
EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Resultados recientes sobre mosaicos de Penrose

por

J. Cáceres, M. E. Gegúndez, M. Maestre,

A. Márquez y A. Moreno-González

1. INTRODUCCIÓN

En un número anterior de LA GACETA [9] (y en diferente sección), algunos de los autores ya presentamos parte de nuestros trabajos sobre mosaicos aperiódicos. En aquel entonces exponíamos un nexo de unión entre los mosaicos aperiódicos y una de las disciplinas de las matemáticas de mayor auge en los últimos tiempos, la Geometría Computacional. Más concretamente, veíamos que una de las herramientas principales de dicha disciplina, Diagramas de Voronoi, permiten generar infinidad de conjuntos de losetas aperiódicas. En este artículo pretendemos explicar a un nivel más divulgativo en qué consiste un mosaico aperiódico y algunas de sus propiedades numéricas más curiosas.

La teoría de los mosaicos estudia las diferentes maneras en las cuales una superficie o espacio puede cubrirse mediante copias de unos pocos objetos originales, sin superposiciones ni huecos vacíos, intentando al mismo tiempo responder cuestiones acerca de las propiedades de los patrones creados. Actualmente el interés por los mosaicos sigue vigente y no sólo por su uso decorativo sino también por sus aplicaciones en contextos tan diferentes como la Biología [1], la Geografía [18] y naturalmente, en la Cristalografía [13]. En la mayoría de estos contextos, el interés radica en las reglas que gobiernan los procesos y en las propiedades que determinadas reglas producen en los mosaicos.

Como hemos dicho, en este trabajo repasamos algunos de los conceptos básicos de la teoría de los mosaicos aperiódicos. Como una primera idea intuitiva que pronto matizaremos, un mosaico periódico es aquel en el que se repite un cierto patrón y un mosaico aperiódico es aquel en el que no se repite. En algún sentido, de hecho en más de uno, los mosaicos periódicos juegan el papel

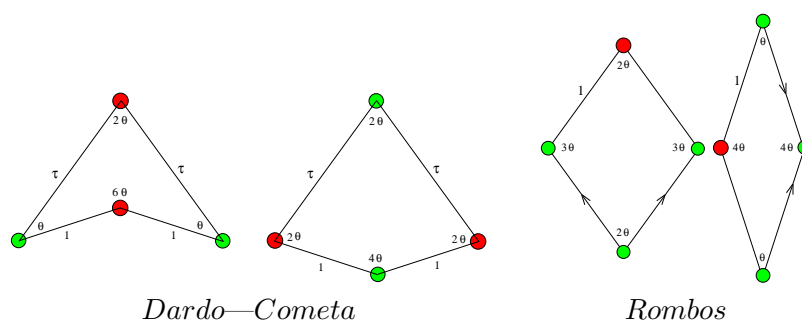


Figura 1: Mosaicos de Penrose

de los números racionales y los mosaicos aperiódicos el papel de los irracionales. Además abordamos el estudio de la coloración de dos mosaicos muy especiales, los mosaicos de Penrose del “*Dardo*” y la “*Cometa*” y el de los *Rombos* (ver Figura 1) y probamos que ambos tipos de mosaicos son 3–coloreables.

Para aquel lector interesado en profundizar un poco más sobre la materia, y dado que no vamos a incluir ningún tipo de detalles ni demostraciones, referencias obligadas en este tema son el texto de Grünbaum y Shepard [11], a un nivel divulgativo, el de Gardner [10] y más especializado, el de Senechal [20]. Con respecto a la relación entre mosaicos aperiódicos y diagramas de Voronoi, además del citado trabajo de la Gaceta [9], se puede consultar el trabajo [8]; y la coloración de mosaicos de Penrose está tratada en [6]

2. CONCEPTOS BÁSICOS

Un *mosaico* plano es una familia numerable de regiones cerradas denominados *losetas* o *teselas* que recubren completamente el plano sin huecos ni superposiciones. De forma más explícita, la unión de las losetas cubre todo el plano y sus interiores son disjuntos dos a dos.

Sin embargo, esta definición es demasiado general. Exigiremos además dos condiciones adicionales con las que eliminaremos los casos indeseados, por triviales, y consideraremos, de esta forma, sólo el tipo más común de losetas y los mosaicos que generan. La primera condición es que las losetas sean homeomorfas a discos cerrados y la segunda es que sólo haya un número finito de losetas distintas en un mosaico.

Un *parche* en un mosaico es cualquier conjunto finito de losetas cuya frontera es una curva cerrada simple. Un *entorno* de un vértice en un mosaico es el mínimo parche que lo cubre y el conjunto de todos los distintos entornos de los vértices de un mosaico es el *atlas* del mosaico. Observar que si el mosaico está generado por un número finito de losetas, el atlas contiene un número finito de entornos.

Ya estamos en condiciones de introducir algunos de los conceptos que se manejarán en esta nota. Decimos que un mosaico es *periódico* si existen dos traslaciones no paralelas que lo deja invariante y *no periódico* en otro caso.

Al considerar un conjunto determinado de losetas tenemos tres escenarios posibles en función de los mosaicos que puedan formar:

- que todos los mosaicos posibles formados con las losetas sean todos periódicos; este es el caso del hexágono regular, que sólo recubre el plano formando el típico dibujo de una colmena,
- que algunos sean periódicos y otros no periódicos; como en el caso del cuadrado (ejercicio para el lector: encontrar una teselación no periódica por cuadrados),
- y por último, también puede ocurrir que con ese conjunto de losetas sólo se tesele el plano de forma no periódica en cuyo caso diremos que el conjunto de losetas es *aperiódico*.

El interés por las losetas aperiódicas comenzó hace relativamente poco tiempo; en 1961, H. Wang conjeturó que no existían tales losetas [22], pero ya en 1966 Berger [3], descubrió el primer conjunto aperiódico con ¡20146 losetas!; número que rápidamente redujo a 104. Posteriormente, en 1968, Knuth [12] consiguió un nuevo conjunto de 92 losetas. La reducción más importante la realizó Robinson [19] en 1971, hallando un conjunto con tan sólo 6 losetas que básicamente son cuadrados con modificaciones en sus esquinas. Finalmente entre 1973 y 1974, Roger Penrose descubrió tres conjuntos aperiódicos de losetas [15]. El primero de ellos, que denotó como P_1 , consta de 6 losetas, que se basan en rombos, pentágonos regulares y estrellas de cinco puntas con ciertas modificaciones en las aristas, para que no todas encajen bien la una con la otra.

Habitualmente las modificaciones en las aristas a las que hemos hecho referencia en el párrafo anterior, que obligan a las teselas a unirse de una determinada forma, son sustituidas por ciertas condiciones o reglas combinatorias denominadas *reglas de emparejamiento* y generalmente se definen mediante etiquetas en los vértices y en las aristas, que han de coincidir para que dos aristas puedan identificarse.

El segundo conjunto de Penrose, P_2 , es el más conocido de los conjuntos aperiódicos de losetas y está formado por tan sólo dos losetas, el *dardo* y la *cometa*, de la Figura 1, donde $\theta = \pi/5 \text{ rad.}$ y τ es la razón áurea. Y por último, el conjunto denominado P_3 que está formado por dos tipos de rombos (Figura 1). En la Figura 1 se observan la reglas de emparejamiento a las que hacíamos referencia anteriormente, así los vértices más oscuros sólo pueden coincidir con otros vértices oscuros y los claros con los claros, además, en el caso de los rombos las flechas han de coincidir en su dirección. Ambos conjuntos de losetas son interesantes por ser los conjuntos de losetas más pequeños que



Figura 2: Sir Roger Penrose

se conocen. En lo que sigue, a estas losetas las llamaremos losetas de Penrose y a los mosaicos que generan, mosaicos de Penrose.

Los mosaicos de Penrose verifican propiedades muy interesantes, y entre otras veremos aquí algunas de carácter numérico y, sobre todo, nos centraremos en la coloración de los mosaicos de Penrose.

3. NUMERABILIDAD, RAZÓN AÚREA Y OTROS

Para fijar ideas, centrémonos en el ejemplo más conocido de mosaicos de Penrose: los generados por el dardo y la cometa (aunque la gran mayoría de lo que vamos a decir también es válido para los otros mosaicos aperiódicos). La primera de las cuestiones que uno se puede preguntar es cuántos mosaicos distintos se pueden formar con un dardo y una cometa siguiendo las reglas de emparejamiento a las que hacíamos referencia en la sección anterior. En principio se podría pensar que sólo se puede formar un solo mosaico ya que reglas tan restrictivas parecen determinar la manera de ir colocando las losetas. Sin embargo, esto no sólo no es así sino que se pueden formar una cantidad no numerable de mosaicos distintos con nuestras dos losetas.

La demostración de este hecho se basa en que todo mosaico de Penrose se puede transformar en otro mosaico aperiódico siguiendo ciertas reglas de subdivisión de losetas y nueva reagrupación. Esta operación es conocida como la *composición*, que en su versión más simple consiste en la capacidad que tienen algunos mosaicos de unir sus losetas para construir losetas semejantes a las primeras (y con reglas de emparejamiento equivalentes) pero más grandes, de forma que se obtiene un conjunto de losetas equivalente al original. En su versión más compleja se permite dividir las losetas del mosaico original para obtener un segundo conjunto que será al que se le aplicará la composición

simple. Por último, las losetas ampliadas se agrupan para obtener un conjunto equivalente al primero.

Esta última versión de la operación composición es la que se utiliza por ejemplo con el dardo y la cometa (en [11], se puede consultar la construcción en detalle). Ambas losetas se dividen por su eje de simetría obteniendo otro mosaico formado por dos tipos de triángulos. Siguiendo las reglas adecuadas y de manera unívoca, ciertos triángulos adyacentes se unen para formar versiones ampliadas de sí mismos con lo que se obtiene un nuevo mosaico de triángulos más grandes. Finalmente en este último mosaico se pegan las teselas adecuadas para generar nuevos dardos y cometas aumentados. Es conocido que si la operación de composición es única, y éste es el caso de los mosaicos de Penrose, el mosaico es no periódico.

Así, a partir de un mosaico de Penrose determinado \mathcal{T} , se puede construir, por medio de la composición, otro \mathcal{T}_1 y así sucesivamente (ver [11] para una descripción más precisa de estos nuevos mosaicos). Cada uno de estos mosaicos no son exactamente mosaicos de dardos y cometas (ya hemos dicho que en los pasos intermedios son triángulos), pero comparten algunas de sus propiedades, en concreto, siempre están formados por dos tipos de losetas una grande y una pequeña. De este modo podemos asignar a cada par (P, \mathcal{T}) donde P es un punto del plano y \mathcal{T} un mosaico de Penrose, una sucesión $\{a_i\}$ de ceros y unos de la siguiente forma: a partir de \mathcal{T} construimos la sucesión \mathcal{T}_i y entonces a_j será cero si P pertenece a una loseta pequeña de \mathcal{T}_j y será uno si está en una loseta grande. Se pueden probar dos hechos importantes:

1. Cualquier sucesión de ceros y unos que no contenga dos unos consecutivos es la sucesión asignada a un cierto par (P, \mathcal{T}) .
2. Las sucesiones de dos puntos distintos del mismo mosaico difieren sólo en una cantidad finita de términos (llega un momento en el que los dos puntos caen en la misma loseta).

A partir de estos dos resultados se concluye que existe una cantidad no numerable de mosaicos de Penrose.

Aunque acabamos de decir que existe una cantidad no numerable de Mosaicos de Penrose distintos entre sí, una propiedad muy curiosa es que dichos mosaicos, en realidad, se parecen mucho. Cualquier trozo finito de ellos se repite infinitamente en cualquiera de los restantes mosaicos y, por lo tanto, localmente son indistinguibles uno de otros. Cuando vemos una porción de un mosaico de Penrose (y los autores de este trabajo es todo cuanto han visto hasta el momento) no sabemos en qué mosaico nos encontramos. Esta propiedad se denomina *isomorfismo local*. En general podemos decir que localmente los mosaicos de Penrose tienen una estructura muy regular pero bastante irregular a nivel global.

Otra cuestión curiosa es que muchos de los primeros mosaicos aperiódicos encontrados originalmente presentaban de alguna u otra forma una relación

con la razón áurea. Ello está relacionado con la simetría pentagonal que presentaban estos mosaicos. Por ejemplo, puede verse que en el dardo o la cometa un par de lados tiene esa longitud.

4. 3-COLORACIÓN DE LOS MOSAICOS DE PENROSE: DARDO-COMETA Y ROMBOS

En esta sección nos proponemos estudiar la coloración de los mosaicos de Penrose. Aunque el problema de la coloración de mapas es bien conocido (cualquier mapa plano admite una coloración con cuatro colores de tal forma que dos regiones limítrofes tienen asignados colores distintos), su relación con otros muchos problemas (de asignación de tareas, de clasificación u otros más algebraicos) lo hace hoy en día casi más actual que cuando Appel y Hanken dieron su demostración del teorema de los cuatro colores en 1976.

El problema de colorear mosaicos aperiódicos consiste en determinar cuántos colores se necesitan para colorear las teselas de un mosaico de modo que cualesquiera dos losetas adyacentes tengan colores distintos; donde dos losetas son adyacentes si comparten un lado completo. Obviamente, si fuera posible, dado un mosaico \mathcal{T} nos gustaría conocer una coloración del mismo o un procedimiento que lo colorease. La coloración de mosaicos aperiódicos es un problema que ha atraído la atención de los investigadores en los últimos años (ver [16]). Concretamente el número de colores necesarios para colorear los Rombos de Penrose fue resuelto por T. Sibley y S. Wagon en [21] dando un resultado general para todos los conjuntos formados por cuadriláteros. Nosotros presentamos aquí, muy sucintamente, un método unificado tanto para los rombos como para los dardos y cometas que, además puede ser utilizado para otros tipo de mosaicos aperiódicos.

Tal y como se ha comentado en la sección anterior, dos de las propiedades más importantes de la inmensa mayoría de los mosaicos aperiódicos son la propiedad del *isomorfismo local* para los mosaicos generados por un mismo conjunto y la propiedad de composición-descomposición para las losetas de un conjunto de losetas (ver [11]).

La propiedad del isomorfismo local junto con un conocido resultado de N.G. de Bruijn y P. Erdős [5] sirve para probar que basta con ver la 3-coloración de un mosaico de Penrose para inferir la 3-coloración de todos los mosaicos de Penrose usando las mismas losetas. Efectivamente, el resultado de N.G. de Bruijn y P. Erdős dice que es equivalente probar que un grafo infinito es n -coloreable a que cualquier subgrafo finito suyo lo sea. Así si sabemos que un mosaico de Penrose concreto es 3-coloreable, entonces todo submosaico suyo finito lo es. Por otra parte, por la propiedad del isomorfismo local, los submosaicos finitos son comunes a todos los mosaicos de Penrose del mismo tipo, y sólo nos queda aludir al teorema de N.G. Bruijn y P. Erdős para concluir que todos mosaico del mismo tipo es 3-coloreable.

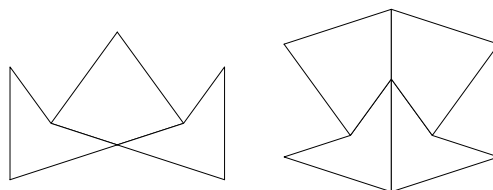


Figura 3: Composición de dardos y cometas

Algunos de los autores de este trabajo han usado las propiedades básicas de la composición para demostrar que los mosaicos de Penrose con dardos y cometas y con rombos pueden ser coloreados utilizando sólo tres colores. Como veremos, el problema de la 3-coloración lo resolveremos subdividiendo los mosaicos de Penrose en una cantidad numerable de parches donde cada parche es una copia isométrica de un elemento de un conjunto finito de parches legalmente coloreados.

Inicialmente nos vamos a concentrar en la subdivisión del mosaico en un conjunto finito de tipos de regiones acotadas. Sea \mathcal{T} un mosaico con un conjunto finito de losetas. Consideremos \mathcal{T} con las losetas decoradas con un conjunto de líneas de Jordan, denominadas *J-líneas básicas*, de la siguiente forma:

- Para cada vértice de las losetas existe una *J-línea básica* separándolo del resto de vértices de la loseta.
- Las *J-líneas básicas* de vértices consecutivos u y v de una loseta deben llegar unidas a la arista uv de la loseta; i.e. debe haber un único punto de contacto de las *J-líneas básicas* sobre la arista uv .
- Para cada vértice del mosaico las *J-líneas básicas* deben coincidir, esto es, continuar entre una loseta y la adyacente sobre las aristas del mosaico.

Obviamente cualquier mosaico puede decorarse con *J-líneas básicas*; para hacerlo es suficiente con elegir un punto en el interior de cada loseta y unirlo mediante una curva de Jordan con los puntos medios de los lados de la loseta.

La razón principal para introducir las *J-líneas básicas* es que las *J-líneas básicas* sobre un mosaico subdividen el plano en regiones acotadas de una cantidad finita de tipos distintos; a lo sumo una región por cada elemento en el atlas del mosaico.

Partiendo de las *J-líneas básicas* (nivel 0) sobre el dardo y la cometa, vamos a definir las *J-líneas* de nivel i (que no son propiamente líneas, sino conjuntos de losetas) inductivamente de la siguiente forma: pasaremos de un mosaico de un nivel a otro superior mediante la operación de descomposición

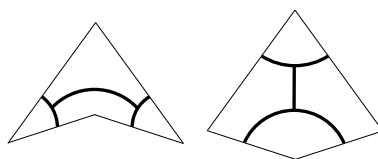


Figura 4: J -líneas básicas en el dardo y la cometa

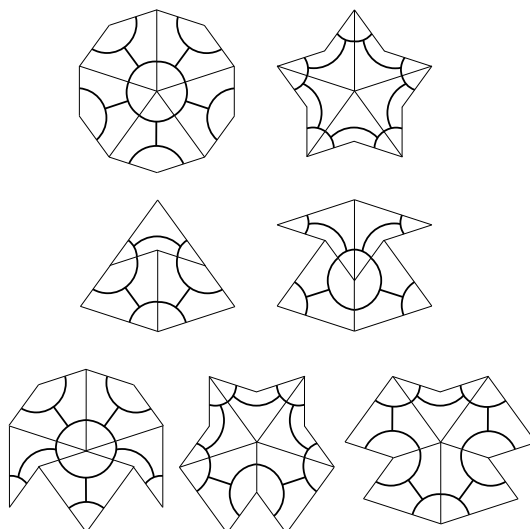


Figura 5: Líneas sobre los 7 entornos de Penrose

(la operación inversa de la composición comentada anteriormente). Las J -líneas de nivel 1 serán todas las losetas del mosaico de nivel 1 que contienen algún punto de las J -líneas básicas y, en general, las J -líneas de nivel i serán todas las losetas necesarias para tapar las J -líneas de nivel $i - 1$. Así en cada nivel, fuera de las J -líneas nos quedan sólo una cantidad finita de tipos distintos de parches. Por lo tanto, si en un nivel dado somos capaces de 3-colorear legalmente todas las losetas de las J -líneas y los parches que componen su complementario, habremos conseguido dar una 3-coloración de un mosaico de Penrose y, por lo comentado anteriormente, habremos probado que todos los mosaicos de Penrose con sus mismas losetas se pueden 3-colorear.

4. 1 MOSAICOS DE PENROSE: DARDO-COMETA

Sobre cada dardo y cometa de cualquier mosaico consideramos unas líneas como las líneas gruesas de la Figura 4; teniendo en cuenta que las intersecciones

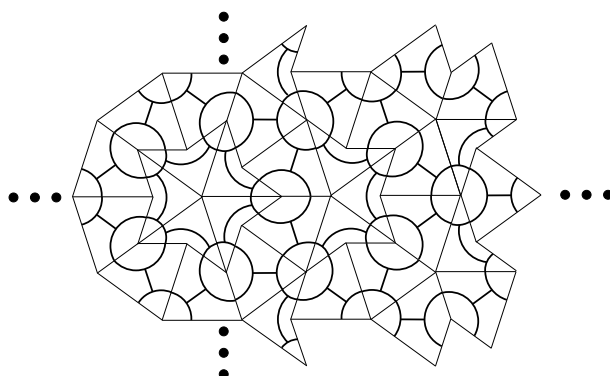


Figura 6: Regiones sobre el plano de Penrose

de las líneas con los lados de las losetas deben coincidir en la frontera del dardo y de la cometa. Si generamos el atlas del mosaico de Penrose con estas losetas decoradas, obtenemos 7 tipos de entornos (Figura 5) de los vértices que nos divide el plano, como se puede observar en la Figura 6.

Ahora la estrategia está clara. Llegar a un nivel apropiado de complejidad (nivel 6 en este caso) para poder colorear legalmente las J -líneas de dicho nivel de tal manera que se puedan pegar bien, y para poder colorear legalmente las partes complementarias (entornos de los vértices originales no cubiertos por las J -líneas), evitando incompatibilidades con las J -líneas. Y podemos probar el siguiente resultado:

TEOREMA

Los mosaicos de Penrose con dardos y cometas se pueden colorear con sólo 3 colores

4.2 MOSAICOS DE PENROSE: ROMBOS

Al igual que en el caso anterior sobre cada rombo de cualquier mosaico consideramos unas líneas como las líneas gruesas de la Figura 8; teniendo en cuenta que las intersecciones de las líneas con los lados de las losetas coinciden en los rombos. Si generamos el atlas del mosaico de Penrose con estas nuevas losetas, obtenemos una región acotada por cada uno de los 8 entornos de los vértices excepto en los tres primeros casos (ver Figura 9). Pero en esos casos, debido a las reglas de emparejamiento, las posibles configuraciones que se forman son solamente dos ya que tanto el primer como el segundo entorno han de unirse con el tercer. Por tanto, cualquier mosaico de Penrose con estas nuevas losetas, al igual que en el caso anterior, nos divide el plano en exactamente 7 tipos de regiones distintas.

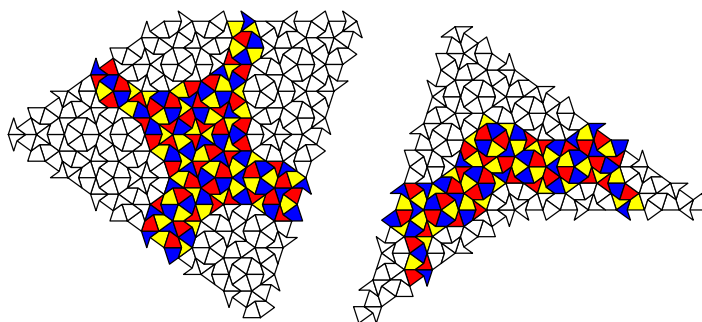


Figura 7: J -líneas sobre el dardo y la cometa de Penrose (nivel 6)

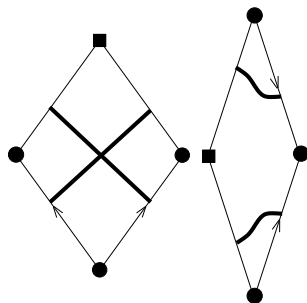


Figura 8: Líneas sobre rombos de Penrose

El argumento sigue igual que en el de los mosaicos de *dardos* y *cometas*, aunque en este caso se necesita llegar al nivel 8 en el proceso de *descomposición*. Y también podemos probar que

TEOREMA

Los mosaicos de Penrose con rombos se pueden colorear con sólo 3 colores.

Obsérvese, además, que este método es aplicable para otros mosaicos aperiódicos y su total potencialidad está aún por explotar en otras propiedades de los mosaicos de Penrose que, a buen seguro, el futuro nos irá desvelando. Probablemente, en un próximo número de LA GACETA podamos seguir compartiendo algunos de las curiosidades que estos entes nos proporcionan.

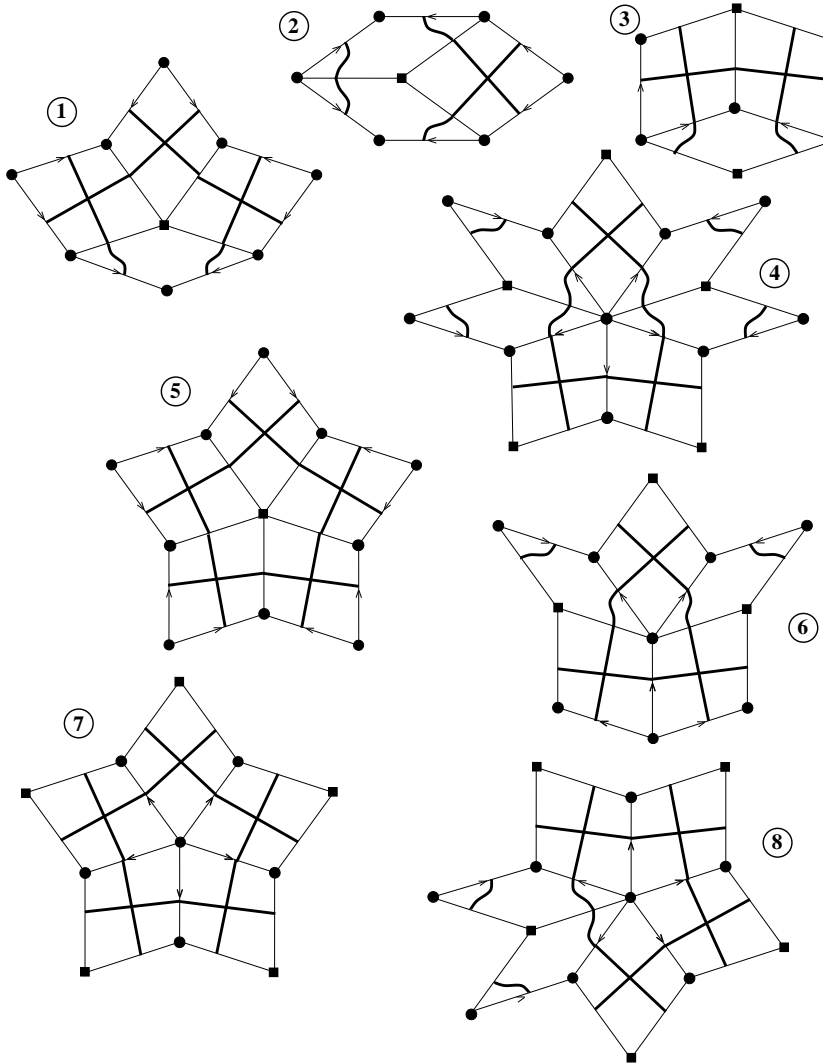


Figura 9: Líneas sobre entornos de Penrose

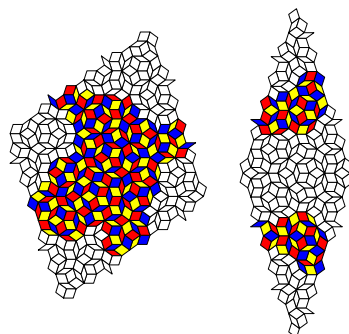


Figura 10: Composición de los rombos de nivel 8

REFERENCIAS

- [1] L. A. ABBOTT Y A. LINDENMAYER, Models of growth of clones in hexagonal cell arrangements: Applications in *Drosophila* wing disc epithelia and plant epidermal tissues. *J. Theor. Biology*, 90:495–514, 1981.
- [2] R. BABILON, 3-colourability of Penrose kite-and-dart tilings. *Discrete Mathematics*, 235, pp. 137–143.
- [3] R. BERGER, *The undecidability of the domino problem*. Memoirs Amer. Math. Soc., 66:72, 1966.
- [4] M. DE BERG, M. VAN KREVELD, M. OVERMARS Y O. SCHWARZKOPF, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 1997.
- [5] N.G. DE BRUIJN AND P. ERDÖS., A Colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Indag. Math.*, **13** 368–373, 1951.
- [6] J. CÁCERES, M.E. GEGÚNDEZ Y A. MÁRQUEZ, *Three coloring aperiodic tilings*. Preprint enviado a Elsevier Science.
- [7] J. CÁCERES, F. LEDESMA, A. MÁRQUEZ Y A. MORENO, *Resultados recientes sobre mosaicos de Penrose*. Preprint.
- [8] J. CÁCERES Y A. MÁRQUEZ, An aperiodic tiles machine. *Computational Geometry: Theory and Applications* 23(2) (2002) 171-182.
- [9] J. CÁCERES, A. MÁRQUEZ Y A. MORENO-GONZÁLEZ, Una máquina generadora de losetas aperiódicas. *LA GACETA DE LA R.S.M.E.* **3.2** (2000), 343-350.
- [10] M. GARDNER, *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Labor, 1990.
- [11] B. GRÜNBAUM Y G.C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*. Freeman. New York, 1987.

- [12] D. E. KNUTH, *The Art of Computer Programming*, volume 1. Addison–Wesley, Reading, MA, 1968.
- [13] D. LEVINE Y P. J. STEINHARDT, Quasi-crystals: A new class of ordered structures. *Physical Review Letters*, 53:2477–2480, 1984.
- [14] A. OKABE, B. BOOTS Y K. SUGIHARA, *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & sons, 1992.
- [15] R. PENROSE, The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. of Math. and its Appl.* 10 (1974) 266–271.
- [16] I. PETERSON, Coloring Penrose tiles. *Science News*, vol. 155 (10) (1999)
- [17] F.P. PREPARATA Y M.I. SHAMOS, *Computational Geometry*. SpringerVerlag, 1985.
- [18] D. RHYSBURGER, Analytic delineation of Thiessen polygons. *Geographical Analysis*, 5:133–144, 1973.
- [19] R. M. ROBINSON, Undecidability and nonperiodicity of tilings in the plane. *Inventiones Math.*, 12:177–209, 1971.
- [20] M. SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, 1995.
- [21] T. SIBLEY Y S. WAGON, *Three-coloring the Penrose rhombs*. Preprint.
- [22] H. WANG, Proving theorems by pattern recognition II. *Bell System Tech. J.*, 40:1–42, 1961.

J. Cáceres
Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada
Universidad de Almería
04120 Almería
Correo electrónico: jcaceres@ualm.es

M. E. Gegúndez
M. Maestre
A. Moreno-González
Dpto. de Matemáticas (M.A. y A.M)
Universidad de Huelva
21819 Huelva
Correo electrónico: gegundez@uhu.es
maestre@uhu.es
maria.moreno@dmat.uhu.es

A. Márquez
Dpto. de Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla
41012 Sevilla
Correo electrónico: almar@us.es