $\dot{\mathbf{S}}_j$  tiende a cero. Entonces, el error de seguimiento (4.11), a partir del sistema (4.1)-(4.7) converge al origen.  $\square$

#### 4.4. Resultados experimentales

En esta sección, se presentan resultados experimentales para mostrar el rendimiento de las técnicas de control propuestas para un esquema líder-seguidor. Se utilizaron dos robots llamados *e-puck*, los cuales cuentan con dos ruedas accionadas a través de motores de paso. Además, se utiliza la odometría para obtener la posición real de los robots, mientras que la computadora genera las trayectorias de los robots y calcula las leyes de control para cada uno de ellos. La señal de control enviada a cada robot es a través del protocolo Bluetooth desde una computadora portátil por la plataforma Matlab<sup>®</sup>. Cada robot tiene un diámetro de 75 mm, la masa de 0.2 Kg. La figura 4.3 muestra uno de los robots e-puck (Ver apéndice A para más información de los robots e-puck).

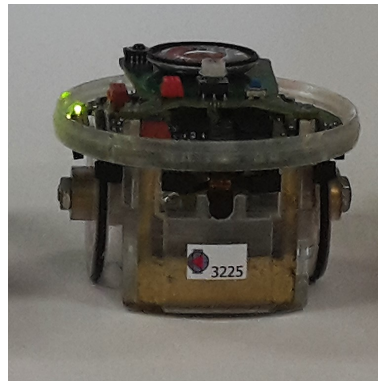


Figura 4.3: Robot e-puck

Cada robot obtiene la velocidad de cada rueda mediante las siguientes ecuaciones

$$v_{l,i} = v_i + \frac{\omega_i}{2}; \quad v_{r,i} = v_i - \frac{\omega_i}{2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.26)$$

donde  $v_{l,i}$  y  $v_{r,i}$  son la velocidad izquierda y derecha de cada motor respectivamente. La figura 4.4 representa el esquema de comunicación entre la computadora y cada robot mediante la estrategia líder-seguidor.

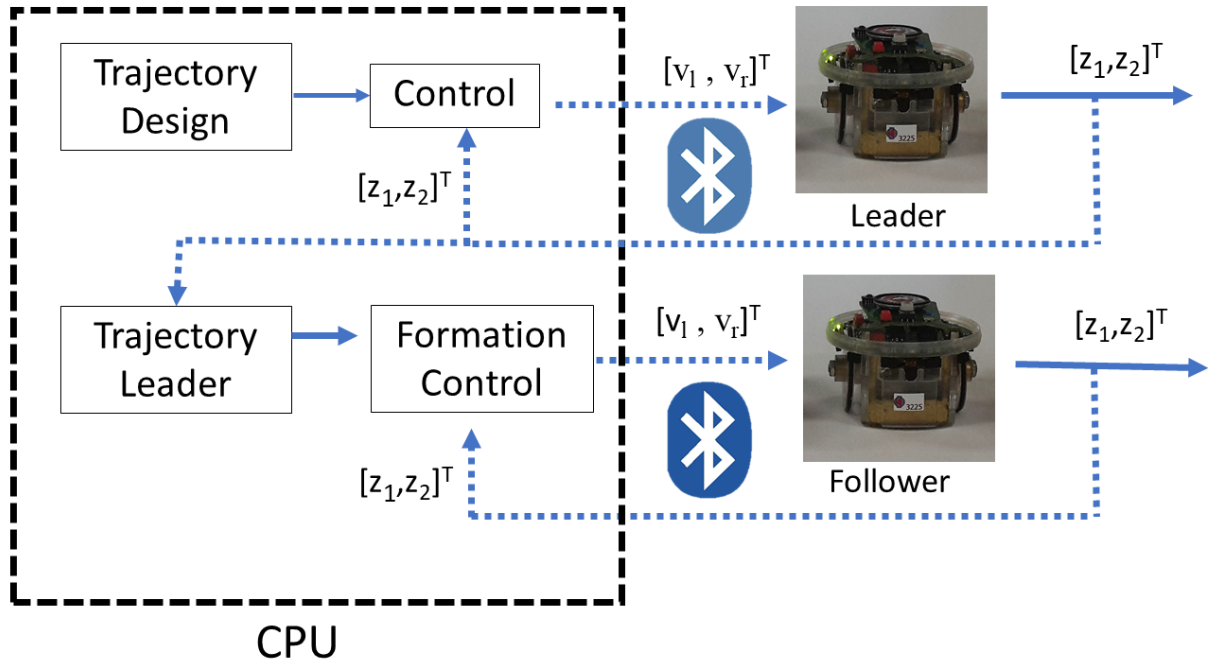
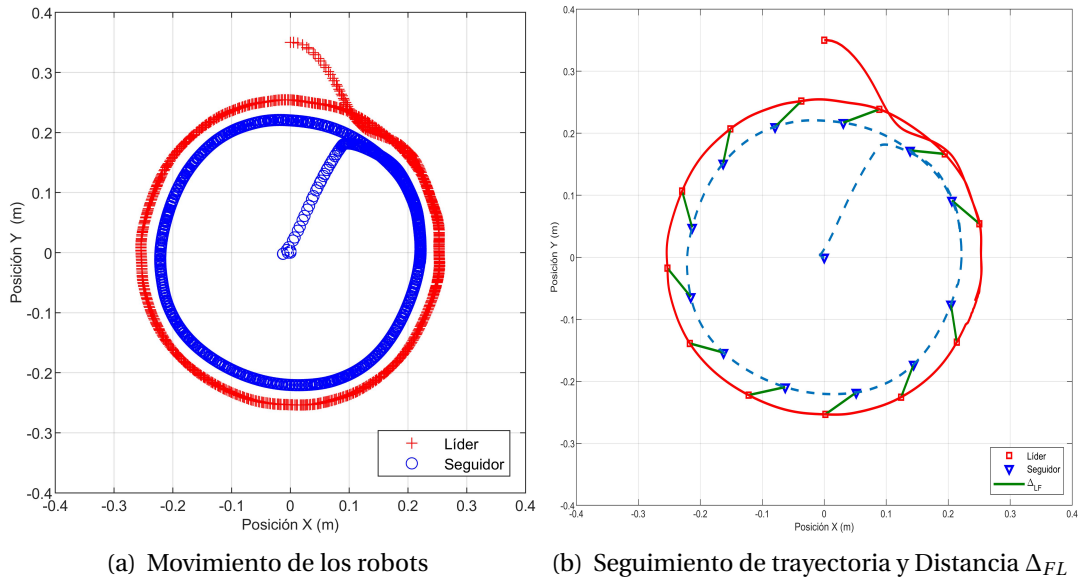


Figura 4.4: Diseño de comunicación basado en un enfoque líder-seguidor

Para diferenciar cada robot en la nomenclatura del sistema, el líder se denota con  $L$  y el seguidor con  $F$  (por su traducción al inglés). Las condiciones iniciales de los robots son  $[x_L(0), y_L(0)]^T = [0, 0.300]$ ,  $[x_F(0), y_F(0)]^T = [0, 0]$  y se considera la distancia deseada entre el líder y el seguidor como  $\Delta_d = 0.100$ . Las velocidades iniciales son cero.

La figura 4.5a muestra el seguimiento de los robots basada en la estrategia líder-seguidor a partir de la ecuación (4.8). El líder se mueva a lo largo de la trayectoria circular y el seguidor realiza la misma trayectoria con una distancia específica del líder. La Figura 4.5b muestra la trayectoria del líder (línea sólida-roja), la del seguidor (línea punteada-azul), y la distancia entre el líder y el seguidor ( $\Delta_{FL}$ ). Además, en la Figura 4.5c muestra el recorrido de los robots en el experimento.





(c) Trayectoria de los robots

Figura 4.5: Seguimiento de trayectoria de de los robot líder y seguidor

Las ganancias del control son  $Y_L = 100$  y  $Y_F = 80$ . La distancia entre el líder y seguidor se muestra en la Figura 4.6, donde  $\Delta_{LF} = \Delta_{ij}$  converge a  $0.100 \text{ m}$  que es la distancia deseada ( $\Delta_d$ ) entre los robots. La Figura 4.7 muestra el error de seguimiento.

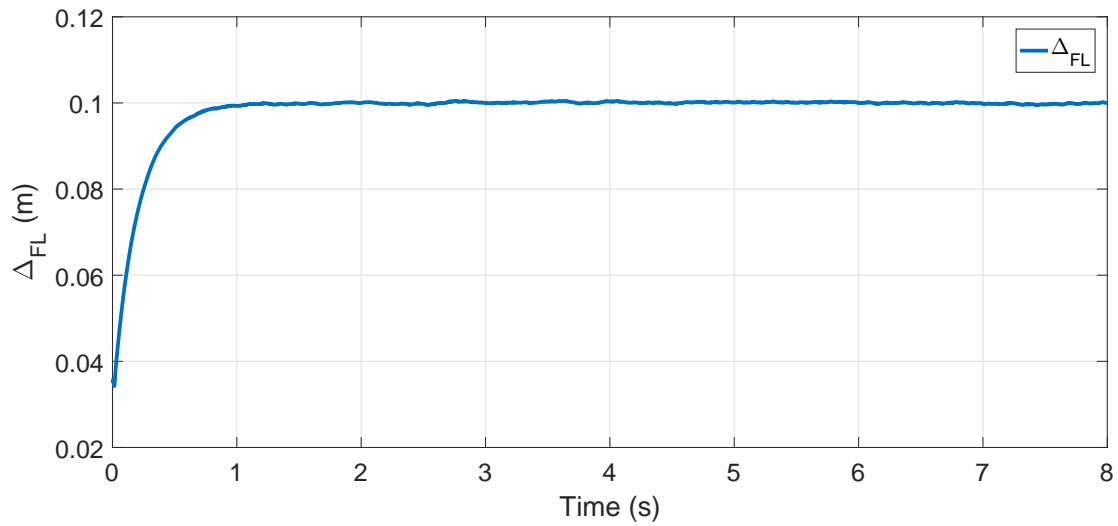


Figura 4.6: Distancia entre el líder y el seguidor

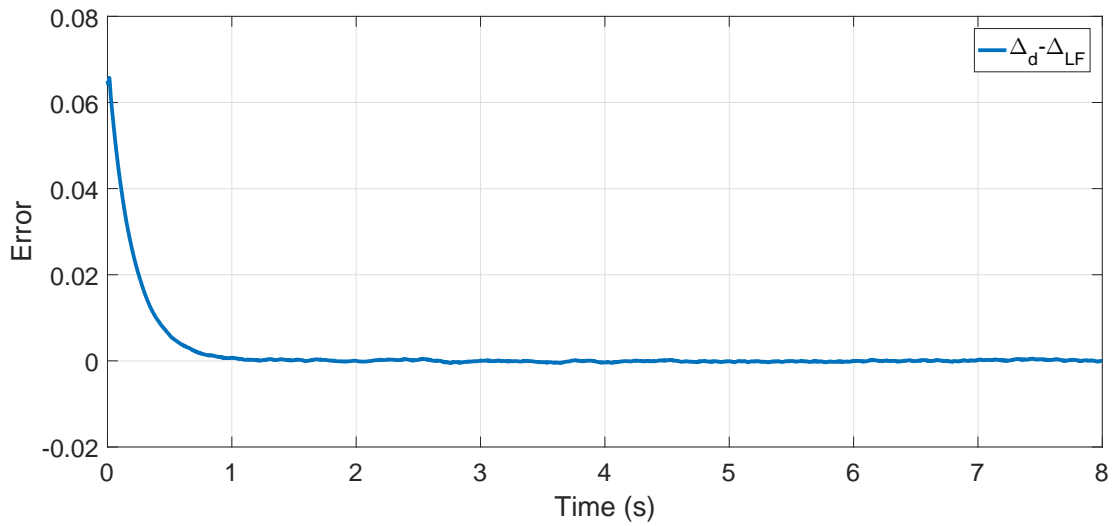
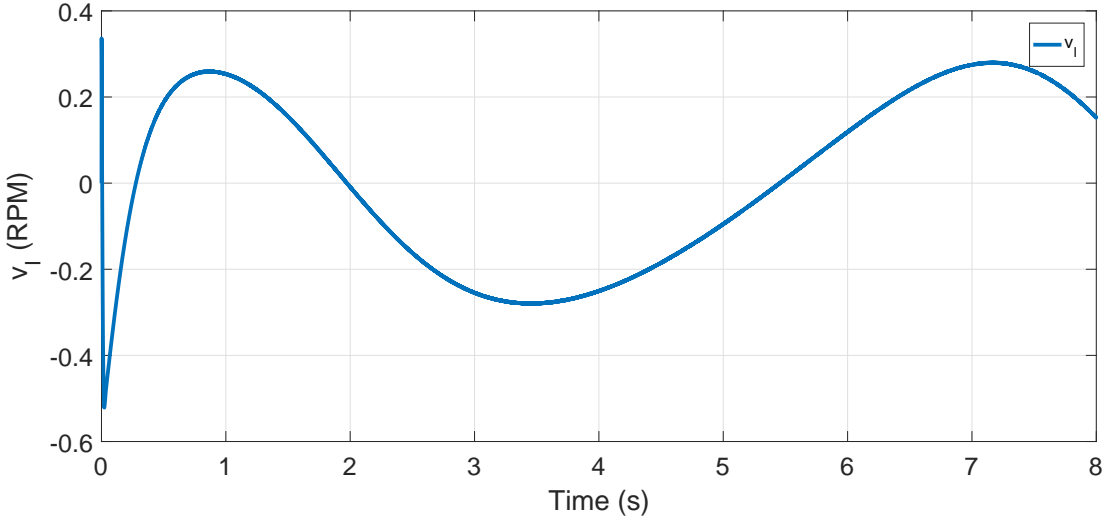
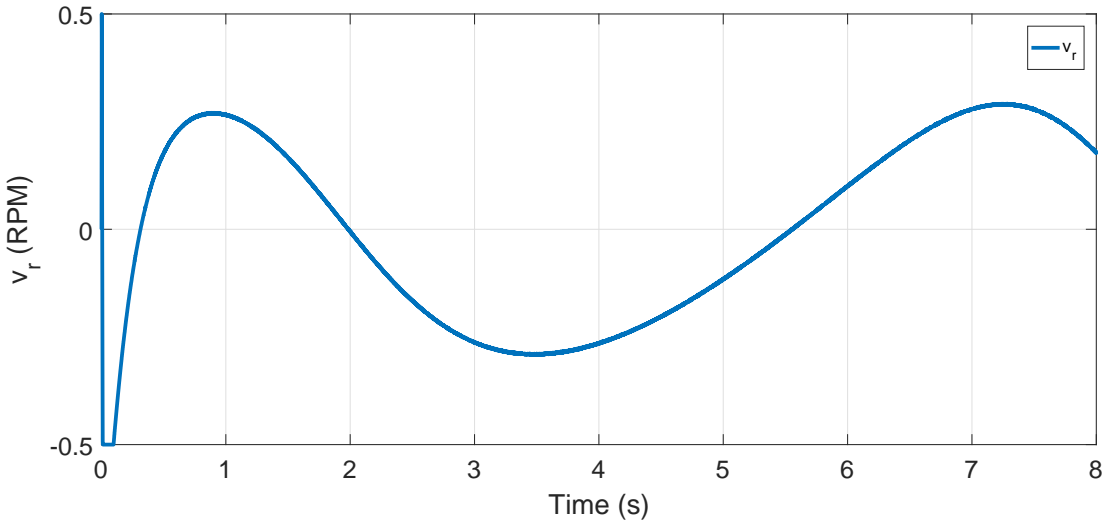


Figura 4.7: Error de seguimiento

La Figura 4.8 muestra las velocidades izquierda y derecha del seguidor, respectivamente. Además, la ley de control de Super Twisting redujo considerablemente el efecto de “chattering”.



(a) Velocidad de la rueda izquierda



(b) Velocidad de la rueda derecha

Figura 4.8: Velocidades del seguidor

## **4.5. Conclusiones**

En este capítulo se presentó un control super-twisting modificado bajo la estrategia líder-seguidor para dos robots de tracción diferencial. Teniendo una ganancia de ajuste de control que es más simple e intuitiva que las ganancias utilizadas en el algoritmo clásico. Permitiendo realizar los experimentos en los robots e-puck, con leyes de control que son aplicables a los actuadores.

# Capítulo 5

## Diseño del control adaptativo super-twisting para el cuadirrotor

### 5.1. Modelo matemático del cuadirrotor

Un cuadirrotor es un vehículo conformado de cuatro rotores idénticos y sus hélices los cuales están ubicados en los vértices de un cuadrado. Las hélices generan un empuje en dirección perpendicular al plano definido por los rotores.

El sistema está sujeto a dos marcos de referencia como se muestra en la figura 5.1, uno fijo (E) y otro móvil(B). La matriz de cosenos directores permite relacionar el sistema móvil con el de referencia (fijo). La formulación dinámica de Euler-Lagrange divide el sistema en dos, uno de traslación y otro de rotación. Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico del cuadirrotor, en el marco de referencia fijo al cuerpo (marco-B), cuentan con las siguientes ventajas:

- La matriz de inercia es invariante en el tiempo.
- La simetría del cuerpo simplifica las ecuaciones.

De acuerdo con [104], el modelo dinámico del cuadirrotor que describe los movimientos de traslación y rotación, representados en un marco de coordenadas fijo con el origen en la masa

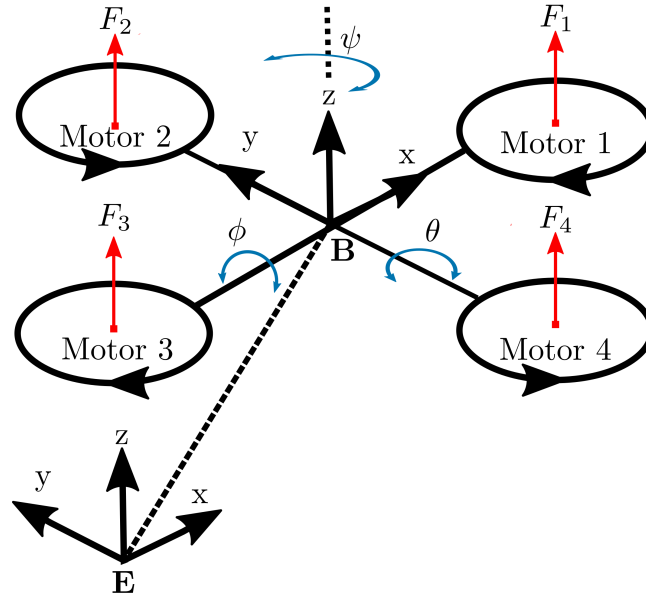


Figura 5.1: Marco de referencia del cuadricóptero

central, esta dado por

$$\begin{aligned}
 \ddot{X} &= (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta) \frac{U_c}{m} + \delta_x \\
 \ddot{Y} &= (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi) \frac{U_c}{m} + \delta_y \\
 \ddot{Z} &= (c_\phi c_\theta) \frac{U_c}{m} - g + \delta_z \\
 \ddot{\phi} &= U_\phi I_x^{-1} - (I_z - I_y) \dot{\theta} \dot{\psi} I_x^{-1} + \delta_\phi \\
 \ddot{\theta} &= U_\theta I_y^{-1} - (I_x - I_z) \dot{\phi} \dot{\psi} I_y^{-1} + \delta_\theta \\
 \ddot{\psi} &= U_\psi I_z^{-1} - (I_y - I_x) \dot{\phi} \dot{\theta} I_z^{-1} + \delta_\psi
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde  $X$ ,  $Y$  son las coordenadas en el plano horizontal,  $Z$  representa la altitud, Los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , Cabeceo (pitch) alrededor del eje  $Y$ , alabeo (roll) alrededor del eje  $X$  y guiñada (yaw) alrededor del eje  $Z$ .  $m$  es la masa del cuadricóptero,  $g$  la fuerza de gravedad,  $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$  y  $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ .  $I_x$ ,  $I_y$  y  $I_z$  son los momentos de inercia del vehículo con respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente.

Las entradas de control  $U_*$  ( $* = \{c, \phi, \theta, \psi\}$ ) están dadas por

$$\begin{aligned} U_c &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_\phi &= b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_\theta &= b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_\psi &= d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $\Omega_i$  ( $i = \{1, 2, 3, 4\}$ ) son las velocidades de los cuatro rotores,  $b$  y  $d$   $b$  y  $d$  son coeficientes de sustentación y par de torsión respectivamente. Los términos  $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_\phi, \delta_\theta$  and  $\delta_\psi$  representan las perturbaciones e incertidumbres (dinámicas no modeladas y ráfagas de viento) que se suponen acotadas.

El modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadrirrotor consiste en 6 ecuaciones diferenciales de segundo orden, cada uno representa un grado de libertad y se definen en (5.1). Adicionalmente, se consideran las siguientes hipótesis:

**Hipótesis 18.** *Las fuerzas centrales y momentos de alabeo son despreciables.*

**Hipótesis 19.** *Los coeficientes de arrastre y empuje son constantes.*

La estrategia de control se conforma de dos lazos como se muestra en la Figura 5.2 permitiendo el seguimiento de la trayectoria definida como:  $X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref}$  and  $\psi_{ref}$

- **Lazo 1** esta compuesto por el control de  $X$  y  $Y$ . Además, El lazo de control externo proporciona la referencia de los ángulos de cabeceo ( $\theta_{ref}$ ) y alabeo ( $\phi_{ref}$ ).
- **Lazo 2** esta compuesto por las cuatro leyes de control: Control de alabeo ( $\phi$ ), Control de cabeceo ( $\theta$ ), control de guiñada ( $\psi$ ) y el control de altitud ( $Z$ );

**Hipótesis 20.** *Se supone que todas las variables del vector de estado son conocidas.*

En los siguientes capítulos se utilizarán las ecuaciones obtenidas del modelo dinámico del cuadrirrotor, para el diseño del control adaptable super-twisting.

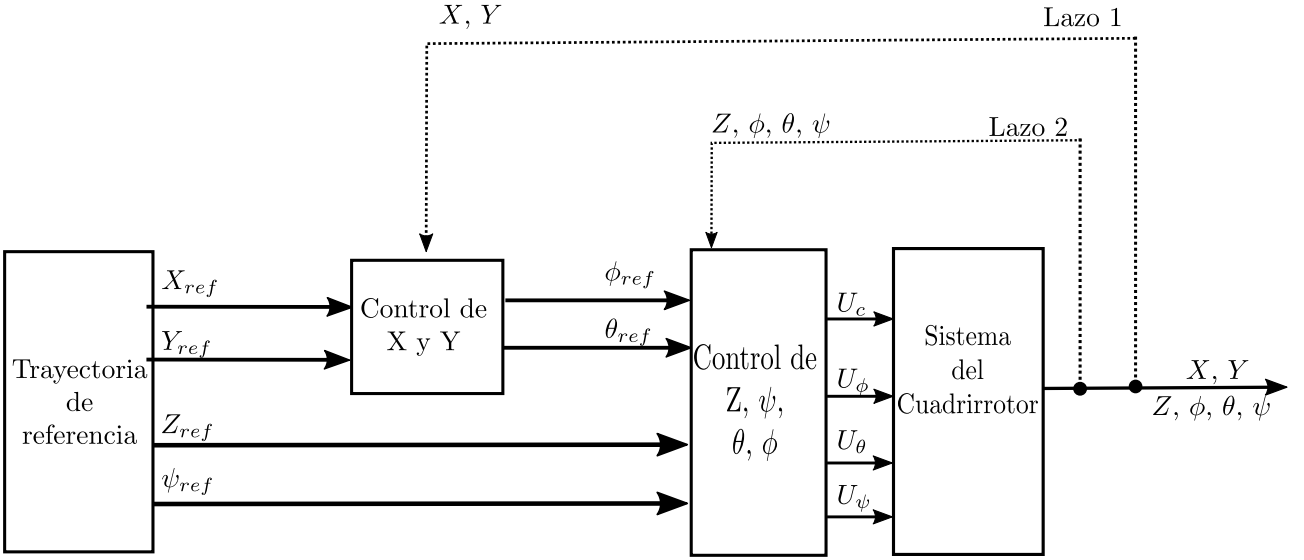


Figura 5.2: Esquema de control.

## 5.2. Diseño del control adaptativo super-twisting para el cuadricóptero

### Diseño del control para el Lazo 1

El lazo 1 debe proporcionar las trayectorias de referencia para  $\phi$  y  $\theta$  y para garantizar el control de  $X$  y  $Y$ . Para lograr estos objetivos, solo se usa el ángulo de inclinación para moverse alrededor del eje  $X$  suponiendo que  $\phi \approx \psi \approx 0$  mientras que solo se usa el ángulo de inclinación para avanzar en la dirección  $Y$ , lo que significa que  $\theta \approx \psi \approx 0$ . Después, el modelo (5.1) se reescribe para  $XY$  como

$$\ddot{X} = s_{\theta} \frac{U_c}{m} + \delta_x \quad \ddot{Y} = s_{\phi} \frac{U_c}{m} + \delta_y \quad (5.3)$$

Definiendo las trayectorias de referencia para los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  como:

$$\theta_{ref} = \arcsin\left(\frac{m}{U_c} v_x\right) \quad \phi_{ref} = \arcsin\left(\frac{m}{U_c} v_y\right) \quad (5.4)$$



donde  $v_x$  y  $v_y$  son dos entradas virtuales. Entonces, para la ley de control  $\phi$  y  $\theta$  son  $\phi = \phi_{ref}$  y  $\theta = \theta_{ref}$ , entonces se obtiene

$$\ddot{X} = v_x + \delta_x \quad \ddot{Y} = v_y + \delta_y \quad (5.5)$$

Definiendo las variables deslizantes como

$$S_x = \dot{e}_x + \lambda_x e_x, \quad S_y = \dot{e}_y + \lambda_y e_y$$

donde  $\lambda_x > 0$ ,  $\lambda_y > 0$ ,  $e_x = X - X_{ref}(t)$ ,  $e_y = Y - Y_{ref}(t)$ , entonces, la derivada de las variables deslizantes es:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \ddot{e}_x + \lambda_x \dot{e}_x = \frac{1}{m} (m v_x + \delta_x) - \ddot{X}_{ref}(t) + \lambda_x \dot{e}_x \\ \dot{S}_y &= \ddot{e}_y + \lambda_y \dot{e}_y = \frac{1}{m} (m v_y + \delta_y) - \ddot{Y}_{ref}(t) + \lambda_y \dot{e}_y \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las entradas virtuales de control  $v_x$  y  $v_y$  se definen como

$$v_x = w_x + \ddot{X}_{ref}(t) - \lambda_x \dot{e}_x \quad v_y = w_y + \ddot{Y}_{ref}(t) - \lambda_y \dot{e}_y \quad (5.7)$$

con  $w_x$  y  $w_y$  (Definidas en la sección 5.2) se obtiene

$$\dot{S}_x = w_x + \frac{\delta_x}{m}, \quad \dot{S}_y = w_y + \frac{\delta_y}{m}. \quad (5.8)$$

## Diseño del control del Lazo 2

Como complemento del sistema del Lazo 1, la dinámica de altitud y actitud se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= (c_\phi c_\theta) \frac{U_c}{m} - mg + \delta_z \\ \ddot{\phi} &= U_\phi I_x^{-1} - (I_z - I_y) \dot{\theta} \dot{\psi} I_x^{-1} + \delta_\phi \\ \ddot{\theta} &= U_\theta I_y^{-1} - (I_x - I_z) \dot{\phi} \dot{\psi} I_y^{-1} + \delta_\theta \\ \ddot{\psi} &= U_\psi I_z^{-1} - (I_y - I_x) \dot{\phi} \dot{\theta} I_z^{-1} + \delta_\psi \end{aligned} \quad (5.9)$$

El objetivo de control de realizar un seguimiento de la altitud deseada  $Z_{ref}(t)$  y la orientación por

medio de los ángulos deseados  $\phi_{ref}(t)$ ,  $\theta_{ref}(t)$ ,  $\psi_{ref}(t)$ .

Se definen como siguiente el vector deslizante

$$S = \begin{bmatrix} S_Z \\ S_\phi \\ S_\theta \\ S_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z} - \dot{Z}_{ref}(t) + \lambda_z(Z - Z_{ref}(t)) \\ \dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}(t) + \lambda_\phi(\phi - \phi_{ref}(t)) \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}(t) + \lambda_\theta(\theta - \theta_{ref}(t)) \\ \dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref}(t) + \lambda_\psi(\psi - \psi_{ref}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_z + \lambda_z e_z \\ \dot{e}_\phi + \lambda_\phi e_\phi \\ \dot{e}_\theta + \lambda_\theta e_\theta \\ \dot{e}_\psi + \lambda_\psi e_\psi \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Se obtiene la derivada del vector deslizante como

$$\dot{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} -g + \frac{\delta_z}{m} - \ddot{Z}_{ref}(t) + \lambda_z(\dot{Z} - \dot{Z}_{ref}(t)) \\ -\frac{I_z - I_y}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} - \ddot{\phi}_{ref}(t) + \lambda_\phi(\dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}(t)) \\ -\frac{I_x - I_z}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \ddot{\theta}_{ref}(t) + \lambda_\theta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}(t)) \\ -\frac{I_y - I_x}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} - \ddot{\psi}_{ref}(t) + \lambda_\psi(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref}(t)) \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{c_\phi c_\theta}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} U_c \\ U_\phi \\ U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_\phi \\ \delta_\theta \\ \delta_\psi \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

El control es definido como

$$\begin{bmatrix} U_c \\ U_\phi \\ U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} = \mathcal{B}^{-1} \left( -\mathcal{A} + \begin{bmatrix} w_c \\ w_\phi \\ w_\theta \\ w_\psi \end{bmatrix} \right) \quad (5.12)$$

con  $w_c$ ,  $w_\phi$ ,  $w_\theta$  y  $w_\psi$  definidos en la subsección 5.2, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_Z \\ \dot{S}_\phi \\ \dot{S}_\theta \\ \dot{S}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_c \\ w_\phi \\ w_\theta \\ w_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_\phi \\ \delta_\theta \\ \delta_\psi \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

### Términos del Control Super-Twisting adaptable

Los términos del control  $w_{\#}$  ( $\# = \{X, Y, Z, \phi, \theta, \psi\}$ ) presentados en las ecuaciones (5.7)-(5.12) ahora se definen de tres formas diferentes. Con el objetivo de mostrar el rendimiento del control super-twisting adaptable simplificado (SAST) se presenta una comparación con dos algoritmos utilizados en la literatura el control super-twisting adaptable (ASTW) [24] y el control adaptativo de modo deslizante de primer orden (ASMC) [124]. Entonces, los términos  $w_{\#}$  ( $\# = \{X, Y, Z, \phi, \theta, \psi\}$ ) son definidos como

- **Control super-twisting adaptable (ASTW) [24].** La entrada de control  $w_{\#}$  es definida como

$$w_{\#} = -\alpha_{\#}(t)|S_{\#}|^{1/2}\text{sign}(S_{\#}) - \int_0^t \frac{\beta_{\#}(t)}{2} \text{sign}(S_{\#}) d\tau \quad (5.14)$$

con las ganancias  $\alpha_{\#}(t)$  y  $\beta_{\#}(t)$  determinadas de la siguiente manera

$$\dot{\alpha}_{\#}(t) = \begin{cases} \omega_{\#} \sqrt{\frac{\gamma_{\#}}{2}} \text{sign}(|S_{\#}| - \mu_{\#}), & \text{if } \alpha_{\#} > 0 \\ 0, & \text{if } \alpha_{\#} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\beta_{\#}(t) = 2\epsilon_{\#}\alpha_{\#}$$

donde  $\omega_{\#}, \gamma_{\#}, \mu_{\#}, \epsilon_{\#}$  constantes positivas arbitrarias.

- **Control modo deslizante adaptable (ASMC) [124].** La entrada de control  $w_{\#}$  se define como

$$w_{\#} = -K_{\#}(t)\text{sign}(S_{\#}) \quad (5.16)$$

con la ley de adaptativa  $K_{\#}(t)$  definida como

$$\dot{K}_{\#}(t) = \begin{cases} \bar{K}_{\#}|S_{\#}|\text{sign}(|S_{\#}| - \epsilon_{\#}) & \text{if } K_{\#} > \mu_{\#} \\ \mu_{\#} & \text{if } K_{\#} \leq \mu_{\#} \end{cases} \quad (5.17)$$

con  $K_{\#}(0) > 0$ ,  $\bar{K}_{\#} > 0$ ,  $\mu_{\#} > 0$  y  $\epsilon_{\#} = 2K_{\#}(t)T_e$ ,  $T_e$  es el periodo de muestreo. El parámetro  $\epsilon_{\#}$  debe elegirse lo suficientemente pequeño para garantizar una alta precisión y lo suficiente-

mente grande para garantizar que  $K_{\#}$  esté acotado. Además,  $\mu_{\#}$  es seleccionada de manera que no se tenga una ganancia negativa  $K_{\#}$ .

- **Control Control Super-Twisting Adaptable Simplificado (SAST).** La entrada de control  $w_{\#}$  está basada en el Teorema 3.2.

$$u = \frac{1}{b_0(x)} \left[ -a_0(x) - 2L(t)|s|^{1/2}\text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2}\text{sign}(s(\tau))d\tau \right]$$

Con la siguiente ley de adaptación ( $L(0) > L^*$ )

$$\dot{L}(t) = \begin{cases} \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L(t) - L^*| + \frac{L(t)}{2}|s|^{1/2}}{(L(t) - L^*) + \frac{2}{L^2(t)} \left( |s|^{1/2}\text{sign}(s) + \frac{1}{L(t)} \int_0^t L^2(\tau)\text{sign}(s(\tau))d\tau \right) \left( -\int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2}\text{sign}(s(\tau))d\tau \right)} & \text{if } L(t) \geq L^* \\ L^* & \text{if } L < L^* \end{cases} \quad (5.18)$$

con  $L^* > 0$  y  $k > 0$  definida tal que  $k < \sqrt{2}(\bar{L}\eta_1 - \eta_2)$ , con

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\lambda_{max}^{1/2}(\mathbf{S}_{\infty})}{2} \\ \eta_2 &= \frac{\|\mathbf{S}_{\infty}\mathbf{C}^T\|\delta_1}{\lambda_{min}^{1/2}(\mathbf{S}_{\infty})} \\ \bar{L} &> \frac{\eta_2}{\eta_1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como se mencionó anteriormente, el parámetro  $L^*$  se introduce para garantizar que  $L(t)$  tome valores positivos. Se selecciona arbitrariamente pequeño.

El desempeño de los algoritmos AST, ASMC y el controlador propuesto se evalúan en las mismas condiciones. El objetivo es evaluar el rendimiento de cada controlador en términos de error de seguimiento, efectos de “*chattering*” y proceso de ajuste basados en número de parámetros.

### 5.3. Simulación del Cuadrirrotor

El sistema y los algoritmos de control se han implementado en el entorno Matlab® / Simulink, utilizando el algoritmo de integración de Euler con un paso fijo de  $10^{-3}$  s. Los parámetros del sistema (5.1) se muestran en la tabla 5.1. Las trayectorias de referencia en  $X$  and  $Y$  estan definidas

Tabla 5.1: Parámetros del cuadrirrotor.

Parametro	Descripcion	Valor	Unidad
$m$	Masa	0.4	$kg$
$g$	Gravedad	9.81	$m/s^2$
$I_x$	Roll inercia ( $\phi$ )	0.0027	$kg \cdot m^2$
$I_y$	Pitch inercia ( $\theta$ )	0.0029	$kg \cdot m^2$
$I_z$	Yaw inercia ( $\psi$ )	0.0053	$kg \cdot m^2$

como una trayectoria circular, la altura  $Z$  es contante ( $Z_{ref} = 1 m$ ) y el ángulo  $\psi_{ref} = 0$ . Los valores iniciales están definidos como

$$[X(0) \ Y(0) \ Z(0) \ \phi(0) \ \theta(0) \ \psi(0)]^T = [0 \ 1.5 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$$

Para demostrar las propiedades de robustez del algoritmo propuesto, se han introducido las siguientes perturbaciones externas [125]

$$\begin{aligned} \delta_X &= \sin(t), \quad \delta_Y = \cos(t), \quad \delta_Z = 0.5 \sin(0.5t) \cos(0.5t), \\ \delta_\phi &= 0.5 \sin(0.5t), \quad \delta_\theta = 0.5 \cos(0.5t), \quad \delta_\psi = 0.5 \cos(0.5t) \sin(0.5t) \end{aligned}$$

Además, se afecta la medición del estado por un ruido blanco con una desviación estándar igual a 0.0001 y un tiempo de muestreo de 0.001 s [104].

**Nota 1.** *Se considera que las posiciones, los ángulos, las velocidades y las aceleraciones, así como las entradas de control están físicamente acotadas en la práctica; y las posibles perturbaciones externas, como las ráfagas de viento, se modelan la mayoría de las veces como señales sinusoidales que están claramente acotadas y son Lipschitz continuas.* ■

La Tabla 5.2 muestra los parámetros de los controladores para cada controlador de seguimien-

to; La sintonización de cada uno de los parámetros de control se ha realizado para garantizar las condiciones de convergencia, y también para obtener los mejores resultados. Está claro que el algoritmo propuesto tiene un número reducido de parámetros de ajuste lo que facilita su implementación.

Tabla 5.2: Parametros para los controladores ASTW, ASMC y SAST.

<b>ASTW</b>	$\epsilon_X = \epsilon_Y = \epsilon_Z = \epsilon_\phi = \epsilon_\theta = \epsilon_\psi = 0.001$ $\gamma_X = \gamma_Y = \gamma_Z = \gamma_\phi = \gamma_\theta = \gamma_\psi = 1$ $\mu_X = \mu_Y = \mu_Z = 0.01, \mu_\phi = \mu_\theta = 0.005, \mu_\psi = 0.001$ $\omega_X = \omega_Y = \omega_Z = \omega_\phi = \omega_\theta = \omega_\psi = 2$
<b>ASMC</b>	$\mu_X = \mu_Y = \mu_Z = \mu_\phi = \mu_\theta = \mu_\psi = 0.1$ $Te_X = 0.001, Te_Y = Te_\phi = Te_\theta = Te_\psi = 0.01, Te_Z = 0.001$ $\bar{K}_X = 10, \bar{K}_Y = \bar{K}_Z = \bar{K}_\psi = 100, \bar{K}_\phi = \bar{K}_\theta = 50$
<b>SAST</b>	$L_X^* = L_Y^* = L_Z^* = L_\phi^* = L_\theta^* = L_\psi^* = 0.008$ $k_X = 0.03, k_Y = k_Z = 0.02, k_\phi = k_\psi = 0.025, k_\theta = 0.05$

La Figura 5.3 muestra la trayectoria en 3D del cuadirrotor y la trayectoria deseada, el control (5.12) basando respectivamente en los algoritmos de control ASTW, ASMC y SAST. Los resultados de la simulación muestran un seguimiento preciso de todos los controladores, a pesar de las perturbaciones, las incertidumbres y el ruido blanco.

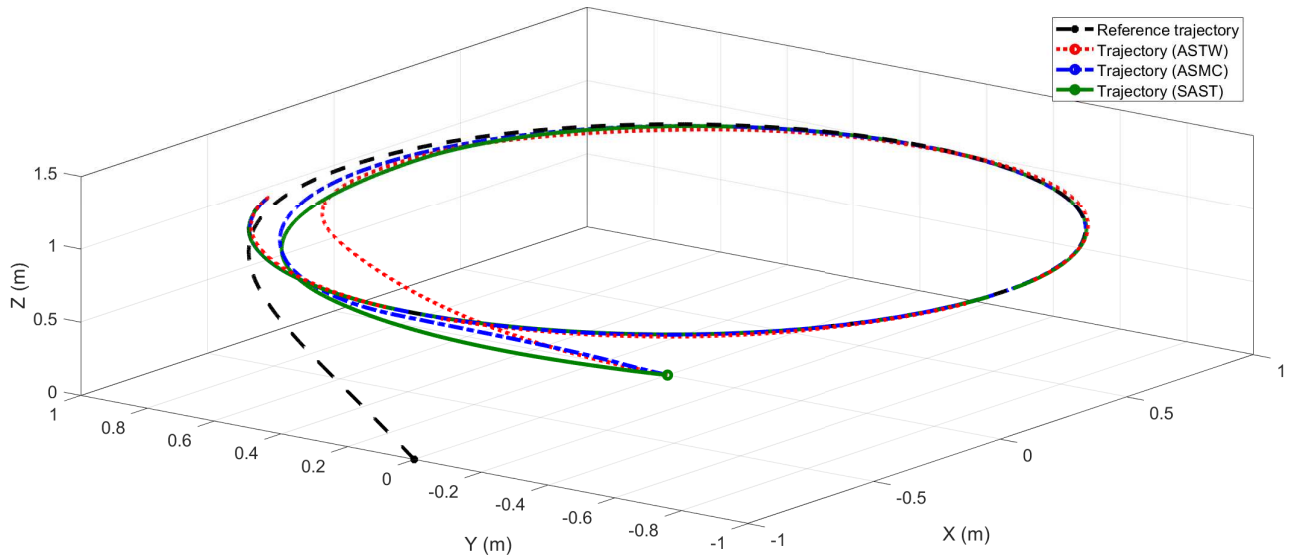


Figura 5.3: Trayectoria en 3D del cuadrirrotor controlado por los tres controladores.

La Figura 5.4 muestra las señales de control obtenidas de cada esquema de control. Se puede observar que el ASMC induce un notable efecto de “chattering” mientras que este último se reduce considerablemente con los controladores ASTW y SAST; presentando esfuerzos similares.

La Figura 5.5 muestra las ganancias adaptativas en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  y la Figura 5.6 mues-

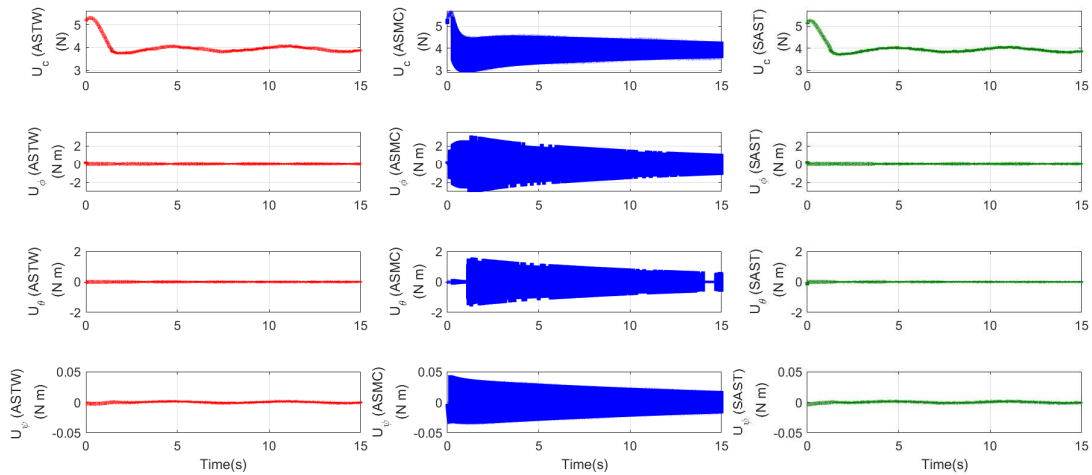


Figura 5.4: Entradas de control  $U_c$ ,  $U_\phi$ ,  $U_\theta$  y  $U_\psi$  versus tiempo (s) con los tres controladores - **Primera Columna.** control ASTW . **Segunda columna.** control ASMC . **Tercera columna.** control SAST .

tra las ganancias adaptativas en los ángulos de Euler para cada controlador. Como puede verse, ASMC tiene un tiempo de convergencia mayor. Una solución sería aumentar el parámetro  $\bar{K}_{\#}$ ; sin embargo, en este caso, el transitorio de  $K_{\#}(t)$  sería mucho más importante generando un efecto de “chattering” mayor. Además, se observa que las ganancias obtenidas por el controlador SAST propuesto parecen más suaves que las de ASTW. Sin embargo, el comportamiento del sistema en lazo cerrado es bastante similar con los controladores ASTW y SAST. La principal diferencia, lo cual se considera una ventaja, es la disminución del número de parámetros de ajuste (mucho mayor para ASTW).

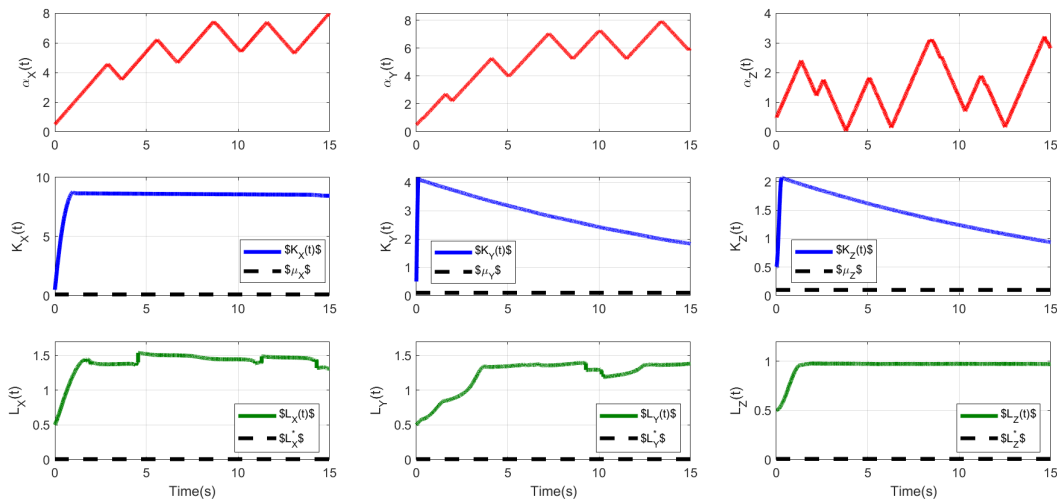


Figura 5.5: Ganancia Adaptable en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y altura  $z$  versus tiempo (s). **Superior.** Controlador ASTW . **Central** Controlador ASMC. **Inferior** Controlador SAST



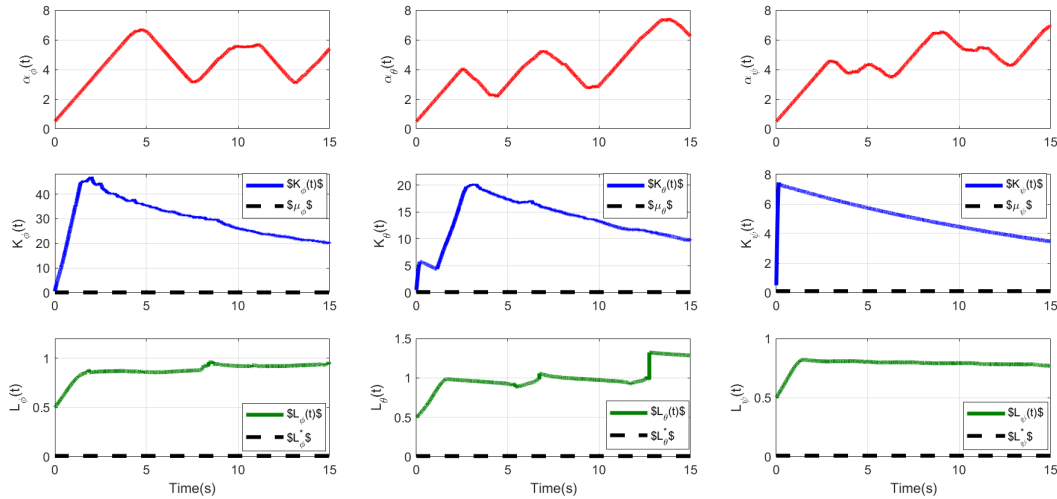


Figura 5.6: Ganancia Adaptable en los ángulos de Euler versus tiempo (s). **Superior.** Controlador ASTW . **Central** Controlador ASMC. **Inferior** Controlador SAST

De acuerdo con los resultados de las simulaciones, la comparación de los rendimientos se realiza entre los controladores SAST y ASTW que tienen niveles de rendimiento similares. Para comparar formalmente el rendimiento de ambos controladores adaptativos super-twisting, se definen tres índices

- Para el error de seguimiento  $e_{\#}$ : la Integral del error absoluto (IAE) y la integral del error cuadrático (ISE);
- Para las entradas de control: el error cuadrático medio (RMS).

La Figura 5.7 muestra los resultados obtenidos para cada índice de rendimiento del error de seguimiento  $e_{\#}$  mediante la Integral del error absoluto (IAE). La Figura 5.8 muestra los resultados obtenidos para cada índice de rendimiento del error de seguimiento  $e_{\#}$  mediante la integral del error cuadrático (ISE). La Figura 5.9 muestra los resultados de los índices de rendimiento en la entrada de control  $U_c$  y la Figura 5.10 de las entradas de control  $U_{\phi}$ ,  $U_{\theta}$  y  $U_{\psi}$  obtenidos mediante el error cuadrático medio (RMS).

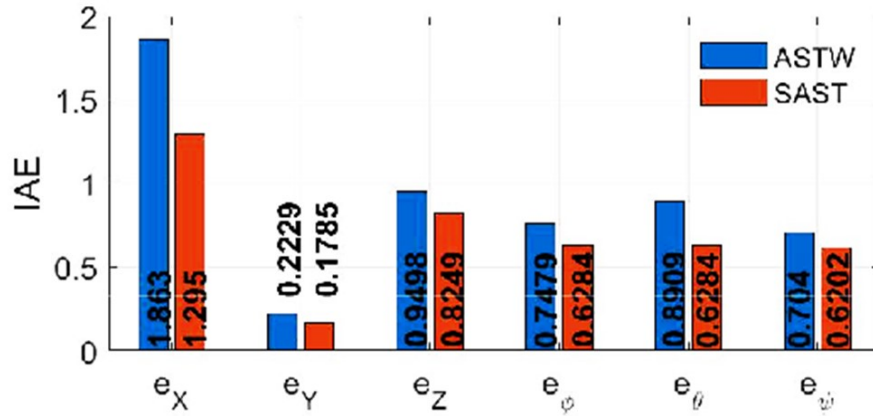


Figura 5.7: Índices de rendimiento de los errores de seguimiento mediante la Integral del error absoluto (IAE).

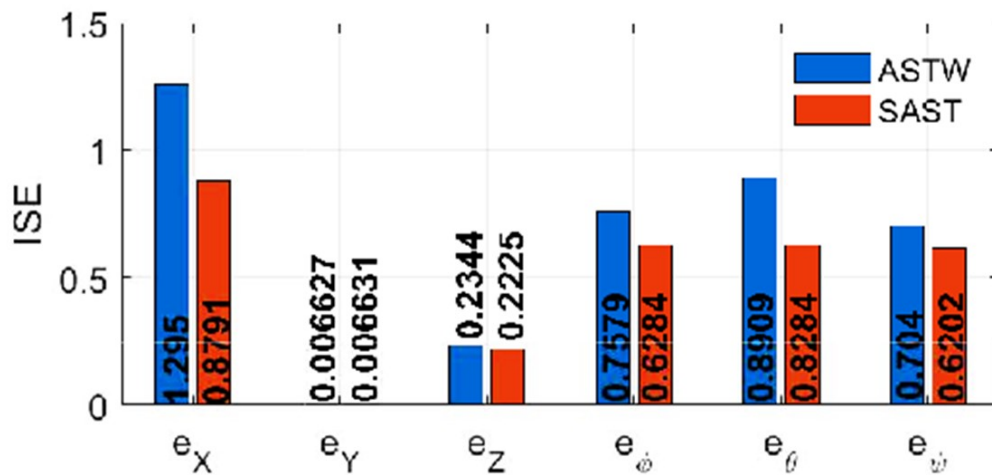


Figura 5.8: Índices de rendimiento de los errores de seguimiento mediante la Integral del error cuadrático (ISE).

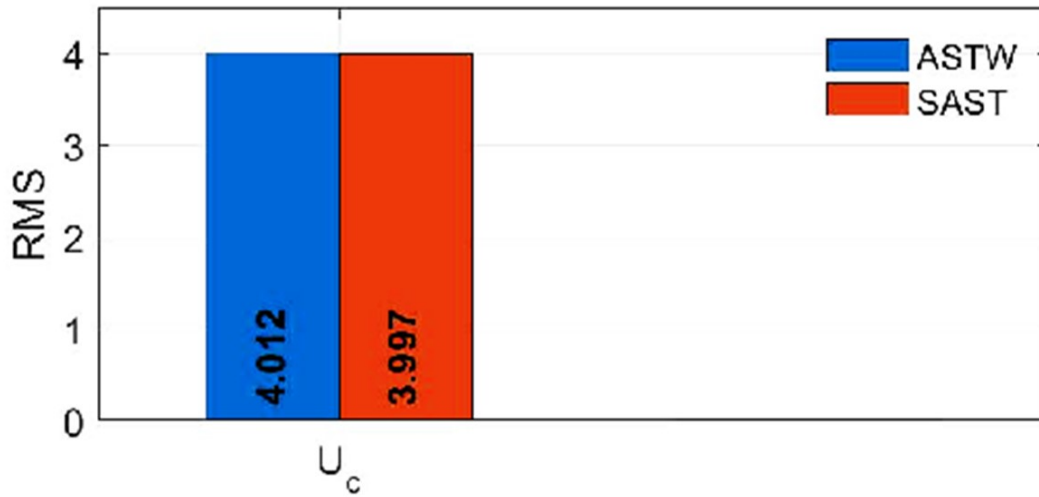


Figura 5.9: Índices de rendimiento en la entrada de control  $U_c$ .

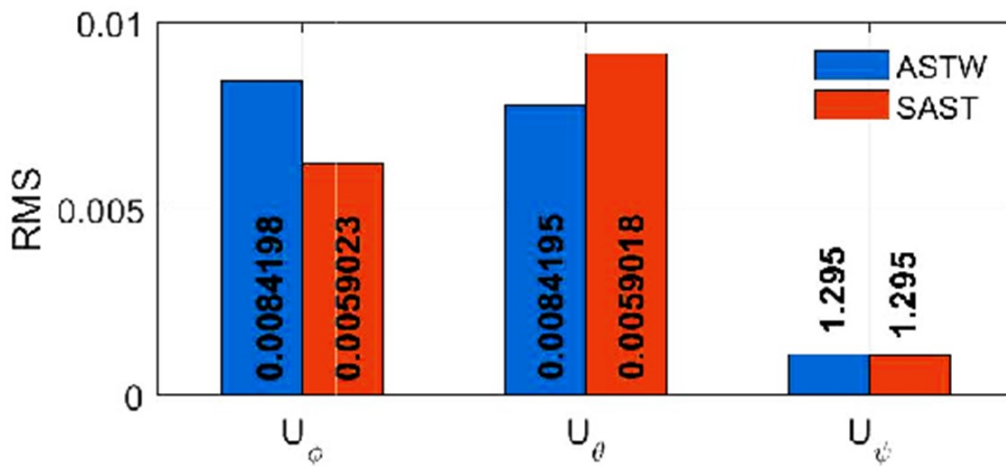


Figura 5.10: Índices de rendimiento en las entradas de control  $U_\phi$ ,  $U_\theta$  y  $U_\psi$ .

Se puede concluir que el super-twisting adaptativo simplificado (SAST) tiene los valores más pequeños en los índices de rendimiento, garantizando un alto nivel de precisión y un nivel redu-

cido del “chattering”.

A partir de la ecuación (3.72) es posible estimar  $\delta_{\#}$ , tan pronto como  $\xi_{\#}$  y  $\dot{\xi}_{\#}$  convergen a cero: esta propiedad se ilustra en la Figura 5.11 con  $\delta_Z$ .

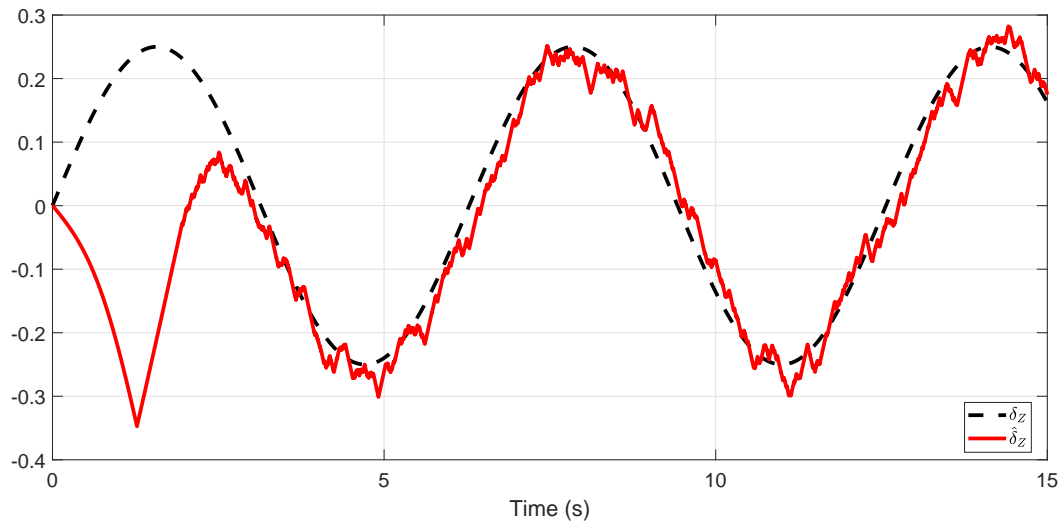


Figura 5.11: Perturbación  $\delta_Z(t)$  y estimación versus tiempo(s).

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó el control super-twisting adaptable simplificado, implementado en el modelo de un cuadrirrotor y comparándolo con 2 algoritmos de control con ganancias adaptables. Permitiendo mostrar por medio de los índices de rendimiento que el control SAST presenta mejores resultados en la reducción del efecto de “*chattering*”, obteniendo una ganancia adaptable sin necesidad de conocer la cota de la perturbación haciendo mas intuitivo la elección de los parámetros que tiene la ley de adaptación. Los resultados validan el rendimiento de la estrategia de control propuesta SAST, asegurando la convergencia exponencial a cero de la dinámica del error de seguimiento, a pesar de la influencia de perturbaciones e incertidumbres externas. Además, esta ley de adaptación permitirá la aplicación en robots móviles aéreos y en sistemas físicos con el control super-twisting sin sobrestimar sus ganancias.

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se presentó una simplificación del algoritmo de control super-twisting, el cual simplifica su implementación, ya que se reduce el número de parámetros a sintonizar a uno. Además, de su robustez y de reducir considerablemente el efecto de “*chattering*”. Para demostrar la efectividad y el desempeño del algoritmo de control super twisting simplificado se realizó una implementación en robots móviles terrestres diferenciales bajo la estrategia líder-seguidor. El parámetro de ajuste de control permite una ganancia simple e intuitiva. Como resultado, los experimentos pudieron llevarse a cabo bajo una ley de control aplicable a los actuadores, es decir, los motores. Mediante este trabajo se logró atenuar el control de la señal, por lo que no es observable el “*chattering*”. Este trabajo se se podría extender a más seguidores.

Además, se ha propuesto una versión de ganancias adaptables al control super-twisting simplificado, para lograr un seguimiento preciso de la trayectoria a pesar de las perturbaciones. Se diseña una función de Lyapunov y proporciona la ley de adaptación de las ganancias del controlador. Se dan condiciones suficientes para asegurar la convergencia en tiempo finito a cero, tanto de la variable deslizante como de su derivada en tiempo finito. Las principales ventajas de la estrategia propuesta son

1. Sólo se requieren dos parámetros para ajustar la ganancia adaptativa.
2. La acción de control presenta una importante reducción del efecto de “*chattering*”.
3. Es posible estimar formalmente la perturbación a partir de la ganancia adaptativa.

Se proporcionan simulaciones numéricas del control de en un cuadrirrotor para ilustrar la eficacia del del algoritmo de control super-twisting adaptativo simplificado. Finalmente, la robustez y

eficiencia de los algoritmos de control propuestos han sido verificadas bajo escenarios realísticos y dinámicos utilizando robots móviles terrestres diferenciales y aéreos.

Como trabajo futuro, se pretende extender la simplificación del algoritmo super-twisting a los controladores basados en modos deslizantes de orden superior, permitiendo reducir estos a un parámetro de sintonización, debido a que entre más grande es el orden del controlador más ganancias son necesarias, incrementando la dificultad de sintonizarlas. Permitiendo extender el uso de los controlados basados en modo deslizante a sistemas de orden superior al del super-twisting y adaptar la ganancia por medio del algoritmo de control super-twisting adaptativo simplificado.

# Bibliografía

- [1] R. Sheh, S. Schwertfeger, and A. Visser, “16 years of robocup rescue,” *KI-Künstliche Intelligenz*, vol. 30, no. 3-4, pp. 267–277, 2016.
- [2] J. Angeles and J. Angeles, *Fundamentals of robotic mechanical systems*, vol. 2. Springer, 2002.
- [3] W. Dong and W. Xu, “Adaptive tracking control of uncertain nonholonomic dynamic system,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 3, pp. 450–454, 2001.
- [4] X. Wang, H. Zhao, Q. Sun, and Y.-H. Chen, “A new high-order adaptive robust control for constraint following of mechanical systems,” *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 5, pp. 1672–1687, 2017.
- [5] D. Wang, H. He, and D. Liu, “Adaptive critic nonlinear robust control: A survey,” *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 47, no. 10, pp. 3429–3451, 2017.
- [6] A. T. Azar, F. E. Serrano, I. A. Hameed, N. A. Kamal, and S. Vaidyanathan, “Robust h-infinity decentralized control for industrial cooperative robots,” in *International Conference on Advanced Intelligent Systems and Informatics*, pp. 254–265, Springer, 2019.
- [7] S. Heshmati-Alamdari, G. C. Karras, P. Marantos, and K. J. Kyriakopoulos, “A robust predictive control approach for underwater robotic vehicles,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 28, no. 6, pp. 2352–2363, 2019.
- [8] Y. B. Shtessel, J. A. Moreno, F. Plestan, L. M. Fridman, and A. S. Poznyak, “Super-twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design,” in *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pp. 5109–5113, IEEE, 2010.



- [9] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Pisano, and E. Usai, "On the convergence properties of a 2-sliding control algorithm for non-linear uncertain systems," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 7, pp. 718–731, 2001.
- [10] F. Abdelhedi and N. Derbel, "Adaptive second order sliding mode control under parametric uncertainties: application to a robotic system," *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 27, no. 4, pp. 332–341, 2017.
- [11] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press, 1998.
- [12] V. I. Utkin, "Sliding modes in optimization and control problems," 1992.
- [13] L. Wu, S. K. Mazumder, and O. Kaynak, "Sliding mode control and observation for complex industrial systems—part i," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 8, pp. 6680–6683, 2017.
- [14] C. T. Heng, Z. Jamaludin, A. Y. B. Hashim, L. Abdullah, and N. A. Rafan, "Design of super twisting algorithm for chattering suppression in machine tools," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1259–1266, 2017.
- [15] Y. Shtessel, L. Fridman, and F. Plestan, "Adaptive sliding mode control and observation," *International Journal of Control*, vol. 89, no. 9, pp. 1743–1746, 2016.
- [16] H. Lee and V. I. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Annual reviews in control*, vol. 31, no. 2, pp. 179–188, 2007.
- [17] V. Utkin and A. Poznyak, "Advances in sliding mode control—concept, theory and implementation," *Adaptive Sliding Mode Control*. Springer, Berlin, 2013.
- [18] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control," *International journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [19] S. Mobayen, F. Tchier, and L. Ragoub, "Design of an adaptive tracker for n-link rigid robotic manipulators based on super-twisting global nonlinear sliding mode control," *International Journal of Systems Science*, vol. 48, no. 9, pp. 1990–2002, 2017.

- [20] J.-S. Han, T.-I. Kim, T.-H. Oh, S.-H. Lee, and D.-i. D. Cho, “Effective disturbance compensation method under control saturation in discrete-time sliding mode control,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019.
- [21] V. I. Utkin and A. S. Poznyak, “Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 39–47, 2013.
- [22] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *International journal of control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [23] A. Dávila, J. A. Moreno, and L. Fridman, “Variable gains super-twisting algorithm: A lyapunov based design,” in *American Control Conference (ACC), 2010*, pp. 968–973, IEEE, 2010.
- [24] Y. Shtessel, F. Plestan, and M. Taleb, “Lyapunov design of adaptive super-twisting controller applied to a pneumatic actuator,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 3051–3056, 2011.
- [25] Y. Shtessel, M. Taleb, and F. Plestan, “A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: methodology and application,” *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 759–769, 2012.
- [26] H. Li, J. Wang, H. Du, and H. R. Karimi, “Adaptive sliding mode control for takagi–sugeno fuzzy systems and its applications,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 531–542, 2018.
- [27] A. O. Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2005.
- [28] R. Siegwart, I. R. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza, *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT press, 2011.
- [29] T. Bräunl, *Embedded robotics: mobile robot design and applications with embedded systems*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [30] J. Carpentier, S. Tonneau, M. Naveau, O. Stasse, and N. Mansard, “A versatile and efficient pattern generator for generalized legged locomotion,” in *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 3555–3561, IEEE, 2016.

- [31] R. Silva-Ortigoza, G. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, V. R. Barrientos-Sotelo, J. M. Albarrán-Jiménez, and V. M. Silva-García, "Trajectory tracking in a mobile robot without using velocity measurements for control of wheels," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 6, no. 7, pp. 598–607, 2008.
- [32] W. Saab, W. S. Rone, and P. Ben-Tzvi, "Discrete modular serpentine robotic tail: design, analysis and experimentation," *Robotica*, vol. 36, no. 7, pp. 994–1018, 2018.
- [33] R. M. Murray and S. S. Sastry, "Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids," *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 5, pp. 700–716, 1993.
- [34] D. Wang and G. Xu, "Full-state tracking and internal dynamics of nonholonomic wheeled mobile robots," *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, vol. 8, no. 2, pp. 203–214, 2003.
- [35] J.-J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *International journal of control*, vol. 38, no. 2, pp. 465–492, 1983.
- [36] Y. Cheng, R. Jia, H. Du, G. Wen, and W. Zhu, "Robust finite-time consensus formation control for multiple nonholonomic wheeled mobile robots via output feedback," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 6, pp. 2082–2096, 2018.
- [37] P. Panahandeh, K. Alipour, B. Tarvirdizadeh, and A. Hadi, "A kinematic lyapunov-based controller to posture stabilization of wheeled mobile robots," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 134, p. 106319, 2019.
- [38] J. K. Lee, Y. H. Choi, and J. B. Park, "Sliding mode tracking control of mobile robots with approach angle in cartesian coordinates," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 718–724, 2015.
- [39] D. Chwa, "Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 12, no. 4, pp. 637–644, 2004.

- [40] L. Liu, R. Guo, J. Ji, Z. Miao, and J. Zhou, "Practical consensus tracking control of multiple nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 10, pp. 3831–3847, 2020.
- [41] H. Chen, S. Xu, L. Chu, F. Tong, and L. Chen, "Finite-time switching control of nonholonomic mobile robots for moving target tracking based on polar coordinates," *Complexity*, vol. 2018, 2018.
- [42] M. M. Almasri, A. M. Alajlan, and K. M. Elleithy, "Trajectory planning and collision avoidance algorithm for mobile robotics system," *IEEE Sensors journal*, vol. 16, no. 12, pp. 5021–5028, 2016.
- [43] S. Bouabdallah and R. Siegwart, "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor," in *Proceedings of the 2005 IEEE international conference on robotics and automation*, pp. 2247–2252, IEEE, 2005.
- [44] D. Luo, X. Xiong, S. Jin, and S. Kamal, "Adaptive gains of dual level to super-twisting algorithm for sliding mode design," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 17, pp. 2347–2356, 2018.
- [45] F. Mondada, M. Bonani, X. Raemy, J. Pugh, C. Cianci, A. Klapotcz, S. Magnenat, J.-C. Zufferey, D. Floreano, and A. Martinoli, "The e-puck, a robot designed for education in engineering," in *Proceedings of the 9th conference on autonomous robot systems and competitions*, vol. 1, pp. 59–65, IPCB: Instituto Politécnico de Castelo Branco, 2009.
- [46] R. Vidal, O. Shakernia, and S. Sastry, "Formation control of nonholonomic mobile robots with omnidirectional visual servoing and motion segmentation," in *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 03CH37422)*, vol. 1, pp. 584–589, IEEE, 2003.
- [47] S. Roy, I. N. Kar, and J. Lee, "Toward position-only time-delayed control for uncertain euler-lagrange systems: Experiments on wheeled mobile robots," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 2, no. 4, pp. 1925–1932, 2017.

- [48] M. W. Mehrez, K. Worthmann, J. P. Cenerini, M. Osman, W. W. Melek, and S. Jeon, "Model predictive control without terminal constraints or costs for holonomic mobile robots," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 127, p. 103468, 2020.
- [49] A. El-Shenawy, A. Wellenreuther, A. S. Baumgart, and E. Badreddin, "Comparing different holonomic mobile robots," in *2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 1584–1589, IEEE, 2007.
- [50] W. E. Dixon, W. Galluzo, G. Hu, and C. Crane, "Adaptive velocity field control of a wheeled mobile robot," in *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control, 2005. RoMoCo'05.*, pp. 145–150, IEEE, 2005.
- [51] F. A. Yaghmaie, F. Bakhshande, and H. D. Taghirad, "Feedback error learning control of trajectory tracking of nonholonomic mobile robot," in *20th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE2012)*, pp. 889–893, IEEE, 2012.
- [52] A. Zelei, L. L. Kovács, and G. Stépán, "Computed torque control of an under-actuated service robot platform modeled by natural coordinates," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 5, pp. 2205–2217, 2011.
- [53] Z.-G. Hou, A.-M. Zou, L. Cheng, and M. Tan, "Adaptive control of an electrically driven non-holonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 4, pp. 803–815, 2009.
- [54] E. Kayacan and G. Chowdhary, "Tracking error learning control for precise mobile robot path tracking in outdoor environment," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 95, no. 3, pp. 975–986, 2019.
- [55] J.-y. Zhai and Z.-b. Song, "Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots," *International Journal of Control*, vol. 92, no. 10, pp. 2255–2262, 2019.
- [56] B. J. Emran and A. Yesildirek, "Robust nonlinear composite adaptive control of quadrotor," *International journal of digital information and wireless Communications*, vol. 4, no. 2, pp. 213–225, 2014.

- [57] L. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, and A. G. Loukianov, "Robust block second order sliding mode control for a quadrotor," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 719–739, 2012.
- [58] C. Nicol, C. Macnab, and A. Ramirez-Serrano, "Robust neural network control of a quadrotor helicopter," in *2008 Canadian conference on electrical and computer engineering*, pp. 001233–001238, IEEE, 2008.
- [59] Z. Peng, G. Wen, A. Rahmani, and Y. Yu, "Distributed consensus-based formation control for multiple nonholonomic mobile robots with a specified reference trajectory," *International Journal of Systems Science*, vol. 46, no. 8, pp. 1447–1457, 2015.
- [60] S.-J. Chung and J.-J. E. Slotine, "Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems," *IEEE transactions on Robotics*, vol. 25, no. 3, pp. 686–700, 2009.
- [61] M. Shiomi, F. Zanlungo, K. Hayashi, and T. Kanda, "Towards a socially acceptable collision avoidance for a mobile robot navigating among pedestrians using a pedestrian model," *International Journal of Social Robotics*, vol. 6, no. 3, pp. 443–455, 2014.
- [62] C. De La Cruz and R. Carelli, "Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots," in *IEEE Industrial Electronics, IECON 2006-32nd Annual Conference on*, pp. 3880–3885, IEEE, 2006.
- [63] J. R. Lawton, R. W. Beard, and B. J. Young, "A decentralized approach to formation maneuvers," *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 19, no. 6, pp. 933–941, 2003.
- [64] A. K. Das, R. Fierro, V. Kumar, J. P. Ostrowski, J. Spletzer, and C. J. Taylor, "A vision-based formation control framework," *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 18, no. 5, pp. 813–825, 2002.
- [65] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.

- [66] N. Liu, R. Ling, Q. Huang, and Z. Zhu, "Second-order super-twisting sliding mode control for finite-time leader-follower consensus with uncertain nonlinear multiagent systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.
- [67] G. Zhang, Y. Wang, J. Wang, J. Chen, and D. Qian, "Disturbance observer-based super-twisting sliding mode control for formation tracking of multi-agent mobile robots," *Measurement and Control*, vol. 53, no. 5-6, pp. 908–921, 2020.
- [68] C. M. Cianci, X. Raemy, J. Pugh, and A. Martinoli, "Communication in a swarm of miniature robots: The e-puck as an educational tool for swarm robotics," in *International Workshop on Swarm Robotics*, pp. 103–115, Springer, 2006.
- [69] S. H. A. Mohammad, M. A. Jeffril, and N. Sariff, "Mobile robot obstacle avoidance by using fuzzy logic technique," in *2013 IEEE 3rd International Conference on System Engineering and Technology*, pp. 331–335, IEEE, 2013.
- [70] J. Chen, M. Gauci, W. Li, A. Kolling, and R. Groß, "Occlusion-based cooperative transport with a swarm of miniature mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 2, pp. 307–321, 2015.
- [71] E. A. Antonelo, B. Schrauwen, and D. Stroobandt, "Event detection and localization for small mobile robots using reservoir computing," *Neural Networks*, vol. 21, no. 6, pp. 862–871, 2008.
- [72] R. Austin, *Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment*, vol. 54. John Wiley & Sons, 2011.
- [73] A. B. L. T. Miranda Colorado Roger, Garrido Moctezuma Rubén Alejandro and H. B. J. Ernesto, *DRONES - Modelado y control de cuadrotores*, vol. 1. 2018.
- [74] Z. Xie and Z. Zhong, "Aircraft path planning under adverse weather conditions," in *MATEC Web of Conferences*, vol. 77, p. 15001, EDP Sciences, 2016.
- [75] C. Chen, "Linear system theory and design: Oxford university press," *New York, USA*, 1999.

- [76] H. Boudjedir, O. Bouhali, and N. Rizoug, "Adaptive neural network control based on neural observer for quadrotor unmanned aerial vehicle," *Advanced Robotics*, vol. 28, no. 17, pp. 1151–1164, 2014.
- [77] Y. Huang, H. Wu, H. Liu, and Z. Yin, *Intelligent Robotics and Applications: 10th International Conference, ICIRA 2017, Wuhan, China, August 16–18, 2017, Proceedings, Part I*, vol. 10462. Springer, 2017.
- [78] M. Fatan, B. L. Sefidgari, and A. V. Barenji, "An adaptive neuro pid for controlling the altitude of quadcopter robot," in *2013 18th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR)*, pp. 662–665, IEEE, 2013.
- [79] A. L. Salih, M. Moghavvemi, H. A. Mohamed, and K. S. Gaeid, "Modelling and pid controller design for a quadrotor unmanned air vehicle," in *2010 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*, vol. 1, pp. 1–5, IEEE, 2010.
- [80] K. Chee and Z. Zhong, "Control, navigation and collision avoidance for an unmanned aerial vehicle," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 190, pp. 66–76, 2013.
- [81] Y. Kutsuna, M. Ando, and M. Yamada, "Adaptive tracking control of quad-rotor helicopter in quaternion based on input-output linearisation with online estimation of inertia moment," *International Journal of Advanced Mechatronic Systems*, vol. 6, no. 5, pp. 237–246, 2015.
- [82] B. Erginer and E. Altug, "Modeling and pd control of a quadrotor vtol vehicle," in *2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pp. 894–899, IEEE, 2007.
- [83] L. M. Argentim, W. C. Rezende, P. E. Santos, and R. A. Aguiar, "Pid, lqr and lqr-pid on a quadcopter platform," in *2013 International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV)*, pp. 1–6, IEEE, 2013.
- [84] H. Yañez Badillo, R. Tapia Olvera, O. Aguilar Mejía, and F. Beltrán Carbajal, "Control neuronal en línea para regulación y seguimiento de trayectorias de posición para un quadrotor," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 14, no. 2, pp. 141–151, 2017.



- [85] B. T. M. Leong, S. M. Low, and M. P.-L. Ooi, "Low-cost microcontroller-based hover control design of a quadcopter," *Procedia Engineering*, vol. 41, pp. 458–464, 2012.
- [86] S. Bouabdallah and R. Y. Siegwart, "Full control of a quadrotor," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2007: IROS 2007; Oct. 29, 2007-Nov. 2, 2007, San Diego, CA*, pp. 153–158.
- [87] İ. C. Dikmen, A. Arisoy, and H. Temeltas, "Attitude control of a quadrotor," in *2009 4th International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, pp. 722–727, IEEE, 2009.
- [88] P. Castillo, P. García, R. Lozano, and P. Albertos, "Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 4, no. 1, pp. 41–57, 2007.
- [89] A. A. Mian and W. Daobo, "Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 dof quadrotor helicopter," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 21, no. 3, pp. 261–268, 2008.
- [90] A. Benallegue, A. Mokhtari, and L. Fridman, "High-order sliding-mode observer for a quadrotor uav," *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 18, no. 4-5, pp. 427–440, 2008.
- [91] M. A. Rendón and F. F. Martins, "Path following control tuning for an autonomous unmanned quadrotor using particle swarm optimization," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 325–330, 2017.
- [92] S. Estelles and M. Tomas-Rodriguez, "Quadrotor multibody modelling by vehiclesim: adaptive technique for oscillations in a pva control system," *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 16, pp. 2704–2723, 2017.
- [93] P.-i. Pipatpaibul and P. Ouyang, "Application of online iterative learning tracking control for quadrotor uavs," *International Scholarly Research Notices*, vol. 2013, 2013.

- [94] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart, "Design and control of an indoor micro quadrotor," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004*, vol. 5, pp. 4393–4398, IEEE, 2004.
- [95] T. Bresciani, "Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter," *MSc Theses*, 2008.
- [96] G. Hoffmann, S. Waslander, and C. Tomlin, "Quadrotor helicopter trajectory tracking control," in *AIAA guidance, navigation and control conference and exhibit*, p. 7410, 2008.
- [97] Z. T. Dydek, A. M. Annaswamy, and E. Lavretsky, "Adaptive configuration control of multiple uavs," *Control Engineering Practice*, vol. 21, no. 8, pp. 1043–1052, 2013.
- [98] I. Gonzalez-Hernandez, F. M. Palacios, S. S. Cruz, E. S. E. Quesada, and R. L. Leal, "Real-time altitude control for a quadrotor helicopter using a super-twisting controller based on high-order sliding mode observer," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 14, no. 1, p. 1729881416687113, 2017.
- [99] M. Vahdanipour and M. Khodabandeh, "Adaptive fractional order sliding mode control for a quadrotor with a varying load," *Aerospace Science and Technology*, vol. 86, pp. 737–747, 2019.
- [100] A. Swamp *et al.*, "Second order sliding mode control for quadrotor," in *2016 IEEE First International Conference on Control, Measurement and Instrumentation (CMI)*, pp. 92–96, IEEE, 2016.
- [101] Z. Zhao, D. Cao, J. Yang, and H. Wang, "High-order sliding mode observer-based trajectory tracking control for a quadrotor uav with uncertain dynamics," *Nonlinear Dynamics*, vol. 102, no. 4, pp. 2583–2596, 2020.
- [102] V. K. Tripathi, A. K. Kamath, L. Behera, N. K. Verma, and S. Nahavandi, "Finite-time super twisting sliding mode controller based on higher-order sliding mode observer for real-time trajectory tracking of a quadrotor," *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 16, pp. 2359–2371, 2020.

- [103] J. Chang, J. Cieslak, J. Dávila, A. Zolghadri, and J. Zhou, “Adaptive second-order sliding mode observer for quadrotor attitude estimation,” in *2016 American Control Conference (ACC)*, pp. 2246–2251, IEEE, 2016.
- [104] O. Mofid and S. Mobayen, “Adaptive sliding mode control for finite-time stability of quadrotor uavs with parametric uncertainties,” *ISA transactions*, vol. 72, pp. 1–14, 2018.
- [105] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [106] R. Marino, “Nonlinear control design: Geometric,” *Adaptive and robust*, 1995.
- [107] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive control: stability, convergence and robustness*. Courier Corporation, 2011.
- [108] I. R. Manchester and J.-J. E. Slotine, “Robust control contraction metrics: A convex approach to nonlinear state-feedback  $h^\infty$  control,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 2, no. 3, pp. 333 – 338, 2018.
- [109] J. NOGUERA, O. GARCIA, and C. ROBLES, “Modelado y control de un robot manipulador utilizando las técnicas de control estándar y  $h^\infty$ ,” *Revista Espacios*, vol. 38, no. 58, 2017.
- [110] M. Krstic, P. V. Kokotovic, and I. Kanellakopoulos, *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [111] C. Vivas, *Control óptimo y robusto  $H^\infty$  [signo de infinito] de sistemas no lineales: aplicaciones a sistemas electromecánicos*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2004.
- [112] V. I. Utkin, “Sliding mode control design principles and applications to electric drives,” *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23–36, 1993.
- [113] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding mode control and observation*, vol. 10. Springer, 2014.
- [114] C. Edwards and Y. Shtessel, “Adaptive dual-layer super-twisting control and observation,” *International Journal of Control*, vol. 89, no. 9, pp. 1759–1766, 2016.

- [115] X. Xiong, S. Kamal, and S. Jin, "Adaptive gains to super-twisting technique for sliding mode design," *Asian Journal of Control*, 2019.
- [116] J. A. Moreno and M. Osorio, "A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers," in *2008 47th IEEE conference on decision and control*, pp. 2856–2861, IEEE, 2008.
- [117] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, and E. Usai, "A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 875–892, 2003.
- [118] Y. Orlov, L. Aguilar, and J. Cadiou, "Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 959–967, 2003.
- [119] I. Boiko\*, "Analysis of sliding modes in the frequency domain," *International Journal of Control*, vol. 78, no. 13, pp. 969–981, 2005.
- [120] L. M. Fridman, "Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 906–912, 2003.
- [121] Y. B. Shtessel, J. A. Moreno, and L. M. Fridman, "Twisting sliding mode control with adaptation: Lyapunov design, methodology and application," *Automatica*, vol. 75, pp. 229–235, 2017.
- [122] C. De La Cruz and R. Carelli, "Dynamic model based formation control and obstacle avoidance of multi-robot systems," *Robotica*, vol. 26, no. 3, pp. 345–356, 2008.
- [123] H. K. Khalil, "Nonlinear systems," *Prentice-Hall, New Jersey*, vol. 2, no. 5, pp. 5–1, 1996.
- [124] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak, "New methodologies for adaptive sliding mode control," *International journal of control*, vol. 83, no. 9, pp. 1907–1919, 2010.
- [125] H. Ríos, R. Falcón, O. A. González, and A. Dzul, "Continuous sliding-mode control strategies for quadrotor robust tracking: real-time application," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 2, pp. 1264–1272, 2018.
- [126] GCtronic, "e-puck education robot." url<http://www.e-puck.org/>, 2018.

# Apéndice A

## Robot E-puck

En el presente apéndice se muestra lo relacionado con el robot móvil E-puck que se utilizó para el control super-twisting simplificado bajo la estrategia líder-seguidor.

Los robots móviles e-puck fueron desarrollados como hardware abierto en la Escuela Politécnica Federal de Lausana (EPFL) [126], cuyo objetivo de desarrollo fue alcanzar los siguientes criterios: tamaño de escritorio, amplio rango de posibilidades desde el punto de vista de un ingeniero hasta un estudiante, amigable con el usuario, bajo costo, ideología abierta. Priorizando la flexibilidad y el tamaño de escritorio. La figura A.1 muestra la imagen de uno de los robots e-puck utilizado durante los experimentos.

El hardware de los robots e-puck está conformado por los siguientes elementos

- **Microcontrolador.** Dispone de un microcontrolador dsPIC 30F6014A de la empresa microchip. Este cuenta con un procesador de 16 bits con archivo de registro de 16 entradas y un procesador digital de señales. Tiene una velocidad de 64MHz y provee 16 MIPS picos de poder de procesamiento. Memoria RAM de 8Kb y Flash de 144Kb.
- **Sensores.** Ocho sensores infrarrojos de proximidad, ubicados alrededor de la carrocería del robot. Un acelerómetro 3D. Tres micrófonos para captura de sonidos por triangulación.
- **Actuadores.** Dos motores paso a paso con una resolución de 1000 pasos por revolución. Un altavoz conectado a un códec de audio.

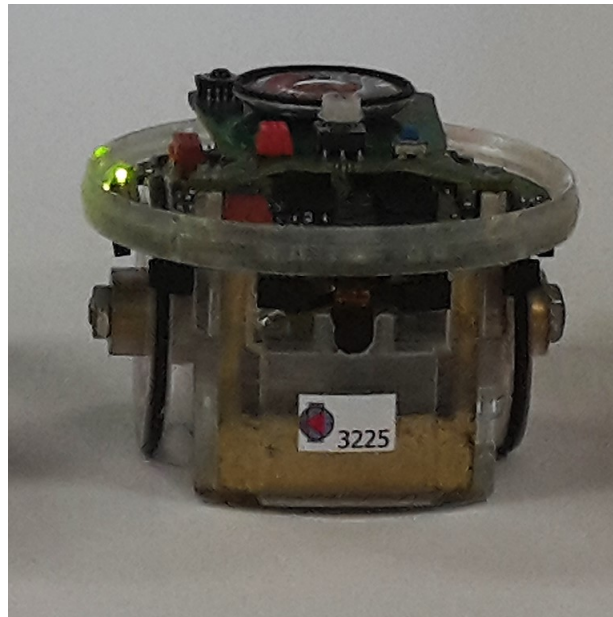


Figura A.1: Robot móvil e-puck

Ocho LED rojos con la posibilidad de modular su intensidad lumínica.

Un grupo de LED verdes.

- **Interfaz de usuario.** el e-puck contiene varios dispositivos para interactuar con el usuario y comunicarse con otros equipos: Dos LED muestran el estado de la batería: uno indica si el robot está encendido, mientras que el otro indica una condición de batería baja.  
Un conector para interactuar con un depurador en circuito, para programar la memoria flash y depurar el código.  
Un receptor de control remoto por infrarrojos, para controlar el e-puck.  
Una interfaz serial RS232 clásica para comunicarse una computadora de escritorio.  
Un enlace de radio Bluetooth para conectarse a una computadora de escritorio o para comunicarse con hasta otros 7 e-pucks.  
Un botón de reinicio.  
Un interruptor giratorio de 16 posiciones para especificar un número de 4 bits, que se puede utilizar, por ejemplo, para seleccionar entre comportamientos o parámetros pre-programados.

- **Mecánica.** El robot tiene un diámetro de 75 mm. y una altura que depende de las extensiones conectadas. La estructura mecánica del e-puck consiste en inyecciones de partes plásticas. La estructura del robot es simple, está hecha de solo cuatro piezas de plástico: el cuerpo principal, anillo de luz y las dos ruedas.

El cuerpo principal es el núcleo de la estructura mecánica y encierra la batería. El usuario puede extraer la batería de la parte inferior del e-puck. Los dos motores simplemente se atornillan lateralmente al cuerpo principal, con las ruedas unidas directamente al motor eje. La placa de circuito impreso principal, que contiene la mayoría de la electrónica, se atornilla en la parte superior del cuerpo principal.

Las partes mecánicas son transparentes y permiten observar todos componentes. anillo de difusión de luz

La Figura A.2 muestra la estructura mecánica del e-puck en una vista explosionada.

El robot se puede programar con distintos lenguajes como por ejemplo: ensamblador, C, python, Matlab<sup>®</sup>, etc. Este trabajo se desarrollo en la plataforma de Matlab<sup>®</sup>, además de ser relativamente sencillo, no requieren licencia para su uso.

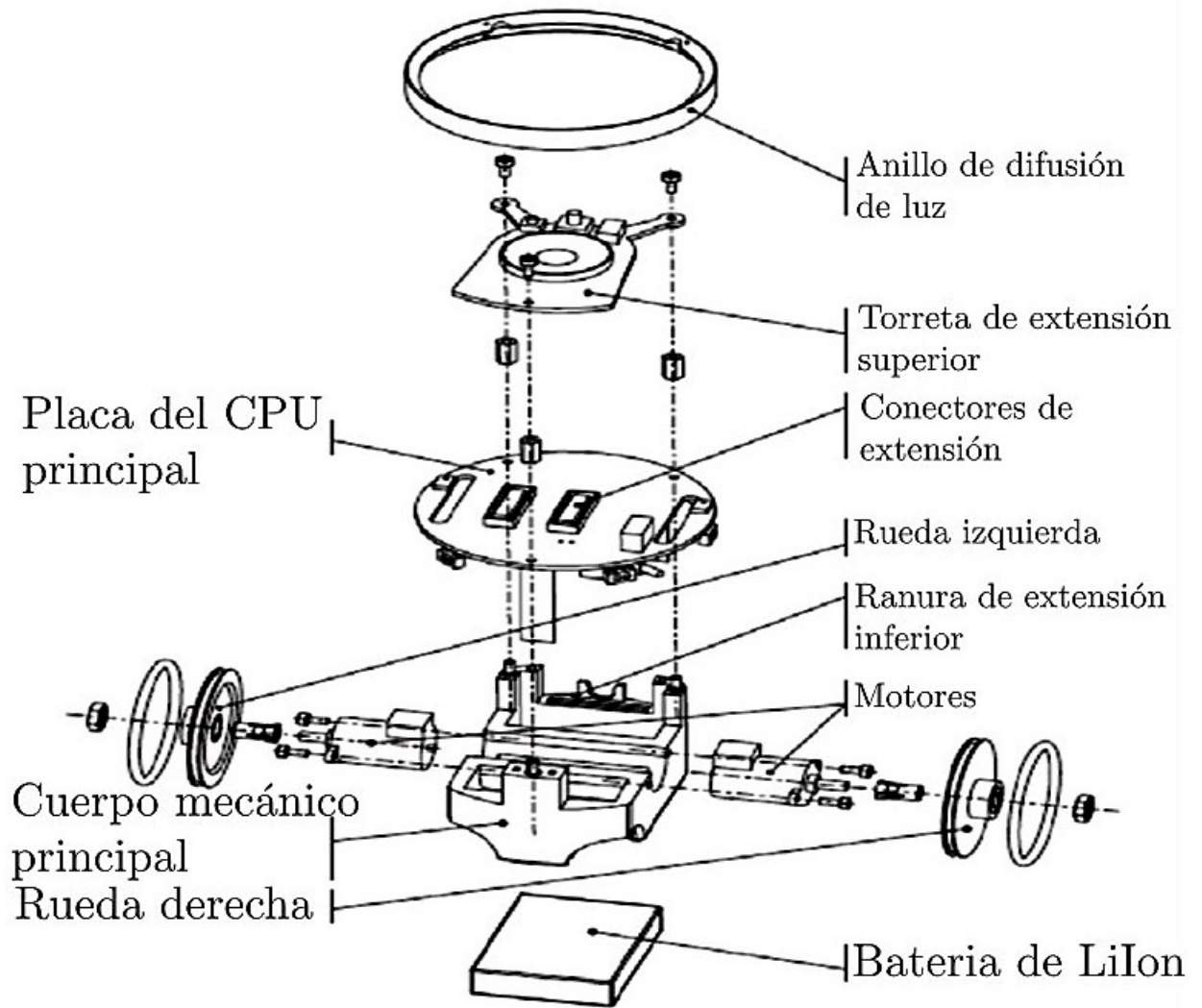


Figura A.2: La estructura mecánica del robot e-puck en una vista explosionada.



# Apéndice B

## Publicaciones

### B.1. Revistas

**Gutierrez, S. V.**, De León - Morales, J., Plestan, F., & Salas - Peña, O. (2019). A simplified version of adaptive super-twisting control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.

Cano-González, J. A., Salas-Peña, O., **Gutierrez, S. V.**, De León-Morales, J. (2020). Quadrotor Altitude Control Based on Sliding Mode Control. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, 1-9.

### B.2. Congresos

Zhang, C., Gutierrez, S. V., Plestan, F., & de León-Morales, J. (2019). Adaptive super-twisting control of floating wind turbines with collective blade pitch control. *IFAC-PapersOnLine*, 52(4), 117-122.