



# Le De Superficierum Divisionibus Liber d'al-Baghdadi et ses prolongements en Europe

Marc Moyon

## ► To cite this version:

Marc Moyon. Le De Superficierum Divisionibus Liber d'al-Baghdadi et ses prolongements en Europe. Bouzari, Abdelmalek; Guergour, Youcef. Actes du IXème Colloque Maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tipaza, 12-14 mai 2007), Imprimerie Fasciné, 2011, 978-9947-0-3109-4. <hal-00536728>

**HAL Id: hal-00536728**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00536728>**

Submitted on 16 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Le De Superficierum Divisionibus Liber d'al-Baghdādī  
et ses prolongements en Europe.<sup>(\*)</sup>**

**Marc MOYON  
Université des sciences et des technologies de Lille**

Outre la géométrie savante qui s'est nourrie d'écrits de mathématiciens grecs (Euclide, Apollonius, Archimède), la tradition géométrique arabe d'Orient a développé dès l'origine une géométrie utilitaire. Son objet est l'exposé, avec ou sans justification suivant les auteurs, de procédures de construction et de règles. Cette géométrie, plus récemment étudiée<sup>1</sup>, semble avoir une double origine entre les traditions scientifiques anciennes – babylonienne particulièrement – et les pratiques locales de certains milieux économiques ou sociaux<sup>2</sup>. Concernant les pratiques locales, c'est probablement la formation même des praticiens des Pays d'Islam tels que les arpenteurs, les architectes, les décorateurs ou bien les répartiteurs d'héritage qui tend à développer les différents domaines de cette géométrie pratique. Le mode de transmission de ce type de savoir est davantage lié à un discours de maîtres à compagnons qu'à un manuel d'enseignement<sup>3</sup>. Son étude ne s'en trouve pas facilitée. En effet, ce savoir traditionnel est sans doute bien antérieur aux premières publications mathématiques dont nous avons connaissance. Parmi les premières traces écrites de la géométrie utilitaire qui nous sont parvenues, notons le *bāb al-misāḥa* [chapitre du mesurage] du traité d'algèbre d'al-Khwārizmī (780-850)<sup>4</sup> dans lequel l'auteur résout des problèmes de mesurage à l'aide de l'algèbre juste naissante.

La géométrie pratique est aussi présente dans la littérature mathématique médiévale. De nombreux textes latins expose cette géométrie en distinguant le plus souvent une géométrie pratique liée à l'utilisation d'instruments (astrolabe, miroir, quadrant, gnomon...) d'une géométrie davantage basée sur le calcul des rapports et des proportions. Pour ce dernier cas, notre objectif est de relier, à l'aide d'études comparatives de textes disponibles, les pratiques arabes et latines. Ainsi, nous espérons mieux décrire d'éventuelles filiations dans le cadre plus général de la transmission des mathématiques arabes au monde chrétien.

La géométrie utilitaire et non instrumentale qui nous intéresse ici s'articule principalement autour de deux chapitres correspondant à des problématiques bien spécifiques : le découpage et le mesurage. Celui qui traite de découpage répond aux problèmes liés à l'activité des découpeurs qui avaient la charge de diviser des parcelles en fonction des ayants droit d'un héritage ou selon les conditions d'une transaction commerciale. Quant au mesurage, les problèmes proposent principalement des solutions aux missions de l'arpenteur dont le travail permet de déterminer l'assiette de l'impôt sur les terres agricoles et les loyers des habitations.

---

<sup>(\*)</sup> Article à paraître dans les Actes du 9<sup>e</sup> colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 12-14 mai 2007).

<sup>1</sup> Parmi ces études, nous pouvons citer : [Djebbar, 2001]; [Djebbar, 2005]; [Djebbar, 2007]; [Hogendijk, 1990]; [Rashed, 2000], vol.3, p. 505-645; [Sesiano, 1996].

<sup>2</sup> [Djebbar, 2001], p. 64.

<sup>3</sup> [Djebbar, 2001], p. 66.

<sup>4</sup> F. Rosen a édité la version arabe du seul manuscrit d'Oxford qu'il a traduit en anglais ; [Rosen, 1831], p. 70-85. R. Rashed a récemment réalisé une édition critique du texte accompagnée d'une traduction française ; [Rashed, 2007], p. 202-229.

## LE DECOUPAGE OU LA DIVISION DES FIGURES.

Ce n'est pas dans la tradition mathématique arabe que les questions de découpage et plus généralement celles autour de la division des figures planes apparaissent pour la première fois. Les problèmes qui s'y rattachent consistent à partager une figure, suivant un rapport donné, à l'aide d'une ou plusieurs lignes droites selon certaines contraintes comme : passer par un sommet de la figure, être parallèle à un de ses côtés... Euclide (3<sup>e</sup> s. av. J.C.), lui-même, consacre un ouvrage à ce type de problème. Celui-ci, *Sur les divisions*, n'a pas encore été retrouvé et Proclus (5<sup>e</sup> s.) est, à notre connaissance, le premier à mentionner un tel travail<sup>5</sup>. Tout au long du processus d'assimilation de la science grecque en pays d'Islam, la fascination de tous les Arabes pour les œuvres scientifiques et philosophiques grecques, et en particulier celles d'Euclide, est incontestable<sup>6</sup>. De plus, fortement liés à la pratique de la science par les artisans, cet ouvrage et le thème qu'il aborde sont inévitablement repris par les mathématiciens arabes<sup>7</sup> qui développeront un chapitre autonome. Néanmoins, en l'état actuel de nos connaissances, nous ne pouvons décrire avec précision l'influence du texte euclidien sur les mathématiques arabes. En préliminaire à notre étude, citons ici quelques témoins de la division des figures dans la tradition géométrique arabe.

Dans son *Fihrist* [Le catalogue], le bibliographe Ibn an-Nadīm († 995) indique que Thābit Ibn Qurra (836-901) aurait révisé une traduction du livre *Sur les divisions* d'Euclide mais, à notre connaissance, aucune trace d'un tel manuscrit n'a été retrouvée<sup>8</sup>. F. Woepcke<sup>9</sup> est le premier à apporter une preuve matérielle lorsqu'il découvre, à Paris, une version arabe du texte *Sur les divisions* d'Euclide. Il présente l'énoncé de trente-six propositions dont seules quatre sont démontrées. Le traducteur, le mathématicien persan as-Sijzī (X<sup>e</sup> s.)<sup>10</sup>, précise qu'il s'est « borné à donner les énoncés sans les démonstrations, parce que les démonstrations sont faciles »<sup>11</sup>.

Le *Kitāb fīmā yahtāju ilayhi aṣ-ṣāniʾ min aʾmāl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire aux artisans en constructions géométriques] d'Abū l-Wafā' al-Būzajānī (940-998) est une preuve supplémentaire de l'importance accordée aux divisions des figures dans la tradition géométrique arabe<sup>12</sup>. La nature d'un lien éventuel avec le texte d'Euclide n'est pas évident à démontrer notamment parce que s'adressant à des artisans, Abū l-Wafā' ne désire apporter aucune démonstration. Il se contente de proposer des énoncés et des procédures de construction.

Muḥammad al-Baghdādī est connu pour la rédaction d'un ouvrage sur la division des figures planes que nous n'avons pas encore retrouvé dans sa version arabe originale. Cet ouvrage mérite une attention particulière. Le titre arabe pourrait être *Kitāb taqṭīṭ al-misāḥāt*

<sup>5</sup> [Proclus, 1948], p. 62, p. 128-9.

<sup>6</sup> [Ibn Khaldūn, 2002], p. 244.

<sup>7</sup> [Gutas, 2005], p. 176.

<sup>8</sup> [Suter, 1892], p. 25, p. 59 ; [Suter, 1900], p. 34-8.

<sup>9</sup> [Woepcke, 1851]

<sup>10</sup> [Crozet, 2004]; [Hogendijk, 1984]

<sup>11</sup> [Woepcke, 1851], p. 244.

<sup>12</sup> [Woepcke, 1855]

ou bien *Kitāb qismat al-misāhāt* [Livre de la division des surfaces]<sup>13</sup>. Ce *Livre de la division des surfaces* est un des éléments qui ont contribué à la transmission des mathématiques arabes au monde chrétien. En effet, cet ouvrage a circulé de l’Orient vers l’Occident musulman, et notamment vers al-Andalus où il aurait d’ailleurs pu être traduit en latin au 12<sup>e</sup> siècle. Dans la liste des traductions de Gérard de Crémone (1114-1187) établie par ses disciples s’inscrit un ouvrage sur la division des surfaces : le *liber divisionum tractatus*<sup>14</sup>. Nous n’avons, à ce jour, pas encore retrouvé le texte de Gérard de Crémone et nos connaissances sont encore trop restreintes pour affirmer avec certitude un lien éventuel entre les deux textes.

En 1570, à Pesauro, J. Dee (1527-1608) en collaboration avec F. Commandino (1509-1575) édite pour la première fois une version latine du texte d’al-Baghdādī sous le titre *De superficierum divisionibus liber*<sup>15</sup> [Livre à propos de la division des surfaces]. Il ne s’agit pas ici d’écrire à nouveau l’histoire de cette édition dont les détails ont déjà été longuement étudiés<sup>16</sup>. Rappelons seulement que, contrairement à ce que décrit une glose au début de l’autographe de John Dee<sup>17</sup>, il semblerait que ce dernier n’ait pas traduit le texte à partir de sa version arabe mais qu’il ait simplement copié un manuscrit latin qui pourrait être ladite traduction de Gérard de Crémone<sup>18</sup>.

Néanmoins, lorsque les historiens s’intéressent au texte de J. Dee, c’est dans l’espoir de parfaire leurs connaissances des mathématiques grecques et plus particulièrement des travaux d’Euclide<sup>19</sup>. Notre étude, quant à elle, se propose d’apporter un éclairage nouveau sur ce texte en le considérant comme un élément à part entière de la tradition géométrique arabe d’Orient et comme un témoin de la transmission des mathématiques arabes au monde chrétien. Notre travail va prendre en compte deux livres de la tradition mathématique andalouse des 12<sup>e</sup>-13<sup>e</sup> siècles présentés pour la première fois par A. Djebbar<sup>20</sup>. Le premier ouvrage est le *Kitāb al-qurb fī t-taksīr wa t-taqīd* [Livre qui facilite le mesurage et le découpage] d’al-Mursī, et le second est le *Kitāb at-taqrīb wa t-taysīr li ifādat al-mubtadī’ bi šinā’at at-taksīr* [Livre qui vulgarise et facilite pour faire profiter le débutant de l’art du mesurage] d’Ibn al-Jayyāb. Nous tenterons enfin de fournir une nouvelle analyse du chapitre quatre de la *Practica Geometriae* [Pratique de la géométrie] de Fibonacci (ca. 1170–ca. 1240)<sup>21</sup>. Le mathématicien pisan y aborde la division des figures, ce qui nous permettra de mettre en évidence des points communs avec les textes arabes de l’Orient et de l’Occident musulmans.

<sup>13</sup> [Djebbar, 2007], p. 119.

<sup>14</sup> [Boncompagni, 1851], p. 389.

<sup>15</sup> [Commandino et Dee, 1570]

<sup>16</sup> [Rosen, 1970] ; [Rose, 1972]

<sup>17</sup> « *Liber iste de divisionibus superficierum ex Arabico conversus per Ionnem Dee Londinensem.* » [Ce livre <est> à propos de la division des surfaces traduit de l’arabe par John Dee de Londres], Biblioteca Ambrosiana de Milan, Ms P.236 supra, fol.1v.

Le manuscrit latin sur lequel Dee a travaillé serait le ms Cotton Tiberius B. ix de la British Library ; nous avons consulté ce manuscrit sans être capable de l’analyser compte tenu de son état de détérioration avancée.

<sup>18</sup> [Suter, 1905]

<sup>19</sup> [Archibald, 1915]; [Favaro, 1882]; [Favaro, 1883]; [Ofterdinger, 1853]

<sup>20</sup> [Djebbar, 2007]

<sup>21</sup> L’édition que nous utilisons est celle de B. Boncompagni ; [Boncompagni, 1862]. B. Hughes donne une traduction anglaise du texte que nous n’avons pas pu lire à la préparation du colloque ; [Hughes, 2008].

### a. Le traité d'al-Baghdādī.

L'identité de l'auteur arabe du *De superficierum divisionibus liber* est mal connue. Les seuls renseignements que nous avons sont contenus dans son identité : « Muḥammad al-Baghdādī ». La nature même de ces informations est largement insuffisante pour reconnaître clairement cet individu. De nombreuses tentatives ont été réalisées et l'hypothèse la plus argumentée reste celle de H. Suter qui identifie Muḥammad al-Baghdādī à « Abu-bekr Muhammad ben Abdelbaqi al-baghdadi » († 1141) connu pour un commentaire au Livre X des *Eléments* d'Euclide<sup>22</sup>.

Al-Baghdādī propose vingt-deux énoncés tous justifiés par une démonstration. Vingt problèmes traitent de la division des figures planes ; ils sont classés selon le nombre de côtés des figures concernées. Six problèmes traitent de la division des triangles. Les neuf problèmes suivants s'intéressent aux quadrilatères, et les cinq derniers considèrent les pentagones. Selon le cas, les polygones peuvent avoir des propriétés particulières : les côtés opposés parallèles deux à deux, deux côtés et seulement deux parallèles, un côté parallèle à une diagonale... Pour chacun de ces problèmes, il s'agit de bissecter la figure concernée par une droite selon un rapport donné et des contraintes fixées. Les deux autres problèmes – problèmes 10 et 21 – peuvent être considérés comme des constructions auxiliaires utilisées dans les démonstrations des énoncés ultérieurs<sup>23</sup>.

La structure interne de l'exposé d'al-Baghdādī est ordonnée et constante quel que soit le nombre de côtés du polygone : les problèmes de division s'enchaînent selon les différentes contraintes fixées. Le traitement des triangles peut apparaître comme différent de celui des autres polygones, mais cette différence s'explique simplement par l'impossibilité pour un triangle d'avoir deux côtés parallèles. Cette démarche propose d'abord les problèmes de division d'un polygone par une droite menée à partir d'un point donné qui est, dans l'ordre, un sommet, puis un point placé sur un des côtés – parallèles ou non –. Ensuite, l'auteur présente la division des polygones par une droite parallèle à une droite tracée. Ici, il faut distinguer les triangles des autres polygones. Dans le cas des triangles, soit la droite tracée est issue d'un sommet (perpendiculaire à un côté ou quelconque), soit elle ne passe par aucun sommet (perpendiculaire à un côté, parallèle à un côté ou quelconque). Quant aux autres polygones, l'enchaînement des problèmes est identique dans les deux cas. Chronologiquement, ladite droite tracée est un des côtés parallèles du polygone, un de ses côtés non-parallèles, une diagonale du polygone. Dans cette démarche aussi structurée, notons que le problème 22 devrait précéder le problème 20. Cependant, al-Baghdādī a besoin d'un résultat intermédiaire (problème 21) pour sa démonstration et c'est probablement la raison pour laquelle il traite le problème 22 en dernier. Pour les quadrilatères, al-Baghdādī pose le problème de leur division par une droite parallèle à une transversale quelconque donnée. Nous présentons, comme bilan, ce tableau synoptique qui montre la logique d'exposition d'al-Baghdādī en rapport avec une complexification croissante fondée géométriquement :

---

<sup>22</sup> [Suter, 1892], p.202 ; [Suter, 1893], p.126

<sup>23</sup> Pour plus de détails sur la nature des problèmes résolus, voir l'annexe I qui donne l'énoncé de chacun des 22 problèmes.

Diviser, selon un rapport donné, un polygone à $n$ côtés par une droite ...	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
... passant par un point $M$	$M =$ sommet (Prob. 1-7-17) $M =$ point d'un des côtés parallèles (Prob. 8) ou non (Prob. 2-9-18)		
... parallèle à une droite $d$	$d$ passe par un sommet	$d =$ perpendiculaire à un côté (Prob. 4) $d =$ transversale quelconque (Prob. 5)	$d =$ un des côtés parallèles (Prob. 11-12-19) $d =$ un des côtés non-parallèles (Prob. 13-14-22) $d =$ diagonales (Prob. 15-20)
	$d$ ne passe pas par un sommet	$d =$ parallèle à un côté (Prob. 3) $d =$ transversale quelconque (Prop. 6)	$d =$ transversale quelconque (Prob. 16)

Les analyses des énoncés et de leur démonstration montrent que l'ouvrage d'al-Baghdādī est le représentant d'une tradition géométrique hybride entre géométrie savante et géométrie pratique telles que nous les avons décrites précédemment. En effet, le *De superficierum divisionibus liber* est évidemment un ouvrage de géométrie pratique puisque l'auteur traite exclusivement de géodésie, au sens le plus strict du terme,<sup>24</sup> en se référant à des problèmes traditionnels et peut-être à des procédures locales. Néanmoins, trois éléments principaux nous autorisent à faire le constat que la géométrie dite savante est utilisée par l'auteur non seulement pour justifier ses procédures, mais aussi pour enrichir son travail.

D'une part, al-Baghdādī se réfère explicitement et à de nombreuses reprises aux *Eléments* d'Euclide. La nature même de ses problèmes lui impose une utilisation répétée des livres I, V et VI des *Eléments*. En effet, s'agissant toujours de la bissection d'une figure selon un rapport donné, les démonstrations des constructions vont massivement utiliser la théorie des rapports, thème principal des livres V et VI des *Eléments*. Ensuite, l'auteur utilise les piliers de la « méthode des aires » exposée par Euclide dans son livre I pour aboutir à l'égalité de deux figures, et dans la plupart des cas à l'égalité de deux triangles.

D'autre part, aucune mesure particulière pour les côtés des polygones et aucun rapport numérique ne sont choisis que ce soit pour construire la bissection ou pour l'illustrer simplement comme un exemple. L'absence totale de nombres, même génériques, montre bien la détermination d'al-Baghdādī à produire un texte théorique.

<sup>24</sup> D'après l'*Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, la géodésie « est proprement cette partie de la Géométrie pratique qui enseigne à diviser & partager les terres & les champs entre plusieurs propriétaires ».

Enfin, la démarche formelle de l'auteur est caractéristique des mathématiques hypothético-déductives : pour chaque problème, se succèdent dans l'ordre la proposition, l'exposition, la détermination, la construction, la démonstration et la conclusion<sup>25</sup>.

De ce fait, si les problèmes exposés par al-Baghdādī renvoient bien à des préoccupations pratiques et traditionnelles, le traitement qu'il en fait est savant. Le *De superficierum divisionibus liber* se présente donc plus comme un traité de géométrie que comme un outil pour praticiens.

## b. Deux auteurs d'al-Andalus : al-Mursī et Ibn al-Jayyāb.

A. Djebbar a montré l'existence de la pratique du découpage ainsi que son utilisation dans l'al-Andalus des 12<sup>e</sup>-13<sup>e</sup> siècles à l'aide de deux manuscrits récemment découverts<sup>26</sup>. Ces deux ouvrages, le *Kitāb al-qurb fī t-taksīr wa t-taqīṭ* [Livre qui facilite le mesurage et le découpage] d'al-Mursī, et le *Kitāb at-taqrīb wa t-taysīr li ifādat al-mubtadī' bi šinā'at at-taksīr* [Livre qui vulgarise et facilite pour faire profiter le débutant de l'art du mesurage] d'Ibn al-Jayyāb sont consacrés plus largement, comme leurs titres l'indiquent, au mesurage. C'est en ce sens que ces deux auteurs andalous présentent numériquement des techniques de calcul d'aires, des procédures de calcul de grandeurs inconnues d'une figure à partir de grandeurs connues ou bien encore des méthodes de calculs d'éléments caractéristiques d'une figure découpée ou à découper. Il s'agit, par exemple, de déterminer les côtés ou la hauteur d'un triangle, de calculer la corde d'une portion de cercle connaissant sa flèche et réciproquement. La seule présence de toutes ces procédures caractéristiques des manuels d'arpentage des traditions mathématiques arabes d'Orient et d'Occident nous assure une première grande différence avec le *De superficierum divisionibus liber* d'al-Baghdādī.

Les problèmes proposés par al-Mursī et Ibn al-Jayyāb sont très nombreux et exclusivement déclinés selon des énoncés numériques. Par exemple, nous trouvons, comme une constante, le triangle scalène de côtés (13 ; 14 ; 15), le triangle isocèle de côtés (10 ; 10 ; 12) ou encore le triangle équilatéral de côtés 10. Contrairement à al-Baghdādī, les procédures ne sont jamais démontrées ; elles ne sont validées que par le calcul. Même si apparaissent des références explicites à Euclide<sup>27</sup>, l'absence totale de démonstration éloigne ces deux textes andalous d'une quelconque tradition géométrique savante ou même hybride dont le *De superficierum divisionibus liber* pourrait être un représentant en Orient. Remarquons enfin que le triangle (13 ; 14 ; 15) est le triangle canonique des *Metriques* de Héron d'Alexandrie (1<sup>e</sup> s.) qui consacre entièrement le troisième livre à la division des figures.

L'organisation générale des textes d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb ne repose pas sur le même modèle. Alors que le dernier distingue le mesurage du découpage pour en faire deux chapitres distincts de la partie consacrée aux figures planes, al-Mursī mélange mesurage et découpage au fil du texte ciblant ses parties sur les figures. Al-Mursī débute son texte avec les polygones ordonnés suivant le nombre croissant de leurs côtés : triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones et termine avec le cercle et ses portions. Dans le chapitre sur le

<sup>25</sup> [Vitrac, 1990], vol. 1, p. 137.

<sup>26</sup> Ms. Tunis B.N. n°8351, fol.115b-148b et Ms. Escorial n°929, fol.2a-66b. Nous remercions ici le Professeur A. Djebbar de nous avoir fait partager l'analyse qu'il a faite de ces deux manuscrits.

<sup>27</sup> [Djebbar, 2007], p. 128.

découpage, Ibn al-Jayyāb présente d'abord les questions relatives au cercle et à ses portions, pour s'intéresser ensuite aux polygones classés là encore selon le nombre croissant  $n$  de leurs côtés ( $n < 5$ ) : triangles puis quadrilatères.

En conclusion, al-Mursī comme Ibn al-Jayyāb s'intéressent, contrairement à al-Baghdādī, aux questions de découpage du cercle et de ses portions en proposant de nombreux problèmes. Remarquons que les deux énoncés connus d'Euclide concernant la division des figures circulaires ne semblent pas être à l'origine des problèmes andalous<sup>28</sup>, aussi bien dans le nombre de parties égales ou inégales à obtenir que dans les contraintes fixées pour la (ou les) transversale(s).

L'ordre d'exposition des problèmes de division des polygones dans les textes d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb est donc semblable à celui d'al-Baghdādī, mais la nature des découpages ainsi que les contraintes données pour les transversales sont vraiment différentes. Il existe chez al-Mursī des questions originales par rapport aux textes d'Euclide ou d'al-Baghdādī. L'andalou propose la division de figures selon une proportion donnée mais sans fixer aucune autre sorte de contraintes<sup>29</sup>. Il expose aussi la division de figures en figures semblables à la figure initiale et égales entre elles<sup>30</sup>. De plus, il propose de calculer le rapport d'un découpage à la surface initiale en coupant une partie d'un ou deux de ses côtés. Et réciproquement, il expose la manière avec laquelle il faut couper d'un ou de deux côtés pour obtenir une surface donnée. Ibn al-Jayyāb, quant à lui, présente plusieurs problèmes dont les énoncés montrent leur attachement à la tradition locale des arpenteurs : par exemple, découper un carré en y aménageant une entrée ou une route. Etant données la nature des problèmes et l'importance accordée à la détermination de longueurs (côtés, hauteurs, transversales) et de surfaces, les textes andalous semblent là encore davantage répondre à des problèmes pratiques des arpenteurs ou des décorateurs que le *De superficierum divisionibus liber*.

### c. La *Practica Geometriae* de Fibonacci.

La biographie de Fibonacci, connue très partiellement par l'introduction<sup>31</sup> à la version du *Liber abaci* révisée en 1228 (adressée à M. Scot) ainsi que les diverses analyses de son travail nous présentent ce mathématicien pisan comme héritier direct des mathématiques arabes. Mais force est de constater que nous avons une mauvaise connaissance de l'existence et de la disponibilité pour Fibonacci des textes arabes dans des versions latines. Nous nous sommes alors laissé porter par l'idée qu'il ait pu rédiger ses ouvrages mathématiques<sup>32</sup> directement à partir de l'enseignement, probablement en arabe, qu'il aurait reçu à Béjaïa<sup>33</sup> ou bien à partir des connaissances qu'il aurait acquises pendant ses nombreux voyages autour de la Méditerranée. S'il est incontestable que Fibonacci se situe dans le prolongement de

---

<sup>28</sup> « Diviser en deux parties égales une figure donnée terminée par un arc de cercle et par deux lignes droites qui renferment un angle donné. » ; [Woepcke, 1851], p. 240.

« Mener dans un cercle donné deux lignes parallèles et coupant une partie déterminée du cercle. » ; [Woepcke, 1851], p. 241.

<sup>29</sup> Par exemple, diviser un triangle équilatéral (puis quelconque) en  $n$  parties égales ; [Djebbar, 2007].

<sup>30</sup> Par exemple, diviser un triangle équilatéral en  $n^2$  parties égales ; Ibid.

<sup>31</sup> [Boncompagni, 1857], p. 1.

<sup>32</sup> Nous avons déjà cité le *Liber Abaci* (1202) et sa *Practica Geometriae* (1220). Parmi ces œuvres mathématiques, il faut ajouter le *Liber quadratorum* (1225), *Flos Leonardi* et *Epistola ad magistrum Theodorum* (1225).

<sup>33</sup> [Aissani et Valerian, 2003], p. 9.



nombreux travaux de la tradition mathématique arabe<sup>34</sup>, nous ne pouvons pas totalement ignorer le rôle probable des traductions latines de travaux en arabe sur ses mathématiques. Il nous faut évoquer ici l'idée très largement répandue, mais sans fondement véritable, que l'inspiration principale de Fibonacci pour la rédaction de sa *Practica Geometriae* (1220) est le *Liber Embadorum*, traduction latine faite en 1145 par Platon de Tivoli du *Hibbur ha-mešihā we ha-Tišboret* [Le livre de la surface et des mesures] d'Abraham Bar Hiyya<sup>35</sup>. M. Clagett suggère aussi que le mathématicien pisan s'appuie amplement sur le *Verba filiorum* des Banū Mūsā pour la solution de plusieurs problèmes lorsqu'il révisé sa géométrie en 1228<sup>36</sup>.

La *Practica Geometriae*, dédiée à un certain « Magister Dominicus »<sup>37</sup>, est destinée à l'enseignement<sup>38</sup>. Cet ouvrage se compose de huit parties précédées d'une introduction. Dans l'ordre, il expose le calcul de l'aire d'un carré et d'un rectangle, les racines carrées, le mesurage des surfaces, la division des surfaces, les racines cubiques, le mesurage des volumes, la détermination de distances et de hauteurs et il finit son travail par divers problèmes géométriques. Son introduction<sup>39</sup> est importante puisqu'elle a pour objet de fixer les bases de l'ouvrage. Fibonacci reprend d'abord partiellement le Livre I des *Eléments* d'Euclide et présente ensuite les unités de mesures linéaires et de surfaces utilisées à Pise au début du 13<sup>e</sup> siècle<sup>40</sup>.

Quant aux problèmes de division des figures planes, Fibonacci leur consacre la quatrième partie de sa *Practica Geometriae* qu'il intitule « à propos de la division des champs entre copropriétaires »<sup>41</sup>. Son analyse nous amène à dresser une liste exhaustive des quatre-vingt-un problèmes traités ou suggérés dans ce chapitre<sup>42</sup>. Cette liste s'avère fort différente de celle établie pour la première fois par A. Favaro<sup>43</sup>. Il semblerait que ce dernier ait omis les propositions auxiliaires ainsi que certains autres problèmes, démontrés ou non<sup>44</sup>.

La structure du chapitre est clairement annoncée par l'auteur<sup>45</sup> et présente de nettes similitudes avec les trois textes arabes que nous avons analysés précédemment. En effet, l'organisation selon le nombre croissant des côtés des polygones est une constante dans ces trois textes alors qu'elle n'est pas vérifiée dans le texte d'Euclide. Fibonacci débute donc avec la division des triangles (23 problèmes dont 5 auxiliaires). Il traite ensuite des quadrilatères en distinguant les parallélogrammes (10 problèmes), les trapèzes (19 problèmes) et enfin les

<sup>34</sup> [Rashed, 1994]; [Rashed, 2003].

<sup>35</sup> [Lévy, 1996], p. 88 ; [Busard, 1968], p. 67 ; [Millás Vallicrosa, 1931], p. xxvi-xxix. Le troisième chapitre du *Liber embadorum* est consacré aux problèmes de la division des surfaces ; voir [Curtze, 1902]; [Millás Vallicrosa, 1931].

<sup>36</sup> [Clagett, 1964], vol. 1, p. 224, p. 357-8, p. 363-6.

<sup>37</sup> A. Simi suppose qu'il s'agirait de Maître Dominicus qui introduit Léonard de Pise à la cour de l'Empereur germanique Frederik II ; [Simi, 2004], p. 9.

<sup>38</sup> « *J'ai pris soin de cet ouvrage destiné à ton enseignement* » ; [Boncompagni, 1862], p. 1.

<sup>39</sup> *Ibid.*, p. 1-5.

<sup>40</sup> [Simi, 2004], p. 9.

<sup>41</sup> [Boncompagni, 1862], p. 110.

<sup>42</sup> Annexe II.

<sup>43</sup> [Favaro, 1882], p.146-50.

<sup>44</sup> R.C. Archibald a déjà pointé certaines lacunes concernant la liste dressée par A. Favaro sans pour autant la compléter ; [Archibald, 1915], p. 11.

<sup>45</sup> « *Nous divisons cette quatrième distinction en quatre parties : en premier desquelles nous ferons connaître [comment] diviser les triangles, en second les quadrilatères, en troisième les polygones, en quatrième les cercles, et ses portions.* » ; [Boncompagni, 1862], p. 110.

quadrilatères quelconques (9 problèmes). La division des figures planes rectilignes se termine avec les pentagones (6 problèmes) et l'hexagone (1 problème). Présents dans les textes d'al-Baghdādī et d'al-Mursī, les problèmes de divisions de ces deux dernières figures ne sont suggérés ni chez Euclide, ni chez Ibn al-Jayyāb<sup>46</sup>. Les questions relatives aux figures circulaires – absentes dans le texte d'al-Baghdādī – sont traitées dans le même ordre d'exposition que chez al-Mursī, à savoir à la fin du chapitre. Ces questions s'agencent autour de la division du cercle (8 problèmes) et de ses portions (5 problèmes). Elles sont plus proches des deux énoncés euclidiens sur cette même question que des préoccupations d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb. Il s'agit par exemple de diviser un cercle en trois (ou en quatre) parties égales à l'aide de droites parallèles<sup>47</sup>, ou bien la bissection d'une figure mixtiligne<sup>48</sup>. Le troisième livre des *Métriques* d'Héron d'Alexandrie, déjà mentionné, traite deux problèmes de division du cercle. Le premier<sup>49</sup> est proche de la question précédente, le second se retrouve exactement dans la *Practica Geometriae* de Fibonacci : couper d'un cercle donné une partie donnée à l'aide d'un cercle concentrique<sup>50</sup>.

D'une manière générale, selon la formulation du problème et la terminologie utilisée, deux types de problèmes se posent. Dans la plupart des cas, il s'agit de diviser la surface plane soit en  $n$  parties égales ( $n \geq 2$ ), soit en  $m$  parties inégales selon des rapports donnés ( $m = 2$  ou  $3$ ). Dans les autres cas, il s'agit de couper une partie donnée de la surface plane initiale. Le verbe *dividere* [diviser] est employé dans la majorité des énoncés. Pour certains autres, Fibonacci utilise les verbes *abscidere* [séparer en coupant], *secare* [couper], *accipere* [prendre], *aufferre* [enlever]. Nous ne trouvons pas chez al-Baghdādī de problèmes qui proposent de couper une partie donnée d'une figure alors que c'est bien l'objet de neuf des trente-six problèmes de la version arabe d'Euclide<sup>51</sup>. Ces deux types de problèmes coexistent aussi dans les deux textes andalous. Ils ne répondent pas aux mêmes problématiques qu'il s'agisse de diviser une figure donnée selon certaines propriétés ou de couper une partie d'une figure donnée en respectant des contraintes fixées *a priori*. Nous pensons qu'ils concernent au moins deux traditions artisanales distinctes que la géométrie pratique du découpage rassemble. La standardisation des énoncés du *De superficierum divisionibus liber* – tous construits à partir de *dividere* [diviser] – montre une fois encore la volonté pour son auteur de rédiger un texte savant ; ce qui ne semble pas être l'objectif de Fibonacci.

Un autre élément permet de préciser notre hypothèse quant aux motivations du mathématicien pisan. Il ne fournit pas un traitement numérique systématique de la résolution des problèmes comme nous l'avons remarqué chez al-Mursī et Ibn al-Jayyāb. Néanmoins, après avoir donné – et démontré dans la plupart des cas – une construction de la division (ou

<sup>46</sup> Ibn al-Jayyāb s'intéresse aux hexagones uniquement dans le chapitre sur le mesurage ; [Djebbar, 2007], p. 145.

<sup>47</sup> Pour les énoncés de Fibonacci, il s'agit des problèmes Fib.73 et Fib.74, voir annexe II. En ce qui concerne l'énoncé euclidien, voir le problème 29 dans [Woepcke, 1851], p. 241.

<sup>48</sup> Fib.81, voir annexe II et problème 28 d'Euclide, voir Ibid., p. 240.

<sup>49</sup> Héron, *Métriques*, iii, problème 18 : « *Diviser un cercle donné en trois parties égales par deux droites.* ». Cet énoncé de Héron et les suivants sont des traductions de Bernard Vitrac établies pour la « *Journée sur la division des figures* » de Lille (08 juin 2006). Nous tenons ici à remercier B. Vitrac de nous avoir communiqué son travail.

<sup>50</sup> Fib.75, voir annexe II. Le problème 9 dans Héron, *Métriques*, iii est : « *Un cercle étant donné, dont le diamètre [est] la [droite] AB, en décrire un autre autour du même centre que lui, dont le diamètre [est] CD, divisant le cercle de départ dans un rapport donné.* »

<sup>51</sup> Il s'agit des problèmes 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 20 ; 27 ; 29 ; [Woepcke, 1851].

coupure) cherchée, il introduit à plusieurs reprises une recherche numérique par les formules rhétoriques « *par les nombres* » ou « *avec les nombres* ». <sup>52</sup> Les exemples numériques sont fournis pour la division des triangles et dans une moindre mesure pour la division des trapèzes. Fibonacci traite alors principalement l'exemple classique du triangle de côtés (13 ; 14 ; 15) aussi repéré chez Héron d'Alexandrie et dans les deux textes andalous. Fibonacci établit ses résultats à partir de triangles scalènes et ne considère pas les triangles particuliers comme peuvent le faire al-Mursī et Ibn al-Jayyāb.

Nous pouvons maintenant examiner les contraintes que Fibonacci fixe *a priori* pour la transversale à construire dans le cas de la division en deux parties (égales ou inégales) d'un polygone ou d'une figure circulaire donné. Nous n'analyserons pas ici davantage les problèmes de division en  $m$  parties ( $m > 2$ ) puisque aucun de ceux-ci ne se retrouvent chez al-Baghdādī. Le tableau suivant résume le travail du mathématicien <sup>53</sup> :

Diviser, selon un rapport donné, un polygone à $n$ côtés par une droite ...	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
... passant par un point $M$	$M =$ sommet (Prob. 1-24-40-45-50-53-56-59-62) $M =$ point d'un des côtés parallèles (Prob. 26-30-33-35-36-37-38-44-49-51) ou non (Prob. 4-16-39-51-54-57-59-63) $M =$ point intérieur à la figure (Prob. 7-9-18-27-33-42-46-51-55) $M =$ point extérieur à la figure (Prob. 10-11-12-15-19-20-28-33-41-46-51-55)			
... parallèle à une droite $d$	$d =$ un des côtés (Prob. 13)	$d =$ un des côtés parallèles (Prob. 25-34-43)		
sans contraintes sur la transversale		en deux quadrilatères semblables (Prob. 61)	(Prob. 64-66)	(Prob. 68)

Comme nous l'avons déjà suggéré pour le travail d'al-Baghdādī, celui de Fibonacci apparaît aussi très méthodique. Ce dernier se propose de diviser chacun des polygones à  $n$  côtés ( $n < 5$ ) selon les mêmes contraintes. L'analyse de celles-ci met en évidence un certain déséquilibre dans les questions soulevées. La transversale est, dans la plupart des cas, une droite passant, tour à tour, par un sommet, par un point donné sur un côté, à l'intérieur ou à l'extérieur du polygone concerné. Ces diverses contraintes ne s'enchaînent pas nécessairement dans le même ordre. Nous pouvons montrer que les problèmes concernant les figures circulaires, qui n'apparaissent pas dans le tableau précédent, vérifient par extension les mêmes propriétés que les figures polygonales. Pour les autres problèmes, soit la transversale répond à une exigence de parallélisme par rapport à un des côtés, soit elle doit être menée afin de construire des quadrilatères semblables, soit enfin elle n'a aucune contrainte particulière (seulement pour  $n > 4$ ). Cette disproportion n'est pas originale puisque nous la rencontrons

<sup>52</sup> [Boncompagni, 1862], p. 112, p. 115, p. 116, p. 117, p. 118, p. 119, p. 132, p. 133, p. 134, p. 136, p. 137.

<sup>53</sup> Les références des problèmes sont relatives à notre classification, voir annexe II.

déjà chez Euclide dans une moindre mesure<sup>54</sup>. Néanmoins, elle constitue une différence fondamentale avec le *De superficierum divisionibus liber* dont l'auteur n'envisage pas les cas où la transversale doit passer par un point intérieur ou extérieur à la figure ; la nature des problèmes est alors plus équilibrée. Il ne s'agit cependant que d'un constat et nous n'avons pas, à notre stade d'étude, les moyens d'expliquer les choix d'al-Baghdādī et de Fibonacci. Les problèmes exposés par al-Mursī et Ibn al-Jayyāb sont globalement différents de ceux de Fibonacci. Peu d'énoncés sont proches : couper un triangle par une ligne passant par un sommet, par une ligne parallèle à la base..., et le cas échéant, les traitements qui en sont faits ne correspondent pas.

Nous aimerions enfin revenir sur la terminologie que Fibonacci utilise à plusieurs reprises qui éloigne encore un peu plus sa *Practica Geometriae* du *De superficierum divisionibus liber* d'al-Baghdādī. En effet, nous avons déjà noté le titre du chapitre concernant la division des surfaces, à savoir « à propos de la division des champs entre copropriétaires ». Le mathématicien pisan vise clairement une certaine catégorie de problèmes et donc d'utilisateurs. Cette référence au milieu socioprofessionnel des arpenteurs n'est pas unique. Nous la retrouvons précisément dans l'énoncé du problème Fib.48 où il s'agit de considérer le côté d'un trapèze comme un chemin et de partager ledit trapèze en trois copropriétaires de telle sorte que la parcelle de chacun d'eux contienne un tiers de ce chemin<sup>55</sup>. A plusieurs reprises, Fibonacci montre son désir de répondre simplement aux praticiens en opposant des procédures banales, vulgaires<sup>56</sup> à un travail géométrique<sup>57</sup>. Ce n'est pas sans rappeler les problèmes d'Ibn al-Jayyāb, fortement ancrés dans la tradition locale des arpenteurs, que nous avons décrits auparavant.

Une analyse comparative plus approfondie des problèmes et des démonstrations de Fibonacci avec ceux d'al-Baghdādī est donc maintenant inévitable. Nous écartons désormais de notre étude le texte d'Euclide dans sa version arabe étant donné le faible nombre de démonstrations que son auteur-traducteur nous confie, ainsi que les textes d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb qui ne donnent aucune démonstration des procédures mises en place. La correspondance entre les problèmes d'al-Baghdādī d'une part et les problèmes de Fibonacci d'autre part n'est pas évidente à déterminer pour deux raisons principales. L'auteur arabe propose systématiquement une bissection selon un rapport quelconque donné alors que l'auteur pisan s'intéresse davantage à une division en parties égales. Une grande différence réside aussi dans la nature des polygones traités. Par exemple, lorsqu'al-Baghdādī expose la division d'un quadrilatère quelconque, Fibonacci peut, en ce qui le concerne, traiter cette même division pour le parallélogramme puis le trapèze et quelque fois pour le quadrilatère quelconque. Nous nous sommes donc autorisés, en privilégiant les contraintes fixées pour la transversale, à faire correspondre un groupe de propositions Fib.*j* de Fibonacci<sup>58</sup> pour une proposition B.*i* donnée d'al-Baghdādī<sup>59</sup>.

<sup>54</sup> [Woepcke, 1851], p. 246.

<sup>55</sup> « Et si le côté ab [du trapèze abgd] avait été au bord d'un chemin, et que chacun des trois copropriétaires voulait avoir, comme l'usage est, un tiers de ce côté. » ; [Boncompagni, 1862], p. 135, l. 16-7.

<sup>56</sup> « Et vu que tout ce qui est nécessaire à la division des champs est complètement exposé dans ce travail, nous proposons un certain mode ordinaire. », Ibid., p. 142, l. 9-10.

<sup>57</sup> « Mais, si nous voulons travailler géométriquement ... » ; Ibid., p.142, l. 38.

<sup>58</sup> Voir annexe II.

<sup>59</sup> Voir annexe I.

Les triangles	B.1	Fib.1
	B.2	Fib.4
	B.3	Fib.13
Les quadrilatères	B.7	Fib.24 ; Fib.40 ; Fib.44 ; Fib.53 ; Fib.56 ; <b>Fib.59</b>
	B.8	Fib.26 ; Fib.37 ; Fib.38
	B.9	Fib.39 ; Fib.53 ; Fib.57
	B.11	Fib.25
	B.12	Fib.34 ; <b>Fib.43</b> ; Fib.47
Les pentagones	B.17	Fib.62
	B.18	Fib.63

Seuls les énoncés de deux problèmes de Fibonacci sont semblables aux énoncés de deux problèmes d'al-Baghdādī : B.7 = Fib.59 et B.12 = Fib.43<sup>60</sup>. Les démonstrations des problèmes B.7 et Fib.59 sont écrites selon le même modèle hypothético-déductif. Elles sont construites sur les mêmes fondements euclidiens. La méthode des aires (Livre I) débute les démonstrations pour manipuler des surfaces égales et transformer le problème afin de travailler sur des grandeurs connues. La théorie des rapports (Livre V et VI) est alors essentielle pour conclure à l'aide des propositions 7 et 11. Ces remarques sont aussi valables pour les démonstrations de B.12 et Fib.43. Cette fois-ci, en plus des bases euclidiennes précédentes, les deux auteurs ne peuvent pas faire l'économie d'utiliser des résultats liés à la moyenne proportionnelle (Livre VI) soit explicitement comme al-Baghdādī, soit indirectement comme Fibonacci. Ajoutons une dernière remarque. Nous pourrions considérer *grosso modo* les démonstrations des deux problèmes B.7 et B.12 comme modèles de toutes les autres démonstrations d'al-Baghdādī. Les démonstrations des problèmes Fib.43 et Fib.59 ne sont, quant à elles, aucunement représentatives de l'ensemble des démonstrations du mathématicien pisan ; le calcul sur les rapports restant marginal.

Avant de conclure, il est important de rappeler que nous sommes très mal renseignés sur les sources des mathématiciens présents dans cette étude : al-Baghdādī, al-Mursī, Ibn al-Jayyāb et Fibonacci. Le *Livre sur les divisions* d'Euclide et les *Métriques* de Héron semblent être des inspirations pour les uns et les autres. Mais sous quelle forme ? Selon quel processus ? Etant donné les documents disponibles, il nous est encore impossible d'établir des filiations certaines entre ces deux textes grecs et les travaux postérieurs.

Nous sommes en présence de quatre représentants de la géométrie du découpage dont les écrits montrent des motivations et donc des pratiques différentes. Chacun d'entre eux est dépendant de leur contexte socioculturel, témoin d'une activité mathématique des foyers scientifiques dans lesquels ils évoluent. Al-Baghdādī rédige donc un texte hybride entre préoccupations pratiques, traditionnelles et mathématiques savantes avec un souci de justifier toutes ses procédures. Fibonacci partage ce souci pour répondre à une nouvelle catégorie d'érudits éclairés par un enseignement naissant de la géométrie. Il élargit son travail avec de

<sup>60</sup> Pour l'analyse mathématique des démonstrations, voir les annexes III et IV.

nombreux problèmes absents chez al-Baghdādī mais déjà présents chez Euclide et Héron d’Alexandrie. Certaines de ces procédures vont même être complétées par un traitement numérique. Son travail est alors plus proche de la pratique du mesurage exposée par al-Mursī et Ibn al-Jayyāb, et techniquement plus abordable pour les artisans. C’est probablement aussi pour cela que Fibonacci, après son introduction, ne surcharge pas son texte de références explicites à Euclide qui pourraient sembler inutiles voire pesantes à tout praticien désireux d’utiliser la *Practica Geometriae*. Comme pour la rédaction de son *Liber Abaci*, Fibonacci s’est nourri de toutes les mathématiques dont il disposait. Notre souci est bien d’identifier ces mathématiques. Les liens qu’il a développés avec les foyers scientifiques de l’Occident et de l’Orient musulmans sont encore mal connus. La disponibilité des textes arabes dans leur version originale ou par l’intermédiaire des traductions latines reste floue et mal argumentée. La découverte par A. Djebbar des deux textes andalous est alors capitale. Elle doit être prise en compte dans l’analyse du travail de Fibonacci ne serait-ce que pour relativiser le rôle si souvent exagéré du *Liber Embadorum* de Bar Ḥiyya dans la rédaction de sa *Practica Geometriae*. Elle est aussi un élément essentiel pour celui qui voudrait décrire le développement de la géométrie du découpage, et plus largement celle du mesurage, en Occident chrétien.

## LE MESURAGE.

Les ouvrages d’al-Mursī, d’Ibn al-Jayyāb et de Fibonacci que nous venons d’étudier ainsi que les *Metriques* de Héron d’Alexandrie sont plus largement consacrés à la science du mesurage. Seuls le *De superficierum divisionibus liber* d’al-Baghdādī et le livre *Sur la division des figures* d’Euclide sont réservés aux problèmes de division des figures. La science du mesurage envisagée comme une géométrie pratique non instrumentalisée telle qu’elle est pratiquée voire enseignée dans l’Occident musulman n’est que très partiellement connue. Tributaires des manuscrits, nous avons peu de témoins qui nous permettraient d’établir avec précisions les caractéristiques d’une éventuelle tradition. Trois textes ont été exhumés très récemment : les textes d’al-Mursī et d’Ibn al-Jayyāb déjà mentionnés ci-dessus ainsi que la *Risāla fī t-taksīr* [l’épître sur le mesurage] d’Ibn ḥAbdūn († après 970)<sup>61</sup>.

Dans un projet plus vaste de travail sur l’héritage mathématique arabe dans l’Occident chrétien, nous devons citer les références andalouses hébraïques et latines. Le *Liber Mensurationum*<sup>62</sup>, traduction latine du *Kitāb al-misāḥa* [Livre du mesurage] d’Abū Bakr est l’un des premiers ouvrages d’al-Andalus à nous renseigner sur les pratiques concernant le mesurage. Son auteur fait coexister, pour un même problème, deux solutions : l’une algébrique avec des références claires à l’œuvre d’al-Khwārizmī et l’autre qui se rapprocherait davantage de pratiques plus anciennes, babyloniennes notamment.

Deux auteurs d’al-Andalus rédigent, directement en hébreu, des ouvrages exclusivement ou en partie sur le mesurage : Abraham Ibn ḥEzra<sup>63</sup> († 1167) et Abraham Bar Ḥiyya († vers 1145). Quantitativement le plus important, l’ouvrage d’Abraham Bar Ḥiyya, rédigé pour les communautés juives de Provence, est la version originale du *Liber*

<sup>61</sup> [Djebbar, 2005]

<sup>62</sup> [Busard, 1968]

<sup>63</sup> [Lévy et Burnett, 2006]

*embadorum* que nous avons déjà évoqué à propos de Fibonacci. Cet ouvrage traite du même type de problème que le *Liber Mensurationum* mais exclut la solution algébrique. Le texte d'Abraham Ibn ôEzra est aussi traduit en latin mais semble avoir beaucoup moins circulé que le précédent<sup>64</sup>. A ces textes, nous devons ajouter deux textes mineurs : le *Liber Aderameti* et le *Liber Saydi Abuothmi*.

Tous ces documents rédigés en latin ou en hébreu sont doublement importants. D'une part, ils font partie du petit nombre des documents disponibles qui représentent une activité géométrique dont les caractéristiques restent à établir. D'autre part, ils sont les témoins privilégiés de la transmission des pratiques mathématiques arabes de l'Occident musulman vers l'Europe chrétienne. Ils sont donc logiquement très largement étudiés (même si nous regrettons l'absence de traduction moderne) à l'exception du *Liber Aderameti* et du *Liber Saydi Abuothmi* qui ne bénéficient que d'une brève analyse en allemand et d'une édition<sup>65</sup>. Eclairés par la connaissance des textes arabes nouvellement découverts, nous proposons une analyse du contenu de ces deux traités.

Le *Liber Aderameti* et le *Liber Saydi Abuothmi* sont relativement courts. Ce sont des traductions de l'arabe au latin et ils accompagnent systématiquement une traduction de l'algèbre d'al-Khwarizmî, le *Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de Algebra et Almuchabala*, et le *Liber Mensurationum* d'Abû Bakr<sup>66</sup>. Leurs auteurs ainsi que leurs traducteurs ne sont pas, pour le moment, identifiés. Pour H.L.L. Busard, l'ensemble de ces textes doit être considéré comme un corpus destiné à l'apprentissage de l'algèbre et des mesures, utilisé probablement jusqu'au 15<sup>e</sup> siècle<sup>67</sup>.

#### a. Le *Liber Aderameti*.

Ce texte, consacré aux mesures, est divisé en deux grandes parties ; la première traite du calcul d'aires de figures planes usuelles et la seconde s'intéresse au calcul de volumes. L'auteur débute sa première partie avec les quadrilatères (carré/rectangle, losange, parallélogramme puis trapèze), il étudie ensuite les triangles pour terminer avec le cercle, le demi-cercle et les arcs de cercle.

Le texte est présenté comme un *vade-mecum* du calcul d'aires dans lequel les algorithmes de calcul, rhétoriques, sont énoncés pas à pas. Il n'existe ni démonstration des procédures ni vérification numérique comme s'il s'agissait simplement de rassembler des résultats déjà bien connus. L'absence de tout problème numérique marque une grande différence avec les textes sur le mesurage que nous avons cités jusqu'à maintenant. Ibn ôAbdûn, par exemple, va exposer les règles du mesurage à partir de la résolution de nombreux problèmes numériques.

Les procédures concernant le calcul d'aires des polygones sont résumées dans le tableau suivant :

---

<sup>64</sup> [Lévy et Burnett, 2006], p. 68.

<sup>65</sup> [Busard, 1969]

<sup>66</sup> Cinq copies sont répertoriées par H.L.L. Busard : BnF Latin 9335, BnF Latin 7377a et BnF Latin 7266 que nous avons consultés et les deux manuscrits Cambridge, University Library, Mm.2.18 et Dresde, Sächsische Landesbibliothek, C80 ; Ibid.

<sup>67</sup> Ibid., p. 165.

Polygones	Algorithmes de calcul
Carré / rectangle	Multiplier l'un des côtés contenant l'angle droit par le second.
Losange	Multiplier un de ses diagonales par la moitié de la seconde.
Parallélogramme	Le partager en triangles et utiliser les règles de mesure des triangles pour arriver au résultat.
Trapèze	Ajouter la tête et la base et multiplier le résultat par la moitié de la perpendiculaire tombant de la tête sur la base.
Triangles	Multiplier la moitié de la base par sa perpendiculaire ou bien la moitié de la perpendiculaire par la base.

Deux procédures du calcul de l'aire  $S$  d'un cercle sont détaillées. La première considère uniquement le diamètre  $d$  : « *La règle pour savoir l'aire de n'importe quel cercle est que tu multiplies son diamètre par lui-même, tu diminues de son septième auquel tu as ajouté la moitié de son septième, et ce qui restera sera son aire*<sup>68</sup>. »

$S = d^2 - \left( \frac{1}{7}d^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}d^2 \right)$ . La seconde procédure<sup>69</sup> tient compte du périmètre  $P$  :

$S = \left( \frac{1}{4}d \right) \times P$  ou  $S = \left( \frac{1}{4}P \right) \times d$  dont l'algorithme de calcul est absent. Ces deux résultats

sont déjà présents dans l'épître d'Ibn ôAbdūn et exprimés de la même façon : « *Son calcul est que tu multiplies son diamètre par lui-même ; tu ôtes du produit son septième et la moitié de son septième. Le reste est son aire*<sup>70</sup>. ».

Pour la formule donnée en fonction du périmètre, Ibn ôAbdūn indique d'abord  $S = \left( \frac{d}{2} \right) \times \left( \frac{P}{2} \right)$  pour ensuite préciser « *Et si tu veux, tu multiplies le quart du diamètre par le périmètre tout entier ; ce qui en résulte sera l'aire*<sup>71</sup>. »

Les paragraphes consacrés aux figures arquées (arc de cercle égal, supérieur ou inférieur au demi-cercle) sont plus complets que les précédents. En effet, en plus du calcul d'aires, l'auteur ajoute d'abord les définitions de la corde  $c$  et de la flèche  $f$  d'un arc de cercle, donne ensuite le calcul de l'arc  $a$  d'un demi-cercle connaissant sa flèche  $\left[ a = \left( 3 + \frac{1}{7} \right) f \right]$ .

<sup>68</sup> Ibid., p. 171.

<sup>69</sup> « *Ou si tu veux, multiplie le quart de son diamètre par sa circonférence et ce qui est obtenu est son aire ; ou si tu veux, multiplie le quart de sa circonférence par son diamètre et ce qui en résulte est son aire.* » ; Ibid., p. 171-2.

<sup>70</sup> Les traductions françaises des problèmes d'Ibn ôAbdūn sont d'A. Djebbar que nous remercions une nouvelle fois pour nous les avoir communiquées. Problème 114, [Djebbar, 2005], p. 66.

<sup>71</sup> Problème 118, Ibid., p. 66.



L'auteur propose aussi le calcul du diamètre  $d$  d'un arc de cercle connaissant sa corde et sa

$$\text{flèche} \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{f} + f = d \right].$$

Le texte latin et le texte d'Ibn ôAbdûn présente une autre ressemblance frappante pour le calcul de l'aire d'un arc inférieur au demi-cercle :

Epître sur le mesurage d'Ibn ôAbdûn	Liber Aderameti
<p>« Si tu veux connaître l'aire de l'arc, tu multiplies la moitié de l'arc par le demi diamètre du cercle. Le résultat du produit, tu le conserves. Puis, tu regardes &lt;ce qu'il y a&gt; entre la flèche et le demi diamètre. Ce qu'il y a, tu le multiplies par la moitié de la corde. Le résultat du produit, tu le retranches de ce que tu as conservé, parce que l'arc est inférieur au demi-cercle.<sup>72</sup> »</p>	<p>« La règle pour connaître l'aire d'une portion plus petite que le demi-cercle (...) Multiplie (...) la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc de la portion et conserve le résultat. Ensuite considère ce qu'il y a entre la flèche et la moitié du diamètre et ce qui en résulte, multiplie-le par la moitié de la corde et enlève ce qui est de ce que tu as conservé.<sup>73</sup> »</p>
$S = \frac{1}{2}d \times \frac{1}{2}a - \left(\frac{1}{2}d - f\right) \times \frac{1}{2}c$	

Toutes ces formules, aussi rencontrées dans le *Liber Mensurationum*, sont familières à H.L.L. Busard qui les rapproche de la tradition mathématique indienne en évoquant ainsi leur présence dans les travaux d'al-Khwārizmī et d'Abraham Bar Hiyya<sup>74</sup>. Mais, l'auteur du *Liber Aderameti* ajoute le calcul de l'arc. A cette occasion, H.L.L. Busard précise qu'il méconnaît les sources de ce dernier<sup>75</sup>. Cette formule, *a priori* originale, peut être résumée sous la forme

littérale :  $a = \left(1 + \frac{1}{7}\right)f + d + \left(f - \frac{1}{2}d\right)$  lorsque l'arc est supérieur au demi-cercle et

$a = \left(1 + \frac{1}{7}\right)f + d - \left(\frac{1}{2}d - f\right)$  lorsque l'arc est inférieur au demi-cercle. Or, il se trouve qu'

Ibn ôAbdûn utilise cette même procédure de calcul. En effet, dans le paragraphe sur les arcs supérieurs à un demi-cercle, il énonce : « Et <pour> connaître l'arc, tu ajoutes sept à la flèche, ce sera neuf et un septième. Ajoute-le au dix, qui est le diamètre du cercle, ce sera dix neuf et un septième. Ajoute-lui ce qu'il y a entre le demi diamètre du cercle et la flèche de la portion <de cercle>, et c'est trois. Ce sera vingt deux et un septième, et c'est le périmètre.<sup>76</sup> » Ce calcul est aussi mené dans le paragraphe précédent sur les arcs inférieurs à un demi-cercle.

En ce qui concerne le chapitre sur le calcul des volumes, nous avons repéré l'utilisation d'une terminologie géométrique caractéristique des mathématiques utilitaires d'al-Andalus. En effet, sont d'abord données les formules du volume des parallélépipèdes à base carrée ou rectangle, des prismes droits et des pyramides ; ces derniers ayant une base carrée, rectangle, trapézoïdale et triangulaire. Les solides proposés par la suite portent des

<sup>72</sup> Problème 124, [Djebbar, 2006], p. 82.

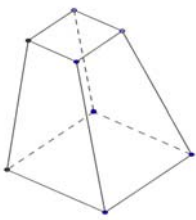
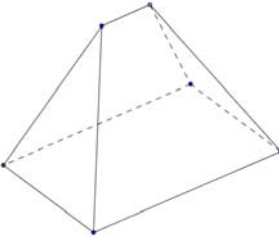
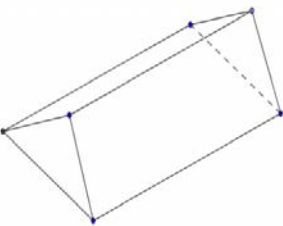
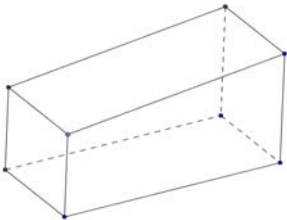
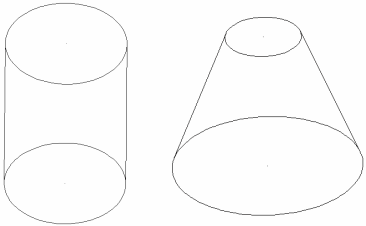
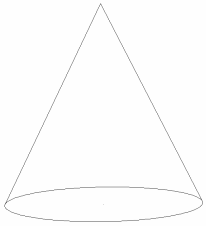
<sup>73</sup> [Busard, 1969], p. 172.

<sup>74</sup> [Busard, 1968], p. 82-3.

<sup>75</sup> [Busard, 1969], p. 167.

<sup>76</sup> Problème 125, [Djebbar, 2006], p. 82-83.

noms maintenant attestés dans la tradition du mesurage de l'Occident musulman. A. Djebbar est le premier à faire le lien entre les travaux d'Ibn ôAbdûn, d'Abû Bakr, d'Ibn Liyyûn († 1346), d'al-Mursî et d'Ibn al-Jayyâb. Nous donnons dans la suite un tableau présentant l'ensemble des solides rencontrés dans le *Liber Aderameti* avec la terminologie latine ainsi qu'une tentative de traduction française. Certains termes comme *faneche* et *caburi*, d'origine arabe, n'ont pas de simple équivalent français. Nous indiquons aussi la terminologie arabe correspondante lorsque nous la connaissons<sup>77</sup>. Les calculs des volumes ne semblent pas originaux par rapport à ceux appliqués dans les autres écrits andalous. Par exemple, pour le solide n°1, Ibn ôAbdûn donne le même algorithme sous une forme plus générale où les bases peuvent être des rectangles et non nécessairement des carrés<sup>78</sup>. Pour les deuxième et sixième solides aussi présents chez Ibn ôAbdûn, il s'agit exactement des mêmes démarches.

 <p>1. <i>corpus simile faneche</i> [corps semblable à une faniche<sup>79</sup>] (fanīqa)</p>	 <p>2. <i>corpus similis caburi quod est piscis</i> [corps semblable à un poisson] (ḥūt at-ṭaôām)</p>	 <p>3. <i>corporis serratilis quod est simile puteo</i> [prisme<sup>80</sup> qui est semblable à une citerne]</p>	 <p>4. <i>corpus similis domui</i> [corps semblable à une maison]</p>
 <p>5. <i>corpus simile marmoreis columnis et puteo</i> [corps semblable à une colonne en marbre et à une citerne]</p>		 <p>6. <i>piramidis colonne que est similis cumulo frumenti</i> [pyramide en colonne qui est semblable à un tas de blé] (ôurmat at-ṭaôām)</p>	

<sup>77</sup> Notre traduction française est entre crochets tandis que la terminologie arabe est entre parenthèses.

<sup>78</sup> Problème 126 ; [Djebbar, 2006], p. 84.

<sup>79</sup> *Faniche* désigne un sac dans lequel on transporte de la terre ; [Djebbar, 2002], p. 216. H.L.L. Busard donne une étymologie persane du terme qui désignerait une cale de bois ; [Busard, 1968], p. 84. Dans les deux cas, il s'agit d'une pyramide tronquée.

<sup>80</sup> A propos du mot *serratile*, lire [Busard, 1968], p. 84.

Tous les éléments communs du *Liber Aderameti* avec les quelques ouvrages andalous connus nous autorisent raisonnablement à rattacher ce texte latin à la tradition du mesurage d'al-Andalus. Cette tradition doit être vue dans une cohérence globale avec en premier lieu les témoins arabes, puis les marques hébraïques et latines. Par ce dernier facteur, il est incontestable qu'elle contribue à la naissance d'un chapitre de géométrie pratique dans le monde chrétien. Une étude comparative systématique des procédés et des terminologies est nécessaire pour expliquer les filiations possibles entre les textes, et comprendre le développement de la science du mesurage en Europe.

### b. Le *Liber Saydi Abuothmi*.

Il s'agit d'un texte sur le mesurage des figures planes. Il ne présente pas d'originalité propre mais, élément d'un corpus plus important, il est utile d'en détailler son contenu. Après avoir donné des considérations générales sur le carré, les diagonales, les sommets, son auteur s'intéresse à l'aire des triangles. Il poursuit avec un paragraphe consacré aux polygones dont l'aire est calculée à partir de leur division en triangles. Enfin, un chapitre sur les quadrilatères termine le texte.

Le premier résultat général annoncé dans le *Liber Saydi Abuothmi*, sans démonstration, est la relation entre la diagonale  $d$  et le côté  $c$  d'un carré :  $d^2 = 2c^2$ <sup>81</sup>. Ensuite, la diagonale d'une figure rectiligne est définie comme « *ce qui joint deux sommets opposés* »<sup>82</sup>, un sommet correspondant au point d'intersection de deux de ses côtés.

Dans le paragraphe suivant, le triangle est considéré comme unité de surface. Son aire est définie par « *la multiplication de sa hauteur par la moitié de la base* »<sup>83</sup> et il est à l'origine du calcul de l'aire des polygones. Concernant les polygones réguliers, le pentagone, l'hexagone et l'heptagone sont explicitement étudiés. Les autres polygones réguliers suivent la même règle : si  $h$  est la perpendiculaire menée du centre du polygone sur un de ses côtés,  $c$  son côté et  $n$  le nombre de ses côtés, la formule présentée (sans justification) est :  $h \times c + h \times \frac{n}{2}$ . L'auteur précise enfin que cette méthode ne saurait être appliquée pour les polygones non réguliers ne pouvant être mesurés par division en triangles.

Le paragraphe suivant est entièrement consacré à une classification des quadrilatères. Nous la résumons ici car il nous a semblé intéressant de pointer la terminologie utilisée :

- les quadrilatères n'ayant aucun côté parallèle.
- les quadrilatères ayant des côtés parallèles :
  - les côtés opposés parallèles deux à deux :
    - quatre côtés égaux : *quadrata* [carrés] si les côtés sont perpendiculaires, *rumbi* [losanges] sinon.
    - deux côtés opposés égaux : *quadrata longiora altera parte* [rectangles] si les côtés sont perpendiculaires, *rumbi similia* [parallélogrammes] sinon.
  - uniquement deux côtés parallèles :
    - deux côtés opposés égaux : *angusti capitis equale* [trapèze isocèle]

<sup>81</sup> [Busard, 1969], p. 169.

<sup>82</sup> Ibid., p. 169.

<sup>83</sup> Ibid., p. 170

- aucun côté de même longueur : *angusti lateri capitis diversum* [trapèze quelconque]

Nous tendons à croire que ce chapitre reste inachevé puisque aucun calcul d'aire n'est proposé. Or, la volonté de l'auteur semblait être de fournir une méthode basée, comme pour les polygones réguliers, sur la triangularisation. C'est d'ailleurs dans ce sens qu'il précise que le premier groupe des quadrilatères fait partie des figures qui ne peuvent être mesurées par division en triangles.

## CONCLUSION.

Notre étude est partie d'une dichotomie caricaturale entre une géométrie savante et une géométrie plus traditionnelle dans les pays d'Islam. Notre objectif était d'étudier plus particulièrement un chapitre initié *a priori* par les grecs avec d'une part le livre *Sur la division des figures* d'Euclide et d'autre part le troisième livre des *Métriques* de Héron d'Alexandrie. Al-Baghdādī, un des représentants arabes d'Orient ayant travaillé sur ce thème, nous fournit un texte dont seule la version latine, le *De superficierum divisionibus liber* est connue pour le moment. Formellement très proche du raisonnement euclidien, il est néanmoins très difficile d'établir une filiation éventuelle avec l'ouvrage d'Euclide. Les causes sont multiples : l'organisation générale des deux textes, la différence dans la nature même de leurs problèmes et bien sûr l'absence des démonstrations dans la seule version d'Euclide que nous avons. La problématique du découpage des figures se retrouve en Occident musulman avec deux témoins andalous : Al-Mursī et Ibn al-Jayyāb. Ces textes dont la forme peut davantage être associée au travail de Héron qu'à l'ouvrage d'Euclide sont essentiels pour plusieurs raisons. D'abord, ils présenteraient des éléments d'une mathématique traditionnelle préislamique enrichie par des pratiques locales<sup>84</sup>. Ensuite, il ne faut pas oublier le rôle qu'ils ont pu avoir dans l'enseignement de la géométrie en Andalous, et donc dans la diffusion au sein de milieux d'artisans des mathématiques utilitaires. Enfin, leur simple présence dans une région importante pour la transmission des pratiques mathématiques au monde chrétien pourrait expliquer de potentielles filiations avec certains textes médiévaux. Dans cette dernière perspective, il est donc indispensable d'étudier toutes les occurrences des problèmes de divisions des figures dans les traités rédigés en latin au moment même où la géométrie, discipline du *quadrivium*, est enseignée dans les universités naissantes d'Europe. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers Fibonacci qui n'est pas sans influence dans les mathématiques latines. A mi-chemin entre les démonstrations savantes d'al-Baghdādī et les mathématiques utilitaires d'al-Mursī et Ibn al-Jayyāb, la *Practica Geometriae* est l'occasion de rassembler de nombreux problèmes dont les sources sont variées. L'existence dans le texte pisan de certaines questions déjà posées par Euclide et manquantes dans les textes postérieurs semble aller en faveur de la présence du texte euclidien en Occident. Nous avons aussi rattaché, à plusieurs occasions, les préoccupations de Fibonacci aux pratiques andalouses. A ce propos, nous devons maintenant remettre en cause la forte influence du *Liber Embadorum* de Bar Ḥiyya sur la rédaction de la *Practica Geometriae* qui n'a jamais, à notre connaissance, été démontrée. Nous avons élargi le champ des possibles quant aux inspirations, aux filiations probables pour les mathématiques de Fibonacci et donc plus largement pour les mathématiques latines.

---

<sup>84</sup> [Djebbar, 2007], p. 134.

Dans ce contexte d'étude des sources des mathématiques du Moyen-Âge, il nous a semblé important de prendre en compte la géométrie pratique au-delà du seul chapitre qui traite de la division des figures. C'est pourquoi nous avons repris le contenu des deux textes de mesurage – *Liber Aderameti* et du *Liber Saydi Abuothmi* – qui, traduits de l'arabe au latin, sont des vecteurs possibles des pratiques de l'Occident musulman vers le monde chrétien. Notre analyse a montré l'existence d'éléments caractéristiques, tant du point de vue des procédures utilisées que de la terminologie adoptée, d'une tradition du mesurage propre à l'Andalus. Notre travail n'est pas achevé, il faut maintenant établir les liens éventuels avec les textes latins qui vont s'imposer non seulement chez les scolastiques, mais aussi dans les milieux professionnels des artisans.

## Bibliographie

- Aissani, D. & Valerian, D.** [2003]; *Mathématiques, commerce et société à Béjaïa (Bugia) au moment du séjour de Leonardo Fibonacci (XII<sup>e</sup>-XIII<sup>e</sup> siècles)*, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, n°2, 2003, p. 9-31.
- Archibald, R. C.** [1915]; *Euclid's Book on Divisions of Figures*, Cambridge, University Press, 1915, vii-88p.
- Boncompagni, B.** [1851]; *Della vita e delle opere di Gherardo cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabionetta astronomo del secolo decimoterzo*, *Atti dell'accademia pontificia dei nuovi lincei*, 4, 1851, p. 387-493.
- Boncompagni, B.** [1857]; *Il liber abbaci*, Rome, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857, 459p.
- Boncompagni, B.** [1862]; *La practica geometriae di Leonardo Pisano*, Rome, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1862, 283p.
- Busard, H.L.L.** [1968]; *L'algèbre au moyen-âge, le 'Liber mensurationum' d'Abū Bakr*, *Journal des Savants*, avril-juin 1968, 1968, p. 65-125.
- Busard, H.L.L.** [1969]; *Die Vermessungstraktate 'Liber Saydi Abuothmi' und 'Liber Aderameti'*, *Janus*, n°56, 1969, p. 161-174.
- Clagett, M.** [1964]; *Archimedes in the Middle Ages*, vol.1, Madison - vol.2-5, Philadelphie, University of Wisconsin publications, 1964.
- Commandino, F. & Dee, J.** [1570]; *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino ascriptus*, Pesaro, 1570, 76p.
- Crozet, P.** [2004]; *Al-Sigzî et la tradition des problèmes de division des figures*, ed. R. Morelon et A. Hasnawi: *De Zénon d'Elée à Poincaré: recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, Louvain - Paris, Peeters, 2004, p. 119-159.
- Curtze, M.** [1902]; *Der 'Liber Embadorum' des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* 1902, p. 1-183.
- Djebbar, A.** [2001]; *Pratiques savantes et savoirs traditionnel en pays d'Islam : l'exemple des sciences exactes*, *Actes du colloque international sur " Science and Tradition : Roots and wings for development" (Académie Royale des Sciences d'Outre-Mer & UNESCO, Bruxelles, avril 2001)*, Académie Royale des Sciences d'Outre Mer & UNESCO, Bruxelles, 2001, p. 62-86.
- Djebbar, A.** [2002]; *La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans : interrogations anciennes et éléments nouveaux*, *Actes du colloque international "From China to Paris : 2000 years transmissions of mathematical ideas" (Bellagio - Italie, mai 2000)*, Bellagio, Italie, 2002, p. 213-236.

- Djebbar, A.** [2005]; *L'épître sur le mesurage d'Ibn ʿAbdūn: un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe*, *Suhayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, vol.5, 2005, p. 7-68 (arabe).
- Djebbar, Ahmed** [2006]; *Ibn ʿAbdūn's Epistle on Surface Measuring: a witness to the pre-Algebraical Tradition*, *Suhayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, vol.6, 2006, p. 255-257(anglais), p. 81-86 (arabe).
- Djebbar, A.** [2007]; *La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X<sup>e</sup>-XIII<sup>e</sup> s.)*, ed. P. Radelet-de Grave: *Liber Amicorum Jean Dhombres*, Brépols, Réminiscences, 2007, p. 113-147.
- Favaro, A.** [1882]; *Notizie storico-critiche sulla Divisione delle aree*, *Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, vol.XXII, 1882, p. 129-154.
- Favaro, A.** [1883]; *Preliminari ad una restituzione del libro di Euclide sulla divisione delle figure plane*, *Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 1883, p. 393-396.
- Gutas, D.** [2005]; *Pensée grecque, culture arabe*, Paris, Aubier, 2005, 340p.
- Hogendijk, J. P.** [1984]; *The Arabic version of Euclid's On Divisions*, ed. M. Folkerts and J. P. Hogendijk: *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, Atlanta, Rodopi, 1984, p. 143-147.
- Hogendijk, J. P.** [1990]; *A medieval arabic treatise on mensuration by Qādī Abū Bakr*, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, Band 6, 1990, p. 130-150.
- Hughes, B.** [2008]; *Fibonacci's De Practica Geometrie*, New York, Springer, 2008, xxxvi-412p.
- Ibn Khaldūn** [2002]; *Le livre des exemples*, Paris, Gallimard, 2002, 1559p.
- Lévy, T.** [1996]; *La littérature mathématique hébraïque en Europe (XI<sup>e</sup> - XVI<sup>e</sup> siècles)*, ed. C. Goldstein, J. Gray and J. Ritter: *L'Europe mathématique*, Paris, Editions de la Maison des Sciences de L'Homme, 1996, p. 83-99.
- Lévy, T. & Burnett, C.** [2006]; *Sefer ha-Middot: A Mid-Twelfth-Century Text on Arithmetic and Geometry Attributed to Abraham Ibn Ezra*, *Aleph*, n°6, 2006, p. 57-238.
- Millás Vallicrosa, J. M.** [1931]; *Llibre de Geometria*, Barcelone, Editorial Alpha, 1931, 152p.
- Ofterdinger, L. F.** [1853]; *Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren*, Ulm, 1853, 16p.
- Proclus de Lycie** [1948]; *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide* Bruges, Desclée de Brouwer, 1948, xxiv-372p.

- Rashed, R.** [1994]; *Fibonacci et les Mathématiques arabes*, *Micrologus*, II, 1994, p. 145-160.
- Rashed, R.** [2000]; *Les mathématiques infinitésimales du IX<sup>e</sup> au XI<sup>e</sup> siècle*, Londres, Al-Furqan, 2000, 1034p.
- Rashed, R.** [2003]; *Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes*, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, n°2, 2003, p. 55-73.
- Rashed, Roshdi** [2007]; *Al-Khwârizmî. Le commencement de l'algèbre*, Paris, Blanchard, 2007, VIII-386p.
- Rose, P. L.** [1972]; *Commandino, John Dee, and the De Superficierum Divisionibus of Machometus Bagdedinus*, *Isis*, vol.63 - n°1, 1972, p. 88-93.
- Rosen, E.** [1970]; *John Dee and Commandino*, *Scripta Mathematica*, vol. XXVIII, n°4, 1970, p. 321-326.
- Rosen, F.** [1831]; *The algebra of Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī*, Londres, Oriental translation fundation, 1831, XVI-208-123p.
- Sesiano, J.** [1996]; *Le Kitāb al-misāḥa d'Abū Kāmil*, *Centaurus*, n°1, vol.38, 1996, p. 1-21.
- Simi, A.** [2004]; *L'eredità della Practica Geometriae di Leonardo Pisano nella geometria del basso medioevo e del primo rinascimento*, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, n°1, 2004, p. 9-41.
- Suter, H.** [1892]; *Das Mathematiker-Verzeichniss in Fihrist des Ibn Abî Ya'kûb an-Nadîm*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol.37, 1892, p. 1-87.
- Suter, H.** [1893]; *Supplément au Das Mathematiker-Verzeichniss in Fihrist des Ibn Abî Ya'kûb an-Nadîm*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol.38, 1893, p. 126-7.
- Suter, H.** [1900]; *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, vol.10, 1900, 277p.
- Suter, H.** [1905]; *Zu dem Buche "De Superficierum Divisionibus" des Muhammed Bagdadinus*, *Bibliotheca mathematica*, 6, 1905, p. 321-22.
- Vitrac, B.** [1990]; *Euclide, Les éléments, Traduction et commentaires*, Paris, Presses Universitaires de France, 1990.
- Woepcke, F.** [1851]; *Notice sur des traductions Arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*, *Journal asiatique*, 4<sup>ème</sup> série - vol. XVIII, 1851, p. 217-247.
- Woepcke, F.** [1855]; *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux d'après des traités inédits arabes et persans*, *Journal Asiatique*, 5<sup>ème</sup> série, t.5, 1855, p. 218-356, 309-359.



**ANNEXE I**  
**Traduction des problèmes du**  
***De Superficierum Divisionibus Liber d'al-Baghdādī***  
**Milan, Biblioteca Ambrosiana, ms P.236 supra**

Conventions des signes typographiques utilisés dans les annexes 1 et 2 :  
[...] dans un texte traduit du latin ou de l'arabe au français : les termes entre crochets n'existent pas dans le texte arabe ou latin mais sont ajoutés pour rendre la version française du texte plus intelligible.

<...> dans l'annexe 1 et 2 : les termes ou expressions entre parenthèses angulaires sont des ajouts personnels spécifiques pour améliorer la présentation et l'organisation des textes.

(...) dans l'annexe 1 et 2 : indique les passages relatifs aux textes de référence (manuscrit ou édition).

**<LES TRIANGLES> (fol. 2r-4v)**

Proposition 1 – Problème 1 (fol. 2r)

Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite tracée à partir d'un sommet du triangle.

Proposition 2 – Problème 2 (fol. 2r)

Diviser selon un rapport donné un triangle nommé par une droite conduite à partir d'un point d'un côté choisi du triangle donné.

Proposition 3 – Problème 3 (fol. 2v)

Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite parallèle à un côté choisi du triangle désigné.

Proposition 4 – Problème 4 (fol. 3r)

Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite parallèle à la perpendiculaire à la base tracée à partir d'un sommet du triangle.

Proposition 5 – Problème 5 (fol. 3v)

Diviser selon un rapport donné un triangle désigné par une droite parallèle à une droite tracée à partir d'un de ses sommets, laquelle n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à un de ses côtés.

Proposition 6 – Problème 6 (fol. 4v)

Diviser selon un rapport donné un triangle désigné par une droite parallèle à une droite quelconque tracée à l'intérieur de celui-ci tracée ou non à partir d'un sommet.

**<LES QUADRILATERES> (fol. 4v-13r)**

Proposition 7 – Problème 7 (fol. 4v)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle par une droite tracée à partir d'un sommet du quadrangle désigné.

Proposition 8 – Problème 8 (fol. 5v)

Diviser selon un rapport donné le quadrangle désigné à deux côtés parallèles par une droite passant par un point de l'un des deux côtés parallèles mentionnés.

Proposition 9 – Problème 9 (fol. 6v)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle désigné quelconque par une droite passant par un point de l'un des côtés non parallèles choisis.

Proposition 10 – Problème 10 [proposition auxiliaire] (fol. 7v)

Etant données une droite et deux [autres] droites qui passent par ses extrémités et [qui] renferment avec cette ligne des angles quelconques, construire sur cette droite une surface égale à une surface donnée de façon à ce que cette surface soit incluse entre les deux droites d'une part, une parallèle à la [première] droite, et cette [première] droite d'autre part.

Proposition 11 – Problème 11 (fol. 8r)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle à côtés parallèles par une droite parallèle à l'un de ses côtés parallèles.

Proposition 12 – Problème 12 (fol. 8v)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle à deux côtés parallèles, et seulement deux, par une droite parallèle à ses côtés parallèles.

Proposition 13 – Problème 13 (fol. 9r)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle à deux côtés parallèles, et seulement deux, par une droite parallèle à un des deux côtés non parallèles.

Proposition 14 – Problème 14 (fol. 9v)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle n'ayant aucun côté parallèle par une droite parallèle à l'un de ses côtés.

Proposition 15 – Problème 15 (fol. 10v)

Diviser selon un rapport donné un quadrangle quelconque par une droite parallèle à l'une de ses diagonales.

Proposition 16 – Problème 16 (fol. 11v)

Diviser un quadrangle quelconque selon un rapport donné par une droite parallèle à une droite choisie dans le quadrilatère, laquelle n'est parallèle ni à un de ses côtés, ni à une de ses diagonales.

<LES PENTAGONES> (fol. 13r-19v)

Proposition 17 – Problème 17 (fol. 13r)

Diviser selon un rapport donné un pentagone quelconque désigné par une droite passant par un de ses sommets, quel qu'il soit.

Proposition 18 – problème 18 (fol. 14r)

Diviser selon un rapport connu un pentagone nommé par une droite passant par un point d'un côté connu du pentagone désigné.

Proposition 19 – Problème 19 (fol. 15r)

Diviser selon un rapport donné un pentagone à deux côtés parallèles par une droite parallèle à ses côtés parallèles.

Proposition 20 – Problème 20 (fol. 16r)

Diviser selon un rapport donné un pentagone dont un de ses côtés est parallèle à une de ses diagonales par une droite parallèle à ce côté et à cette diagonale.

Proposition 21 – Théorème 1 (fol. 16v)

Deux droites parallèles à un quelconque côté d'un pentagone désigné – ce côté n'est parallèle ni à un autre côté, ni à une diagonale de ce pentagone – peuvent être tracées à l'intérieur du pentagone à partir de deux des trois angles non reliés au côté considéré.

Proposition 22 – Problème 21 (fol. 17v)

Diviser selon un rapport donné un pentagone par une droite parallèle à l'un de ses côtés, et qu'aucun côté ne soit parallèle ni à l'un de ses autres côtés ni à l'une quelconque de ses diagonales.

**ANNEXE II**  
**Enoncés des problèmes de la quatrième partie**  
**de la *Practica Geometriae* (1220)**  
**de Fibonacci**

<I> **Les triangles.** (p. 110 ; l. 30)<sup>85</sup>

<Problème 1> (p. 110 ; l. 31-3) – Fav.1<sup>86</sup>

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un sommet du triangle.

<Problème 2> (p. 111 ; l.3-4)

(auxiliaire)

<Problème 3> (p. 111 ; l.24-7)

(auxiliaire)

<Problème 4> (p.111 ; l. 41-3) – Fav.2

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un côté du triangle.

<Problème 5> (p. 112 ; l.35-9)

(auxiliaire)

<Problème 6> (p. 113 ; l. 24-6)

(auxiliaire)

<Problème 7> (p. 114 ; l. 5-8)

Diviser en deux parties égales par une droite passant par son centre de gravité du triangle.

<Problème 8> (p. 114 ; l. 19-22)

(auxiliaire)

<Problème 9> (p. 115 ; l. 3-5) – Fav.3

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un point intérieur au triangle

<Problème 10> (p. 116 ; l. 35-8) – Fav.4

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un point extérieur au triangle

<Problème 11> (p. 117 ; l. 30-2)

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un point situé sur le prolongement extérieur d'un côté du triangle.

<Problème 12> (p. 118 ; l. 34-7)

---

<sup>85</sup> Les références sont relatives à l'édition de B. Boncompagni sous le format (page ; ligne) ; [Boncompagni, 1862], p. 110-48.

<sup>86</sup> La notation « Fav.i » correspond au problème *i* de la classification établie par Favaro ; [Favaro, 1882], p. 146-50.

Diviser en deux parties égales par une droite passant par un point situé dans l'écart angulaire extérieur au triangle formé par le prolongement de deux côtés du triangle.

<Problème 13> (p. 119 ; l. 7-9) – Fav.5

Diviser en deux parties égales par une droite parallèle à un côté du triangle.

<Problème 14> (p. 119 ; l. 43) – Fav.6

Diviser en trois parties égales à partir d'un des côtés du triangle.

<Problème 15> (p. 120 ; l. 4-7) – Fav.7

Couper un tiers d'un triangle.

<Problème 16> (p. 120 ; l. 20-1) – Fav.8

Diviser un tiers d'un triangle à partir d'un point situé sur un de ses côtés.

<Problème 17> (p. 120 ; l. 30-6) – Fav.9

Diviser en trois parties égales telles qu'elles aient chacune un côté du triangle.

<Problème 18> (p. 121 ; l. 1-2) – Fav.10

Couper une partie donnée d'un triangle par une droite passant par un point intérieur au triangle.

<Problème 19> (p. 121 ; l. 22-3) – Fav.11

Couper une partie donnée d'un triangle par une droite passant par un point extérieur au triangle.

<Problème 20> (p. 121 ; l. 41-3) – Fav.12

Couper une partie donnée d'un triangle par une droite passant par un point donné soit sur le prolongement de ses côtés, soit dans la région contenue par les prolongements.

<Problème 21> (p. 122 ; l. 1-3) – Fav.13

Diviser en trois parties égales par des droites passant par deux points donnés intérieurs au triangle.

<Problème 22> (p. 122 ; l. 8) – Fav.14

Diviser en trois parties égales par des droites parallèles à la base.

<Problème 23> (p. 122 ; l. 26-7)

Diviser n'importe quel triangle en quatre ou plusieurs parties.

## <II> La division des parallélogrammes. (p. 122 ; l. 28)

<Problème 24> (p. 122 ; l. 39-40) – Fav.15

Diviser un carré, un rectangle, un losange ou un parallélogramme en deux parties égales par une droite passant par un sommet.

<Problème 25> (p. 123 ; l. 9)

Diviser un parallélogramme en deux parties égales par une droite parallèle à deux côtés parallèles.

<Problème 26> (p. 123 ; l. 30-1) – Fav.16

Diviser un parallélogramme en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un de ses côtés.

<Problème 27> (p. 123 ; l. 32-3) – Fav.17

Diviser un parallélogramme en deux parties égales par une droite passant par un point donné à l'intérieur de celui-ci.

<Problème 28> (p. 124 ; l. 5-7) – Fav.18

Diviser un parallélogramme en deux parties égales par une droite passant par un point en dehors de celui-ci.

<Problème 29> (p. 124 ; l. 14-6) – Fav.19

Diviser un carré, un rectangle, un losange ou un parallélogramme en trois parties égales à partir de deux de ses côtés.

<Problème 30> (p. 124 ; l. 24-5) – Fav.20

Couper un tiers d'un parallélogramme par une droite qui passe par un point donné sur un de ses côtés.

<Problème 31> (p. 125 ; l. 8-9) – Fav.21

Diviser un parallélogramme en quatre ou plusieurs parties égales.

<Problème 32> (p. 125 ; l. 14-5) – Fav.22

Diviser un parallélogramme en trois parties inégales :  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{6}$ .

<Problème 33> (p. 125 ; l. 22-4)

Couper d'un parallélogramme n'importe quelle partie par une droite passant par un point extérieur, intérieur au parallélogramme ou sur un de ses côtés.

### <III> La division des trapèzes. (p. 125 ; l. 25)

<Problème 34> (p. 125 ; l. 37-8) – Fav.23

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite parallèle à un de ses côtés parallèles.

<Problème 35> (p. 126 ; l. 31-4) – Fav.24

Diviser un trapèze en deux parties égales à partir d'un de ses côtés parallèles.

<Problème 36> (p. 126 ; l. 41-3)

Diviser un trapèze en deux parties inégales selon un rapport donné à partir de la division des côtés parallèles.

<Problème 37> (p. 127 ; l. 2-3) – Fav.25

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur le plus petit des deux côtés parallèles.

<Problème 38> (p. 127 ; l. 38-9)

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un de ses deux côtés parallèles.

<Problème 39> (p. 127 ; l. 39-40 / p. 128 ; l. 21-2)

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un des deux côtés non parallèles.

<Problème 40> (p. 128 ; l. 23-4) – Fav.26

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un de ses sommets.

<Problème 41> (p. 129 ; l. 4) – Fav.28

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un point donné en dehors de celui-ci.

<Problème 42> (p. 131 ; l. 13-4)

Diviser un trapèze en deux parties égales par une droite passant par un point donné à l'intérieur de celui-ci.

<Problème 43> (p. 131 ; l. 41-2) – Fav.29

Diviser un trapèze en deux parties inégales selon un rapport donné par une droite parallèle à sa base.

<Problème 44> (= Problème 35) / (p. 133 ; l. 17-20)

Diviser un trapèze en deux parties inégales selon un rapport donné.

<Problème 45> (p. 133 ; l. 30-2) – Fav.31

Diviser un trapèze en deux parties inégales selon un rapport donné par une droite passant par un de ses sommets.

<Problème 46> (p. 134 ; l. 11-2) – Fav.32

Diviser un trapèze en deux parties inégales selon un rapport donné par une droite passant par un point donné à l'intérieur ou en dehors de celui-ci.

<Problème 47> (p. 134 ; l. 14-5) – Fav.33

Diviser un trapèze en trois parties égales par une droite parallèles à sa base.

<Problème 48> (p. 135 ; l. 16-7)

Diviser un trapèze en trois parties égales telles que chacune contienne le tiers d'un côté.

<Problème 49> (p. 135 ; l. 25-7)

Diviser un trapèze en trois parties égales à partir de la division des côtés parallèles.

<Problème 50> (p. 135 ; l. 38-9) – Fav.34

Couper un tiers d'un trapèze par une droite passant par un de ses sommets.

<Problème 51> (p. 137 ; l. 4-6)

Couper une partie quelconque d'un trapèze par une droite passant par un point donné en dehors, à l'intérieur du trapèze ou bien sur l'un de ses côtés.

<Problème 52> (p. 137 ; l. 7-10) – Fav.35

Diviser proportionnellement un trapèze en trois parties inégales.

#### <IV> La division des quadrilatères quelconques. (p. 138 ; l. 9)

<Problème 53> (p. 138 ; l. 10-1) – Fav.36

Diviser un quadrilatère en deux parties égales par une droite passant par un de ses sommets.

<Problème 54> (p. 138 ; l. 28-9) – Fav.37

Diviser un quadrilatère en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un de ses côtés.

<Problème 55> (p. 139 ; l. 33-4) – Fav.38

Diviser un quadrilatère en deux parties égales par une droite passant par un point extérieur ou intérieur à celui-ci.

<Problème 56> (p. 139 ; l. 36-9)

Couper une partie donnée d'un quadrilatère par une droite passant par l'un de ses sommets.

<Problème 57> (p. 140 ; l. 11-2) – Fav.39

Couper une partie donnée d'un quadrilatère par une droite passant par un point donné sur l'un de ses côtés.

<Problème 58> (p. 140 ; l. 25-7)

Diviser un quadrilatère en trois parties égales à partir de la division en trois parties égales d'un de ses côtés.

<Problème 59> (p. 140 ; l. 36-7) – Fav.40

Diviser un quadrilatère en deux parties inégales selon un rapport donné par une droite passant par un point donné ou un de ses sommets.

<Problème 60> (p. 141 ; l. 24-5) – Fav.41

Diviser un quadrilatère en plusieurs parties selon des rapports donnés.

<Problème 61> (p. 142 ; l. 28-30)

Diviser un quadrilatère (ayant la forme de la foudre), dont les diagonales ne peuvent pas se couper, en deux quadrilatères semblables.

#### <V> **La division des polygones.** (p. 143 ; l. 17)

<Problème 62> (p. 143 ; l. 18-9) – Fav.42

Diviser un pentagone équilatère et équiangle en deux parties égales par une droite passant par un de ses sommets.

<Problème 63> (p. 143 ; l. 28-9)

Diviser un pentagone équilatère et équiangle en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur un de ses côtés.

<Problème 64> (p. 143 ; l. 39-41) – Fav.43

Diviser un pentagone quelconque en deux parties égales.

<Problème 65> (p. 144 ; l. 11-3)

Diviser un pentagone en plusieurs parties.

<Problème 66> (p. 144 ; l. 17)

Diviser un pentagone ayant la forme d'une mitre.

<Problème 67> (p. 145 ; l. 1-2)

Diviser un pentagone en trois parties égales.

<Problème 68> (p. 145 ; l. 5-6) – Fav.44

Diviser un hexagone en deux parties égales.

#### <VI> **La division du cercle et de ses portions.** (p. 145 ; l. 17)

<Problème 69> (p. 145 ; l. 18-20) – Fav.45

Diviser un cercle en deux parties égales par une droite passant par un point donné sur son périmètre ou bien à l'extérieur de celui-ci.

<Problème 70> (p. 145 ; l. 25) – Fav.46

Diviser un cercle en deux parties égales par une droite passant par un point à l'intérieur de celui-ci.

<Problème 71> (p. 145 ; l. 29-32) – Fav.47

Diviser un cercle en trois parties égales.

<Problème 72> (p. 145 ; l. 37) – Fav.48

Diviser un cercle en plusieurs parties égales à partir de son centre.

<Problème 73> (p. 145 ; l. 40-3) – F.49

Diviser un cercle en trois parties égales à l'aide de droites parallèles.

<Problème 74> (p. 146 ; l. 32) – Fav.50

Diviser un cercle en quatre parties égales à l'aide de droites parallèles.

<Problème 75> (p. 146 ; l. 37-8) – Fav.51

Couper une partie donnée – un tiers – d'un cercle entre deux droites parallèles.

<Problème 76> (p. 147 ; l. 10-3) – Fav.52

Couper d'un cercle une partie donnée à l'aide d'un cercle concentrique.

<Problème 77> (p. 147 ; l. 29-30) – Fav.53

Diviser un demi-cercle en deux parties égales.

<Problème 78> (p. 147 ; l. 37) – Fav.54

Diviser un demi-cercle en deux parties égales par une droite parallèle à sa base.

<Problème 79> (p. 147 ; l. 41-2) – Fav.55

Diviser une portion de cercle en deux parties égales.

<Problème 80> (p. 148 ; l. 4) – Fav.56

Diviser un demi-cercle en trois parties égales.

<Problème 81> (p. 148 ; l. 13-6)

Diviser une figure formée de deux côtés droits et d'un arc de cercle en deux parties égales.

### ANNEXE III Analyses mathématiques<sup>87</sup> des démonstrations des problèmes B.7 et Fib.59

Conventions pour les analyses mathématiques des annexes 3 et 4 :

[H. I.31] renvoie implicitement à la Proposition 31 du Livre I des Eléments d'Euclide dans la version d'Heiberg, l'auteur original ne s'y référant pas.

(B. I.37 = H. I.37) renvoie à la référence explicite dans le texte d'al-Baghdādī de la Proposition 37 du Livre I des Eléments d'Euclide ; lorsque cela nous a été possible, nous

---

<sup>87</sup> Nous transcrivons ici les démonstrations d'al-Baghdādī et de Fibonacci sans anachronisme sinon dans l'écriture moderne utilisée. Nous avons jugé utile d'apporter quelques précisions personnelles pour une meilleure compréhension de celles-ci entre crochets. De même, nous avons choisi l'écriture fractionnaire pour les rapports pour améliorer la lisibilité des résultats.



l'avons complété avec ces références rapportées à la version d'Heiberg dans la traduction de Vitrac<sup>88</sup>.

• **Problème B.7 :**

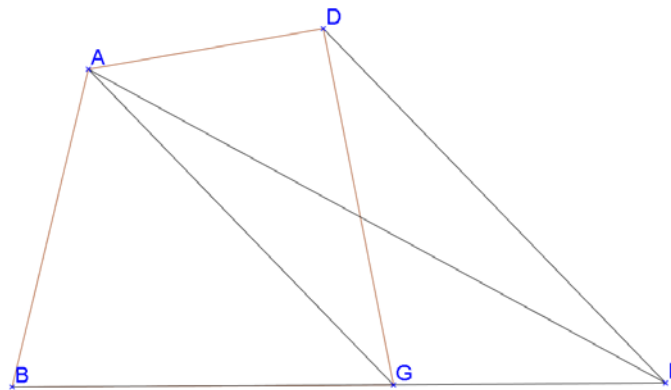
Soient  $ABGD$  un quadrilatère et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne passant par  $A$ .

Traçons la diagonale  $AG$ . Traçons la parallèle à  $AG$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $F$ .  
[H. I.31 ; H. I. 17]

Divisons  $BF$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{BG}{GF} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que  $AG$  partage le quadrangle  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  donné.

$$ADG = AFG \text{ (B. I.37 = H. I.37)}$$

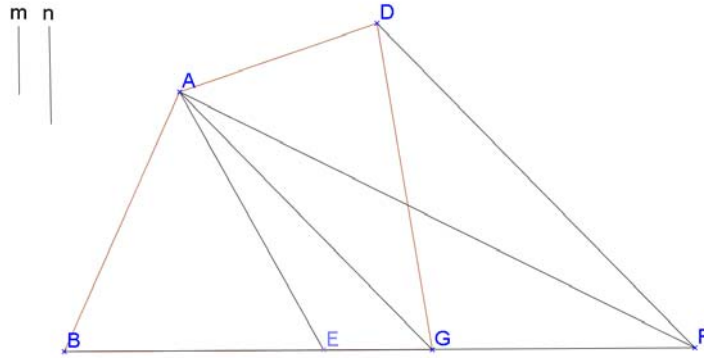
$$\frac{ABG}{AGF} = \frac{m}{n} \text{ (B. VI.1) ; [H. V.11]}$$

$$\text{Donc } \frac{ABG}{AGD} = \frac{m}{n} \text{ [H. V.7 ; H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $E$  de  $BF$  tel que  $\frac{BE}{EF} = \frac{m}{n}$  est entre  $B$  et  $G$ .

Traçons  $AE$  et montrons que  $\frac{ABE}{AEGD} = \frac{m}{n}$ .

<sup>88</sup> [Vitrac, 1990]



Traçons  $AF$ .

$$ADG = AFG \text{ (B. I.37 = H. I.37)}$$

$$ADG + AEG = AFG + AEG ; \text{ donc, } AEGD = AEF.$$

$$\frac{ABE}{AEGD} = \frac{ABE}{AEF} \text{ [H. V.7]}$$

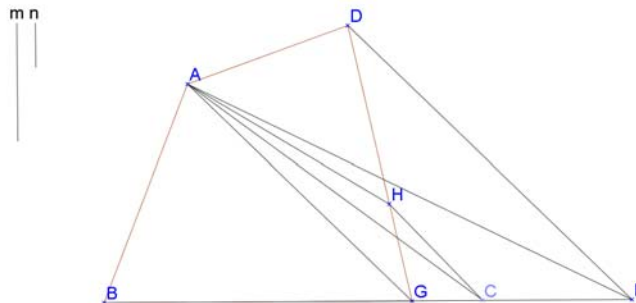
$$\frac{ABE}{AEF} = \frac{m}{n} \text{ (B. VI.1 = H. VI.1)}$$

$$\text{Donc } \frac{ABE}{AEGD} = \frac{m}{n} \text{ [H. V.7 ; H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : le point  $C$  de  $BF$  tel que  $\frac{BC}{CF} = \frac{m}{n}$  est entre  $G$  et  $F$ .

Traçons la parallèle à  $DF$  passant par  $C$ . Elle coupe  $GD$  en  $H$ . [H. I.31 ; H. I.17]

Traçons  $AH$  et montrons que  $\frac{ABGH}{ADH} = \frac{m}{n}$ .



Traçons  $AC$ .

$$AHG = ACG \text{ [H. I.37]}$$

Mais  $ADG = AFG$  [H. I.37]

$$ADG - AHG = AFG - ACG ; \text{ d'où } ADH = AFC$$

$$AGH + ABG = ACG + ABG, \text{ d'où } ABGH = ABC$$

$$\frac{ABGH}{ADH} = \frac{ABC}{ACF} \text{ [H. V.7 ; H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ABC}{ACF} = \frac{BC}{CF} \right] \text{ [H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{BC}{CF} = \frac{m}{n} \right] \text{ [par hypothèse], donc } \frac{ABC}{ACF} = \frac{m}{n} \text{ [H. V.11]}$$

$$\text{Par conséquent } \frac{ABGH}{ADH} = \frac{m}{n} \text{ [H. V.11]}$$

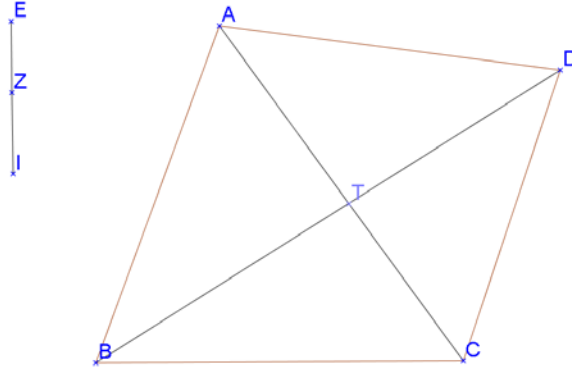
• **Problème Fib.59 :**

Soient  $ABCD$  un quadrilatère et  $\frac{EZ}{ZI}$  un rapport donné.

Divisons  $ABCD$  selon le rapport  $\frac{EZ}{ZI}$  par une ligne passant par  $D$ .

Soit  $T$  le point de  $AC$  tel que  $\frac{CT}{AT} = \frac{EZ}{ZI}$ . [H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $DB$  et  $AC$  se coupent en  $T$ .



Montrons que  $DB$  divise  $ABCD$  selon le rapport  $\frac{EZ}{ZI}$ .

$$\frac{DCT}{DTA} = \frac{CT}{TA} \quad [\text{H. VI.1}]$$

$$\frac{CBT}{TBA} = \frac{CT}{TA} \quad [\text{H. VI.1}]$$

donc,  $\frac{DCB}{DAB} = \frac{CT}{TA}$  [H. V.12]

$$\left[ \frac{CT}{TA} = \frac{EZ}{ZI} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{DCB}{DAB} = \frac{EZ}{ZI} \quad [\text{H. V.7 ; H. V.11}]$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $DB$  et  $AC$  ne se coupent pas en  $T$ .

- $DB$  coupe  $AC$  entre  $C$  et  $T$ .

$$\left[ \frac{DTC}{DTA} = \frac{CT}{TA} \right] \quad [\text{H. VI.1}]$$

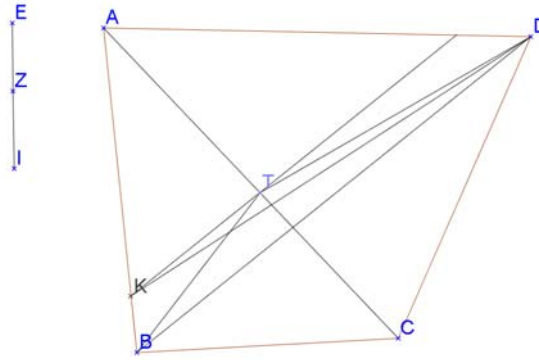
$$\left[ \frac{BTC}{BTA} = \frac{CT}{TA} \right] \quad [\text{H. VI.1}]$$

donc  $\frac{TBCD}{TBAD} = \frac{CT}{TA}$  [H. V.12]

$$\left[ \frac{CT}{TA} = \frac{EZ}{ZI} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{TBCD}{TBAD} = \frac{EZ}{ZI} \quad [\text{H. V.7 ; H. V.11}]$$

Traçons la parallèle à  $BD$  passant par  $T$  ; elle coupe  $AB$  en  $K$ . [H. I.31 ; H. I.17]



Montrons que  $DK$  divise  $ABCD$  selon le rapport  $\frac{EZ}{ZI}$ .

[ $KBD = TBD$ ] [H. I. 37]

[ $KBD + DBC = TBD + DBC$ ]

$KBCD = TBCD$

[ $TBAD = DAK$ ]

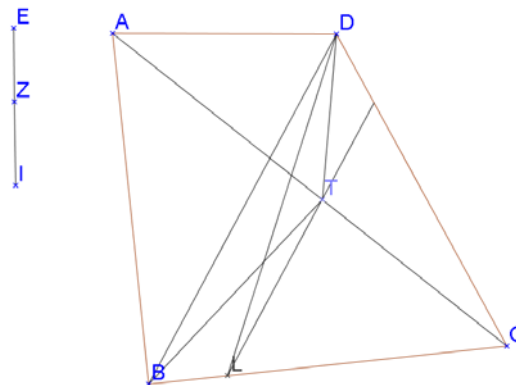
$\left[ \frac{TBCD}{TBAD} = \frac{KBCD}{DAK} \right]$  [H. V.7 ; H. V.11]

$\left[ \frac{TBCD}{TBAD} = \frac{EZ}{ZI} \right]$

donc,  $\frac{KBCD}{DAK} = \frac{EZ}{ZI}$  [H. V.7 ; H. V.11]

- $DB$  coupe  $AC$  entre  $T$  et  $A$ .

Traçons la parallèle à  $BD$  passant par  $T$  ; elle coupe  $BC$  en  $L$ . [H. I.31 ; H. I.17]



Montrons que  $DL$  divise  $ABCD$  selon le rapport  $\frac{EZ}{ZI}$ .

(Même démonstration que précédemment)

$$\frac{DCL}{ABLD} = \frac{EZ}{ZI}.$$

**ANNEXE IV**  
**Analyses mathématiques**  
**des démonstrations des problèmes B.12 et Fib.43**

• **Problème B.12 :**

Soient  $ABGD$  un trapèze avec  $AD$  et  $BG$  parallèles, et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne parallèle aux côtés  $AD$  et  $BG$ .

Soit  $E$  le point d'intersection de  $AB$  et  $DG$ .

Posons les points  $H, L$  et  $O$  tels que :  $\frac{DAE}{GBE} = \frac{HO}{LO}$ .

$$\left[ \frac{ABGD}{GBE} = \frac{HL}{LO} \right] \text{ [H. V.17]}$$

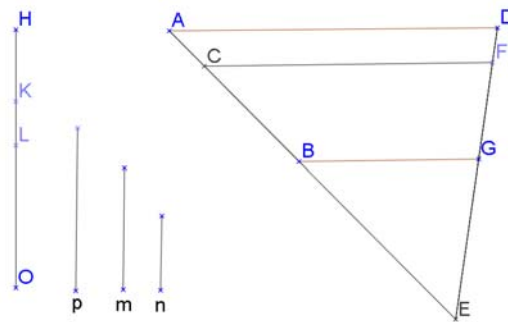
$$\frac{GBE}{DABG} = \frac{LO}{LH} \text{ [H. Porisme V.7]}$$

Divisons  $HL$  au point  $K$  tel que  $\frac{HK}{KL} = \frac{m}{n}$ . [H. VI.10]

Soit  $p$  la moyenne proportionnelle entre  $KO$  et  $OL$ . [H. VI.13]

Soit  $F$  le point de  $DE$  tel que  $\frac{FE}{GE} = \frac{KO}{p}$ . [H. VI.12]

Traçons la parallèle à  $DA$  passant par  $F$  ; elle coupe  $AB$  en  $C$ . [H. I.31 ; H. I.17]



Montrons que  $FC$  coupe  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$\frac{FCE}{GBE} = \frac{FE^2}{GE^2} \text{ [H. VI.19]}$$

$$\frac{FCE}{GBE} = \frac{KO^2}{p^2} \text{ [par hypothèse ; H. V.11]}$$

$$\frac{KO}{p} = \frac{p}{LO} \text{ [par hypothèse], donc } \frac{FCE}{GBE} = \frac{KO}{LO} \text{ [H. V.11]}$$

$$\frac{FCBG}{GBE} = \frac{KL}{LO} \text{ [H. V.17] et } \frac{GBE}{ABGD} = \frac{LO}{LH}, \text{ donc } \frac{FCBG}{ABGD} = \frac{KL}{LH}$$

$$\frac{FGBC}{ACFD} = \frac{KL}{KH} \text{ [H. V.17]}$$

$$\frac{ACFD}{CBGF} = \frac{HK}{KL} \text{ [H. Porisme V.7]}$$

$$\text{Donc, } \frac{ACFD}{CBGF} = \frac{m}{n} \text{ [H. V.11]}$$

• **Problème Fib.43 :**

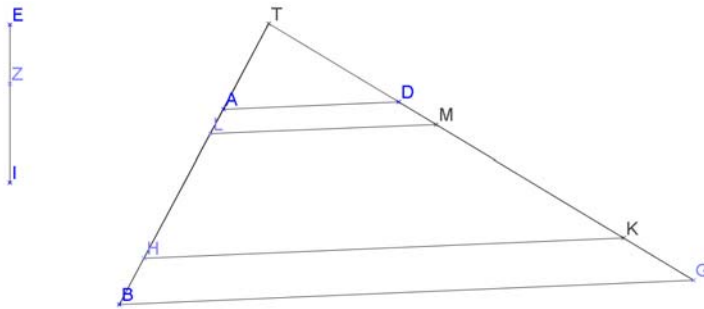
Soient  $ABGD$  un trapèze avec  $BG$  et  $AD$  parallèle et  $\frac{EZ}{ZI}$  un rapport donné.

$BA$  et  $GD$  sont sécantes en  $T$ .

Soit  $L$  le point de  $TB$  tel que  $\frac{TL^2}{AT^2} = \frac{ZI}{EZ}$ .

Soit  $H$  le point de  $TB$  tel que  $\frac{HT^2}{BT^2 + TL^2} = \frac{EZ}{EI}$ .

La parallèle à  $BG$  et  $AD$  passant par  $L$  (resp.  $H$ ) coupe  $TG$  en  $M$  (resp.  $K$ ). [H. I.31 ; H. I.17]



Montrons que  $HK$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{EZ}{ZI}$ .

$$\frac{TLM}{TAD} = \frac{TL^2}{TA^2} \text{ [H. VI.19]}$$

$$\frac{ZI}{EZ} = \frac{TL^2}{TA^2} \text{ [par hypothèse], soit } \frac{ZI}{EZ} = \frac{TLM}{TAD} \text{ [H. V.11]}$$

$$\frac{EI}{EZ} = \frac{TLM + TAD}{TAD} \text{ [H. V.18]}$$

$$\frac{EZ}{EI} = \frac{TAD}{TAD + TLM} \text{ [H. Porisme V.7]}$$

$$\frac{EZ}{EI} = \frac{HT^2}{BT^2 + TL^2} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{HT^2}{BT^2 + TL^2} = \frac{THK}{TBG + TLM} \text{ [H. VI.19]}$$

$$\frac{EZ}{EI} = \frac{THK}{TBG + TLM} \text{ [H. V.11]}$$

$$\begin{cases} THK = AHKD + TAD \\ TBG + TLM = ABGD + TAD + TLM \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \frac{EZ}{EI} = \frac{AHKD + TAD}{ABGD + TAD + TLM}$$

$$\text{Mais } \frac{EZ}{EI} = \frac{TAD}{TAD + TLM}, \text{ donc } \frac{AHKD}{ABGD} = \frac{EZ}{EI}$$

$$\frac{AHKD}{HBGK} = \frac{EZ}{ZI} \text{ [H. V.17]}$$