

INTRODUCTION A L'ÉTUDE

DE LA

MÉCANIQUE ONDULATOIRE





Cliché MANUEL FRÈRES, PARIS.

Louis de Broglie

INTRODUCTION A L'ETUDE

DE LA

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

PAR

Louis DE BROGLIE

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA SORBONNE

LAURÉAT DU PRIX NOBEL DE PHYSIQUE, 1929



OAW
530.12
D278 I



PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET C^{ie}

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1930

7004

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

COPYRIGHT 1931 BY LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN
ET C^{ie}, PARIS.



INTRODUCTION GÉNÉRALE

La nouvelle mécanique ondulatoire a reçu depuis deux ans le solide appui de l'expérience grâce à la découverte d'un beau phénomène totalement inconnu jusque-là : la diffraction des électrons par les cristaux.

A un certain point de vue, on peut dire que cette découverte forme l'exacte contre-partie de la découverte plus ancienne de l'effet photo-électrique, car elle nous montre que, pour la matière comme pour la lumière, nous avons jusqu'ici négligé une des faces de la réalité physique.

La découverte de l'effet photo-électrique nous avait en effet appris que la théorie ondulatoire de la lumière établie sur des bases solides par Fresnel et transportée ensuite dans la théorie électromagnétique par Maxwell, bien qu'elle contienne une grande part de vérité, n'est cependant pas suffisante et qu'il est, en un certain sens, nécessaire de reprendre l'idée des corpuscules de lumière déjà proposée par Newton.

Planck, dans sa célèbre théorie du rayonnement noir, avait été amené à supposer que tout rayonnement de fréquence ν est toujours émis et absorbé par quantités égales et finies, par quanta de valeur $h\nu$, h étant la constante auquel le nom de Planck restera attaché. Pour interpréter l'effet photo-électrique, Einstein n'a eu qu'à admettre l'hypothèse suivante tout à fait conforme aux idées de Planck : la lumière est formée de corpuscules et l'énergie des corpuscules dans la lumière de fréquence

ν est $h\nu$. Lorsqu'un corpuscule de lumière, en traversant un morceau de matière, rencontre un électron immobile, il peut lui céder son énergie $h\nu$, et l'électron mis ainsi en mouvement sortira de la matière animé d'une énergie cinétique égale à la différence entre l'énergie $h\nu$ qu'il a reçue et le travail qu'il a dû fournir pour sortir de la matière. Or, c'est là précisément la loi expérimentale de l'effet photo-électrique telle qu'elle a été vérifiée successivement pour toutes les radiations depuis l'ultra-violet jusqu'aux rayons X et γ .

Développant son idée, Einstein a montré que si l'on accepte l'hypothèse des corpuscules de lumière ou quanta de lumière, on doit attribuer à chacun de ces corpuscules une quantité de mouvement $p = \frac{h\nu}{c}$ à côté de l'énergie $W = h\nu$. Ces deux relations définissent énergétiquement le corpuscule de lumière de fréquence ν .

Plus récemment, la théorie corpusculaire d'Einstein a été confirmée par la découverte de l'effet Compton. Voici en quoi il consiste : un faisceau de rayons X tombant sur un morceau de matière est susceptible de subir un abaissement de fréquence avec mise en mouvement d'électrons plus ou moins rapides. Le phénomène s'interprète aisément en admettant qu'il y a une rencontre, un choc, entre un corpuscule de lumière et un électron initialement au repos dans le morceau de matière. Pendant le choc, l'électron emprunte de l'énergie au corpuscule de lumière et se met en mouvement. Le corpuscule de lumière se trouve avoir perdu une partie de son énergie, et comme la relation $W = h\nu$ doit toujours être vérifiée, la fréquence du quantum de lumière sera plus faible après le choc qu'avant. La théorie du phénomène de Compton, basée sur les deux relations $W = h\nu$ et $p = \frac{h\nu}{c}$, a été développée par Compton lui-même et par

Debye : l'expérience l'a quantitativement confirmée, et cela a été un autre beau succès pour l'hypothèse que la lumière a une structure granulaire.

Malgré ces succès, la théorie des quanta de lumière ne saurait à elle seule nous donner satisfaction. D'abord, l'ensemble des phénomènes de diffraction et d'interférences exige l'introduction du concept d'ondes et, de plus, les deux relations fondamentales $W = h\nu$ et $p = \frac{h\nu}{c}$ impliquent l'existence d'une fréquence ν . Ceci suffit à montrer que la lumière ne peut pas être constituée par de simples grains en mouvement. Néanmoins, la découverte de l'effet photo-électrique, confirmée par l'effet Compton, a montré la nécessité d'introduire en Optique la notion de corpuscules à côté de la notion d'ondes. Une étrange « dualité » de nature paraît donc ici s'imposer.

Mais si, dans la théorie de la lumière, on avait depuis un siècle trop négligé l'aspect « corpuscule » pour s'attacher exclusivement à l'aspect « onde », n'a-t-on pas commis l'erreur inverse dans la théorie de la matière? N'a-t-on pas à tort négligé l'aspect « ondes » pour ne penser qu'à l'aspect « corpuscules »? Ce sont les questions que l'auteur s'est posées, il y a quelques années, en réfléchissant à l'analogie entre le principe de moindre Action et le principe de Fermat et au sens des mystérieuses conditions de quanta introduites dans la dynamique intraatomique par Plank, Bohr, Wilson et Sommerfeld. Par des raisonnements que nous passons sous silence on peut arriver à la conviction qu'il est nécessaire d'introduire des ondes dans la théorie de la matière et de le faire sous la forme suivante :

Soit une particule matérielle (un électron, par exemple) de masse m qui se déplace librement avec une vitesse constante v . Si l'on adopte les expressions fournies par

la théorie de la Relativité, son énergie et sa quantité de mouvement sont :

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \vec{p} = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2} v \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (1)$$

c étant la vitesse de la lumière dans le vide. Suivant la nouvelle conception, il faut associer à cette particule une onde se propageant dans la direction du mouvement, onde dont la fréquence est :

$$\nu = \frac{W}{h} \quad (2)$$

et dont la vitesse de phase est :

$$V = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta} \quad (3)$$

On a donc :

$$\frac{h\nu}{V} = \frac{Wv}{c^2} = p \quad (4)$$

et par suite si λ est la longueur d'onde de l'onde associée,

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{p} \quad (5)$$

Si l'on cherche à appliquer ces formules non plus à une particule matérielle, mais à une particule de lumière, on doit faire $v = c$ et on trouve :

$$W = h\nu \quad p = \frac{h\nu}{c} \quad (6)$$

Ce sont bien là les formules fondamentales de la théorie des quanta de lumière. Nos formules (2) à (5) sont donc générales : elles s'appliquent aussi bien à la matière et au rayonnement et elles expriment la nécessité dans les deux cas d'introduire côte à côte les notions de corpuscule et d'onde.

Comme cela résulte en particulier des beaux mémoires de M. Schrödinger la Mécanique ancienne correspond au cas où la propagation de l'onde associée se fait suivant les lois de l'optique géométrique. Dans ce cas, le corpuscule peut être regardé comme décrivant un des « rayons » de l'onde avec une vitesse égale à la vitesse du groupe de lord Rayleigh. On peut donc, dans ces conditions, considérer le corpuscule comme constitué par un groupe d'ondes de fréquences très voisines, et ceci donne une image physique du corpuscule qui serait bien satisfaisante s'il était possible de la généraliser; malheureusement cela n'est pas,

Il est à noter que si l'onde associée se propage suivant les lois de l'optique géométrique, aucune expérience ne peut suffire à prouver l'existence des ondes associées parce que le résultat d'une expérience peut alors toujours être regardé comme prouvant seulement l'exactitude des lois de l'ancienne Mécanique. Mais il en est tout autrement quand les conditions de propagation de l'onde associée sont telles que les approximations de l'optique géométrique ne sont plus suffisantes pour en rendre compte. Nous devons alors nous attendre, d'après les nouvelles idées, à pouvoir observer des phénomènes que les anciennes Mécaniques sont tout à fait impuissantes à prévoir et qui sont caractéristiques de la nouvelle conception ondulatoire de la Dynamique.

Dans le domaine propre de la nouvelle Dynamique, le principe qui paraît le mieux établi est que le carré de l'amplitude de l'onde, son intensité, doit mesurer en chaque point de l'espace et à chaque instant la probabilité pour que le corpuscule associé se trouve en ce point à cet instant. Il suffit d'un peu de réflexion pour voir que ce principe est nécessaire pour rendre compte des phénomènes d'interférence et de diffraction de la lumière, car, en optique, là où l'onde de Fresnel a une

intensité maximum, là on peut recueillir en moyenne le plus d'énergie lumineuse. Puisque notre idée directrice est de rapprocher autant que possible la théorie de la lumière de celle de la matière, il est bien naturel d'étendre le principe, nécessaire dans le cas de la lumière, au cas des particules matérielles,

Nous arrivons ainsi à l'idée que les corpuscules matériels doivent pouvoir présenter des phénomènes analogues aux phénomènes d'interférences et de diffraction de la lumière et que les méthodes de calcul doivent être très analogues dans l'un et l'autre cas. Avec les nouvelles conceptions, un nuage d'électrons de même vitesse doit être associé à une onde plane monochromatique. Supposons que ce nuage d'électrons tombe sur un milieu à structure régulière comme un cristal : si les distances qui séparent les éléments de cette structure sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de l'onde incidente, il y aura diffraction de cette onde et dans certaines directions aisément calculables, il y aura maximum de l'amplitude de l'onde diffusée. On doit donc s'attendre à ce que les électrons se trouvent concentrés après la diffusion dans certaines directions. On aura ainsi l'analogie exact des expériences de Laue avec les rayons X, et si le résultat est conforme aux prévisions de la théorie, on aura obtenu une preuve très directe et très forte en faveur de la nécessité de compléter, même pour la matière, la notion de corpuscule par celle d'onde.

Ces expériences ont été réalisées par des méthodes diverses et dans des conditions différentes par MM. Davisson et Germer à New-York, le professeur G.-P. Thomson à Aberdeen et M. Rupp à Göttingen. L'accord entre la théorie et l'expérience est excellent : les écarts qui avaient été constatés dans les premières expériences de Davisson et Germer paraissent s'expliquer très naturel-

lement si l'on tient compte de l'indice de réfraction des ondes dans le cristal. M. Rupp a même pu obtenir tout récemment la diffraction d'un faisceau d'électrons à l'aide d'un réseau linéaire ordinaire employé sous une incidence tangentielle. Les confirmations expérimentales sont donc aussi complètes qu'on peut le désirer.

Ainsi donc, un ensemble de magnifiques résultats expérimentaux ont nettement établi que l'on doit faire intervenir partout en Physique et simultanément des corpuscules et des ondes. Mais que signifie exactement cette dualité : ondes et corpuscules ? C'est une question très difficile et qui est loin d'être encore bien clairement élucidée.

L'idée la plus simple est celle que Schrödinger a mise en avant au début de ses travaux : le corpuscule, l'électron serait constitué par un groupe d'ondes, ce serait un « Wellenpaket ». Nous avons vu que cela peut se soutenir tant que l'on considère les phénomènes mécaniques en accord avec l'ancienne Dynamique, c'est-à-dire, dans le langage nouveau, les phénomènes où la propagation de l'onde associée obéit aux lois de l'Optique géométrique. Malheureusement, quand on passe au domaine propre de la nouvelle théorie, cette idée séduisante par sa simplicité ne paraît plus guère possible à soutenir. Dans une expérience comme celle de la diffraction d'un électron par un cristal, le paquet d'ondes serait tout à fait dispersé et détruit ; on ne retrouverait donc pas de corpuscules dans les faisceaux diffusés. En d'autres termes, s'ils étaient de simples paquets d'ondes, les corpuscules n'auraient pas d'existence stable.

Si l'idée de Schrödinger paraît impossible à soutenir jusqu'au bout, une autre opinion, à laquelle l'auteur s'est longtemps attaché et suivant laquelle le corpus-

cule serait une singularité dans un phénomène ondulatoire, ne paraît pas non plus facile à développer. Dans le cas particulier du mouvement uniforme d'un corpuscule, il est possible de trouver une solution de l'équation des ondes présentant une singularité mobile et pouvant servir à représenter le corpuscule. Mais il est bien difficile de généraliser cela au cas du mouvement non uniforme, et il existe de sérieuses objections contre ce point de vue.

L'auteur a fait aussi une autre tentative qui se trouve exposée dans son rapport au V^e Congrès Solvay. Dans cette tentative, on part de l'idée suivante : puisque nous devons toujours associer une onde à un corpuscule, l'idée la plus conforme aux anciennes conceptions de la physique, c'est de considérer l'onde comme un véritable phénomène réel occupant une certaine région de l'espace, et le corpuscule comme un point matériel ayant une certaine position dans l'onde. Comme il faut, nous l'avons dit, que l'intensité de l'onde soit proportionnelle en chaque point à la probabilité de présence du corpuscule, il faut chercher à relier le mouvement du corpuscule à la propagation de l'onde, de façon que cette relation soit automatiquement et toujours réalisée.

En fait, il est réellement possible d'établir entre le mouvement du corpuscule et la propagation de l'onde une liaison telle que, si à l'instant initial l'intensité de l'onde mesure en chaque point la probabilité de présence du corpuscule, il en soit de même à tout instant postérieur. On peut donc concevoir le corpuscule comme guidé par l'onde qui joue le rôle d'onde-pilote. Cette conception visualise d'une façon intéressante le mouvement des corpuscules en Mécanique ondulatoire sans qu'on ait trop à s'écarter des idées classiques. Malheureusement, ici aussi, on rencontre des objections très graves et il n'est pas possible de considérer la théorie

de l'onde-pilote comme satisfaisante. Néanmoins, comme les équations sur lesquelles cette théorie repose sont incontestables, on peut conserver quelques-uns des résultats de cette théorie en leur donnant une forme adoucie en conformité avec des idées développées indépendamment de l'auteur par M. Kennard (1). Au lieu de parler du mouvement et de la trajectoire des corpuscules, on parle du mouvement et de la trajectoire des « éléments de probabilité », et l'on évite ainsi les difficultés signalées.

Enfin il existe un quatrième point de vue, le plus en faveur actuellement : celui qui a été développé par MM. Heisenberg et Bohr. Ce point de vue est un peu déconcertant au premier abord, mais il paraît cependant contenir une grande part de vérité. Dans cette conception, l'onde ne représente pas du tout un phénomène physique s'accomplissant dans une région de l'espace; elle est bien plutôt une simple représentation symbolique de ce que nous savons sur le corpuscule. Une expérience ou une observation ne nous permet jamais de dire exactement : tel corpuscule occupe telle position dans l'espace et il a telle vitesse en grandeur et direction. Tout ce que l'expérience peut nous apprendre, c'est que la position et la vitesse du corpuscule sont comprises entre certaines limites, autrement dit qu'il y a telle probabilité pour que le corpuscule ait telle position et telle autre pour qu'il ait telle vitesse. Les renseignements que nous apporte une première expérience ou observation faite à l'instant t_0 peuvent être représentés symboliquement par une onde dont l'intensité à cet instant t_0 donne en chaque point la probabilité de présence du corpuscule en ce point et dont la composition spectrale nous donne la probabilité relative des divers états de mouvements. Si nous étudions la propagation de l'onde depuis l'instant t_0 jusqu'à un ins-

(1) *Physical Review*, XXXI, 1928, p. 876.

tant postérieur t , la répartition des intensités et la composition spectrale de l'onde à l'instant t nous permettront de dire quelle est la probabilité pour qu'une seconde expérience ou observation faite à l'instant t localise le corpuscule en tel point ou lui attribue tel état de mouvement.

La conséquence essentielle de cette manière de voir est la « relation d'indétermination » d'Heisenberg. Un train d'ondes limité ne peut être considéré comme sensiblement monochromatique que si ses dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde. Si donc on parvient par une observation à localiser le corpuscule dans une région de l'espace qui ne soit pas de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde, on devra représenter le corpuscule par un train d'ondes qui ne sera pas du tout monochromatique. Donc, au point de vue d'Heisenberg, plus on voudra préciser la détermination de la position, plus l'état de mouvement sera mal déterminé. Inversement, plus l'état de mouvement du corpuscule sera bien défini, plus l'onde associée se rapprochera d'une onde plane monochromatique à amplitude constante. Donc, plus l'état de mouvement sera exactement défini, moins la position du corpuscule pourra être estimée avec certitude.

Bohr dit qu'il y a « deux faces complémentaires de la réalité » : la localisation dans l'espace-temps et la spécification dynamique par énergie et quantité de mouvement. Ce sont comme deux plans différents sur lesquels nous ne pouvons pas être exactement au point en même temps. Faisons une comparaison. Soit un dessin dont certaines parties sont tracées dans un plan Π et d'autres parties dans un plan Π' parallèle et très voisin du premier. Si nous examinons ce dessin avec un instrument optique qui n'est pas très précis, nous parviendrons, en mettant au point sur un plan intermédiaire entre Π et Π' , à obtenir

une image assez convenable du dessin ; nous aurons alors l'impression que tout le dessin est tracé dans un même plan. Mais si nous employons un instrument d'optique très précis, nous ne pourrons pas être au point à la fois sur Π et sur Π' : plus nous mettrons exactement au point sur Π , plus l'image des parties du dessin qui sont tracées sur Π' sera mauvaise, et inversement : alors nous serons obligés de reconnaître que le dessin n'est pas tracé sur un même plan. L'ancienne Mécanique était l'analogie de l'instrument peu précis : avec elle, nous avions l'illusion de pouvoir préciser exactement à la fois la position du corpuscule et son état de mouvement. Mais avec la nouvelle Mécanique, qui est l'analogie de l'instrument très précis, nous sommes obligés de reconnaître que la localisation dans l'espace et le temps et la spécification énergétique sont deux plans différents de la réalité qu'on ne peut voir avec précision en même temps.

Telle est, semble-t-il, l'idée fondamentale de MM. Bohr et Heisenberg.

Cette manière de voir entraîne la conséquence déjà prévue par M. Born, que nous ne pouvons plus affirmer l'existence d'un déterminisme rigoureux dans la Nature, car tout le déterminisme de l'ancienne Dynamique reposait sur la possibilité de déterminer simultanément la position et la vitesse initiale d'un corpuscule, ce qui est impossible si l'on admet les idées d'Heisenberg. Il n'y a plus alors de lois rigoureuses, mais seulement des lois de probabilité.

Avec cette façon d'interpréter la Mécanique ondulatoire, on rencontre bien des circonstances étranges. D'abord, les corpuscules existent et on admet toujours que cela a un sens de parler de leur nombre ; néanmoins, on ne peut plus, avec les idées de Bohr, s'en faire l'image claire et classique qui consiste à les regarder comme de très petits objets ayant une position dans

l'espace, une vitesse et une trajectoire. En second lieu, l'autre terme du dualisme, l'onde, n'est plus qu'une représentation purement symbolique et analytique de certaines probabilités et ne constitue plus du tout un phénomène physique au sens ancien du mot. Un exemple montre clairement ce dernier point. Supposons qu'au temps t , le train d'ondes associé à un corpuscule occupe une région R de l'espace et qu'une certaine observation faite à cet instant nous permette d'affirmer que le corpuscule se trouve dans une région R' naturellement comprise dans R : alors le paquet d'ondes doit être « réduit » suivant l'expression d'Heisenberg, c'est-à-dire que toute la partie de l'onde intérieure à R , mais extérieure à R' , s'évanouit comme s'évanouit l'espérance d'un événement qui ne se réalise pas. Ceci montre bien clairement le caractère non physique de l'onde dans les conceptions de Bohr et Heisenberg.

En résumé, l'interprétation physique de la nouvelle Mécanique reste un sujet extrêmement difficile. Néanmoins, un grand fait est maintenant bien établi ; ce fait, c'est que pour la matière et pour le rayonnement, on doit admettre le dualisme des ondes et des corpuscules et que la répartition dans l'espace des corpuscules ne peut se prévoir que par des considérations ondulatoires. Malheureusement, la nature profonde des deux termes du dualisme et le rapport exact qui existe entre eux restent encore assez mystérieux.





CHAPITRE PREMIER

LES ANCIENNES MÉCANIQUES DU POINT MATÉRIEL

1. — *Principe d'Hamilton.* — Il y a deux anciennes Mécaniques. La première, la plus ancienne, est la Mécanique classique, la Mécanique de Newton. La seconde est la Mécanique relativiste d'Einstein. La Mécanique de Newton est longtemps restée suffisante pour les besoins de la science, mais les profondes conceptions d'Einstein ont montré qu'il fallait la modifier de façon à obtenir une Mécanique qui coïncide avec l'ancienne quand la vitesse du point matériel envisagé est faible vis-à-vis de la vitesse c de la lumière dans le vide, mais qui s'en écarte pour les vitesses élevées.

Les deux anciennes Mécaniques, malgré les différences qui les séparent, présentent aussi d'importantes analogies; les équations générales ont la même forme, elles dérivent toutes les deux du même principe, le principe de moindre action, etc. Pour cette raison, il est facile de faire un exposé simultané des principes généraux des deux anciennes Mécaniques. C'est un point essentiel que toutes les formules de la Mécanique de Newton se déduisent de la Dynamique d'Einstein en supposant que la vitesse de la lumière dans le vide a une valeur infiniment grande : autrement dit, la formule classique s'obtient toujours à partir de la formule relativiste en développant en série par rapport à la quantité $\beta = \frac{v}{c}$ et en négligeant les termes d'ordres supérieurs.

Nous envisagerons d'abord la Dynamique du point matériel unique, c'est-à-dire que nous étudierons le mouvement d'un corpuscule dans un champ de force supposé donné. Nous définirons ce champ de force par une fonction

potentielle $F(x, y, z, t)$ des coordonnées d'espace et de temps. Dans les anciennes Mécaniques, on considère les points matériels, les corpuscules, comme ayant une position bien définie dans l'espace, de telle façon qu'il est possible de repérer leur position par trois coordonnées. Le corpuscule ayant ainsi à chaque instant une position bien définie dans l'espace, on peut évidemment aussi définir sa vitesse comme étant la limite du quotient de l'espace parcouru le long de la trajectoire au temps mis à le parcourir, quand ce temps de parcours tend vers zéro. Si la position du corpuscule est repérée à l'aide de coordonnées rectangulaires, on a $v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, les accents désignant des dérivées par rapport au temps. Dans le cas général où l'on emploie des coordonnées curvilignes quelconques q_1, q_2, q_3 , la vitesse s'exprimera par une certaine fonction des q_i et des q_i' .

Le principe fondamental des deux anciennes Dynamiques est le principe d'action stationnaire d'Hamilton. Supposons qu'à l'instant t_0 le corpuscule occupe un point M_0 de l'espace et qu'à l'instant postérieur t_1 il occupe une position M_1 . Le problème qui se pose en Dynamique du point matériel est de déterminer le mouvement du corpuscule dans l'intervalle de temps entre t_0 et t_1 . Le principe d'Hamilton affirme qu'il existe une certaine fonction $\mathcal{L}(q_i, q_i', t)$ des q_i , des q_i' et du temps telle que le mouvement du mobile entre t_0 et t_1 soit caractérisé par la propriété suivante : l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ est plus petite pour le mouvement réel que pour tout autre mouvement infiniment peu différent qui conduirait aussi le corpuscule du point M_0 au temps t_0 jusqu'au point M_1 au temps t_1 .

L'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ est l'intégrale d'action Hamiltonienne; la fonction \mathcal{L} est nommée la fonction de Lagrange, parfois aussi le potentiel cinétique.

Le principe de moindre action d'Hamilton s'exprime donc par la formule :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q_i, q_i', t) dt = 0 \quad (1)$$

t_0 et t_1 étant invariables et le symbole δ signifiant qu'on fait varier infiniment par la forme des fonctions $q_i(t)$ et par suite des $q'_i(t)$ de façon que les valeurs initiales et finales des q_i restent invariables.

2. — *Équations de Lagrange.* — Le procédé général qui sert dans le calcul des variations va nous conduire aux équations de Lagrange. Si nous modifions la fonction $q_i(t)$ pour chaque valeur du temps t de façon à lui donner la valeur $q_i(t) + \delta q_i(t)$, la fonction $q'_i(t)$ deviendra $q'_i(t) + \delta q'_i(t)$ et l'on aura :

$$\delta \mathcal{L} = \sum_1^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \delta q'_i \right) \quad (2)$$

et par suite (t_0 et t_1 étant fixes) :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \delta q'_i \right) dt = 0 \quad (3)$$

Or :

$$\delta q'_i = \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d\delta q_i}{dt}$$

et en intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \delta q'_i dt &= \left| \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \right) \delta q_i dt \end{aligned} \quad (4)$$

d'où pour l'expression du principe d'Hamilton :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^3 \delta q_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \right) \right] dt = 0 \quad (5)$$

Les δq_i étant arbitraires, il en résulte que l'on doit avoir :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

Ce sont les équations de Lagrange. Elles définissent le mouvement du corpuscule en fonction de 6 constantes arbitraires qui sont par exemple les trois coordonnées initiales et les trois composantes de la vitesse initiale.

3. — Fonction de Lagrange. Quantité de mouvement et énergie. — Jusqu'ici notre théorie dynamique est restée une forme vide parce que nous n'avons pas précisé quelle était l'expression en fonction des q_i , des q_i' et de t de la fonction \mathcal{L} de Lagrange. C'est précisément ici que les deux anciennes Mécaniques (Newton et Einstein) se séparent en choisissant différemment la fonction \mathcal{L} .

La Mécanique de Newton pose :

$$\mathcal{L}(q_i, q_i', t) = \frac{1}{2} m v^2 - F(q_i, t) \quad (7)$$

m étant une constante caractéristique du corpuscule envisagée et appelée sa « masse »; la fonction $F(q_i, t)$ est la fonction potentielle et v est la vitesse du corpuscule qu'on doit exprimer en fonction des q_i et des q_i' .

La Mécanique relativiste adopte au contraire pour fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}(q_i, q_i', t) = - mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - F(q_i, t) \quad (8)$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$. Comme $(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots$, on voit qu'en négligeant les termes non écrits, on a :

$$\mathcal{L} = - mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 - F(q_i, t) \quad (9)$$

de sorte que la fonction de Lagrange relativiste ne diffère à ce degré d'approximation de la fonction de Lagrange classique que par le terme $- mc^2$ constant; dans l'intégrale (1), ce terme constant fournit un terme $- mc^2 (t_1 - t_0)$ qui n'est pas sujet à variation et peut par suite être négligé. On voit donc bien, ainsi que nous l'avions annoncé, que

les deux anciennes Mécaniques se confondent quand on peut négliger les puissances supérieures de β .

Maintenant que nous savons comment nous devons remplir la forme vide du principe d'Hamilton pour obtenir l'une ou l'autre des anciennes Dynamiques, revenons aux équations de Lagrange.

Par définition, nous poserons :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

et nous dirons que p_i est le moment conjugué de la variable q_i .

Les équations de Lagrange donnent alors :

$$\frac{dp_i}{dt} = + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (11)$$

Plaçons-nous pour un instant dans le cas particulier où les coordonnées q_i sont des coordonnées rectangulaires. On aura alors $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ et $v^2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

Avec le choix Newtonien de \mathcal{L} , il vient :

$$p_x = mx', \quad p_y = my', \quad p_z = mz'. \quad (12)$$

Les p_i sont donc les composantes de ce qu'on nomme le vecteur « quantité de mouvement » \vec{mv} .

Si l'on prend la fonction \mathcal{L} relativiste, on trouve :

$$p_x = \frac{mx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = \frac{my'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_z = \frac{mz'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (13)$$

Les p_i seront encore les composantes du vecteur « quantité de mouvement » à condition de définir celui-ci comme égal à $\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

D'autre part, dans un cas comme dans l'autre, le choix des coordonnées rectangulaires a pour effet que \mathcal{L} ne dépend des q_i que par la fonction F. On a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (14)$$

Si l'on considère le vecteur — grad F de composantes

$$-\frac{\partial F}{\partial x}, \quad -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad -\frac{\partial F}{\partial z}$$

et si l'on nomme ce vecteur \vec{f} la « force appliquée au corpuscule », les équations (11) donnent les équations classiques :

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = f_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = f_z, \quad (15)$$

applicables dans les deux anciennes Dynamiques.

Introduisons maintenant la notion d'énergie. Pour cela, partons de la forme générale et vide des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16)$$

Considérons la quantité :

$$W = \sum_1^3 p_i q'_i - \mathcal{L} \quad (17)$$

et calculons sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_1^3 q'_i \frac{dp_i}{dt} + \sum_1^3 p_i \frac{dq'_i}{dt} - \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} q'_i \\ &\quad - \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \frac{dq'_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Le premier et le troisième termes du second membre se détruisent à cause des équations de Lagrange; le second et le quatrième à cause de la définition des p_i . Il reste

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (19)$$

D'où le théorème : « Si la fonction F ne dépend pas explicitement du temps, la quantité W reste constante »
W est nommée l'énergie du corpuscule.

Voyons comment s'exprime l'énergie en Dynamique classique. Nous avons alors $\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 - F$ et, quelles que soient les coordonnées choisies, le terme $\frac{1}{2} mv^2$ est une fonction quadratique homogène des q_i' , car $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et chacun des termes x' , y' , z' est fonction linéaire des q_i . Si donc $T = \frac{1}{2} mv^2$, nous aurons par la formule d'Euler :

$$2T = \sum_1^3 q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_1^3 q_i' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \sum_1^3 p_i q_i', \quad (20)$$

car \mathcal{L} ne dépend des q_i' que par l'intermédiaire de T . On trouve donc :

$$W = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - F) = T + F. \quad (21)$$

L'énergie est la somme du terme $T = \frac{1}{2} mv^2$ dite énergie cinétique du corpuscule et du terme F d'énergie potentielle.

Passons maintenant à la Dynamique de Relativité où $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - F$. Nous ne pouvons plus raisonner exactement de même parce que $\sqrt{1 - \beta^2}$ n'est pas une fonction quadratique homogène des q_i' , mais nous pouvons écrire :

$$\sum_1^3 p_i q_i' = \sum_1^3 q_i' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \sum_1^3 q_i' \frac{m}{2\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial (v^2)}{\partial q_i'} \quad (22)$$

et comme v^2 est une fonction quadratique homogène des q_i' , on a :

$$2v^2 = \sum_1^3 q_i' \frac{\partial (v^2)}{\partial q_i'}; \quad \sum_1^3 q_i' p_i = \frac{m\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 \quad (23)$$

Donc :

$$\begin{aligned} W &= \sum_1^3 p_i q_i' - \mathcal{L} = \frac{m\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 \\ &= (-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - F) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + F. \end{aligned} \quad (24)$$

Le terme $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ représente l'énergie du corpuscule en mouvement en dynamique relativiste. Si le corpuscule était arrêté ($\beta = 0$), ce terme aurait pour valeur mc^2 : c'est l'énergie au repos du corpuscule, c'est-à-dire son énergie interne correspondant à l'existence de sa masse « propre » m et égale au produit de cette masse propre par le carré de la vitesse de la lumière. Quand le corpuscule est en mouvement, cette énergie devient $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, elle est égale au produit par c^2 de la quantité $\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ qu'on peut considérer comme la masse du corpuscule en mouvement. Il importe de remarquer qu'un corpuscule de masse propre non nulle doit avoir toujours une vitesse inférieure à celle de la lumière car son énergie tend vers l'infini quand β tend vers 1.

Si l'on développe $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ en série par rapport à β^2 en négligeant les puissances supérieures, on trouve :

$$W = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + F \quad (23)$$

et l'on voit que l'énergie relativiste est à ce degré d'approximation égale à l'énergie de Mécanique de Newton augmenté du terme mc^2 . Il ne faut jamais oublier cette différence essentielle et se rappeler que la Dynamique classique néglige systématiquement le terme d'énergie interne mc^2 .

4. — Autre forme du principe d'Hamilton. Principe de Maupertuis. — Nous allons montrer que l'on peut donner à l'intégrale d'action d'Hamilton la forme d'une intégrale curviligne. Pour cela, considérons un espace abstrait à 4 dimensions formé par la réunion des 3 coordonnées q_i du corpuscule et du temps t . Le mouvement du corpuscule est représenté dans cet espace par une certaine courbe puisque ce mouvement s'exprime par trois relations $q_i = f_i(t)$.

Cette courbe est ce qu'on nomme dans la théorie de Relativité la ligne d'Univers du mobile; le long de cette courbe chaque coordonnée q_i est donc une certaine fonction du temps.

En tenant compte de l'expression (17) de l'énergie, l'intégrale d'Hamilton peut s'écrire :

$$\int_{P_0}^{P_1} \left(\sum_i^3 p_i dq_i - W dt \right) \quad (26)$$

les points P_0 et P_1 étant ceux qui, sur la ligne d'Univers, correspondent aux temps t_0 et t_1 . Le principe d'action stationnaire affirme que cette intégrale curviligne est stationnaire pour toute déformation infiniment petite de la courbe d'intégration, les extrémités de la courbe étant maintenues fixes, ce qui veut dire qu'on ne fait varier ni les époques initiales et finales, ni les positions initiales et finales.

Dans le cas des champs constants, le principe d'action stationnaire prend une forme particulière importante. Dans ce cas en effet, on a $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ et par suite $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$. L'énergie est constante et l'on peut donner du principe de moindre action un énoncé célèbre dû à Maupertuis, énoncé qui permet de déterminer la trajectoire sans s'inquiéter de la façon dont elle est décrite par le corpuscule. C'est seulement pour les champs constants dans le temps qu'une telle séparation entre l'étude de la trajectoire et l'étude du mouvement peut se trouver réalisée; un peu de réflexion le fait comprendre de suite.

Pour passer du principe d'Hamilton, toujours valable, au principe de Maupertuis, restreint aux champs constants, il faut d'abord démontrer une formule qu'on nomme parfois le « principe de l'action variée ». Au lieu de considérer une variation qui laisse fixer les époques et les coordonnées initiales et finales, faisons-les aussi varier de quantités très petites δt_0 , δt_1 , $(\delta q_i)_0$, $(\delta q_i)_1$. La variation de l'intégrale d'Hamilton est la somme de ce qu'elle serait si les limites



n'étaient pas variées et de la variation due à la variation des limites. On a donc :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \left[\sum_1^3 p_i \delta q_i - W \delta t \right]_0^1 \quad (27)$$

car, lorsqu'on fait varier l'époque initiale de δt_0 et les coordonnées initiales de $(\delta q_i)_0$, l'intégrale considérée comme une intégrale curviligne varie évidemment de :

$$- \left[\sum_1^3 (p_i)_0 (\delta q_i)_0 - W_0 \delta t_0 \right]$$

et elle varie de :

$$+ \left[\sum_1^3 (p_i)_1 (\delta q_i)_1 - W_1 \delta t_1 \right]$$

pour des variations δt_1 et $(\delta q_i)_1$ des limites supérieures. Le premier terme du second membre de (27) est nul d'après le principe d'Hamilton; il reste :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \left[\sum_1^3 p_i \delta q_i - W \delta t \right]_0^1 \quad (28)$$

Cette formule exprime le principe de l'action variée.

Désignons pour un moment par S l'intégrale d'Hamilton et par S_1 l'intégrale curviligne :

$$S_1 = \int_{M_0}^{M_1} \sum_1^3 p_i \delta q_i \quad (29)$$

prise le long de la trajectoire du point initial M_0 au point final M_1 . L'intégrale (29) est l'intégrale d'action de Maupertuis; comme dans un champ constant, les formules (24) ou (24) permettent d'exprimer la vitesse et par suite les p_i en fonction de l'énergie constante et des coordonnées q_i , l'intégrale de Maupertuis ne dépend aucunement du temps.

Nous avons évidemment :

$$S = S_1 - \int_{t_0}^{t_1} W dt, \quad (30)$$

et par suite d'une façon générale pour une variation quelconque :

$$\delta S = \delta S_1 - \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt - \left| W \delta t \right|_0^1 \quad (31)$$

En comparant avec (28), on obtient :

$$\delta S_1 = \left| \sum_i^3 p_i \delta q_i \right|_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt. \quad (32)$$

Si donc nous nousastreignons à faire varier la trajectoire en en maintenant fixes les extrémités M_0 et M_1 et en conservant la même valeur de l'énergie, l'action de Maupertuis est stationnaire : c'est le principe de Maupertuis.

Prenons pour les q_i des coordonnées rectangulaires; nous avons :

$$\sum_i^3 p_i dq_i = p_x dx + p_y dy + p_z dz \quad (33)$$

et nous voyons que l'intégrale S_1 possède la signification invariante suivante : elle est le travail le long de la trajectoire du vecteur quantité de mouvement. Elle a donc pour expression $\int m v ds$ en mécanique classique et :

$$\int \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} ds$$

en Mécanique relativiste, ds étant l'élément d'arc de la trajectoire.

5. — *Les équations canoniques d'Hamilton.* — Nous allons démontrer que les équations de la Dynamique peuvent se mettre sous une forme bien connue sous le nom d'équations canoniques d'Hamilton.

La fonction \mathcal{L} dépendant des q_i , des q'_i et de t , les équations (10) nous permettent d'exprimer les p_i en fonction de ces variables et par suite nous pourrions aussi écrire en général :

$$q'_i = f_i(q_i, p_i, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (34)$$

les f_i étant certaines fonctions que nous saurons calculer dans chaque cas particulier. Nous pouvons donc prendre les q_i , les p_i et t comme variables à la place des q_i , des q'_i et de t . Désignons par $\mathbb{H}(q_i, p_i, t)$ l'énergie exprimée en fonction des variables q_i, p_i, t que l'on nomme souvent les variables canoniques. Nous avons par définition de l'énergie :

$$\mathbb{H}(q_i, p_i, t) = \sum_1^3 p_i q'_i - \mathcal{L}(q_i, q'_i, t) \quad (35)$$

où au second membre on doit supposer chaque q'_i exprimé en fonction de q_i, p_i, t , à l'aide de (34).

Calculons les dérivées $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_j}$ et $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q_j}$ où j a une valeur déterminée 1, 2 ou 3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_j} &= q'_j + \sum_1^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \\ &= q'_j \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q_j} &= \sum_1^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_1^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ &= - \frac{\partial p_j}{\partial t} \text{ d'après les équations de Lagrange.} \end{aligned} \quad (37)$$

Nous avons ainsi obtenu le système des équations canoniques d'Hamilton :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (38)$$

Il est facile de retrouver le théorème de la conservation de l'énergie; il suffit de calculer $\frac{dH}{dt}$:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_1^3 \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_1^3 \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (39)$$

D'après la définition (33) de l'énergie, il est évident que si \mathcal{L} ne contient pas le temps explicitement, il en est de même de H et alors $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. L'énergie est donc constante. C'est bien le résultat déjà obtenu.

Nous allons expliciter les équations de Hamilton dans l'une et l'autre des anciennes Dynamiques.

Prenons d'abord la Mécanique classique avec des coordonnées rectangulaires :

On a :

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z,$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{1}{m^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (40)$$

D'où :

$$H = \frac{1}{2} mv^2 + F = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + F(q_i, t) \quad (41)$$

Les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

sont vérifiées d'elles-mêmes car on a par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{p_x}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \text{ etc.} \quad (42)$$

Les équations :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

s'écrivent :

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x}, \text{ etc.} \quad (43)$$

Ce sont les équations fondamentales de la Dynamique de Newton.

Prenons maintenant la théorie Relativiste toujours avec des axes rectangulaires. Nous avons ici :

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (44)$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + F(q_i, t). \quad (45)$$

Il s'agit d'abord d'exprimer H en fonction des q_i , des p_i et de t .

Or nous avons :

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \beta^2}$$

d'où :

$$\frac{1}{m^2 c^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (46)$$

Ajoutons l'unité aux deux membres de la dernière équation et prenons la racine carrée; il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (47)$$

et :

$$H(q_i, p_i, t) = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} + F(q_i, t). \quad (48)$$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{cp_i}{\sqrt{m^2 c^2 + \sum_1^3 p_i^2}} = \frac{p_i}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (49)$$

Les équations $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ sont encore ici identiquement satisfaites car on a bien :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{p_x}{m} \sqrt{1 - \beta^2}, \text{ etc.} \quad (50)$$

Les équations $\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$ donnent les équations du mouvement dans la Dynamique d'Einstein :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = - \frac{\partial F}{\partial x}, \text{ etc.} \quad (51)$$

6. — *Les transformations de contact.* — Les équations de Hamilton s'écrivent en se servant de sept variables : le temps t , les trois coordonnées q_i et les trois moments p_i . Supposons que nous remplacions les variables q_i, p_i par de nouvelles variables α_i, β_i ($i = 1, 2, 3$) définies par des formules telles que :

$$\alpha_k = f_k(p_i q_i t) \quad \beta_k = \varphi_k(p_i q_i t) \quad (52)$$

Nous n'attribuons pour l'instant aux α_i et β_i aucune signification dynamique particulière; ce sont seulement 6 nouvelles variables. Les formules (52) peuvent s'écrire :

$$p_k = F_k(\alpha_i q_i t) \quad \beta_k = \Phi_k(\alpha_i q_i t) \quad (53)$$

On a alors le théorème suivant :

« S'il est possible de trouver une fonction $S(\alpha_i q_i t)$ telle que l'on ait :

$$\sum_1^3 p_i dq_i - \sum_1^3 \beta_i d\alpha_i = - [dS]_t \quad (54)$$

(le symbole $[dS]_t$ désignant la différentielle de S obtenue sans faire varier t), alors les variables α_i et β_i satisfont aux équations canoniques :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \beta_i} \quad \frac{d\beta_i}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (55)$$

avec $K = H - \frac{\partial S}{\partial t}$.

Pour le démontrer remarquons que l'on a :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad - \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad [dS]_t = dS - \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (56)$$

et par suite de (34) :

$$\begin{aligned} \sum_1^3 p_i dq_i - Hdt &= \sum_1^3 \beta_i d\alpha_i - Hdt - dS + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (37) \\ &= \sum_1^3 \beta_i d\alpha_i - Kdt - dS \end{aligned}$$

Considérons maintenant un temps initial t_0 et une position initiale définie par trois $(q_i)_0$, puis un temps final t_1 et une position finale définie par trois $(q_i)_1$. Envisageons l'espace à 4 dimensions formé à l'aide des 4 variables q_i, t . Le principe d'Hamilton nous apprend que si le mouvement du corpuscule est représenté dans cet espace par une courbe C joignant le point M_0 de coordonnées $t_0, (q_i)_0$ au point M_1 de coordonnées $t_1, (q_i)_1$, l'intégrale curviligne :

$$\int_{M_0}^{M_1} \left(\sum_1^3 p_i dq_i - Hdt \right)$$

prise le long de cette courbe ne varie pas au premier ordre si on déforme très peu la courbe C en maintenant fixes les points M_0 et M_1 . On a :

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta \left(\sum_1^3 p_i dq_i - Hdt \right) = 0.$$

Considérons aussi l'espace à quatre dimensions formé à l'aide du temps t et des trois variables α_i . A la courbe C correspond dans ce nouvel espace une courbe Γ , car à chaque point de la première correspondent des valeurs bien déterminées non seulement des variables q_i et t , mais aussi des variables p_i ; par suite, d'après (32), à chaque point de C correspond un point de Γ .

Soient $(a_i)_0$ et t_0 , $(a_i)_1$ et t_1 les coordonnées des extrémités de la courbe Γ . Quand pour appliquer le principe d'Hamilton on fait varier la courbe C en maintenant ses extrémités fixes, on fait par cela même varier la courbe Γ , mais en général les extrémités de celle-ci ne restent pas fixes, car les valeurs initiales et finales des p_i sont en général affectées par la variation de C et il en résulte une variation des $(a_i)_0$ et des $(a_i)_1$. Nous avons donc :

$$\int_{(q_i)_0, t_0}^{(q_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_1^3 p_i dq_i - H dt \right) = \int_{(z_i)_0, t_0}^{(z_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_1^3 \beta_i dz_i - K dt \right) \quad (58)$$

$$+ \left| \sum_1^3 \beta_i \delta z_i \right|_0^1 - \delta \left| S \right|_0^1$$

Car :

$$\int_0^1 dS = \left| S \right|_0^1.$$

Puisque les $(q_i)_0$ et les $(q_i)_1$ sont fixes, on a :

$$\delta \left| S \right|_0^1 = \left| \sum_1^3 \frac{\partial S}{\partial a_i} \delta a_i \right|_0^1 \quad (59)$$

Les deux derniers termes de (58) s'annulent donc en raison de (56) et il reste :

$$\int_{(q_i)_0, t_0}^{(q_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_1^3 p_i dq_i - H dt \right) = \int_{(z_i)_0, t_0}^{(z_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_1^3 \beta_i dz_i - K dt \right) \quad (60)$$

la variation du second membre étant aussi effectuée avec des valeurs initiales et finales fixes pour les a_i . Comme le premier membre de (60) est nul en vertu du principe d'Hamilton, le second l'est aussi et puisque les variables β_i et



a_i et la fonction K jouent dans la seconde intégrale respectivement le même rôle que les variables p_i et q_i et la fonction H dans la première, on en conclut que les équations (53) sont bien vérifiées.

En résumé, les changements de variables satisfaisant à la relation (54), changements de variables nommés « transformations de contact », conservent la forme des équations d'Hamilton à condition de remplacer la fonction H primitive par la fonction $K = H - \frac{\partial S}{\partial t}$.

CHAPITRE II

LA THÉORIE DE JACOBI.

1. — *L'équation de Jacobi.* — Le théorème sur les transformations de contact va nous permettre de retrouver immédiatement la théorie de l'équation de Jacobi. Supposons en effet que nous ayons trouvé une transformation de contact telle que $K = 0$. Alors les nouvelles variables canoniques α_i et β_i vont satisfaire aux équations d'Hamilton :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = 0 \quad \frac{d\beta_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Les α_i et les β_i seront donc des constantes. Or la fonction K est égale à $H - \frac{\partial S}{\partial t}$ et les p_i sont égaux à $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$. En exprimant l'énergie en fonction des q_i , des p_i et de t , et en remplaçant les p_i par les $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$, la condition $K = 0$ équivaut à :

$$H \left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2)$$

Cette équation aux dérivées partielles du premier ordre en S est l'équation de Jacobi. Si l'on trouve une intégrale de cette équation dépendant de trois constantes arbitraires α_i , c'est-à-dire ce qu'on nomme une « intégrale complète » de l'équation (2), cette fonction $S(q_i, \alpha_i, t)$ définira une transformation de contact entre les variables q_i, p_i, t et les quantités $\alpha_i, \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ et t , transformation pour laquelle on aura $K = 0$ et par suite :

$$\alpha_i = C^{te} \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = C^{te} \quad (3)$$

D'où le théorème de Jacobi : « Si l'on parvient à trouver une intégrale complète $S(q_i, \alpha_i, t)$ de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\mathbb{H}\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4)$$

on aura :

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (5)$$

les β_i étant trois nouvelles constantes et les équations (5) définissant les six q_i, p_i en fonction du temps et des six constantes α_i, β_i donnent complètement le mouvement du corpuscule. »

2. — Intégrale d'Hamilton et fonction de Jacobi. — Dans la théorie donnée ci-dessus des transformations de contact, les variables α_i, β_i sont six variables dont la signification dynamique n'est pas précisée. Nous pouvons donc supposer par exemple que les α_i sont des coordonnées, les β_i étant des moments. Comme dans la fonction $S(q_i, \alpha_i, t)$ les α_i sont des constantes, nous sommes alors naturellement amenés à les considérer comme les valeurs initiales des coordonnées du corpuscule. Pour préciser ceci, considérons non plus un seul corpuscule, mais un nuage de corpuscules tous identiques, placés dans le même champ et sans réactions les uns sur les autres; le mouvement de ce nuage représente en somme tout un ensemble de mouvements « possibles » du même corpuscule dans le champ donné. Le mouvement du nuage entre l'instant t_0 et l'instant t a pour effet de transformer les coordonnées initiales $(q_i)_0$ des corpuscules du nuage au temps t_0 en les coordonnées finales (q_i) de ces corpuscules à l'instant t .

Prenons maintenant l'intégrale d'Hamilton :

$$I = \int \sum_1^3 p_i dq_i - \mathbb{H} dt$$

le long de la trajectoire d'un corpuscule de $(q_i)_0$ à q_i . C'est une fonction des q_i , des $(q_i)_0$ et du temps qui satisfait aux équations :

$$\frac{\partial I}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial I}{\partial (q_i)_0} = - (p_i)_0 \quad (6)$$

les $(p_i)_0$ désignant les valeurs initiales des p_i . La fonction I changée de signe définit donc une transformation de contact entre les variables q_i , p_i et les variables $(q_i)_0$, $(p_i)_0$. De plus la fonction $S(q_i, (q_i)_0, t) = -I$ satisfait à l'équation de Jacobi, car on a :

$$S(q_i, (q_i)_0, t) = \int_0^1 \left(H dt - \sum_i^3 p_i dq_i \right) \quad (7)$$

et par suite :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(q_i, p_i, t) \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = -p_i \quad (8)$$

donc :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right). \quad (9)$$

D'après le théorème de Jacobi, les $(q_i)_0$ doivent être des constantes au cours du mouvement, ce qui est conforme à leur caractère de valeurs initiales des coordonnées, et les $(p_i)_0$ doivent être des constantes : ce sont les moments initiaux.

3. — *Fonction de Jacobi raccourcie.* — Les a_i ne sont pas nécessairement les valeurs des coordonnées initiales. On peut aussi trouver une intégrale complète dépendant des moments initiaux ou même d'autres constantes. Chaque fois qu'une telle intégrale aura été trouvée, on aura :

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} = \beta_i = \text{C}^{\text{te}} \quad (10)$$

et ces équations détermineront le mouvement.

Un cas particulier important est celui des champs constants. Dans ce cas, nous l'avons vu, l'énergie est une constante. En désignant par W cette constante, l'intégrale d'Hamilton est :

$$\int \left(\sum_i^3 p_i dq_i - W dt \right)$$

et si l'on adopte pour fonction S l'intégrale d'Hamilton changée de signe, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = W.$$

D'autre part, si nous posons :

$$S_1 = \int \sum_i^3 p_i dq_i \quad (11)$$

nous avons :

$$S = Wt - S_1 \quad - \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_1}{\partial q_i}. \quad (12)$$

Enfin H ne contient pas explicitement le temps. Donc S_1 , qu'on nomme la fonction de Jacobi raccourcie, satisfait à l'équation :

$$H \left(q_i, \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \right) = W \quad (13)$$

Si l'on trouve une intégrale complète de (13), intégrale qui dépendra de W et de deux constantes arbitraires α_1 et α_2 , la fonction $S = Wt - S_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2, W)$ sera une intégrale complète à trois constantes arbitraires α_1 , α_2 et $\alpha_3 = W$ de l'équation complète de Jacobi, et le théorème de Jacobi nous apprend alors que le mouvement est défini par les relations :

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = -\beta_1 = C^{te} \quad (14)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} = -\beta_2 = C^{te} \quad \frac{\partial S}{\partial W} = t - \frac{\partial S_1}{\partial W} = -\beta_3 = C^{te}$$

Posons — $\beta_3 = t_0$; la dernière équation donne :

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = t - t_0. \quad (15)$$

Cette équation, la seule qui contienne le temps, donne la loi du mouvement, tandis que les deux équations :

$$\frac{\partial S_1}{\partial a_1} = C^{te}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial a_2} = C^{te}$$

ne dépendent que des q_i et définissent la forme de la trajectoire. On retrouve la séparation entre l'étude du mouvement et celle de la trajectoire, qui est caractéristique des champs constants.

4. — *Diverses formes de l'équation de Jacobi.* — Avant d'étudier des exemples concrets, nous voulons expliciter la forme que prend l'équation de Jacobi dans la Mécanique classique et dans celle d'Einstein.

Soit d'abord la Dynamique de Newton. Pour plus de généralité, nous supposons que les coordonnées choisies q_i sont quelconques. En Mécanique Newtonienne, l'énergie cinétique T est une fonction quadratique homogène des vitesses q_i' . On a donc :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l}^3 m_{kl} q_k' q_l' \quad (m_{kl} = m_{lk}) \quad (16)$$

les m_{kl} étant fonctions des q_i seulement. De (16), on déduit :

$$\mathcal{L} = T - F = \frac{1}{2} \sum_{k,l}^3 m_{kl} q_k' q_l' - F(q_i, t) \quad (17)$$

$$W = T + F = \frac{1}{2} \sum_{k,l}^3 m_{kl} q_k' q_l' + F(q_i, t) \quad (18)$$

La définition des p_i permet d'écrire :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \sum_k^3 m_{ki} q_k' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

Si nous résolvons les équations linéaires (19) par rapport aux q_i' , nous avons :

$$q_i' = \sum_k^3 \frac{\mu_{ki}}{|m|} p_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

où $|m|$ désigne le déterminant formé par les m_{ki} et où μ_{ki} désigne le mineur correspondant à l'élément m_{ki} dans ce déterminant. Posons :

$$\frac{\mu_{ki}}{|m|} = m^{ki} \quad m^{ki} = m^{ik} \quad (20)$$

Il vient :

$$q_i' = \sum_k^3 m^{ki} p_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

En remplaçant les q_i' par leurs valeurs (21), on a à la place de (16) :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l,i,j}^3 m_{kl} m^{ki} p_i m^{lj} p_j \quad (22)$$

Or, d'après les propriétés des déterminants :

$$\sum_k^3 m_{kl} m^{ki} = \sum_k^3 m_{kl} \frac{\mu_{ki}}{|m|} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases} \quad (23)$$

Donc

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 m^{ij} p_i p_j \quad (24)$$

et par suite l'énergie exprimée en fonction des q_i, p_i, t est :

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 m^{ij} p_i p_j + F(q_i, t). \quad (25)$$

Nous obtenons alors pour équation de Jacobi :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 m^{ij} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_j} + F(q_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (26)$$

Dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires, on a :

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (27)$$

Par suite $m_{kk} = m$, $m_{kl} = 0$, pour $k \neq l$. On en déduit :

$$m^{kl} = 0 \text{ pour } k \neq l \quad m^{kk} = \frac{1}{m} \quad (28)$$

et l'équation de Jacobi prend la forme simple et classique :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + F(q_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (29)$$

Passons maintenant à la Dynamique de Relativité. Comme nous ne ferons pas dans cet ouvrage un très grand usage de cette Dynamique, nous nous tiendrons au cas des coordonnées rectangulaires. Nous avons trouvé (chapitre I, équation [48]) :

$$H(q_i, p_i, t) = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} + F(q_i, t). \quad (30)$$

Cette expression de H conduit à l'équation de Jacobi relativiste :

$$c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2} + F(q_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (31)$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - F \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2 \quad (32)$$

5. — *La fonction de Jacobi pour le mouvement rectiligne uniforme.* — Nous allons chercher la forme de la fonction de Jacobi dans deux cas simples et importants; cela nous sera utile plus tard. Nous nous contenterons de la Dynamique classique et nous commencerons par le cas du mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule en l'absence de tout champ. Alors $F = 0$ et l'équation (29) devient :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (33)$$

On vérifie aisément qu'une intégrale complète est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} S(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) \\ = -\frac{m}{2t} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

D'après le théorème de Jacobi, on doit donc avoir :

$$-\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m}{t} (x - x_0) = p_x \quad -\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{m}{t} (y - y_0) = p_y \quad (35)$$

$$-\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{m}{t} (z - z_0) = p_z$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{m}{t} (x - x_0) = C^{1e} \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} = \frac{m}{t} (y - y_0) = C^{2e} \quad (36)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} = \frac{m}{t} (z - z_0) = C^{3e}$$

Les constantes des seconds membres de (36) sont donc égales aux valeurs constantes de p_x , p_y et p_z , et les équations du mouvement prennent la forme connue :

$$x = x_0 + v_x t \quad y = y_0 + v_y t \quad z = z_0 + v_z t \quad (37)$$

Il apparaît que les 3 constantes x_0 , y_0 , z_0 de l'intégrale complète sont ici les trois coordonnées du corpuscule à l'instant $t = 0$.

L'intégrale (34) n'est pas autre chose que l'intégrale d'Hamilton changée de signe. Nous pouvons en effet écrire l'intégrale d'Hamilton sous la forme :

$$\int_0^t T dt = \int_0^t \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} m v^2 t \quad (38)$$

Or, on a, puisque le mouvement est uniforme :

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} \quad v_y = \frac{y - y_0}{t} \quad v_z = \frac{z - z_0}{t} \quad (39)$$

et :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (40) \\ &= \frac{1}{t^2} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \end{aligned}$$

L'intégrale d'Hamilton changée de signe est donc bien égale au second membre de (34).

On peut aussi dans le cas de l'absence de champ trouver une intégrale complète de l'équation de Jacobi où les constantes arbitraires sont non plus les trois coordonnées initiales, mais les trois moments ici constants. Voici cette intégrale complète :

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, p_x, p_y, p_z) &= \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right] t \quad (41) \\ &\quad - p_x x - p_y y - p_z z \end{aligned}$$

Les équations $-\frac{\partial S}{\partial x} = p_x$ etc., sont identiquement satisfaites. Quant aux 3 autres relations de Jacobi, ce sont :

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x t - x = C^{te} \quad \frac{\partial S}{\partial p_y} = \frac{1}{m} p_y t - y = C^{te} \quad (42)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z t - z = C^{te}$$

Si nous appelons les 3 constantes — x_0 , — y_0 , — z_0 , nous retrouvons les équations (37) du mouvement. La fonction (41) dérive encore de l'intégrale d'Hamilton, car on a pour celle-ci à une constante additive près $p_x x + p_y y + p_z z - Wt$. Comme l'on a $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, $p_z = mv_z$ et $W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2]$, l'intégrale d'Hamilton changée de signe donne bien encore (41).

Enfin, nous avons vu que dans les champs constants (dont le champ constamment nul fait évidemment partie), on pouvait écrire la fonction de Jacobi sous la forme $Wt - S_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, W)$, S_1 étant une intégrale de l'équation (13). Pour mettre la fonction de Jacobi sous cette forme, nous remarquerons que l'on peut exprimer l'un des moments, par exemple p_z , en fonction des deux autres et de W , car on a :

$$p_z^2 = 2mW - p_x^2 - p_y^2. \quad (43)$$

En introduisant la valeur de p_z donnée par (43) dans l'intégrale d'Hamilton changée de signe, on obtient :

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, W, p_x, p_y) &= Wt - p_x x - p_y y \\ &\quad - \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} z \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z, p_x, p_y, W) &= p_x x + p_y y \\ &\quad + \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} z \end{aligned} \quad (45)$$

Les équations (14) et (15) du mouvement donnent :

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_x} = x - \frac{p_x z}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = C^{te}; \quad (46)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_y} = y - \frac{p_y z}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = C^{te};$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = \frac{mz}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = t - t_0$$

Les deux premières de ces équations donnent les trajectoires rectilignes définies par :

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}. \quad (47)$$

La troisième équation (46) définit le mouvement sur la trajectoire, car elle donne la coordonnée z en fonction du temps :

$$z = \frac{1}{m} \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} (t - t_0) = \frac{1}{m} p_z (t - t_0) \quad (48)$$

t_0 désignant évidemment l'époque où $z = 0$.

6. — La fonction de Jacobi dans un champ constant et uniforme. — Prenons maintenant le cas le plus simple après celui de l'absence de champ : celui du champ constant et uniforme. Soient k_x, k_y, k_z , les composantes, partout les mêmes, de la force. On a :

$$F(x, y, z) = -k_x x - k_y y - k_z z = - \sum_{xyz} k_x x \quad (49)$$

car :

$$f_x = - \frac{\partial F}{\partial x} = k_x, \text{ etc.}$$

L'équation de Jacobi est ici :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - k_x x - k_y y - k_z z = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (50)$$

Une intégrale complète de cette équation est la suivante :

$$S(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) = - \frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x - x_0)^2 \quad (51)$$

$$- \frac{1}{2} t \sum_{xyz} k_x (x + x_0) + \frac{1}{24m} t^3 \sum_{xyz} k_x^2$$

On vérifie aisément par substitution que (51) vérifie (50).



Les équations de la théorie de Jacobi donnent d'abord :

$$p_x = - \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m}{t} (x - x_0) + \frac{1}{2} k_x t; \quad (52)$$

$$p_y = - \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{m}{t} (y - y_0) + \frac{1}{2} k_y t;$$

$$p_z = - \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{m}{t} (z - z_0) + \frac{1}{2} k_z t.$$

Ces relations sont identiquement vérifiées, car l'on a dans le mouvement uniformément accéléré :

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2 \quad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2 \quad (53)$$

$$z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2$$

et :

$$v_x = v_{0x} + \frac{k_x}{m} t \quad v_y = v_{0y} + \frac{k_y}{m} t \quad v_z = v_{0z} + \frac{k_z}{m} t \quad (54)$$

d'où :

$$p_x = m v_x = \frac{m}{t} (x - x_0) + \frac{1}{2} k_x t \quad p_y = \frac{m}{t} (y - y_0) + \frac{1}{2} k_y t$$

$$p_z = \frac{m}{t} (z - z_0) + \frac{1}{2} k_z t$$

c'est-à-dire les relations (52).

Les trois autres relations de Jacobi $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = C^{te}$ donnent ici :

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{m}{t} (x - x_0) - \frac{1}{2} k_x t = C^{te}; \quad (55)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = \frac{m}{t} (y - y_0) - \frac{1}{2} k_y t = C^{te};$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} = \frac{m}{t} (z - z_0) - \frac{1}{2} k_z t = C^{te}$$

Si $x_0 y_0 z_0$ sont les coordonnées initiales :

$$\frac{\partial S}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial z_0}$$

doivent être les moments initiaux mv_{0x} , mv_{0y} et mv_{0z} , et l'on retrouve les équations (53) du mouvement uniformément accéléré.

Nous voulons montrer que l'intégrale complète (51) s'obtient à partir de l'intégrale d'Hamilton. Celle-ci changée de signe est en effet :

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyzt} \left[W dt - \sum_{xyz} p_x dx \right] \quad (56) \\ &= \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyzt} \left[\left(\frac{1}{2} m v^2 - \sum_{xyz} k_x x \right) dt - \sum_{xyz} m v_x dx \right] \end{aligned}$$

Or, les formules (53) et (54) du mouvement uniformément accéléré donnent :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \sum_{xyz} \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right)^2 \quad (57)$$

et en portant (57) dans (56) on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyzt} \left\{ \left[\frac{1}{2} m \sum_{xyz} \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] dt \right. \\ & \quad \left. - \sum_{xyz} m \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right) dx \right\} \quad (58) \end{aligned}$$

La quantité sous le signe \int est une différentielle exacte car la dérivée par rapport à l'une quelconque des variables

spatiales du coefficient de dt est égale à la dérivée par rapport à t du coefficient de la différentielle de cette variable d'espace : on le vérifie facilement. En effectuant alors l'intégration (58) par une méthode bien connue d'analyse, on voit de l'intégrale (58) à la valeur (54). L'intégrale complète (51) est donc égale ici encore à l'intégrale d'Hamilton changée de signe.

Comme dans le cas du mouvement uniforme, nous pouvons obtenir une intégrale complète de l'équation de Jacobi où les trois constantes arbitraires sont les moments initiaux au lieu des coordonnées initiales. Ces moments initiaux sont :

$$p_{ox} = mv_{ox} \quad p_{oy} = mv_{oy} \quad p_{oz} = mv_{oz} \quad (59)$$

Si nous écrivons encore l'intégrale d'Hamilton changée de signe en nous servant des formules (34), il vient :

$$\int \left\{ \left[\frac{1}{2m} \sum_{xyz} (p_{ox} + k_x t)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] dt - \sum_{xyz} (p_{ox} + k_x t) dx \right\} \quad (60)$$

La condition d'intégralité se vérifie de suite, car on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2m} \sum_{xyz} (p_{ox} + k_x t)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] & \quad (61) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[- (p_{ox} + k_x t) \right] & = - k_x, \text{ etc.} \end{aligned}$$

et l'on aperçoit pour l'intégrale (60) la valeur :

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, p_{ox}, p_{oy}, p_{oz}) & \quad (62) \\ = \frac{1}{6m} \sum_{xyz} \frac{(p_{ox} + k_x t)^3}{k_x} - \sum_{xyz} (p_{ox} + k_x t) x \end{aligned}$$

On peut aisément vérifier (ce qui est certain *a priori* en vertu du paragraphe 2 du présent chapitre) que la fonction (62) vérifie l'équation (50) de Jacobi.

Les équations $p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$ sont vérifiées identiquement d'après la manière même dont la fonction (62) a été obtenue. Les équations $\frac{\partial S}{\partial a_i} = C^{te}$ nous donnent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial p_{ox}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{ox} + k_x t)^2}{k_x} - x = C^{te}; \\ \frac{\partial S}{\partial p_{oy}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{oy} + k_y t)^2}{k_y} - y = C^{te}; \\ \frac{\partial S}{\partial p_{oz}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{oz} + k_z t)^2}{k_z} - z = C^{te}.\end{aligned}\quad (63)$$

Puisque :

$$\frac{p_{ox}^2}{2mk_x}, \frac{p_{oy}^2}{2mk_y}, \frac{p_{oz}^2}{2mk_z}$$

sont des constantes, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}x &= C^{te} + \frac{p_{ox}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2; \\ y &= C^{te} + \frac{p_{oy}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2; \\ z &= C^{te} + \frac{p_{oz}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2;\end{aligned}\quad (64)$$

et ce sont encore les équations classiques (53).

Enfin nous allons chercher une intégrale complète de (50) ayant la forme :

$$S(x, y, z, t, a_1, a_2, W) = Wt - S_1(x, y, z, a_1, a_2, W) \quad (65)$$

Nous savons que la chose est possible puisque le champ est constant dans le temps. Nous obtiendrons encore cette fonction (65) en calculant l'intégrale d'Hamilton changée de signe, mais pour simplifier les calculs, nous prendrons main-



tenant la direction du champ uniforme pour axe des x . Alors $k_y = k_z = 0$ et les moments p_x et p_y sont des constantes. L'expression de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - k_x x \quad (66)$$

nous donne :

$$p_x = \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} \quad (67)$$

et par suite l'intégrale d'Hamilton changée de signe est :

$$\begin{aligned} Wt - \int p_x dx + p_y dy + p_z dz & \quad (68) \\ = Wt - p_y y - p_z z - \int \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} dx \\ = Wt - p_y y - p_z z - \frac{1}{3mk_x} \left[2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2 \right]^{3/2} \end{aligned}$$

En égalant à (65), on trouve :

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, W) & \quad (69) \\ = p_y y + p_z z + \frac{1}{3mk_x} \left[2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2 \right]^{3/2} \end{aligned}$$

Les équations de la théorie de Jacobi sont :

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_y} = y - \frac{p_y}{mk_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = C^{te}; \quad (70)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_z} = z - \frac{p_z}{mk_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = C^{te}$$

qui définissent la trajectoire parabolique et :

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = \frac{1}{k_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = t - t_0 \quad (71)$$

ou :

$$p_x = k_x(t - t_0) = p_{0x} + k_x t \quad (72)$$

en désignant par p_{0x} la valeur initiale de p_x ; c'est la loi bien connue de la vitesse en fonction du temps (équations 54).

CHAPITRE III

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. — *Point de départ.* — Le point de départ de la Mécanique ondulatoire a été de vouloir toujours associer à l'idée de corpuscule l'idée de périodicité de façon à lier inséparablement la conception du mouvement d'un corpuscule avec celle de la propagation d'une onde.

Nous allons d'abord examiner le cas le plus simple, celui du corpuscule, se mouvant librement en dehors de tout champ, et nous allons voir que la liaison à établir entre onde et corpuscule est alors en quelque sorte imposée par les principes fondamentaux de la théorie de la Relativité.

Rappelons d'abord qu'on appelle système d'axes Galiléens un système d'axes rectangulaires qui sont en repos ou en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'ensemble des étoiles fixes : c'est pour ces systèmes d'axes que les équations de la Dynamique sont valables. Le principe de l'inertie, qui est une sorte de définition déguisée, nous apprend que si un corpuscule n'est soumis à aucune force, il est nécessairement en repos ou en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un système Galiléen quelconque.

Parmi l'infinité des systèmes Galiléens, considérons-en deux en particulier. Le premier, par rapport auquel le corpuscule possède la vitesse $v = \beta c$, est disposé de façon que le corpuscule décrive l'axe oz . Le second, dit « système propre » du corpuscule, est animé par rapport au premier système de la vitesse v en grandeur et direction et son axe

des z glisse sur celui du premier système. Nous désignerons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point dans le système propre, tandis que x, y, z , désigneront les coordonnées d'un point dans le premier système.

Avant Einstein, on admettait l'existence d'un temps absolu, de sorte qu'un observateur lié au système xyz était supposé faire usage de la même coordonnée de temps qu'un observateur lié au système propre. Les variables d'espace et de temps de ces deux observateurs étaient donc supposées reliées par les formules du « groupe de Galilée » :

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0 + vt \quad t = t_0 \quad (1)$$

Les profondes recherches d'Einstein ont amené à penser qu'il faut substituer aux relations (1) les relations suivantes (groupe de Lorentz) :

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = \frac{z_0 + vt_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t = \frac{t_0 + \frac{\beta z_0}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (2)$$

dont on déduit inversement :

$$x_0 = x \quad y_0 = y \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t_0 = \frac{t - \frac{\beta z}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

Nous admettrons les formules (2) et (3) sans entrer ici dans aucune discussion plus approfondie des idées de la théorie de la Relativité, ces discussions sortant du cadre de cet ouvrage.

Plaçons-nous dans le système de référence $x_0 y_0 z_0$, qui est lié au corpuscule. Puisque notre but est d'associer une onde au corpuscule, il est bien naturel de supposer que cette onde a dans le système propre la forme d'une onde stationnaire, c'est-à-dire que son expression mathématique ne dépend du temps que par un facteur $\cos 2\pi\nu_0(t_0 - \tau_0)$; un choix convenable de l'origine des temps nous permet d'ailleurs de poser $\tau_0 = 0$. Nous désignerons la constante ν_0 par le nom de « fréquence propre » du corpuscule.

Changeons maintenant de point de vue et plaçons-nous dans le système xyz , par rapport auquel le corpuscule possède la vitesse $v = \beta c$ dans la direction oz . Le point essentiel est de déterminer quelle va être dans le système xyz la forme de l'onde associée au corpuscule. Dans le système propre, le facteur de phase était $\cos 2\pi\nu_0 t_0$; d'après la dernière des formules (3), il va être, dans le système xyz ,

$$\cos 2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{\beta z}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Posons :

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v} \quad (4)$$

le facteur de phase sera $\cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{V} \right)$. L'onde apparaîtra donc à l'observateur du système xyz comme une onde de fréquence ν se propageant dans la direction oz avec la vitesse de phase V . Ceci apparaît comme une conséquence simple et directe de la façon dont la variable temps se transforme d'après la théorie de la Relativité quand on passe d'un système Galiléen à un autre.

La vitesse de phase V de l'onde associée au corpuscule est en raison inverse de la vitesse v du corpuscule lui-même; elle est infinie dans le système propre où la vitesse du corpuscule est nulle. Nous avons précédemment remarqué que d'après la Dynamique de Relativité le mouvement d'un corpuscule ne pouvait jamais s'effectuer avec une vitesse supérieure à celle c de la lumière; on a donc toujours :

$$\beta \leq 1 \quad V \geq c \quad (5)$$

Le signe d'égalité ne peut avoir lieu que si la masse du corpuscule est nulle : c'est le cas des corpuscules de lumière ou « photons »; nous y reviendrons.

2. — Autre manière de retrouver les précédents résultats.

— On peut retrouver les résultats précédents relatifs à la phase de l'onde associée à un corpuscule en employant une méthode un peu plus concrète qui précise certains points.

Puisque dans le système propre l'onde a par hypothèse en chaque point même fréquence ν_0 et même phase, on peut représenter la distribution des phases dans ce système en imaginant en chaque point une petite horloge et en supposant que toutes ces petites horloges sont synchrones et de période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Dans le système xyz , chacune de ces horloges sera en mouvement avec la vitesse $v = \beta c$ et subira par suite le « ralentissement » d'Einstein. Voici en quoi consiste ce ralentissement. L'horloge a une coordonnée z_0 fixe dans le système propre, mais dans le système xyz , sa coordonnée z augmente de vt dans le temps t . Donc la variation du temps t_0 marquée par l'horloge est reliée à la variation du temps t par la formule de Lorentz (4) :

$$\delta t_0 = \frac{\delta t - \frac{\beta}{c} \delta z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \delta t \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (6)$$

Quand l'horloge a accompli une oscillation complète, il s'est écoulé le temps $\delta t_0 = T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ dans le système propre et par suite le temps :

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > T_0 \quad (7)$$

dans le système xyz . L'observateur de ce dernier système attribue donc à l'horloge une période plus longue que ne le fait l'observateur lié à l'horloge. C'est là le ralentissement d'Einstein.

Passons des périodes aux fréquences. Chaque petite horloge possède pour l'observateur xyz la fréquence :

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \nu_0 \quad (8)$$

mais en même temps, elle est en mouvement avec la vitesse v . Nous allons voir que dans ce mouvement elle reste constamment en phase avec l'onde :

$$\Psi = a \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{V} \right) \quad (9)$$

les constantes ν et V ayant les valeurs (4).

Pour démontrer ceci, supposons qu'à un certain instant t_1 du temps t , l'horloge se trouve pour l'observateur xyz en concordance de phase avec l'onde Ψ ; alors :

$$2\pi v \left(t_1 - \frac{z_1}{V} \right) = 2\pi v_1 t_1 \quad (10)$$

z_1 étant l'abscisse de l'horloge au temps t_1 . A une époque postérieure t_2 , l'horloge occupe la position $z_2 = z_1 + v(t_2 - t_1)$; la phase de l'onde Ψ au point occupé par l'horloge est $2\pi v \left(t_2 - \frac{z_2}{V} \right)$ et la phase de l'horloge est $2\pi v_1 t_2$. Pour qu'il y ait encore concordance des deux phases, il faut que :

$$v_1 t_2 = v \left(t_2 - \frac{z_2}{V} \right) \quad (11)$$

ce qui peut s'écrire en vertu de (10) :

$$v_1(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1) - v \frac{v}{V} (t_2 - t_1) \quad (12)$$

ou :

$$v_1 = v \left(1 - \frac{v}{V} \right) = v (1 - \beta^2) \quad (13)$$

Or la relation (13) est bien identiquement satisfaite en vertu des définitions (4) et (8) de v et de v_1 .

3. — Indice de réfraction. Théorème fondamental sur la vitesse de groupe des ondes Ψ . — La vitesse de phase V peut servir à définir un indice de réfraction pour les ondes Ψ dans le système xyz . Nous définissons cet indice par la relation usuelle :

$$n = \frac{c}{V}, \quad (14)$$

qui donne en raison de (4) :

$$n = \beta \quad (15)$$

En introduisant (15) dans la première des formules (4), il vient alors :

$$n = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}} \quad (16)$$

Cette formule peut être considérée comme définissant la dispersion de l'espace pour les ondes Ψ associées à un corpuscule dont la nature propre est caractérisée par la constante v_0 . En d'autres termes, si nous considérons l'ensemble des mouvements rectilignes et uniformes que ce corpuscule peut posséder dans le système xyz , la fréquence et la vitesse de phase de l'onde associée sont toujours reliées par la relation (16).

La formule de dispersion que nous venons d'obtenir conduit à un théorème très important. Mais avant de l'énoncer, nous devons définir la notion de « vitesse de groupe », qui a été introduite par lord Rayleigh pour la propagation des ondes dans un milieu dispersif. Une onde plane monochromatique de fréquence ν qui se propage dans une certaine direction (celle de l'axe ox par exemple) est représentée par la fonction :

$$a \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{nx}{c} \right]$$

où n est l'indice de réfraction du milieu pour la fréquence ν . Au lieu de considérer une seule onde plane monochromatique, considérons un très grand nombre d'ondes planes monochromatiques se propageant suivant ox et ayant des fréquences comprises dans un très petit intervalle, $\nu - \delta\nu$, $\nu + \delta\nu$; c'est ce que nous nommerons un « groupe d'ondes ». L'une des ondes du groupe pourra se représenter par la fonction :

$$a(\nu + \varepsilon) d\varepsilon \cos 2\pi(\nu + \varepsilon) \left[t - n(\nu + \varepsilon) \frac{x}{c} + b(\varepsilon) \right]$$

$$|\varepsilon| \ll \delta\nu.$$

où $b(\varepsilon)$ est une constante de phase. Supposons qu'à un certain instant toutes les ondes du groupe soient en concordance de phase en un certain point. Il y aura en ce point une amplitude résultante très élevée. Comme le milieu est dispersif, c'est-à-dire que les vitesses de phase des diverses ondes diffèrent légèrement, les ondes vont se décaler les unes par rapport aux autres pendant la propagation; néanmoins,

nous allons montrer qu'il subsiste un point de concordance de phase se déplaçant avec une vitesse en général différente de la vitesse de phase.

Soient en effet deux ondes du groupe correspondant à des valeurs ε_1 et ε_2 de ε ($|\varepsilon_1| \ll \delta v$; $|\varepsilon_2| \ll \delta v$). D'après notre hypothèse, pour une certaine valeur de x et de t , ces deux ondes sont en concordance de phase. Faisons varier t de dt et x de dx ; la phase de la première onde varie de :

$$2\pi (v + \varepsilon_1) \left[dt - n(v + \varepsilon_1) \frac{dx}{c} \right].$$

Or, ε_1 étant très petit, nous pouvons poser (en supposant la fonction $n(v)$ continue) :

$$n(v + \varepsilon_1) = n(v) + \frac{dn}{dv} \varepsilon_1 \quad (17)$$

et par suite en négligeant les quantités du second ordre, la variation de la phase de la première onde est :

$$2\pi \left[(v + \varepsilon_1) dt - (v + \varepsilon_1) n(v) \frac{dx}{c} - v\varepsilon_1 \frac{dn}{dv} \frac{dx}{c} \right].$$

De même pour la seconde onde, on trouve :

$$2\pi \left[(v + \varepsilon_2) dt - (v + \varepsilon_2) n(v) \frac{dx}{c} - v\varepsilon_2 \frac{dn}{dv} \frac{dx}{c} \right].$$

En faisant la différence des deux expressions précédentes, nous voyons que les ondes seront encore en phase si dx et dt sont liés par la relation :

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left[dt - \frac{n(v)}{c} dx \right] - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) v n'(v) \frac{dx}{c} = 0, \quad (18)$$

ou encore :

$$dt = \left[n(v) + v n'(v) \right] \frac{dx}{c}. \quad (19)$$

Cette relation définit une vitesse U :

$$\frac{1}{U} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{1}{c} \left[n(v) + v n'(v) \right] = \frac{1}{c} \frac{d(nv)}{dv} \quad (20)$$



Si l'on se déplace le long de l'axe des x avec la vitesse U , on voit toujours les deux ondes ε_1 et ε_2 en concordance de phase. Mais comme ε_1 et ε_2 sont arbitraires, notre raisonnement est valable pour tous les couples d'ondes appartenant au groupe.

Donc si l'on se déplace avec la vitesse U le long de l'axe des x , on voit constamment toutes les ondes du groupe en concordance de phase; en d'autres termes, le maximum dû à la concordance des phases se déplace dans le sens ox avec la vitesse U ; c'est cette vitesse qu'on nomme la « vitesse de groupe ».

Armés de cette définition, nous allons démontrer le théorème suivant : « La vitesse de groupe des ondes associées à un corpuscule est égale à la vitesse du corpuscule ».

En effet, la loi de dispersion (16) nous donne :

$$nv = \sqrt{v^2 - v_0^2} \quad (21)$$

et :

$$\frac{d(nv)}{dv} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} = \frac{1}{n} \quad (22)$$

Donc d'après (20) et (15) :

$$U = nc = \beta c \quad (23)$$

ce que nous voulions démontrer.

4. — Relations entre grandeurs ondulatoires et grandeurs mécaniques. — Jusqu'ici nous n'avons introduit aucune relation entre les grandeurs mécaniques, masse, énergie, quantité de mouvement, qui caractérisent le corpuscule et les grandeurs ondulatoires, fréquence, vitesse de phase, indice de l'onde associée. Cependant, si nous voulons que les ondes associées nous servent à comprendre les quanta, de telles relations doivent exister et, en particulier, nous devons nous attendre à trouver l'énergie W du corpuscule et la fréquence ν de son onde associée liées par la formule :

$$W = h\nu \quad (24)$$

où h est la constante de Planck, relation que la théorie des quanta prend comme point de départ.

D'après la théorie de Relativité, l'énergie du corpuscule a pour valeur :

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (25)$$

dans le système xyz . Dans le système propre, sa valeur est .

$$W_0 = mc^2 \quad (26)$$

d'où :

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (27)$$

La formule (27) permettant de passer de W_0 à W est donc la même que la première formule (4) permettant de passer de v_0 à v . Nous sommes donc autorisés, puisque les énergies de corpuscule se transforment lors des changements de système de référence galiléens comme les fréquences des ondes associées, à lier l'énergie du corpuscule à la fréquence de l'onde associée par la relation :

$$W = hv \quad (28)$$

où h désigne une constante de proportionnalité que naturellement nous prendrons égale à la constante de Planck.

Passons à la quantité de mouvement. C'est un vecteur porté dans le sens de la trajectoire et qui a pour valeur en dynamique relativiste :

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (29)$$

En comparant (29) avec (25), on voit que la longueur de ce vecteur est égale à :

$$|p| = \frac{W}{c^2} v. \quad (30)$$

Remplaçons W par hv et $\frac{c^2}{v}$ par V ; nous pouvons dire que la quantité de mouvement est un vecteur dirigé dans le même sens que la vitesse de phase V et de longueur :

$$|p| = \frac{hv}{V} = \frac{hv}{c} n. \quad (31)$$

Il est intéressant d'introduire aussi ici la longueur d'onde λ de l'onde associée en posant comme d'usage :

$$\lambda = \frac{V}{\nu}. \quad (32)$$

Alors, la formule (31) donne :

$$|p| = \frac{h}{\lambda}. \quad (33)$$

5. — *Principe de moindre action et principe de Fermat.* —

En résumé, à un corpuscule de masse m se déplaçant dans une certaine direction avec une vitesse $v = \beta c$, on doit associer une onde de fréquence :

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

se propageant dans la même direction avec la vitesse de phase :

$$V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

La longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - \beta^2}}{mv}$$

et la vitesse du groupe est égale à v .

Quand β^2 est négligeable devant l'unité (Mécanique de Newton), il est suffisant de poser :

$$h\nu = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h}{mv}.$$

Il faut faire, pour terminer, une importante remarque. Dans un milieu d'indice n , les rayons au sens de l'optique géométrique sont définis par la condition suivante (principe de Fermat) : « Le rayon qui passe par deux points A et B doit avoir une forme telle que l'intégrale curviligne :

$$\int_A^B \frac{v}{V} dl = \frac{v}{c} \int_A^B n di$$

soit minimum ». Ici, l'indice n est constant dans l'espace; le principe de Fermat revient donc à dire que le rayon joignant A à B est la courbe de moindre longueur, c'est-à-dire la ligne droite. Les rayons sont rectilignes et les ondes planes. Le point important à noter est que, $\frac{v}{V}$ étant égal à $\frac{p}{h}$, l'intégrale de Fermat peut s'écrire :

$$\frac{1}{h} \int p dl = \frac{1}{h} \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz)$$

et l'on voit qu'elle est identique, à la constante $\frac{1}{h}$ près, à l'intégrale d'action de Maupertuis. Nous voyons poindre une analogie entre le principe de Maupertuis pour le corpuscule et le principe de Fermat pour les ondes associées.

Dans ce chapitre, nous n'avons établi la liaison entre ondes et corpuscules que dans le cas très simple de l'absence de champ. Il va falloir chercher à généraliser cette liaison dans le cas d'un corpuscule se déplaçant dans un champ. Pour y parvenir, nous nous appuierons sur l'analogie entre le principe de moindre action et le principe de Fermat que nous venons de signaler. Cela nous oblige à étudier d'un peu plus près la question de la propagation des ondes.

CHAPITRE IV

GÉNÉRALITÉS SUR LA PROPAGATION DES ONDES

1. — *Propagation des ondes dans un milieu homogène et permanent.* — Nous nous placerons d'abord dans le cas le plus simple : celui de la propagation des ondes dans un espace homogène et à propriétés permanentes. C'est le cas par exemple de la propagation usuelle des ondes lumineuses dans un milieu réfringent homogène. Les conditions de propagation sont alors caractérisées par une certaine grandeur constante dans l'espace et dans le temps : l'indice de réfraction n . Si c désigne la vitesse constante de la lumière dans le vide ($c = 3.10^{10}$ c.g.s.), l'équation de propagation des ondes a le plus souvent la forme bien connue :

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Nous appellerons « onde sinusoïdale simple » ou encore « onde monochromatique plane » une solution de l'équation de propagation ayant la forme suivante :

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left[vt - \frac{n}{c} v (ax + \beta y + \gamma z) \right] \quad (2)$$

a est une constante dite l'amplitude de l'onde, v une autre constante dite la fréquence de l'onde, a, β, γ trois constantes satisfaisant à la relation qui lie les cosinus directeurs d'une même direction : $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. On appelle « phase » de l'onde monochromatique plane la quantité :

$$\Phi(x, y, z, t) = vt - \frac{nv}{c} (ax + \beta y + \gamma z) \quad (3)$$

Il est aisé de vérifier que l'onde plane monochromatique (2) est bien une solution de l'équation (1); on a d'abord :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - 4 \pi^2 \nu^2 \Psi,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\Delta \Psi + \frac{4 \pi^2 n^2 \nu^2}{c^2} \Psi = 0. \tag{4}$$

De plus :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = - \frac{4 \pi^2 n^2 \nu^2}{c^2} \alpha^2 \Psi; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = - \frac{4 \pi^2 n^2 \nu^2}{c^2} \beta^2 \Psi; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = - \frac{4 \pi^2 n^2 \nu^2}{c^2} \gamma^2 \Psi$$

et en raison de la relation admise entre α , β et γ , l'équation (4) est bien vérifiée.

Posons :

$$\Phi_1(x, y, z, t) = \frac{nv}{c} (ax + \beta y + \gamma z). \tag{6}$$

A un instant donné, la phase (3) sera constante sur les plans $\Phi = C^{te}$ ou $ax + \beta y + \gamma z = C^{te}$. Ce sont les plans d'égale phase ou plans équiphases. Les quantités $\alpha\beta\gamma$ sont les cosinus directeurs des normales à ces plans. Quand le temps s'écoule, les valeurs de phase Φ progressent dans l'espace en passant d'un plan équiphase à un autre. On peut dire que la phase se déplace dans la direction $\alpha\beta\gamma$, qu'on nomme la direction de propagation de l'onde. Les droites parallèles définies par les cosinus directeurs α , β , γ sont les « rayons » de l'onde et l'on peut aisément calculer la vitesse de phase, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle il faut se déplacer le long du rayon pour accompagner constamment une certaine valeur de la phase. Si l'on désigne en effet par dl l'élément de longueur compté le long du rayon, on a :

$$dl = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz \tag{7}$$

et la variation de la phase Φ pour des valeurs données de dt et de dl est :

$$d\Phi = vdt - \frac{nv}{c} dl. \quad (8)$$

Cette variation sera nulle si nous nous déplaçons le long du rayon avec la vitesse :

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{c}{n} \quad (9)$$

V est la vitesse de la phase.

La longueur d'onde λ se définit d'une façon analogue : c'est la longueur qu'il faut parcourir à *temps constant* sur le rayon pour faire varier la phase Φ de l'unité, ce qui rend à l'onde Ψ sa valeur primitive. On trouve de suite :

$$\lambda = \frac{c}{nv} = \frac{V}{v}. \quad (10)$$

2. — **Dispersion.** — Dans ce qui précède nous avons supposé que n était une constante, mais il arrive fréquemment que dans l'équation de propagation écrite sous la forme (4) l'on doive attribuer à l'indice de réfraction n une valeur dépendant de v ; en d'autres termes, dans cette équation (4), n , bien que ne dépendant pas des variables $xyzt$, est variable avec la fréquence v de la solution sinusoïdale simple envisagée. On dit alors qu'il y a dispersion, et la relation qui exprime n en fonction de v est appelée la loi de dispersion. Ce cas se présente en particulier quand l'équation de propagation, sous sa forme générale, au lieu d'avoir la forme (1), a par exemple la forme :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = K\Psi \quad (K = C^{10}) \quad (11)$$

Car alors en substituant la solution (2), l'équation (11) peut s'écrire :

$$\Delta\Psi + \left(\frac{4\pi^2v^2}{c^2} - K \right) \Psi = 0 \quad (12)$$

et pour retrouver l'équation (4), il faut poser :

$$n^2 = 1 - \frac{Kc^2}{4\pi^2v^2} = f(v) \quad (13)$$

n est bien alors variable avec v .

3. — *Trains d'ondes et groupes d'ondes.* — L'onde plane monochromatique doit en un certain sens être considérée comme une abstraction, car elle remplirait l'espace tout entier et subsisterait de toute éternité. En réalité, une onde occupe toujours une région limitée de l'espace à un instant donné et, en un point donné, elle a toujours un début et une fin. Une onde ainsi limitée en tous sens est ce qu'on nomme un « train d'ondes ».

Pour représenter un train d'ondes, on considère non plus une seule onde plane monochromatique, mais un ensemble d'ondes planes monochromatiques

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum a(v, \alpha, \beta, \gamma) \quad (14)$$

$$\cos 2\pi \left[vt - \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) + \Delta(v, \alpha, \beta, \gamma) \right]$$

le terme Δ servant à indiquer que les différentes ondes monochromatiques ont en général des phases différentes. Si α , β , γ sont toujours supposées liées par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, il résulte des calculs faits plus haut que chacune des ondes monochromatiques satisfait l'équation de propagation et, comme cette équation est linéaire, la somme des ondes monochromatiques est aussi une solution.

Au lieu de considérer une somme d'un nombre fini de termes, on peut aussi considérer une intégrale :

$$\Psi(x, y, z, t) = \iiint dv d\alpha d\beta a(v, \alpha, \beta) \quad (15)$$

$$\cos 2\pi \left[vt - \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) + \Delta(v, \alpha, \beta) \right]$$



avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Bien entendu, si n est fonction de v , on doit dans les formules (14) et (15) regarder n comme une abréviation pour $n(v)$.

Pour préciser comment on peut représenter un train d'ondes par une somme d'ondes planes monochromatiques, nous considérons le cas suivant : soit un train se propageant dans une direction que nous prendrons pour axe des z et qui puisse se représenter par la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \cos 2\pi \left[vt - \frac{nv}{c} z \right] \quad (16)$$

avec un choix convenable de l'origine du temps. Nous supposerons de plus que la forme de notre train d'ondes est symétrique par rapport à la direction des z , c'est-à-dire que la fonction A est une fonction *paire* des deux variables x et y :

$$A(-x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \quad (17)$$

$$A(x, -y, z, t) = A(x, y, z, t)$$

Le train d'ondes étant par définition limité dans l'espace, la fonction A ne sera différente de zéro (pour une valeur donnée du temps) que si les variables xyz sont respectivement comprises entre des limites x_1 et x_2 , y_1 et y_2 , z_1 et z_2 . Ces limites déterminent le domaine d'extension du train d'ondes dans l'espace. Pour simplifier encore un peu l'analyse, nous admettrons que dans le domaine occupé par le train d'ondes à un instant donné la fonction A est sensiblement constante sauf sur les bords où elle tombe rapidement à zéro; en d'autres termes pour une valeur donnée de yz et t , la fonction A considérée comme fonction de x seulement nulle pour $x < x_1$ passe rapidement de zéro à une valeur constante au voisinage de $x = x_1$, reste ensuite constante jusqu'au voisinage de $x = x_2$, puis retombe rapidement à zéro (fig. 4).

La variation en fonction de y et de z est du même type. En résumé notre train d'ondes peut, dans la plus grande partie de son domaine d'extension, être confondu avec une onde plane monochromatique mais il en diffère naturellement sur les bords de ce domaine.

Par définition, nous appellerons « groupe d'ondes » un ensemble d'ondes planes monochromatiques de fréquences et de directions de propagation très voisines. Nous nous proposons de démontrer qu'il est possible de représenter, par un tel groupe d'ondes, le train d'ondes étudié sous la condition expresse que les dimensions du train d'ondes

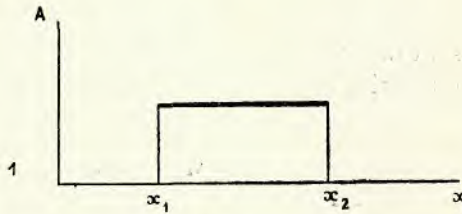


FIG. 1.

dans l'espace soient grandes par rapport à la longueur d'onde $\frac{c}{nv}$ et que sa durée dans le temps en un point fixe soit grande par rapport à la période $\frac{1}{v}$.

En raison de la symétrie autour de l'axe des z admise pour le train d'ondes, si l'on parvient à le représenter par un groupe d'ondes, ce groupe sera de la forme :

$$\int_{-\eta_1}^{+\eta_1} d\alpha \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} d\varepsilon a(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (18)$$

$$\cos 2\pi \left[(v + \varepsilon) t - \frac{(v + \varepsilon) \cdot n(v + \varepsilon)}{c} (\alpha x + \beta y + z) + \Delta(\varepsilon, \alpha, \beta) \right]$$

Nous avons écrit z et non γz parce que, α et β étant très petits, $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ ne diffère de l'unité que par des quantités du second ordre.

Or, en se bornant aux quantités du premier ordre, on a :

$$(v + \varepsilon) \times n(v + \varepsilon) = v \times n(v) + \frac{d(nv)}{dv} \varepsilon \quad (19)$$

et l'argument du cosinus dans (18) devient :

$$2\pi \left[vt - \frac{v \cdot n(v)}{c} (\alpha x + \beta y + z) \right. \\ \left. + \varepsilon \left(t - \frac{d(nv)}{dv} z \right) + \Delta (\varepsilon, \alpha, \beta) \right] \quad (20)$$

En employant la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on peut écrire (18) sous la forme :

$$\cos 2\pi \left[vt - \frac{v \cdot n(v)}{c} z \right] \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dz \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} d\varepsilon a(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (21)$$

$$\cos 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(nv)}{dv} z \right) - \frac{v \cdot n(v)}{c} (\alpha x + \beta y) + \Delta (\varepsilon, \alpha, \beta) \right]$$

$$- \sin 2\pi \left[vt - \frac{v \cdot n(v)}{c} z \right] \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dz \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} d\varepsilon a(\varepsilon, \alpha, \beta)$$

$$\sin 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(nv)}{dv} z \right) - \frac{v \cdot n(v)}{dv} (\alpha x + \beta y) + \Delta (\varepsilon, \alpha, \beta) \right]$$

Pour identifier cette expression (21) du groupe d'ondes avec l'expression (16) de notre train d'ondes, il faut d'abord annuler dans (21) le coefficient du sinus. Pour y parvenir nous supposons que la fonction Δ a même valeur pour toutes les ondes monochromatiques du groupe et nous pourrions dès lors poser $\Delta = 0$; puis nous prendrions pour $a(\varepsilon, \alpha, \beta)$ une fonction paire des trois arguments $\varepsilon, \alpha, \beta$. La parité par rapport à α et β correspond à la symétrie du train d'ondes autour de oz ; la parité par rapport à ε correspond à une symétrie de composition spectrale du groupe par

rapport à la fréquence centrale ν . Pour achever l'identification, il suffit de poser :

$$A(x, y, z, t) = \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dz \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} d\varepsilon a(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (22)$$

$$\cos 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(n\nu)}{d\nu} \frac{z}{c} \right) - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} (\alpha x + \beta y) \right]$$

L'expression (22) quand elle est exacte, c'est-à-dire quand le train d'ondes peut bien être représenté par un groupe d'ondes, permet de retrouver la vitesse de groupe de Rayleigh. Considérons, en effet, une droite parallèle à la direction des z ; quand on se déplace de dz sur cette droite, on est accompagné par une valeur constante de l'amplitude A , si l'on met pour franchir l'élément dz un temps égal à :

$$dt = \frac{1}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu} dz.$$

On peut donc considérer au degré d'approximation que nous employons ici (1), que l'amplitude résultante du train d'ondes se déplace en bloc dans la direction des z avec la vitesse U définie par la formule :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu}. \quad (23)$$

C'est bien la vitesse de groupe précédemment introduite. Si n ne dépend pas de ν , on a $U = \frac{c}{n}$ la vitesse de groupe se confond avec la vitesse de phase.

Donc, quand (22) est valable, A ne dépend de z et de t que par la combinaison $t - \frac{z}{U}$ et il est naturel d'introduire

(1) En réalité pour des temps suffisamment longs, un train d'ondes a toujours une tendance à s'étaler. Des calculs plus rigoureux faits au chapitre XIII le montreront clairement.

la variable $z' = z - Ut$. Pour une valeur donnée du temps, z' mesure à une constante près la coordonnée z et si z_1' et z_2' sont les valeurs de z correspondant à l'avant et à l'arrière du train d'ondes, on a :

$$z_1' - z_2' = z_1 - z_2 \quad (24)$$

Il est facile de voir que le groupe d'ondes (22) est symétrique en z' comme il l'est en x et y . Nous pouvons maintenant écrire (22) sous la forme :

$$A(x, y, z') = \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} d\alpha \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} d\varepsilon a(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (25)$$

$$\cos 2\pi \left[\frac{\varepsilon}{U} z' + \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y) \right].$$

Si l'on décompose le cosinus en une somme de produits de sinus et de cosinus, la seule intégrale non nulle sera celle qui portera sur un produit de trois cosinus et cela en vertu de la parité de $a(\varepsilon, \alpha, \beta)$. Si donc nous posons :

$$c(\varepsilon, \alpha, \beta) = 2a(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (26)$$

il viendra :

$$A(x, y, z') = \int_0^{+\eta_1} d\alpha \int_0^{+\eta_2} d\beta \int_0^{+\eta_3} d\varepsilon c(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (27)$$

$$\cos \frac{2\pi\varepsilon}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \beta y$$

C'est de cette façon que A doit pouvoir s'exprimer pour que le train d'ondes puisse être représenté par un groupe d'ondes. Mais quand est-il possible d'exprimer A de cette façon? Voilà la question qui se pose.

La théorie des intégrales de Fourier nous apprend que sous des conditions très générales une fonction $f(x, y, z)$

qui est paire par rapport aux variables xyz peut se mettre sous la forme :

$$f(x, y, z) = \int_0^{+\infty} d\lambda \int_0^{+\infty} d\mu \int_0^{+\infty} dv \, p(\lambda, \mu, \nu) \quad (28)$$

$$\cos \lambda x \cos \mu y \cos \nu z$$

avec :

$$p(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, f(x, y, z) \quad (29)$$

$$\cos \lambda x \cos \mu y \cos \nu z.$$

Par conséquent la fonction $A(x, y, z')$ paire par rapport aux variables xyz' peut s'écrire :

$$A(x, y, z') = \int_0^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\beta \int_0^{+\infty} dz \, c(\varepsilon, \alpha, \beta) \quad (30)$$

$$\cos \frac{2\pi\varepsilon}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \beta y$$

avec :

$$c(\varepsilon, \alpha, \beta) = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nv}{c} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nv}{c} dy \, A(x, y, z') \quad (31)$$

$$\cos \frac{2\pi\varepsilon}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{nv}{c} \beta y$$

Mais pour pouvoir représenter notre train d'ondes par un groupe d'ondes, il faut pouvoir identifier (27) et (30) c'est-à-dire réduire dans (30) les intervalles d'intégration en $\alpha, \beta, \varepsilon$ aux très petits intervalles $0 - \eta_1, 0 - \eta_2, 0 - \eta_3$. Pour cela, il faut que la fonction $c(\varepsilon, \alpha, \beta)$ définie par (31)

soit nulle en dehors de ces très petits intervalles. Or, par hypothèse, A est sensiblement constant pour $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$; $z_1 < z < z_2$ et est nul en dehors de ces intervalles. Si dans la formule (31) nous considérons l'intégrale en x , nous avons :

$$c(\varepsilon, \alpha, \beta) = C^{te} \int_{x_1}^{x_2} A \cos 2\pi \frac{nv}{c} \alpha x dx \quad (32)$$

avec A sensiblement constant. Quand le cosinus a un grand nombre de périodes dans l'intervalle $x_1 - x_2$, $c(\varepsilon, \alpha, \beta)$ est sensiblement nul. Pour que c ait une valeur sensible, il faut donc avoir :

$$\frac{\alpha}{\lambda} (x_1 - x_2) \approx 1 \quad (33)$$

où le signe \approx signifie « de l'ordre de ». Pour que la condition (33) soit équivalente à α beaucoup plus petit que 1, il faut que l'on ait :

$$\lambda \text{ beaucoup plus petit que } x_1 - x_2 \quad (34)$$

La dimension du train d'ondes dans le sens des x doit être très supérieure à la longueur d'onde moyenne λ . On trouve le même résultat pour la dimension parallèle à l'axe des y .

Pour la direction des z , on trouve :

$$\frac{\varepsilon}{U} (z_1' - z_2') = \frac{\varepsilon}{U} (z_1 - z_2) \approx 1 \quad (35)$$

et pour que l'on ait ε beaucoup plus petit que v , il faut avoir :

$$z_1 - z_2 \gg \frac{U}{v} = UT \quad (36)$$

Le produit UT n'est pas en général égal à la longueur d'onde UT , mais souvent les deux quantités sont du même ordre. On peut alors dire que le train d'ondes est représentable par un groupe quand toutes ses dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde.

Le temps mis par le train d'ondes pour passer tout entier en un point fixe est évidemment :

$$t_1 - t_2 = \frac{z_1 - z_2}{U} \quad (37)$$

Ce temps, d'après (36), doit être très long par rapport à la période.

D'après (33), (35) et la relation analogue pour y , les quantités :

$$\frac{\eta_1}{\lambda} (x_1 - x_2), \quad \frac{\eta_2}{\lambda} (y_1 - y_2) \quad \text{et} \quad \frac{\eta_3}{U} (z_1 - z_2)$$

doivent être au moins de l'ordre de l'unité. Appelons vecteur « nombre d'ondes » pour une onde plane monochromatique un vecteur dirigé dans le sens de la propagation et de longueur égale au nombre d'ondes par centimètre $\frac{1}{\lambda}$; ses composantes sont :

$$\mathcal{N}_x = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \mathcal{N}_y = \frac{\beta}{\lambda} \quad \mathcal{N}_z = \frac{\gamma}{\lambda} \quad (38)$$

En raison des hypothèses faites sur α , β et γ , les variations maxima de \mathcal{N}_x , \mathcal{N}_y et \mathcal{N}_z correspondant aux diverses composantes monochromatiques du train d'ondes sont :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{N}_x &= \frac{\eta_1}{\lambda} & \delta \mathcal{N}_y &= \frac{\eta_2}{\lambda} & (39) \\ \delta \mathcal{N}_z &= \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial v} \eta_3 = \frac{\eta_3}{U} \end{aligned}$$

Posons :

$$\delta x = x_1 - x_2 \quad \delta y = y_1 - y_2 \quad \delta z = z_1 - z_2 \quad (40)$$

Ce sont les variations maxima des coordonnées dans l'étendue du train d'ondes. Avec ces notations, on peut

donc écrire les inégalités valables en ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_x \times \delta x &\geq 1 & \delta \mathcal{L}_y \times \delta y &\geq 1 \\ \delta \mathcal{L}_z \times \delta z &\geq 1 \end{aligned} \quad (41)$$

Enfin, désignons par :

$$\delta t = t_1 - t_2 \quad (42)$$

la durée du passage du train d'ondes en un point fixe et par $\delta \nu$ la quantité η_3 variation maxima de la fréquence dans le groupe, on a d'après (35) et (37) :

$$\delta \nu \cdot \delta t \geq 1 \quad (43)$$

Nous verrons plus tard l'importance des formules (41) et (43) dans la théorie de Bohr et Heisenberg.

4. — *Propagation dans un milieu permanent non homogène.* — Jusqu'ici nous avons supposé l'indice indépendant de x, y, z . Maintenant nous allons supposer que n est fonction de xyz tout en étant constant par rapport au temps. C'est le cas qui se présente en optique pour les milieux réfringents non homogènes. Généralement l'indice est une fonction de la fréquence; les milieux réfringents non homogènes sont généralement aussi dispersifs. L'équation de propagation des ondes sinusoïdales simples sera ici :

$$\Delta \Psi + \frac{4 \pi^2 \nu^2}{c^2} n^2(x, y, z) \Psi = 0 \quad (44)$$

Envisageons la solution sinusoïdale :

$$\Psi = a(x, y, z) \cos 2 \pi [vt - \Phi_1(x, y, z)] \quad (45)$$

a est l'amplitude maintenant variable d'un point à un autre. La quantité :

$$\Phi(x, y, z, t) = vt - \Phi_1(x, y, z) \quad (46)$$

est la phase toujours linéaire en t mais qui n'est plus linéaire en xyz . Substituons (45) dans (44); nous obtenons :

$$\left[\Delta a - 4\pi^2 a \sum_{xyz} \left(\frac{d\Phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} n^2 a \right] \quad (47)$$

$$\cos 2\pi (vt - \Phi_1) + \left[4\pi \sum_{xyz} \frac{\partial \Phi_1}{dx} \frac{\partial a}{\partial x} + 2\pi a \Delta \Phi_1 \right]$$

$$\sin 2\pi (vt - \Phi_1) = 0$$

Cette équation devant être constamment réalisée, les coefficients de $\sin 2\pi [vt - \Phi_1]$ et $\cos 2\pi (vt - \Phi_1)$ doivent être nuls séparément, ce qui donne :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2 v^2}{c^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a} \quad (48)$$

$$\sum_{xyz} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2} a \Delta \Phi_1 = 0 \quad (49)$$

Par définition, nous dirons que la longueur d'onde en un point est la quantité :

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial l}} \quad (50)$$

où dl désigne l'élément de longueur porté normalement à la surface $\Phi_1 = C^{\text{te}}$ au point considéré. Cette longueur λ est ici variable d'un point à un autre. Cette définition contient d'ailleurs bien la définition usuelle dans le cas où n est une constante, car alors les surfaces :

$$\Phi_1 = \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) = C^{\text{te}}$$

sont des plans dont la normale a pour cosinus directeurs $\alpha\beta\gamma$ et :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial l} = \frac{nv}{c} = \frac{v}{V}$$

Comme dans le cas des milieux homogènes nous appellerons surfaces d'égal phase ou équi-phases les surfaces $\Phi_1 = C^{\text{te}}$, qui ici ne sont plus en général des plans. Les courbes normales à ces surfaces sont encore appelées les « rayons » de l'onde et nous nommerons vitesse de la phase $V(x, y, z)$ la vitesse avec laquelle il faut se déplacer à partir du point xyz le long du rayon pour accompagner une valeur constante de la phase. La valeur de V se calcule aisément; si l'on franchit l'élément dl de rayon pendant le temps dt , la variation de la phase Φ est : $v dt - \frac{\partial \Phi_1}{\partial l} dl$ et pour que cette variation soit nulle il faut se déplacer avec la vitesse :

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{v}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial l}} = v : \sqrt{\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2} = v \cdot \lambda(x, y, z). \quad (51)$$

La fonction (45) peut alors être mise sous la forme :

$$\Psi = a(x, y, z) \cos 2\pi \left[vt - v \int \frac{dl}{V} \right] \quad (52)$$

l'intégrale étant prise le long du rayon qui passe au point $M(x, y, z)$ considéré, depuis une certaine surface équi-phase prise pour origine des phases jusqu'à M . Mais en général la fonction $V(x, y, z)$ n'est pas connue *a priori* et sa détermination exige la détermination des fonctions $a(x, y, z)$ et $\Phi_1(x, y, z)$ au moyen des équations aux dérivées partielles simultanées (48) et (49).

Néanmoins il y a un cas très intéressant où la détermination de V et de Φ_1 se fait immédiatement sans qu'il soit besoin de calculer $a(x, y, z)$. Ce cas est celui où à l'échelle de la longueur d'onde, le milieu peut être considéré comme homogène et l'indice de réfraction comme constant. Nous aurons alors :

$$\frac{\partial a}{\partial x} \lambda \ll a \quad \frac{\partial a}{\partial y} \lambda \ll a \quad \frac{\partial a}{\partial z} \lambda \ll a \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \lambda^2 \ll a \dots \dots \Delta a \cdot \lambda^2 \ll a$$

La dernière inégalité (53) jointe à la définition (50) de λ nous montre que dans l'équation (48) le terme $\frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a}$ est négligeable devant :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

De même en multipliant l'équation (49) par λ^2 et en tenant toujours compte de (50) il vient :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta \Phi_1 = 0 \quad (54)$$

et dans (54) le premier terme est négligeable en vertu de (53). Finalement le système (48)-(49) peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{n^2 v^2}{c^2} \quad \Delta \Phi_1 \cdot \lambda^2 = 0. \quad (55)$$

Nous poserons donc d'après (51) :

$$V(x, y, z) = \frac{v}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}} = \frac{c}{n} \quad \lambda = \frac{V}{v} = \frac{c}{nv} \quad (56)$$

La seconde équation (55) est alors nécessairement vérifiée, car Φ_1 est, d'après (56), sensiblement linéaire en xyz à l'échelle de la longueur d'onde et les quantités telles que $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cdot \lambda^2$ sont négligeables.

La formule (52) nous fournit donc ici la solution approximative :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos 2\pi \left(vt - v \int \frac{ndl}{c} \right) \quad (57)$$

et en somme la détermination de Φ_1 se fait *a priori* (puisque $n(x, y, z)$ est donné) sans avoir à s'occuper du calcul de $a(x, y, z)$.

Quand l'approximation précédente est suffisante, on dit que l'optique géométrique est valable. On peut dire alors

qu'à l'échelle de la longueur d'onde, l'onde est plane et monochromatique, mais, pour des étendues comprenant de nombreuses longueurs d'ondes, il y a une variation progressive des conditions de propagation et cette variation se traduit à cette plus grande échelle par une variation de l'amplitude et une forme non linéaire de la phase.

5. — Construction des ondes-enveloppes et principe de Fermat. — Supposons réalisées les conditions d'application de l'optique géométrique et voyons comment on peut alors étudier la propagation d'une onde. Connaissant une surface d'égale phase, on pourra en construire d'autres infiniment voisines en décrivant, autour de chaque point M de la surface donnée, une sphère de rayon $\varepsilon V(M)$ où ε est une constante infiniment petite et où $V(M)$ est la valeur de V au point M. Les deux nappes de l'enveloppe de ces petites sphères sont des surfaces d'égale phase, car ce sont les surfaces sur lesquelles, aux temps $t - \varepsilon$ et $t + \varepsilon$, on trouve la valeur de la phase qui est réalisée au temps t sur la surface donnée. Les deux droites qui joignent chaque point M aux points de contact, entre la sphère dont il est le centre et son enveloppe, sont des éléments de « rayon ». En procédant ainsi de proche en proche, on peut construire toutes les surfaces équiphases et du même coup les rayons de l'onde sont déterminés comme limites de lignes indéfiniment brisées.

La méthode précédente, connue sous le nom de « construction des ondes-enveloppes » permet de démontrer une proposition que l'optique géométrique admet comme un postulat : le principe de Fermat. D'après ce principe, tout rayon passant par deux points A et B de l'espace est tel que l'intégrale curviligne :

$$\int_A^B \frac{dl}{V} = \int_A^B \frac{ndl}{c} \quad (58)$$

prise le long du rayon de A en B soit stationnaire. Dans la théorie des ondes, ceci signifie que le temps mis par la

phase pour aller de A en B est minimum le long du rayon. Pour démontrer cette proposition, considérons la surface d'égle phase $\Phi_1(x, y, z) = c_1$ passant par A et la surface d'égle phase $\Phi_1(x, y, z) = c_2$ passant par B, puis imaginons toutes les surfaces d'égle phase intermédiaires entre les deux précédentes $\Phi_1(x, y, z) = c$ avec des valeurs infiniment voisines de c s'intercalant entre c_1 et c_2 . Le rayon allant de A à B peut être regardé comme formé de petits segments rectilignes normaux aux surfaces infiniment voisines $\Phi_1 = c$. Toute courbe variée infiniment voisine du rayon est formée de segments rectilignes infiniment petits ayant le caractère qui vient d'être défini et d'au moins deux segments rectilignes non normaux aux surfaces d'égle phase qui passent par leurs extrémités. La quantité $\frac{dl}{V}$ prise le long d'un segment de la première espèce sur la courbe variée est égale à la quantité $\frac{dl}{V}$ prise le long du segment correspondant du rayon; en effet, les deux éléments dl sont normaux aux surfaces $\Phi_1 = c$ et $\Phi_1 = c + dc$ passant par leurs extrémités et l'on a pour les deux :

$$\frac{dl}{V} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l} dl = \frac{dc}{v}.$$

Si l'on compare au contraire un élément de la courbe variée non normal aux surfaces équiphases infiniment voisines avec l'élément correspondant du rayon, la quantité $\frac{dl}{V}$ est plus grande pour le premier que pour le second, car la perpendiculaire est plus courte que toute oblique. Le principe de Fermat se trouve ainsi démontré; pour la théorie des ondes, ce n'est plus un postulat, c'est un théorème, mais valable seulement quand l'optique géométrique est applicable.

6. — *Les groupes d'ondes dans un milieu permanent non homogène.* — Nous devons maintenant nous demander comment doit se généraliser la notion de groupe d'ondes dans le

cas des milieux permanents non homogènes. Quand l'optique géométrique est valable. La fonction Φ_1 obéit alors à l'équation :

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{v^2}{V^2} = \frac{n^2v^2}{c^2} \quad (59)$$

Cette équation est souvent appelée l'équation de l'optique géométrique. La surface d'égalé phase qui sert de point de départ dans la construction des ondes-enveloppes fait partie d'une famille d'intégrales complètes :

$$\Phi_1(x, y, z, a, b) = C^{te} \quad (60)$$

de l'équation (59) et les surfaces équiphases qu'on en déduit par cette construction appartiennent à la famille (60), la constante du second membre variant seule quand on passe d'une surface à une autre. Donc pour une propagation déterminée, les surfaces équiphases forment une famille à deux paramètres. Dans le cas particulier des milieux homogènes, on a : $\Phi_1 = \frac{nv}{c} (ax + \beta y + \gamma z)$; les deux paramètres a et b sont alors les cosinus directeurs a et β , si l'on prend toujours $\gamma = \sqrt{1 - a^2 - \beta^2}$.

Envisageons un groupe d'ondes constitué de la façon suivante : il comprend une infinité d'ondes sinusoïdales simples de fréquences comprises dans le très petit intervalle $v - \delta v$, $v + \delta v$ pour lesquelles les deux paramètres a et b ont des valeurs comprises dans les très petits intervalles $a - \delta a$, $a + \delta a$, et $b - \delta b$, $b + \delta b$. Supposons qu'à l'instant t_0 toutes ces ondes se trouvent en concordance de phase au point $x_0 y_0 z_0$. Comment va se déplacer ensuite cet état de concordance de phase? La fonction Φ_1 dépendant de V , dépend en général de v , et pour que les ondes du groupe soient toutes en concordance de phase à l'instant t_0 au point $x_0 y_0 z_0$, il faut avoir :

$$t_0 \dot{d}v - \left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right)_0 da + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial b}\right)_0 db + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}\right)_0 dv \right] = 0 \quad (61)$$

formule où l'indice 0 indique que les dérivées sont prises au point x_0, y_0, z_0 et où da, db, dv ont respectivement une valeur absolue inférieure à $\delta a, \delta b, \delta v$. Pour qu'à une époque postérieure t , nous retrouvions cet état de concordance de phase en un point x, y, z , il faut avoir :

$$tdv - \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} db + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} dv \right] = 0 \quad (62)$$

les dérivées de Φ_1 étant prises cette fois au point x, y, z et les da, db, dv ayant les mêmes valeurs que dans la formule précédente. La relation (62) sera une conséquence de (61) si l'on a :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a} = c_1; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} = c_2; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} - t = c_3 \quad (63)$$

Les deux premières relations définissent la courbe décrite dans l'espace par le point de concordance de phase considéré; la troisième relation définit le mouvement de ce point sur sa trajectoire. L'analogie avec la théorie de Jacobi pour les champs constants saute aux yeux.

Il est aisé de démontrer que la trajectoire définie par les 2 premières équations (63) est normale aux surfaces d'égal phase. En effet, en différenciant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial a \partial x} dx + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial a \partial y} dy + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial a \partial z} dz = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial b \partial x} dx + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial b \partial y} dy + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial b \partial z} dz = 0 \quad (64')$$

Or, si l'on dérive l'équation (59), satisfaite par Φ_1 , par rapport à a et b , on trouve :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial a} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial a} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial a} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial b} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial b} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial b} = 0 \quad (65')$$



En comparant le système (65)-(65') avec le système (64)-(64'), nous voyons que les dérivées :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$$

sont respectivement proportionnelles aux différentielles dx , dy et dz prises le long de la trajectoire; la trajectoire est donc bien normale aux surfaces $\Phi_1 = C^{\text{te}}$.

Quand l'optique géométrique est valable, la propagation a lieu à l'échelle de la longueur d'onde comme si l'indice était constant, et même dans un domaine contenant un certain nombre de longueurs d'onde, les ondes (45) peuvent être considérées comme des ondes planes à amplitude constante. Or, dans les cas usuels, la longueur d'onde est beaucoup plus petite que les plus petites dimensions que nous puissions directement mesurer. Il sera donc possible de considérer des trains d'ondes dont les dimensions sont très petites à l'échelle humaine et qui comprendront néanmoins un grand nombre de longueurs d'ondes; ces trains pourront être représentés par un groupe d'ondes de fréquences et de directions de propagation très voisines, ondes qui, à chaque instant, pourront être regardées comme sensiblement planes et à amplitude constante; mais, bien entendu, l'amplitude et la phase de ces ondes se modifieront lentement pendant la propagation du groupe en raison de la variation à grande échelle de l'indice de réfraction.

7. — Propagation des ondes dans un milieu non permanent. — Il nous reste à parler du cas le plus général, celui où les conditions de propagation varient non seulement d'une place à une autre mais aussi avec le temps : c'est le cas des milieux réfringents non homogènes et non permanents. Admettons par exemple l'équation de propagation :

$$\Delta \Psi = \frac{n^2(x, y, z, t)}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (66)$$

Le temps ne jouant plus ici aucun rôle particulier, nous ne pouvons plus l'éliminer en prenant une solution sinusoïdale

dont la phase soit fonction linéaire du temps. Nous prendrons donc pour forme générale des solutions sinusoïdales la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \cos 2\pi\Phi(x, y, z, t) \quad (67)$$

Substituons dans l'équation de propagation et annulons séparément les termes en sinus et en cosinus. Il vient :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4\pi^2 a} \left[\Delta a - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right] \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \sum_{xyz} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{c^2}{n^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} \\ + \frac{1}{2} a \left(\Delta\Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Par définition nous poserons :

$$v(x, y, z, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad \lambda(x, y, z, t) = \left(- \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^{-1} \quad (70)$$

dl étant l'élément de normale à la surface $\Phi = C^{te}$ au point et à l'instant considérés. La fréquence et la longueur d'onde définies par (70) sont en général toutes deux variables; dans le cas où n est constant, elles coïncident avec la fréquence et la longueur d'onde au sens usuel.

Nous dirons que l'approximation de l'optique géométrique est valable si pour des déplacements spatiaux de l'ordre de λ et des intervalles de temps de l'ordre de la période $\frac{1}{v}$ les conditions de propagation varient très peu. On peut alors écrire sensiblement :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \quad (71)$$

et considérer comme nulles les dérivées secondes de Φ . L'équation (71) est la forme de l'équation de l'optique géométrique appropriée au cas général. A l'échelle de la

longueur d'onde et pendant des temps qui ne sont pas très grands par rapport à la période, on pourra considérer l'onde (67) comme plane et monochromatique. D'où la possibilité dans ce cas d'imaginer des trains d'ondes dont les dimensions spatiales et la durée dans le temps sont inférieures à ce que nous pouvons mesurer et qui néanmoins remplissent les conditions nécessaires pour pouvoir être représentées par un groupe d'ondes.

Soit $\Phi(x, y, z, t, a, b, c)$ une intégrale complète de l'équation (71). Soit un groupe d'ondes formé d'ondes sinusoïdales pour lesquelles les trois constantes abc sont comprises dans de petits intervalles $a - \delta a, a + \delta a; b - \delta b, b + \delta b; c - \delta c, c + \delta c$. Supposons qu'à l'instant t_0 toutes ces ondes soient en phase au point $x_0 y_0 z_0$; on doit avoir :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)_0 da + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b}\right)_0 db + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial c}\right)_0 dc = 0 \quad (72)$$

formule où l'indice 0 indique que les dérivées sont prises en $x_0 y_0 z_0$ à l'instant t_0 et où da, db, dc sont respectivement inférieurs en valeurs absolues à $\delta a, \delta b, \delta c$. Pour retrouver le même état de concordance de phase au point x, y, z au temps t , il faut avoir :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} da + \frac{\partial\Phi}{\partial b} db + \frac{\partial\Phi}{\partial c} dc = 0 \quad (73)$$

les dérivées cette fois prises au temps t en x, y, z . Pour que (73) soit une conséquence de (72), il faut que :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = c_1; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b} = c_2; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial c} = c_3 \quad (74)$$

Ces trois équations donnent le mouvement du point de concordance de phase. L'analogie avec la théorie de Jacobi est évidente.

Après cette étude de la propagation des ondes, nous allons chercher quelles équations de propagation nous devons adopter en Mécanique ondulatoire pour les ondes associées à un corpuscule.

CHAPITRE V

LES ÉQUATIONS DE PROPAGATION DE L'ONDE ASSOCIÉE A UN CORPUSCULE

1. — *Critérium pour le choix des équations de propagation.* — Dans le cas particulier du mouvement d'un corpuscule en dehors de tout champ, nous avons pu établir une correspondance entre les ondes et les corpuscules. Cette correspondance se traduit de la façon suivante : à un corpuscule d'énergie W et de quantité de mouvement \vec{p} , nous devons associer une onde se propageant dans la direction du mouvement (direction du vecteur \vec{p}) onde dont la fréquence est $\nu = \frac{W}{h}$ et la longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{|p|}$. Tout se passe comme si l'espace vide possédait pour cette onde associée un indice de réfraction $n = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}$ où v_0 désigne une constante caractéristique du corpuscule et reliée à sa masse propre m par la relation $v_0 = \frac{mc^2}{h}$. La vitesse du corpuscule est égale à la vitesse de groupe correspondant à cette loi de dispersion.

D'autre part, nous avons vu poindre (chapitre III, paragraphe 5) une connexion entre le principe de moindre action et le principe de Fermat, et cette analogie entre l'ancienne Mécanique et l'optique géométrique s'est trouvée confirmée par le fait que le mouvement d'un groupe d'ondes se traduit à l'approximation de l'optique géométrique par des équations dont l'analogie avec celles de la théorie de Jacobi est frappante (chapitre IV).

Nous allons donc chercher des équations de propagation pour les ondes associées telles qu'à l'approximation de l'optique géométrique les rayons des ondes coïncident avec les trajectoires que l'ancienne Dynamique prévoit pour le corpuscule. Une remarque essentielle est la suivante : la longueur λ des ondes associées et leur période $T = \frac{1}{\nu}$ sont proportionnelles à la constante h de Planck et seraient infiniment petites en même temps que cette grandeur. Or, quand longueur d'onde et période sont infiniment petites, il résulte des raisonnements de la dernière leçon que l'optique géométrique devient entièrement valable. Donc, quand il est légitime de considérer h comme négligeable, la Mécanique ancienne doit être tout à fait suffisante. Nous devons choisir nos équations de propagation de telle façon que, pour h tendant vers zéro, elles nous rendent les équations des anciennes Mécaniques; c'est là un critérium pour le choix de ces équations de propagation.

2. — Equation de propagation en l'absence de champ. —

Prenons d'abord le cas le plus simple du mouvement en dehors de tout champ. On est d'accord pour admettre que l'équation de propagation doit alors s'écrire :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{dt^2} = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi \quad (1)$$

Substituons en effet dans cette équation l'expression qui représente une onde plane monochromatique. Comme on a alors $\frac{\partial^2\Psi}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2\Psi$, il vient :

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{m^2 c^4}{h^2\nu^2} \right] \Psi = 0 \quad (2)$$

Puisque par définition $mc^2 = h\nu_0$, on peut aussi écrire (2) sous la forme :

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right] \Psi = 0 \quad (3)$$

Nous allons donc chercher des équations de propagation pour les ondes associées telles qu'à l'approximation de l'optique géométrique les rayons des ondes coïncident avec les trajectoires que l'ancienne Dynamique prévoit pour le corpuscule. Une remarque essentielle est la suivante : la longueur λ des ondes associées et leur période $T = \frac{1}{\nu}$ sont proportionnelles à la constante h de Planck et seraient infiniment petites en même temps que cette grandeur. Or, quand longueur d'onde et période sont infiniment petites, il résulte des raisonnements de la dernière leçon que l'optique géométrique devient entièrement valable. Donc, quand il est légitime de considérer h comme négligeable, la Mécanique ancienne doit être tout à fait suffisante. Nous devons choisir nos équations de propagation de telle façon que, pour h tendant vers zéro, elles nous rendent les équations des anciennes Mécaniques; c'est là un critérium pour le choix de ces équations de propagation.

2. — *Equation de propagation en l'absence de champ.* — Prenons d'abord le cas le plus simple du mouvement en dehors de tout champ. On est d'accord pour admettre que l'équation de propagation doit alors s'écrire :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{dt^2} = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi \quad (1)$$

Substituons en effet dans cette équation l'expression qui représente une onde plane monochromatique. Comme on a alors $\frac{\partial^2\Psi}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2\Psi$, il vient :

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{m^2 c^4}{h^2 \nu^2} \right] \Psi = 0 \quad (2)$$

Puisque par définition $mc^2 = h\nu_0$, on peut aussi écrire (2) sous la forme :

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right] \Psi = 0 \quad (3)$$

Cette équation se ramène à la forme (4) du chapitre précédent en posant :

$$n = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}} \quad (4)$$

C'est bien ce que nous devons obtenir pour être en accord avec nos résultats antérieurs rappelés ci-dessus.

Ecrivons l'onde sinusoïdale simple sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= a \cos 2\pi \left[vt - \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] \quad (5) \\ &= a \cos \frac{2\pi}{h} \varphi \end{aligned}$$

Cela revient à appeler $\frac{\varphi}{h}$ ce que nous avons appelé Φ dans le chapitre précédent. Désormais c'est à φ que je réserverai le nom de phase. Nous voyons que l'on a :

$$\varphi = hvt - hv \frac{n}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad (6)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= hv & - \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \alpha \frac{n}{c} hv \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \beta \frac{n}{c} hv & - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \gamma \frac{n}{c} hv \end{aligned} \quad (7)$$

Or, nous devons poser :

$$hv = W \quad \frac{n}{c} hv = \frac{h}{\lambda} = |p| \quad (8)$$

d'après les résultats précédemment rappelés. Donc :

$$W = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad p_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad p_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad p_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (9)$$

Ce sont là précisément les relations que doit satisfaire la fonction de Jacobi.

Nous sommes ainsi amenés à identifier la phase φ avec la fonction de Jacobi.

3. — Equation de propagation dans un champ constant. —

Prenons le cas un peu plus compliqué du champ constant; il correspond au cas des milieux réfringents permanents mais non homogènes. Le champ de force est caractérisé par une fonction potentielle $F(x, y, z)$. La loi de dispersion qu'il convient alors d'adopter est la suivante, comme nous allons le montrer :

$$n = \sqrt{\left(1 - \frac{F(x, y, z)}{hv}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2}} \quad (10)$$

avec toujours $mc^2 = hv_0$. Naturellement, pour $F \equiv 0$, on retombe sur la loi de dispersion (4) valable pour le champ nul.

L'équation de propagation des ondes monochromatiques de fréquence ν doit alors s'écrire :

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[\left(1 - \frac{F}{hv}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2} \right] \Psi = 0 \quad (11)$$

D'après ce que nous savons déjà, l'optique géométrique sera valable si la fonction $F(x, y, z)$ varie assez lentement pour qu'elle puisse être considérée comme sensiblement constante dans un domaine contenant un grand nombre de longueurs d'onde. On peut alors prendre comme solution :

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\nu}{c} \int n dl \right) \quad (12)$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe normale à une famille d'intégrales complètes (dépendant de deux paramètres α et β) de l'équation :

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{n^2(x, y, z)}{c^2} \nu^2 \quad (13)$$

Dans un groupe d'ondes, la trajectoire d'un point de concordance de phase est définie par les équations :

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} = c_1; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta} = c_2$$

et le mouvement sur la trajectoire par $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} = t + c_3$.

Pour retrouver les lois des anciennes Dynamiques, il va nous suffire de supposer que la phase :

$$h\Phi = \varphi = hvt - \frac{hv}{c} \int n dl = hvt - \varphi_1(x, y, z) \quad (14)$$

doit être identifiée avec la fonction de Jacobi :

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, W, \alpha, \beta) &= Wt - \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) \\ &= Wt - S_1(x, y, z, W, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

Ceci nous conduit à poser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial S}{\partial t} = W = hv & (16) \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial S_1}{\partial x} = p_x = \alpha \frac{n}{c} hv \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial S_1}{\partial y} = p_y = \beta \frac{n}{c} hv \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial S_1}{\partial z} = p_z = \gamma \frac{n}{c} hv \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| p \right| = \frac{nhv}{c} = \frac{hv}{V} = \frac{h}{\lambda} \quad (17)$$

De cette identification de S avec φ et de S_1 avec φ_1 , on tire plusieurs théorèmes importants.

1^{er} THÉORÈME. — Le principe de moindre action de Maupertuis coïncide avec le principe de Fermat.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \int dS_1 &= \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) = \int d\varphi_1 \\ &= \int \frac{n}{c} hv (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \frac{hv}{c} \int n dl \end{aligned} \quad (18)$$



et la condition de Maupertuis $\delta S_1 = 0$ coïncide avec la condition de Fermat $\delta \int n dl = 0$. En d'autres termes, les rayons de l'onde associée sont identiques aux trajectoires possibles du corpuscule qui correspondent à une même intégrale complète de l'équation de Jacobi.

2° THÉORÈME. — L'équation de l'optique géométrique coïncide avec celle de Jacobi.

En effet, celle-ci est, sous sa forme relativiste :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - F(x, y, z) \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2 \quad (19)$$

Elle s'écrit ici :

$$\frac{1}{c^2} (hv - F)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 = \frac{h^2 v_0^2}{c^2}$$

ou :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \\ & = \frac{h^2 v^2}{c^2} \left[\left(1 - \frac{F(x, y, z)}{hv} \right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2} \right] = n^2 \frac{h^2 v^2}{c^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Si dans (13) on remplace Φ_1 par $\frac{\varphi_1}{h} = \frac{S_1}{h}$, on trouve (20).
Q. E. D.

3° THÉORÈME. — Les équations de la trajectoire et du mouvement, d'après la théorie de Jacobi, coïncident avec celles de la trajectoire et du mouvement des états de concordance de phase dans un groupe d'ondes. Ceci résulte immédiatement de la relation $\varphi = S$.

4° THÉORÈME. — La vitesse du corpuscule définie par l'ancienne Dynamique coïncide avec la vitesse du groupe des ondes associées.

Pour le démontrer directement, partons de l'équation du mouvement d'après Jacobi :

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = t + c_3 \quad (21)$$

Si dl est l'élément de trajectoire franchi par le corpuscule pendant le temps dt , nous avons :

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial W \partial t} dl = dt \quad (22)$$

et puisque : $\frac{\partial S_1}{\partial t} = p$, la vitesse du corpuscule est :

$$v = \frac{dl}{dt} = \left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial W \partial t} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial p}{\partial W} \right]^{-1} \quad (23)$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial p}{\partial W} = \frac{\partial \left(\frac{n}{c} hv \right)}{\partial (hv)} = \frac{1}{c} \frac{\partial (nv)}{\partial v} = \frac{1}{U} \quad (24)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

D'après ce qui précède, la forme relativiste de l'équation de propagation dans un champ constant est donnée par (11). Dans les cas où la Mécanique de Newton est suffisante, nous pouvons écrire :

$$hv = mc^2 + E = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + F(x, y, z) \quad (25)$$

et les quotients $\frac{E}{hv}$ et $\frac{F}{hv}$ sont très petits devant l'unité; on peut donc écrire sensiblement :

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\left(1 - \frac{F}{hv}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2}} = \sqrt{1 - \frac{2F}{hv} - \left(\frac{hv - E}{hv}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2(E - F)}{hv}} = \sqrt{\frac{2(E - F)}{mc^2}} \end{aligned} \quad (26)$$

Telle est la loi de dispersion que l'on doit adopter à l'approximation de la Mécanique classique.

Le produit $n^2 v^2$ peut s'écrire au même degré d'approximation $\frac{2(E - F)}{h^2} mc^2$ et l'on obtient pour l'équation de propagation d'une onde monochromatique de fréquence $\nu = \frac{mc^2 + E}{h}$ dans le champ constant défini par une fonction potentielle $F(x, y, z)$, la forme non relativiste :

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - F) \Psi = 0 \quad (27)$$

C'est l'équation aujourd'hui classique de Schrödinger.

4. — *Equation de propagation dans les champs variables.*

— Nous venons de trouver la forme qui convient pour l'équation de propagation des ondes *monochromatiques* dans des champs constants. Cette forme, nous l'avons déjà dit, doit être considérée comme un aspect dégénéré d'une forme plus générale où la fréquence n'apparaît pas et qui convient non seulement au cas d'une superposition d'ondes monochromatiques, mais aussi au cas des champs variables avec le temps.

L'idée qui doit nous guider pour trouver cette équation générale, c'est qu'à l'approximation de l'optique géométrique, et en particulier quand on suppose h infiniment petit, l'équation de l'optique géométrique doit se confondre avec l'équation de Jacobi de façon que la phase φ puisse être identifiée avec la fonction de Jacobi.

L'équation générale relativiste qui satisfait à cette condition est la suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{hc^2} F(x, y, z, t) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2(x, y, z, t)}{c^2} \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Pour $F \equiv 0$, on retombe bien sur l'équation (4). Si F ne dépend que de x, y, z et non de t , on peut prendre une solution monochromatique de la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos 2\pi[vt - \Phi_1(x, y, z)] \quad (29)$$

et en l'écrivant sous la forme complexe $\Psi = ae^{2\pi i(vt - \Phi_1)}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 2\pi i v \Psi \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 v^2 \Psi. \quad (30)$$

L'équation (28) prend alors la forme dégénérée :

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} \Psi - \frac{8\pi^2 v}{hc^2} F \Psi - \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right) \Psi = 0 \quad (31)$$

qui est identique à (44).

Considérons le cas général où F dépend aussi du temps (champ variable). Nous allons montrer que si la fonction Ψ écrite sous la forme complexe satisfait à l'équation (28), nous retrouvons pour φ l'équation de Jacobi lorsque nous supposons h infiniment petit.

En effet, en substituant $\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ dans l'équation (28) et en annulant la partie réelle de l'expression obtenue, il vient :

$$\Delta a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2}{h^2} a \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (32)$$

$$- \frac{8\pi^2}{h^2 c^2} F a \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right] a = 0.$$

Si h est supposé infiniment petit, les termes contenant $\frac{1}{h^2}$ l'emportent de beaucoup sur les autres, et, en supprimant un facteur commun, il reste :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = m^2 c^2 \quad (33)$$

et la fonction φ obéit bien à l'équation relativiste de Jacobi

L'équation (33) peut être considérée comme étant l'équation de l'optique géométrique pour les ondes associées. Comme nous l'avons vu, si $\varphi(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ désigne une intégrale complète de cette équation (33), les trois relations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = c_1 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = c_2 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = c_3 \quad (34)$$

définissent le mouvement des états de concordance de phase dans un groupe d'ondes et ces trois relations (34) ne sont autres que les équations du mouvement d'après Jacobi. Ici aussi et en toute généralité, le mouvement du corpuscule peut à l'approximation de l'optique géométrique être assimilé à celui d'un groupe d'ondes associées.

Un caractère très particulier de l'équation (28), c'est qu'elle contient un coefficient imaginaire et que la fonction d'ondes, pour y satisfaire, *doit* être écrite sous la forme complexe. Dans les équations de la théorie classique des ondes, les coefficients sont réels et la fonction d'ondes réelle $\Psi = a \cos 2\pi\Phi$ doit satisfaire l'équation de propagation; la forme complexe de Ψ est aussi solution et l'on fait généralement les calculs en se servant de cette forme complexe pour revenir à la partie réelle à la fin du calcul. L'emploi de la solution complexe apparaît alors comme un simple artifice mathématique. Ici, il n'en est plus de même : la fonction d'ondes réelle ne satisfait pas à l'équation (28) et c'est seulement la fonction complexe qui en est solution.

De même que pour les champs constants nous avons passé de l'équation relativiste (11) à l'équation non relativiste de Schrödinger (27), nous pouvons dans le cas général passer de l'équation relativiste (28) à une forme non relativiste. Souvenons-nous que dans la Dynamique relativiste, l'énergie a pour expression :

$$\begin{aligned} W &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + F(x, y, z, t) \\ &= mc^2 + T + F = mc^2 + E \end{aligned} \quad (35)$$

T étant l'énergie cinétique due au mouvement, F l'énergie potentielle; E est l'énergie telle que la définit la Dynamique Newtonienne; elle est égale à l'énergie relativiste diminuée de l'énergie interne mc^2 et la dynamique Newtonienne classique est valable quand le rapport $\frac{E}{mc^2}$ est petit. Pour transposer ceci en Mécanique ondulatoire, nous écrivons la fonction d'ondes sous la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{\frac{2\pi i}{h} mc^2 t} \Psi_r(x, y, z, t) \quad (36)$$

Ψ_r est donc l'expression que l'on obtient en retranchant dans la phase de l'onde complexe le terme $\frac{mc^2}{h} t$, c'est-à-dire en réduisant la fréquence de $\frac{W}{h}$ à $\frac{E}{h}$.

Nous appellerons Ψ_r la fonction d'ondes réduite et $\frac{E}{h}$ la fréquence réduite. En substituant (36) dans (28), il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_r - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h} mc^2 \frac{\partial \Psi_r}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^4 \Psi_r \right] \\ + \frac{4\pi i}{hc^2} F \left[\frac{\partial \Psi_r}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} mc^2 \Psi_r \right] - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right] \Psi_r = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Le terme en $F^2 \Psi_r$ est négligeable devant celui en $F mc^2 \Psi_r$; de même le terme en $F \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}$ est négligeable devant le terme en $mc^2 \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}$; enfin le terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2}$ est négligeable devant le terme en $mc^2 \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}$ parce que toutes les dérivées de Ψ_r par rapport au temps sont petites devant mc^2 . Il reste donc :

$$\Delta \Psi_r - \frac{8\pi^2}{h^2} m F \Psi_r = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi_r}{\partial t} \quad (38)$$

Telle est l'équation non relativiste (1) à laquelle doit obéir

(1) L'équation de propagation non relativiste est du premier ordre en t alors que l'équation relativiste est du second ordre en t . C'est là une différence importante sur laquelle M. Dirac a attiré fortement l'attention.

la fonction d'ondes réduite. Si le champ ne dépend pas du temps, nous pouvons poser :

$$\Psi_r = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - \varphi_1(x, y, z)]} \quad (39)$$

et nous retombons aisément sur l'équation (27) de Schrödinger.

Très souvent on écrit l'équation (38) en supprimant l'indice r , mais il ne faut jamais oublier que c'est la fonction d'ondes *réduite* dont la fréquence est diminuée de $\frac{mc^2}{h}$ qui est solution de (38).

5. — Procédé servant à trouver automatiquement l'équation. — Nous pouvons retrouver l'équation non relativiste de propagation en employant un procédé en quelque sorte automatique qui a une grande importance quand on compare la théorie des matrices d'Heisenberg avec la Mécanique ondulatoire. Voici en quoi consiste ce procédé. Nous savons que l'équation de Jacobi dans la Dynamique de Newton est :

$$H\left(q_i, t, -\frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

où $H\left(q_i, t, -\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$ désigne ce que devient l'énergie H exprimée en fonction des coordonnées q_i du temps t et des moments p_i lorsqu'on remplace chaque moment p_i par $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Prenons le premier membre de (40); remplaçons $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ par le symbole $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i}$ et $\frac{\partial S}{\partial t}$ par le symbole $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$. Nous obtenons ainsi un opérateur. Appliquons cet opérateur à la fonction d'ondes Ψ (réduite) et égalons à zéro; si les q_i sont des coordonnées Cartésiennes rectangulaires, on retrouve l'équation (38) de propagation.

En effet, en coordonnées rectangulaires, nous avons :

$$T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (41)$$

Par suite :

$$H (q_i, p_i, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + F (x, y, z, t) \quad (42)$$

et l'on a pour l'équation de Jacobi :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + F - \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (43)$$

L'opérateur obtenu par la méthode indiquée est :

$$- \frac{h^2}{8\pi^2 m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + F - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (44)$$

et nous parvenons à l'équation de propagation :

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (45)$$

qui coïncide bien avec (38). On vérifierait aisément que le même procédé appliqué à des coordonnées non rectangulaires donnerait une équation de propagation inexacte.



CHAPITRE VI

MÉCANIQUE CLASSIQUE ET MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. — *Signification de l'amplitude a en Mécanique classique.* — Les mécaniques anciennes correspondent, nous le savons bien maintenant, au cas où la propagation des ondes Ψ se fait suivant les lois de l'optique géométrique. La fonction de phase φ peut alors être identifiée avec la fonction de Jacobi. Mais nous devons chercher quelle est alors la signification que l'on doit attribuer à l'amplitude a si l'on veut provisoirement conserver l'idée classique des corpuscules bien localisés dans l'espace.

Nous allons supposer que nous pouvons nous contenter des équations non relativistes. Naturellement nos raisonnements ne s'appliqueront pas aux corpuscules en mouvement très rapide, par exemple aux corpuscules de lumière, et, quand nous nous occuperons des photons, nous devons reprendre nos démonstrations.

Partons donc de l'équation générale non relativiste :

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} F(x, y, z, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (1)$$

et substituons-y la forme :

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} \quad (2)$$

a et φ étant deux fonctions réelles, le module et l'argument de la quantité complexe Ψ . Il vient alors en séparant le réel et l'imaginaire :

$$-\Delta a + \frac{4\pi^2}{h^2} a \sum_{xyz} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} F a = \frac{8\pi^2}{h^2} a \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{4\pi i}{h} \sum_{xyz} \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2\pi i}{h} a \Delta\varphi = \frac{4\pi i}{h} m \frac{da}{dt} \quad (4)$$

Il ressort des considérations du chapitre IV (où $\Phi = \frac{\varphi}{h}$) que, si l'optique géométrique est valable, le terme Δa est négligeable devant le terme :

$$\frac{4\pi^2}{h^2} \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Nous pouvons donc écrire nos deux relations (3) et (4) :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + F(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (6)$$

L'équation (5) nous montre que φ coïncide avec la fonction de Jacobi; nous le savions déjà. L'équation (6) va nous fournir la signification de a .

Soit $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ une intégrale complète de l'équation de Jacobi où α, β, γ sont trois constantes. D'après la théorie de Jacobi, les équations du mouvement sont :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = c_1 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = c_2 \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c_3. \quad (7)$$

Il y a donc une infinité de mouvements possibles du corpuscule qui correspondent à la même fonction de Jacobi, donc à la même valeur des constantes α, β, γ , mais à des choix différents des constantes c_1, c_2, c_3 . Nous dirons que ces mouvements du corpuscule appartiennent à la même classe.

Au lieu de nous figurer un seul corpuscule décrivant une trajectoire, imaginons un ensemble de corpuscules identiques animés de mouvements de la même classe. Nous savons que les moments p_x, p_y, p_z se déduisent de la fonction S par les relations :

$$p_x = - \frac{\partial S}{\partial x} \quad p_y = - \frac{\partial S}{\partial y} \quad p_z = - \frac{\partial S}{\partial z} \quad (8)$$

ou vectoriellement :

$$\vec{p} = - \text{grad } S \quad (9)$$

Comme on a $\vec{p} = m \vec{v}$ dans la Mécanique de Newton, on en tire :

$$\vec{v} = - \frac{1}{m} \text{grad } S$$

Donc le mouvement du nuage de corpuscules est entièrement connu quand on connaît la fonction S . Comme ici nous pouvons confondre φ avec S , l'équation (6) est équivalente à :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} v_x + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + \frac{\partial a}{\partial z} v_z + \frac{1}{2} a \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (11)$$

En multipliant par $2a$, on trouve aisément :

$$\frac{\partial (a^2)}{\partial t} + \operatorname{div} (a^2 \vec{v}) = 0 \quad (12)$$

D'autre part, le mouvement du nuage de corpuscules doit vérifier l'équation de continuité hydrodynamique, exprimant que l'augmentation du nombre des corpuscules par unité de temps, dans une région de l'espace, est égale à la différence entre le nombre des corpuscules entrant dans cette région pendant l'unité de temps et le nombre des corpuscules sortant de cette région pendant l'unité de temps. Considérons un petit parallélépipède ABCD A'B'C'D' dont les faces sont perpendiculaires aux axes de coordonnées et dont les arêtes ont pour longueurs infiniment petites dx , dy , dz :

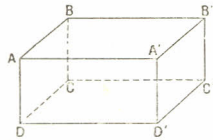


FIG. 2.

Désignons par ρ , v_x , v_y , v_z la valeur de la densité et des composantes de la vitesse du nuage au centre du parallélépipède. A travers la face ABCD, perpendiculaire à l'axe

des x et d'aire $dydz$, le flux de corpuscules pendant le temps dt est :

$$\left(\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt dy dz.$$

A' travers A'B'CD', le flux pendant le même temps est :

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt dy dz.$$

L'excès de ce qui entre par ABCD sur ce qui sort par A'B'CD' est donc :

$$- \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dt dx dy dz$$

En faisant le même calcul pour les deux autres paires de faces, on trouve pour l'excès total de ce qui entre dans le parallélépipède sur ce qui en sort pendant le temps dt :

$$- \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \right) dt dx dy dz$$

Ceci doit être égal à l'augmentation pendant le temps dt du nombre $\rho dx dy dz$ des corpuscules présents dans le petit volume soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$. On arrive donc à la relation de continuité hydrodynamique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \right) = 0 \quad (13)$$

En comparant avec (12), on est amené à poser :

$$\rho = K a^2(x, y, z, t) \quad (14)$$

K étant une constante de proportionnalité qu'on peut d'ailleurs prendre égale à 1, car a n'est déterminé qu'à un facteur constant près. On arrive ainsi au résultat suivant : « le carré de l'amplitude de l'onde Ψ , son intensité, doit être considéré comme mesurant à chaque instant et en chaque point la densité du nuage de corpuscules. »

2. — *La probabilité de présence.* — Le nuage de corpuscules, imaginé au paragraphe précédent, sert surtout à visualiser l'ensemble des mouvements possibles de la même classe d'un seul corpuscule. La densité de ce nuage peut être considérée comme représentant la probabilité pour qu'un corpuscule, dont le mouvement appartient à la classe considérée mais dont la position exacte est inconnue, se trouve en un certain point à un certain instant. Nous pouvons donc énoncer le résultat obtenu à la fin du dernier paragraphe sous la forme suivante : « L'intensité de l'onde Ψ mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité de la présence du corpuscule associé en ce point à cet instant ». C'est cette proposition que nous avons appelée dans l'introduction le « principe des interférences ». On voit que quand l'onde Ψ se propage suivant les lois de l'optique géométrique, l'exactitude du principe des interférences est automatiquement garantie par le fait même qu'alors les lois de l'ancienne Mécanique sont valables pour le mouvement du corpuscule.

Le nuage de corpuscules associés à une même onde Ψ paraît donc avoir surtout un sens de probabilité. On peut considérer ce nuage comme formant un fluide fictif « le fluide de probabilité » dont la densité égale à a^2 d'après (14) donne en chaque point et à chaque instant la probabilité de présence du corpuscule associé à l'onde Ψ considérée. Les portions infiniment petites de ce fluide, les « éléments de probabilité » comme nous les désignerons, décrivent des trajectoires qui coïncident avec les trajectoires possibles du corpuscule dont la position exacte est supposée inconnue. Toute cette théorie est très claire dans le cas où nous sommes ici placés, où l'optique géométrique est valable pour la propagation de l'onde Ψ . Nous verrons que les difficultés commencent quand on sort du domaine de l'optique géométrique.

Nous devons souligner un point important. La fonction de phase se détermine tout à fait indépendamment de l'amplitude a ; il en résulte par les équations de la théorie

de Jacobi que le mouvement du corpuscule sur sa trajectoire est tout à fait indépendant de la fonction a . Ceci est nécessaire pour qu'on puisse considérer avec l'ancienne Mécanique le mouvement du corpuscule comme étant entièrement déterminé par les 6 conditions initiales de position et de vitesse (c'est-à-dire les 6 constantes de la théorie de Jacobi) : si la détermination de φ n'était pas indépendante de celle de a , la forme de φ dépendrait des valeurs de la fonction a aux divers points de l'espace à l'instant initial et cela voudrait dire que le mouvement du corpuscule dépend non seulement des conditions initiales, mais encore de la probabilité pour que les coordonnées initiales aient telles ou telles valeurs! C'est, nous le verrons, cette circonstance paradoxale qui se présente quand on cherche à prolonger les idées de l'ancienne Mécanique dans le domaine propre de la nouvelle Mécanique.

Précisons la façon dont la fonction $a(x, y, z, t)$ doit se déterminer quand on suppose connue la fonction de Jacobi $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ intégrale complète de l'équation (5). Il faut chercher une fonction satisfaisant à l'équation (6) et telle qu'à l'instant initial t_0 , $a(x, y, z, t_0)$ donne la distribution de la probabilité de présence du corpuscule. Si par exemple nous avons fait une expérience à l'instant t_0 pour déterminer la position du corpuscule, le résultat de cette expérience est toujours affecté d'une certaine erreur possible et doit se traduire en disant que la probabilité, pour que le corpuscule ait été au point xyz à l'instant t_0 , est donnée par une fonction $f(x, y, z)$, la région de l'espace où cette fonction f a une valeur sensiblement différente de zéro étant d'autant plus petite que l'expérience a été plus précise. On devra donc poser comme condition initiale devant être satisfaite par la fonction a intégrale de (6) :

$$a^2(x, y, z, t_0) = f(x, y, z). \quad (15)$$

Par sa nature même, la fonction f satisfait à la condition :

$$\int f(x, y, z) dv = 1 \quad (16)$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace et la fonction a satisfait constamment à la condition :

$$\int a^2 (x, y, z, t) dv = 1 \quad (17)$$

puisque le premier membre de (17) mesure la probabilité totale pour que le corpuscule soit en un point quelconque de l'espace à l'instant t , probabilité totale qui reste évidemment toujours égale à l'unité.

3. — *Exemples concrets.* — Nous allons maintenant donner deux exemples pour préciser ce qui précède. Considérons d'abord le cas du champ nul. L'onde monochromatique est alors une solution de l'équation des ondes. Son amplitude est constante : cela signifie que, si l'on considère une infinité de corpuscules formant un nuage homogène, indéfini et tous animés de la même vitesse dans la même direction, la densité de ce nuage ne subira pas de variations par le fait du mouvement.

Plus instructif est le cas du mouvement d'un nuage illimité de corpuscules de même énergie se déplaçant tous dans la direction d'un champ uniforme qui agit sur eux. Nous pouvons définir tout le phénomène par une seule variable x .

Reprenons les notations du chapitre II, paragraphe 6. Nous avons :

$$F(x) = kx \quad (18)$$

et l'abscisse de chaque corpuscule est donnée par :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2 \quad (19)$$

x_0 étant l'abscisse et v_0 la vitesse de ce corpuscule au temps $t = 0$.

Nous avons trouvé que l'intégrale complète de l'équation de Jacobi où W jouait le rôle de constante arbitraire était :

$$S(x, t, W) = Wt - \frac{1}{3mk} \left[2m(kx + W) \right]^{3/2} \quad (20)$$

D'autre part, l'équation (6) où nous pouvons remplacer φ par S nous donne :

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = m \frac{\partial a}{\partial t} \quad (21)$$

Comme nous cherchons le mouvement d'un nuage indéfini de corpuscules, nous pouvons supposer le mouvement permanent de telle façon que a soit indépendant du temps. Alors (21) s'écrira simplement :

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

Or, d'après (20) :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = - \sqrt{2m(kx + W)} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{-mk}{\sqrt{2m(kx + W)}} \quad (23)$$

et l'amplitude a doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dx} = - \frac{k}{4(kx + W)} \quad (24)$$

dont l'intégrale est :

$$a = \frac{C^{te}}{\sqrt[4]{kx + W}}. \quad (25)$$

La densité du nuage est donc, d'après (14) :

$$\rho = a^2 = \frac{C}{\sqrt{kx + W}} = \rho_0 \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx + W}} \quad (26)$$

ρ_0 étant la valeur de ρ pour une certaine valeur x_0 de x . La densité du nuage va donc en diminuant dans le sens du champ.

Comme nous sommes placés dans le cas où la Mécanique ondulatoire se confond avec la Mécanique ancienne, nous devons pouvoir retrouver l'équation (26) à l'aide des équations classiques du mouvement. Montrons qu'il en est bien ainsi .



Envisageons une certaine abscisse x_0 et les corpuscules qui se trouvent dans le plan x_0 à l'instant $t = 0$; ces corpuscules ont une vitesse v_0 . A l'instant t ils seront parvenus dans le plan d'abscisse $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2$ d'après (19). Les corpuscules qui à l'instant 0 se trouvaient dans le plan $x_0 - dx_0$ possédaient une certaine vitesse $v_0 - \delta v_0$ et à l'instant t ils auront atteint le plan d'abscisse :

$$x' = x_0 - \delta x_0 + (v_0 - \delta v_0) t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2, \quad (27)$$

Donc, les corpuscules qui remplissaient à l'origine du temps un cylindre de base égale à l'unité limité par les plans x_0 et $x_0 - dx_0$ rempliront à l'instant t un cylindre de base égale à l'unité limité par les plans x et x' . Si N est le nombre de ces corpuscules, la densité en x_0 dans le premier cylindre est :

$$\rho_0 = \frac{N}{\delta x_0} \quad (28)$$

et la densité en x dans le second cylindre est :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{N}{x - x'} = \frac{N}{\delta x_0 + \delta v_0 t} = \frac{N}{\delta x_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta v_0}{\delta x_0} t} \quad (29) \\ &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{\delta v_0}{\delta x_0} t} \end{aligned}$$

Mais, comme par hypothèse tous les corpuscules du nuage ont une même énergie W , la vitesse et l'abscisse de chacun d'eux sont reliées par la relation :

$$\frac{1}{2} m v^2 - kx = W \quad (30)$$

ou :

$$v = \sqrt{\frac{2(W + kx)}{m}} \quad (31)$$

δv_0 est la variation qu'éprouve la vitesse quand l'abscisse varie de δx_0 . C'est donc, d'après (31) :

$$\delta v_0 = \frac{k\delta x_0}{\sqrt{2m(kx_0 + W)}} \quad (32)$$

et la formule (29) devient :

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{1 + \frac{kt}{\sqrt{2m(kx_0 + W)}}} = \rho_0 \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx_0 + W} + \frac{k}{\sqrt{2m}} t} \quad (33)$$

Or, on a aussi :

$$v = v_0 + \frac{k}{m} t. \quad (34)$$

et d'après (31) :

$$\sqrt{kx + W} = \sqrt{kx_0 + W} + \frac{k}{\sqrt{2m}} t \quad (35)$$

On trouve donc finalement pour ρ l'expression :

$$\rho(x) = \rho(x_0) \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx_0 + W}} \quad (36)$$

et c'est bien la formule (26) obtenue à l'aide de l'amplitude de l'onde associée.

4. — Résumé du chapitre. — Ainsi donc nous avons établi un parallélisme entre l'ancienne Mécanique et la propagation des ondes Ψ quand celle-ci s'effectue suivant les lois de l'optique géométrique. La fonction de Jacobi se confond alors avec la fonction de phase des ondes Ψ et si l'on conserve le concept classique que les corpuscules décrivent des trajectoires bien définies avec des vitesses bien définies, on peut imaginer un nuage de corpuscules décrivant toutes les trajectoires qui correspondent à une même fonction de Jacobi, et alors la densité de ce nuage peut être mesurée constamment par l'intensité de l'onde Ψ associée. On peut aussi imaginer un fluide de probabilité dont les éléments décrivent les trajectoires que l'ancienne Dynamique fait

correspondre à une forme donnée de la fonction de Jacobi, et dire que la densité de ce fluide mesure en chaque point et à tout instant la probabilité de présence d'un corpuscule unique, dont on sait seulement qu'il décrit l'une de ces trajectoires sans savoir exactement laquelle.

Toutes ces conceptions sont ici très claires et parfaitement d'accord avec les idées classiques, mais peut-on chercher à les étendre quand les conditions de l'optique géométrique ne sont pas réalisées? Nous allons voir que l'on doit avant tout conserver l'idée que l'intensité de l'onde Ψ mesure la probabilité de présence du corpuscule, même si pour cela on est obligé de sacrifier l'idée traditionnelle qui attribue aux corpuscules une position, une vitesse et une trajectoire bien déterminées.

CHAPITRE VII

LE PRINCIPE DES INTERFÉRENCES ET LA DIFFRACTION DES ÉLECTRONS PAR LES CRISTAUX

1. — *Le principe des interférences.* — Le principe essentiel qui sert dans les théories de la lumière à prévoir les résultats d'une expérience d'interférences ou de diffraction, c'est que le carré de l'amplitude, l'intensité, mesure la quantité d'énergie lumineuse qui est en moyenne présente en chaque point de l'espace. De plus, les expériences d'interférences en optique ont toujours donné le même résultat quelque faible qu'ait été l'intensité de la lumière employée. Si donc on admet l'existence de grains d'énergie lumineuse, de photons, il est nécessaire de supposer que, *pour chaque photon*, la probabilité de présence est proportionnelle en chaque point à l'intensité de l'onde lumineuse associée; c'est ce que nous nommons le principe des interférences. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il est bien naturel de chercher en Mécanique ondulatoire à transposer ce principe du cas de la lumière au cas des particules matérielles, c'est-à-dire d'admettre que l'intensité de l'onde Ψ mesure toujours, quand même l'optique géométrique n'est pas valable pour la propagation de cette onde, la probabilité de présence du corpuscule à l'instant considéré au point considéré. Désignons par $P(x, y, z, t) dv$ la probabilité pour que le corpuscule se trouve, à l'instant t , à l'intérieur de l'élément de volume dv , dont le centre a pour coordonnées x, y, z ; on doit avoir en posant toujours :

$$\Psi = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)} \quad (1)$$

la formule :

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) &= Ka^2(x, y, z, t) \\ &= K\Psi(x, y, z, t) \times \overline{\Psi}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2)$$

$\overline{\Psi}$ désignant la quantité complexe conjuguée de Ψ . Par un choix convenable de la constante multiplicative arbitraire contenue dans a , il sera toujours possible de faire $K = 1$. La relation (2) exprime le principe des interférences.

Toutes les expériences effectuées avec des corpuscules dans des conditions telles que la propagation des ondes associées se fasse suivant les lois de l'optique géométrique, vérifient nécessairement le principe des interférences, comme cela résulte du chapitre précédent. Pour obtenir une preuve expérimentale de la valeur du principe, il est donc nécessaire de s'adresser à des phénomènes dans lesquels la propagation de l'onde associée ne se fait plus suivant les lois de l'optique géométrique. C'est précisément ce qui se passe pour les expériences de diffraction des électrons par les cristaux récemment découverts : ces expériences peuvent être considérées comme apportant à la fois la preuve de la nécessité d'introduire les ondes associées et la preuve de l'exactitude du principe des interférences pour les particules matérielles.

2. — *La diffraction des électrons par les cristaux.* — C'est à MM. Davisson et Germer que revient l'honneur d'avoir les premiers, au début de 1927, annoncé l'existence de la diffraction des électrons par les cristaux. Dans leurs expériences, ils envoyaient un faisceau d'électrons de même vitesse normalement sur la face d'entrée d'un cristal de Nickel, cette face d'entrée étant une des faces de l'octaèdre régulier. Les électrons employés tout d'abord par MM. Davisson et Germer étaient des électrons très lents de 50 à 200 volts; plus tard, les deux physiciens américains ont étendu leurs recherches à des électrons de plusieurs centaines de volts. Les résultats obtenus ont montré très nettement qu'il y avait concentration des électrons diffusés

par les différents centres du cristal. Le phénomène est tout à fait comparable au phénomène de Laue pour les Rayons X. L'examen des valeurs numériques montre clairement que, pour expliquer la position des maxima de diffusion obtenus par la théorie de Laue-Bragg, il est nécessaire d'attribuer à la longueur d'onde de l'onde associée aux électrons de vitesse v la valeur :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (3)$$

prévue par la théorie générale du chapitre III. C'est là un succès décisif pour la Mécanique ondulatoire.

Toutefois, dans les résultats de Davisson et Germer, on constate aussi certaines divergences entre les prévisions de la théorie de Laue-Bragg obtenues en adoptant la valeur (3) pour la longueur d'onde et les faits expérimentaux. Ces divergences semblent pouvoir s'expliquer par la valeur sensiblement différente de l'unité que possède l'indice de réfraction des ondes Ψ à l'intérieur du cristal.

Le même genre d'expériences a été répété brillamment par G.-P. Thomson, le fils de l'illustre physicien Sir J.-J. Thomson. G.-P. Thomson a opéré, comme nous l'expliquerons plus loin, par une méthode analogue à la méthode des poudres cristallines, que Debye et Sherrer ont employée pour les rayons X. Les électrons incidents étaient des électrons de grande vitesse correspondant à plusieurs milliers de volts : dans ces conditions, les complications provenant de l'indice de réfraction doivent disparaître. En effet, nous avons trouvé précédemment que, dans un champ où la fonction potentielle est $F(x, y, z)$, l'indice des ondes associées est (à l'approximation Newtonienne) :

$$n(x, y, z) = \sqrt{\frac{2[E - F(x, y, z)]}{mc^2}}. \quad (4)$$

En dehors de tout champ, $F = 0$, et l'indice a la valeur :

$$n_0 = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}}.$$

L'indice *relatif* du cristal par rapport au vide, pour les ondes associées à un électron d'énergie E , doit donc être au point x, y, z :

$$\frac{n(x, y, z)}{n_0} = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z)}{E}} \quad (3)$$

$F(x, y, z)$ étant l'énergie potentielle de l'électron par rapport au réseau cristallin, quand il occupe la position xyz . Comme $F(x, y, z)$ est indépendant de E , il est évident que $\frac{n}{n_0}$ tend vers l'unité quand E croît indéfiniment. Dans les expériences de Davisson et Germer, l'indice relatif $\frac{n}{n_0}$ s'est révélé comme pouvant différer de l'unité de près de $\frac{1}{10}$; pour les électrons d'énergie cinquante ou cent fois plus grande de Thomson, la différence entre $\frac{n}{n_0}$ et l'unité doit être négligeable, et les résultats ont été dans ce cas, nous le verrons plus loin en détail, tout à fait conformes aux prévisions de la théorie de Laue-Bragg et à la formule (3).

D'autres expériences très remarquables sur la diffraction des électrons ont été faites en Allemagne par M. Rupp, en envoyant des électrons lents à travers des films métalliques. Ici encore, les prévisions de la théorie se sont bien vérifiées, mais avec un petit écart systématique qui a été attribué à l'existence de l'indice de réfraction. Tout récemment, M. Rupp, employant la méthode si heureusement mise en œuvre par MM. Compton et Thibaud pour les rayons X, a pu obtenir une diffraction d'un pinceau d'électrons tombant sous une incidence très rasante sur un réseau optique ordinaire; la formule (3) a pu encore être vérifiée avec une grande exactitude, et la longueur d'onde des ondes associées à l'électron s'est trouvée ainsi directement comparée à un étalon tracé de main d'homme.

Enfin, nous mentionnerons les beaux diagrammes obtenus par M. Kikuchi et les expériences de M. Ponte, sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Nous ne pouvons pas ici examiner en détail tout l'ensemble de ces résultats expérimentaux. Nous devons nous borner et nous étudierons seulement les expériences du Professeur G.-P. Thomson et celles de M. Ponte, qui sont affranchies de toutes les difficultés relatives à l'indice de réfraction. Pour les autres expériences, le lecteur se reportera aux mémoires originaux. L'essentiel pour nous, c'est que l'expérience a apporté une très bonne confirmation de l'existence de l'onde associée aux électrons et de la formule donnant la longueur d'onde en fonction de la vitesse, et qu'elle a montré la validité du principe des interférences, même pour les particules matérielles.

3. — *Préliminaires à l'étude des expériences de G.-P. Thomson.* — La méthode de G.-P. Thomson est d'envoyer un faisceau d'électrons sensiblement homogène au travers d'un film métallique très mince. On admet aujourd'hui qu'un tel film est formé par de très petits cristaux enchevêtrés. Pour prévoir à quels phénomènes la diffusion des ondes associées par ces petits cristaux doit donner lieu, il nous faut d'abord rappeler quelques notions de cristallographie.

On regarde, depuis les travaux de Bravais, tous les cristaux comme formés par des centres matériels qui sont répartis suivant des lois régulières et forment un réseau. Le type de réseau le plus simple est celui où toute translation de la forme $n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b} + n_3 \vec{c}$ fait passer d'un centre cristallin à un autre, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} étant trois vecteurs non situés dans le même plan, et n_1 , n_2 , n_3 trois nombres entiers quelconques. Les centres ou nœuds forment alors les sommets d'une infinité de parallélépipèdes juxtaposés. Si l'on considère deux nœuds A et B d'un réseau simple, la translation qui fait passer de l'un à l'autre est donc de la forme $n(h \vec{a} + j \vec{b} + k \vec{c})$, où n est un nombre entier, h , j , k trois nombres premiers entre eux; la droite \overline{AB} porte donc une infinité de centres qui se déduisent les uns des autres par la translation $h \vec{a} + j \vec{b} + k \vec{c}$. Il en résulte que tout

plan contenant trois nœuds non en ligne droite contient une infinité de nœuds situés aux sommets de parallélogrammes accolés : un tel plan est un « plan réticulaire ». En soumettant un plan réticulaire à une translation $n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b} + n_3 \vec{c}$, on obtient un autre plan réticulaire parallèle : les plans réticulaires forment donc des familles de plans parallèles.

Pour repérer une famille de plans réticulaires, nous prendrons trois axes de coordonnées passant par un nœud du réseau et respectivement parallèles aux trois vecteurs, \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} ; puis nous considérerons le plan de la famille le plus proche de l'origine qui coupe les trois axes en trois nœuds situés sur leurs parties positives. Ce plan coupe l'axe des x au nœud d'abscisse $m_1 a$, l'axe des y au nœud d'abscisse $m_2 b$, l'axe des z au nœud d'abscisse $m_3 c$. On nomme « indices » de la famille de plans réticulaires considérée, les plus petits nombres entiers h_1, h_2, h_3 , qui sont proportionnels aux inverses des nombres m_1, m_2, m_3 .

Le plan qui sert à définir les nombres m_1, m_2, m_3 a pour équation :

$$\frac{x}{m_1 a} + \frac{y}{m_2 b} + \frac{z}{m_3 c} = 1. \quad (7)$$

Désignons par k le plus petit multiple commun de m_1, m_2, m_3 ; on a :

$$h_1 = \frac{k}{m_1} \quad h_2 = \frac{k}{m_2} \quad h_3 = \frac{k}{m_3} \quad (8)$$

et l'équation (7) s'écrit :

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = k. \quad (9)$$

Tous les plans réticulaires de la même famille ont donc une équation de la forme :

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = C^{te}. \quad (10)$$

Maintenant il est facile de voir que, par tout nœud du réseau, passe un plan de la famille considérée. Soit, en effet, P un plan de cette famille, passant par un nœud A, et soit B un autre nœud non situé dans P. On passe de A à B par une translation $n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b} + n_3 \vec{c}$ et cette translation transforme P en un plan P' parallèle et passant par B; tout nœud contenu dans P est transformé en un nœud de P'. Le plan P', qui contient une infinité de nœuds, est un plan réticulaire de la même famille que P, et il passe par le nœud B, choisi arbitrairement.

En gardant les notations que nous venons d'employer, nous allons chercher à calculer la distance des plans parallèles P et P', mais nous ferons une restriction : nous supposerons les vecteurs \vec{a} \vec{b} \vec{c} mutuellement perpendiculaires; c'est le seul cas auquel nous aurons à appliquer nos formules. Prenons A comme origine des coordonnées; le plan P aura pour équation :

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = 0 \quad (11)$$

h_1, h_2, h_3 étant les indices de la famille de plans dont P fait partie. Les coordonnées de B sont $n_1 a, n_2 b, n_3 c$. Nos coordonnées étant rectangulaires, la distance du point B au plan P est, d'après une formule connue de géométrie analytique :

$$d = \frac{|h_1 n_1 + h_2 n_2 + h_3 n_3|}{\sqrt{\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} + \frac{h_3^2}{c^2}}} \quad (12)$$

Nous pouvons choisir pour B un nœud quelconque, c'est-à-dire prendre pour n_1, n_2, n_3 des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Le numérateur de (12) peut donc avoir une valeur entière quelconque. Nous en concluons que les plans réticulaires de la famille (h_1, h_2, h_3) sont des plans équidistants séparés les uns des autres par l'équidistance :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{c}\right)^2}} \quad (13)$$

Dans le cas du réseau cubique, $a = b = c$, et :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (14)$$

Le réseau cubique simple est formé par des nœuds disposés aux sommets d'une infinité de cubes juxtaposés. Il est défini par trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} normaux et de même longueur a . Les familles de plans réticulaires les plus importantes sont les familles :

- (100) faces du cube,
- (111) faces de l'octaèdre,
- (110) faces du dodécaèdre.

Les équidistances correspondantes sont :

$$d_{100} = a$$

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Mais il arrive souvent que les réseaux cubiques réels ont une structure plus compliquée. Il peut se faire, par exemple, que chaque cube élémentaire, chaque « maille » du réseau porte non seulement des nœuds à ses sommets, mais porte aussi un nœud en son centre de figure. On a alors un réseau de cubes centrés. Tout se passe comme si l'on avait affaire à deux réseaux cubiques simples, décalés l'un par rapport à l'autre de $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. La translation la plus générale qui fait passer d'un nœud à un autre est alors :

$$\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\vec{a} + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\vec{b} + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right)\vec{c}$$

avec n_1, n_2, n_3 entiers et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ égaux à 0 ou à 1.

En reprenant les raisonnements faits ci-dessus, on trouve aisément que l'équidistance des plans d'une famille (h_1, h_2, h_3) est :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad \text{si } h_1 + h_2 + h_3 \text{ est pair.} \quad (15)$$

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad \text{si } h_1 + h_2 + h_3 \text{ est impair.}$$

Enfin (et c'est le cas pour les expériences de Thomson) on peut avoir affaire à un réseau cubique où chaque cube élémentaire porte un nœud au milieu de chacune des six faces; c'est un réseau de cubes à faces centrées. La translation la plus générale faisant passer d'un nœud à un autre est alors :

$$\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \vec{a} + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \vec{b} + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) \vec{c},$$

n_1, n_2, n_3 étant entiers, et les ε_i étant ou tous nuls ou deux égaux à 1 et le troisième nul. La distance d'un nœud B à un plan réticulaire P (h_1, h_2, h_3) passant au nœud A est :

$$d = \frac{\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) h_1 + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) h_2 + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (16)$$

Si h_1, h_2, h_3 sont de même parité, on a :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (17)$$

Si les trois indices sont, les uns pairs, les autres impairs, on a :

$$\begin{aligned} d_{h_1 h_2 h_3} &= \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2 + (2h_3)^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

En reprenant les raisonnements faits ci-dessus, on trouve aisément que l'équidistance des plans d'une famille (h_1, h_2, h_3) est :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad \text{si } h_1 + h_2 + h_3 \text{ est pair.} \quad (15)$$

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad \text{si } h_1 + h_2 + h_3 \text{ est impair.}$$

Enfin (et c'est le cas pour les expériences de Thomson) on peut avoir affaire à un réseau cubique où chaque cube élémentaire porte un nœud au milieu de chacune des six faces; c'est un réseau de cubes à faces centrées. La translation la plus générale faisant passer d'un nœud à un autre est alors :

$$\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \vec{a} + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \vec{b} + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) \vec{c},$$

n_1, n_2, n_3 étant entiers, et les ε_i étant ou tous nuls ou deux égaux à 1 et le troisième nul. La distance d'un nœud B à un plan réticulaire P (h_1, h_2, h_3) passant au nœud A est :

$$d = \frac{\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) h_1 + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) h_2 + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (16)$$

Si h_1, h_2, h_3 sont de même parité, on a :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (17)$$

Si les trois indices sont, les uns pairs, les autres impairs, on a :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad (18)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2 + (2h_3)^2}}.$$

On peut dire que la formule (17) s'applique encore à ce dernier cas, à condition de doubler les indices.

4. — *Expériences de G.-P. Thomson.* — Revenons aux expériences de G.-P. Thomson. Supposons qu'un faisceau de rayons cathodiques homogènes en traversant un film métallique mince, rencontre dans un des petits cristaux constituant ce film un plan d'indices h_1, h_2, h_3 sous un angle d'incidence θ , l'angle d'incidence étant ici le complément de celui qu'on considère habituellement en optique. L'onde associée aux électrons incidents subira une forte diffusion dans la direction de réflexion régulière, s'il y a accord de phase entre les ondes élémentaires diffusées par les nœuds des divers plans réticulaires d'indices h_1, h_2, h_3 .

Tout d'abord, les ondes diffusées par deux centres A et B situés dans un même plan réticulaire sont toujours en phase dans la direction de réflexion régulière : ceci résulte de ce que les chemins optiques $\overline{A'B}$ et $\overline{AB'}$ sont égaux, car ils valent tous deux $\overline{AB} \cos \theta$ (fig. 3).

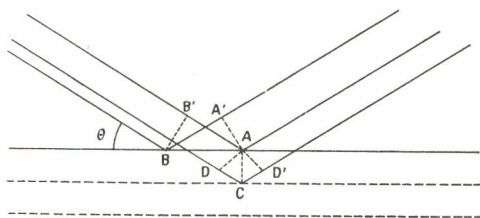


FIG. 3.

Si, de plus, les ondes diffusées par deux centres A et C placés comme sur la figure sont en phase, alors les ondes diffusées par tous les nœuds du cristal seront en phase et nous aurons, dans la direction de réflexion régulière, un grand maximum de l'intensité. La condition pour qu'il en soit ainsi est que les chemins optiques du rayon diffusé en A et du rayon diffusé en C diffèrent d'un multiple entier de la longueur d'onde; ceci donne :

$$\overline{DC} + \overline{CD'} = n\lambda \quad (n \text{ entier})$$

c'est-à-dire :

$$2 d_{h_1 h_2 h_3} \sin \theta = n\lambda \quad (19)$$

C'est la relation de Bragg bien connue pour les rayons X. Sa démonstration suppose que l'on peut négliger la différence d'indice de réfraction entre le cristal et le vide; nous avons vu que cela était légitime pour les expériences de Thomson.

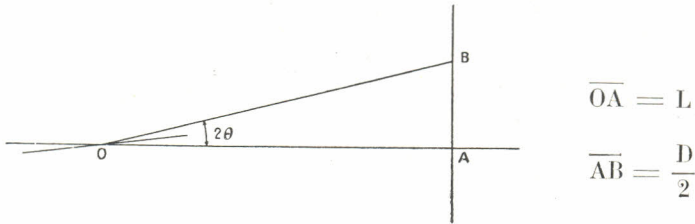


FIG. 4.

Soit L la distance du film à la plaque photographique sur laquelle on recueille les électrons; on doit s'attendre à obtenir, pour chaque réflexion sur un petit cristal, une tache à la distance $\frac{D}{2}$ de la trace du faisceau cathodique incident avec :

$$\frac{D}{2} = L \operatorname{tg} 2\theta,$$

si toutefois le principe des interférences est exact pour les électrons, c'est-à-dire si le carré de l'amplitude de l'onde mesure bien la probabilité de présence des électrons en chaque point.

La grandeur qui va régir le phénomène, c'est la longueur d'onde λ de l'onde associée aux électrons incidents. D'après les formules générales, on doit avoir :

$$\lambda = \frac{h}{|p|} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{mv}. \quad (20)$$

La vitesse des électrons est en général déterminée par la différence de potentiel P , qui a servi à les mettre en mouvement. On a :

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 = eP \quad (21)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{2eP}{mc^2} + \frac{e^2P^2}{m^2c^4} \quad (22)$$

et :

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta c} = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{eP}{m} + \frac{e^2P^2}{m^2c^2}}} \quad (23)$$

d'où enfin :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 meP \left(1 + \frac{eP}{2 mc^2}\right)}} \quad (24)$$

Le terme $\frac{eP}{mc^2}$ étant toujours faible, il est suffisant d'écrire :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 meP}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{eP}{mc^2}\right) \quad (25)$$

Si l'on exprime P en volts, il faut remplacer (25) par :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{meP}} \left(1 - \frac{eP}{1200 mc^2}\right) \quad (26)$$

Dans les expériences de Thomson, le terme correctif n'a jamais dépassé 3 %. On peut donc toujours poser assez approximativement :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{meP}} \quad (27)$$

formule qu'on pourrait obtenir directement en partant des formules non-relativistes :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} mv^2 = eP.$$

En appliquant les relations précédentes, on trouve, pour la longueur d'onde des électrons de 25.000 volts, la valeur $0,75 \cdot 10^{-9}$ cm., ce qui correspond à des rayons X très durs. Comme les réseaux cristallins usuels ont des équidis-

tances de l'ordre de 10^{-8} cm., on voit que les angles θ seront très petits, suffisamment petits pour pouvoir remplacer dans les formules $\sin \theta$ par θ , et $\text{tg } 2\theta$ par 2θ . On a donc très sensiblement :

$$2 d\theta = n\lambda \quad \text{et} \quad \frac{D}{2} = L \cdot 2\theta$$

d'où :

$$D = \frac{2 n\lambda L}{d_{h_1 h_2 h_3}} \quad (28)$$

Si les microcristaux du film sont orientés tout à fait au hasard, on obtiendra sur la plaque photographique, non pas une tache, mais une infinité de taches dessinant un anneau continu autour de la trace du faisceau incident, anneau dont le diamètre sera égal à D . Si le film métallique renferme des microcristaux. présentant un certain degré d'orientation, on aura des apparences plus compliquées : certains anneaux manqueront, d'autres seront interrompus. Tout cela a bien été observé. Il faut remarquer que les films doivent être très minces pour que le faisceau d'électrons ne soit pas trop absorbé et ne subisse pas plusieurs diffusions successives.

Les premières expériences vraiment probantes de G.-P. Thomson ont porté sur l'Aluminium et sur l'Or. Une première chose à vérifier, c'est que, pour un anneau donné, je veux dire produit par une famille donnée de plans réticulaires, le rapport $\frac{D}{\lambda}$ est constant. En d'autres termes, si l'on augmente progressivement la tension P , le système d'anneaux se rétrécit, et si l'on suit le rétrécissement d'un des anneaux, la relation :

$$\frac{D}{\lambda} = C^{te}$$

ou :

$$D\sqrt{P} \left(1 + \frac{1}{4200} \frac{eP}{mc^2} \right) = C^{te} \quad (29)$$

doit être vérifiée. Voici des tableaux donnés par G.-P. Thomson :

Aluminium.

P (volts)	D (cms)	$D\sqrt{P} \left(1 + \frac{1}{1200} \frac{eP}{mc^2} \right)$
64.000	1,47	384
57.600	1,62	398
45.000	1,78	388
34.500	2,00	378

Or.

58.000	1,50	371
55.000	1,58	381
44.000	1,75	376
33.700	2,00	374

Platine.

45.000	1,85	402
40.000	1,96	400
34.500	2,23	421
25.500	2,46	398

Aluminium (avec une autre valeur de L).

34.500	1,64	310
27.500	1,84	310
26.200	1,86	305
21.800	2,09	312

Platine (avec une autre valeur de L).

29.000	1,84	319
24.000	1,98	311

La variation de la longueur d'onde avec le potentiel P et, par suite, avec la vitesse des électrons, se vérifie donc bien.

Pour un potentiel donné, les diamètres D et D' correspondant aux réflexions sur les plans réticulaires d'indices $(h_1 h_2 h_3)$ et $(h_1' h_2' h_3')$ sont dans le rapport :

$$\frac{D'}{D} = \frac{d_{h_1 h_2 h_3}}{d_{h_1' h_2' h_3'}} \quad (30)$$

Comme les métaux employés cristallisent dans le système cubique à faces centrées, on a :

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad (31)$$

a étant l'arête du cube et les indices devant être doublés s'ils sont tous trois de même parité. Donc, avec cette convention :

$$\frac{D'}{D} = \frac{\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad (32)$$

Dans plusieurs séries d'expériences sur l'Aluminium, Thomson a obtenu des anneaux dont les diamètres étaient proportionnels à :

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{4} & \sqrt{8,00} & \sqrt{10,9} & \sqrt{16,5} & \sqrt{27} & \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,65} & \sqrt{10,6} & \sqrt{14,8} & & \\ \sqrt{4} & \sqrt{8,05} & \sqrt{11,05} & \sqrt{15,8} & \sqrt{28} & \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,93} & \sqrt{11,4} & \sqrt{16} & & \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,95} & \sqrt{10,8} & \sqrt{15,8} & \sqrt{26,6} & \\ \sqrt{4} & \sqrt{8,00} & \sqrt{10,9} & \sqrt{15,4} & \sqrt{27,4} & \end{array}$$

séries qui se rapprochent beaucoup de la série :

$$\sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{16} \quad \sqrt{27}$$

correspondant aux plans réticulaires :

$$200 \quad 220 \quad 311 \quad 400 \quad 511$$

Pour le Platine, on a trouvé de même les séries :

$$\begin{array}{cccccccc} \sqrt{3} & \sqrt{4,00} & \sqrt{7,95} & \sqrt{11,1} & \sqrt{16,2} & \sqrt{18,8} & \sqrt{23,2} & \sqrt{26,8} \\ \sqrt{3} & \sqrt{4,05} & \sqrt{8,05} & \sqrt{11,4} & \sqrt{15,2} & \sqrt{18,4} & \sqrt{22,5} & \sqrt{26,3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3,98} & \sqrt{7,95} & \sqrt{10,8} & \sqrt{15,2} & \sqrt{18,3} & \sqrt{23,8} & \sqrt{26,4} \end{array}$$

analogues à la série :

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{16} \quad \sqrt{19} \quad \sqrt{24} \quad \sqrt{27}$$

correspondant aux plans d'indices :

$$111 \quad 200 \quad 220 \quad 311 \quad 400 \quad 331 \quad 422 \quad 333$$

De même, pour l'Or, on a eu les deux séries :

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{3} & \sqrt{4,2} & \sqrt{7,9} & \sqrt{11,5} & \sqrt{19,9} & \\ \sqrt{3} & \sqrt{4,08} & \sqrt{8} & \sqrt{11,1} & \sqrt{19,9} & \end{array}$$

très analogues à la série :

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{20}$$

correspondant aux plans d'indices :

$$111 \quad 200 \quad 220 \quad 311 \quad 420$$

Ayant ainsi déterminé les indices des plans réflecteurs, on peut calculer l'arête du cube et comparer aux valeurs obtenues par les expériences de Rayons X. Thomson a trouvé :

	Al	Au	Pt
par les rayons cathodiques :	$a = 4,033 \text{ \AA}$	$a = 4,20 \text{ \AA}$	$a = 3,89 \text{ \AA}$
par les rayons Röntgen :	$a = 4,063 \text{ \AA}$	$a = 4,06 \text{ \AA}$	$a = 3,91 \text{ \AA}$

M. Thomson a aussi vérifié d'une façon très intéressante que l'agent produisant une impression sur la plaque photographique était bien des électrons diffusés par le film et

non des Rayons X secondaires. Pour cela, il a établi un champ magnétique entre le film et la plaque photographique et constaté que l'ensemble des anneaux était déplacé par l'action du champ. Il a même pu ainsi vérifier que la vitesse des électrons diffusés était égale à celle des électrons incidents.

Les premières expériences de G.-P. Thomson avaient porté sur le celluloïd et donné des résultats nets, mais plutôt qualitatifs. Un de ses élèves, M. Reid, a repris depuis ces expériences et trouvé un bon accord avec la théorie en admettant dans le celluloïd l'existence des deux équidistances égales à $3,67 \text{ \AA}$ et $4,35 \text{ \AA}$, alors que les équidistances, mesurées par Muller par les acides gras, sont $3,67$ et $4,08 \text{ \AA}$. Enfin, un autre collaborateur du Professeur Thomson, M. Ironside, a trouvé aussi une confirmation de la théorie pour des films de Cuivre, d'Argent et d'Étain, métaux qui cristallisent aussi en cubes à faces centrées. Voici, par exemple, les valeurs du côté du cube élémentaire qu'il a obtenu pour ces trois métaux, comparées à celles obtenues par les rayons X :

	Argent	Cuivre	Étain
par rayons cathodiques :	$4,11 \text{ \AA}$	$3,66 \text{ \AA}$	$2,86 \text{ \AA}$
par rayons Röntgen :	$4,08 \text{ \AA}$	$3,60 \text{ \AA}$	$2,91 \text{ \AA}$

5. — *Expériences de M. Ponte (1929)*. — M. Ponte a obtenu de très beaux anneaux de diffraction avec des électrons diffusés par l'oxyde de zinc. Voici comment il opérait. Un faisceau cathodique étroit, issu d'une cathode chaude, tombait sur un fil métallique mince recouvert d'une faible couche d'oxyde de zinc ou sur les bords d'un diaphragme sur lequel l'oxyde a été formé : parfois aussi, on lui faisait traverser un tissu d'oxyde de zinc formé sans support. Les expériences ont été effectuées pour des tensions de 7,6; 11,47; 13,92 et 17,25 kilovolts.

Le réseau de l'oxyde de zinc appartient au système hexagonal : le calcul des anneaux de diffraction par la théorie

de Laue est donc un peu plus compliqué que pour les cristaux cubiques étudiés par Thomson, mais il peut néanmoins être facilement effectué si l'on admet la formule (3) pour la longueur d'onde de l'onde associée. M. Ponte a pu ainsi vérifier que la formule (3) est valable à moins de 1 % près pour les électrons ayant subi des chutes de potentiel variant de 7,6 à 17,25 kilovolts, ce qui correspond à des longueurs d'onde variant de 0,14 Å à 0,093 Å environ.

Nous reproduisons dans ce livre quelques-uns des beaux clichés de M. Ponte, qu'il a très obligeamment mis à notre disposition; nous le prions de trouver ici l'expression de nos remerciements sincères.

CHAPITRE VIII

LE PRINCIPE DES INTERFÉRENCES ET LA DIFFUSION DES PARTICULES ÉLECTRISÉES PAR UN CENTRE FIXE

1. — *Diffusion des particules électrisées d'après la Mécanique classique.* — Nous allons donner un autre exemple de la valeur du principe des interférences pour les particules matérielles; nous allons en effet montrer que le principe des interférences appliqué aux particules électrisées (électrons ou rayons α) permet de retrouver la loi de Rutherford pour la diffusion subie par ces particules en traversant un morceau de matière, loi qui a été vérifiée expérimentalement (Rutherford, Chadwick). Nous commencerons par exposer la méthode classique qui a permis à Rutherford d'établir sa loi, puis en suivant un calcul de Wentzel, nous montrerons qu'en se servant des conceptions de la Mécanique ondulatoire et en appliquant le principe des interférences, on parvient au même résultat.

Voici d'abord le traitement classique. Soient e et m la charge et la masse des particules incidentes, e_1 la charge du centre diffuseur supposé fixe et à proximité duquel les particules incidentes vont venir passer en traversant la matière. Nous supposons, en accord avec les conditions expérimentales, qu'au début de leur mouvement les particules électrisées sont animées toutes de la même vitesse \vec{v} dans une certaine direction. Nous prendrons la position du centre fixe comme origine d'un axe polaire ox parallèle à la direction du mouvement initial (fig. 5).

Une fois sortie de la région où se fait sentir l'action du centre fixe, chaque particule aura de nouveau un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v mais dans une direction faisant un certain angle α avec la direction du

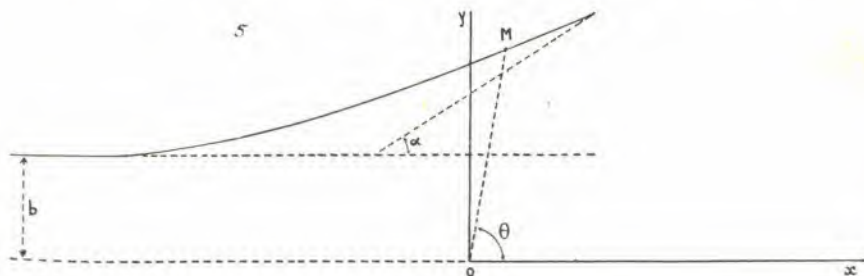


FIG. 3.

mouvement initial. La conservation du moment de la quantité de mouvement autour du point O nous donne :

$$mvb = -mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

r et θ étant les coordonnées polaires de la particule à l'instant t , b sa distance initiale à l'axe polaire.

D'autre part, en tenant compte de la loi de Coulomb, l'équation du mouvement suivant l'axe oy perpendiculaire en O à l'axe polaire est :

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{ee_1}{r^2} \sin \theta = -\frac{ee_1}{vb} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

Intégrons; il vient :

$$mv \sin \alpha = \frac{ee_1}{vb} (1 + \cos \alpha) \quad (3)$$

car pendant l'interaction θ varie de π à α et v_y de 0 à $v \sin \alpha$. De (3) l'on tire :

$$b = \frac{ee_1}{mv^2 \sin \alpha} (1 + \cos \alpha) = \frac{ee_1}{mv^2} \cotg \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

car $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Maintenant la probabilité pour que la distance de la trajectoire initiale à ox soit comprise entre b et $b + db$ est évidemment $2\pi b db$; elle est d'ailleurs égale à la probabilité $P(\alpha) d\alpha$ pour que l'angle final de la vitesse avec l'axe ox soit compris dans l'intervalle $\alpha - \alpha + d\alpha$ qui correspond d'après la formule (4) à l'intervalle $b - b + db$. En tenant compte du fait que α et b varient en sens inverse, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\alpha) d\alpha &= - C^{te} 2\pi b db = - C^{te} \frac{d(b^2)}{d\alpha} d\alpha & (5) \\ &= - C^{te} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{d}{d\alpha} \left[\cotg^2 \frac{\alpha}{2} \right] d\alpha \end{aligned}$$

Le nombre des particules subissant une déviation comprise entre α_1 et α_2 est proportionnel à $\cotg^2 \frac{\alpha_1}{2} - \cotg^2 \frac{\alpha_2}{2}$. C'est la loi de Rutherford bien vérifiée par l'expérience. Il y a cependant une difficulté : si l'on intègre l'expression (5) de $P(\alpha) d\alpha$ depuis 0 jusqu'à α_0 , on voit que le nombre des particules subissant une déviation moindre que α_0 doit être infini. Ceci peut sembler une objection contre le résultat du calcul, mais il n'en est rien : nous avons en effet implicitement supposé le faisceau incident de particules illimité latéralement et s'il en était ainsi, il y aurait bien un nombre infini de particules passant assez loin du centre pour ne subir aucune déviation appréciable. Mais en pratique les faisceaux de particules sont toujours limités latéralement, de sorte que le calcul n'est plus valable par les grandes valeurs de b , c'est-à-dire pour les petites de α : or, c'est précisément pour ces petites valeurs de α que l'intégrale $\int P(\alpha) d\alpha$ diverge.

2. — Calcul par la Mécanique ondulatoire. — Adoptons désormais le point de vue de la nouvelle Mécanique. Nous devons associer aux particules incidentes l'onde :

$$\Psi_0(x, t) = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - mvx]} \quad (6)$$

où a_0 est une constante et où W a la valeur :

$$W = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + E \quad (7)$$

le second terme devant d'ailleurs être regardé comme très petit devant le premier, si nous nous bornons à l'approximation Newtonienne comme au paragraphe précédent. La longueur d'onde a pour valeur :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (8)$$

Dans les conditions expérimentales usuelles, elle est toujours très petite, de l'ordre de celle des Rayons X.

Au voisinage du centre diffuseur O , il existe un champ de force et une fonction potentielle $F(r)$; l'équation de propagation y est donc :

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - F) \Psi = 0 \quad (9)$$

Quand l'onde Ψ pénètre dans cette région, tout se passe comme lorsqu'une onde lumineuse pénètre dans un milieu réfringent non homogène. A l'onde incidente Ψ_0 se superpose une onde diffusée Ψ_1 . Nous admettons que la diffusion n'affaiblit pas sensiblement l'onde incidente. Dès lors, on a :

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \quad \Psi_1 \ll \Psi_0 \quad (10)$$

Comme Ψ_0 satisfait l'équation :

$$\Delta\Psi_0 + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\Psi_0 = 0 \quad (11)$$

l'onde diffusée Ψ_1 obéit sensiblement à l'équation :

$$\Delta\Psi_1 + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\Psi_1 = \frac{8\pi^2m}{h^2} F\Psi_0 \quad (12)$$

comme cela résulte de (9) et de (10). Or, la fréquence $\frac{W}{h}$

étant, aussi bien pour l'onde incidente que pour l'onde diffusée, sensiblement égale à $\frac{mc^2}{h}$, on a :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = -4\pi^2 \frac{m^2 c^4}{h^2} \Psi_1; \quad \frac{8\pi^2 m}{h^2} \Psi_1 = -\frac{2}{mc^4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} \quad (13)$$

et en portant (13) dans (12) :

$$\Delta \Psi_1 - \frac{2E}{mc^4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F \Psi_0. \quad (14)$$

Comme $2E = mv^2$, on a :

$$\Delta \Psi_1 - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F \Psi_0 \quad (15)$$

avec toujours :

$$V = \frac{c^2}{v} \quad (16)$$

$\Psi_0(x, t)$ et $F(r)$ étant des données du problème, l'équation (15) est de la forme :

$$\Delta \Psi_1 - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = \sigma(x, y, z, t) \quad (17)$$

avec :

$$\sigma(x, y, z, t) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F(r) \Psi_0(x, t) \quad (18)$$

La solution de (17) est donnée par la formule bien connue de Kirchhoff (formule des potentiels retardés) :

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{\sigma(x, y, z, t)}{\rho} \right]_{t - \frac{\rho}{V}} d\tau \quad (19)$$

$d\tau$ étant un élément de volume entourant le point M d'intégration et ρ désignant la distance \overline{MP} . L'indice $t - \frac{\rho}{V}$ signifie qu'on doit considérer la valeur de σ non pas à l'instant t mais à l'instant $t - \frac{\rho}{V}$.

Ici, nous devons poser :

$$\left[F\Psi_0 \right]_{t-\frac{\rho}{v}} = F(r) a_0 e^{2\pi i \left[\frac{W}{h} t - \frac{x+\rho}{\lambda} \right]} \quad (20)$$

Donc, d'après (18) et (19) :

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{2\pi m}{h^2} a_0 e^{\frac{2\pi i}{h} W t} \iiint \frac{F}{\rho} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} (x+\rho)} d\tau \quad (21)$$

Ici, se présente une difficulté. Il serait tout naturel de poser :

$$F(r) = \frac{ee_1}{r} \quad (22)$$

puisque l'action du centre diffuseur sur les particules incidentes se fait suivant la loi de Coulomb. Mais si l'on accepte (22), l'intégrale triple serait divergente, comme cela ressortira du calcul qui va être fait. Pour éviter cette difficulté, M. Wentzel a posé :

$$F(r) = \frac{ee_1}{r} e^{-kr} \quad (23)$$

k étant tel que $k\lambda \ll 1$. Dans une région entourant le centre O et de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde λ , l'expression (23) coïncide sensiblement avec la loi de Coulomb. Mais dans les régions plus éloignées de O le facteur exponentiel entre en jeu et la rapide décroissance de F avec r empêche la diffusion d'être infinie. A notre avis, on peut interpréter de la façon suivante l'artifice de Wentzel. En représentant l'onde incidente par une onde plane monochromatique, on suppose par là même le faisceau incident illimité latéralement et ceci ne peut correspondre à rien de réel; le faisceau incident est forcément limité latéralement et il faudrait le représenter par un train d'ondes de dimensions finies. Si l'on veut, pour la simplicité des calculs, conserver la représentation du faisceau incident par une onde monochromatique plane, il est nécessaire de corriger ce que cette représentation a

d'inexact en introduisant le facteur exponentiel de Wentzel pour annuler l'influence des portions éloignées de l'onde monochromatique, portions qui en réalité n'existent pas.

Admettons l'hypothèse de Wentzel et calculons l'onde Ψ_1 diffusée en un point P très éloigné de O (fig. 6).

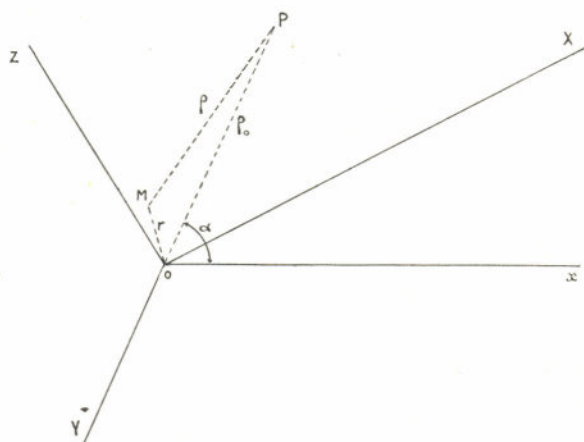


FIG. 6.

En raison de la présence du facteur e^{-kr} l'intégration triple indiquée dans la formule (21) n'intéresse que le voisinage immédiat de O; par suite, on peut remplacer ρ par $\overline{OP} = \rho_0$ dans le facteur lentement variable $\frac{1}{\rho}$, et dans le facteur exponentiel poser :

$$\rho = \rho_0 - r \cos \widehat{MOP} \tag{24}$$

La formule (21) devient alors :

$$\Psi_1(P, t) = - \frac{2\pi m}{h^2} e e_1 \frac{a_0}{\rho_0} e^{2\pi i \left[\frac{W}{h} t - \frac{\rho_0}{\lambda} \right]} \iiint e^{-kr + \frac{2\pi i}{h} (r \cos \widehat{MOP} - x)} \frac{d\tau}{r} \tag{25}$$

Introduisons un système de coordonnées rectangulaires défini de la manière suivante : le plan XOZ coïncide avec

le plan xoP , l'axe OX est la bissectrice intérieure de l'angle $xoP = \alpha$ et l'angle OZ en est la bissectrice extérieure; enfin l'axe OY est normal en O au plan xoP . Pour repérer la position du point d'intégration M , nous utiliserons des coordonnées polaires r, θ, φ autour de l'axe OZ servant de ligne des pôles. Dans le système $OXYZ$, le tableau des cosinus directeurs des droites Ox, OM, OP est alors le suivant :

	OX	OY	OZ
ox	$\cos \frac{\alpha}{2}$	0	$-\sin \frac{\alpha}{2}$
OM	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
oP	$\cos \frac{\alpha}{2}$	0	$+\sin \frac{\alpha}{2}$

On en conclut :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MOP} &= \sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \\ x = r \cos \widehat{Mox} &= r \left(\sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (26) \\ r \cos \widehat{MOP} - x &= 2r \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

L'intégrale triple de (23) devient alors :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} e^{-kr + \frac{4\pi i}{\lambda} r \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2}} r dr. \quad (27)$$

L'intégration par rapport à φ donne 2π . Une intégration par parties où l'on remarque que l'exposant de l'exponentielle a sa partie réelle négative, donne pour l'intégrale r en r :

$$\frac{1}{\left(-k + \frac{4\pi i}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta \right)^2} \quad (28)$$

soit sensiblement, en raison de l'ordre de grandeur de k :

$$= \frac{1}{\frac{16\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta} \quad (29)$$

Or, on a :

$$\int_0^\pi - \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \left| - \frac{1}{\cos \theta} \right|_0^\pi = 2. \quad (30)$$

D'où enfin pour la valeur de l'intégrale (27) :

$$\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (31)$$

En portant la valeur (31) dans (25), on trouve :

$$\Psi_1(P, t) = - \frac{\lambda^2 m e e_1}{2h^2} \cdot \frac{a_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} e^{2\pi i \left[\frac{W}{h} t - \frac{\rho_0}{\lambda} \right]} \quad (32)$$

Comme :

$$\frac{m\lambda^2}{h^2} = \frac{1}{mv^2},$$

le carré de l'amplitude diffusée en P a pour valeur :

$$a_1^2(P) = \frac{e^2 e_1^2}{4m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a_0^2}{\rho_0^2} \quad (33)$$

Considérons la sphère de centre O et de rayon ρ_0 . Le nombre des particules diffusées qui traversent par unité de temps la zone sphérique correspondant à l'intervalle angulaire $\alpha - \alpha + d\alpha$ doit être, puisque a_1^2 mesure la densité du nuage des particules diffusées :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} \frac{a_0^2}{\rho_0^2} \cdot v \cdot 2\pi \rho_0^2 \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} v a_0^2 \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (34)$$

D'autre part, le nombre des particules qui traversent par unité de temps un plan de front $x = C^t e$ situé très loin à gauche du centre O est évidemment proportionnel à $a_0^2 v$. La probabilité d'une déviation comprise entre a et $a + da$ est donc :

$$\begin{aligned}
 P(a) dz &= C^{te} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{a}{2}} \cdot 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} dz \quad (33) \\
 &= - C^{te} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{d}{da} \left(\cotg^2 \frac{a}{2} \right) dz.
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons la formule (5) de Rutherford. Comme elle a été vérifiée par l'expérience, nous voyons qu'ici encore le principe des interférences appliqué aux particules matérielles se trouve en accord avec les faits.

Notre calcul comporte des approximations, mais M. Gordon a montré que l'on pouvait retrouver rigoureusement la formule de Rutherford sans faire d'approximations dans le calcul de l'onde diffusée.





CHAPITRE IX

LE MOUVEMENT DE LA PROBABILITÉ DE PRÉSENCE DANS LA NOUVELLE MÉCANIQUE

1. — *Le nuage de probabilité.* — Nous avons vu dans le chapitre VI que dans le cas limite où les approximations de l'optique géométrique étaient valables pour la propagation de l'onde associée, c'est-à-dire dans le cas limite des anciennes Mécaniques, il était possible d'imaginer un fluide de probabilité se déplaçant dans l'espace de façon que la densité de ce fluide mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité de présence du corpuscule. Nous allons voir que ce résultat est encore valable en toute généralité dans la nouvelle Mécanique si nous admettons le principe des interférences, confirmé par les expériences de diffraction des électrons par les cristaux.

Nous ferons les démonstrations en nous en tenant aux équations non relativistes. Nous partons donc de l'équation de propagation :

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2m}{h^2} F\Psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (1)$$

et nous substituons dans cette équation la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)} \quad (2)$$

a et φ étant des fonctions réelles.

Nous obtenons alors comme nous l'avons déjà vu deux équations qui peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + F(x, y, z, t) \quad (3)$$

$$- \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{\partial a}{\partial t} \quad (4)$$

Contrairement à ce qui a lieu à l'approximation de l'optique géométrique, la détermination des fonctions a et φ n'est ici possible que simultanément. Toutes les équations étant du premier ordre par rapport au temps, la fonction $\Psi(x, y, z, t)$ sera bien déterminée si l'on connaît sa forme $\Psi(x, y, z, 0)$ à l'instant origine. Supposons donc que nous ayons ainsi déterminé la fonction $\Psi(x, y, z, t)$ et par suite les fonctions a et φ ; imaginons un « fluide de probabilité » dont les molécules ou, si l'on préfère, les « éléments » possèdent la masse m du corpuscule étudié. L'équation (4) nous montre comme au chapitre VI que si nous attribuons aux éléments de probabilité la vitesse définie en chaque point et à chaque instant par la relation :

$$\vec{v} = - \frac{1}{m} \text{grad } \varphi \quad (5)$$

la densité ρ du nuage de probabilité restera toujours proportionnelle à $a^2(x, y, z, t)$, si elle était égale à $a^2(x, y, z, 0)$ à l'instant initial; cette équation (4) peut, en effet, s'écrire si l'on admet (5) :

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \text{div}(a^2 \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

et elle exprime la continuité hydrodynamique si l'on pose $\rho = Ka^2$. La constante K se déterminera par la condition que $\int Ka^2 dv$ étendue à tout le nuage de probabilité soit égale à 1; comme a n'est définie qu'à un facteur constant près, on

peut d'ailleurs faire rentrer la constante K dans a^2 et dire que la densité du nuage de probabilité est égale au carré de l'amplitude de l'onde Ψ .

Revenons à l'équation (3); nous pouvons la considérer comme étant l'équation de Jacobi pour le mouvement des éléments de probabilité, l'énergie potentielle de ces éléments étant $F(x, y, z, t) + F_1(x, y, z, t)$ en posant :

$$F_1(x, y, z, t) = - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a}. \quad (7)$$

L'on voit que cette énergie potentielle dépend de la densité du nuage de probabilité car elle dépend de a . On peut dire aussi que pour obtenir le mouvement des éléments de probabilité, il faut ajouter au potentiel ordinaire $F(x, y, z, t)$ un potentiel supplémentaire donné par (7) qu'on peut nommer le « potentiel quantique » pour bien marquer qu'il dépend de h et serait négligeable si h était infiniment petit.

2. — *Equations du mouvement des éléments de probabilité.* — Si nous assimilons l'équation (3) à une équation de Jacobi pour les éléments de probabilité, nous sommes tout naturellement amenés à introduire pour étudier leur mouvement une fonction de Lagrange dépendant de leurs coordonnées, de leurs vitesses et du temps; c'est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z) &= \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &\quad - F(x, y, z, t) - F_1(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (8)$$

Les quantités :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = mv_x \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} = mv_y \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = mv_z \quad (9)$$

peuvent être appelées les « moments » ou « composantes de quantité de mouvement » des éléments de probabilité. La quantité :

$$W = \sum_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} q_i' - \mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 + F + F_1 \quad (10)$$

peut être assimilée à l'énergie des éléments de probabilité. D'après (5), on aura :

$$p_x = mv_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad p_y = mv_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (11)$$

$$p_z = mv_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les éléments de probabilité décrivent dans l'espace une trajectoire suivant une certaine loi et leur mouvement obéit à des équations du type Lagrange. Nous avons en effet :

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial p_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial p_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial p_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial p_x}{\partial t} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{m} \left(p_x \frac{\partial p_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial p_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial p_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_x}{\partial t}$$

ou en vertu de (11) :

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \quad (13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$$

Comme φ est solution de (3) il reste :

$$\frac{dp_x}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} = + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad (14)$$

et de même :

$$\frac{dp_y}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad (16)$$

Les premiers termes des seconds membres sont les composantes de la force au sens classique; les deuxièmes termes qui dérivent du potentiel quantique F_1 comme les compo-

santes de la force classique dérivent du potentiel F , peuvent être nommées les composantes de la force quantique. Cette force quantique dépend de la densité du fluide de probabilité et est caractéristique de la nouvelle Mécanique : quand on peut négliger la force quantique, on retombe sur l'ancienne Dynamique et les mouvements des éléments de probabilité sont les divers mouvements prévus comme étant possibles pour le corpuscule par la théorie classique.

Quand il n'est pas permis de négliger la force quantique, le mouvement des éléments de probabilité est très différent de celui des corpuscules dans l'ancienne Dynamique. En particulier, nous ne retrouverons plus pour ces mouvements les théorèmes généraux de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Supposons, par exemple, le champ nul ($F \equiv 0$); il n'en résulte plus ici que p_x , p_y et p_z soient constants à cause de l'intervention de la force quantique dans les équations (14-16). Chaque fois que l'onde Ψ ne sera pas monochromatique plane, par exemple s'il y a superposition d'ondes planes et interférences, l'amplitude ne sera pas constante et bien qu'il n'y ait pas de champ dans l'ancien sens du mot, il y aura cependant variation des composantes de la quantité de mouvement définies par (11). Il n'y a donc plus de conservation de la quantité de mouvement.

De même, il n'y a plus conservation de l'énergie car on a par (10), (9) et (14-16) :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_{xyz} \left(p_x \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dp_x}{dt} \frac{dx}{dt} \right) - \sum_{xyz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &- \sum_{xyz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (17)$$

Pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il ne suffira plus qu'on ait affaire à un champ constant ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$); il faudra aussi que l'amplitude a de l'onde Ψ ne dépende pas du temps et cela ne sera pas réalisé si Ψ est une superposition quelconque d'ondes planes monochromatiques. Le

mouvement de la probabilité ne s'opère donc pas en général, même en l'absence de champ extérieur, avec conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, et c'est l'existence de la force quantique qui en est cause.

3. — *Théorème d'Ehrenfest.* — Il est possible d'éliminer la force quantique à l'aide d'une intégration étendue à l'ensemble des éléments de probabilité; on parvient ainsi à un théorème important dû à Ehrenfest. Multiplions les équations (14-16) par $a^2 (x, y, z) dx dy dz$ et intégrons dans tout l'espace en supposant que nous ayons affaire à un train d'ondes limité dont par suite l'amplitude est nulle à l'infini. Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int a^2 \frac{\partial p_x}{\partial t} dx dy dz &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz \quad (18) \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{h^2}{8\pi^2 m} a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

et deux équations analogues.

Nous allons montrer que l'intégrale :

$$\int \int \int a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dx dy dz$$

et les deux autres analogues sont nulles. Pour le démontrer, rappelons-nous une des formes de la formule de Green : si U et V sont deux fonctions continues et uniformes de xyz à l'intérieur d'un domaine D de l'espace limité, par une surface fermée S, on a :

$$\int_D \int \int (U \Delta V - V \Delta U) dv = \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (19)$$

n désignant la variable comptée le long de la normale à S vers l'extérieur. Faisons ici :

$$U = a \quad V = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (20)$$

Ces deux fonctions sont par hypothèse nulles à l'infini et si nous prenons comme domaine D l'intérieur d'une sphère dont nous ferons tendre le rayon vers l'infini, à la limite le second membre s'annulera; il reste donc :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a \Delta \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) dv = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x} \Delta a dv \quad (21)$$

Or, l'intégrale :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv$$

peut s'écrire :

$$\iiint \left[a \frac{\partial}{\partial x} (\Delta a) - \frac{\partial a}{\partial x} \Delta a \right] dv ;$$

elle est donc bien nulle comme nous l'avions annoncé. L'équation (14) conduit donc à :

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dp_x}{dt} dv &= m \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{d^2x}{dt^2} dv \\ &= - \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dv = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_x dv. \end{aligned} \quad (22)$$

Or, on peut prendre la densité du nuage égale à a^2 à condition de choisir la constante multiplicative arbitraire dans a , telle que :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 dv = 1.$$

Les intégrales de (22) sont donc les valeurs moyennes dans le nuage de probabilité des quantités :

$$\frac{dp_x}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, -\frac{\partial F}{\partial x} \text{ et } j_x.$$

En représentant les valeurs moyennes par une lettre sur-lignée, on obtient à l'aide de (22) et des deux équations analogues qu'on tirerait de (15) et (16) les relations :

$$\overline{\frac{dp_x}{dt}} = \overline{m\gamma_x} = \overline{f_x}; \quad \overline{\frac{dp_y}{dt}} = \overline{m\gamma_y} = \overline{f_y}; \quad \overline{\frac{dp_z}{dt}} = \overline{m\gamma_z} = \overline{f_z}. \quad (23)$$

C'est là le théorème d'Ehrenfest dont nous verrons plus tard une très intéressante application.

Nous allons montrer qu'on peut énoncer le théorème d'Ehrenfest sous la forme suivante : « Le centre de gravité du fluide de probabilité se déplace dans l'espace au cours du temps, comme doit le faire, suivant les lois de la Mécanique classique, un point matériel de masse m soumis à la valeur moyenne de la force dans le nuage de probabilité. »

En effet, soit R la région occupée à l'instant t par le fluide de probabilité et R' la région qu'il occupe à l'instant $t + dt$. A chaque élément $d\tau$ de R , faisons correspondre l'élément $d\tau'$ de R' , où se trouvent, à l'instant $t + dt$, les éléments de probabilité qui étaient dans $d\tau$ à l'instant t . Si nous accentuons les quantités relatives aux éléments de R' à l'instant $t + dt$, nous aurons $\rho d\tau = \rho' d\tau'$. La variation de l'intégrale

$\iiint v_x \rho d\tau$ pendant le temps dt est alors :

$$\begin{aligned} dt \frac{d}{dt} \iiint v_x \rho d\tau &= \iiint_{R'} v_x' \rho' d\tau' - \iiint_R v_x \rho d\tau \\ &= \iiint_R (v_x' - v_x) \rho d\tau = dt \iiint_R \frac{dv_x}{dt} \rho d\tau \end{aligned}$$

car $v_x' - v_x = \frac{dv_x}{dt} dt$. Donc :

$$\frac{d}{dt} \iiint v_x \rho d\tau = \frac{d\overline{v_x}}{dt} = \iiint \frac{dv_x}{dt} \rho d\tau = \frac{d\overline{v_x}}{dt} = \overline{\gamma_x}$$

En répétant le raisonnement, on montrerait de même que

$$\bar{v}_x = \frac{\overline{dx}}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt}.$$

On a donc $\bar{\gamma}_x = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$ et deux formules analogues pour γ_y et γ_z , et les formules (23) peuvent s'écrire :

$$m \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x \quad m \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \bar{f}_y \quad m \frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = \bar{f}_z \quad (23^{bis})$$

et le théorème est démontré.

Examinons maintenant quelques cas particuliers.

Si la force classique est nulle ($F \equiv 0$, $f \equiv 0$), on a :

$$\frac{\overline{dp_x}}{dt} = 0 \quad \frac{\overline{dp_y}}{dt} = 0 \quad \frac{\overline{dp_z}}{dt} = 0 \quad (24)$$

Nous retrouvons là *pour l'ensemble du nuage* un théorème analogue à la conservation de la quantité de mouvement de la théorie classique. Cela tient à ce que nous avons pu éliminer la force quantique grâce à une intégration dans tout le nuage.

De la même façon, nous pouvons retrouver un théorème analogue à la conservation de l'énergie. Nous avons en effet trouvé [éq. (17)] :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Multiplions par $a^2 dv$ et intégrons dans tout l'espace en supposant toujours a nul à l'infini. Il vient :

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial t} dv \\ &+ \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F_1}{\partial t} dv. \end{aligned} \quad (25)$$





Où, d'après (7), on a :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F_1}{\partial t} dv = - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv. \quad (26)$$

Nous disons que l'intégrale (26) est nulle; en effet, dans la formule de Green (19), faisons :

$$U = a \quad V = \frac{\partial a}{\partial t} \quad (27)$$

il vient :

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{+\infty} a \Delta \frac{\partial a}{\partial t} dv &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} a \frac{\partial}{\partial t} (\Delta a) dv \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial t} \Delta a dv. \end{aligned} \quad (28)$$

L'intégrale (26) est donc bien nulle puisque :

$$\begin{aligned} &\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[a \frac{\partial}{\partial t} (\Delta a) - \Delta a \cdot \frac{\partial a}{\partial t} \right] dv. \end{aligned} \quad (29)$$

Finalement, l'équation (23) se réduit à :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial t} dv. \quad (30)$$

Si le champ est constant $\left(\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \right)$, on a :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv = \overline{\frac{dW}{dt}} = 0. \quad (31)$$

La formule (31) exprime le théorème analogue à la conservation de l'énergie.

4. — *Calcul des fonctions φ et a .* — Quand on connaît l'expression de la fonction d'ondes sur la forme :

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} \quad (32)$$

où a et φ sont réels, le mouvement du nuage de probabilité et sa densité se trouvent déterminés par les formules des deux premiers paragraphes. Mais il arrive souvent que Ψ soit connu sous la forme :

$$\Psi = \sum_k a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k} \quad (33)$$

qui, dans le cas des champs constants, correspond à la décomposition spectrale en ondes monochromatiques. Il est donc utile de savoir calculer a et φ quand la fonction d'ondes est donnée sous la forme (33). Désignons par Ψ^* la quantité complexe conjuguée de Ψ ; on a :

$$\Psi^* = a e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi} = \sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k} \quad (34)$$

En multipliant Ψ par Ψ^* , on obtient :

$$\begin{aligned} a^2 &= \Psi \times \Psi^* = \sum_{kl} a_k a_l e^{-\frac{2\pi i}{h} (\varphi_k - \varphi_l)} \\ &= \sum_k a_k^2 + \sum_{l < k} a_k a_l \cos \frac{2\pi}{h} (\varphi_k - \varphi_l). \end{aligned} \quad (35)$$

Cette formule détermine l'intensité résultante qui, d'après le principe des interférences, donne la probabilité de présence.

Si au contraire nous divisons Ψ par Ψ^* et si nous prenons le logarithme de ce quotient, nous obtenons :

$$\varphi = \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\Psi}{\Psi^*} = \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\sum_k a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}} \quad (36)$$

Désignons par q l'une quelconque des 4 variables $x y z t$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= \frac{h}{4\pi i} \frac{\Psi^*}{\Psi} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q}}{\Psi^{*2}} \\ &= \frac{h}{4\pi i} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q}}{a^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Cette formule nous donne simultanément les composantes du vecteur grad φ et la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, quantités qui représentent respectivement les composantes de quantité de mouvement et l'énergie des éléments de probabilité.

5. — *La théorie de l'onde-pilote.* — Nous avons vu que dans le domaine d'application de l'optique géométrique, on pouvait considérer le nuage de probabilité comme équivalent à un nuage de corpuscules, exécutant dans le champ donné des mouvements correspondant à une même intégrale complète de l'équation de Jacobi. On peut aussi n'envisager qu'un seul corpuscule et dire que le nuage de probabilité est obtenu en imaginant simultanément tous les mouvements correspondant à une même forme de la fonction de Jacobi. Si donc, dans ce cas, nous conservons l'idée classique du corpuscule bien localisé dans l'espace, ayant par suite une vitesse et une trajectoire, nous pouvons identifier le corpuscule avec l'un des éléments de probabilité; ces éléments décrivent, en effet, les diverses trajectoires possibles du corpuscule et par conséquent le corpuscule doit sans cesse coïncider avec l'un d'eux.

Si, maintenant, l'on veut encore conserver la conception classique du corpuscule dans le domaine propre de la nouvelle Mécanique, c'est-à-dire en dehors de l'approximation de l'optique géométrique, on est tout naturellement amené à vouloir maintenir l'identification du corpuscule avec l'un des éléments de probabilité et à se représenter les choses de la façon suivante :

Nous imaginons, d'une part, l'onde, et, d'autre part, le corpuscule bien localisé dans l'espace et nous lions le mouvement du corpuscule à la propagation de l'onde par la relation :

$$\vec{v} = - \frac{1}{m} \text{ grad } \varphi \quad (38)$$

φ étant la phase de l'onde définie par la relation (32). La vitesse du corpuscule se trouve ainsi bien déterminée à chaque instant si l'on connaît sa position initiale, et par suite sa trajectoire est, elle aussi, bien déterminée. De plus (ceci résulte des formules du paragraphe 1), si nous connaissons la forme de l'onde Ψ associée au corpuscule et si nous savons qu'à l'instant initial la probabilité de présence du corpuscule en un point est égale à l'intensité de l'onde en ce point, il en sera automatiquement de même à tout instant postérieur; le principe des interférences sera donc satisfait. On peut désigner cette théorie sous le nom de théorie de l'onde-pilote parce que l'on se figure l'onde comme guidant le mouvement du corpuscule.

La théorie de l'onde-pilote peut au premier abord paraître satisfaisante parce qu'elle permet de conserver la conception classique du corpuscule tout en étant d'accord avec le principe des interférences. Mais en y regardant de près, on voit qu'elle soulève aussi de sérieuses objections dont nous allons maintenant donner un résumé.

Une difficulté fondamentale vient de ce que dans le domaine de la nouvelle Dynamique, la détermination de la fonction φ n'est pas indépendante de celle de la fonction a . Si donc on suppose le mouvement des corpuscules donné par la relation (38), ce mouvement dépendra non seulement de la position initiale mais aussi de la probabilité de cette position initiale puisqu'elle dépend de $a(x, y, z, o)$. Nous nous écartons ainsi plus qu'on ne pouvait le croire au premier abord des idées classiques, car suivant les idées classiques il est inconcevable que le plus ou moins de précision de notre connaissance de l'état initial puisse influencer sur le cours ultérieur du mouvement.

De plus, dès l'instant où l'on admet en toute généralité le principe des interférences, il devient très difficile de conserver à l'onde le caractère d'un phénomène physique dans l'ancien sens du mot. Imaginons, par exemple, un corpuscule et son onde associée tombant sur un miroir imparfaitement réfléchissant; une partie de l'onde est transmise à travers le miroir, une autre partie est réfléchie. En raison de la signification que nous attribuons à l'intensité de l'onde, ce partage de l'onde incidente en une onde transmise et une onde réfléchie veut dire que le corpuscule a une certaine probabilité de traverser le miroir et une certaine probabilité d'être renvoyé en arrière. Supposons qu'une expérience vienne déceler la présence du corpuscule dans le faisceau transmis, alors la probabilité de trouver le corpuscule dans le faisceau réfléchi devient nulle, et ce faisceau doit, à partir de ce moment, avoir une intensité nulle : l'expérience faite sur le faisceau transmis fait s'évanouir le faisceau réfléchi. Ceci semble bien être une conséquence nécessaire du principe des interférences dans le cas d'un seul corpuscule et il est bien difficile de ne pas en tirer la conclusion suivante : l'onde n'est pas un phénomène physique au sens ancien du mot, c'est une sorte de représentation symbolique d'une probabilité dans l'espace et dans le temps. Mais alors la conception d'un corpuscule guidé par l'onde devient beaucoup moins satisfaisante. Tant qu'on croyait pouvoir regarder l'onde comme un phénomène physique, on pouvait assez aisément concevoir que ce phénomène physique pût diriger le corpuscule dans son mouvement. Mais si l'onde est seulement une représentation symbolique d'une probabilité, le guidage du corpuscule par l'onde devient une chose beaucoup plus difficile à comprendre, beaucoup moins en accord avec les anciennes idées de la Physique.

Nous avons vu qu'il n'y a pas en général conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour les éléments de probabilité et cela même en l'absence de champ. Il en est évidemment de même pour le corpuscule si l'on identifie le mouvement du corpuscule avec le mou-

vement d'un des éléments de probabilité. Cela suffit à enlever à la théorie de l'onde-piloté une grande partie de son utilité. Considérons, par exemple, le cas où le champ extérieur est nul et où l'onde est formée par une superposition d'ondes planes monochromatiques : dans la théorie de l'onde-pilote, on trouverait l'énergie et la quantité de mouvement possédées par le corpuscule quand il se trouve au point x, y, z , à l'instant t en calculant pour ces valeurs des variables, les quantités $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $-\text{grad } \varphi$. Ceci se fait aisément à l'aide de la formule (37) et l'on trouve que l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule varieraient d'une façon compliquée au cours du temps et d'ailleurs dépendraient de la forme du train d'ondes; le mouvement ainsi obtenu pour le corpuscule est assez peu vraisemblable. De plus, il y a des raisons de penser que si l'on cherchait dans ce cas à déterminer par une mesure l'énergie du corpuscule, on trouverait l'une ou l'autre des valeurs qui correspondent aux fréquences des ondes monochromatiques planes constituant le train d'ondes et non pas la valeur donnée par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Nous reviendrons sur ce point important dans le prochain chapitre en nous occupant de la lumière et nous verrons plus loin que là se trouve une des différences essentielles entre le point de vue de l'onde-pilote et le point de vue de Bohr et Heisenberg.

Bref, la théorie de l'onde-pilote qui veut localiser le corpuscule en un point de l'onde, en lui attribuant un mouvement bien défini à chaque instant, se heurte à de graves difficultés. Mais il n'y a aucun inconvénient (il y a au contraire des avantages au point de la représentation visuelle) à conserver l'image du nuage de probabilité dont les éléments ont un mouvement bien défini par la formule (5) et dont la densité égale à l'intensité de l'onde associée mesure, en chaque point et à chaque instant, la probabilité de présence du corpuscule conformément au principe des interférences.



CHAPITRE X

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES DE LUMIÈRE

1. — *Les photons et leurs ondes associées.* — Nous allons dans le présent chapitre développer la conception du nuage de probabilité pour les corpuscules de lumière. Mais comme les démonstrations du chapitre précédent ont été faites en utilisant les équations non relativistes, nous serons obligés de les recommencer, car il ne saurait être question d'appliquer au mouvement des photons les équations non relativistes.

Nous avons trouvé pour équation relativiste de propagation de l'onde associée à un corpuscule quand il n'y a pas de champ :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi \quad (1)$$

en introduisant la notation :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2)$$

on peut écrire (1) :

$$\square\Psi = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi. \quad (3)$$

Cette équation admet pour solutions sinusoïdales simples correspondant à des mouvements rectilignes et uniformes :

$$\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} \left[Wt - m \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \right]} \quad (4)$$

l'énergie W du corpuscule et sa quantité de mouvement \vec{p} étant exprimées en fonction de la masse m et de la vitesse βc par les formules Einsteiniennes :

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3)$$

Ceci rappelé, considérons successivement des corpuscules de masse propre de plus en plus petite. Il existera toujours des solutions sinusoïdales simples du type (4) correspondant à une valeur donnée W de l'énergie, mais au fur et à mesure que la masse m tend vers zéro, la vitesse v tend vers c puisque W est maintenue constante. Passons à la limite : nous pouvons concevoir des corpuscules de masse nulle dont l'onde aura la fréquence $\nu = \frac{W}{h}$ et dont la vitesse sera c . Il suffit d'imaginer que m et β tendent simultanément l'un vers 0, l'autre vers 1 de telle façon que le quotient $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ garde la valeur constante $h\nu$. Pour ces corpuscules de masse nulle, on aura donc :

$$W = h\nu \quad p = \lim \left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{h\nu}{c}. \quad (6)$$

Ce sont les relations fondamentales de la théorie des « Quanta de lumière » d'Einstein, relations qui ont permis d'interpréter l'effet photoélectrique et l'effet Compton. Nous sommes donc amenés à considérer la lumière comme constituée par des corpuscules de masse nulle; nous les appellerons « photons ». L'équation de propagation de leurs ondes associées s'obtient en faisant $m = 0$ dans l'équation (3), ce qui donne l'équation classique des ondes lumineuses :

$$\square \Psi = 0. \quad (7)$$

Nous associerons donc toujours au photon une onde Ψ solution de l'équation (7) et nous assimilerons cette onde à l'onde lumineuse classique. Bien entendu, dans le cas général, l'onde ne sera pas une onde plane monochromatique mais une solution quelconque de l'équation (7).

2. — *Le nuage de probabilité associé au photon.* — Nous admettons toujours le principe des interférences : l'intensité de l'onde Ψ doit donner la probabilité de présence du photon associé, de telle sorte que, dans un phénomène où interviennent un grand nombre de photons, cette intensité mesure la quantité d'énergie que l'on peut recueillir en un point : on est bien ainsi d'accord avec la signification que les théories classiques attribuent à l'intensité de l'onde lumineuse. Il est naturel, pour les photons comme pour les électrons et autres corpuscules matériels, de chercher à imaginer un nuage de probabilité lié à l'onde Ψ de telle façon que le principe des interférences se trouve satisfait.

Pour éviter certaines complications, nous supposons que l'onde Ψ est formée très approximativement par une superposition d'ondes monochromatiques planes de même fréquence ν ; c'est le cas qui se trouve sensiblement réalisé dans les expériences usuelles d'interférences. On peut alors poser :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \sum_k a_k e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{\alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k z}{c} \right)} \quad (8) \\ &= e^{2\pi i \nu t} a(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_1(x, y, z)} \\ &= a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [h\nu t - \varphi_1(x, y, z)]} \end{aligned}$$

Substituons (8) dans (7); séparons le réel de l'imaginaire. Il vient :

$$\frac{h^2 \nu^2}{c^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = \frac{h\nu}{c^2} \frac{\partial a}{\partial t} \quad (10)$$

La relation (10) montre de suite que si nous attribuons

aux éléments de probabilité la vitesse :

$$\vec{v} = - \frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi \quad (11)$$

le principe des interférences sera satisfait. En effet, l'équation (10) s'écrit, en tenant compte de (11) et en posant $a^2(x, y, z) = \rho(x, y, z)$:

$$\text{div} \left(\rho \vec{v} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Elle exprime la continuité hydrodynamique pour le mouvement du fluide de probabilité si l'on suppose, comme le veut le principe des interférences, que $\rho(x, y, z)$ est la densité de la probabilité.

La relation (11) suggère de définir une quantité de mouvement et une énergie des éléments de probabilité à l'aide des formules :

$$\vec{p} = - \text{grad } \varphi \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h\nu \quad (13)$$

car alors :

$$|p| = \frac{h\nu}{c^2} v = \frac{W}{c^2} v$$

et l'on retrouve la formule qui lie l'énergie et la quantité de mouvement en Dynamique relativiste. Si l'on adopte les définitions (13), l'équation (9) apparaît comme étant l'équation de Jacobi des éléments de probabilité. Il est facile de former les équations du mouvement de la probabilité; pour cela, calculons par exemple $\frac{dp_x}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{\partial p_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial p_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial p_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial p_x}{\partial t} \quad (14) \\ &= \frac{c^2}{h\nu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right] \\ &= \frac{c^2}{2h\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

D'où, en tenant compte de (9) :

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{hc^2}{8\pi^2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\Delta a}{a} \right] = - \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad (13)$$

en posant :

$$F_1 = - \frac{hc^2}{8\pi^2\nu} \frac{\Delta a}{a}.$$

On trouve deux équations analogues en p_y et p_z . Ces trois équations déterminent le mouvement des éléments de probabilité en fonction de a et de φ . Leurs seconds membres peuvent être appelés les composantes de la force quantique dérivant du potentiel quantique F_1 . Il est bien visible qu'en général les quantités p_x , p_y , p_z ne sont pas constantes; il n'y a pas en général conservation de la quantité de mouvement pour les éléments de probabilité parce qu'en général la force quantique n'est pas nulle.

3. — *L'interprétation des phénomènes d'interférences.* —

Lorsqu'on a affaire à un très long train d'ondes et qu'aucun obstacle n'entrave sa progression, on peut l'assimiler à une onde plane monochromatique :

$$\Psi = ae^{2\pi i \left[vt - \frac{\nu}{c} (ax + \beta y + \gamma z) \right]} \quad (16)$$

et la phase φ a pour expression :

$$\varphi = hvt - \frac{h\nu}{c} (ax + \beta y + \gamma z). \quad (17)$$

Les éléments de probabilité ont tous alors même vitesse dirigée dans le sens $a\beta\gamma$ et égale à :

$$v = - \frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi = c. \quad (18)$$

Si l'on considère un grand nombre de photons dont les ondes associées ont toutes la forme (16), tout se passe, au point de vue statistique, comme si ces photons décrivaient

des trajectoires rectilignes avec la vitesse c ; on retrouve la propagation rectiligne de la lumière.

Il n'en est plus de même quand l'onde dans sa propagation rencontre des obstacles (miroirs, écrans, etc.). La forme mathématique de l'onde doit alors être modifiée de façon à satisfaire certaines conditions aux limites et il en résulte les phénomènes d'interférences et de diffraction. Si l'on suppose que les obstacles rencontrés par l'onde sont fixes, il n'y a aucune modification de la fréquence incidente et l'onde pourra toujours s'exprimer sous la forme complexe :

$$\Psi = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [h\nu t - \varphi_1(x, y, z)]}$$

La phase est fonction linéaire du temps, l'amplitude en est indépendante. L'équation (14) s'écrit ici :

$$\vec{v} = \frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi_1 \quad (19)$$

et détermine le mouvement des éléments de probabilité dans la région d'interférences; la probabilité de présence du photon dans un élément de volume dv est :

$$Pdv = a^2(x, y, z)dv \quad (20)$$

le facteur constant de a étant convenablement choisi.

La formule (20) permet de retrouver l'interprétation des phénomènes d'interférences et de diffraction de la lumière donnée par les théories classiques. Elle exprime, en effet, que si l'on considère un ensemble de photons associés à des ondes identiques, le nombre de ces photons passant par seconde en un point de la région d'interférences est proportionnel à l'intensité de l'onde en ce point. Donc en assimilant l'onde Ψ des photons à l'onde lumineuse classique, comme il est naturel de le faire, la nouvelle Dynamique conduit à prévoir les mêmes franges obscures et brillantes que la théorie classique.

Pour enregistrer des franges d'interférences, par la photographie par exemple, on peut faire une expérience de

courte durée avec un éclairage intense ou une expérience de longue durée avec un faible éclairage; dans le premier cas on fait une moyenne dans l'espace, dans le second cas on fait une moyenne dans le temps; mais le résultat doit évidemment être le même. Ceci explique pourquoi les expériences d'interférences et de diffraction sont indépendantes de l'intensité employée.

Insistons un peu sur ce point important. Considérons une de ces expériences où l'on obtient des interférences avec une lumière extrêmement faible et un temps de pose extrêmement long. De temps à autre la source de lumière émet un photon, et ces émissions sont si séparées les unes des autres qu'il y a en général un seul photon avec son train d'ondes associé traversant l'appareil d'interférence. La probabilité, pour que la présence du photon se manifeste par une action photographique dans l'appareil d'interférence, est proportionnelle en chaque point à l'intensité résultante du train d'ondes. Pendant la durée très longue de l'expérience, le processus d'émission se répète un nombre énorme de fois N et l'appareil d'interférence reçoit successivement N trains d'ondes identiques. Il est évident que l'effet photographique produit est le même que si l'appareil avait reçu un seul train d'ondes transportant N photons, répartis dans le train proportionnellement au carré de l'amplitude. L'expérience faite avec une lumière très faible et une durée très longue doit donc donner le même résultat, conforme à la théorie classique, qu'une expérience rapide faite avec une lumière intense. Il est presque certain que les mêmes considérations sont valables pour la diffraction des corpuscules matériels.

Les équations (15) du mouvement de la probabilité nous montrent que dans un champ d'interférences à obstacles fixes les éléments de probabilité ne se déplacent pas en ligne droite; leur trajectoire est courbée par l'action de la force quantique qui résulte elle-même de la variation de l'amplitude. Prenons un exemple simple : la diffraction d'une onde plane par le bord rectiligne d'un écran plan indéfini. La lumière pénètre, on le sait

depuis Fresnel, dans l'ombre géométrique; il y a donc forcément des éléments de probabilité qui contournent le bord de l'écran et l'on voit bien que pour ces éléments il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement au sens ordinaire. Ceci conduit à une remarque intéressante au point de vue historique. Les partisans de la théorie de l'émission de Newton disaient autrefois, après la découverte de ce phénomène, que le bord d'un écran exerce une force sur les corpuscules de lumière; nous revenons ici un peu à cette idée avec notre force quantique qui est bien une conséquence de la présence de l'écran; mais la force quantique est d'une nature très particulière et à moins d'adopter la théorie de l'onde-pilote, dont nous connaissons déjà les difficultés, nous ne pouvons pas considérer la force quantique comme appliquée à proprement parler au corpuscule lui-même.

4. — *Interférences de la lumière au voisinage d'un miroir plan parfaitement réfléchissant.* — Il est très instructif d'étudier le mouvement de la probabilité dans un phénomène particulier d'interférences : celui qui se produit au voisinage d'un miroir plan frappé par un faisceau de lumière. Nous prendrons d'abord le cas d'un miroir parfaitement réfléchissant. Le plan du miroir sera pris comme plan des xy ; le plan des xz ou plan de la figure sera le plan d'incidence; enfin, l'axe des z sera la normale au miroir dirigée vers l'intérieur de celui-ci :

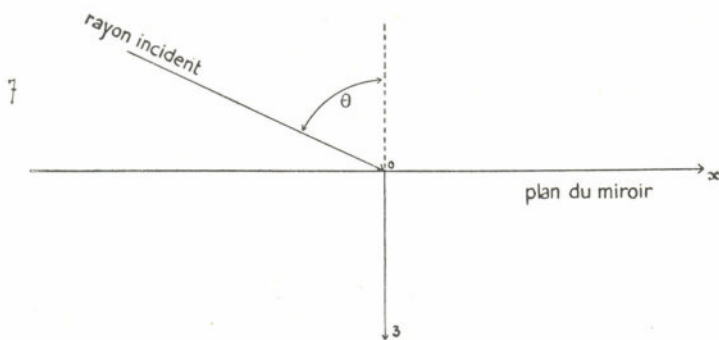


FIG. 7.

L'onde plane incidente est :

$$\Psi_1 = a_0 e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} \right]} \quad (21)$$

et l'onde plane réfléchie est :

$$\Psi_2 = a_0 e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} \right]} + \alpha \quad (22)$$

L'amplitude est la même dans les deux ondes parce que le miroir est parfaitement réfléchissant. Quant à α , c'est une constante correspondant à un changement de phase possible au moment de la réflexion.

Au voisinage du miroir les ondes Ψ_1 et Ψ_2 se superposent et l'on a :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} \quad (23)$$

avec :

$$a = 2a_0 \cos \left[2\pi \frac{\nu z}{c} \cos \theta + \frac{\alpha}{2} \right] \quad (24)$$

$$\varphi = h\nu \left[t - \frac{x \sin \theta}{c} \right] + \frac{h\alpha}{4\pi} \quad (25)$$

D'après la formule (11), la vitesse des éléments de probabilité dans la région d'interférences a pour composantes :

$$v_x = -\frac{c^2}{h\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = c \sin \theta \quad v_y = v_z = 0. \quad (26)$$

Dans le voisinage du miroir la probabilité se déplace donc parallèlement au miroir et sa densité, mesurée par a^2 , présente des maxima et des minima sur des plans parallèles à la surface réfléchissante et distants de $\frac{\lambda}{4 \cos \theta}$ d'après (24). Le fluide de probabilité, homogène dans le faisceau incident, où toutes positions sont également probables pour le photon, se divise en nappes parallèles en entrant dans la région d'interférences. Naturellement, on a en pratique toujours affaire à des trains d'ondes limités présentant un

front d'onde, et le mouvement de la probabilité que nous venons de décrire n'existe que quand, le front d'onde s'étant réfléchi sur le miroir, le régime des interférences se trouve établi.

Dans l'exemple que nous venons d'étudier, il est bien tentant de dire que les trajectoires de la probabilité sont en réalité les trajectoires des photons eux-mêmes; c'est le point de vue de la théorie de l'onde-pilote. Les photons répartis uniformément dans l'onde incidente viendraient dans la région d'interférences former des nappes qui couleraient parallèlement à la surface du miroir. Mais, nous l'avons dit, cette identification du mouvement des corpuscules avec celui des éléments de probabilité soulève des difficultés de principe. Dès que nous allons supposer le miroir imparfaitement réfléchissant, nous allons voir que la théorie de l'onde-pilote conduit à une conséquence peu vraisemblable au sujet de la vitesse des photons.

5. — *Interférences de la lumière au voisinage d'un miroir imparfaitement réfléchissant.* — Passons au cas d'un miroir plan qui n'est pas parfaitement réfléchissant. Une partie des photons sera transmise au travers de la surface du miroir dans le milieu situé derrière elle, tandis que le reste est réfléchi. Nous considérerons la surface du miroir comme une « couche de passage » très mince où s'opère la réflexion partielle de l'onde. Il nous importe peu, pour ce qui suit, de savoir si le milieu situé derrière cette couche de passage est identique au milieu (vide ou air) qui occupe le côté incident ou est, au contraire, formé par un corps réfringent.

Du côté de l'incidence, il y a une région où la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie donne lieu à des interférences. Ce que nous voulons essayer de comprendre, c'est comment les éléments de probabilité vont traverser cette région d'interférences pour venir les uns dans le faisceau réfléchi, les autres dans le faisceau transmis.

L'onde incidente Ψ_1 est toujours donnée par l'expression (21), mais pour simplifier un peu les calculs, je poserai

ici $a_0 = 1$. Il serait bien facile de rétablir partout dans toutes les formules a_0 et a_0^2 .

Nous écrirons donc :

pour l'onde incidente :

$$\Psi_1 = e^{2\pi i\nu \left[t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} \right]} \quad (27)$$

pour l'onde réfléchie :

$$\Psi_2 = \eta e^{2\pi i\nu \left[t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} \right] + \alpha} \quad (28)$$

Si $\eta = 1$, le miroir est parfait et nous retombons sur le cas étudié plus haut. Si $\eta = 0$ le faisceau est librement transmis sans aucune réflexion; en somme le miroir n'existe pas. Dans le cas intermédiaire $0 < \eta < 1$ la proportion des éléments de probabilité qui subissent la réflexion est η^2 d'après le principe des interférences. Dans la région d'interférences, située au voisinage du miroir du côté de l'incidence, l'onde résultante est :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = ae^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} \quad (29)$$

Pour abrégér, nous poserons :

$$u = \frac{4\pi\nu}{c} z \cos \theta + \alpha.$$

Pour calculer a et φ on se servira des formules (35) et (37) du précédent chapitre et l'on trouvera aisément :

$$a^2 = 1 + \eta^2 + 2\eta \cos u \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{h\nu}{c} \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{a^2} \quad (31)$$

La formule (11) nous donne alors pour les composantes de la vitesse des éléments de probabilité :

$$v_x = c \sin \theta \quad v_y = 0 \quad v_z = c \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{a^2} \quad (32)$$

Le mouvement des éléments de probabilité s'opère donc dans le plan d'incidence, et leur vitesse parallèlement au miroir est la même que si celui-ci était parfaitement réfléchissant. Mais ici la composante v_z n'est plus nulle, elle est fonction périodique de z et l'on en conclut que les trajectoires de la probabilité dans la région d'interférences sont des courbes ondulées analogues à celles de la figure 8. On voit aisément que la pente moyenne de ces courbes ondulées est comprise entre la valeur 0 correspondant au cas $\eta = 1$ déjà traité et la valeur $\text{tg } \theta$ correspondant au cas $\eta = 0$ de la transmission totale.

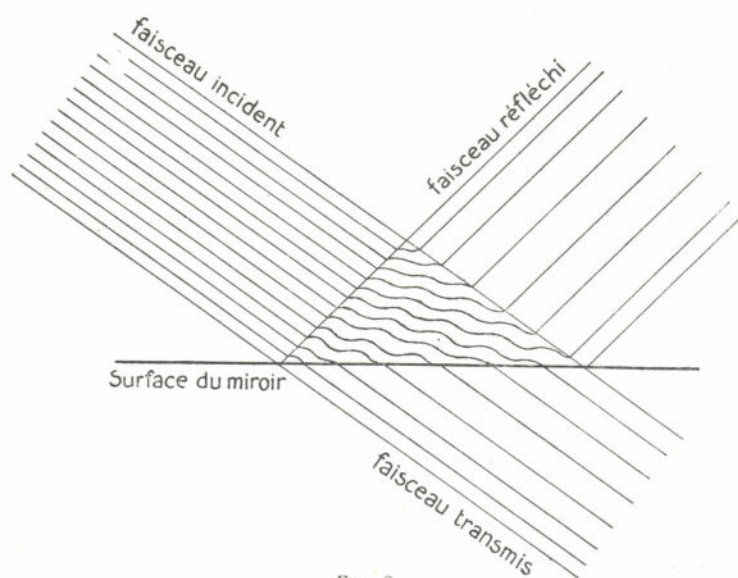


FIG. 8.

Sur la figure 8 on voit bien comment les éléments de probabilité, uniformément répartis dans le faisceau incident, viennent les uns dans le faisceau transmis, les autres dans le faisceau réfléchi, la densité de leur répartition dans ces deux derniers faisceaux étant à nouveau uniforme. Dans la région d'interférences, la densité de la probabilité est donnée par l'expression (30) de a^2 . Il y a donc encore des franges brillantes et des franges obscures parallèles à la surface du miroir, mais les franges obscures ne sont plus

noires car les minima de a^2 sont égaux à $(1 - \eta)^2 > 0$. Il n'y a donc aucune région de la zone d'interférence où il ne passe aucun élément de probabilité. Ces résultats sont presque évidents sur la figure 8, car si les franges obscures parallèles au miroir étaient noires, on ne voit pas comment les éléments de probabilité pourraient parvenir dans le faisceau transmis.

Ici encore il serait bien tentant de se figurer les photons comme des points bien localisés et décrivant les trajectoires de la probabilité. Mais en dehors des difficultés déjà signalées, il s'en présente ici une autre très intéressante. Si nous examinons l'expression (32) de la composante v_x , nous voyons que cette composante est plus grande que $c \cos \theta$ dans les franges obscures : il en résulte que dans ces franges la vitesse v des éléments de probabilité est supérieure à la vitesse c , car on a :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ &= c^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta \left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^2 > c^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Donc, si nous voulions attribuer aux photons le mouvement de la probabilité, nous serions forcés d'attribuer à ces photons une vitesse supérieure à c dans les franges obscures et cela serait bien difficile à concilier avec la théorie de Relativité.

6. — *Superposition de deux ondes planes monochromatiques.* — Considérons une onde lumineuse qui serait formée par la superposition de deux ondes planes monochromatiques se propageant dans la direction des z :

$$\Psi = a_1 e^{2\pi i v_1 \left(t - \frac{z}{c} \right)} + a_2 e^{2\pi i v_2 \left(t - \frac{z}{c} \right)} \quad (34)$$

On peut mettre Ψ sous la forme $ae^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$. On trouve :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi (v_1 - v_2) \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (35)$$

Il y a des maxima et des minima de l'amplitude résultante qui sont disposés à la distance $\frac{c}{v_1 - v_2}$ les uns des autres et se déplacent le long de l'axe des z avec la vitesse c . La probabilité de présence du photon associé doit être égale à a^2 d'après le principe des interférences et présente ces maxima et minima.

Calculons la quantité $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ qui joue le rôle d'énergie pour les éléments de probabilité. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h}{4\pi i} \frac{1}{a^2} \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right] \quad (36)$$

$$= \frac{a_1^2 h v_1 + a_2^2 h v_2 + a_1 a_2 (h v_1 + h v_2) \cos 2\pi (v_1 - v_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)}{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos 2\pi (v_1 - v_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)}$$

Si $v_1 = v_2$, on trouve naturellement pour $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ la valeur constante $h\nu$. Mais dans le cas général $v_1 \neq v_2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est variable d'une façon compliquée. Dans la théorie de l'onde-pilote où l'on cherche à identifier le mouvement du corpuscule avec celui des éléments de probabilité, le corpuscule devrait avoir cette énergie $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ constamment variable. Or, il paraît certain que si l'on envoie l'onde (34) sur un morceau de matière, on pourra obtenir un effet photo-électrique qui correspondra soit au quantum $h\nu_1$, soit au quantum $h\nu_2$. Tout se passera comme si le corpuscule associé à l'onde possédait soit l'énergie $h\nu_1$, soit l'énergie $h\nu_2$, mais non pas l'énergie $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Ainsi, pour obtenir la probabilité de présence du corpuscule, il faut considérer l'amplitude a résultant de la superposition des deux ondes monochromatiques; mais au contraire, pour prévoir les diverses énergies avec lesquelles le corpuscule peut se manifester, il faut considérer non pas la phase résultante φ mais les fréquences des diverses ondes monochromatiques, c'est-à-dire la

décomposition spectrale de l'onde Ψ . Il y a alors plusieurs possibilités (dans l'exemple choisi, il y en a deux), pour la valeur de l'énergie du corpuscule. On ne peut donc plus attribuer comme le fait la théorie de l'onde-pilote une énergie bien définie au corpuscule, mais seulement parler de la probabilité pour qu'il se manifeste avec telle énergie.

Des considérations toutes semblables s'appliqueraient à la quantité de mouvement.

CHAPITRE XI

LA THÉORIE D'HEISENBERG ET DE BOHR

1. — *Le principe de décomposition spectrale.* — Résumons les résultats obtenus jusqu'ici. Nous avons vu qu'il fallait toujours associer au mouvement d'un corpuscule la propagation d'une onde $\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ et qu'un principe essentiel nécessaire pour interpréter les résultats expérimentaux, était le principe des interférences suivant lequel l'intensité résultante $a^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ de l'onde mesure partout et toujours, aussi bien pour la matière que pour la lumière, la probabilité de présence du corpuscule. De plus, nous sommes, parvenus à imaginer un fluide fictif, le fluide de probabilité, dont le mouvement est déterminé par la propagation de l'onde et dont la densité égale à a^2 donne la probabilité de présence, d'après le principe des interférences. Les mouvements des éléments du fluide de probabilité coïncident lorsque les approximations de l'optique géométrique sont valables pour l'étude de l'onde Ψ avec les trajectoires possibles du corpuscule, telles que les définit l'ancienne Dynamique. Il était dès lors tentant de supposer que les corpuscules étaient des points bien définis décrivant les trajectoires de la probabilité, mais cette manière de voir (théorie de l'onde-pilote) s'est révélée à l'examen comme soulevant des difficultés. Le véritable sens de la dualité des ondes et des corpuscules reste donc obscur. Le moment est venu d'exposer la théorie qu'Heisenberg et Bohr ont proposée de cette dualité.

La théorie d'Heisenberg et Bohr repose sur deux principes : d'abord, le principe des interférences que nous connaissons bien maintenant; ensuite, un autre principe, le principe de décomposition spectrale, dont nous avons déjà donné un premier aperçu à la fin du dernier chapitre et que nous allons exposer plus complètement en raisonnant sur le cas du champ nul.

L'onde plane monochromatique correspond au mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule; c'est là le point de départ de la Mécanique ondulatoire. Mais un train d'ondes limité peut être considéré comme une superposition d'ondes planes monochromatiques de la forme :

$$\Psi = \sum_k a_k \Psi_k = \sum_k a_k e^{2\pi i v_k t - \left[\frac{n_k}{c} (z_k x + \beta_k y + \gamma_k z) \right] + \delta_k} \quad (1)$$

les constantes a_k , β_k , γ_k , v_k et n_k étant liées par les relations :

$$a_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1 \quad n_k = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_k^2}} \quad (2)$$

où v_0 est la fréquence propre $\frac{mc^2}{h}$ du corpuscule.

Dès le début du développement de la Mécanique ondulatoire, M. Max Born a proposé de considérer chaque quantité a_k^2 comme donnant la probabilité relative pour que le corpuscule possède l'état de mouvement correspondant à Ψ_k . Ainsi, contrairement à ce qu'admet la théorie de l'onde-pilote, l'onde Ψ ne donnerait pas le mouvement du corpuscule mais seulement la probabilité pour qu'il ait tel ou tel état de mouvement. Avec l'hypothèse de Born, les difficultés signalées à la fin du dernier chapitre et relatives aux effets photoélectriques produits par une onde qui est la superposition de deux ou plusieurs ondes monochromatiques disparaissent d'elles-mêmes. Nous appellerons ce postulat de Born du nom de « principe de décomposition spectrale »; si on l'admet, la définition du corpuscule par son onde associée se trouve affectée d'une double incer-

titude : d'une part, la position du corpuscule est incertaine d'après le principe des interférences, puisqu'il y a une certaine probabilité mesurée par l'intensité résultante a^2 pour qu'on trouve le corpuscule en un point quelconque de la région occupée par le train d'ondes; d'autre part, l'état de mouvement du corpuscule défini par son énergie et sa quantité de mouvement est lui aussi incertain, d'après le principe de décomposition spectrale, puisqu'il y a plusieurs états de mouvement possibles, la probabilité de chacun d'eux étant donnée par le carré de l'amplitude de la composante monochromatique correspondante dans la décomposition spectrale du train d'ondes.

Comment doit-on interpréter cette double incertitude? C'est ce que la théorie d'Heisenberg et de Bohr cherche à expliquer à l'aide d'une analyse subtile et profonde des concepts d'observation et de mesure.

2. — *La théorie d'Heisenberg et Bohr. Les relations d'incertitude.* — Observer un phénomène, c'est nécessairement le troubler au moins dans une certaine mesure. On ne peut, en effet, observer qu'en établissant une interaction entre le phénomène qu'on veut étudier et le milieu ambiant dont fait partie l'observateur lui-même. Si le procédé de mesure trouble relativement très peu le phénomène étudié, la valeur des grandeurs qui caractérisent le phénomène peut être regardée comme bien connue après la mesure, aux erreurs expérimentales près, naturellement. Mais si le procédé de mesure altère beaucoup le phénomène à étudier, alors le résultat de l'observation ne renseigne plus exactement sur l'état existant après la mesure. Cet état est affecté d'une incertitude provenant de l'ignorance où l'on est de la façon dont le procédé de mesure a perturbé le phénomène.

En particulier, il est très possible d'admettre qu'un procédé de mesure permettant de déterminer une grandeur A trouble nécessairement la valeur d'une autre grandeur B, de telle façon que si l'on perfectionne le procédé de mesure pour lui faire fournir une valeur de

plus en plus exacte de A, la valeur de B après la mesure soit de moins en moins bien connue. L'état d'un corpuscule est défini dans les conceptions classiques par huit quantités : $x, y, z, t, p_x, p_y, p_z$ et W qui donnent la position du corpuscule à un certain instant et son état de mouvement. Ces huit quantités forment deux groupes : d'une part, les coordonnées d'espace et de temps : x, y, z, t ; d'autre part, les grandeurs respectivement conjuguées de ces coordonnées : p_x, p_y, p_z, W . Nous allons montrer que si l'on admet le principe des interférences et le principe de décomposition spectrale, tout procédé servant à mesurer l'une des 8 grandeurs altère nécessairement la valeur de la quantité conjuguée, cette altération étant d'autant plus grande que la mesure est faite avec plus de précision. L'indétermination qui en résulte ne doit pas être considérée comme une indétermination *accidentelle* due à l'imperfection de nos procédés de mesure et qui pourrait être évitée par des procédés plus perfectionnés; c'est, au contraire, une indétermination *essentielle* provenant de la perturbation du phénomène étudié par la mesure elle-même et résultant d'une grande loi de la Nature

Pour démontrer la nécessité de cette indétermination quand on admet les deux principes des interférences et de la décomposition spectrale, nous partirons de la remarque suivante : il doit toujours être possible de représenter par un train d'ondes ce qu'une observation nous a appris sur un corpuscule, l'extension spatiale du train d'ondes représentant l'incertitude sur la position du mobile après l'observation et l'étendue du domaine spectral, occupé par les fréquences des ondes sinusoïdales simples dont la superposition forme le train d'ondes correspondant à l'incertitude sur l'état de mouvement.

D'après les idées de base de la Mécanique ondulatoire, l'état de mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule doit être associé à la propagation d'une onde monochromatique plane de fréquence $\nu = \frac{W}{h}$ et de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{|p|}$, W et p étant l'énergie et la quantité de mouve-

ment du corpuscule. Introduisons le vecteur « nombre d'ondes » de l'onde plane monochromatique, vecteur dirigé dans le sens de \vec{p} et égal à $\frac{1}{\lambda}$; nous aurons alors :

$$v = \frac{W}{h} \quad \mathcal{N}_x = \frac{p_x}{h} \quad \mathcal{N}_y = \frac{p_y}{h} \quad \mathcal{N}_z = \frac{p_z}{h} \quad (3)$$

Or, comme cela résulte déjà des calculs du chapitre IV, paragraphe 3, et comme on peut le démontrer d'une façon plus générale, un train d'ondes dont les dimensions dans le sens des trois axes sont δx , δy , δz et dont la durée de passage en un point est δt exige, pour sa représentation mathématique, un ensemble d'ondes planes monochromatiques pour lesquelles la fréquence et les composantes du vecteur nombre d'ondes remplissent pour le moins des intervalles δv , $\delta \mathcal{N}_x$, $\delta \mathcal{N}_y$ et $\delta \mathcal{N}_z$ reliés à δx , δy , δz et δt par les inégalités valables en ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{N}_x \times \delta x &\geq 1 & \delta \mathcal{N}_y \times \delta y &\geq 1 \\ \delta \mathcal{N}_z \times \delta z &\geq 1 & \delta v \times \delta t &\geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Comme nous supposons qu'à chaque onde plane monochromatique correspond un état de mouvement rectiligne et uniforme pour le corpuscule, nous devons regarder les quantités :

$$\begin{aligned} \delta W &= h \delta v & \delta p_x &= h \delta \mathcal{N}_x \\ \delta p_y &= h \delta \mathcal{N}_y & \delta p_z &= h \delta \mathcal{N}_z \end{aligned} \quad (5)$$

comme étant les incertitudes dont sont affectées les valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement. Les relations deviennent donc :

$$\begin{aligned} \delta W \times \delta t &\geq h & \delta p_x \times \delta x &\geq h \\ \delta p_y \times \delta y &\geq h & \delta p_z \times \delta z &\geq h \end{aligned} \quad (6)$$

Ce sont les relations d'incertitude d'Heisenberg. Plus l'incertitude sur l'une des huit grandeurs x , y , z , t , p_x ,

p_y, p_z, W est petite, plus doit être grande en vertu de la signification attribuée à l'onde l'incertitude sur la grandeur conjuguée.

3. — *Signification de l'onde dans la théorie d'Heisenberg et Bohr.* — En résumé, voici comment l'on doit, suivant cette conception d'Heisenberg et de Bohr, se représenter la signification de l'onde Ψ . Supposons qu'à l'époque t_0 une première observation ait été faite qui permette de fixer dans de certaines limites la position et l'état de mouvement du corpuscule; nous admettons (quitte à revenir sur ce point) que l'incertitude sur les grandeurs conjuguées résultant de cette observation satisfait dans le cas le plus favorable aux relations d'Heisenberg (6). Pour représenter les résultats de cette première observation, nous devons constituer un train d'ondes dont l'intensité résultante en chaque point soit égale à la probabilité pour que le corpuscule soit en ce point et dont la composition spectrale indique les probabilités relatives des divers états de mouvement du corpuscule. Pour prévoir autant qu'il est possible ce qui peut résulter de cet état initial imparfaitement connu, nous devons suivre la propagation du train d'ondes et nous rappeler que pendant tout le cours de cette propagation la probabilité de présence du corpuscule est toujours mesurée en chaque point par l'intensité a^2 et que la probabilité de chaque état de mouvement est mesurée par l'intensité de la composante spectrale correspondante. On peut donc prédire que si une seconde observation faite à l'instant t postérieur à t_0 vient nous apporter des renseignements nouveaux sur la position ou l'état de mouvement du corpuscule, il y a telle probabilité pour que le corpuscule soit trouvé dans telle région de l'espace et telle autre probabilité pour qu'il se révèle comme ayant tel état de mouvement. Ces prévisions qui donnent des probabilités et non des certitudes sont les seules que nous puissions obtenir; d'après Bohr et Heisenberg, il est vain de chercher à se représenter le corpuscule comme point décrivant une trajectoire bien définie avec une vitesse bien définie.

Le train d'ondes peut être appelé avec Heisenberg un « paquet de probabilité ». Nous avons vu qu'on peut lui associer un nuage de probabilité, la densité du fluide de probabilité ainsi imaginé étant en chaque point égale à l'intensité a^2 du train d'ondes et mesurant par suite la probabilité de présence. Les éléments du fluide de probabilité décrivent des trajectoires qui dépendent de l'extension initiale du train d'ondes, c'est-à-dire de l'indétermination initiale de la position du corpuscule. Que le mouvement de la probabilité dépende de la connaissance de l'état initial, cela ne soulève aucune difficulté car la probabilité d'un événement dépend toujours de la connaissance plus ou moins exacte que nous avons des états antérieurs.

L'étude de la propagation du train d'ondes nous permet d'annoncer la probabilité des diverses positions possibles du corpuscule à l'instant t . Si à cet instant on fait une nouvelle observation pour préciser la position du corpuscule, elle devra se trouver d'accord avec nos prévisions de probabilité mais, une fois faite, cette observation restreindra, en général, l'incertitude sur la position du corpuscule. Si par exemple à l'instant t , le train d'ondes occupe une région R de l'espace, nous savons avant l'observation que le corpuscule doit se trouver dans cette région R , mais, en général après l'observation, nous saurons qu'il se trouve dans une région R_1 comprise dans R . Pour représenter l'état de nos connaissances après l'observation, il faudra donc faire une « réduction du paquet de probabilité » de façon que le train d'ondes n'occupe plus que la région R_1 . Toute une partie de l'ancien train d'ondes s'évanouit donc brusquement par le seul fait de la nouvelle observation. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, ceci montre bien le caractère abstrait et symbolique de l'onde dans cette conception.

L'ancienne idée du déterminisme des phénomènes physiques se trouve, d'autre part, battue en brèche par cette théorie, car cette idée reposait sur la possibilité de déterminer d'une façon précise les données initiales d'où l'on

pouvait rigoureusement déduire les phénomènes subséquents par les lois rigoureuses de la Dynamique. Le mouvement d'un corpuscule, quand sa position et sa vitesse initiale étaient connues, se trouvait inexorablement fixé. Mais dans la théorie de Bohr et Heisenberg, il devient impossible de déterminer simultanément avec une absolue exactitude la position et la vitesse initiale d'un corpuscule et, par suite, il devient impossible d'affirmer que le mouvement du corpuscule est rigoureusement déterminé, car seules des prévisions de probabilité peuvent être faites à son sujet.

4. — *Le raccord avec l'ancienne Dynamique.* — Il y a néanmoins un grand fait que la nouvelle théorie doit expliquer : pour tous les phénomènes mécaniques à grande échelle, les anciennes conceptions sont parfaitement suffisantes; il est indéniable qu'un déterminisme rigoureux paraît exister à notre échelle pour ces phénomènes. Comment expliquer ce fait? Tout d'abord, il faut remarquer qu'avec les nouvelles idées, il intervient dans la pratique deux sortes d'incertitudes : la première, déjà admise par les théories classiques, est une incertitude pour ainsi dire accidentelle provenant de l'imperfection inévitable de nos méthodes de mesure et qui pourrait en principe être indéfiniment réduite par un perfectionnement indéfini de notre technique expérimentale; la seconde incertitude est une incertitude essentielle et irréductible introduite par les relations d'indétermination (6) d'Heisenberg. Or, dans les cas où l'ancienne conception de la Mécanique se vérifie bien, l'incertitude accidentelle est beaucoup plus grande que l'incertitude essentielle et la masque complètement. Il en résulte qu'alors tout se passe en pratique comme si l'incertitude d'Heisenberg n'existait pas; tout se passe *aux erreurs expérimentales près* comme si les conceptions déterministes de l'ancienne Dynamique étaient exactes. Mais si une technique expérimentale indéfiniment perfectionnée permettait de serrer de plus en plus près la valeur des grandeurs dynamiques, il viendrait un moment où l'on se heurterait à l'incertitude d'Heisenberg.

Eclaircissons ceci à l'aide d'un exemple numérique. Considérons le mouvement le long d'un axe ox d'une petite bille pesant un milligramme, dont nous négligeons les dimensions. Pour déterminer son état initial, nous devons mesurer la position du centre de la bille et sa vitesse. Supposons que nous parvenions à déterminer l'abscisse du centre à un millième de millimètre près, ce qui serait une belle précision. La relation d'Heisenberg nous affirme que nous ne pourrons pas connaître la vitesse de la bille à cet instant avec une incertitude moindre que :

$$\delta v = \frac{h}{m\delta x} = \frac{6,55.10^{-27}}{10^{-3}.10^{-4}} = 6,55.10^{-20} \text{ cm/sec.}$$

Il est bien évident qu'en pratique aucune méthode de mesure ne nous permettra d'atteindre une pareille précision sur la valeur de la vitesse; l'incertitude d'Heisenberg sera donc entièrement masquée par l'erreur expérimentale et tout se passera comme si cette incertitude n'existait pas.

Le raccord mathématique entre la nouvelle Mécanique conçue à la manière de Bohr et Heisenberg et l'ancienne Mécanique se fait d'ailleurs très élégamment au moyen du théorème d'Ehrenfest (chapitre IX, paragraphe 3). Nous avons vu que l'ancienne Mécanique correspond au cas où l'optique géométrique est valable pour la propagation de l'onde associée. Or, l'optique géométrique est valable quand les conditions de propagation ne varient pas sensiblement à l'échelle de la longueur d'onde. Comme la longueur d'onde se trouve être dans les cas usuels beaucoup plus petite que tout ce que nous savons mesurer directement, nous pouvons imaginer un train d'ondes qui occupe un domaine dont les dimensions contiennent un grand nombre de longueurs d'ondes et qui, néanmoins, peut être considéré comme ponctuel à notre échelle. Le train d'ondes pourra donc être représenté par un groupe d'ondes se déplaçant sensiblement avec la vitesse de groupe de Rayleigh; il formera un petit globule de probabilité dont les dimensions seront trop petites pour que nous puissions les mesurer.

Ecrivons alors les équations (23 bis), du chapitre IX, qui expriment le théorème d'Ehrenfest :

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x \quad m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \bar{f}_y \quad m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \bar{f}_z \quad (7)$$

En raison des dimensions extrêmement petites du train d'ondes, on peut le confondre avec son centre de gravité et remplacer les valeurs moyennes \bar{f}_x \bar{f}_y \bar{f}_z par les valeurs f_x f_y f_z des composantes de la force au centre de gravité. Le train d'ondes peut, par suite, être considéré comme un point se déplaçant conformément aux équations :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_x \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_y \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = f_z \quad (8)$$

Le globule de probabilité se déplace donc en bloc, comme le ferait un point matériel dans le champ de force donné d'après les lois de la Dynamique ancienne. Bien entendu la position du corpuscule à l'intérieur du train d'ondes est incertaine, mais les dimensions du train d'ondes étant inférieures à ce que nous pouvons mesurer, tout se passe *en pratique* comme si le corpuscule avait à chaque instant une position bien définie et se déplaçait conformément aux équations classiques de Newton.

On voit avec quelle élégance le théorème d'Ehrenfest permet de faire la jonction entre l'ancienne Mécanique et la théorie d'Heisenberg et Bohr.

5. — *Objection d'Einstein. Le corpuscule est-il non localisable ou bien non localisé?* — Une conception aussi nouvelle que celle d'Heisenberg et Bohr ne manque pas de soulever quelques objections. Nous allons en exposer une qui a été développée par M. Einstein au Congrès Solvay de Bruxelles, en octobre 1927. Supposons un corpuscule et l'onde plane monochromatique associée tombant normalement sur un écran percé d'un trou circulaire;

derrière l'écran est placé un film photographique en forme d'hémisphère de grand rayon (fig. 9) :

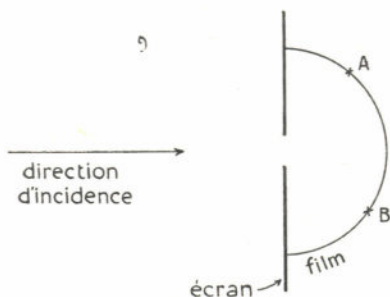


FIG. 9.



Si le trou a des dimensions assez petites, l'onde va se diffracter en le traversant et va s'étendre dans toutes les directions à droite de l'écran. Dans la conception d'Heisenberg et Bohr, il y a donc une certaine probabilité pour que le corpuscule se manifeste par un effet photographique en un point A quelconque du film hémisphérique. Mais s'il se produit à l'instant t un effet photographique au point A du film, il ne peut se produire aucun autre effet photographique en aucun autre point du film puisque, par hypothèse, il n'y a qu'un seul corpuscule incident. Or, avec nos idées habituelles d'espace et de temps (même sous la forme relativiste), il est impossible de comprendre comment le fait qu'un effet photographique s'est produit en A empêche instantanément la production d'un effet en tout autre point B du film, à moins d'admettre que le corpuscule est en réalité localisé dans l'espace et occupe à chaque instant un certain point bien défini dans l'onde associée. Toute autre conception paraît être inconciliable avec l'idée que les phénomènes physiques peuvent être entièrement représentés dans le cadre de l'espace et du temps ou même de l'espace-temps Einsteinien.

Le raisonnement très intéressant et très simple de M. Einstein montre clairement que nous devons adopter l'une ou l'autre des deux attitudes suivantes que je désigne par A et par B.

A. — Nous conservons l'idée que le corpuscule est bien localisé à chaque instant dans l'espace, que par suite il a une trajectoire et une vitesse. Nous devons alors exprimer les idées de Bohr et Heisenberg sous la forme suivante : bien que le corpuscule ait à chaque instant une position et une vitesse bien définies, une grande loi de la Nature qui s'exprime par les relations (6) d'Heisenberg nous empêche de pouvoir simultanément déterminer avec exactitude cette position et cet état de mouvement; pour cette raison, nous ne pouvons atteindre que des énoncés de probabilité au sujet des positions et des états de mouvement futurs du corpuscule. Dans cette manière de voir, il y a donc non pas indétermination réelle, mais simple incertitude imposée d'ailleurs par la nature même des choses. Nous ne pourrions pas affirmer qu'il y a un déterminisme rigoureux du mouvement des corpuscules puisque nous ne parvenons jamais à préciser complètement ce mouvement, mais nous ne pourrions non plus nier ce déterminisme.

B. — Une opinion beaucoup plus radicale qui paraît être celle de M. Bohr et de beaucoup d'autres physiciens éminents consiste, au contraire, à penser que le corpuscule associé à un train d'ondes étendu n'est pas réellement localisé dans l'espace et dans le temps : il serait, en un certain sens, présent dans toute l'étendue du train d'ondes. Pour M. Bohr les corpuscules sont, en effet, « unsharply defined individuals within finite space-time regions ». Dans l'exemple d'Einstein, le corpuscule serait en quelque sorte répandu à l'état virtuel dans toute la région occupée par le train d'ondes diffracté; au moment où se produit l'effet photographique en A, le corpuscule se condenserait, pour ainsi dire en ce point, pour y produire un effet observable. Aucun mécanisme en accord avec notre notion ordinaire d'espace-temps ne peut, semble-t-il, nous expliquer cette contraction instantanée; quand on adopte l'opinion B, on doit dire que le cadre de l'espace-temps est insuffisant pour l'interprétation complète des phénomènes naturels.

De plus, l'effet produit par le corpuscule obéit toujours à la loi de conservation de l'énergie; si, par exemple, le

corpuscule est un photon, l'effet photoélectrique produit en A vérifiera la loi photoélectrique d'Einstein. C'est cette faculté du corpuscule de se condenser en un point en y produisant un effet conforme aux lois causales de conservation que M. Bohr a exprimée en disant : « The individuality of the particles transcending the space-time description meets the claim of causality ».

Au moment où le corpuscule entre en relations avec le milieu environnant pour produire un phénomène observable, il fait, dans la conception B, une sorte de choix entre plusieurs possibilités. Considérons la réflexion sur un miroir imparfaitement réfléchissant M (fig. 10).

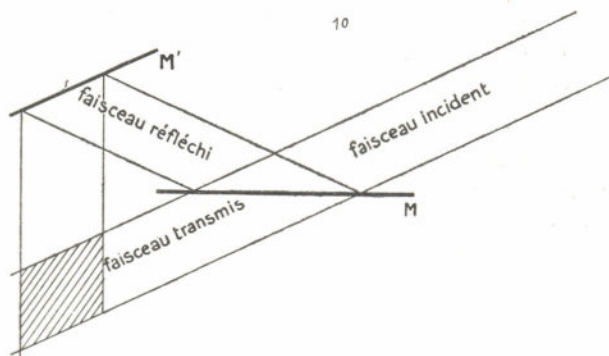


FIG. 10.

L'onde incidente se partage en une onde réfléchie et une onde transmise. On ne doit pas dire que le corpuscule en arrivant sur le miroir fait un choix entre l'onde réfléchie et l'onde transmise, car l'arrivée du corpuscule sur le miroir n'est pas un phénomène observable. Le faisceau transmis et le faisceau réfléchi existent tous les deux jusqu'au moment où le corpuscule se manifeste dans l'un ou dans l'autre par un phénomène observable; à ce moment-là seulement s'opère le choix car, suivant une remarque d'Heisenberg, tant qu'aucune manifestation du corpuscule ne s'est produite, on peut obtenir des interférences dans la région ombrée de la figure 10 en renvoyant

à l'aide d'un miroir M' le faisceau réfléchi sur le faisceau transmis, ce qui prouve la nécessité de considérer les deux faisceaux.

6. — *Conclusion.* — Telle est dans ses grandes lignes la théorie de Bohr et Heisenberg sur la nature et le rapport réciproque des corpuscules et des ondes. Cette théorie compte certainement bien des difficultés et des obscurités. En particulier, on n'a pas encore pu expliquer d'une façon satisfaisante comment elle peut rendre compte des expériences de Geiger et Bothe et de celles de Compton et Simon qui ont vérifié l'exactitude de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans les rencontres individuelles entre photons et électrons.

On doit peut-être espérer que l'introduction de quelque idée nouvelle permettra de trouver une interprétation du dualisme des ondes et des corpuscules plus claire que celle proposée par Bohr et Heisenberg. Néanmoins, il paraît certain qu'il y a quelque chose de fondamental dans les relations d'incertitude.

CHAPITRE XII

LES POSSIBILITÉS DE MESURE ET LES RELATIONS D'HEISENBERG

1. — *Les procédés de mesure et les relations d'Heisenberg.* — Dans la leçon précédente nous avons constamment admis qu'aucune observation n'était susceptible de nous permettre la détermination simultanée d'une coordonnée et de son moment conjuguée avec une précision supérieure à celle qu'expriment les relations d'incertitude d'Heisenberg. Il nous faut maintenant vérifier cette affirmation en critiquant les méthodes de mesure dont nous disposons, comme Heisenberg l'a fait le premier.

Raisonnons sur un corpuscule matériel, un électron par exemple; pour déterminer sa position avec une grande exactitude, nous n'avons qu'un moyen : employer des méthodes optiques, mais ces méthodes optiques ne permettent de mesurer une coordonnée qu'avec une approximation au plus de l'ordre de la longueur d'onde. Pour augmenter la précision de la mesure des coordonnées du corpuscule, nous sommes donc amenés à diminuer de plus en plus la longueur d'onde, mais alors le corpuscule subit un effet Compton de plus en plus accentué, car l'énergie des photons incidents est de plus en plus grande; la quantité de mouvement du corpuscule est de plus en plus altérée par la mesure de sa position. Si, inversement, on se propose de mesurer la vitesse et la quantité de mouvement, on pourra employer l'effet Doppler, mais cet effet, nous le verrons plus loin, est toujours accompagné d'un effet

Compton qui modifie la vitesse; pour réduire l'importance de l'effet Compton, on est amené à employer une grande longueur d'onde, mais alors la position du corpuscule au moment de la mesure est mal définie.

2. — *Le microscope d'Heisenberg.* — Heisenberg a donné une première illustration de ces considérations générales en imaginant qu'on examine un électron qui se déplace sur le porte-objet d'un microscope éclairé par en bas, à l'aide d'une lumière monochromatique de fréquence ν (fig. 11).

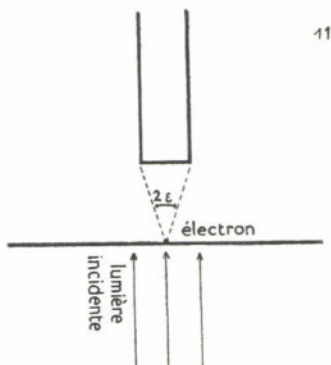


FIG. 11.

Quand l'électron diffusera un photon, une onde divergente entrera dans le microscope; une théorie bien connue de l'optique classique nous apprend que l'angle 2ε sous lequel on voit l'objectif du porte-objet est petit, la mesure d'une longueur dans le plan du porte-objet ne peut se faire qu'avec une incertitude au moins égale à $\frac{\lambda}{2 \sin \varepsilon}$ soit sensiblement $\frac{\lambda}{2\varepsilon}$ (formule du pouvoir séparateur).

Prenons pour axe des y la direction de l'axe du microscope (direction de la lumière incidente) et, pour axe des x la direction de la vitesse initiale de l'électron dans le plan du porte-objet. La mesure ne pourra faire connaître la position de l'électron sur l'axe des x au moment de la diffusion qu'avec une incertitude au moins égale à $\delta x = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$

Avant la diffusion, le photon possède l'énergie $h\nu$ et la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$ dirigée dans le sens oy ; l'électron a une vitesse \vec{v} dirigée suivant l'axe des x et, si v est assez petit devant c , sa quantité de mouvement est $m\vec{v}$ et son énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$. La diffusion modifie par effet Compton la fréquence du photon et la vitesse de l'électron. Après la diffusion, le photon a la fréquence ν' , l'énergie $h\nu'$ et la quantité de mouvement $\frac{h\nu'}{c}$ faisant avec l'axe du microscope un très petit angle α nécessairement inférieur à ϵ puisque le photon diffusé doit traverser l'objectif; quant à l'électron, sa vitesse est devenue \vec{v}' , sa quantité de mouvement $m\vec{v}'$ et son énergie $\frac{1}{2}mv'^2$. Suivant le procédé de Compton, nous allons écrire qu'il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pendant le processus de diffusion; en négligeant α^2 devant l'unité, il vient :

$$\left. \begin{aligned} h\nu + \frac{1}{2}mv_x^2 &= h\nu' + \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) \\ \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c} + mv_y' \\ mv_x &= \alpha \frac{h\nu'}{c} + mv_x' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En substituant dans la première équation la valeur de $\frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2)$ tirée des deux dernières, il vient :

$$\frac{h^2}{mc^2}(\nu - \nu')^2 - 2h(\nu - \nu') - 2\alpha \frac{v}{c}h\nu' + \alpha^2 \frac{h^2\nu'^2}{mc^2} = 0. \quad (2)$$

L'équation (2) montre que ν ne diffère de ν' que par des termes de l'ordre de α ; donc, si on s'en tient au premier ordre en α , la dernière relation (1) peut s'écrire :

$$mv_x - mv_x' = p_x - p_x' = \alpha \frac{h\nu}{c} = \alpha \frac{h}{\lambda} \quad (3)$$

Comme on ignore la valeur exacte de α qui peut varier de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, il y a sur la valeur de p_x après diffusion une incertitude :

$$\delta p_x = 2\varepsilon \frac{h}{\lambda}. \quad (4)$$

On a donc dans les conditions les plus favorables :

$$\delta x \times \delta p_x = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \times 2\varepsilon \frac{h}{\lambda} = h. \quad (5)$$

C'est bien la relation d'incertitude d'Heisenberg.

3. — Mesure de la vitesse d'un électron au moyen de l'effet Doppler. — Etudions maintenant la mesure de la vitesse d'un électron par l'effet Doppler. Supposons qu'un électron se déplace avec une vitesse v dans la direction positive d'un axe ox . On envoie sur cet électron un train d'ondes lumineuses de longueur d'onde moyenne λ qui se propage le long de ox dans le sens négatif. S'il y a diffusion, le photon diffusé pourra subir un renversement de sa vitesse et être renvoyé dans le sens des x positifs. Supposons que ceci se produise et que nous mesurions exactement la fréquence ν' de la radiation diffusée. Pour simplifier, nous supposons la vitesse de l'électron très inférieure à celle de la lumière. La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement au moment de la diffusion nous donne :

$$\left. \begin{aligned} hv + \frac{1}{2} mv^2 &= h\nu' + \frac{1}{2} mv'^2 \\ mv - \frac{hv}{c} &= mv' + \frac{h\nu'}{c} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ν' étant la vitesse de l'électron après la diffusion. En éliminant ν' entre les deux équations, il vient :

$$h(v - \nu') = \frac{1}{2m} \left[\frac{h^2}{c^2} (v + \nu')^2 - 2mv \frac{h}{c} (v + \nu') \right]. \quad (7)$$

Dans le processus de diffusion, la fréquence est très peu

modifiée; on peut donc poser $v' = v - \varepsilon$ et négliger $\varepsilon \frac{v}{c}$ et ε^2 . Il reste alors :

$$\varepsilon \left(1 + 2 \frac{hv}{mc^2} \right) = 2 \frac{hv^2}{mc^2} - 2v \frac{v}{c}. \quad (8)$$

Dans les cas usuels, le quotient $\frac{hv}{mc^2}$ est très petit car pour la lumière, hv est de l'ordre de 10^{-13} et mc^2 est voisin de $8 \cdot 10^{-7}$. Nous pouvons négliger $2 \frac{hv}{mc^2}$ devant l'unité dans le premier membre de (8) et poser :

$$v' = v - \varepsilon = v \left[1 - 2 \frac{hv}{mc^2} + 2 \frac{v}{c} \right]. \quad (9)$$

Le terme $2 \frac{v}{c}$ correspond à l'effet Doppler : il existerait même si h était infiniment petit. Le terme $-2 \frac{hv}{mc^2}$ exprime l'effet Compton pour le cas envisagé. Les deux effets se superposent. Comme l'effet Compton trouble la vitesse de l'électron, nous devons chercher à la rendre négligeable et prendre la longueur d'onde assez grande pour que le rapport $\frac{\frac{v}{c}}{\frac{hv}{mc^2}} = \frac{mv}{h} \lambda$ soit très grand. Alors l'effet Doppler sera seul notable et l'on pourra poser :

$$v' = v \left[1 + 2 \frac{v}{c} \right] \quad \text{ou} \quad \lambda' = \lambda \left(1 - 2 \frac{v}{c} \right). \quad (10)$$

Mais le train d'ondes incident a forcément une longueur finie l ; par suite, il n'est pas rigoureusement monochromatique et si nous introduisons le nombre d'ondes $\frac{1}{\lambda}$, ce nombre d'ondes variera pour les diverses ondes monochromatiques du train de la quantité $\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)$ avec :

$$\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \simeq \frac{1}{l} \quad (11)$$

le signe \simeq voulant dire « de l'ordre de ».

Donc, même en mesurant λ' sans aucune erreur expérimentale, il restera encore une incertitude sur la valeur de v car, d'après (10), celle-ci est donnée par :

$$v = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \quad (12)$$

et l'incertitude sur λ entraîne une incertitude sur v égale à :

$$|\delta v| = \frac{c}{2} \lambda' \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right). \quad (13)$$

L'incertitude sur la quantité de mouvement de l'électron après la mesure est donc sensiblement :

$$\delta p_x = \frac{mc\lambda}{2l}. \quad (14)$$

Mais la valeur simultanée de la coordonnée est, elle aussi, affectée d'une incertitude. En effet, l'effet Compton bien que faible, par hypothèse, devant l'effet Doppler, existe néanmoins et provoque une variation de la vitesse de l'électron égale, d'après la deuxième équation (6), à :

$$v' - v = - \frac{h(v + v')}{mc} = - \frac{2h}{m\lambda} \text{ sensiblement.} \quad (15)$$

Supposons la position du corpuscule au début de la mesure bien connue : c'est le cas le plus favorable. Il subsistera une cause d'incertitude sur la position après la mesure due au fait suivant : on ne sait pas à quel instant de la durée de passage $\frac{l}{c}$ du train d'ondes sur l'électron se produit la diffusion et suivant que cet instant sera au début ou à la fin de cette durée de passage, il en résultera une différence $(v - v') \frac{l}{c} = \frac{2h}{m\lambda} \frac{l}{c}$ sur la position de l'électron après la mesure. La coordonnée de l'électron à la fin de la mesure est donc affectée d'une incertitude :

$$\delta x = \frac{2h}{m\lambda} \cdot \frac{l}{c} \quad (16)$$

et, en combinant (16) avec (14), il vient dans le cas le plus favorable :

$$\delta x \cdot \delta p_x = \frac{mc\lambda}{2l} \cdot \frac{2h}{m\lambda} \frac{l}{c} = h. \quad (17)$$

Nous retombons toujours sur la relation d'Heisenberg.

4. — *Passage d'un corpuscule à travers un diaphragme.*

— Comme autre exemple, nous prendrons la détermination de la position d'un corpuscule, par exemple d'un photon, grâce à son passage au travers d'une ouverture percée dans un écran plan. Pour définir les coordonnées du corpuscule dans le plan de l'écran, on sera amené à prendre une ouverture très petite, mais plus on prend une petite ouverture, plus on augmente les phénomènes de diffraction qui accompagnent, suivant les idées de la Mécanique ondulatoire, le passage du corpuscule à travers l'ouverture. D'autre part, pour déterminer l'instant du passage du corpuscule dans le plan de l'écran, on emploiera un volet mobile qui permettra de découvrir le trou percé dans l'écran pendant un temps très court; plus on manœuvrera rapidement le volet, mieux l'époque du passage du corpuscule sera déterminée, mais en même temps, le train d'ondes associé se trouvant raccourci en proportion, la monochromaticité de ce train d'ondes sera de plus en plus altérée et, par suite, l'énergie du corpuscule sera de moins en moins bien définie.

Nous allons développer les calculs dans le cas simple où le corpuscule incident tombe sur l'écran dans la direction normale et où l'ouverture percée dans l'écran est un rectangle de côté $2a$ et $2b$.

Prenons le centre de l'ouverture comme origine des coordonnées, l'axe des x parallèle au grand côté $2a$, l'axe des y parallèle au petit côté $2b$, l'axe des z perpendiculaire à l'écran du côté opposé à l'onde incidente (fig. 12). Soit M de coordonnées X, Y, O un point de l'ouverture et $dXdY$ un petit rectangle entourant ce point. Calculons, d'après le principe d'Huygens, la valeur de l'onde élémentaire envoyée par le petit rectangle $dXdY$ dans une direction α, β, γ ,

faisant un très petit angle avec l'axe des z . Si $x y z$ désignent les coordonnées d'un point très éloigné dans la direction α, β, γ , l'onde élémentaire en question a pour expression :

$$d\Psi_{\alpha\beta} = K dXdY \cos 2\pi \left(vt - \frac{\alpha(x - X) + \beta(y - Y) + z}{\lambda} \right) \quad (18)$$

où K est un coefficient qui varie avec α, β, γ mais beaucoup plus lentement que le cosinus; dans la formule (18) on a

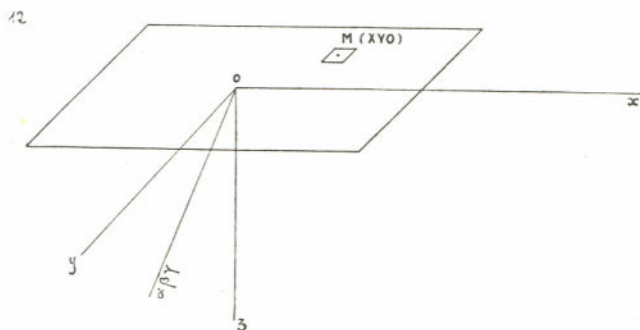


FIG. 12.

confondu γ avec l'unité. L'onde résultante envoyée dans la direction α, β, γ pour tous les points de l'ouverture est :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \iint d\Psi_{\alpha\beta} = A \cos 2\pi \left(vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) + B \sin 2\pi \left(vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) \quad (19)$$

avec :

$$A = K \iint dXdY \cos 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}; \quad (20)$$

$$B = -K \iint dXdY \sin 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}$$

B est nul parce que dans l'intégrale deux éléments de surface symétriques par rapport à O donnent des contri-

butions égales et contraires. Dans A, nous pouvons poser :

$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{aX + \beta Y}{\lambda} &= \cos 2\pi \frac{aX}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} \\ &- \sin 2\pi \frac{aX}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} \end{aligned} \quad (21)$$

et l'intégrale du produit de sinus est encore nulle. Il reste donc :

$$\begin{aligned} A &= 4K \int_0^a dX \cos 2\pi \frac{aX}{\lambda} \int_0^b dY \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} \\ &= \frac{K\lambda^2}{\pi^2 a\beta} \sin 2\pi \frac{aa}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta b}{\lambda}. \end{aligned} \quad (22)$$

D'où :

$$\Psi_{a\beta} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2 a\beta} \sin 2\pi \frac{aa}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta b}{\lambda} \cos 2\pi \left(vt - \frac{ax + \beta y + z}{\lambda} \right) \quad (23)$$

$\Psi_{a\beta}$ est donc nul dans les directions telles que $2\pi \frac{aa}{\lambda} = k\pi$ (k entier) et que $2\pi \frac{\beta b}{\lambda} = k\pi$, c'est-à-dire dans les directions pour lesquelles on a, soit $a = \frac{k\lambda}{2a}$, soit $\beta = \frac{\lambda}{2b}$. $\Psi_{a\beta}$ est, au contraire, maximum dans les directions pour lesquelles on a :

$$\text{soit } a = (2k + 1) \frac{\lambda}{2a}, \quad \text{soit } \beta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2b}.$$

On obtient ainsi ce qu'on nomme un phénomène de diffraction localisé à l'infini. Pour l'observer, on placera par exemple une lunette dont l'axe optique coïncidera avec l'axe oz . S'il n'y avait pas diffraction, on observerait seulement une image de l'ouverture rectangulaire située dans le plan focal de la lunette sur l'axe optique. Mais à cause de l'existence d'ondes planes monochromatiques inclinées sur l'axe optique, on obtient aussi une série d'autres images correspondant aux maxima de $\Psi_{a\beta}$. L'état de ces images décroît rapidement quand l'ordre k s'élève.

En résumé, l'onde plane qui tombe sur l'écran est de la forme :

$$\Psi = a \cos 2\pi \left(vt - \frac{z}{\lambda} \right). \quad (24)$$

Le passage à travers l'ouverture rectangulaire la transforme en un groupe d'ondes planes peu inclinées sur l'axe des z et de la forme :

$$\Psi = \sum a(\alpha, \beta) \cos 2\pi \left(vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) \quad (25)$$

les amplitudes partielles $a(\alpha, \beta)$ présentant en fonction de α et de β des maxima et des minima successifs. Comme l'intensité des ordres successifs diminue rapidement, on voit que l'extension du groupe par rapport à la variable α est mesurée par :

$$\delta\alpha = k_1 \frac{\lambda}{2a} \geq \frac{\lambda}{2a} \quad (26)$$

k_1 désignant un nombre entier petit qui correspond à l'ordre de diffraction le plus élevé dont l'intensité est sensible. De même, l'extension du groupe par rapport à β sera :

$$\delta\beta = k_2 \frac{\lambda}{2b} \geq \frac{\lambda}{2b}. \quad (27)$$

Si $\vec{\mathcal{N}}$ désigne le vecteur « nombre d'ondes » de l'onde monochromatique caractérisée par les angles α et β , on a :

$$\mathcal{N}_x = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \mathcal{N}_y = \frac{\beta}{\lambda} \quad \mathcal{N}_z = \frac{1}{\lambda}. \quad (28)$$

Les variations maxima de \mathcal{N}_x et de \mathcal{N}_y dans le groupe d'ondes après le passage à travers l'écran sont :

$$\delta\mathcal{N}_x = \frac{\delta\alpha}{\lambda} = \frac{k_1}{2a} \quad \delta\mathcal{N}_y = \frac{\delta\beta}{\lambda} = \frac{k_2}{2a}. \quad (29)$$

On a donc en ordre de grandeur :

$$\delta\mathcal{N}_x \geq \frac{1}{2a} \quad \delta\mathcal{N}_y \geq \frac{1}{2b}. \quad (30)$$

Or, la position du corpuscule lors de son passage dans l'ouverture rectangulaire est définie avec une incertitude δx égale à $2a$ et une incertitude δy égale à $2b$. Nous avons donc en ordre de grandeur :

$$\delta \mathcal{U}_x \cdot \delta x \geq 1 \quad \delta \mathcal{U}_y \cdot \delta y \geq 1 \quad (31)$$

D'après le principe de décomposition spectrale, les incertitudes sur les composantes p_x et p_y de la quantité de mouvement sont reliées aux incertitudes $\delta \mathcal{U}_x$ et $\delta \mathcal{U}_y$ par les relations :

$$\delta p_x = h \delta \mathcal{U}_x \quad \delta p_y = h \delta \mathcal{U}_y \quad (32)$$

et (31) prend la forme des relations d'Heisenberg :

$$\delta p_x \cdot \delta x \geq h \quad \delta p_y \cdot \delta y \geq h. \quad (33)$$

D'autre part, si nous voulons déterminer la coordonnée z du corpuscule et le temps t de son passage à travers l'écran, nous devons employer un volet mobile comme cela a été expliqué plus haut. Soit τ le temps pendant lequel le volet a été enlevé. L'incertitude sur t est évidemment égale à τ , celle de z est $U\tau$, U étant la vitesse de groupe des ondes qui, nous le savons, est égale à celle du corpuscule. Donc :

$$\delta t = \tau \quad \delta z = U\tau. \quad (34)$$

Mais en n'ouvrant l'ouverture que pendant le temps τ , nous ne laissons passer à travers l'ouverture qu'un train d'ondes limité et ce train d'ondes est composé d'ondes monochromatiques occupant un intervalle spectral au moins de l'ordre de $\frac{1}{\tau}$. L'intervalle correspondant en longueur

d'onde est tel que $\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial \nu} \delta \nu$ soit de l'ordre de $\frac{1}{U\tau}$ car $\frac{1}{U} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial \nu}$ par définition. On a donc :

$$\delta \nu \geq \frac{1}{\tau} \quad \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \geq \frac{1}{U\tau}. \quad (35)$$

Or, d'après le principe de décomposition spectrale, l'incertitude sur l'énergie finale du corpuscule est $h\delta\nu$ et l'incertitude sur la valeur finale de la composante p_z de sa quantité de mouvement est $h\delta\mathcal{N}_z = h\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ d'après (28).

On a donc :

$$\delta W \cdot \delta t \geq h \quad \delta p_z \cdot \delta z \geq h. \quad (36)$$

Ce sont les deux autres relations d'Heisenberg.

5. — *Remarque sur la mesure de la vitesse.* — Nous venons de constater sur quelques exemples que les procédés de mesure dont nous pouvons faire usage conduisent tous aux relations d'incertitude d'Heisenberg. On pourrait cependant être tenté de faire le raisonnement suivant. Il est possible de faire à un instant t_1 une expérience montrant que le corpuscule est situé dans le voisinage immédiat d'un point A de l'espace, puis de faire à une époque postérieure t_2 une autre expérience montrant que le corpuscule se trouve alors au voisinage immédiat d'un autre point B de l'espace. Si le temps $t_2 - t_1$ est suffisamment long, on aura une très bonne détermination de la vitesse en prenant :

$$v = \frac{\overline{AB}}{t_2 - t_1} \quad (37)$$

et la mesure de la quantité de mouvement en v ne paraît pas affectée de cette façon par l'incertitude d'Heisenberg.

Mais nous devons d'abord remarquer que si l'on recommence la même mesure de la vitesse exactement dans les mêmes conditions, on obtiendra chaque fois un résultat différent. En effet, comme cela résultera rigoureusement des calculs du prochain chapitre, le train d'ondes de très petites dimensions qui correspond au temps t_1 à la localisation du corpuscule près du point A, par la première expérience, s'étale pendant sa propagation et occupe une grande étendue au bout du temps très long $t_2 - t_1$; au moment de la seconde expérience, il y a, d'après le principe

des interférences, une grande région de l'espace où l'on peut trouver le corpuscule, et une série d'expériences identiques fourniraient une série de points B différents.

De plus, et ceci est un point essentiel, la vitesse v donnée par (37) ne correspond qu'au mouvement entre l'instant t_1 et l'instant t_2 ; on ne peut aucunement la considérer comme la vitesse dont est animé le corpuscule après la deuxième expérience, puisque cette deuxième expérience, en localisant le corpuscule près du point B, trouble entièrement son mouvement. La vitesse v n'est pas du tout la vitesse initiale du corpuscule après la seconde observation : par suite, elle ne peut servir à aucune prévision de ce qui se passera après l'instant t_2 . Nous ne sommes pas parvenus à l'aide de nos deux mesures de position à déterminer simultanément la position et la quantité de mouvement du mobile : la première observation nous permet bien de localiser le corpuscule en A au temps t_1 , mais elle ne nous donne aucun renseignement sur la quantité de mouvement à cet instant; la deuxième observation nous permet de localiser le corpuscule en B au temps t_2 et de définir une vitesse v avec laquelle le corpuscule se serait transporté de A en B, mais la quantité de mouvement mv n'est pas celle que possède le mobile après l'observation. On peut dire, si l'on veut, que le corpuscule a été de A en B avec la vitesse v , mais cela ne permet aucunement de prévoir exactement le mouvement du corpuscule dans l'intervalle de temps $t_2 - t_1$, comme prétendait le faire l'ancienne Dynamique déterministe, puisque v n'a une valeur bien définie qu'après la fin du phénomène à prévoir.

Dans le prochain chapitre, nous étudierons par le calcul la méthode de mesure de la vitesse dont nous venons de parler.



CHAPITRE XIII

PROPAGATION D'UN TRAIN D'ONDES Ψ EN L'ABSENCE DU CHAMP ET DANS UN CHAMP UNIFORME

1. — *Solution rigoureuse de l'équation de propagation en l'absence de champ.* — Nous allons chercher à étudier rigoureusement la propagation d'un train d'ondes Ψ en l'absence de champ; nous nous contenterons des équations non relativistes. L'équation dont nous devons partir est :

$$\Delta\Psi = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Cette équation a la même forme que l'équation classique de la propagation de la chaleur, mais avec un coefficient de conductibilité calorifique imaginaire. On peut employer pour la résoudre une méthode tout à fait analogue à une méthode qui sert à la résolution de l'équation de la chaleur.

L'équation (1) étant du premier ordre par rapport au temps, pour déterminer l'intégrale que l'on doit choisir, il faut connaître la valeur de la fonction $\Psi(x, y, z, t)$ à un instant initial pris comme origine des temps. Le problème à résoudre est donc : connaissant la fonction $\Psi(x, y, z, 0)$, trouver $\Psi(x, y, z, t)$. Nous poserons $\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$. La méthode, pour résoudre le problème, consiste à déterminer une « fonction de transformation » $T(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t)$ de deux séries de variables x, y, z et x_0, y_0, z_0 et du temps, telle que l'on ait :

$$\Psi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y_0, z_0) T(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (2)$$

[Kennard, Heisenberg]. Pour cela il faut que deux conditions soient réalisées :

1° La fonction $\Psi(x, y, z, t)$ définie par (2) doit satisfaire à l'équation de propagation (1); ceci exige que la fonction T considérée comme fonction de $xyzt$ satisfasse elle-même à l'équation (1);

2° La fonction Ψ définie par (2) doit se réduire à $f(x, y, z)$ pour $t = 0$.

Nous allons commencer par chercher une fonction T qui soit solution de l'équation de propagation. Nous avons vu en étudiant le mouvement classique d'un corpuscule dans un champ nul que la fonction :

$$S(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) \\ = -\frac{m}{2t} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \quad (3)$$

dépendant des trois coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 , est une intégrale complète de l'équation de Jacobi et permet, par suite, de calculer le mouvement qui « transforme » les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 à l'instant 0 en les coordonnées x, y, z à l'instant t . Nous pouvons donc nous attendre à ce que cette fonction S joue ici un rôle important.

Mais d'autre part, comme la fonction de transformation T doit satisfaire à l'équation de propagation, on a :

$$\Delta T = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

et si nous posons :

$$T = \text{Re } e^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad (5)$$

où R et S sont des fonctions réelles pour l'instant non déterminées, nous obtenons en substituant (5) dans (4) et en séparant le réel de l'imaginaire :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta R}{R} \quad (6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} R \Delta S = m \frac{\partial R}{\partial t} \quad (7)$$

Cherchons à prendre pour S la fonction (3); comme celle-ci obéit à l'équation de Jacobi :

$$\frac{1}{2m} \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (8)$$

pour que (6) soit satisfaite, il faut que ΔR soit nul. L'hypothèse la plus simple est alors de supposer que R ne dépend pas des variables x, y, z , mais uniquement du temps t . Avec cette hypothèse, l'équation (7) se réduit à :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2m} R \Delta S. \quad (9)$$

Cette équation peut être satisfaite, car la fonction (3) que nous avons choisie pour S est quadratique en xyz , de sorte que ΔS est une fonction de t seulement. Calculons ΔS :

$$\Delta S = -\frac{m}{2t} \Delta \left[\sum_{xyz} (x - x_0)^2 \right] = -\frac{m}{2t} \cdot 6 = -\frac{3m}{t} \quad (10)$$

$R(t)$ est donc défini par :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3}{2t} R. \quad (11)$$

En intégrant, on trouve :

$$R = Ct^{-\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

Nous obtenons donc d'après (5), (3) et (12) une fonction T en posant :

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) &= Ct^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]} \\ &= \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{\pi i m}{ht} \sum_{xyz} (x - x_0)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

La fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y_0, z_0) \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{\pi i m}{ht} \sum_{xyz} (x - x_0)^2} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (14)$$

satisfait donc à l'équation de propagation, mais il faut encore qu'elle se réduise à $f(x, y, z)$ pour $t = 0$. Pour vérifier s'il en est ainsi (1), faisons le changement de variables

$$r_1 = \frac{x_0 - x}{\sqrt{t}} \quad r_2 = \frac{y_0 - y}{\sqrt{t}} \quad r_3 = \frac{z_0 - z}{\sqrt{t}} \quad (13)$$

L'intégrale triple de (14) s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_1 \sqrt{t} + x, r_2 \sqrt{t} + y, r_3 \sqrt{t} + z) \quad (16)$$

$$\frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{\pi im}{h}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} \frac{D(x_0 y_0 z_0)}{D(r_1 r_2 r_3)} dr_1 dr_2 dr_3$$

Or :

$$\frac{D(x_0 y_0 z_0)}{D(r_1 r_2 r_3)} = \begin{vmatrix} \sqrt{t} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{t} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{t} \end{vmatrix} = t^{\frac{3}{2}} \quad (17)$$

Il reste :

$$\Psi(x, y, z, t) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_1 \sqrt{t} + x, r_2 \sqrt{t} + y, r_3 \sqrt{t} + z) \quad (18)$$

$$e^{-\frac{\pi im}{h}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} dr_1 dr_2 dr_3$$

Faisons tendre t vers zéro; on a à la limite :

$$\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \cdot C$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_1^2} dr_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_2^2} dr_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_3^2} dr_3 \quad (19)$$

(1) Le calcul qui suit est dû à Fourier. Le passage à la limite qui conduit de la formule (18) à la formule (19) n'est pas tout à fait rigoureux, mais il est possible de rendre le raisonnement tout à fait satisfaisant. Voir à ce sujet Emile Picard : *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1927, 2^e leçon.

Il est facile de calculer les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_k^2} dr_k = \sqrt{\frac{h}{\pi im}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{h}{im}}. \quad (20)$$

Le produit des 3 intégrales de (19) est donc $\left(\frac{h}{im}\right)^{3/2}$ et si l'on choisit, pour la constante arbitraire C, la valeur :

$$C = \left(\frac{im}{h}\right)^{3/2} \quad (21)$$

on a bien :

$$\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (22)$$

Finalement la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y_0, z_0) e^{-\frac{\pi im}{ht} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (23)$$

est la solution de l'équation de propagation (1) qui, pour $t = 0$, se réduit à $f(x, y, z)$. Le problème de la propagation du train d'ondes associé à un corpuscule se trouve ainsi rigoureusement résolu.

2. — Développement des calculs dans un cas particulier (Darwin). — Pour développer les calculs, nous allons faire une hypothèse particulière sur la forme initiale du train d'ondes. Nous supposons que $f(x, y, z)$ est de la forme :

$$f(x, y, z) = e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{2\pi i}{h} [mv_x x + mv_y y + mv_z z]} \quad (24)$$

Il faut expliquer pourquoi nous faisons ce choix pour f . Nous supposons qu'aux époques voisines de $t = 0$, le train d'ondes a la forme étudiée au chapitre IV, paragraphe 3 :

$$\Psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) e^{2\pi i \left(vt - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} \right)} \quad (25)$$

avec $\lambda = \frac{h}{mv}$. Donc à l'instant $t = 0$, ce train d'ondes se réduit à :

$$\Psi(x, y, z, 0) = A(x, y, z, 0) e^{-\frac{2\pi i}{h} [mv_x x + mv_y y + mv_z z]} \quad (26)$$

et la probabilité de présence du corpuscule au point xyz à cet instant origine est $A^2(x, y, z, 0)$. Or, nous prenons l'instant $t = 0$ comme point de départ de notre calcul parce que nous supposons qu'à cet instant une observation a été faite sur le corpuscule. Le résultat de cette observation initiale nous permet d'affirmer que la position la plus probable du corpuscule, après l'observation, est un certain point P de l'espace dont nous ferons pour plus de simplicité l'origine des coordonnées. Mais il y aura une certaine erreur possible et, d'après la loi des erreurs de Gauss, le résultat de l'observation initiale devra s'énoncer en disant : la probabilité pour que le corpuscule soit au point xyz à l'instant 0, est $e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma^2}}$, σ étant une quantité d'autant plus petite que l'expérience est plus précise (1). Dès que la distance du point xyz à l'origine des coordonnées atteint un petit multiple de σ , la probabilité pour que les coordonnées initiales soient x, y, z devient très faible; on peut donc dire que la région où le corpuscule peut se trouver à l'instant initial a des dimensions de l'ordre de σ . D'après le principe des interférences, on doit avoir :

$$A^2(x, y, z, 0) = e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma^2}} \quad (27)$$

$$A(x, y, z, 0) = e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}}$$

et finalement on est bien conduit à prendre pour $f(x, y, z)$ la forme proposée (24).

La formule générale (23) s'écrit ici :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} - \frac{2\pi i}{h} mv_x x_0 - \frac{\pi im}{ht}(x - x_0)^2} dx_0 \quad (28)$$

(1) Dans ce qui suit, nous évaluons les probabilités en valeur relative et nous laissons de côté un facteur constant facile à retrouver.

le symbole \prod_{xyz} indiquant qu'il faut faire le produit du facteur écrit à la suite par ceux qui s'en déduisent, en remplaçant x et x_0 par y et y_0 , puis par z et z_0 .

En posant :

$$a = \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\pi im}{ht} \quad b_x = \frac{2\pi im}{ht} (x - v_x t) \quad (29)$$

la formule (28) s'écrit plus simplement :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{-\frac{\pi im}{ht} x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_0^2 + b_x x_0} dx_0 \quad (30)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_0^2 + b_x x_0} dx_0 &= e^{\frac{b_x^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x_0 - \frac{b_x}{2a}\right)^2} dx_0 \quad (31) \\ &= \frac{e^{\frac{b_x^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = e^{\frac{b_x^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

et par suite :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{\pi im}{aht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{\frac{b_x^2}{4a} - \frac{\pi im}{ht} x^2} \quad (32)$$

car nous avons trois fois le facteur $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Calculons $\left(\frac{\pi im}{aht}\right)^{3/2}$:

$$\left(\frac{\pi im}{aht}\right)^{3/2} = \left[\frac{1}{1 + \frac{ht}{2\pi im\sigma^2}}\right]^{3/2} = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{ht}{2\pi im}}}\right]^3 \quad (33)$$

Calculons aussi $\frac{b_x^2}{4a}$.

$$\frac{b_x^2}{4a} = \frac{\left(\frac{2\pi im}{ht}\right)^2 (x - v_x t)^2}{4 \cdot \frac{2\pi im}{ht} \left(\frac{1}{2} + \frac{ht}{4\pi im\sigma^2}\right)} = \frac{\frac{\pi im}{ht} (x - v_x t)^2}{1 - i \frac{ht}{2\pi m\sigma^2}} \quad (34)$$

Multiplions par la quantité conjuguée du dénominateur; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{b_x^2}{4a} &= \frac{\frac{\pi im}{ht} \left(1 + \frac{iht}{2\pi m\sigma^2}\right)}{1 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma^2}\right)^2} (x - v_x t)^2 \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\pi im}{ht} \sigma^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} (x - v_x t)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

D'où enfin :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{ht}{2\pi im}}} \right]^3 \\ &e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \\ &e^{\frac{\pi im}{ht} \left[\frac{\sigma^2 [(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2] - x^2 - y^2 - z^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \right]} \end{aligned} \quad (36)$$

Posons comme d'habitude $\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, a et φ étant réels. On trouve aisément :

$$\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= \sqrt{\Psi \cdot \Psi^*} = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \right]^{3/2} \\ &e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{m}{2t} \quad (38)$$

$$\left[\frac{\sigma^2 [(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2] - (x^2 + y^2 + z^2)}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \right] + \Delta(t)$$



$\Delta(t)$ est une certaine fonction du temps qu'il ne nous est pas utile de calculer exactement.

Supposons pour un instant que les dimensions du train d'ondes soient très grandes par rapport à la longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{mv}$. Alors σ est beaucoup plus grand que $\frac{h}{mv}$. Considérons une valeur du temps t qui ne soit pas très grande par rapport à la période réduite

$$\frac{1}{2} \frac{h}{mv^2}, \text{ on aura alors :}$$

$$\sigma^2 \gg \frac{h^2}{m^2 v^2} \approx \frac{ht}{m}.$$

On pourra donc négliger $\frac{ht}{2\pi m\sigma}$ devant σ , et l'expression (36) de Ψ se réduira à :

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2}{2\sigma^2}} \quad (39)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} [\frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)t - mv_x x - mv_y y - mv_z z]}.$$

Le train d'ondes aura gardé la même forme qu'à l'instant initial, l'amplitude s'étant transportée en bloc dans la direction de propagation avec la vitesse v_x, v_y, v_z . C'est dans ces conditions que sont valables les résultats approximatifs obtenus au chapitre IV. Mais ici nous voyons qu'ils ne sont valables que pendant un temps limité. Il arrive toujours un moment où le facteur $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ cesse d'être négligeable devant σ^2 ; l'amplitude, autour du point de coordonnées $x = v_x t, y = v_y t, z = v_z t$, est encore exprimée par une fonction de Gauss, mais où σ^2 doit être remplacé par $\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$; il y a étalement progressif du train d'ondes.

On peut retrouver le même résultat en considérant le mouvement de la probabilité. La vitesse des éléments de probabilité est égale à $-\frac{1}{m}$ grad φ ; ses composantes, que

nous nommerons ξ , η , ζ pour éviter toute confusion avec les constantes données v_x , v_y , v_z , sont donc d'après (38) :

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x + \left(\frac{x}{t} - v_x\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \\ \eta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y + \left(\frac{y}{t} - v_y\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \quad (40) \\ \zeta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z + \left(\frac{z}{t} - v_z\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}\end{aligned}$$

Pour t suffisamment petit, les éléments de probabilité se déplacent tous sensiblement avec la vitesse \vec{v} ; le nuage de probabilité se transporte en bloc dans le sens de la propagation avec cette vitesse. Mais quand le temps augmente, les éléments de probabilité acquièrent une composante de vitesse centrifuge dans le sens perpendiculaire à la propagation, ce qui tend à élargir le train d'ondes; simultanément, les éléments de probabilité situés à l'avant du train d'ondes prennent dans le sens de propagation une vitesse plus grande que celle des éléments situés à l'arrière, d'où un allongement progressif du train. Tout ceci se lit facilement dans les équations (40), par exemple en prenant la direction de propagation pour axe des z et en posant par suite $v_x = v_y = 0$. Le train d'ondes s'étale donc lentement dans toutes les directions.

La valeur de $a(x, y, z, t)$, donnée par (37), est d'ailleurs en accord avec les relations d'incertitude d'Heisenberg.

En effet, l'incertitude sur la position à l'instant initial peut être mesurée par σ . D'autre part, nous pouvons admettre, d'après les relations d'Heisenberg, que l'incertitude initiale sur la vitesse est :

$$\delta v = \frac{1}{m} \delta p = \frac{1}{m} \frac{h}{2\pi\sigma}$$

De cette incertitude de vitesse initiale résulte à l'instant t une incertitude de position égale à $\frac{ht}{2\pi m\sigma}$ et, cette deuxième incertitude étant indépendante de l'incertitude σ , on doit ajouter $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ à σ^2 au dénominateur de l'exposant de la loi de Gauss pour avoir la probabilité de position à l'instant t , car les incertitudes indépendantes s'ajoutent quadratiquement. Or ceci est bien en accord avec la formule (37), d'après laquelle, suivant le principe des interférences, la probabilité de trouver le corpuscule au temps t , à une distance r du point $x = v_x t$, $y = v_y t$, $z = v_z t$, est proportionnelle à $e^{-\frac{r^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}}$.

3. — *Mesure de la vitesse par deux observations successives.* — Nous conservons l'hypothèse (24) sur la forme de $f(x, y, z)$ et par suite l'expression (36) de Ψ . La probabilité, pour qu'une expérience faite à l'instant t localise le corpuscule dans un élément de volume $dxdydz$, est alors d'après (37) :

$$P(x, y, z, t) dxdydz = a^2(x, y, z, t) dxdydz \quad (41)$$

$$= \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \right]^3 e^{-\frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} dxdydz$$

Nous allons utiliser cette formule pour discuter par le calcul la question mentionnée à la fin du dernier chapitre : la détermination de la vitesse du corpuscule à l'aide de deux déterminations successives de sa position. Nous supposons qu'une première observation, faite à l'instant 0, a permis de localiser le corpuscule à l'origine des coordonnées avec une erreur possible de l'ordre de σ . Une seconde observation, faite à l'instant t , attribue au corpuscule une position xyz ; il est alors naturel de dire que le corpuscule possédait après la première observation la vitesse u de composantes :

$$u_x = \frac{x}{t} \quad u_y = \frac{y}{t} \quad u_z = \frac{z}{t} \quad (42)$$

et la quantité de mouvement de composantes :

$$p_x = \frac{mx}{t} \quad p_y = \frac{my}{t} \quad p_z = \frac{mz}{t}. \quad (43)$$

Ces valeurs sont, il est vrai, affectées d'une incertitude de l'ordre de $\frac{\sigma}{t}$ en raison de l'incertitude qui règne sur la position initiale exacte; mais si nous prenons un intervalle de temps t très long entre les deux observations, il sera possible de rendre cette incertitude négligeable. Comme le train d'ondes a alors le temps de s'étaler considérablement entre les deux observations, la deuxième observation pourra localiser le corpuscule en n'importe quel point d'une région étendue de l'espace et il en résulte qu'en répétant la même mesure dans des conditions identiques, on trouverait des valeurs différentes pour xyz et, par suite, pour $p_x p_y p_z$; on ne peut donc pas dire que $p_x p_y p_z$ aient des valeurs bien déterminées, et il y a seulement certaines probabilités pour qu'elles aient telles ou telles valeurs.

Nous pouvons construire un « espace des moments » à l'aide des 3 variables $p_x p_y p_z$. Chaque détermination de xyz fournit un point de cet espace, grâce aux relations (43), et à l'élément de volume $dx dy dz$ correspond, d'après un théorème bien connu d'analyse, un élément de volume de l'espace des moments $d\omega$ égal à :

$$d\omega = dx dy dz \frac{D(p_x p_y p_z)}{D(xyz)} = \frac{m^3}{t^3} dx dy dz. \quad (44)$$

La probabilité $P(p_x p_y p_z t)$ pour que la deuxième observation, faite à l'instant t , fournisse une valeur des composantes de la quantité de mouvement correspondant à un point de l'élément $d\omega$, est égale à la probabilité de trouver le corpuscule dans $dx dy dz$.

D'où :

$$P(p_x, p_y, p_z, t) d\omega = a^2(x, y, z, t) dx dy dz \quad (45)$$

d'où :

$$P(p_x, p_y, p_z, t) = \frac{t^3}{m^3} a^2(x, y, z, t) \quad (46)$$

Puisque t est supposé très grand, nous pouvons nous contenter d'écrire :

$$a^2(x, y, z, t) \quad (47)$$

$$= \left(\frac{2\pi m \sigma^2}{ht} \right)^3 e^{-\frac{4\pi^2 m^2 \sigma^2}{h^2 t^2} [(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2]}$$

et par suite, en tenant compte de (43) :

$$\frac{t^3}{m^3} a^2(x, y, z, t) = P(p_x p_y p_z) \quad (48)$$

$$= \left(\frac{2\pi \sigma^2}{h} \right)^3 e^{-\frac{4\pi^2 \sigma^2}{h^2} [(p_x - mv_x)^2 + (p_y - mv_y)^2 + (p_z - mv_z)^2]}$$

Les valeurs les plus probables de $p_x p_y p_z$ sont donc mv_x , mv_y , mv_z ; si l'on désigne par δp_x , δp_y , δp_z les écarts entre les valeurs vraies et les valeurs les plus probables et par δx_0 , δy_0 , δz_0 les incertitudes sur les coordonnées initiales qui sont égales à σ , on a :

$$P(\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z) \quad (49)$$

$$= \left(\frac{2\pi \sigma^2}{h} \right)^3 e^{-4\pi^2 \left[\left(\frac{\delta x_0 \cdot \delta p_x}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta y_0 \cdot \delta p_y}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta z_0 \cdot \delta p_z}{h} \right)^2 \right]}$$

Il résulte immédiatement de la formule (49) que le produit de l'incertitude sur une des coordonnées par l'incertitude sur le moment correspondant après la première observation doit être regardée comme étant de l'ordre de grandeur de h . Nous retrouvons toujours l'idée d'Heisenberg.

4. — *Solution rigoureuse de la propagation d'un train d'ondes Ψ dans un champ uniforme constant.* — La propagation d'un train d'ondes Ψ dans un champ uniforme et constant est définie par la fonction potentielle :

$$F(x, y, z) = -k_x x - k_y y - k_z z \quad (50)$$

Nous chercherons encore dans ce cas une fonction de transformation. L'équation de propagation est ici :

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k_x x + k_y y + k_z z) \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (51)$$

et la fonction $\Psi(x, y, z, t)$ est entièrement déterminée si l'on se donne sa valeur initiale $\Psi(x, y, z, 0) = f(xyz)$. La fonction de transformation $T(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0)$ doit être telle que :

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 y_0 z_0) T(x, y, z, t, x_0 y_0 z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (52)$$

La fonction T considérée comme fonction de xyz doit donc satisfaire l'équation :

$$\Delta T + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k_x x + k_y y + k_z z) T = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial T}{\partial t} \quad (53)$$

Posons comme précédemment :

$$T(x, y, z, t, x_0 y_0 z_0) = R(t) e^{\frac{2\pi i}{h} S(xyztx_0 y_0 z_0)} \quad (54)$$

L'on trouve en substituant (54) dans (53) :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (55)$$

et :

$$m \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} R \Delta S. \quad (56)$$

On peut donc prendre pour S la fonction de Jacobi de l'ancienne Mécanique. Nous avons vu (chapitre I, paragraphe 6) que la fonction :

$$S(x, y, z, t, x_0 y_0 z_0) = -\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x - x_0)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x + x_0) + \frac{1}{24m} t^3 \sum_{xyz} k_x^2 \quad (57)$$

est solution de l'équation (55). On trouve alors comme au paragraphe 4 :

$$\Delta S = -\frac{3m}{t} \quad (58)$$

et pour que l'équation (56) soit vérifiée, il faut prendre comme précédemment :

$$R(t) = Ct^{-\frac{3}{2}}. \quad (59)$$

Il reste à vérifier que la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 y_0 z_0) \frac{C}{t^{3/2}} \quad (60)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x - x_0)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x + x_0) + \frac{t^3}{24m} \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dx_0 dy_0 dz_0$$

se réduit bien pour $t = 0$ à $f(x, y, z)$. Pour cela, nous emploierons encore le changement de variables (15) et la formule (17) qui en résulte; l'expression (60) devient alors :

$$\Psi(x, y, z, t) = C \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x + r_1 \sqrt{t}, y + r_2 \sqrt{t}, z + r_3 \sqrt{t}) \quad (61)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2} \sum_{1,2,3} r_i^2 - \frac{t}{2} \sum_{1,2,3} k_x (x + \sqrt{t} r_1) + \frac{t^3}{24m} \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dr_1 dr_2 dr_3$$

En faisant tendre t vers zéro, on obtient encore à la limite :

$$\Psi(x, y, z, 0) = C f(x, y, z) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_1^2} dr_1 \quad (62)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_2^2} dr_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_3^2} dr_3.$$

Nous avons vu qu'il suffit de prendre la constante arbitraire C égale à $\left(\frac{im}{h}\right)^{3/2}$ pour avoir $\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$. Finalement la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 y_0 z_0) \quad (63)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x - x_0)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x + x_0) + \frac{t^3}{24m} \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dx_0 dy_0 dz_0$$

est la solution de l'équation de propagation qui prend pour $t = 0$ la valeur $f(x, y, z)$. C'est donc la solution cherchée.

5. — Développement des calculs dans un cas particulier.

— Adoptons pour $f(x, y, z)$ la forme :

$$f(x, y, z) = e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{2\pi im}{h}(v_x^0 x + v_y^0 y + v_z^0 z)} \quad (64)$$

v_x^0, v_y^0, v_z^0 étant la vitesse correspondant au mouvement initial du corpuscule.

Il vient :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} - \frac{2\pi im}{h} v_x^0 x_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t}(x-x_0)^2 - \frac{t}{2} k_x(x+x_0) + \frac{t^3}{2im} k_x^2 \right]} dx_0 \quad (65)$$

Posons :

$$a = \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\pi im}{ht} \quad b_x = \frac{2\pi im}{ht} \left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2 \right) \quad (66)$$

(65) devient :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{-\frac{\pi im}{ht} x^2 - \frac{\pi i k_x t}{h} x + \frac{\pi i t^3}{12mh} k_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax_0^2 + bx_0} dx_0 \quad (67)$$

et les calculs faits précédemment nous donnent ici :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{\pi im}{hta}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{-\frac{b_x^2}{4a} - \frac{\pi im}{ht} x^2 - \frac{\pi i k_x t}{h} x + \frac{\pi i t^3}{12mh} k_x^2} \quad (68)$$



On retrouve pour $\left(\frac{\pi im}{hta}\right)^{3/2}$ la valeur (33), et la formule (35) est ici remplacée par :

$$\frac{b_x^2}{4a} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\pi im}{ht} \sigma^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2 \quad (69)$$

On obtient donc par Ψ :

$$\Psi(x, y, z, t) = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{ht}{2\pi im}}} \right]^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{xyz} \left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \quad (70)$$

$$e^{\frac{\pi im}{ht} \left[\frac{\sigma^2 \sum_{xyz} \left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} - \sum_{xyz} \left(x^2 + \frac{k_x}{m} x t^2 - \frac{k_x^2 t^4}{12 m^2}\right) \right]}$$

D'après le principe des interférences, la probabilité de présence du corpuscule au point xyz à l'instant t est :

$$a^2(x, y, z, t) = \Psi \times \Psi^* = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} \right]^3 \quad (71)$$

$$e^{-\frac{\left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2 + \left(y - v_y^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2\right)^2 + \left(z - v_z^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}}$$

Quand il est permis de négliger $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ devant σ^2 (ce serait toujours possible si h était infiniment petit), on a :

$$a^2(x, y, z, t) = \quad (72)$$

$$e^{-\frac{\left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2 + \left(y - v_y^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2\right)^2 + \left(z - v_z^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2}}$$

et le train d'ondes a alors, à l'instant t , la même forme autour du point de coordonnées :

$$x = v_x^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2; \quad y = v_y^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2;$$

$$z = v_z^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2$$

qu'il avait à l'instant 0 autour du point $x=0, y=0, z=0$. Tout le train d'ondes se transporte en bloc et est animé du même mouvement que dans la théorie classique. Mais dès que le terme $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ ne peut plus être négligé, les dimensions du train d'ondes croissent comme :

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2};$$

il y a étalement progressif du train d'ondes.

On peut retrouver la même conclusion en calculant la vitesse des éléments de probabilité. Soient encore ξ, η, ζ les composantes de cette vitesse. L'expression (70) de Ψ montre que la phase φ est donnée par :

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{m}{2t} \tag{73}$$

$$\left[\sigma^2 \frac{\sum_{xyz} \left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} - \sum_{xyz} \left(x^2 + \frac{k_x}{m} x t^2 - \frac{k_x^2 t^4}{12 m^2}\right) \right]$$

en laissant de côté un terme supplémentaire de la forme $\Delta(t)$ qui n'intervient pas pour le calcul de ξ, η, ζ . De (73), on déduit :

$$\left. \begin{aligned} \xi = -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= v_x^0 + \frac{k_x}{m} t \\ &+ \left(\frac{x}{t} - v_x^0 - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \end{aligned} \right\} \tag{74}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y^0 + \frac{k_y}{m} t \\
 &\quad + \left(\frac{y}{t} - v_y^0 - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2} \\
 \zeta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z^0 + \frac{k_z}{m} t \\
 &\quad + \left(\frac{z}{t} - v_z^0 - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}
 \end{aligned} \right\} (74)$$

Ces expressions montrent que si $\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2$ est négligeable devant σ^2 , les éléments de probabilité se déplacent en bloc avec la vitesse prévue pour les corpuscules par la théorie classique. Mais lorsque le terme $\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2$ fait sentir son influence, la situation change; il apparaît en plus des vitesses prévues par l'ancienne théorie des composantes de vitesse centrifuges par rapport au point :

$$\begin{aligned}
 x &= v_{x0} t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2; & y &= v_y^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2; \\
 z &= v_z^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2.
 \end{aligned}$$

Le train d'ondes tend donc à s'étaler dans toutes les directions.

Supposons que pour déterminer la vitesse du corpuscule, après une première observation faite au temps $t = 0$, on fasse au temps t une deuxième observation qui localise le corpuscule au point xyz ; on pourra considérer les composantes de la vitesse initiale comme égales à :

$$\begin{aligned}
 u_x^0 &= \frac{x}{t} - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t & u_y^0 &= \frac{y}{t} - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t \\
 u_z^0 &= \frac{z}{t} - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t.
 \end{aligned} \quad (75)$$

On pourra diminuer autant que l'on voudra l'erreur possible due à l'incertitude σ existant sur la position initiale, en prenant pour t un intervalle de temps suffisamment long. En suivant la même voie qu'au paragraphe précédent, on trouve encore que la probabilité pour qu'une seconde observation fournisse des valeurs p_x^0, p_y^0, p_z^0 pour les composantes initiales de la quantité de mouvement :

$$P(p_x^0, p_y^0, p_z^0) \quad (76)$$

$$= \left(\frac{2\pi\sigma^2}{h}\right)^3 e^{-\frac{4\pi^2\sigma^2}{h^2} [(p_x^0 - mv_x^0)^2 + (p_y^0 - mv_y^0)^2 + (p_z^0 - mv_z^0)^2]}$$

Les valeurs les plus probables de p_x^0, p_y^0, p_z^0 sont donc mv_x^0, mv_y^0, mv_z^0 ; désignons par $\delta p_x^0, \delta p_y^0, \delta p_z^0$ les écarts entre les valeurs vraies et les valeurs les plus probables et soient $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ les incertitudes égales à σ sur les coordonnées initiales; il vient :

$$P(\delta p_x^0, \delta p_y^0, \delta p_z^0) \quad (77)$$

$$= \left(\frac{2\pi\sigma^2}{h}\right)^3 e^{-4\pi^2 \left[\left(\frac{\delta p_x^0 \cdot \delta x_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta p_y^0 \cdot \delta y_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta p_z^0 \cdot \delta z_0}{h}\right)^2 \right]}$$

L'on retrouve de nouveau les relations d'Heisenberg, entre les incertitudes sur les coordonnées et les incertitudes sur les moments, conjuguées dans l'état initial après la première observation.

CHAPITRE XIV

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES

1. — *Résumé des principes de l'ancienne Dynamique des systèmes.* — Jusqu'à présent, nous nous sommes exclusivement occupés du cas d'un seul corpuscule se déplaçant dans un champ donné. Mais il arrive souvent que l'on ait affaire à un ensemble de corpuscules qui exercent des actions les uns sur les autres. On ne peut pas alors considérer le champ comme donné car, si l'on attache son attention à l'un des corpuscules du système, ce corpuscule est soumis aux champs créés par les autres corpuscules et ces autres corpuscules sont animés d'un mouvement qui dépend de la position du corpuscule considéré lui-même. Il faut donc déterminer simultanément le mouvement de tous les corpuscules; c'est la résolution de ce problème, en principe assez compliqué, qui constitue ce que l'on nomme dans les traités classiques la Dynamique des systèmes. Nous allons en rappeler les bases en nous tenant à la Mécanique de Newton.

En Mécanique classique, on passe très simplement de la Dynamique du point matériel unique à la Dynamique des systèmes en admettant un principe nouveau, le principe de l'égalité entre l'action et la réaction, suivant lequel la force exercée par un corpuscule a sur un corpuscule b est égale et opposée à la force exercée par b sur a .

Soit alors un système de N corpuscules que nous numérotions de 1 à N et que nous repérons par des coordonnées

rectangulaires, $x_i y_i z_i$ étant les coordonnées de i° corpuscule. La fonction de Lagrange pour le i° corpuscule est :

$$\mathcal{L}_i(x_i y_i z_i x'_i y'_i z'_i t) = T_i - F_i(x_1 \dots z_N t) \quad (1)$$

T_i étant l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$ du corpuscule.

$F_i(x_1 \dots z_N t)$ est l'énergie potentielle du i° corpuscule; elle dépend de la position de tous les corpuscules du système et du champ extérieur auquel l'ensemble du système peut se trouver soumis. Nous l'écrivons sous la forme :

$$F_i(x, \dots z_N t) = \sum_j F_{ij} + \mathcal{F}_i(x_i y_i z_i t) \quad (j = 1 \dots N) \quad (2)$$

F_{ij} représente la partie de l'énergie potentielle du i° corpuscule qui est due à l'action exercée sur lui par le j° corpuscule; par définition F_{ii} sera considéré comme nul. Enfin $\mathcal{F}_i(x_i y_i z_i t)$ représente l'action du champ extérieur, s'il existe, sur le i° corpuscule. Le principe de l'égalité entre l'action et la réaction s'exprime par la formule (1) :

$$F_{ij} = F_{ji} \quad (3)$$

Autrement dit, le tableau de F_{ij} est un tableau symétrique à termes diagonaux nuls.

Pour chaque corpuscule, nous pouvons écrire les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i} & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial y_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial y_i} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial z_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (4)$$

(1) En effet, F_{ij} et F_{ji} sont fonctions seulement de :

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

distance du i° au j° corpuscule; l'hypothèse exprimée par la formule (3) entraîne donc que :

$$-\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_j}$$

et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction se trouve satisfait.

Dans l'ensemble, il y a pour le système $3N$ équations de ce type.

La Dynamique classique des systèmes condense ces $3N$ équations en introduisant une fonction de Lagrange \mathcal{L} définie par :

$$\mathcal{L}(x_1 y_1 \dots z_N x_1' \dots z_N' t) = \sum_i T_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} - \sum_i \mathcal{F}_i = T - F \quad (5)$$

avec :

$$T = \sum_i T_i \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} + \sum_i \mathcal{F}_i$$

\mathcal{L} est la fonction de Lagrange pour le système entier; elle n'est pas la somme des fonctions de Lagrange individuelles \mathcal{L}_i parce qu'elle ne contient qu'une fois chaque terme d'action mutuelle. De même la fonction F est appelée l'énergie potentielle du système entier; elle n'est pas la somme des énergies potentielles des divers corpuscules. Avec l'aide de la fonction \mathcal{L} , les $3N$ équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial z_i'} \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} & (i = 1 \dots N) & (6) \end{aligned}$$

Comme nous avons ainsi des équations de Lagrange avec une seule fonction \mathcal{L} dépendant de toutes les coordonnées des corpuscules du système, nous allons pouvoir trouver un principe d'action stationnaire pour le système entier. Pour cela, nous considérerons l'espace à $3N + 1$ dimensions constitué à l'aide des $3N$ coordonnées des N corpuscules du système et du temps. Le mouvement de tout le système est représenté dans cet espace par une ligne; chaque point de cette ligne correspond à une position de chacun des corpuscules à un instant donné. La ligne représentative du mouvement qui passe par deux points donnés P et

Q de coordonnées de temps t_0 et t_1 , est définie par le principe Hamiltonien suivant : l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_i T_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} - \sum_i \bar{\mathcal{F}}_i(x_i y_i z_i t) \right] dt \quad (7)$$

prise le long de la courbe est stationnaire pour toutes les variations infiniment petites de la courbe laissant fixes ses extrémités. Ce principe est exact car il nous mène par le procédé classique du calcul des variations à $3N$ équations de Lagrange (6). Mais de plus, ce principe Hamiltonien a une signification intrinsèque, indépendante du choix des variables à l'aide desquelles on repère le système : si donc on parvient à exprimer les $3N$ coordonnées $x_i y_i z_i$ à l'aide de n variables q_k sous la forme :

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(q_1 \dots q_n) & y_i &= \varphi_i(q_1 \dots q_n) \\ z_i &= \psi_i(q_1 \dots q_n) & (i &= 1 \dots N) \end{aligned} \quad (8)$$

la fonction \mathcal{L} pourra s'exprimer à l'aide des $2n + 1$ variables $q_1 \dots q_n, q_1' \dots q_n', t$. L'on devra avoir :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q_1 \dots q_n, q_1' \dots q_n', t) dt = 0 \quad (9)$$

les limites t_0 et t_1 n'étant pas soumises à variation. En général n est égal à $3N$, mais s'il existe des « liaisons », c'est-à-dire si certaines relations entre les coordonnées des N corpuscules doivent être constamment vérifiées (1), n peut être inférieur à $3N$. Le nombre n des variables indépendantes nécessaires pour définir le système est appelé le nombre des degrés de liberté.

Comme dans la mécanique du point matériel unique, on définira les moments p_i conjugués des variables q_i par les relations :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

(1) Nous supposons pour simplifier que les liaisons sont indépendantes du temps.

ce qui permet d'écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

De même on appelle énergie la quantité :

$$W = \sum_i p_i q_i' - \mathcal{L} \quad (12)$$

et comme on a :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_i \frac{dp_i}{dt} q_i' + \sum_i p_i \frac{dq_i'}{dt} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} q_i' \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \frac{dq_i'}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

en vertu de (10) et (11), on en conclut que si le champ extérieur ne dépend pas du temps $\left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial t} \equiv 0\right)$ la quantité W reste constante.

La définition (12) de W permet aussi d'exprimer l'intégrale d'Hamilton sous la forme d'une intégrale curviligne dans l'espace à $n + 1$ dimensions formé par les n coordonnées q_i et le temps, car on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_P^Q \left(\sum_i p_i dq_i - W dt \right) \quad (14)$$

P et Q étant les points extrêmes de la ligne représentative du mouvement dans l'espace des $q_i - t$.

Dans le cas où le champ extérieur ne dépend pas du temps et où par suite l'énergie reste constante, le principe d'Hamilton conduit au principe de moindre action de Maupertuis. Considérons un « espace de configuration » formé à l'aide des n variables q_i seulement (et non plus du temps); cet espace à n dimensions va jouer dans ce qui va suivre un rôle important. L'ensemble des positions des corpuscules

du système, à un instant donné, est représenté par un « point représentatif » dans cet espace et le déplacement des corpuscules du système y est représenté par une courbe qui est la trajectoire du point représentatif dans l'espace de configuration. Le principe de moindre action de Maupertuis est alors le suivant : la trajectoire du point représentatif entre deux points A et B de l'espace de configuration est telle que l'intégrale curviligne

$$\int_A^B \sum_i p_i dq_i$$

prise le long de cette trajectoire est stationnaire pour toute variation infiniment petite de la courbe d'intégration qui ne fait varier ni les limites A et B, ni la valeur W de l'énergie. La démonstration à partir du principe d'Hamilton est exactement la même que celle du chapitre 4, paragraphe 4, sauf qu'il y a ici n variables q_i au lieu d'en avoir 3.

De même en reprenant les démonstrations du chapitre I, paragraphes 5-6, en changeant seulement \sum_1^3 en \sum_1^n , on trouvera d'abord les équations de Hamilton :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

puis le théorème des transformations de contact qui s'énonce ici sous la forme suivante : « Les changements de variables $\alpha_i = f_i(q_k p_k t)$; $\beta_i = \varphi_i(q_k p_k t)$ tels que l'on ait :

$$\sum_1^n p_i dq_i - \sum_1^n \beta_i d\alpha_i = - dS(\alpha_i q_i t) \quad (16)$$

conservent la forme canonique des équations de Hamilton à condition de remplacer la fonction H primitive par la fonction $K = H - \frac{\partial S}{\partial t}$ exprimée à l'aide des nouvelles variables. »

A l'aide du dernier théorème, on développe comme pour le corpuscule unique la théorie de l'équation de Jacobi (voir chap. II) et l'on parvient au théorème de Jacobi : « Si l'on trouve une intégrale complète (c'est-à-dire dépendant de n constantes arbitraires a_i) de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (17)$$

on aura :

$$p_i = -\frac{\partial S(q_i, a_i, t)}{\partial q_i} - \frac{\partial S(q_i, a_i, t)}{\partial a_i} = \beta_i \quad (i = 1 \dots n) \quad (18)$$

les β_i étant n nouvelles constantes, et les équations (18) définissant les $2n$ quantités q_i, p_i en fonction du temps et des $2n$ constantes a_i, β_i , donnent complètement le mouvement du système à n degrés de liberté envisagé. »

2. — Passage de l'ancienne à la nouvelle Dynamique des systèmes. — Pour passer de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique à la Dynamique ondulatoire des systèmes de corpuscules, on ne peut pas procéder comme dans l'ancienne Mécanique. Voici ce que nous voulons dire : pour procéder comme dans l'ancienne Mécanique, il faudrait considérer le mouvement de chaque corpuscule et de son onde associée sous l'action des champs créés par les autres corpuscules et du champ extérieur, s'il y en a un; puis en introduisant le principe de l'action et de la réaction, il faudrait chercher à résoudre simultanément le problème de la propagation des N ondes associées aux N corpuscules du système. Il ne paraît guère possible de procéder ainsi et la principale raison qui s'y oppose est la difficulté de localiser chaque corpuscule en un point de son onde; on ne peut pas exprimer le champ auquel est soumis un corpuscule en fonction des positions des autres corpuscules parce que ces positions ne sont pas bien définies.

Pour constituer la Dynamique ondulatoire des systèmes, Schrödinger a suivi une tout autre voie qui, bien qu'elle

soulève quelques difficultés de principe, a donné de très bons résultats et dont nous devons actuellement nous contenter. Mais il n'a réussi dans sa tentative qu'à obtenir les équations non relativistes; la Dynamique ondulatoire relativiste des systèmes fait encore défaut.

• Schrödinger envisage *a priori* l'espace de configuration à n dimensions formé à l'aide des variables $q_1 \dots q_n$ qui définissent le système à n degrés de liberté envisagé. Il associe au mouvement du système de corpuscules non pas autant d'ondes se propageant dans l'espace ordinaire qu'il y a de corpuscules, mais une seule onde se propageant dans l'espace de configuration. Pour cette onde, il a cherché une équation de propagation qui, à l'approximation de l'optique géométrique, lui permette de retrouver la Mécanique ancienne.

Suivant l'idée de Schrödinger, nous devons donc chercher une équation de propagation dépendant des variables $q_1 \dots q_n, t$, telle que, si l'on écrit la solution sous la forme :

$$\Psi(q_1, \dots, q_n, t) = a(q_1, \dots, q_n, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(q_1, \dots, q_n, t)} \quad (19)$$

les conditions suivantes soient réalisées :

1° Lorsque les approximations de l'Optique géométrique sont valables et, en particulier, lorsque h est considéré comme infiniment petit, la fonction φ se confond avec la fonction de Jacobi de l'ancienne Mécanique;

2° Si le système se compose d'un seul corpuscule, nous devons retomber sur l'équation de propagation valable pour le corpuscule unique;

3° Si le système se compose de N corpuscules qui n'agissent pas les uns sur les autres, l'équation de propagation doit se décomposer en N équations distinctes du type valable pour le corpuscule unique.

Mais avant d'étudier une propagation dans l'espace de configuration, il est nécessaire de compléter la définition de cet espace en lui attribuant une métrique au sens de Riemann, c'est-à-dire en admettant que le carré de l'élément de longueur correspondant à une variation dq_i des

coordonnées q_i s'exprime en chaque point par une certaine forme quadratique $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dq_i dq_k$. Nous verrons tout à l'heure comment on doit choisir les g_{ik} . Mais auparavant, nous devons rappeler certaines formules mathématiques qui nous seront nécessaires.

3. — *Quelques lemmes mathématiques.* — Considérons un espace euclidien à n dimensions et supposons d'abord que nous repérons les points de cet espace à l'aide de n coordonnées x_i , telles qu'en chaque point les surfaces $x_i = C^{te}$ soient des hyperplans se coupant à angle droit; c'est un système de coordonnées orthogonales. Alors, au voisinage de chaque point, tout se passera comme si nous avions des coordonnées Cartésiennes rectangulaires et, par suite, le carré de l'élément de longueur est de la forme :

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2. \quad (20)$$

L'élément de volume sera :

$$d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (21)$$

Grâce à un changement de variables $q_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nous définirons ensuite n coordonnées curvilignes quelconques. Les x_i peuvent être inversement considérées comme des fonctions des q_i et l'expression de dx_i^2 peut s'écrire :

$$dx_i^2 = \sum_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_k dq_j. \quad (22)$$

Par suite, le ds^2 prend la forme :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_i \sum_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_k dq_j \\ &= \sum_{kj} \left[\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] dq_k dq_j \\ &= \sum_{kj} g_{kj} dq_k dq_j \end{aligned} \quad (23)$$

en posant :

$$g_{kj} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (24)$$

On a évidemment :

$$g_{kj} = g_{jk} \quad (25)$$

Désignons par $\left| \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right|$ le déterminant dont le terme général est $\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$; c'est le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(q_1 \dots q_n)}$ des x_k par rapport aux q_k . D'après la règle de multiplication des déterminants, on a :

$$\left[\left| \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right| \right]^2 = \left| \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right| = \left| g_{ik} \right|. \quad (26)$$

Donc en désignant par g le déterminant formé avec les g_{ik} , on a :

$$g = \left[\frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(q_1 \dots q_n)} \right]^2. \quad (27)$$

Le théorème classique d'Analyse sur les changements de variables donne alors :

$$d\tau = dx_1 \dots dx_n = \sqrt{g} dq_1 \dots dq_n \quad (28)$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'élément de volume en fonction des q_i et des g_{ik} .

Soit γ_{ik} le mineur de l'élément g_{ik} dans le déterminant g . Posons :

$$g^{ik} = \frac{\gamma_{ik}}{g} \quad (29)$$

dont résulte $g^{ik} = g^{ki}$. D'après les propriétés des déterminants, on a :

$$\sum_k g^{ik} g_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases} \quad (30)$$

La formule (30) représente n^2 relations linéaires qui déter-

minent entièrement les n^2 quantités g^{ik} en fonction des g_{ik} .
Montrons que la solution de (30) est :

$$g^{kl} = \sum_j \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial q_l}{\partial x_j} \quad (31)$$

On a, en effet, en tenant compte de (24) :

$$\begin{aligned} \sum_k g^{ik} g_{kl} &= \sum_k \cdot \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \cdot \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial q_k} \frac{\partial x_m}{\partial q_l} \\ &= \sum_{jm} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_m}{\partial q_l} \cdot \sum_k \frac{\partial x_m}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (32)$$

La dernière somme du dernier membre est égale à $\frac{\partial x_m}{\partial x_j}$; elle est donc égale à 0 si $m \neq j$ et à 1 si $m = j$. Il reste donc :

$$\sum_k g^{ik} g_{kl} = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \frac{\partial q_i}{\partial q_l} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases} \quad (33)$$

Les équations (30) sont donc bien vérifiées par les valeurs (31).

Nous allons enfin chercher l'expression générale de l'opérateur Laplacien en coordonnées q_i quelconques, cet opérateur ayant par définition en coordonnées orthogonales x_i l'expression :

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Nous partons du fait suivant : si $f(x_1 \dots x_n)$ est une fonction des coordonnées x_i qui est finie, uniforme et continue dans tout l'espace à n dimensions considéré et qui est nulle à l'infini, l'équation :

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \quad (34)$$

exprime que l'intégrale :

$$\int \dots \int_n \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau$$

étendue à tout l'espace est stationnaire pour toute variation infiniment petite de la forme f , variation respectant la continuité et l'uniformité de cette fonction. En effet, si l'on fait varier f de δf en chaque point de l'espace à n dimensions, l'intégrale envisagée éprouve la variation :

$$\begin{aligned} \delta \int \dots \int_n \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau &= \int \dots \int_n 2 \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d\tau \\ &= - \int \dots \int_n 2 \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \delta f d\tau \quad (35) \end{aligned}$$

et pour que cette variation soit nulle, quels que soient les δf , il faut et il suffit que l'équation (34) soit vérifiée.

Mais nous pouvons aussi exprimer l'intégrale :

$$\int \dots \int_n \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \delta\tau$$

à l'aide des coordonnées q_i en faisant dans la fonction f le changement de variables qui fait passer des x_i aux q_i . Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i}; \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_k \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_l}{\partial x_i}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 &= \sum_{kl} \left[\sum_i \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_l}{\partial x_i} \right] \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} \\ &= \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} \end{aligned} \quad (37)$$



en vertu de (31). De (37), nous tirons :

$$\begin{aligned}
 & \delta \int \dots \int \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau \quad (38) \\
 &= \delta \int \dots \int \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} \sqrt{g} dq_1 \dots dq_n \\
 &= \int \dots \int 2 \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \delta \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) \sqrt{g} dq_1 \dots dq_n \\
 &= - \int \dots \int 2 \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(g^{kl} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) \delta f dq_1 \dots dq_n.
 \end{aligned}$$

Comparons cette dernière formule avec la formule (35), qui donne une autre expression de la même quantité et rappelons-nous que l'on a :

$$d\tau = dx_1 \dots dx_n = \sqrt{g} dq_1 \dots dq_n \quad (39)$$

on voit que l'on a nécessairement :

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right). \quad (40)$$

Telle est l'expression généralisée du Laplacien dans l'espace à n dimensions à l'aide des coordonnées quelconques q_i . Bien entendu, si $n = 3$, on obtient l'expression du Laplacien ordinaire Δ en coordonnées curvilignes quelconques.

4. — L'équation de propagation dans l'espace de configuration. — Pour pouvoir considérer une propagation dans l'espace de configuration, il faut d'abord attribuer à cet espace une métrique. Pour cela nous partirons de l'expression de l'énergie cinétique du système. Toute la Dynamique ondulatoire de Schrödinger étant non relativiste, nous partirons de l'expression de l'énergie cinétique :

$$T = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \quad (41)$$

x_i, y_i, z_i étant les coordonnées rectangulaires du i° corpuscule, m_i sa masse, N le nombre des corpuscules du système et les accents désignant des dérivées par rapport au temps. Si le système a n degrés de liberté, les $3N$ coordonnées du système pourront s'exprimer à l'aide des n variables q_1, q_2, \dots, q_n . Les vitesses s'exprimeront linéairement en fonction des q_i' , et T deviendra une fonction quadratique homogène des q_i' .

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} q_i' q_k' \quad (42)$$

Les μ_{ik} sont en général des fonctions des q_i et $\mu_{ik} = \mu_{ki}$.

La fonction de Lagrange $\mathcal{L} = T - F$ ne dépend des q_i' que par l'intermédiaire de T . On aura donc :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_k \mu_{ik} q_k' \quad (i = 1 \dots n) \quad (43)$$

La formule (43) représente un système de n équations linéaires exprimant les p_i en fonction des q_i' ; nous pourrions en général les résoudre par rapport aux q_i' . Désignons par v_{ik} le mineur du terme μ_{ik} dans le déterminant $|\mu_{ik}| = \mu$ et posons :

$$\mu^{ik} = \frac{v^{ik}}{\mu} \quad (44)$$

il vient :

$$q_i' = \sum_k \mu^{ik} p_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (45)$$

Il est aisé de trouver la forme de l'équation classique de Jacobi. En effet, l'énergie exprimée en fonction des q_i , des p_i et du temps sera :

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \sum_j \mu^{ij} p_j \sum_l \mu^{kl} p_l + F(q_i, t) \quad (46)$$

$F(q_i, t)$ étant l'énergie potentielle du système. Or, d'après la théorie des déterminants :

$$\sum_k \mu_{ik} \mu^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases} \quad (47)$$

D'où :

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ij} p_i p_j + F(q_i, t) \quad (48)$$

et l'équation de Jacobi (17) s'écrit :

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ij} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_j} + F(q_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (49)$$

Pour définir la métrique de l'espace de configuration, nous allons faire jouer aux μ_{ik} , μ^{ik} et μ le rôle que jouaient au dernier paragraphe les quantités g_{ik} , g^{ik} et g . En d'autres termes, nous prendrons pour l'expression du ds^2 dans l'espace de configuration :

$$ds^2 = \sum_{ik} \mu_{ik} dq_i dq_k. \quad (50)$$

L'élément de volume dans l'espace de configuration sera donc :

$$d\tau = \sqrt{\mu} dq_1 dq_2 \dots dq_n \quad (51)$$

et le Laplacien généralisé y aura pour expression :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \right]. \quad (52)$$

Dans le cas d'un seul corpuscule de masse m , nous avons été amenés à prendre pour équation de propagation non relativiste, pour la fonction d'onde réduite, la forme :

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (53)$$

Transposant cette expression, Schrödinger a adopté comme équation de propagation dans l'espace de configuration :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q_i, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (54)$$

Nous devons vérifier que cette équation satisfait aux trois conditions énoncées dans l'avant-dernier paragraphe :

1° Lorsque les conditions de l'optique géométrique sont réalisées et, en particulier, lorsque la constante h peut être considérée comme infiniment petite, la fonction φ satisfait à l'équation de Jacobi.

En effet, posons comme toujours :

$$\Psi(q_i, t) = a(q_i, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(q_i, t)},$$

a et φ étant des fonctions réelles. En substituant dans (34) et en annulant les termes réels, puis en négligeant dans la relation ainsi obtenue les termes qui ne contiennent pas h^2 au dénominateur, on trouve bien :

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} + F(q_i, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (55)$$

La fonction φ satisfait donc bien à l'équation de Jacobi (49) et elle peut, à ce degré d'approximation, être confondue avec la fonction de Jacobi de l'ancienne Mécanique.

2° Si le système se compose d'un seul corpuscule, nous retombons sur l'équation (33).

En effet, désignons par m la masse du corpuscule et prenons des axes de coordonnées rectangulaires. On a $T = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ et par suite :

$$\mu_{ik} = \begin{cases} m & \text{pour } i = k \\ 0 & \text{pour } i \neq k \end{cases} \quad \mu = m^3 \quad (56)$$

$$\mu^{ik} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{pour } i = k \\ 0 & \text{pour } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

En portant les valeurs (56) dans l'équation générale (34), on retombe sur (33).

3° Si le système est formé de N corpuscules ne réagissant pas les uns sur les autres, l'équation de propagation se décompose en N équations distinctes du type valable pour le corpuscule unique.

En effet, soit m_i la masse du i° corpuscule. Prenons des coordonnées rectangulaires. On a :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ik} &= 0 \text{ pour } i \neq k & \mu_{11} &= \mu_{22} = \mu_{33} = m_1, \dots \\ & & \mu_{3i-2, 3i-2} &= \mu_{3i-1, 3i-1} = \mu_{3i, 3i} = m_i \\ \mu &= m_1^3 \cdot m_2^3 \dots m_N^3 \\ \mu^{ik} &= 0 \text{ pour } i \neq k & \mu^{11} &= \mu^{22} = \mu^{33} = \frac{1}{m_1}, \dots \\ & & \mu^{3i-2, 3i-2} &= \mu^{3i-1, 3i-1} = \mu^{3i, 3i} = \frac{1}{m_i} \end{aligned} \right\} (37)$$

Comme F se réduit à $\sum \mathfrak{F}_i(x_i y_i z_i t)$, l'équation (54) devient :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[\frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} \mathfrak{F}_i(x_i y_i z_i t) \Psi \right] \\ = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (38)$$

Posons alors :

$$\Psi(x, \dots, z_N, t) = \Psi_1(x_1 y_1 z_1 t) \cdot \Psi_2(x_2 y_2 z_2 t) \dots \Psi_N(x_N y_N z_N t) \quad (39)$$

Il vient N équations de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z_i^2} \right) \\ - \frac{8\pi^2}{h^2} \mathfrak{F}_i(x_i y_i z_i t) \Psi_i = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (60)$$

Ce sont bien les équations de propagation valables pour les corpuscules considérées isolément. Nous avons donc ainsi

vérifié que l'équation (54) remplit les trois conditions dont la nécessité s'imposait *a priori*.

Si le système est formé de N corpuscules réagissant les uns sur les autres mais non soumis à des liaisons, on peut constituer l'espace de configuration à l'aide des 3N coordonnées rectangulaires x_1, z_N ; les μ_{ik} et les μ^{ik} ont alors les valeurs (57) et l'équation de propagation prend la forme :

$$\sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} F(x_1 \dots z_N, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (61)$$

Toutes les formules que nous venons de donner sont des formules non relativistes : il n'a pas été possible jusqu'ici de trouver une équation de propagation satisfaisant aux exigences de la théorie de la Relativité. De plus, nous avons, avec Schrödinger, envisagé une propagation d'ondes dans l'espace fictif de configuration; il n'a pas non plus été jusqu'ici possible de ramener cette propagation d'une seule onde dans l'espace de configuration à la propagation d'une ou de plusieurs ondes dans l'espace ordinaire. Cette impossibilité d'associer au mouvement d'un système des propagations d'ondes dans l'espace ordinaire semble apporter un argument de plus en faveur de l'idée que l'onde associée n'est pas une réalité physique, mais constitue une simple représentation symbolique d'une probabilité.



CHAPITRE XV

INTERPRÉTATION DE L'ONDE ASSOCIÉE AU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME

1. — *L'approximation de l'optique géométrique.* — Pour interpréter la signification de l'onde polydimensionnelle associée à un système, nous partirons de l'équation de propagation :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F\Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

Nous écrirons toujours Ψ sous la forme :

$$a(q_1, \dots, q_n, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(q_1, \dots, q_n, t)} ;$$

en substituant dans (1) et en annulant séparément les termes réels et les termes imaginaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + F(q_1, \dots, q_n, t) \\ & = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{h^2}{8\pi^2 a} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \frac{1}{2} a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \right] = \frac{\partial a}{\partial t} \quad (3)$$

Dans ce paragraphe, nous allons nous placer à l'approximation de l'optique géométrique, c'est-à-dire négliger le dernier terme de (2). La fonction φ obéit alors à l'équation classique de Jacobi comme nous l'avons déjà vérifié. Nous pouvons donc considérer ici la Mécanique classique comme valable et définir les moments de Lagrange par :

$$p_i = \sum_k \mu^{ik} q'_k = - \frac{\partial S}{\partial q_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (4)$$

En résolvant par rapport aux q' , il vient :

$$q'_i = \sum_{ik} \mu^{ik} p_k = - \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}. \quad (5)$$

Portons ces valeurs de $\sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}$ dans l'équation (3), elle devient :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial a}{\partial q_i} q'_i + \frac{1}{2} a \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} [\sqrt{\mu} q'_i] = 0. \quad (6)$$

Multiplions par $2a$, nous obtenons aisément :

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} [\sqrt{\mu} a^2 q'_i] = 0. \quad (7)$$

Nous allons interpréter cette équation (7) comme nous avons interprété l'équation correspondante pour le corpuscule unique.

Soit $\varphi(q_1, \dots, q_n, t, a_1, \dots, a_n)$ une intégrale complète de l'équation de Jacobi (à laquelle φ satisfait à notre degré d'approximation). D'après la théorie de Jacobi, les équations du mouvement classique sont :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, \eta) \quad (8)$$

A une même fonction φ , c'est-à-dire à une même valeur des constantes a_i , correspond une infinité de mouvements

possibles suivant le choix des constantes β_i . Nous dirons encore que ces mouvements sont des mouvements de la même classe. Le mouvement du système tout entier est défini par le déplacement de son point représentatif dans l'espace de configuration qui est déterminé par les équations (8).

Au lieu de considérer un système, nous pouvons considérer un ensemble de systèmes identiques accomplissant des mouvements de la même classe; à cet ensemble de systèmes correspondra, dans l'espace de configuration, un nuage de points représentatifs associés à une même onde Ψ ; les vitesses de ces points représentatifs seront données par la formule (5).

Le mouvement du nuage de points représentatifs que nous venons d'imaginer doit obéir à l'équation de continuité hydrodynamique. Il est aisé de trouver comment s'exprime cette équation dans l'espace de configuration. Considérons, en effet, dans cet espace un petit élément de volume limité par les surfaces :

$$q_i = c_i \quad q_i = c_i + dq_i \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (9)$$

Les arêtes de ce petit parallélépipède sont dirigées suivant les lignes coordonnées q_i et sont de longueurs $dq_1 \dots dq_n$. Considérons l'une des coordonnées q_k , k ayant une valeur donnée. A travers la face du parallélépipède élémentaire ayant pour coordonnées $q_k = c_k$, il passe pendant le temps dt un nombre de points représentatifs égal au contenu d'un petit parallélépipède ayant cette face pour base et pour arête, dans le sens de la coordonnée q_k , la longueur $q'_k dt$. Si $\rho(q_1 \dots q_n, t)$ désigne la densité du nuage de points représentatifs sur la face considérée, le flux en question est donc :

$$\rho \sqrt{\mu} dq_1 \dots dq_{k-1} \quad dq_{k+1} \dots dq_n \cdot q'_k dt \quad (10)$$

Le flux, à travers la face parallèle $q_k = c_k + dq_k$, est de même :

$$\left[\rho \sqrt{\mu} q'_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \sqrt{\mu} q'_k) dq_k \right] dq_1 \dots dq_{k-1} dq_{k+1} \dots dq_n dt \quad (10)$$

et la différence des deux flux est :

$$-\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \sqrt{\mu} q'_k) dq_1 \dots dq_n dt. \tag{11}$$

En raisonnant de même pour les $n - 1$ autres paires de faces, on obtient pour l'excès de ce qui sort :

$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \sqrt{\mu} q'_k) dq_1 \dots dq_n dt. \tag{12}$$

Ceci doit être égal à l'augmentation du nombre des points représentatifs dans l'élément de volume, soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \sqrt{\mu} dq_1 \dots dq_n$. Finalement on obtient pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\sqrt{\mu} q'_k \rho) = 0. \tag{13}$$

En comparant (13) avec (7), on voit encore qu'on est amené à poser :

$$\rho(q_1 \dots q_n t) = K a^2(q_1 \dots q_n t). \tag{14}$$

On peut exprimer ce résultat en termes de probabilité en disant : si l'on considère un système à n degrés de liberté dont on sait que le mouvement appartient à une certaine classe, mais dont on ignore la configuration initiale exacte, l'intensité de l'onde associée au système dans l'espace de configuration mesure, en chaque point de cet espace et à chaque instant, la probabilité de présence du point représentatif du système.

On peut aussi substituer au nuage de points représentatifs un fluide de probabilité dont les éléments décrivent les diverses trajectoires possibles, prévues par l'ancienne Dynamique, pour le point représentatif et dont la densité proportionnelle à a^2 mesure la probabilité de présence en chaque point de l'espace de configuration. On peut donc,

à l'approximation de l'optique géométrique, satisfaire le principe des interférences tout en conservant l'idée que les corpuscules du système ont une position bien définie dans l'espace et que, par suite, le point représentatif a lui aussi une position bien définie à chaque instant dans l'espace de configuration. Pour les systèmes comme pour le corpuscule unique, les difficultés commencent quand on sort du domaine de l'optique géométrique.

2. — *Cas général. Mouvement de la probabilité.* — Quand les approximations de l'optique géométrique cessent d'être valables, on ne peut plus dans l'équation (2) négliger le dernier terme. On admettra toujours comme postulat le principe des interférences, d'après lequel le carré de l'amplitude de l'onde mesure la probabilité de présence du point représentatif en chaque point de l'espace de configuration et à chaque instant. On devra toujours associer à l'onde Ψ un nuage de probabilité dont le mouvement dans l'espace de configuration devra être tel, que le principe des interférences soit vérifié. On y parviendra en définissant la vitesse des éléments de probabilité par les relations :

$$q_i' = - \sum_k \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}. \quad (15)$$

La continuité hydrodynamique est, en effet, encore satisfaite grâce à l'équation (3) en posant $\rho = a^2$.

Le mouvement des éléments de probabilité défini par (15) peut être étudié comme au chapitre IX. L'équation (2) qui tient lieu d'équation de Jacobi peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + F + F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (16)$$

en posant :

$$F_1(q_1, \dots, q_n, t) = - \frac{h^2}{8\pi^2 a} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right]. \quad (17)$$

On peut dire que les éléments de probabilité se meuvent comme s'il existait une énergie potentielle supplémentaire $F_1(q_1 \dots q_n, t)$ qu'on peut appeler le « potentiel quantique » et qui dépend de l'amplitude a de l'onde et, par suite, de la densité du nuage de probabilité.

Introduisons une fonction de Lagrange des éléments de probabilité. C'est une fonction des q_i , des q_i' et de t donnée par la formule :

$$\mathcal{L}(q_1 \dots q_n, q_1' \dots q_n', t) = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} q_i' q_k' \quad (18)$$

$$- F(q_i, t) - F_1(q_i, t)$$

Les dérivées :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \sum_k \mu_{ik} q_k' \quad (19)$$

sont les moments des éléments de probabilité conjugués des variables q_i . D'après (15), on a :

$$p_i = - \sum_{kj} \mu_{ik} \mu^{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad (20)$$

Enfin, la quantité :

$$W = \sum_i p_i q_i' - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} q_i' q_k' + F + F_1 \quad (21)$$

joue le rôle de l'énergie.

Comme au chapitre IX, nous allons chercher les équations du mouvement pour les éléments de probabilité en calculant $\frac{dp_i}{dt}$:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{kj} \mu^{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial t} \quad (22)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_{kj} \frac{1}{2} \mu^{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i}$$

D'où, en raison de (2) et de (19) :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial(F + F_1)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i} \sum_l \mu_{jl} q_l' \sum_m \mu_{km} q_m' \quad (23)$$

Or, on a :

$$\sum_j \mu^{kj} \mu_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases} \quad (24)$$

$$\sum_j \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i} \mu_{jl} = - \sum_j \mu^{kj} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i}$$

La formule (23) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{kjlm} \mu^{kj} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i} \mu_{km} q_l' q_m' - \frac{\partial}{\partial q_i} [F + F_1] \quad (25) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{jl} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i} q_j' q_l' - \frac{\partial}{\partial q_i} [F + F_1] \end{aligned}$$

et en se souvenant de la définition (18) :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (26)$$

Ce sont bien des équations de forme Lagrangienne.

Le terme $-\frac{\partial F}{\partial q_i}$ dans (25) est la composante suivant la variable q_i de la force au sens ordinaire. Le terme :

$$\frac{1}{2} \sum_{jl} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i} q_j' q_l'$$

est introduit par le choix des coordonnées q_i et correspond aux forces centrifuges et forces de liaison. Ces deux termes existent dans les équations du mouvement de l'ancienne Mécanique; si l'on peut négliger $-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, les mouvements des éléments de probabilité, dans l'espace de configuration,

coïncident donc avec les mouvements de la même classe des points représentatifs dans la Dynamique classique.

Mais si le terme $-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ n'est pas négligeable, tout se passe comme si les éléments de probabilité subissaient, en plus de l'action des forces classiques, l'action d'une force « quantique » dérivant du potentiel quantique F_1 ; il n'y a plus alors, même en l'absence de toute force au sens ancien, conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour les éléments de probabilité.

3. — *Théorèmes d'Ehrenfest.* — Dans le cas d'un système formé de N corpuscules non soumis à des liaisons, on peut se débarrasser des termes en F_1 grâce à une intégration étendue à tout l'espace de configuration et retrouver des théorèmes analogues à ceux d'Ehrenfest pour le corpuscule unique (voir chapitre IX, paragraphe 3).

Nous supposons l'onde Ψ limitée dans l'espace de configuration de telle façon que l'amplitude a et ses dérivées soient nulles à l'infini et nous commencerons par démontrer un lemme mathématique qui généralise la formule (21) du chapitre IX.

Lemme : Soient deux fonctions $U(q_1 \dots q_n)$ et $V(q_1 \dots q_n)$ des coordonnées q_i . Si ces deux fonctions sont finies, continues, uniformes et nulles à l'infini dans l'espace de configuration, on a :

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_n U \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial V}{\partial q^k} \right) d\tau \\ &= \int \dots \int_n V \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial U}{\partial q^k} \right) d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace de configuration.

En effet, en raison de la nullité de U et de V à l'infini, l'intégrale de gauche se met par intégrations par parties

sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \int \dots \int_n U \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial V}{\partial q^k} \right) dq_1 \dots dq_n \quad (29) \\
 &= - \int \dots \int_n \sqrt{\mu} \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_1 \dots dq_n \\
 &= \int \dots \int_n V \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_1 \dots dq_n \\
 &= \int \dots \int_n V \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) d\tau
 \end{aligned}$$

et le lemme se trouve établi.

Nous appellerons « valeur moyenne d'une fonction $f(q_1 \dots q_n, t)$ dans le nuage de probabilité à l'instant t » la quantité :

$$\bar{f} = \int \dots \int_n f(q_1 \dots q_n, t) a^2(q_1 \dots q_n, t) d\tau. \quad (30)$$

Ceci posé, comme par hypothèse nous considérons un système sans liaisons, nous pouvons prendre comme coordonnées q_i les $3N$ coordonnées rectangulaires des N corpuscules du système. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \mu_{ik} &= \mu^{ik} = 0 && \text{si } i \neq k \\
 \mu_{jj} &= \frac{1}{\mu^{jj}} = m_i && \text{pour } j = 3i - 2, 3i - 1, 3i \\
 \mu &= (m_1 m_2 \dots m_n)^3
 \end{aligned} \quad (31)$$

la quantité m_i étant la masse du i^{e} corpuscule. Comme les μ_{ik} sont des constantes, les équations (25) du mouvement se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad (32) \\
 &= f_i + \frac{h^2}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a\sqrt{\mu}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{\mu} \mu^{kl} \frac{\partial a}{\partial q_l} \right) \right].
 \end{aligned}$$

En écrivant l'équation (32), nous avons tenu compte de la définition (17) de F_i et nous avons désigné par f_i la composante de la force au sens classique suivant la coordonnée q_i .

Multiplions (32) par $a^2 d\tau$ et intégrons dans tout l'espace de configuration :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_i}{dt} &= \bar{f}_i + \frac{h^2}{8\pi^2} \int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \\ &\left[\frac{1}{a\sqrt{\mu}} \sum_{ki} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ki} \frac{\partial a}{\partial q_i} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

Nous voulons prouver que l'intégrale est nulle. On a, en effet, en raison de la valeur des quantités (31) :

$$\begin{aligned} &\int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a\sqrt{\mu}} \sum_{ki} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{\mu} \mu^{ki} \frac{\partial a}{\partial q_i} \right) \right] d\tau \quad (34) \\ &= \int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int_n \left[a \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int_n \left[a \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^3 a}{\partial q_i \partial q_k^2} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Or, la formule (28) donne ici en vertu de (34) :

$$\int \dots \int_n U \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k^2} \cdot d\tau = \int \dots \int_n V \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^2} d\tau \quad (35)$$

Faisons dans cette formule $U = a$ et $V = \frac{\partial a}{\partial q_i}$, ce qui est permis, car a et ses dérivées satisfont les conditions imposées par le lemme aux fonctions U et V . Alors l'on

voit que le second membre de (34) est nul et il reste pour (33) :

$$\overline{\frac{dp_i}{dt}} = \overline{f_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (36)$$

La formule (36) exprime le théorème d'Ehrenfest pour les systèmes. On peut aussi donner de ce théorème un deuxième énoncé analogue au deuxième énoncé que nous avons donné dans le cas du corpuscule unique au paragraphe 3 du chapitre IX, mais ici l'énoncé est un peu moins simple, notamment parce que les masses correspondant aux différentes coordonnées diffèrent suivant le point matériel auquel se rapporte la coordonnée. Nous nous bornerons à écrire la formule qui traduit cette seconde forme du théorème d'Ehrenfest :

$$\rho_{ii} \overline{\frac{d^2 q_i}{dt^2}} = \overline{f_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (36 \text{ bis})$$

S'il n'y a pas de champ extérieur ou si le champ extérieur est indépendant du temps, on peut trouver un théorème analogue au théorème de la conservation de l'énergie. On démontre en effet, comme au chapitre précédent, en partant de la définition (24) de l'énergie des éléments de probabilité, que l'on a :

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (37)$$

En multipliant par a^2 et en intégrant dans tout l'espace de configuration, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{W}}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} \\ &- \frac{h^2}{8\pi^2} \int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

L'intégrale peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} &\int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int_n \left(a \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^3 a}{\partial q_k^2 \partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Si dans la formule (33) nous posons $U = a$ et $V = \frac{\partial a}{\partial t}$, nous voyons que l'intégrale (39) est nulle et (38) donne finalement :

$$\frac{\overline{dW}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (40)$$

Si le champ extérieur est indépendant du temps ($\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$), il reste donc :

$$\frac{\overline{dW}}{dt} = 0. \quad (41)$$

C'est le théorème qui remplace celui de la conservation de l'énergie pour les éléments de probabilité.

4. — *L'interprétation de Bohr et Heisenberg.* — Ici, comme dans le cas du corpuscule unique, on pourrait tenter de développer une théorie de l'onde-pilote en conservant l'idée classique que tous les corpuscules du système ont une position bien définie dans l'espace et que, par suite, le point représentatif a aussi une position bien définie à chaque instant dans l'espace de configuration. On admettrait alors que le point représentatif associé à une onde Ψ possède le mouvement défini par la formule (15), c'est-à-dire coïncide constamment avec l'un des éléments de probabilité; si l'on ignore avec lequel des éléments de probabilité le point représentatif coïncide, la probabilité que le point représentatif se trouve à un instant t dans un élément de volume $d\tau$ de l'espace de configuration serait évidemment égale au nombre des éléments de probabilité contenus à cet instant dans $d\tau$ et, d'après (14), le principe des interférences se trouverait automatiquement réalisé. Malheureusement on retrouve ici toutes les difficultés auxquelles se heurte déjà la théorie de l'onde-pilote pour le corpuscule unique; il est même plus difficile encore de considérer cette théorie comme donnant une véritable image physique des phénomènes à cause du caractère abstrait et fictif de la propagation d'une onde dans l'espace de configuration.

Laissons donc de côté la théorie de l'onde-pilote et cherchons comment les idées de Bohr et Heisenberg se transposent dans le cas des systèmes. Nous admettrons comme hypothèses fondamentales, d'une part, le principe des interférences d'après lequel l'intensité $\Psi\Psi^*$ de l'onde associée au système donne en chaque point et à chaque instant la probabilité de présence du point représentatif dans l'espace de configuration et, d'autre part, le principe de décomposition spectrale d'après lequel les intensités relatives des différentes composantes monochromatiques, dont le train d'ondes Ψ est formé, donnent les probabilités relatives des divers états de mouvement. Toutes les considérations développées pour un seul corpuscule peuvent aisément s'étendre au cas de N corpuscules et l'on retrouve les relations d'incertitude d'Heisenberg :

$$\delta q_i \cdot \delta p_i \geq h. \quad (42)$$

La cause de l'incertitude d'Heisenberg doit toujours être recherchée dans la perturbation qu'on introduit nécessairement dans le système en procédant à une mesure.

La transition entre l'ancienne Mécanique et la nouvelle Mécanique conçue à la façon d'Heisenberg et de Bohr peut encore se faire comme au chapitre XI par l'intermédiaire du théorème d'Ehrenfest. Lorsque l'optique géométrique est valable pour la propagation de l'onde dans l'espace de configuration, il peut exister dans cet espace des trains d'ondes qui occupent une région dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde et qui, par suite, peuvent être représentés par des groupes d'ondes presque monochromatiques; ces trains d'ondes, quoique comprenant un grand nombre de longueurs d'onde, peuvent néanmoins être considérés comme de dimensions négligeables et on peut les assimiler à un petit globule de probabilité dans l'espace de configuration. A l'intérieur d'un tel globule, les quantités p_i et $-\frac{\partial F}{\partial q_i}$ sont sensiblement constantes, de sorte que le théorème d'Ehrenfest donne alors :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (43)$$

Le globule de probabilité se déplace donc en bloc dans l'espace de configuration comme doit le faire le point représentatif du système d'après la théorie classique. Assurément, en principe, la position du point représentatif doit être regardée comme indéterminée à l'intérieur du globule de probabilité, mais cette indétermination est si petite à notre échelle qu'elle peut être pratiquement négligée. Pratiquement tout se passe comme si la configuration et l'état de mouvement du système étaient bien déterminés à chaque instant et comme si ce système suivait rigoureusement les lois de l'ancienne Mécanique.

Nous retrouvons donc ici toutes les idées générales étudiées au chapitre XI à propos du corpuscule unique, mais leur étrangeté se trouve encore un peu augmentée par le fait qu'on ne peut plus, pour un système, se représenter les choses dans l'espace ordinaire et qu'on doit invoquer constamment des propagations et des mouvements dans l'espace abstrait de configuration.

5. -- *Remarque.* — Faisons une dernière remarque au sujet du cas où le système est formé de corpuscules n'exerçant aucune action les uns sur les autres. Il résulte du dernier chapitre que l'on doit prendre pour Ψ le produit des fonctions $\Psi_1(x_1y_1z_1,t)$, $\Psi_2(x_2y_2z_2,t)$ relatives aux divers corpuscules considérés isolément. Ceci est bien en accord avec le principe des interférences et la signification statistique de l'intensité. En effet, la probabilité, pour que le point représentatif du système à l'instant t occupe la position $x_1 y_1 z_1 \dots z_N$ dans l'espace de configuration, est :

$$\Psi(x, y, z, \dots z_N t) \times \Psi^*(x, \dots z_N t) \quad (44)$$

Or, la probabilité pour que le i^e corpuscule soit au point $x_i y_i z_i$ à l'instant t est :

$$\Psi_i(x_i y_i z_i t) \cdot \Psi_i^*(x_i y_i z_i t) \quad (45)$$

Comme les mouvements des corpuscules sont parfaitement indépendants, puisqu'ils n'agissent pas les uns sur les



autres, on doit avoir, d'après la théorie des probabilités composées :

$$\Psi(x_1 \dots z_N t) \cdot \Psi^*(x_1 \dots z_N t) = \prod_i \Psi_i(x_i y_i z_i t) \cdot \Psi_i^*(x_i y_i z_i t) \quad (46)$$

et cette relation (46) est bien vérifiée puisqu'on a :

$$\Psi(x_1 \dots z_N t) = \prod_i \Psi_i(x_i y_i z_i t) \quad (47)$$

CHAPITRE XVI

L'ANCIENNE THÉORIE DES QUANTA ET LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

1. — *Premiers exemples de quantification des mouvements périodiques.* — Les mouvements périodiques jouent un grand rôle dans les phénomènes de l'échelle atomique. Nous devons maintenant étudier les caractères particuliers que présentent ces mouvements en Mécanique ondulatoire. Mais avant toute autre chose nous devons d'abord rappeler comment la notion du quantum d'action s'est introduite dans l'étude des phénomènes périodiques à l'échelle atomique et indiquer quelques-uns des principaux résultats de l'ancienne théorie des quanta.

On sait que l'idée de quantum a été introduite en Dynamique par Planck. Il étudiait alors l'équilibre thermodynamique entre la matière et le rayonnement et, comme cet équilibre ne doit pas dépendre du mécanisme des échanges d'énergie, il supposait, pour simplifier, que l'échange d'énergie entre matière et radiation s'effectue par l'intermédiaire d'électrons oscillant autour d'une position d'équilibre vers laquelle ils sont rappelés par une force proportionnelle à l'élongation. Un tel corpuscule, qui peut osciller le long d'une droite sous l'action d'une force proportionnelle à l'élongation, est ce qu'on nomme un « oscillateur linéaire ». Pour retrouver les lois expérimentales du rayonnement noir, Planck fut amené à admettre que les oscillateurs ne peuvent pas posséder n'importe quelle énergie; les seules valeurs de l'énergie qui leur soient permises sont celles qui sont reliées à la fréquence de l'oscillation par la formule :

$$E = nh\nu \quad (n \text{ entier}) \quad (1)$$

n étant un nombre entier, h la constante d'action introduite par Planck dans la Physique et ω la fréquence de l'oscillateur qui, nous allons le montrer, ne dépend pas de l'énergie.

Le développement ultérieur de la théorie des Quanta a conduit à énoncer autrement cette « condition de quantification ». Pour le corpuscule qui forme l'oscillateur linéaire, la fonction potentielle est :

$$F(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (2)$$

x étant l'élongation et l'équation du mouvement suivant la Mécanique classique est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (3)$$

dont la solution est :

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) \quad (4)$$

A et α étant deux constantes arbitraires. La fréquence du mouvement est donc :

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

elle est indépendante de A , c'est-à-dire de l'énergie du mouvement. La quantité de mouvement est $p_x = m \frac{dx}{dt} = mv$, et l'intégrale d'action Maupertuisienne est :

$$S_1(x) = \int_{x_0}^x p_x dx = m \int_{x_0}^x v dx \quad (6)$$

Si l'on calcule cette action pour une période entière du mouvement, on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \oint dS_1 = \oint m v dx = m \int_0^{\frac{1}{\omega}} v^2 dt \\ &= 4\pi^2 \omega^2 A^2 m \int_0^{\frac{1}{\omega}} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) dt \\ &= 2\pi^2 \omega m A^2. \end{aligned} \quad (7)$$

D'autre part, l'énergie E du corpuscule est égale à l'énergie cinétique qu'il possède lors de son passage par la position d'équilibre, car son énergie potentielle est alors nulle. Elle vaut donc :

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{=0}^2 = \frac{m}{2} A^2 \frac{k}{m} = 2\pi^2 m \omega^2 A^2 \quad (8)$$

d'où :

$$\frac{E}{\omega} = 2\pi^2 m \omega A^2 = J. \quad (9)$$

Il revient donc au même de poser la condition (4) ou d'écrire :

$$J = nh \quad (n \text{ entier}) \quad (10)$$

Mais cette dernière forme est beaucoup plus générale, car elle ne fait plus intervenir la propriété particulière à l'oscillateur d'avoir une fréquence indépendante de son énergie. Aussi est-ce sous cette forme (10) qu'on peut exprimer pour tous les mouvements à un degré de liberté la restriction des valeurs possibles de l'énergie introduite par la théorie des quanta. La condition (10) est la condition de quantification.

L'application la plus importante de la formule (10) est celle qui a été faite par Bohr au cas d'un électron de charge $-e$ tournant autour d'un noyau positif de charge $+e$ (atome d'hydrogène). Dans son premier travail sur ce sujet (1913), Bohr s'est limité systématiquement à l'étude des trajectoires circulaires; il suffit alors d'une variable, l'azimut θ , pour repérer la position du corpuscule et la formule (10) peut être appliquée. L'énergie cinétique étant :

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \theta'^2 \quad (11)$$

le moment conjugué de θ est :

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = m r^2 \theta' \quad (12)$$

et l'intégrale d'action Maupertuisienne est :

$$\int p_\theta d\theta = \int m r^2 \theta' d\theta. \quad (13)$$



Pour une période entière du mouvement, elle vaut :

$$J = \int_0^{2\pi} mr^2 \theta' d\theta = 2\pi mr^2 \theta' \quad (14)$$

car la vitesse angulaire θ' est constante sur une trajectoire circulaire dans un champ central.

La condition (10) est donc ici :

$$2\pi mr^2 \theta' = nh \quad (n \text{ entier}) \quad (15)$$

Or, $mr^2 \theta'$ est le moment de la quantité de mouvement de l'électron par rapport au noyau; désignons par M cette quantité. On peut écrire à la place de (15) :

$$M = n \frac{h}{2\pi} \quad (n \text{ entier}) \quad (16)$$

Cette formule a conduit Bohr à sa magnifique prévision du spectre de l'hydrogène. Pour y arriver, il lui a suffi d'écrire l'équation du mouvement de l'électron sous la forme :

$$mr\theta'^2 = \frac{e^2}{r^2} \quad (17)$$

qui exprime l'équilibre dynamique entre la force centrifuge et la force radiale de Coulomb. En éliminant θ' entre (16) et (17), on obtient :

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 me^2}{n^2 h^2} \quad (18)$$

Or, l'énergie de l'électron sur sa trajectoire circulaire est :

$$E = \frac{1}{2} mr^2 \theta'^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \quad (19)$$

D'où :

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2 h^2} \quad (n \text{ entier}) \quad (20)$$

Cette formule célèbre donne la valeur des énergies des divers états quantifiés pour l'atome d'hydrogène.

Bohr introduit alors un autre postulat, « la loi des fréquences » : suivant ce postulat, quand l'atome passe de l'état quantifié stable d'énergie E_n à un autre état quantifié stable de moindre énergie $E_m < E_n$, il y a émission d'une radiation de fréquence :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{2\pi^2me^4}{h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (21)$$

Si l'on fait $m = 2$, c'est-à-dire si l'on envisage tous les changements d'état de l'atome qui aboutissent au même état final caractérisé par $m = 2$, on obtient la formule expérimentale donnant la fréquence des raies de la série de Balmer :

$$\nu = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (22)$$

On doit avoir :

$$R = \frac{2\pi^2me^4}{h^3} \quad (23)$$

et le grand succès de la théorie de Bohr est que la valeur expérimentale de R cadre bien avec la formule (23).

La formule (21) rend aussi compte des fréquences d'autres séries de raies du spectre de l'hydrogène (séries de Lyman et de Paschen).

En considérant les trajectoires circulaires d'un électron autour d'un noyau de charge $+2e$, Bohr est aussi parvenu à interpréter le spectre de l'hélium ionisé.

2. — *Les conditions de Wilson-Sommerfeld.* — Pour énoncer d'une façon satisfaisante les conditions de quantification des mouvements périodiques d'un corpuscule dans un champ constant, il était nécessaire de ne pas se limiter au cas où le mouvement est défini par une seule variable. W. Wilson et Sommerfeld ont trouvé une forme d'énoncé applicable à tous les mouvements périodiques où il y a séparation des variables, c'est-à-dire où il est possible de choisir les coordonnées de façon que chaque moment de

Lagrange dépende seulement de la coordonnée correspondante :

$$p_i = f_i(q_i). \quad (24)$$

L'action de Maupertuis $\int \sum_i p_i dq_i$ est alors une somme de fonctions dépendant chacune d'une seule des variables. On peut démontrer que, pendant le cours du mouvement, certaines des variables q_i oscillent entre deux limites tandis que les autres sont des angles possédant la période 2π . Par exemple, dans le mouvement Képlérien, le rayon vecteur est une variable de la première sorte, l'azimut une variable de la seconde sorte. Nous dirons qu'une variable de la première sorte a décrit son cycle lorsque, partie de sa limite inférieure, elle a atteint en croissant sa limite supérieure, puis est revenue en décroissant à sa limite inférieure; de même nous dirons qu'une variable de la deuxième sorte a décrit son cycle quand elle a augmenté de 2π . Ces définitions admises, les conditions de quantification de Wilson-Sommerfeld sont les suivantes : les variables q_i ayant été choisies de façon à réaliser la séparation des variables, chacune des intégrales $\int p_i dq_i$ étendue à un cycle complet de la variable q_i doit être égale à un multiple entier de la constante h . Nous écrirons ces conditions sous la forme :

$$\oint p_i dq_i = n_i h \quad (n_i \text{ entier}) \quad (25)$$

Le mouvement d'un corpuscule dans un champ constant possédant dans le cas général trois degrés de liberté, il faudra en général trois nombres entiers pour définir un de ses mouvements quantifiés.

Il convient d'insister sur un point important. Lorsque q_i est une variable de la première sorte telle que le rayon vecteur dans le problème Képlérien, elle oscille au cours du mouvement entre les valeurs q_{i0} et q_{i1} , et l'intégrale de Wilson-Sommerfeld est :

$$\int_{q_{i0}}^{q_{i1}} p_i dq_i + \int_{q_{i1}}^{q_{i0}} p_i dq_i. \quad (26)$$

Cette intégrale serait évidemment nulle si p_i était une fonction *uniforme* de la variable q_i ; mais cela n'est pas le cas, car on démontre que, dans les mouvements dont nous nous occupons, le moment conjugué d'une variable de la première sorte est de la forme :

$$p_i = \pm \sqrt{\varphi_i(q_i)} \quad (27)$$

la fonction φ_i étant positive dans l'intervalle $q_{i0} - q_{i1}$ et s'annulant pour changer de signe aux limites de cet intervalle, p_i est donc alors une fonction à double détermination de la variable q_i ; on doit naturellement prendre le signe + dans (27) quand q_i croît et le signe - quand q_i décroît, de façon que l'intégrale $\int p_i dq_i$ soit positive.

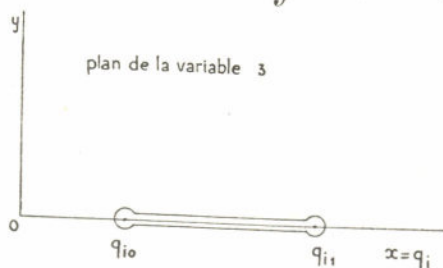


FIG. 13.

On peut aussi se représenter les choses de la façon suivante. Considérons la fonction p_i définie par la formule :

$$p_i = \pm \sqrt{\varphi_i(z)} \quad (28)$$

où z est une variable complexe dont q_i est la partie réelle; le long de l'axe réel, (28) se réduit à (27) et p_i est égal au moment conjugué de la variable q_i . La fonction $p_i(z)$ présente deux points de branchement sur l'axe réel et l'intégrale de Wilson-Sommerfeld doit être prise le long d'un contour fermé comprenant la portion $q_{i0} + \varepsilon \rightarrow q_{i1} - \varepsilon'$ de l'axe réel et deux cercles infiniment petits de rayons ε et ε' décrits autour des deux points de branchement (fig. 13).

Rien de semblable ne se présente pour les variables angulaires de la deuxième sorte qui varient de 0 à 2π ; pour celles-ci le moment conjugué a un signe constant.

3. — *L'énoncé d'Einstein.* — Les conditions de Wilson-Sommerfeld peuvent s'énoncer sous une forme indépendante du choix des variables; c'est ce qu'a montré Einstein en 1917. L'action Maupertuisienne d'un corpuscule a, en effet, pour expression :

$$dS_1(q_1, q_2, q_3) = \sum_i^3 p_i dq_i. \quad (28)$$

Cette expression est invariante pour tout changement de coordonnées d'espace; elle représente le travail du vecteur quantité de mouvement. Dans toute la région R de l'espace où s'effectue le mouvement, chaque moment $p_k = \frac{\partial S_1}{\partial q_k}$ est en général une fonction des trois variables q_i , car nous ne nous limitons plus aux coordonnées qui réalisent la séparation des variables. Si nous considérons une courbe fermée quelconque C tout entière située dans R, nous pouvons avec Einstein énoncer les conditions de Wilson-Sommerfeld en disant : « Quelle que soit la courbe C, l'intégrale

$$\int_C dS_1 = \int_C \sum_i p_i dq_i$$

est égale à un multiple entier de la constante h de Planck ».

En effet, pour calculer cette intégrale, nous pouvons choisir un système de variables quelconques, par exemple un système pour lequel la séparation des variables est réalisée; l'intégrale $\int_C dS_1$ peut alors s'écrire :

$$\int_C dS_1 = k_1 \oint p_1 dq_1 + k_2 \oint p_2 dq_2 + k_3 \oint p_3 dq_3 \quad (29)$$

k_1, k_2 et k_3 étant des nombres entiers et en vertu des conditions (25), l'énoncé d'Einstein est bien satisfait. Les conditions de Wilson-Sommerfeld conduisent donc à l'énoncé d'Einstein, mais celui-ci est indépendant du choix des coordonnées.

Pour bien pénétrer le sens de l'énoncé d'Einstein, considérons un mouvement s'effectuant dans un plan sous l'ac-

tion d'une force centrale; le rayon vecteur étant une variable de la première sorte, oscille entre deux valeurs r_1 et r_2 , et en général l'orbite plane remplit toute la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2 . Représentons par la tranche le plan de l'orbite (figure 14).

Le mouvement peut être repéré à l'aide de l'azimut θ compté autour de O, et auquel correspond un moment conjugué constant p_θ et du rayon vecteur r auquel est conjugué le moment $p_r = \pm \sqrt{\varphi(r)}$. Remplaçons par la pensée le plan de la couronne circulaire par une surface formée de

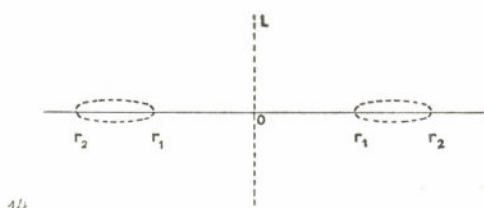


FIG. 14.

deux feuillets, plans accolés se raccordant le long des cercles $r = r_1$ et $r = r_2$ (surface de Riemann). Sur le feuillet supérieur, nous choisissons pour p_r le signe +, sur le feuillet inférieur, le signe —. Nous avons représenté ces feuillets sur la figure 14 par des traits pointillés en les supposant un peu écartés l'un de l'autre pour la commodité du dessin. La couronne circulaire plane se trouve ainsi remplacée par une sorte de tore aplati. On peut distinguer sur cette surface toroïdale trois espèces de courbes fermées :

1° Les unes peuvent être réduites à un point par une déformation continue, et pour elles on a :

$$\int_C dS_1 = 0;$$

2° D'autres peuvent être amenées par une déformation continue à coïncider avec un cercle centré sur l'axe de symétrie OL, et le long de celles-là on a :

$$\int_C dS_1 = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = n_1 h;$$

3° D'autres enfin peuvent être amenées par une déformation continue à coïncider avec une section droite du tore par un plan contenant l'axe OL, et pour elles :

$$\int_C dS_1 = \oint p_r dr = n_2 h.$$

D'ailleurs, toute courbe tracée sur la surface de Riemann peut être ramenée à une suite de courbes des trois espèces désignées ci-dessus et l'énoncé d'Einstein en résulte.

4. — *Quantification du mouvement Képlérien.* — Comme exemple d'application des conditions de Wilson-Sommerfeld, nous traiterons le cas du mouvement Képlérien. En coordonnées polaires, l'énergie cinétique classique a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \theta'^2) \quad (30)$$

Les moments conjugués de r et de θ sont :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'} = mr' \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2 \theta'. \quad (31)$$

Or, la loi des aires nous apprend que p_θ est égal à une constante C et, d'autre part, la forme de la loi de Newton (ou de Coulomb) nous permet d'écrire :

$$E = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \theta'^2) - \frac{K}{r}. \quad (32)$$

On en tire, en résolvant par rapport à mr' et en remplaçant p_θ par C :

$$p_r = mr' = \pm \sqrt{2mE - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2mK}{r}} = \pm \sqrt{\varphi(r)} \quad (33)$$

Si E est négatif, $\varphi(r)$ a deux racines positives r_1 et r_2 , et le rayon vecteur doit toujours être compris entre ces deux racines, sans quoi p_r serait imaginaire. Donc, si E est négatif, le mouvement est périodique et p_r est de la forme (27).

La condition de Sommerfeld pour l'azimut est :

$$\int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi C = n_1 h \quad (n_1 \text{ entier}) \quad (34)$$

ou :

$$C = n_1 \frac{h}{2\pi} \quad (n_1 = \text{nombre quantique azimutal}). \quad (35)$$

C'est bien la condition de stabilité (16) employée par Bohr dans le cas du mouvement circulaire, car C est le moment constant de la quantité de mouvement de la planète par rapport au noyau-soleil.

Mais ici nous avons en plus une deuxième condition de quantification dont Bohr n'avait pas eu besoin de tenir compte, parce qu'il se limitait aux orbites circulaires. Cette deuxième condition est :

$$\oint p_r dr = n_2 h \quad (n_2 = \text{nombre quantique radial}). \quad (36)$$

Soient r_1 et r_2 les valeurs de r qui annulent $\varphi(r)$. L'intégrale (36), doit s'écrire, nous l'avons vu :

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\varphi(r)} dr + \int_{r_2}^{r_1} -\sqrt{\varphi(r)} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\varphi(r)} dr \quad (37)$$

Donc, en égalant cette intégrale à $n_2 h$, on obtiendra une seconde condition de quantification. Nous reviendrons plus loin sur cette condition.

D'une façon générale, on peut obtenir facilement les expressions de p_i en fonction des q_i , nécessaires pour le calcul des intégrales de Sommerfeld, en partant de l'équation de Jacobi. Montrons-le sur l'exemple particulier du mouvement Képlérien. Comme l'expression (32) de l'énergie peut alors s'écrire :

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right] - \frac{K}{r} \quad (38)$$

l'équation de Jacobi pour la fonction réduite S_1 est :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{K}{r} = E. \quad (39)$$

En posant $\frac{\partial S_1}{\partial \theta} = C$, on trouve de suite :

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} = \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{C^2}{r^2}}. \quad (40)$$

La fonction de Jacobi $S_1 = C\theta + \int p_r dr$ est une intégrale complète de (39), car elle contient deux constantes arbitraires C et E ; les valeurs admissibles pour ces deux constantes sont déterminées par les deux conditions de quanta (35) et (37).

5. — *La question de la dégénérescence.* — Ici se présente une question importante qui a joué un grand rôle dans l'ancienne théorie des quanta : c'est la question de la dégénérescence. Nous avons dit que les conditions de Wilson-Sommerfeld caractérisaient en général les mouvements quantifiés d'un corpuscule par trois nombres entiers. Mais il résulte aussi de ce qui précède que ces trois nombres entiers n'interviennent effectivement que si trois variables sont vraiment nécessaires pour repérer le mouvement. Bohr, n'envisageant que les mouvements circulaires repérés par une seule variable, l'azimut, n'avait eu à faire intervenir qu'un seul nombre entier; en étudiant au dernier paragraphe le mouvement Képlérien, qui est plan et est repéré par un rayon vecteur et un azimut, nous avons seulement rencontré deux nombres entiers n_1 et n_2 . Mais il y a plus : dans le cas du mouvement Képlérien, l'intervention de deux nombres entiers n'est qu'une apparence. On s'en rend compte de suite en remarquant que l'orbite Képlérienne classique est une conique fermée : il suffit donc de choisir des coordonnées elliptiques pour repérer le mouvement à l'aide d'une seule variable.

En généralisant ces considérations, on est amené à énoncer le résultat suivant : chaque fois que la trajectoire, au lieu de remplir tout un domaine à trois dimensions, ne remplit qu'un domaine à deux ou à une dimension, la quantification ne fait réellement intervenir que deux ou un seul nombre entier. Il y a alors dégénérescence.

L'étude du mouvement Képlérien confirme bien cette conclusion. Achéons, en effet, les calculs commencés au dernier paragraphe. Sommerfeld a calculé à l'aide du théorème des résidus de Cauchy l'intégrale :

$$\oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{C^2}{r^2}} dr. \quad (41)$$

En égalant le résultat à $n_2 h$ et en y remplaçant C par $n_1 \frac{h}{2\pi}$ il a trouvé pour l'énergie de l'orbite caractérisée par les nombres n_1 et n_2 :

$$E_{n_1 n_2} = - \frac{2\pi m e^4}{h^2 (n_1 + n_2)^2}. \quad (42)$$

En faisant dans cette formule $n_2 = 0$, on retrouve le résultat de Bohr pour les trajectoires circulaires. Mais le résultat de Sommerfeld nous montre que l'énergie des orbites elliptiques quantifiées est, elle aussi, caractérisée par un seul nombre entier $n_1 + n_2$. Le fait de considérer les orbites elliptiques n'introduit dans la liste des niveaux stables d'énergie aucun terme nouveau. L'introduction faite séparément des deux nombres quantiques n_1 et n_2 apparaît donc comme fictive. Ce qui le montre encore mieux, c'est qu'il est possible, dans ce cas Képlérien classique, de réaliser la séparation des variables à l'aide de variables autres que le rayon vecteur r et l'azimut θ ; chaque choix de coordonnées réalisant la séparation des variables conduit à prévoir des formes différentes pour les orbites elliptiques stables, mais donne les mêmes valeurs pour les énergies. On doit en conclure que toutes les orbites circulaires ou elliptiques, dont l'énergie est égale à $-\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}$ avec n entier, sont stables.

La quantification des orbites Képlériennes ne fait en dernière analyse intervenir qu'un seul nombre entier, parce que ce sont des orbites fermées n'occupant dans l'espace qu'un domaine à une dimension. Le mouvement Képlérien classique est un mouvement dégénéré.

Les mouvements dégénérés présentent une sorte d'instabilité particulière, en ce sens que la moindre influence perturbatrice fait disparaître au moins partiellement la dégénérescence. Ainsi, il est bien connu en Astronomie qu'une influence perturbatrice, même très faible, peut imposer des variations périodiques ou séculaires aux éléments d'une orbite elliptique Képlérienne (grand axe, excentricité, inclinaison, longitude du périhélie et longitude du nœud ascendant); ces variations ont pour conséquence que l'orbite n'est plus rigoureusement fermée, qu'elle remplit tout un domaine de l'espace.

L'introduction des corrections de Relativité dans la théorie des orbites Képlériennes équivaut à l'introduction de termes perturbateurs généralement petits, et Sommerfeld a montré que l'orbite reste plane et sensiblement elliptique, mais qu'il y a une lente rotation continue du périhélie; la trajectoire n'est plus alors rigoureusement fermée; elle occupe toute une couronne circulaire, comprise entre deux cercles, dont les rayons sont égaux aux distances du foyer attractif aux extrémités du grand axe de l'ellipse tournante. La dégénérescence disparaît donc, mais seulement partiellement, car la trajectoire reste plane; il faut réellement introduire deux nombres entiers pour chaque orbite stable. Par des calculs que nous ne reproduirons pas ici, Sommerfeld obtient pour l'énergie de la trajectoire quantifiée caractérisée par les deux nombres entiers n_1 et n_2 :

$$E_{n_1 n_2} = - \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} \left[1 + \frac{4\pi^2 e^4}{n^2 h^2 c^2} \left(\frac{n}{n_1} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (43)$$

où $n = n_1 + n_2$ est le nombre quantique total. On voit bien qu'ici l'énergie de l'orbite stable dépend séparément des deux nombres n_1 et n_2 et non plus seulement de la combinaison $n_1 + n_2$.

La présence d'un champ électrique ou magnétique agissant sur un atome d'hydrogène fait aussi disparaître la dégénérescence du problème Képlérien correspondant.

6. — *Insuffisance de l'ancienne théorie des quanta.* —

Nous ne pouvons insister ici sur tous les calculs auxquels donnent lieu les différentes applications des conditions de Wilson-Sommerfeld. Nous devons seulement noter que si ces calculs ont très souvent conduit à des résultats exacts, il n'en a pas toujours été ainsi, et l'ancienne théorie des quanta s'est plus d'une fois montrée insuffisante.

Reprenons, par exemple, le cas de l'oscillateur linéaire quasi-élastique traité au paragraphe 1. D'après la formule (10), l'énergie E des mouvements stables doit être égale à l'une des valeurs de la suite : $0, h\omega, 2 h\omega \dots nh\omega \dots$,

ω étant la fréquence mécanique $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ de l'oscillateur.

Or, pour interpréter certaines expériences, notamment dans le domaine des spectres de bandes, on a été amené à admettre que la suite des énergies quantifiées n'était pas celle qu'on vient de rappeler, mais bien la suivante :

$$\frac{1}{2} h\omega \quad \frac{3}{2} h\omega \dots \left(n + \frac{1}{2}\right) h\omega \dots \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

C'est ce qu'on nomme parfois la loi des « demi-quanta » et cette loi est en opposition avec le mode de quantification adoptée par l'ancienne théorie des quanta. L'application de ce mode de quantification à des atomes plus compliqués que celui d'hydrogène a d'ailleurs aussi conduit à de mauvais résultats; le potentiel d'ionisation de l'Hélium, calculé par Kramers à l'aide des anciennes méthodes, n'est pas en accord avec l'expérience.

Déjà, quelques temps avant l'apparition des nouvelles Mécaniques, on avait l'impression que les formules de Wilson-Sommerfeld, tout en fournissant de précieuses indications, ne pouvaient pas être considérées comme étant rigoureusement exactes. Nous allons voir maintenant dans quel sens la Mécanique ondulatoire est venue modifier ces méthodes et comment elle a révélé, dans une certaine mesure, la signification physique des conditions de quantification.

CHAPITRE XVII

INTERPRÉTATION ONDULATOIRE DE LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS QUANTIFIÉS

1. — *Signification de la quantification en Mécanique ondulatoire.* — Nous avons été conduits par les conceptions de la Mécanique ondulatoire à associer au mouvement d'un corpuscule dans un champ constant défini par la fonction potentielle $F(x, y, z)$ la propagation d'une onde obéissant à l'équation :

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] \Psi = 0. \quad (1)$$

Si les procédés approximatifs de l'optique géométrique sont valables pour l'étude de cette propagation d'ondes, on pourra adopter pour fonction d'onde (réduite) la fonction :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - S_1(x, y, z)]} \quad (2)$$

où S_1 est une intégrale complète de l'équation de Jacobi. Pour que la phase de la fonction (2) ait en chaque point une valeur bien déterminée, il faut et il suffit que l'on ait le long de toute courbe fermée C , contenue dans la région où s'opère la propagation :

$$\int_c dS_1 = \int_c \sum_i^3 p_i dq_i = nh \quad (n \text{ entier}) \quad (3)$$

Nous retrouvons bien ainsi l'énoncé d'Einstein dont dérivent les formules de Wilson-Sommerfeld. En particu-

lier, si la trajectoire est une courbe fermée, on peut la prendre comme courbe C et écrire l'unique condition :

$$\int_C (p \cdot dl) = nh. \quad (4)$$

Le problème est alors dégénéré et chaque orbite stable est caractérisée par un seul nombre entier.

Ainsi donc, si l'optique géométrique était valable pour la propagation des ondes associées dans les atomes, la nouvelle Mécanique donnerait immédiatement une interprétation des mystérieuses conditions de quanta. Comme avec les idées nouvelles l'optique géométrique et la Mécanique ancienne se correspondent, on peut dire : les conditions de quantification de l'ancienne théorie des quanta étaient bien celles qui devaient s'introduire tant que l'on conservait les équations de l'ancienne Mécanique. Mais, de cette manière, toute l'ancienne théorie des quanta n'apparaît plus que comme une première approximation, valable dans les mêmes limites que l'optique géométrique. Or, comme Schrödinger l'a fait remarquer, dans le cas des mouvements intraatomiques, cette approximation n'est pas suffisante. En effet, la condition essentielle d'application de l'optique géométrique, c'est que les conditions de propagation varient très peu pour des déplacements de l'ordre de la longueur d'onde. Or, la longueur d'onde de l'onde associée à un électron dans un atome est égale à $\frac{h}{mv} = \frac{7,3}{v}$ environ, et comme la vitesse des électrons intraatomiques est de l'ordre de 10^9 cm/sec, cette longueur d'onde est de l'ordre de 10^{-8} cm, soit de l'ordre des dimensions de l'atome. Dans le domaine intraatomique, les conditions de propagation varient énormément, puisqu'elles sont régies par le potentiel F qui augmente indéfiniment quand on s'approche du noyau; l'application des résultats de l'optique géométrique n'est donc pas justifiée.

En résumé, l'interprétation des anciennes conditions de quanta que nous avons donnée ci-dessus, nous met sur la voie de la solution, mais elle nous montre aussi que les

anciennes conditions de quanta ne peuvent pas être considérées comme rigoureuses et qu'il faut reprendre toute la question de la quantification en se plaçant au point de vue ondulatoire.

Comment allons-nous définir un état stable quantifié? Il est bien naturel, avec les nouvelles idées, de supposer qu'un état stable correspond à une onde Ψ ayant la forme d'une onde stationnaire :

$$\Psi = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et + z]} \quad (5)$$

Comme Ψ doit être une solution de (4), l'amplitude a doit aussi vérifier l'équation :

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] \Psi = 0. \quad (6)$$

Nous admettrons que l'amplitude a doit être une fonction finie, uniforme et continue. De plus, le principe des interférences nous conduit à admettre que a doit être nulle à l'infini; en effet, si l'amplitude ne tendait pas vers zéro à l'infini, l'intégrale $\iiint a^2 dv$ dont tous les éléments sont positifs, serait divergente; il y aurait alors une probabilité égale à 1 pour que le corpuscule soit infiniment loin du système atomique envisagé, et cela serait contradictoire avec l'idée même que le corpuscule fait partie du système et s'y trouve dans un état stable.

En définitive, au point de vue de la Mécanique ondulatoire, la recherche des états stables d'un corpuscule est ramenée au problème de trouver les valeurs de E pour lesquelles l'équation :

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] a = 0. \quad (7)$$

admet une solution continue, uniforme, partout finie et nulle à l'infini. Les valeurs E , ainsi définies, sont les énergies des états quantifiés du corpuscule. Le problème mathématique

est très analogue à celui de déterminer les vibrations propres d'une tige ou d'une membrane quand on impose certaines conditions aux limites. Ici, la condition limite, c'est que a soit nul à l'infini.

Pour étudier le problème mathématique ainsi posé, nous adopterons les solutions suivantes :

$$\mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \quad R(x, y, z) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F(x, y, z). \quad (8)$$

L'équation (7) s'écrit alors :

$$\Delta a + [\mu - R(x, y, z)] a = 0. \quad (9)$$

Nous nous proposons de montrer que l'équation (9) n'admet de solutions continues, finies et uniformes dans un domaine D de l'espace, et nulles aux limites de ce domaine que pour certaines valeurs de la constante μ : ces valeurs particulières sont appelées les constantes fondamentales ou caractéristiques de l'équation (9), parfois aussi les valeurs propres. Ainsi se trouvera démontrée l'existence des valeurs quantifiées de l'énergie.

A chaque valeur propre correspond en général une seule solution de (9) remplissant les conditions imposées; c'est la fonction fondamentale ou caractéristique, ou encore la fonction propre correspondant à cette valeur de μ . Nous montrerons que si a_i et a_j désignent deux fonctions fondamentales correspondant à deux constantes fondamentales μ_i et μ_j , on a :

$$\iiint_D a_i a_j dv = 0. \quad (10)$$

En d'autres termes, les fonctions fondamentales forment un système de fonctions orthogonales.

Pour bien saisir le caractère physique de toute cette théorie, il est intéressant de commencer par l'étude de quelques cas simples et classiques d'équations de la forme (9), pour lesquelles $R = 0$.



2. — *Exemples simples de vibrations propres : cordes et membranes vibrantes.* — a) *Cas de la corde vibrante fixée à ses extrémités.* — Dans le cas de la propagation d'une onde élastique le long d'une corde fixée à ses deux extrémités, le déplacement transversal u d'un point de la corde vibrante satisfait à l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

où V désigne une constante dépendant des propriétés mécaniques de la corde. Si l'on considère une onde monochromatique stationnaire du type :

$$u(x, t) = a(x) e^{2\pi i [vt + \alpha]} \quad (12)$$

la fonction a doit vérifier l'équation :

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} a = 0 \quad (13)$$

qui est de la forme (9) avec $\mu = \frac{4\pi^2 v^2}{V^2}$ et $R = 0$.

Le domaine D est ici le domaine à une dimension formé par la corde dans sa position d'équilibre; si l'on prend un des bouts de la corde pour origine des abscisses et si l est la longueur de cette corde, le domaine D s'étend de $x = 0$ à $x = l$ et on doit avoir $a(0) = a(l) = 0$.

Or, l'équation (13) admet l'intégrale générale bien connue :

$$a = a_0 \sin \left(\frac{2\pi v}{V} x + \alpha \right) \quad (14)$$

avec deux constantes arbitraires a_0 et α . Pour que les conditions aux limites soient satisfaites, il faut prendre $\alpha = 0$ et $\frac{2\pi v}{V} l = n\pi$, avec n entier, c'est-à-dire choisir la solution particulière :

$$a_n = a_0 \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (15)$$

Les valeurs propres de μ sont ici :

$$\mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (16)$$

et les fonctions (15) sont les fonctions propres correspondantes.

Il résulte du théorème de Fourier qu'un état quelconque de vibration de la corde peut être représenté par la fonction :

$$u(x, t) = \sum_n \left(c_n \sin n \frac{\pi x}{l} \cos 2\pi v_n t + d_n \sin n \frac{\pi x}{l} \sin 2\pi v_n t \right) \quad (17)$$

avec $v_n = n \frac{V}{2l}$. En effet, (17) est solution de l'équation de propagation et nulle aux limites. De plus, on voit facilement que, d'après le théorème de Fourier, il est possible de choisir les constantes c_n et d_n de façon à identifier les fonctions $u(x, 0)$ et $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0}$ avec deux fonctions continues quelconques nulles aux limites. Comme u est définie par une équation du second ordre par rapport au temps, cette fonction est déterminée par la connaissance de $u(x, 0)$ et de $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0}$. Tout état de vibration de la corde est donc bien représentable par la fonction (17).

Enfin, il est bien connu que l'on a :

$$\int_0^l \sin n \frac{\pi x}{l} \sin n' \frac{\pi x}{l} dx = 0 \quad (n \neq n') \quad (18)$$

Les fonctions propres sont orthogonales.

Les fonctions propres ne sont d'ailleurs définies qu'à un facteur constant près (a_0 est arbitraire dans [15]). On dit qu'elles sont « normées » quand on choisit cette constante de façon à avoir :

$$\iint a_n^2 dx = 1. \quad (19)$$

Ici, les fonctions propres normées sont :

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (20)$$

car :

$$\int_0^l \sin^2 n \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

b) *Cas de la membrane plane rectangulaire fixée sur ses bords.* — Dans le cas d'une membrane vibrante plane et rectangulaire fixée sur ses bords, le problème à résoudre est le suivant : A et B désignant les côtés du rectangle limitant la membrane, il faut chercher une solution finie, continue et uniforme de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21)$$

qui soit nulle aux limites du domaine D formé par la membrane, c'est-à-dire pour $x = 0$; $x = A$; $y = 0$; $y = B$. Considérons encore les ondes monochromatiques stationnaires de la forme :

$$u(x, y, t) = a(x, y) e^{2\pi i [vt + \alpha]} \quad (22)$$

Il vient :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} a = 0. \quad (23)$$

Cette équation est encore du type (9), avec $\mu = \frac{4\pi^2 v^2}{V^2}$ et $R = 0$.

On obtient une solution remplissant les conditions voulues en posant :

$$\mu = \pi^2 \left(\frac{n^2}{A^2} + \frac{n'^2}{B^2} \right) \quad a_{nn'} = \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B} \quad (24)$$

Ce sont les valeurs et fonctions propres de l'équation (23). Les fonctions propres sont orthogonales, car on a :

$$\int_0^A \int_0^B a_{nn'} a_{mm'} dx dy = 0 \quad (25)$$

sauf si $m = n$, $m' = n'$. Comme :

$$\int_0^A dx \int_0^B dy a_{nn'}^2 = \frac{A}{2} \cdot \frac{B}{2},$$

les fonctions propres normées sont :

$$a_{nn'} = \frac{2}{\sqrt{A \cdot B}} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B}. \quad (26)$$

On peut démontrer que les valeurs et fonctions propres (24) sont les seules et que tout état de vibration de la membrane peut être représenté par une fonction de la forme :

$$u(x, y, t) = \sum_{nn'} \left(C_{nn'} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B} \cos 2\pi v_{nn'} t + d_{nn'} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B} \sin 2\pi v_{nn'} t \right)$$

avec :

$$v_{nn'} = \frac{V}{2} \sqrt{\frac{n^2}{A^2} + \frac{n'^2}{B^2}}.$$

Nous n'insisterons pas sur ces démonstrations.

c) *Cas de la membrane circulaire plane fixée sur ses bords.*

— Nous prendrons le centre de la membrane comme origine d'un système de coordonnées polaires et nous choisirons les unités de façon que le rayon de la membrane soit égal à 1. L'équation de propagation est ici :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (27)$$

V étant encore une constante caractéristique de la membrane. Posons :

$$u(r, \theta, t) = a(r, \theta) e^{2\pi i [vt + \alpha]} \quad (28)$$

il vient pour a :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} a = 0 \quad (29)$$

équation qui est encore du type (9) avec $\mu = \frac{4\pi^2 v^2}{V^2}$ et $R = 0$.

Essayons de représenter a par le produit d'une fonction de r par une fonction de θ :

$$a(r, \theta) = f(r) \varphi(\theta). \quad (30)$$

On trouve alors :

$$\frac{r^2}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} + \mu r^2 = - \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2}. \quad (31)$$

Le premier membre de (31) est fonction de r seulement, le second de θ seulement; ils ne peuvent être égaux que s'ils ont une même valeur constante C. Alors :

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = - C \varphi. \quad (32)$$

Si C était négatif, φ serait une fonction exponentielle de θ et a ne pourrait pas être uniforme dans le domaine circulaire D. C doit donc être positif, et la solution générale de (32) est :

$$\varphi = A \sin(\sqrt{C} \theta + B) \quad (33)$$

A et B étant des constantes arbitraires. Pour que φ soit uniforme, il faut que C soit le carré d'un nombre entier k . Cette première condition étant supposée remplie, nous devons avoir, d'après (31) :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left[\mu - \frac{k^2}{r^2} \right] f = 0. \quad (34)$$

Posons $\rho = r\sqrt{\mu}$; (34) devient :

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left[1 - \frac{k^2}{\rho^2} \right] f = 0. \quad (35)$$

C'est une équation de Bessel d'ordre k . Cette équation admet, on le démontre dans les livres d'Analyse, une seule solution, qui reste finie pour $\rho = 0$; c'est la fonction de Bessel d'ordre k donnée par le développement en série :

$$J_k(\rho) = \frac{\rho^k}{2^k \cdot k!} \quad (36)$$

$$\left[1 - \frac{\rho^2}{2(2k+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2k+2)(2k+4)} - \dots \right]$$

Nous pouvons donc prendre :

$$f(r) = J_k(\sqrt{\mu} r) \quad (37)$$

mais à condition que $f(1) = J_k(\sqrt{\mu})$ soit nul. Les valeurs propres de μ sont donc les carrés des zéros de la fonction Bessel d'ordre k . Si α_{kn} désigne le n^{e} zéro de J_k , on peut écrire les fonctions propres sous la forme :

$$a_{kn}(r, \theta) = \left. \begin{array}{l} \sin k\theta J_k(\alpha_{kn} r) \\ \cos k\theta J_k(\alpha_{kn} r) \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \\ n \end{array} \text{ entiers} \quad (38)$$

les valeurs propres étant $\mu_{kn} = \alpha_{kn}^2$.

Les fonctions (38) sont orthogonales, c'est-à-dire que :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \frac{\sin k\theta J_k(\alpha_{kn} r)}{\cos k\theta J_k(\alpha_{kn} r)} \frac{\sin k'\theta J_{k'}(\alpha_{k'n} r)}{\cos k'\theta J_{k'}(\alpha_{k'n} r)} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} k \neq k' \\ n \neq n' \end{array} \right\} \quad (39)$$

En effet :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin k\theta}{\cos k\theta} \frac{\sin k'\theta}{\cos k'\theta} d\theta \text{ est nul si } k \neq k' \text{ et si } k = k'$$

elle est encore nulle quand on choisit le sinus dans l'un des facteurs et le cosinus dans l'autre; de plus, on montre dans la théorie des fonctions de Bessel que :

$$\int_0^1 J_k(\alpha_{kn} r) J_k(\alpha_{kn} r) r dr = 0. \quad (40)$$

Donc, l'intégrale du produit de deux fonctions propres différentes est nulle.

On peut ici encore démontrer que les fonctions et valeurs propres obtenues ci-dessus sont les seules, et que toute vibration de la membrane peut être représentée sous la forme :

$$u(x, y, t) = \sum_{nk} [c_{kn} \sin(k\theta + \gamma_{kn}) J_k(\alpha_{kn} r) \sin 2\pi v_{kn} t + d_{kn} \sin(k\theta + \delta_{kn}) J_k(\alpha_{kn} r) \cos 2\pi v_{nk} t] \quad (41)$$

avec :

$$v_{kn} = \frac{V}{2\pi} \alpha_{kn}.$$

3. — *Etude du cas général de l'équation (9)*. — Reprenons maintenant l'équation (9) sous sa forme générale ($R \neq 0$) et cherchons-en les solutions finies, uniformes et continues, nulles aux limites d'un certain domaine spatial D. Désignons par M le point de coordonnée x, y, z ; nous pouvons écrire :

$$\Delta a(M) + [\mu - R(M)]a(M) = 0. \quad (42)$$

La recherche des valeurs propres de cette équation peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale linéaire et homogène. Pour le montrer, nous partirons de la formule de Green :

$$\begin{aligned} & \iiint_D [U(M) \Delta V(M) - V(M) \Delta U(M)] d\tau_M \quad (43) \\ &= \iint_S \left[U(M) \frac{\partial V(M)}{\partial n} - V(M) \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right] d\sigma_M \end{aligned}$$

dans laquelle les fonctions U et V sont des fonctions uniformes, finies et continues dans le domaine D limité par la surface S. La dérivée $\frac{\partial}{\partial n}$ est prise, suivant la normale à la surface S, dans le sens qui sort du domaine D.

Prenons pour U(M) une des fonctions propres $a(M)$ de l'équation à étudier; elle est, par définition, finie, continue, uniforme et nulle sur S. Pour V(M), nous poserons :

$$V(M) = G(M, P) = \frac{1}{MP} + v(M, P) \quad (44)$$

P était un point fixe arbitrairement choisi dans le domaine D et $v(M, P)$ étant une fonction finie, uniforme et continue, telle que G(M, P) se trouve nulle sur la surface S et satisfasse dans D, en dehors du point P, à l'équation :

$$\Delta G(M, P) = R(M) G(M, P). \quad (45)$$

Bref, nous prenons pour V la fonction de Green de l'équation $\Delta f = Rf$, relative au domaine D et au point P; nous admettrons l'existence de cette fonction.

Pour appliquer la formule (43), nous devons exclure du domaine D le point P où la fonction V devient infinie; pour cela nous entourons le point P d'une très petite sphère σ de rayon très petit, et nous remarquons que $a(M)$ et $G(M, P)$ sont continues, finies et uniformes dans le domaine D à l'extérieur de σ ; elles sont d'ailleurs l'une et l'autre nulles sur S. (43) nous donne donc :

$$\begin{aligned} & \iint_D [a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M)] d\tau_M. \quad (46) \\ & = \iint_{\sigma} \left[a(M) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} - G(M, P) \frac{\partial a(M)}{\partial n} \right] d\sigma_M. \end{aligned}$$

Faisons tendre vers zéro le rayon de la sphère σ ; la seconde intégrale de surface tend alors vers zéro parce que la valeur de $G(M, P)$ sur σ croît comme l'inverse du rayon, tandis que la surface de la petite sphère décroît comme le carré du rayon. Quant à la première intégrale de surface, elle tend vers :

$$- a(P) \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = 4\pi a(P). \quad (47)$$

Finalement, on a à la limite :

$$a(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_D [a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M)] d\tau_M. \quad (48)$$

Or, d'après leurs définitions, les fonctions a et G satisfont aux relations :

$$\Delta a(M) = [R(M) - \mu] a(M) \quad (49)$$

$$\Delta_M G(M, P) = R(M) G(M, P)$$

et par suite :

$$a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M) = \mu a(M) G(M, P) \quad (50)$$

En comparant avec (48), on voit que la fonction propre $a(\mathbf{M})$ doit être une solution de l'équation intégrale :

$$a(\mathbf{P}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_D a(\mathbf{M}) G(\mathbf{M}, \mathbf{P}) d\tau_{\mathbf{M}}. \quad (31)$$

La théorie des équations intégrales linéaires nous apprend qu'une équation intégrale homogène du type (31) n'admet de solutions non nulles que pour certaines valeurs de μ ; ces valeurs μ_i , qui sont d'ailleurs en nombre infini, sont les constantes fondamentales de l'équation intégrale et les valeurs propres de notre problème de vibration. En général, à chacune de ces valeurs μ_i , ne correspond qu'une seule fonction a_i (déterminée seulement à un facteur constant près); les fonctions $a_i(\mathbf{M})$ sont les fonctions fondamentales de l'équation intégrale et les fonctions propres de notre problème.

Quand le domaine D est fini, les constantes fondamentales forment une suite discontinue; au contraire, quand le domaine D s'étend à l'infini, ce qui est le cas dans les problèmes de quantification, il peut y avoir une suite continue de constantes fondamentales. On dit quelquefois que l'ensemble des constantes fondamentales forme le « spectre » de l'équation intégrale (31) ou de l'équation différentielle (9) correspondante, parce qu'au point de vue physique la détermination des constantes fondamentales correspond généralement à une détermination de vibrations propres. Si le domaine D est d'extension finie, le spectre est toujours un spectre discontinu, un spectre de raies; s'il est infini, il peut y avoir juxtaposition d'un spectre de raies et d'un spectre continu.

Il nous reste à montrer que les fonctions propres $a_i(\mathbf{M})$ forment en général un système de fonctions orthogonales. Considérons deux valeurs propres de μ , μ_i et μ_j , et soient a_i et a_j les fonctions propres correspondantes. On a :

$$\Delta a_i + [\mu_i - R(\mathbf{M})] a_i = 0 \quad \Delta a_j + [\mu_j - R(\mathbf{M})] a_j = 0 \quad (32)$$

d'où :

$$a_j \Delta a_i - a_i \Delta a_j = (\mu_j - \mu_i) a_i a_j \quad (33)$$

et en intégrant dans tout le domaine D :

$$\iiint_D (a_j \Delta a_i - a_i \Delta a_j) d\tau = (\mu_j - \mu_i) \iiint_D a_i a_j d\tau. \quad (54)$$

D'après le théorème de Green (formule [43]), l'intégrale triple est égale à une intégrale double étendue à la surface limite du domaine D et cette intégrale double est nulle parce que les a_i sont par définition nuls sur cette surface limite. (54) donne donc :

$$(\mu_j - \mu_i) \iiint_D a_i a_j d\tau = 0. \quad (55)$$

Donc l'intégrale dans D du produit de deux fonctions propres différentes est nulle; néanmoins cette conclusion est en défaut si plusieurs fonctions propres correspondent à une même valeur propre, car, si a_i et a_j sont deux de ces fonctions, on a $\mu_i = \mu_j$, et l'équation précédente ne permet plus de conclure que :

$$\iiint_D a_i a_j d\tau$$

soit nulle. Ce cas correspond exactement au cas de dégénérescence dans l'ancienne Mécanique où, à une même valeur quantifiée de l'énergie correspondaient plusieurs mouvements différents.

Si à une même valeur propre μ_i correspondent N fonctions propres différentes $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}$, on peut toujours remplacer ces N fonctions par N autres à l'aide de la substitution linéaire :

$$a'_{ik} = \sum_j C_j^k a_{ij} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (56)$$

Si l'on veut que les a'_{ik} soient orthogonales, il faut avoir :

$$\begin{aligned} & \iiint_D a'_{ik} a'_{il} d\tau & (57) \\ & = \sum_{jm} C_j^k C_m^l \iiint_D a_{ij} a_{im} d\tau = 0 & (k, l = 1 \dots N) \\ & & (k \neq l) \end{aligned}$$

Ceci nous donne $\frac{N(N-1)}{2}$ conditions pour déterminer les N^2 coefficients C_j^k . Il est donc possible de choisir pour les N fonctions propres, correspondant à la valeur propre μ_i , N fonctions orthogonales entre elles. De cette façon, l'ensemble de toutes les fonctions propres forme un système orthogonal.

Naturellement, les intégrales $\iiint a_i^2 d\tau$ ont toujours une valeur positive. On dit que le système de fonctions fondamentales est normé quand on a choisi le facteur constant arbitraire qui subsiste dans chacune de ces fonctions, de façon que ces intégrales soient égales à un.

Enfin on démontre que les fonctions propres normées d'une équation aux dérivées partielles relatives à un domaine D jouissent de la propriété suivante : toute fonction $f(q_i)$ finie, uniforme et continue dans D , et nulle aux limites de ce domaine, peut être représentée par un développement de la forme :

$$f(q_i) = \sum_k c_k a_k(q_i). \quad (38)$$

La possibilité de ce développement étant admise, on calcule immédiatement les coefficients c_k en multipliant (38) par $a_k d\tau$ et en intégrant dans D . En raison de l'orthogonalité des a_i , on obtient :

$$c_k = \iiint_D f(q_i) a_k(q_i) d\tau. \quad (39)$$

Considérons par exemple le cas des systèmes quantifiés pour lequel le domaine D est infini. Désignons par A un certain symbole d'opération, un opérateur. Si la fonction $A(a_k)$ est finie, uniforme, continue et nulle à l'infini, on pourra la développer en série de fonctions fondamentales de la forme :

$$A(a_k) = \sum_i A_{ik} a_i \quad (60)$$

avec :

$$A_{ik} = \iiint_D a_i A(a_k) d\tau. \quad (61)$$

Les constantes A_{ik} forment un tableau à un nombre infini de lignes et de colonnes, une matrice indéfinie. On dit que A_{ik} est l'élément d'indices ik de la matrice correspondant à l'opérateur A .

Dans les démonstrations précédentes, nous avons supposé que l'équation aux dérivées partielles faisait intervenir les trois variables d'espace et que D était un domaine à trois dimensions. Les mêmes formules sont valables si l'équation ne dépend que de deux ou de une variable; le domaine D sera alors à deux ou à une dimension, comme dans les exemples du paragraphe précédent, et il suffit de remplacer les intégrales triples par des intégrales doubles ou simples. En particulier, dans le cas de la corde vibrante, le théorème exprimé par la formule (58) est le théorème de Fourier, et la formule (59) se réduit à la formule classique qui donne les coefficients de la série de Fourier.

4. — *La quantification des systèmes de corpuscules.* —

Jusqu'ici nous avons supposé que le système à quantifier se réduisait à un seul corpuscule placé dans un champ constant donné : c'est le cas de l'oscillateur et celui de l'atome d'hydrogène quand on néglige la réaction de l'électron sur le noyau.

Mais on peut avoir à quantifier un système formé de plusieurs corpuscules réagissant les uns sur les autres : c'est le cas des atomes plus compliqués que celui d'hydrogène où se trouvent de nombreux électrons. L'équation de propagation est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q_i) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (62)$$

Si nous prenons pour Ψ une onde stationnaire de la forme :

$$\Psi(q_i, t) = a(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et + \alpha]} \quad (63)$$

il vient l'équation en a :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - F(q_i)] a = 0 \quad (64)$$

La fonction a doit être finie, uniforme et continue; elle doit s'annuler à l'infini dans l'espace de configuration dont le ds^2 est :

$$\sum_{ik} \mu_{ik} dq_i dq_k.$$

Nous admettrons qu'il existe encore une infinité de valeurs propres pour la constante E , énergie totale du système; ces valeurs propres sont les énergies des états stables. A ces valeurs propres correspondent des fonctions propres a_i ($q_1 \dots q_n$); en général, il n'y a qu'une fonction propre pour chaque valeur propre. Quand il y a plusieurs fonctions propres pour une même valeur propre, on dit qu'il y a dégénérescence.

Il est facile de démontrer que les fonctions propres sont en général orthogonales entre elles. On a, en effet, pour deux valeurs fondamentales E_l et E_m :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_l}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E_l - F(q_i)] a_l = 0 \quad (65)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_m}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E_m - F(q_i)] a_m = 0$$

d'où aisément :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a_m \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_l}{\partial q_k} \right] \right. \\ & \left. - a_l \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_m}{\partial q_k} \right] \right\} \sqrt{\mu} dq_1 \dots dq_n \quad (66) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8\pi^2}{h^2} (E_m - E_l) a_l a_m \sqrt{\mu} dq_1 \dots dq_n. \end{aligned}$$

Une intégration par parties montre que l'intégrale du premier membre est égale à :

$$\int \dots \int \sqrt{\mu} \sum_{ik} \mu^{ik} \left(\frac{\partial a_m}{\partial q_k} \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - \frac{\partial a_l}{\partial q_k} \frac{\partial a_m}{\partial q_i} \right) dq_1 \dots dq_n ;$$

elle est donc nulle, puisque i et k sont des indices de sommation et que $\mu^{ik} = \mu^{ki}$. Il reste donc :

$$(E_m - E_l) \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} a_l a_m d\tau = 0. \quad (67)$$

Donc, s'il y a une seule fonction propre par valeur propre, toutes les fonctions propres sont orthogonales. S'il y a plusieurs fonctions propres par valeur propre, on pourra remplacer ces fonctions propres par le même nombre de combinaisons linéaires et faire en sorte que les nouvelles fonctions soient orthogonales. D'autre part, on pourra normer les fonctions propres en posant :

$$\int \dots \int a_k^2 d\tau = 1.$$

Le système des fonctions propres peut donc toujours être considéré comme orthogonal et normé.

Toute fonction $f(q_1 \dots q_n)$ finie, uniforme, continue et nulle à l'infini dans l'espace de configuration, peut être développée en série de fonctions fondamentales sous la forme :

$$f(q_1 \dots q_n) = \sum_k c_k a_k(q_1 \dots q_n) \quad (68)$$

avec :

$$c_k = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(q_1 \dots q_n) a_k(q_1 \dots q_n) d\tau. \quad (69)$$

Enfin, si A désigne un certain opérateur et si la fonction $A(a_k)$ est finie, uniforme, continue et nulle à l'infini dans l'espace de configuration, on pourra poser :

$$A(a_k) = \sum_i A_{ik} a_i \quad (70)$$

avec :

$$A_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_n a_i A(a_k) d\tau.$$

Les A_{ik} sont les éléments de la matrice correspondant à l'opérateur A .





CHAPITRE XVIII

QUELQUES EXEMPLES DE QUANTIFICATION

1. — *Le rotateur plan.* — Le cas de quantification le plus simple est celui du rotateur plan. Nous nommerons ainsi un système formé par un corpuscule de masse m assujéti à rester sur un cercle de rayon R ; sa position est repérée en prenant le centre du cercle comme pôle par une seule variable, l'azimut θ . Avec les conceptions anciennes, on a alors :

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \theta'^2 \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = m R^2 \theta' \quad (1)$$

et l'ancienne méthode de quantification donne :

$$\int_0^{2\pi} m R^2 \theta' d\theta = \int_0^{2\pi} m v R d\theta = n h \quad (2)$$

ou :

$$m v R = \frac{n h}{2 \pi} \quad (n \text{ entier}) \quad (3)$$

d'où l'on tire comme valeur de l'énergie :

$$E_n = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{n^2 h^2}{8 \pi^2 m R^2} = \frac{n^2 h^2}{8 \pi^2 I} \quad (4)$$

I désignant le moment d'inertie du rotateur.

Dans la nouvelle Mécanique, nous devons partir de l'équation de propagation :

$$\Delta a + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} [E - F] a = 0 \quad (5)$$

qui, ici, prend la forme très simple :

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 a}{d\theta^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E a = 0. \quad (6)$$

On a donc pour a :

$$a(\theta) = A \sin \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} R(\theta - \theta_0) \quad (7)$$

A et θ_0 étant les deux constantes d'intégration.

Pour que a soit une fonction uniforme de θ , il faut avoir :

$$\frac{\sqrt{2mE}}{h} R \cdot 2\pi = n \quad \text{ou} \quad E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m R^2} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 I}. \quad (8)$$

Nous retrouvons l'ancienne formule (4).

Les fonctions propres correspondant aux valeurs propres (8) sont, d'après (7) :

$$a_n(\theta) = A \sin n(\theta - \theta_0) \quad (9)$$

et les ondes stables (réduites) sont :

$$\Psi_n(\theta, t) = A \sin n(\theta - \theta_0) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t + z]} \quad (10)$$

Les fonctions (9) forment un système orthogonal, car on a :

$$\int_0^{2\pi} a_n a_{n'} R d\theta = 0 \quad \text{si } n \neq n'.$$

Si l'on veut normer ces fonctions, on devra prendre :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \quad \text{car } R \int_0^{2\pi} \sin^2 n(\theta - \theta_0) d\theta = \pi R.$$

Si l'on veut introduire le nuage de probabilité correspondant à l'onde stationnaire Ψ_n , on voit que ce nuage est immobile, car la vitesse $v = -\frac{1}{m}$ grad φ de ses éléments est nulle; quant à la densité du nuage donnant la probabilité de présence du corpuscule, elle est égale à $A^2 \sin^2 n(\theta - \theta_0)$.

Au lieu de considérer l'onde stationnaire Ψ_n , on peut considérer les ondes stables :

$$\Psi'_n = A' e^{\frac{2\pi i}{h} \left[E_n t \pm \frac{nh}{2\pi} (\theta - \theta_0) + z \right]} \quad (11)$$

obtenue par la superposition de deux ondes Ψ_n . Les éléments de probabilité associés à Ψ'_n ont la vitesse :

$$v = - \frac{1}{mR} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \pm \frac{1}{mR} \frac{nh}{2\pi}$$

c'est-à-dire, d'après (3), la même vitesse que le corpuscule dans la conception classique. La probabilité de présence est en ce cas la même en tous les points du cercle.

2. — *Le rotateur spatial.* — Un cas un peu plus compliqué est celui du rotateur spatial. Il est formé par un corpuscule de masse m assujéti à se mouvoir sur une sphère de rayon R . Dans l'ancienne Mécanique, on doit nécessairement décrire une géodésique de la sphère, c'est-à-dire un grand cercle. La condition de quantification et la formule donnant les énergies des mouvements stables sont donc, dans l'ancienne théorie des quanta, les mêmes que pour le rotateur plan.

En Mécanique ondulatoire, on doit partir de l'équation de propagation :

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E a = 0 \quad (12)$$

Δa doit être exprimée à l'aide des deux variables : colatitude θ et longitude α . Or, on a sur la sphère :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\alpha^2. \quad (13)$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= R^2 & g_{12} &= 0 & g_{22} &= R^2 \sin^2 \theta \\ g &= R^4 \sin^2 \theta & g^{11} &= \frac{1}{R^2} & g^{12} &= 0 & g^{22} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

On trouve alors pour Δa :

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial a}{\partial x_k} \right] \\ &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation en a est donc finalement :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \frac{8\pi^2 m R^2 E}{h^2} a = 0. \quad (16)$$

On démontre en Analyse que cette équation n'admet de solution uniforme, finie et continue sur toute la sphère, même au pôle, que si le coefficient de a est égal au produit de deux nombres entiers consécutifs positifs ou nuls. Les valeurs propres de E sont donc :

$$E_n = n(n+1) \frac{h^2}{8\pi^2 m R^2} \quad (n = 0, 1, \dots, \infty) \quad (17)$$

Les fonctions propres correspondantes sont les fonctions sphériques de Laplace $Y_n(\theta, \alpha)$. Elles s'expriment à l'aide des fonctions trigonométriques et des polynômes de Legendre. Les polynômes de Legendre sont définis par la relation :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]. \quad (18)$$

A partir des polynômes P_n , on définit les polynômes dérivés :

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} [P_n(x)]. \quad (19)$$

Ces définitions rappelées, voici comment les fonctions Y de Laplace s'expriment :

$$Y_n(\theta, \alpha) = \sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha) P_n^k(\cos \theta) \quad (20)$$

les A_k et les B_k étant des constantes. Les ondes stationnaires stables pour le rotateur spatial sont donc :

$$\Psi_{nk}(\theta, \alpha, t) \quad (21)$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos ka + B_k \sin ka) P_n^k(\cos \theta) \right] e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t + \gamma]}$$

On remarquera qu'ici il y a dégénérescence : pour une même valeur propre E_n , on peut obtenir $(2n + 1)$ fonctions différentes en choisissant arbitrairement les $(2n + 1)$ constantes $A_0, A_1, B_1, \dots, B_n$. Les fonctions Y_n sont orthogonales : cela résulte du théorème général démontré au dernier chapitre, puisque ces fonctions sont les fonctions propres d'une équation aux dérivées partielles.

Les éléments de probabilité associés à l'onde stationnaire Ψ_{nk} sont immobiles, et leur densité en un point de la sphère est Y_n^2 .

Comme il existe ici plusieurs fonctions propres pour une même valeur propre, on peut former de nombreuses combinaisons linéaires des ondes stationnaires donnant une onde résultante monochromatique. Les plus simples sont :

$$\Psi'_{nk}(\theta, \alpha, t) = A' P_n^k(\cos \theta) e^{\frac{2\pi i}{h} \left[E_n t \pm k \frac{h\alpha}{2\pi} + \gamma \right]} \quad (22)$$

Les éléments de probabilité associés à Ψ'_{nk} décrivent des parallèles sur la sphère avec la vitesse

$$v = - \frac{1}{m} \text{grad } \varphi = \frac{1}{mR \sin \alpha} \cdot k \frac{h}{2\pi}$$

La densité de la probabilité est fonction de la colatitude seulement et égale à $[A' P_n^k(\cos \theta)]^2$.

On obtiendrait des mouvements plus compliqués pour les éléments de probabilité en combinant des solutions stationnaires correspondant à des orientations différentes de l'axe polaire.

3. — *L'oscillateur harmonique.* — Nous allons maintenant étudier le cas de l'oscillateur harmonique linéaire. Il est formé par un corpuscule de masse m assujéti à se déplacer le long d'une droite ox et rappelé vers le point o par une force $-kx$ proportionnelle à l'élongation. Dans l'ancienne Mécanique, la fréquence de vibration est, nous l'avons vu au début du chapitre XVI, indépendante de l'amplitude de l'oscillation et égale à :

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T}. \quad (23)$$

L'ancienne théorie des quanta fournit pour l'énergie des états stables :

$$E_n = nh\omega. \quad (24)$$

Avec la nouvelle Mécanique, l'équation différentielle de l'amplitude est :

$$\frac{d^2a}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[E - \frac{kx^2}{2} \right] a = 0. \quad (25)$$

Posons :

$$A = \frac{8\pi^2m}{h^2} \quad B = \frac{4\pi^2mk}{h^2} = \frac{16\pi^4m^2\omega^2}{h^2} \quad (26)$$

l'équation (25) devient :

$$\frac{d^2a}{dx^2} + (AE - Bx^2) a = 0. \quad (27)$$

Faisons le changement de variables :

$$q = x\sqrt{B} \quad (28)$$

et posons :

$$\frac{AE}{\sqrt{B}} = \lambda \quad (29)$$

il vient :

$$\frac{d^2a}{dq^2} + (\lambda - q^2) a = 0. \quad (30)$$

Nous nous proposons de démontrer que les valeurs propres de cette équation sont :

$$\lambda = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1 \dots \quad (31)$$

En effet, faisons dans (30) le changement de fonction :

$$a(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} u(q) \quad (32)$$

nous obtenons :

$$\frac{d^2 u}{dq^2} - 2q \frac{du}{dq} + (\lambda - 1) u = 0. \quad (33)$$

Comme la fonction u doit être finie, uniforme et continue, elle peut s'exprimer sous la forme d'une série de puissances positives en q .

$$u = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \dots + c_n q^n + \dots \quad (34)$$

Substituons dans (33) et annulons le coefficient de q^n ; on trouve :

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} = (2n - \lambda + 1)c_n$$

ou :

$$c_{n+2} = \frac{2n + 1 - \lambda}{(n + 1)(n + 2)} c_n \quad (35)$$

Tous les c_n d'indice pair se calculent donc à partir de c_0 , tous les c_n d'indice impair à partir de c_1 . Les constantes c_0 et c_1 sont donc les constantes arbitraires d'intégration de l'équation (33). Supposons d'abord que λ soit égal à un nombre impair $2k + 1$: k sera pair ou impair. Si k est impair, faisons $c_0 = 0$ et c_1 quelconque; si k est pair, faisons $c_1 = 0$ et c_0 quelconque. Nous obtenons ainsi une fonction $u(q)$ qui se réduit à un polynôme de degré k que l'on nomme le k^{e} polynôme d'Hermite $H_k(q)$. La fonction $a = e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q)$ est finie, uniforme, continue et nulle pour $q = \pm \infty$; c'est une fonction propre de l'équation (30). Si nous choisissons c_0 et c_1 autrement que nous venons de le

faire, nous obtenons un nombre fini de termes dont l'exposant a une certaine parité et un nombre infini de termes dont l'exposant a la parité opposée; on se rend compte aisément que $u(q)$ tend alors vers l'infini plus rapidement que $e^{\frac{q^2}{2}}$ quand q croît indéfiniment; la fonction $a(q)$ correspondante n'est donc pas une fonction propre.

Supposons maintenant que λ ne soit pas égal à un nombre entier impair; alors, quels que soient c_0 et c_1 , on obtient pour $u(q)$ une série qui devient infinie plus rapidement que $e^{\frac{q^2}{2}}$ quand q croît indéfiniment, et la fonction $a(q)$ correspondante ne convient pas.

En résumé, l'équation différentielle (30) n'admet une solution finie, continue et nulle à l'infini, que pour $\lambda = 2k + 1$, k étant un entier positif ou nul. Les fonctions propres correspondantes sont :

$$a_k(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q). \quad (36)$$

Dans la théorie des polynômes d'Hermite, on démontre que les fonctions a_k sont orthogonales; cela résulte d'ailleurs du théorème général sur l'orthogonalité des fonctions propres d'une équation différentielle du type (30). On peut aussi démontrer que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2(q) e^{-q^2} dq = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (37)$$

de sorte que les fonctions propres normées sont ici :

$$a_k(q) = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q). \quad (38)$$

Revenons maintenant à notre problème de quantification. L'équation (27) admet, d'après ce qui précède, les valeurs propres :

$$E_k = (2k + 1) \frac{\sqrt{B}}{A} = (2k + 1) \frac{h\omega}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) h\omega. \quad (39)$$

Ce résultat est remarquable, car nous retrouvons ainsi la loi des demi-quanta, que l'expérience avait suggérée, mais que l'ancienne théorie des quanta était impuissante à justifier.

La fonction propre normée de (27) correspondant à E_k est :

$$a_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{2\pi^2\omega m}{h} x^2} H_k \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{h}} x \right) \quad (40)$$

et l'onde stationnaire d'ordre k :

$$\begin{aligned} & \Psi_k(x, t) \quad (41) \\ = & \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{2\pi^2\omega m}{h} x^2} H_k \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{h}} x \right) e^{\frac{2\pi i}{h} \left(k + \frac{1}{2} \right) \omega t} \end{aligned}$$

Quand l'état de l'oscillateur est représenté par Ψ_k , les éléments de probabilité sont immobiles. La probabilité de présence du corpuscule au point x est :

$$\frac{1}{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4\pi^2\omega m}{h} x^2} H_k^2 \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{h}} x \right).$$

On voit donc que le corpuscule peut occuper une position quelconque sur ox , mais que la probabilité pour qu'il occupe une position très éloignée de l'origine O est très faible. Dans l'ancienne Mécanique, le mouvement s'effectue le long d'une portion limitée de l'axe ox , les extrémités de cette portion étant les points où le corpuscule rebrousse chemin. Il y a donc à ce point de vue une grande différence entre l'ancienne et la nouvelle Mécanique.

On peut aussi considérer un oscillateur harmonique à deux ou trois dimensions. Dans le cas général des 3 dimensions, le corpuscule peut se déplacer dans toutes les directions, et l'énergie potentielle peut toujours se mettre, grâce à un choix convenable des axes rectangulaires, sous la forme :

$$F(x, y, z) = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}. \quad (42)$$

Posons :

$$\Psi(x, y, z, t) = a_1(x) a_2(y) a_3(z) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_1 + E_2 + E_3] t} \quad (43)$$

l'équation de propagation se décompose en trois équations telles que :

$$\frac{d^2 a_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E_1 - \frac{k_1 x^2}{2} \right] a_1 = 0 \quad \text{etc.} \quad (44)$$

D'après le résultat obtenu pour l'oscillateur linéaire, on voit que les valeurs quantifiées de l'énergie sont :

$$\begin{aligned} E_{n_1 n_2 n_3} &= E_1 + E_2 + E_3 \quad (45) \\ &= \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) h\omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) h\omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) h\omega_3 \end{aligned}$$

avec :

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m}} \quad (46)$$

L'amplitude des ondes Ψ stationnaires s'exprime par un produit de polynômes d'Hermite.

Si deux des constantes k_i sont égales, il y a dégénérescence partielle; si les trois k_i sont égaux, il y a dégénérescence totale et l'oscillateur est isotrope. Dans l'un et l'autre cas, plusieurs valeurs quantifiées de l'énergie coïncident; en d'autres termes, il y a plusieurs états stables pour une même valeur propre de l'énergie.

4. — *L'atome d'hydrogène.* — Arrivons maintenant au cas très important de l'atome d'hydrogène formé d'un noyau positif immobile de charge $+e$ et d'un électron planète de charge $-e$. Nous prendrons un système de coordonnées sphériques autour du noyau : α longitude, θ colatitude, et r rayon vecteur.

En coordonnées sphériques, on a :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\alpha^2 \quad (47)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 & g_{22} &= r^2 & g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta & g_{ik} &= 0 \quad (i \neq k) \\ g &= r^4 \sin^2 \theta & g^{11} &= 1 \\ g^{22} &= \frac{1}{r^2} & g^{33} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} & g^{ik} &= 0 \quad (i \neq k) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

L'équation en a est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} \right] a = 0 \quad (49)$$

c'est-à-dire en faisant les calculs :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin^2 \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} \right] a = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Schrödinger a démontré que cette équation admet des solutions finies, continues, uniformes et nulles à l'infini pour toutes les valeurs positives de E et pour les valeurs négatives :

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}. \quad (n \text{ entier}) \quad (51)$$

Les valeurs propres positives correspondent aux trajectoires hyperboliques de l'ancienne Mécanique, les valeurs propres négatives correspondent aux états stables déjà prévus par Bohr, car la formule (51) coïncide exactement avec la formule fondamentale de la théorie de Bohr.

Remarquons que nous avons une suite continue de valeurs propres prolongeant une suite discontinue; nous avons signalé que cette circonstance pouvait se présenter quand le domaine D définissant le problème de vibrations propres était infini, et c'est bien le cas ici.

Le problème est dégénéré : à chaque valeur propre (51) correspondent plusieurs fonctions propres, chacune d'elles exigeant, par sa détermination complète, qu'on se donne deux nombres entiers k et k_1 , tels que :

$$\begin{aligned} 0 & \leq k < n \\ 0 & \leq k_1 \leq k. \end{aligned} \quad (52)$$

D'après les calculs de Schrödinger, l'onde stationnaire correspondant aux 3 entiers n , k , k_1 , est donnée par :

$$\Psi_{nkk_1}(r, \theta, \alpha, t) = (A \cos k_1 \alpha + B \sin k_1 \alpha) P_k^{k_1}(\cos \theta) x^k e^{-x} L_{n+k}^{2k+1}(x) e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n t + \gamma)} \quad (53)$$

A , B et γ étant des constantes et x désignant la quantité $\frac{4\pi^2 m e^2}{n^2 h^2} r$. Nous avons défini les polynômes $P_k^{k_1}(\cos \theta)$ au second paragraphe de ce chapitre; quant à $L_{n+k}^{2k+1}(x)$, c'est un polynôme en x qui se rattache aux polynômes de Laguerre et que nous n'explicitons pas ici.

Les éléments de probabilité associés à Ψ_{nkk_1} sont immobiles, et la densité du nuage de probabilité est proportionnelle au carré de l'amplitude. On peut remarquer, comme dans le cas de l'oscillateur, que l'électron a une certaine probabilité de se trouver à une distance quelconque du noyau, cette probabilité diminuant cependant rapidement avec la distance. Dans l'ancienne Dynamique, au contraire, l'électron d'énergie négative E_n ne pouvait se trouver en dehors de la sphère de rayon :

$$R_n = - \frac{e^2}{E_n} \quad (54)$$

car, à l'extérieur de cette sphère, son énergie cinétique aurait dû être négative, et cela ne pouvait pas être.

On peut, en combinant des ondes stationnaires du type (53), obtenir un grand nombre d'ondes stables monochromatiques. Il suffit pour cela d'ajouter plusieurs Ψ_{nkk_1} , correspondant à une même valeur de n , mais à des valeurs différentes de k et k_1 ou à des orientations diverses de l'axe polaire. L'une des combinaisons les plus simples est :

$$\Psi'_{nkk_1} = A' P_k^{k_1}(\cos \theta) x^k e^{-x} L_{n+k}^{2k+1}(x) e^{\frac{2\pi i}{h} \left[E_n t \pm k_1 \frac{h}{2\pi} \alpha + \gamma \right]} \quad (55)$$

Les éléments de probabilité, associés à l'onde stable Ψ'_{nk_1} , décrivent des cercles autour de la ligne des pôles avec une vitesse liée au rayon vecteur R et à la colatitude θ par la relation :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{m} \text{grad } \varphi = -\frac{1}{mR \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ &= \pm \frac{1}{mR \sin \theta} k_1 \frac{h}{2\pi} \end{aligned} \quad (36)$$

formule qui est à comparer avec la formule :

$$mvR = k_1 \frac{h}{2\pi}$$

que l'ancienne théorie des quanta appliquait au corpuscule lui-même.

CHAPITRE XIX

INTERPRÉTATION DES ONDES Ψ POUR LES SYSTÈMES QUANTIFIÉS

1. — *Application des principes généraux aux systèmes quantifiés.* — L'équation générale de propagation pour un système non soumis à des actions extérieures est :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q_i) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Si le système est formé d'un seul corpuscule comme dans les systèmes étudiés au chapitre précédent, l'équation (1) se réduit à :

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2)$$

Ces équations (1) et (2) sont satisfaites par toutes les combinaisons linéaires des ondes stationnaires Ψ_k ayant pour fréquences les valeurs propres E_k divisées par h ; inversement, toute fonction finie, uniforme, continue et nulle à l'infini peut être développée en série de fonctions fondamentales. Nous pouvons donc toujours poser :

$$\Psi(q_i, t) = \sum_k c_k a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k t + \gamma_k)} \quad (3)$$

Les fonctions a_k sont orthogonales et on peut les supposer normées. Nous supposons les c_k choisis de telle façon que $\sum_k c_k^2 = 1$, ce qui est toujours possible, puisque Ψ n'est défini qu'à un facteur constant près.

Pour interpréter le sens de l'onde Ψ , nous devons faire usage des deux principes fondamentaux : celui des interférences et celui de la décomposition spectrale.

D'après le principe des interférences, la probabilité de présence du corpuscule dans l'espace ou du point représentatif dans l'espace de configuration est :

$$\begin{aligned} \Psi \times \Psi^* &= \sum_{kl} c_k c_l a_k a_l e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l) t + \gamma_k - \gamma_l]} \\ &= \sum_k c_k^2 a_k^2 + \sum_{k < l} 2c_k c_l a_k a_l \cos \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l) t + \gamma_k - \gamma_l] \end{aligned} \quad (4)$$

Il est assez remarquable de voir paraître dans cette expression, précisément les fréquences $\frac{E_k - E_l}{h}$ qui figurent dans la loi des fréquences de Bohr et expliquent pourquoi les raies spectrales d'un atome ont des fréquences égales aux différences des termes spectraux $\frac{E_k}{h}$ de l'atome.

L'expression (4) donne la probabilité de présence en valeur absolue, car si on intègre, on a bien :

$$\int \dots \int_n \Psi \Psi^* d\tau = 1 \quad (5)$$

en raison des relations :

$$\int \dots \int_n a_k a_l d\tau = 0; \quad \int \dots \int_n a_k^2 d\tau = 1; \quad \sum_k c_k^2 = 1. \quad (6)$$

Comment devons-nous énoncer ici le principe de décomposition spectrale? D'après Born, on doit dire : la probabilité, pour que le système quantifié dont l'onde associée à la forme (3) soit trouvé à la suite d'une observation dans l'état stationnaire d'indice k , est a_k^2 . En effet, l'intensité $c_k^2 a_k^2 (q_i)$ de la composante spectrale de fréquence $\frac{E_k}{h}$

dans le développement (3), est variable d'un point à un autre, mais l'intensité totale de cette composante $\int \dots \int c_k^2 a_k^2(q_i) d\tau$ est égale à c_k^2 , puisque les a_k sont normées; il est donc naturel de considérer les c_k^2 comme les probabilités relatives des divers états du système associé à l'onde (3).

Cet énoncé du principe de décomposition spectrale pour les systèmes quantifiés paraît au premier abord soulever une difficulté qu'il est intéressant d'approfondir. Présentons l'objection en raisonnant sur le cas d'un seul corpuscule : « Le corpuscule, disons-nous, est dans l'un quelconque des états stables, la probabilité pour que ce soit dans l'état E_k étant c_k^2 ; d'autre part, quand il est dans l'état E_k , la probabilité pour qu'on le trouve au point xyz est $a_k^2(xyz)$; donc, en vertu des théorèmes des probabilités totales et composées, la probabilité pour que le corpuscule se trouve en xyz est

$\sum_k c_k^2 a_k^2(xyz)$. Or, ceci n'est pas égal à $\Psi \cdot \Psi^*$ car, dans l'expression (4), il y a en plus du terme $\sum_k c_k^2 a_k^2$ les termes pendulaires contenant les fréquences de Bohr. Il y a donc contradiction entre nos deux principes fondamentaux ».

Telle est l'objection. Pour la lever, il faut se rappeler le sens exact que la théorie de Bohr et Heisenberg attribue à l'onde Ψ . Quand nos connaissances sur un système quantifié sont représentées par l'onde Ψ de la formule (3), cela ne veut pas dire que le système se trouve réellement alors dans un des états quantifiés, la probabilité pour que ce soit l'état d'énergie E_k étant c_k^2 . La connaissance de l'onde Ψ nous apprend seulement que si nous faisons une expérience permettant d'attribuer une position au corpuscule du système quantifié, il y a une probabilité $\Psi(x, y, z) \cdot \Psi^*(xyz) dx dy dz$, pour que cette position se trouve dans l'élément de volume $dx dy dz$ et que si, au contraire, nous faisons une expérience nous permettant d'attribuer un état énergétique au corpuscule, il y a une probabilité égale à

c_k^2 de le trouver dans l'état d'énergie E_k . Mais il est dans l'essence des conceptions d'Heisenberg d'admettre que ces deux expériences possibles troubleront et troubleront *différemment* l'état de choses initialement existant; c'est pour cette raison que l'application du théorème des probabilités composées n'est pas justifiée. Si, pour déterminer la position du corpuscule, on s'impose de déterminer d'abord son état énergétique puis, cette mesure faite, de déterminer sa position, la probabilité de trouver ainsi le corpuscule en xyz sera $\sum_k c_k^2 a_k^2 (xyz)$; mais cette probabilité n'a pas de raison d'être la même que celle de trouver le corpuscule en xyz par une mesure directe de la position à partir de l'état initial, puisque la détermination préalable de l'état énergétique perturbe entièrement la situation du système. En résumé, l'intérêt de cette objection est de montrer que si l'on veut maintenir côte à côte les deux principes des interférences et de la décomposition spectrale, il semble indispensable d'admettre qu'un système quantifié est nécessairement perturbé par tous les procédés de mesure ou d'observation.

2. — *Influence d'une action extérieure sur un système quantifié.* — Nous allons maintenant supposer que le système quantifié est soumis à une action perturbatrice extérieure qui peut dépendre du temps. L'énergie potentielle $F(q_i, t)$ se compose alors de deux termes : un terme $\mathcal{V}(q_i)$, provenant des réactions entre les constituants du système et un terme $R(q_i, t)$, provenant du champ perturbateur extérieur : R est le potentiel perturbateur. En l'absence du champ perturbateur, l'équation de Schrödinger pour le système est :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - \mathcal{V}(q_i)] a = 0. \quad (7)$$

Si nous désignons toujours par $a_k(q_i)$ les fonctions propres orthogonales et normées de cette équation, l'onde Ψ



la plus générale pour le système considéré, est :

$$\Psi(q_i, t) = \sum_k c_k a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k]} \quad (8)$$

les c_k et les γ_k étant des constantes réelles.

Lorsque le système est soumis à la perturbation, l'équation à satisfaire est :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} [\mathcal{V}(q_i) + R(q_i, t)] \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (9)$$

La méthode la plus simple pour rechercher les solutions de cette équation consiste à poser :

$$\Psi(q_i, t) = \sum_k c_k(t) a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \quad (10)$$

en supposant maintenant c_k et γ_k fonctions du temps : c'est la méthode de variation des constantes de Dirac. En substituant (10) dans (9), on obtient :

$$\begin{aligned} & - \frac{8\pi^2}{h^2} R(q_i, t) \sum_k c_k(t) a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \\ & = \frac{4\pi i}{h} \sum_k a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \left(\frac{dc_k}{dt} + c_k \frac{2\pi i}{h} \frac{d\gamma_k}{dt} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Multiplions par $a_l(q_i) d\tau$ et multiplions dans tout l'espace de configuration. Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi i}{h} \left[\frac{dc_l}{dt} + c_l \frac{2\pi i}{h} \frac{d\gamma_l}{dt} \right] e^{\frac{2\pi i}{h} [E_l t + \gamma_l(t)]} \\ & = - \frac{8\pi^2}{h^2} \sum_k c_k(t) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \int \dots \int R(q_i, t) a_k a_l d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

L'intégrale multiple est l'élément d'indices kl de la matrice correspondant à l'opérateur : multiplication par $R(q_i, t)$; désignons-le par $R_{kl}(t)$. On a :

$$\begin{aligned} & \frac{dc_l}{dt} + \frac{2\pi i}{h} c_l \frac{d\gamma_l}{dt} \\ &= \frac{2\pi i}{h} \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)]} \end{aligned} \quad (13)$$

En passant aux quantités complexes conjuguées, on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{dc_l}{dt} - \frac{2\pi i}{h} c_l \frac{d\gamma_l}{dt} \\ &= -\frac{2\pi i}{h} \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) e^{-\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)]} \end{aligned} \quad (14)$$

Enfin, par addition et soustraction de (13) et (14), on obtient les deux équations réelles :

$$\frac{dc_l}{dt} = -\frac{2\pi}{h} \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) \sin \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)] \quad (15)$$

$$c_l \frac{d\gamma_l}{dt} = \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) \cos \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)] \quad (16)$$

C'est un système d'équations simultanées, qui déterminent les $c_l(t)$ et les $\gamma_l(t)$, quand on connaît leurs valeurs initiales.

D'après Born, la quantité $c_k^2(t)$ donne la probabilité pour qu'à l'instant t , le système soit trouvé dans l'état d'énergie E_k . La quantité $\sum_k c_k^2(t)$, supposée égale à 1 au début de la perturbation, doit rester constamment égale

à 1. Ceci est facile à vérifier; on a, en effet, en partant de (15) :

$$\begin{aligned} \sum_l c_l \frac{dc_l}{dt} &= \sum_l \frac{d(c_l^2)}{dt} \\ &= -\frac{2\pi}{h} \sum_{kl} R_{kl}(t) c_k c_l \sin \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k - \gamma_l] \end{aligned} \quad (17)$$

et la somme du second membre est nulle, car elle change de signe quand on permute les indices k et l ; donc $\sum_l c_l^2$ est constant et garde sa valeur initiale égale à 1.

L'hypothèse de Born, telle qu'elle vient d'être énoncée, soulève une petite difficulté. Les fonctions :

$$\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k]}$$

représentent, en effet, les ondes stationnaires correspondant à la valeur de l'énergie potentielle, quand la perturbation n'existe pas, mais à un instant τ , pendant la perturbation; l'énergie potentielle est $\mathcal{V}(q_i) + R(q_i, \tau)$ et les valeurs et fonctions propres à cet instant sont celles de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] \\ + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - \mathcal{V}(q_i) - R(q_i, \tau)] a = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

où τ est considéré comme un paramètre constant. Ce sont les valeurs propres E_k^τ de l'équation (18), qui doivent être considérées comme les énergies des états stables à l'instant τ . Si, en effet, on fait à l'instant τ une expérience pour déterminer l'état énergétique du système, on peut trouver pour l'énergie une des valeurs E_k^τ , mais on ne peut avoir aucune raison de trouver une des valeurs E_k correspondant à l'absence de perturbation. Si $a_k^\tau(q_i)$ sont les fonctions propres correspondant aux E_k^τ pour l'équation (18), on doit développer la fonction d'ondes $\Psi(q_i, t)$ en série

de fonctions propres sous la forme :

$$\Psi(q_i, t) = \sum_k d_k(t) a_k^\tau(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \delta_k(t)]} \quad (19)$$

et c'est la quantité $d_k^2(\tau)$ qui devra donner la probabilité pour qu'à l'instant τ le système se trouve dans l'état d'énergie E_k^τ (Fock).

Si l'on a affaire à une perturbation de durée limitée qui commence à l'instant 0 pour se terminer à l'instant T, on a $R(q_i, 0) = 0$ et $R(q_i, T) = 0$, et, par suite, $E_k = E_k^0 = E_k^T$. On peut alors se servir des coefficients c_k du développement (8), et dire que $c_k^2(T)$ représente la probabilité, pour qu'à la fin de la perturbation le système soit trouvé dans l'état d'énergie E_k . Dans ce cas, la difficulté disparaît donc par le fait que les valeurs propres de l'équation (18) ont repris à la fin de la perturbation leurs valeurs initiales. On pourra ainsi calculer avec M. Born la probabilité pour qu'à la fin de la perturbation le système soit trouvé dans tel ou tel état. Nous n'insisterons pas sur tous les développements et applications de ces idées générales, dont l'exposé exigerait à lui seul tout un volume; nous avons seulement voulu marquer comment le principe de décomposition spectrale trouve ici son application.

3. — Le nuage de probabilité et les matrices d'Heisenberg. — Nous ne pouvons développer ici la théorie de Schrödinger sur l'émission du rayonnement par les atomes, ni la méthode des matrices d'Heisenberg.

Nous nous contenterons de montrer comment, dans le cas simple de l'atome d'hydrogène, on peut faire apparaître les éléments de matrice d'Heisenberg, en considérant le nuage de probabilité associé à l'onde Ψ . Dans l'atome d'hydrogène, il y a un seul corpuscule mobile et il suffit de prendre trois coordonnées rectangulaires, q_1, q_2, q_3 . Nous allons définir les six opérateurs Q^i et P^i par les formules :

$Q^i =$ multiplication par q_i

$$P_i = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

D'après la définition que nous avons donnée des éléments de matrice correspondant à un opérateur [formule (61) du chapitre XVII], nous obtenons, pour les éléments d'indices kl des 6 matrices correspondant aux Q^i et aux P^i :

$$Q_{kl}^i = \iiint a_k a_l q_i d\tau \quad (21)$$

$$P_{kl}^i = \iiint a_k \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial a_l}{\partial q_i} d\tau \quad (22)$$

les a_k étant les fonctions propres normées de l'atome d'hydrogène. Supposons que la fonction d'ondes pour l'atome envisagé soit :

$$\Psi = \sum_k c_k a_k(q_1, q_2, q_3) e^{2\pi i(v_k t + \gamma_k)} \quad (23)$$

Nous pouvons envisager le nuage de probabilité correspondant à cette forme de Ψ . Sa densité est :

$$\begin{aligned} \rho = a^2 = & \sum_k c_k a_k^2 \\ & + 2 \sum_{k < l} c_k c_l a_k a_l \cos 2\pi [(v_k - v_l) t + \gamma_k - \gamma_l] \end{aligned} \quad (24)$$

et, d'après la formule (37) du chapitre IX, la vitesse des éléments de probabilité a pour composante, suivant l'axe q_i :

$$\begin{aligned} v_i = & -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = -\frac{h}{4\pi i m} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_i}}{a^2} \\ = & \frac{h}{2\pi m a^2} \sum_{k < l} c_k c_l \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) \sin 2\pi [(v_k - v_l) t + \gamma_k - \gamma_l] \end{aligned} \quad (25)$$

Supposons maintenant que nous répartissions également entre tous les éléments de probabilité la charge électrique e de l'électron, de telle sorte que la charge totale soit :

$$\iiint \rho e d\tau = e.$$

La densité ρe représente, si l'on veut, la densité moyenne probable de l'électricité dans l'atome, et le moment électrique du nuage de probabilité a pour composante, suivant l'axe des q_i , la quantité :

$$M_i = \iiint \rho e q_i d\tau = C^{te} \quad (26)$$

$$+ 2 \sum_{k < l} c_k c_l e \iiint a_k a_l q_i d\tau \cdot \cos 2\pi [(v_k - v_l)t + \gamma_k - \gamma_l]$$

Cette composante de moment électrique contient donc des termes variables périodiquement avec les fréquences $v_k - v_l$, qui sont les fréquences de Bohr, et l'amplitude du terme de fréquence $v_k - v_l$ est proportionnelle à Q_{kl}^i . Ceci nous donne, dans une certaine mesure, une interprétation physique des éléments de la matrice Q^i introduits par Heisenberg.

La densité électrique du nuage de probabilité étant variable avec le temps, ce nuage est le siège de courants électriques. La composante suivant l'axe des q_i du courant électrique à l'intérieur du nuage est :

$$J_i = \iiint \rho e v_i d\tau \quad (27)$$

et par suite, d'après (25) :

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{he}{2\pi m} \iiint \sum_{k < l} c_k c_l \\ &\left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau \cdot \sin 2\pi [(v_k - v_l)t + \gamma_k - \gamma_l] \\ &= \text{partie réelle de } \frac{2e}{m} \sum_{k < l} c_k c_l \frac{h}{4\pi i} \\ &\iiint \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau \cdot e^{2\pi i [(v_k - v_l)t + \gamma_k - \gamma_l]} \end{aligned} \quad (28)$$

Les composantes du courant se décomposent donc en termes périodiques ayant les fréquences de Bohr, et l'amplitude du terme de fréquence $\nu_k - \nu_l$ est proportionnelle à la quantité :

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{4\pi i} \iiint \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau \\ &= \frac{\hbar}{2\pi i} \iiint a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} d\tau = P_{kl}^i \end{aligned} \quad (29)$$

la première égalité s'obtenant par une intégration par parties, parce que les a_k sont nulles à l'infini. On obtient ainsi en un certain sens une interprétation physique des P_{kl}^i d'Heisenberg.

De ce qui précède résulte aussi que, si l'on appelle δ la densité électrique du nuage de probabilité et j_i les composantes de la densité de courant correspondante, on a :

$$\delta = \rho e = e\Psi\Psi^*. \quad (30)$$

$$j_i = \rho e v_i = - \frac{\hbar e}{4\pi i m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_i} \right). \quad (31)$$

La formule (30) a été proposée par Schrödinger dans ses célèbres Mémoires sur la Mécanique ondulatoire; il considérait alors δ comme une véritable densité électrique.

La formule (31) a été donnée pour la première fois par M. Gordon, dans son mémoire sur l'effet Compton, sous une forme d'ailleurs plus générale.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	V
CHAPITRE PREMIER. — <i>Les anciennes Mécaniques du point matériel.</i>	1
1. Principe d'Hamilton	1
2. Equations de Lagrange	3
3. Fonction de Lagrange. Quantité de mouvement et énergie	4
4. Autre forme du principe d'Hamilton. Principe de Maupertuis.	8
5. Les équations canoniques d'Hamilton	11
6. Les transformations de contact	15
CHAPITRE II. — <i>La théorie de Jacobi</i>	19
1. L'équation de Jacobi	19
2. Intégrale d'Hamilton et fonction de Jacobi	20
3. Fonction de Jacobi raccourcie	24
4. Diverses formes de l'équation de Jacobi	23
5. La fonction de Jacobi pour le mouvement rectiligne uniforme.	26
6. La fonction de Jacobi dans un champ constant et uniforme.	29
CHAPITRE III. — <i>Les idées de base de la Mécanique ondulatoire</i>	33
1. Point de départ	35
2. Autre manière de retrouver les précédents résultats	37
3. Indice de réfraction. Théorème fondamental sur la vitesse de groupe des ondes Ψ	39
4. Relations entre les grandeurs ondulatoires et les grandeurs mé- caniques	42
5. Principe de moindre action et principe de Fermat	44
CHAPITRE IV. — <i>Généralités sur la propagation des ondes</i>	46
1. Propagation des ondes dans un milieu homogène et permanent.	46
2. Dispersion	48
3. Trains d'ondes et groupes d'ondes	49
4. Propagation dans un milieu permanent non homogène	58
5. Construction des ondes-enveloppes et principe de Fermat	62
6. Les groupes d'ondes dans un milieu permanent non homogène.	63
7. Propagation des ondes dans un milieu non permanent	66
CHAPITRE V. — <i>Les équations de propagation de l'onde associée à un corpuscule</i>	69
1. Critérium pour le choix des équations de propagation	69
2. Equation de propagation en l'absence de champ	70

	Pages
3. Equation de propagation dans un champ constant	72
4. Equation de propagation dans les champs variables	76
5. Procédé servant à trouver automatiquement l'équation (3S)	80
CHAPITRE VI. — Mécanique classique et Mécanique ondulatoire	82
1. Signification de l'amplitude a en Mécanique classique	82
2. La probabilité de présence	86
3. Exemples concrets	88
4. Résumé du chapitre	91
CHAPITRE VII. — Le principe des interférences et la diffraction des électrons par les cristaux	93
1. Le principe des interférences	93
2. Diffraction des électrons par les cristaux	94
3. Préliminaires à l'étude des expériences de G.-P. Thomson	97
4. Expériences de G.-P. Thomson	102
5. Expériences de M. Ponte (1929)	109
CHAPITRE VIII. — Le principe des interférences et la diffusion des particules électrisées par un centre fixe	111
1. Diffusion des particules électrisées d'après la Mécanique classique	111
2. Calcul par la Mécanique ondulatoire	113
CHAPITRE IX. — Le mouvement de la probabilité de présence dans la nouvelle Mécanique	121
1. Le nuage de probabilité	121
2. Equations du mouvement des éléments de probabilité	123
3. Théorème d'Ehrenfest	126
4. Calcul des fonctions φ et a	131
5. Théorie de l'onde-pilote	132
CHAPITRE X. — La Mécanique ondulatoire des corpuscules de lumière	136
1. Les photons et leurs ondes associées	136
2. Le nuage de probabilité associé au photon	138
3. L'interprétation des phénomènes d'interférences	140
4. Interférences de la lumière au voisinage d'un miroir plan parfaitement réfléchissant	143
5. Interférences de la lumière au voisinage d'un miroir plan imparfaitement réfléchissant	145
6. Superposition de deux ondes planes monochromatiques	148
CHAPITRE XI. — La théorie d'Heisenberg et de Bohr	151
1. Le principe de décomposition spectrale	151
2. La théorie d'Heisenberg et Bohr. Les relations d'incertitude	153
3. Signification de l'onde dans la théorie d'Heisenberg et Bohr	156
4. Le raccord avec l'ancienne Dynamique	158
5. Objection d'Einstein. Le corpuscule est-il non localisé ou bien non localisable?	160
6. Conclusion	164
CHAPITRE XII. — Les possibilités de mesure et les relations d'Heisenberg	165
1. Les procédés de mesure et les relations d'Heisenberg	165

	Pages
2. Le microscope d'Heisenberg	166
3. Mesure de la vitesse d'un électron au moyen de l'effet Doppler	168
4. Passage d'un corpuscule à travers un diaphragme	171
5. Remarque sur la mesure de la vitesse	176
CHAPITRE XIII. — <i>Propagation d'un train d'ondes Ψ en l'absence du champ et dans un champ uniforme</i>	178
1. Solution rigoureuse de l'équation de propagation en l'absence de champ	178
2. Développements des calculs dans un cas particulier (Darwin) ..	182
3. Mesure de la vitesse par deux observations successives	188
4. Solution rigoureuse de la propagation d'un train d'ondes Ψ dans un champ uniforme constant	190
5. Développement des calculs dans un cas particulier	193
CHAPITRE XIV. — <i>La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.</i>	198
1. Résumé des principes de l'ancienne Dynamique des systèmes.	198
2. Passage de l'ancienne à la nouvelle Dynamique des systèmes.	204
3. Quelques lemmes mathématiques	206
4. L'équation de propagation dans l'espace de configuration	210
CHAPITRE XV. — <i>Interprétation de l'onde associée au mouvement d'un système</i>	216
1. L'approximation de l'optique géométrique	216
2. Cas général. Mouvements de la probabilité	220
3. Théorèmes d'Ehrenfest	223
4. L'interprétation de Bohr et Heisenberg	227
5. Remarque	229
CHAPITRE XVI. — <i>L'ancienne théorie des quanta et la stabilité des mouvements périodiques</i>	231
1. Premiers exemples de quantification des mouvements périodiques.	231
2. Les conditions de Wilson-Sommerfeld	235
3. L'énoncé d'Einstein	238
4. Quantification du mouvement Képlérien	240
5. La question de la dégénérescence	242
6. Insuffisance de l'ancienne théorie des quanta	243
CHAPITRE XVII. — <i>Interprétation ondulatoire de la stabilité des mouvements quantifiés</i>	246
1. Signification de la quantification en Mécanique ondulatoire	246
2. Exemples simples de vibrations propres : cordes et membranes vibrantes	250
3. Etude du cas général de l'équation (9)	256
4. La quantification des systèmes de corpuscules	261
CHAPITRE XVIII. — <i>Quelques exemples de quantification</i>	265
1. Le rotateur plan	265
2. Le rotateur spatial	267
3. L'oscillateur harmonique	270
4. L'atome d'hydrogène	274

	Pages
CHAPITRE XIX. — <i>Interprétation des ondes Ψ pour les systèmes quantifiés</i>	278
1. Application des principes généraux aux systèmes quantifiés...	278
2. Influence d'une action extérieure sur un système quantifié	281
3. Le nuage de probabilité et les matrices d'Heisenberg	288
TABLE DES MATIÈRES	289

CET OUVRAGE A ÉTÉ ENTIÈREMENT EXÉCUTÉ
PAR LES
IMPRIMERIES DELMAS, CHAPON, GOUNOUILHOU
(ATELIERS DELMAS-CADORET)
A BORDEAUX
PAR DES PROCÉDÉS TECHNIQUES SPÉCIAUX
ET ACHEVÉ D'IMPRIMER
LE 18 FÉVRIER 1930



ONT PARTICULIÈREMENT COLLABORÉ
A CETTE EXÉCUTION :

- M. POUTET,
Chef du Service des Éditions;
- M. MAGNE,
Chef du Service de la Composition Mécanique;
- M. CAPDEFER,
Chef du Service de la Préparation et de la Correction;
- M. LALAURETTE,
Chef de l'équipe d'Impression;
- M. HOSTEINS,
Metteur en pages;
- MM. ALOIR ET LAFON,
Imprimeurs.
- M. HUGUET,
Aide-metteur en pages;
- MM. TARDIEU ET LABADIE,
Opérateurs.