

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

CINDY LÓPEZ, JAVIER ARANDIA, NÉSTOR APOLINAR, GIOVANNY
CALDERÓN Y PATRICIA VILLEGAS

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2019

En este documento, presentamos la unidad didáctica longitud de la circunferencia, resultado del trabajo del grupo 2 de la séptima cohorte de la maestría en educación de matemática de la universidad de los Andes. Proponemos esta unidad didáctica para estudiantes en edades de 12 a 16 años de grado noveno de la educación básica secundaria para el área de matemáticas. El propósito de esta unidad didáctica es fortalecer los procesos de aprendizaje del tema mediante una secuencia de tareas que contribuya a superar las dificultades asociadas a la longitud de la circunferencia.

La longitud de la circunferencia es un tema que comúnmente los profesores abordan desde la perspectiva de aplicación de la ecuación de su longitud. No obstante, la forma como algunos profesores abordan este tema no siempre permite a los estudiantes reconocer los elementos de la circunferencia y sus relaciones. Lo anterior puede generar dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, especialmente en la resolución de problemas que requieren el cálculo de las longitudes de elementos de la circunferencia o la cantidad de vueltas dadas por un objeto circular. Por tanto, proponemos una unidad didáctica enfocada en el estudio de dichas relaciones y en las situaciones en que se puede aplicar el tema.

El contenido matemático de nuestra unidad didáctica se ajusta con la normatividad curricular colombiana. Tomamos como referentes los estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje. En cuanto a los estándares básicos de competencias, el Ministerio de Educación Nacional¹ (2006), encontramos que, aunque no hay un estándar asociado específicamente a la longitud de la circunferencia, si hay otros relacionados con el “uso de representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y otras disciplinas” (p.86), en el pensamiento espacial y sistemas geométricos. También, encontramos otros estándares relacionados con el pensamiento métrico como “seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiado” (p.87). En los derechos básicos de aprendizaje para grado noveno, en MEN (2015) encontramos el derecho número cinco, relacionado con “utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes” (p.68) y el número nueve “utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas” (p.71). Adicionalmente, fundamentamos el contenido de nuestra unidad didáctica en el marco conceptual de matemáticas de PISA 2012 en relación con las capacidades, los procesos y los contextos.

En cuanto al contexto de aplicación de la unidad didáctica, sugerimos instituciones de cualquier nivel socioeconómico, cuyos planes de estudios se rijan a los documentos curriculares nacionales. Así mismo, consideramos importante que las instituciones cuenten con recursos audiovisuales, necesarios para la implementación de la unidad didáctica.

Con nuestra unidad didáctica, buscamos abordar el uso de la ecuación de la longitud de la circunferencia. De esta forma, buscamos fortalecer el lenguaje algebraico, el despeje de ecuaciones, la representación de formas circulares y otros procedimientos asociados con la longitud de la circunferencia.

Esta unidad didáctica favorece el aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo de tareas que contribuyen al aprendizaje del tema. Estas tareas constituyen una secuencia que permite

¹ En adelante MEN.

la identificación de los elementos de la circunferencia y el establecimiento de relaciones para el uso de la ecuación de la longitud. Además, las tareas de aprendizaje contribuyen al trabajo en equipo, la interacción, el uso de materiales y los contextos.

ARTICULACIÓN DEL CONTENIDO

Para un adecuado desarrollo de la unidad didáctica, consideramos importante presentar algunos aspectos conceptuales relacionados con el tema matemático. Estos aspectos conceptuales nos permiten desarrollar una propuesta coherente en relación con el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación del tema de la longitud de la circunferencia. Esta propuesta permite analizar el contenido del tema matemático con base en el referente didáctico propuesto por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018). La propuesta contiene los siguientes conceptos pedagógicos: estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico. A continuación, presentamos las generalidades de cada uno de estos conceptos en relación con el tema de la unidad didáctica.

Estructura conceptual

La estructura conceptual es un concepto pedagógico que, según Cañadas et al. (2018), permite al profesor identificar los conceptos, los procedimientos de un contenido matemático, así como las relaciones entre ellos. Este concepto pedagógico implica, en primer lugar, la identificación de elementos del campo conceptual del tema matemático y, en segundo lugar, el reconocimiento de los procedimientos ejecutados sobre esos elementos.

De acuerdo con lo anterior, empezamos por identificar diferentes conceptos relacionados con el tema de la unidad didáctica. Estos conceptos los concretamos en el mapa conceptual que presentamos en la figura 1.

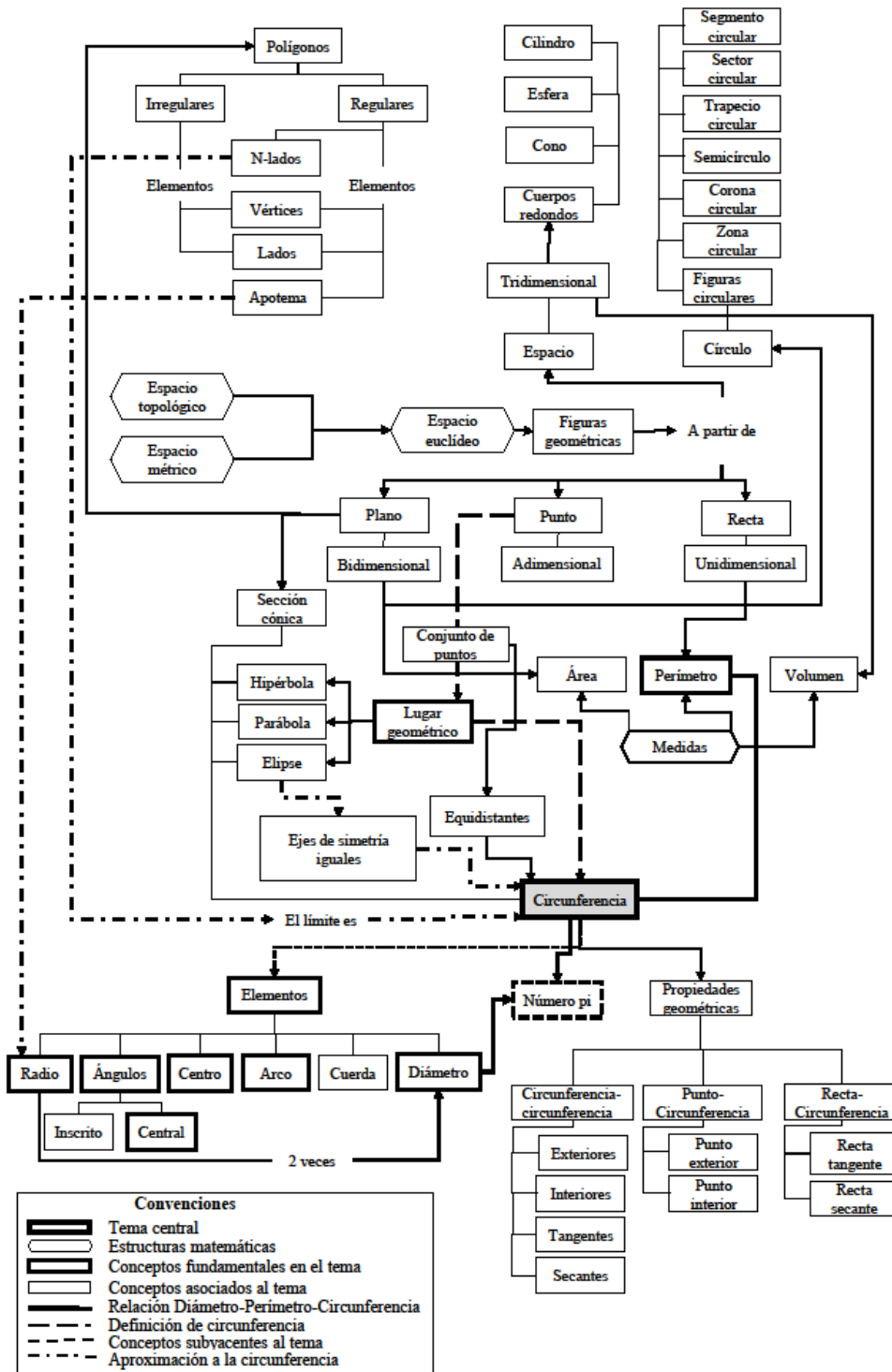


Figura 1. Mapa de la estructura matemática de la longitud de circunferencia

En el mapa conceptual de la figura 1, presentamos como estructura general al espacio euclídeo como un caso particular de los espacios métricos y espacios topológicos. Del espacio euclídeo derivan las figuras geométricas, que a su vez contienen algunas nociones básicas como el punto y otros elementos de la geometría. De estos elementos y relaciones surgen conceptos como lugar geométrico, mientras que de la estructura de medidas surgen otros conceptos fundamentales para el desarrollo de la unidad didáctica tales como el perímetro. El mapa también contiene una aproximación a la circunferencia por medio de polígonos regulares inscritos, así como las relaciones entre otros conceptos como cuerpos redondos y figuras circulares. Adicionalmente, en el mapa resaltamos conceptos como perímetro, número pi y los elementos de la circunferencia, pues consideramos que estos pueden caracterizar mejor el tema de la unidad didáctica.

Después de determinar la estructura conceptual, proponemos un mapa conceptual para la identificación de los procedimientos relacionados con la longitud de la circunferencia. Presentamos estos procedimientos en la figura 2. En este mapa identificamos principalmente cuatro procedimientos asociados a los elementos de la circunferencia. Estos procedimientos son: la aproximación a la circunferencia, la posición de un punto en la circunferencia, el cálculo de longitudes y el movimiento circular uniforme. La aproximación a la circunferencia se presenta mediante los polígonos regulares inscritos. La posición de un punto en la circunferencia incluye el procedimiento de proporcionalidad directa y requiere de un sistema de referencia lineal sobre la circunferencia. El cálculo de longitudes incluye principalmente las ecuaciones lineales de longitud de circunferencia y longitud de arco. El movimiento circular uniforme también incluye el uso de la ecuación lineal para el cálculo de cantidad de vueltas y la velocidad. En el mapa, también podemos ver otros procedimientos como la ecuación lineal, relacionada directamente con la longitud de la circunferencia y la longitud de arco, de modo que permite evidenciar la relación entre algunos de los procedimientos con los elementos de la circunferencia.

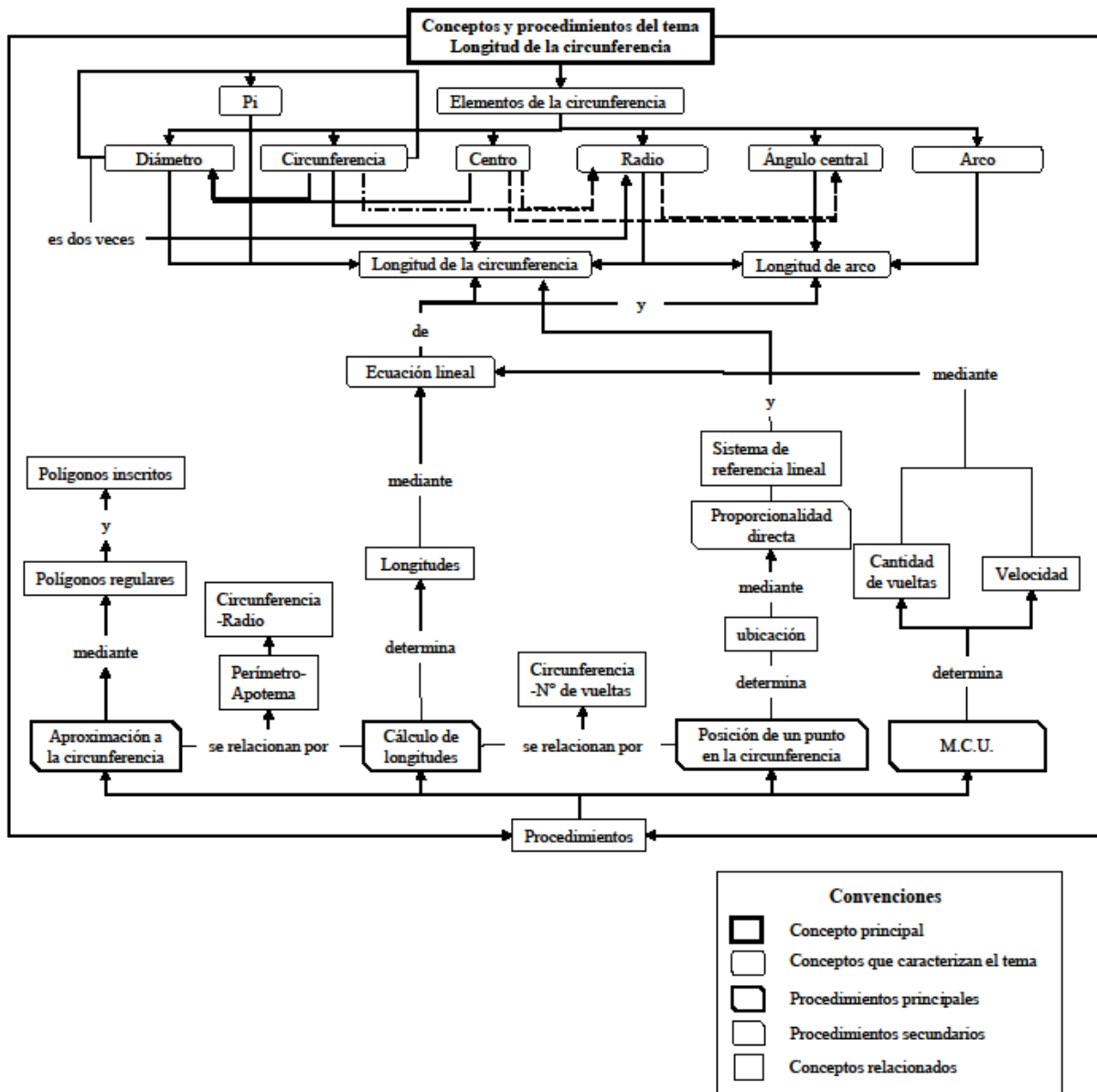


Figura 2. Mapa de los conceptos y procedimientos de la longitud de la circunferencia

En la figura 2, presentamos algunas de las relaciones más importantes de los elementos de la circunferencia, estas aparecen señaladas mediante líneas punteadas. Por ejemplo, las líneas que salen del elemento centro y de la circunferencia hacia el elemento radio indican que a partir de estos dos primeros elementos se define el tercero. De igual manera, podemos establecer unas relaciones análogas entre centro-radio-ángulo y centro-circunferencia-diámetro. Adicionalmente, en el mapa presentamos relaciones fundamentales como el número pi, la relación radio-diámetro y la relación radio-diámetro-circunferencia.

Sistema de representación

Un sistema de representación permite representar un concepto mediante signos. Estos constituyen un sistema de reglas y procedimientos que permiten establecer relaciones entre éstos, de acuerdo con Cañadas et al. (2018). Para el caso del tema de la longitud de la circunferencia, identificamos seis sistemas de representación: sistema de representación simbólico – algebraico, sistema de representación numérico, sistema de representación geométrico, sistema de representación ejecutable, sistema de representación gráfico y sistema de representación manipulativo.

Sistema de representación simbólico-algebraico

El sistema de representación simbólico-algebraico permite el cálculo de la longitud de la circunferencia o de sus elementos, radio o diámetro. Este cálculo es posible mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones con una incógnita. En este sentido, podemos obtener las diferentes ecuaciones que nos permiten el cálculo de estos elementos: la ecuación $C = 2\pi r$ para el cálculo de la longitud de la circunferencia; la ecuación $r = \frac{C}{2\pi}$ para el cálculo del radio; y la ecuación $2r = \frac{C}{\pi}$ equivalente a $d = \frac{C}{\pi}$, para el cálculo del diámetro. Adicionalmente, este sistema de representación permite el cálculo de fracciones de la circunferencia. Por ejemplo, una ecuación para el cálculo de una semicircunferencia sería $\frac{C}{2} = \pi r$, en donde $\frac{C}{2}$ representaría la semicircunferencia.

Sistema de representación numérico

Para el caso de la longitud de la circunferencia, el sistema de representación numérico incluye el uso de signos como el número pi (π) y el uso de operaciones como la multiplicación. Este sistema permite identificar elementos de la circunferencia mediante la descomposición en factores y su relación con la ecuación de la longitud. Por ejemplo, si la longitud de una circunferencia es igual a $6 \cdot \pi$ entonces, podemos concluir que el diámetro de esta circunferencia es 6. De manera similar, al descomponer $6 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot 3$, podemos concluir que el radio de la circunferencia es igual a 3, en concordancia con la ecuación de la longitud $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Sistema de representación geométrico

El sistema de representación geométrico permite el reconocimiento de figuras circulares o semicirculares en figuras compuestas. En este sentido, favorece el reconocimiento del contorno y su descomposición en líneas rectas y curvas. Además, este sistema de representación permite el reconocimiento de elementos como el centro, el radio y el diámetro en figuras compuestas por formas circulares.

Sistema de representación ejecutable

El sistema de representación ejecutable incluye los aplicativos Cabri Geometre y Geogebra para identificar los elementos de la circunferencia y poder aplicar cálculos para determinar su longitud. Este sistema también permite reconocer las relaciones entre las longitudes de los elementos de la circunferencia mediante las opciones del aplicativo.

Sistema de representación gráfico

En el sistema de representación gráfico está incluido el sistema de coordenadas cartesianas. Esta representación se puede obtener a partir de la representación tabular y de la representación simbólico-algebraica. Este sistema de representación también incluye sistemas de referencia lineal que se superponen a la circunferencia.

Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación manipulativo incluye la representación de la circunferencia y sus elementos por medio de alambres u objetos que puedan representar longitudes. Con base en esta representación, podemos comparar las longitudes de los elementos de la circunferencia y establecer relaciones numéricas entre sus medidas.

Fenomenología

El tercer concepto pedagógico que abordamos es la fenomenología. Esta hace referencia a los fenómenos que dan sentido al tema. También, permite organizar los fenómenos con base en tres criterios. El primero, los contextos fenomenológicos relacionados con la importancia del uso del tema y los problemas que resuelve. El segundo, las subestructuras matemáticas que derivan de fenómenos asociados con el tema. El tercero, los contextos PISA 2012 relacionados con los ámbitos en los que se usa el tema.

Agrupamos los fenómenos relacionados con la longitud de la circunferencia en cuatro grupos, cada uno asociado con la pregunta problema que puede resolver. El primer grupo responde a la pregunta, ¿cuánto mide?, relacionamos fenómenos como el número de vueltas de un objeto circular y el número de aros construidos con un material. El segundo grupo responde a ¿qué se mide?, algunos fenómenos asociados son el recorrido de una bicicleta en determinado número de vueltas de sus ruedas y la medida del radio de una llanta desde su circunferencia. El tercer grupo responde a ¿dónde se ubica?, algunos fenómenos están asociados con ubicar un punto en la circunferencia después de un recorrido sobre ésta y el movimiento de un satélite sobre su eje. El último grupo responde a ¿cómo se mueve?, donde asociamos los fenómenos de movimientos de poleas, ruedas y objetos circulares.

Para el tema de longitud de circunferencia, identificamos cuatro contextos fenomenológicos: (a) cardinal, relaciona dos magnitudes diferentes y determina una relación de proporcionalidad directa; (b) medida, el perímetro de una figura geométrica corresponde a la medida del contorno de la misma, en este caso, perímetro de circunferencia; (c) ubicación, la posición de la circunferencia se puede analizar desde su ecuación general como sección cónica y (d) movimiento circular uniforme, relacionado con problemas de mecanismos de transmisión o al movimiento de un objeto circular.

En la figura 3, presentamos el esquema donde relacionamos los fenómenos, su contexto fenomenológico asociado y la subestructura matemática que se genera, así como la relación con los contextos de PISA 2012.

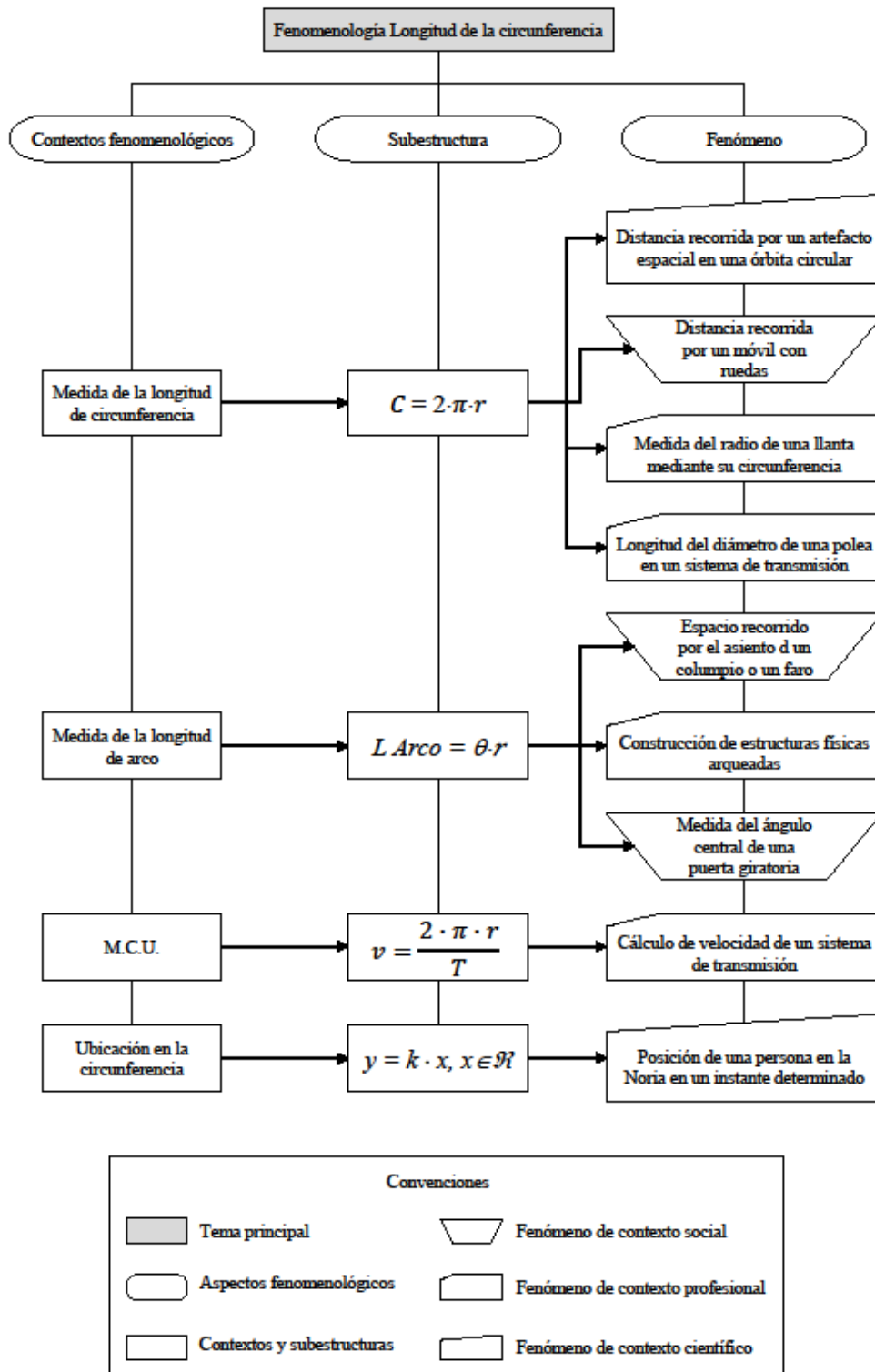


Figura 3. Mapa conceptual fenomenología

En el mapa conceptual de la figura 3, presentamos en un primer nivel vertical, cuatro contextos fenomenológicos que surgen de la organización de algunos fenómenos según sus características estructurales. En un segundo nivel vertical, observamos la relación uno a uno de cada contexto fenomenológico con la subestructura matemática correspondiente. Y en un tercer nivel, diferenciamos algunos fenómenos agrupados en cada contexto fenomenológico y que, de acuerdo con la forma de su recuadro, es posible agruparlos dentro de tres de los cuatro contextos PISA (a) personal, (b) social y (c) cultural.

Con base en el análisis anterior, decidimos centrar el contenido de la unidad didáctica en las relaciones entre circunferencia, radio y diámetro. Tratamos estas relaciones mediante el procedimiento específico del cálculo de longitudes de elementos de la circunferencia. Además, tendremos como referentes los siguientes sistemas de representación: geométrico, simbólico-numérico y simbólico-algebraico. Por último, tomaremos como referente los fenómenos de tipo social y profesional que nos permitan presentar el tema mediante situaciones en contexto.

ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos asociados al tema de longitud de la circunferencia. Estos aspectos están asociados con las expectativas del profesor. Agrupamos estas expectativas en tres tipos, las de nivel superior, medio e inferior. Las primeras están asociadas con los procesos y capacidades matemáticas fundamentales propuestas en PISA 2012. Las segundas están relacionadas con los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Las últimas están asociadas con los criterios de logro que permiten la consecución de los objetivos. Además, relacionamos otro tipo de expectativas que corresponden a los aspectos afectivos.

Expectativas de aprendizaje y expectativas afectivas

Para nuestra unidad didáctica, tomamos como referencia el modelo que asume el marco teórico de PISA (2012) para resolver problemas. Este marco consta de procesos y capacidades matemáticas fundamentales, denominadas expectativas de nivel superior. Los procesos matemáticos hacen referencia a las acciones que ejecutan los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y así llegar a su solución. Las capacidades matemáticas fundamentales complementan el papel de los concomitamientos específicos de contenido matemático en el aprendizaje PISA (2012). Con el desarrollo de la unidad didáctica, esperamos contribuir a los tres procesos propuestos: formular, emplear e interpretar. También, esperamos contribuir a seis de las capacidades matemáticas fundamentales: utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; matematización; razonamiento y argumentación; comunicación; representación; y utilización de herramientas matemáticas.

Para los objetivos de la unidad didáctica, delimitamos el tema de la longitud de la circunferencia en cuatro aspectos. Primero, restringimos los procedimientos al cálculo de longitudes. Segundo, damos prioridad a la ecuación de la longitud de la circunferencia. Tercero, enfocamos los contextos a fenómenos de medición. Y cuarto, nos centramos en los sistemas de representación geométrico, algebraico y numérico. Esta limitación se debe a que queremos dar prioridad a procesos matemáticos específicos relacionados con las capacidades matemáticas fundamentales, que

lleven a los estudiantes a tratar problemas de longitud de circunferencia y encontrar estrategias para su solución. Los objetivos propuestos son los siguientes.

Objetivo 1. Reconocer los elementos y relaciones necesarias para hallar longitudes de la circunferencia mediante el uso de ecuaciones asociadas a su longitud.

Objetivo 2. Representar y resolver situaciones que requieran el cálculo de longitudes asociadas a la circunferencia o a distancias recorridas por un objeto circular que requieran la explicación de su solución.

Finalmente, consideramos que en el proceso de enseñanza es necesaria la motivación, el valorar los aciertos y errores que pueda presentar un estudiante, el poder fomentar el interés por aprender y la curiosidad por buscar aplicaciones en la vida diaria de lo que se aprende en clase de matemáticas. Por lo anterior, proponemos unas expectativas de tipo afectivo, que presentamos en la tabla 1.

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas del tema longitud de circunferencia

EA	Descripción
1	Tener una disposición favorable para interpretar, desarrollar y dar respuesta a diferentes situaciones en las que se utilice la ecuación de la longitud de la circunferencia
2	Desarrollar curiosidad por el uso de herramientas matemáticas para interpretar situaciones de circunferencia
3	Fomentar el interés por la solución de problemas que involucren la longitud de circunferencia
4	Valorar asertivamente la modelación y la representación de situaciones relacionadas con la longitud de circunferencia
5	Generar confianza para explicar procesos matemáticos que surgen al resolver problemas de la longitud de la circunferencia

Nota. EA: expectativa afectiva.

En la tabla 1, diseñamos cinco expectativas de tipo afectivo que propenden aspectos positivos para el aprendizaje del tema, tales como la disposición favorable, la curiosidad o el interés por la solución de problemas. A continuación, mostramos la contribución de las capacidades matemáticas fundamentales, los procesos matemáticos y las expectativas afectivas al alcance de cada uno de los objetivos. En la tabla 2, evidenciamos la coherencia y la pertinencia de los objetivos de la unidad didáctica.

Tabla 2
Contribución de las expectativas de aprendizaje

Objetivo	Capacidad matemática fundamental	Proceso matemático	Expectativa afectiva	Contribución al objetivo
Objetivo 1	Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Formular	EA1 EA4	Utilizar variables, símbolos, y modelos estándar que permitan representar los elementos de la circunferencia en una situación en contexto
	Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Emplear	EA1	Comprender y utilizar la ecuación de la circunferencia con base en la relación de sus elementos
	Matematización	Formular	EA2 EA4	Identificar los elementos de la circunferencia y formular supuestos que le permitan encontrar datos desconocidos
	Comunicar	Formular	EA1	Leer, e interpretar enunciados e imágenes para crear un modelo de una situación que involucre relaciones entre los elementos de la longitud de circunferencia
Objetivo 2	Razonamiento y argumentación	Interpretar y evaluar	EA1 EA3 EA5	Elaborar explicaciones y argumentos que proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado de longitud de circunferencia
	Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Formular	EA4	Utilizar lenguaje simbólico apropiado para representar un problema en contexto asociado al cálculo de la longitud de la circunferencia

Utilización de herramientas matemáticas	de	Emplear	EA2	Utilizar adecuadamente distintas herramientas que favorezcan los procedimientos para determinar soluciones matemáticas
Representación		Emplear	EA2 EA3	Interpretar, relacionar y utilizar gráficos y símbolos algebraicos en un problema de longitud de circunferencia

En la tabla 2, mostramos la contribución a los objetivos mediante su relación con las expectativas de nivel superior y las expectativas afectivas. Por ejemplo, para el objetivo 2, observamos que la capacidad matemática fundamental de representación en su proceso de emplear contribuye al alcance del objetivo cuando los estudiantes interpretan, relacionan y utilizan gráficos y símbolos algebraicos en un problema de longitud de la circunferencia. En este sentido, lo anterior contribuye al desarrollo de las expectativas afectivas EA2 y EA3, relacionadas con el uso de herramientas matemáticas y el interés por la resolución de problemas asociados a la longitud de la circunferencia.

Limitaciones del aprendizaje

Para las limitaciones del aprendizaje del tema de longitud de circunferencia, tomamos como referencia un conjunto de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al abordar las tareas de aprendizaje del tema. Estos errores se asocian a procedimientos en la identificación de los elementos de la circunferencia, a la relación con su longitud y a la justificación de los procedimientos desarrollados. En el documento anexo 1 mostramos un listado de 91 errores, que se pueden presentar al desarrollar una tarea del tema. Agrupamos este listado de errores en tres dificultades de acuerdo con las características o la influencia que tienen en el desarrollo de las tareas. La agrupación está determinada así: (a) dificultad para relacionar y diferenciar los elementos de la circunferencia; (b) dificultad para interpretar la expresión algebraica de la longitud de la circunferencia y (c) dificultad para interpretar un problema relacionado con el uso de la longitud de la circunferencia. En la tabla 3, mostramos el listado de dificultades y algunos de los errores más relevantes.

Criterios de logro

Para la solución de las tareas de aprendizaje, los estudiantes plantean una serie de estrategias de solución conformadas por unos procedimientos. Llamaremos a estos procedimientos criterios de logro. Estos surgen de las capacidades de los estudiantes que referenciamos anteriormente como expectativas de aprendizaje de nivel inferior. Para cada uno de los objetivos, definimos unos criterios de logro distintos, debido a los requerimientos de cada una de las tareas de aprendizaje. En la tabla 3, mostramos los criterios de logro más relevantes para cada uno de los objetivos y en el anexo 2 incluimos el listado completo de los criterios de logro para la unidad didáctica.

Tabla 3
Ejemplos de criterios de logro

CdL	Descripción
Objetivo 1	
CdL1.1	Identifico todos los datos asociados a la tarea
CdL1.4	Decido si debo utilizar expresiones asociadas al radio o al diámetro
CdL1.6	Realizo el cálculo de longitudes de figuras circulares mediante relaciones entre la circunferencia y el radio
CdL1.7	Realizo el cálculo de longitudes de la circunferencia y/o el radio mediante el uso de la ecuación $C=2\pi r$
CdL1.10	Reemplazo los datos que me ofrece la tarea en la ecuación de la longitud de la circunferencia $C=d\pi$ para encontrar la longitud de ésta
CdL1.12	Interpreto los resultados de la tarea a partir de los procesos desarrollados
Objetivo 2	
CdL2.1	Reconozco en cuales situaciones debo usar la longitud de la circunferencia
CdL2.3	Selecciono el uso que se le dará a la ecuación de la longitud de la circunferencia
CdL2.5	Escojo entre usar el radio o el diámetro de una circunferencia para calcular su longitud
CdL2.7	Planteo una ecuación con una incógnita (el radio) y reemplazo los datos en la ecuación de la circunferencia
CdL2.11	Encuentro datos de la tarea y uso relaciones entre estos para encontrar la solución de la tarea
CdL2.13	Identifico el valor del diámetro en la situación
CdL2.15	Uso una aproximación decimal de π en la expresión $C=d\pi$ para obtener la longitud de la circunferencia

Tabla 3
Ejemplos de criterios de logro

CdL	Descripción
CdL2.17	Relaciono la longitud de una circunferencia y el número de vueltas de un objeto circular para hallar su distancia
CdL2.24	Realizo el cálculo del diámetro de figuras circulares mediante las relaciones que se pueden dar con la ecuación de la longitud de la circunferencia
CdL2.26	Interpreto los resultados de la tarea a partir de los procesos desarrollados

Los criterios de logro relacionados en la tabla 3 corresponden a acciones que ejecutan los estudiantes para desarrollar las tareas de aprendizaje de cada objetivo. Para el caso del objetivo uno, proponemos doce criterios, mientras que para el objetivo dos proponemos veintiséis. A continuación, presentamos la tabla 4 con las dificultades y errores relacionados con el aprendizaje de la longitud de la circunferencia.

Tabla 4
Dificultades y errores

Dificultad	Error
Relacionar y diferenciar los elementos de la circunferencia	E1 Usar el radio en lugar del diámetro
	E31 Asociar los datos a elementos de la circunferencia o usar procedimientos sin tener en cuenta las definiciones y características de estos elementos
	E83 Establecer diferentes relaciones entre elementos de la circunferencia e información de la tarea y no determinar las relaciones adecuadas para la solución de la tarea
Interpretar de la expresión algebraica de la longitud de la circunferencia	E13 Duplicar el valor del diámetro en vez de reducirlo a la mitad para calcular el radio
	E78 Omite el número de vueltas que recorre el objeto circular al tratar de encontrar la distancia recorrida por el mismo
	E91 Usar el punto de mil en lugar de la coma decimal, para hacer referencia a cantidades decimales

Tabla 4
Dificultades y errores

Dificultad		Error
Interpretar un problema relacionado con el uso de la longitud de la circunferencia	E56	Usar una operación distinta a la división o resta para hallar el perímetro de la circunferencia con base en la distancia recorrida y un determinado número de vueltas
	E81	Extraer de un problema sólo los datos numéricos sin prestar atención a la información relacionada con conceptos o procedimientos
	E90	Realizar procedimientos de aproximación de elementos de longitudes de la circunferencia sin utilizar modelos o expresiones matemáticas que los fundamenten

La tabla 4 está organizada en tres columnas. En la primera enunciamos las tres dificultades mencionadas anteriormente. En la segunda mostramos la nomenclatura del error. En la tercera presentamos la descripción correspondiente a cada error.

Grafos de criterios de logro

Los grafos de criterios de logro representan el conjunto de estrategias que puede utilizar un estudiante para desarrollar una tarea de aprendizaje. Para cada uno de los objetivos de la unidad didáctica, presentamos un grafo de criterios de logro. En ellos, observamos ramificaciones que corresponden a estrategias distintas que conllevan a la solución de la tarea. Estas estrategias surgen del análisis y solución de las tareas de aprendizaje del tema de longitud de la circunferencia. En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo uno.

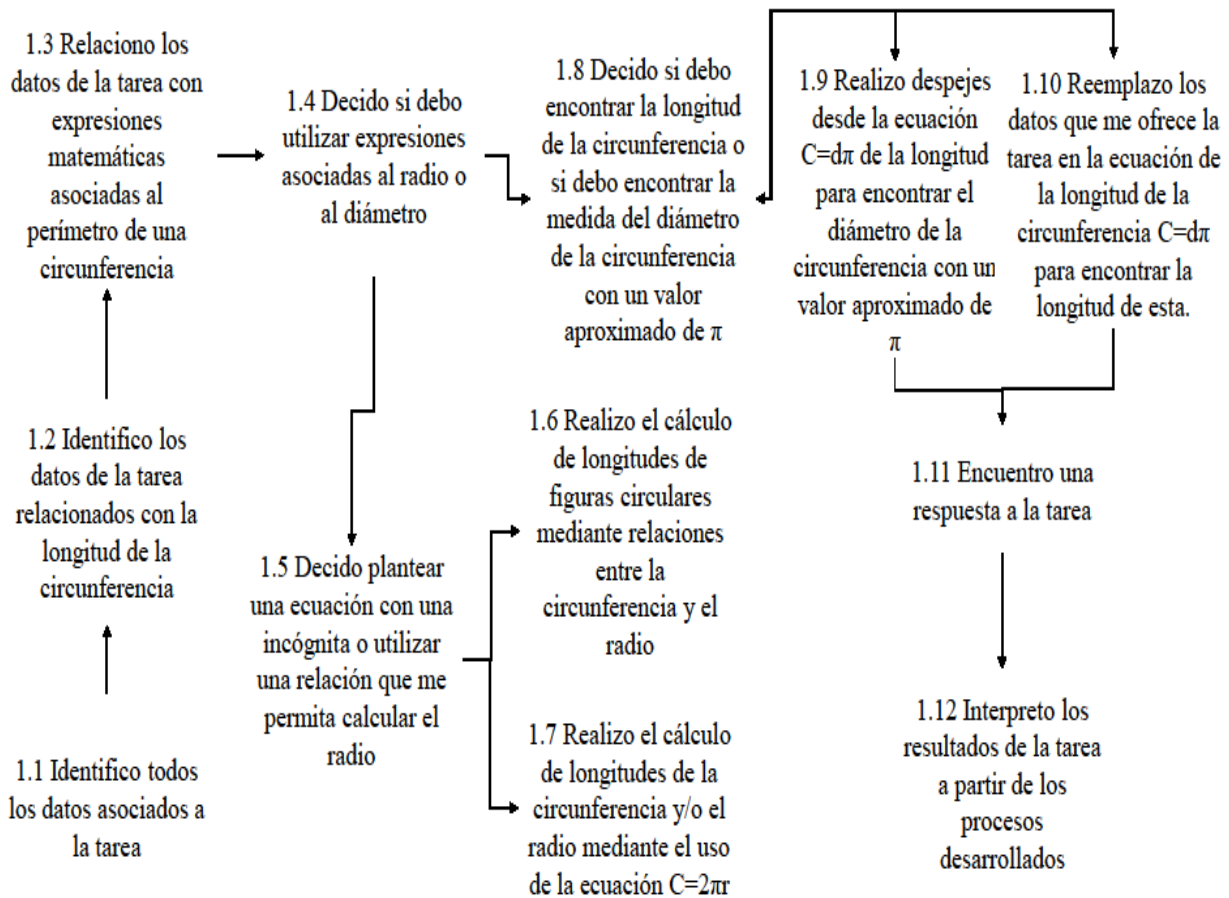


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

El grafo de la figura 4 contiene las acciones que toman los estudiantes al leer la situación, luego deciden si trabajan con el radio o el diámetro, razón por la que se generan dos ramificaciones. Luego, en cualquiera de las dos ramificaciones, los estudiantes determinan si hallan la longitud de la circunferencia o si encuentran la relación de uno de los elementos de la circunferencia. Por último, encuentran una respuesta a la tarea y la argumentan asociándola con el contexto.

En la figura 5, mostramos el grafo de criterios de logro para el segundo objetivo de aprendizaje. Tuvimos en cuenta cuatro posibles procedimientos por los que los estudiantes pueden resolver las tareas de este objetivo.

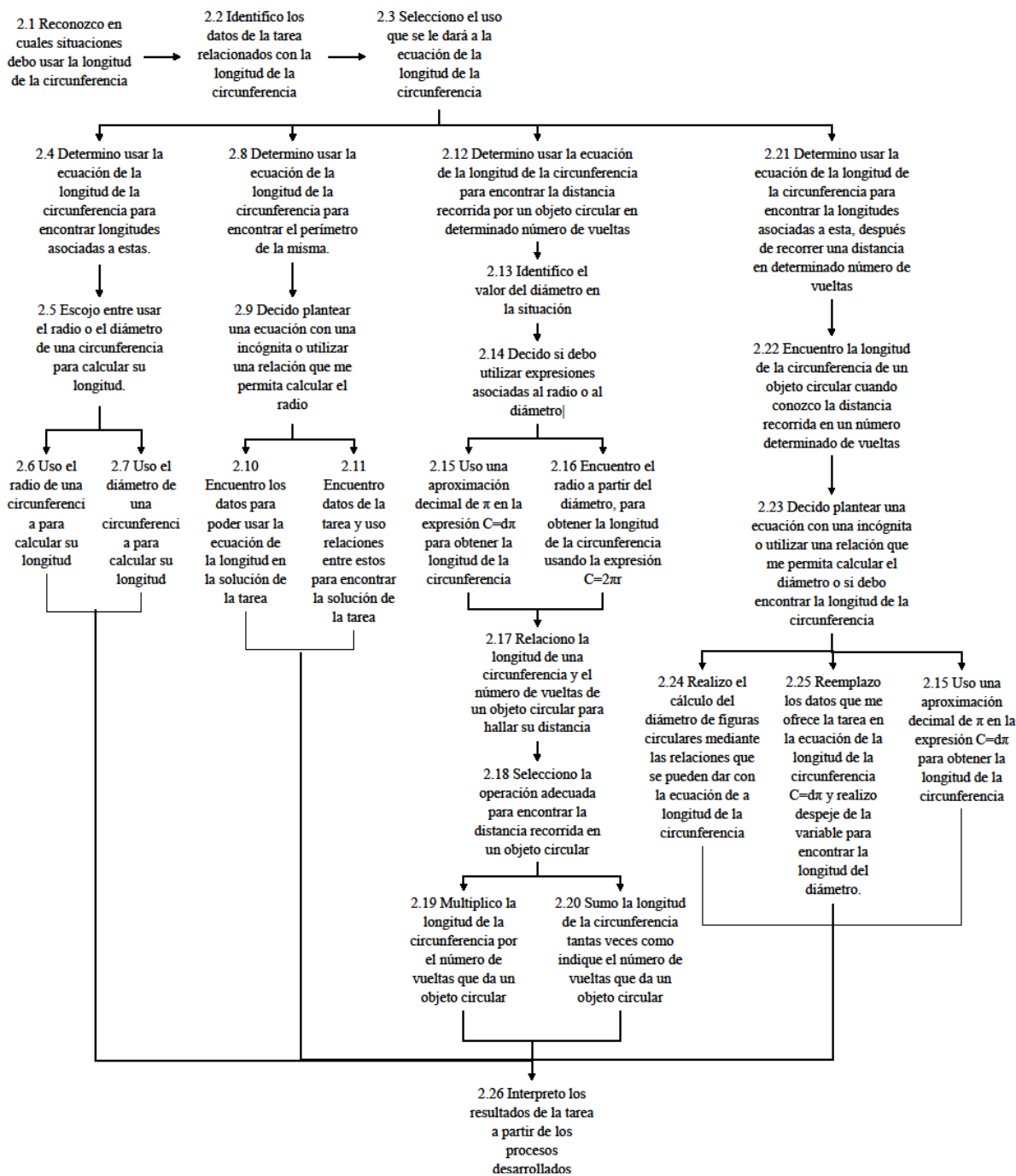


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

El grafo de la figura 5 inicia con los criterios de logro que incluyen procedimientos asociados a identificar los datos en el enunciado de la tarea y su relación con la ecuación de la longitud de la

circunferencia. Después de esto, los estudiantes deciden si usa la ecuación para encontrar longitudes de objetos circulares o para hallar distancias recorridas por objetos circulares. Si los estudiantes deciden que en la tarea deben encontrar medidas de objetos circulares, eligen si la tarea les pide la longitud de la circunferencia o la longitud de alguno de sus elementos. En el caso de que la tarea requiera hallar la distancia recorrida por un objeto circular en determinado número de vueltas, los estudiantes establecen si encuentran la distancia recorrida o alguno de los elementos del objeto circular. En cualquiera de los casos, los procedimientos que se incluyen van desde el cálculo de la ecuación de la longitud de la circunferencia, el cálculo de alguno de sus elementos (diámetro o radio), el uso de la ecuación para hacer despejes o el uso de relaciones entre los elementos de la circunferencia. Finalmente, al encontrar la respuesta numérica, los estudiantes relacionan la respuesta numérica con datos adicionales en la tarea y explican los procedimientos y soluciones.

ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Presentamos el esquema general de la unidad didáctica para desarrollar en nueve sesiones. En la tabla 5, presentamos estas sesiones de manera detallada. La unidad didáctica inicia con una tarea diagnóstica que ayuda a determinar si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos necesarios para la aplicación efectiva de la unidad didáctica. Adicionalmente, proponemos una sesión para fortalecer o reforzar aquellos conocimientos previos en los que se evidencia dificultad. Proponemos cinco tareas de aprendizaje que permiten al estudiante alcanzar los objetivos. Cada una de las tareas tiene un esquema estructurado y cuenta con una serie de requerimientos. Incluimos el examen final, con el que esperamos evaluar los avances de los estudiantes en cuanto al aspecto cognitivo. Finalmente, proponemos una sesión de cierre para evaluar la efectividad de la unidad didáctica en aspectos cognitivos, afectivos y de motivación.

Tabla 5
Esquema general de la unidad didáctica

Sesión	Tiempo (min)	Actividad
1	55	Aplicación tarea diagnóstica
2	55	Realimentación de la tarea diagnóstica
	15	Introducción y presentación objetivos de la unidad didáctica
	10	Presentación de la tarea
3	5	Organización del grupo en parejas
	45	Implementación tarea 1.1
	25	Puesta en común
	10	Realimentación tarea 1.1
4	5	Presentación de la tarea 1.2

Tabla 5
Esquema general de la unidad didáctica

Sesión	Tiempo (min)	Actividad
	5	Organización del grupo en parejas
	25	Desarrollo de la tarea 1.2
	10	Puesta en común para presentar resultados
	10	Realimentación tarea 1.2
	10	Presentación de la tarea 2.1
	5	Organización del grupo en tríos
5	60	Implementación tarea 2.1
	25	Puesta en común
	10	Realimentación tarea 2.1
	5	Presentación de la tarea 2.2
	5	Lectura de la formulación de la tarea en voz alta y de manera individual
6	10	Presentación del video
	25	Implementación tarea 2.2
	10	Realimentación tarea 2.2
	5	Presentación de la tarea 2.3
	20	Implementación tarea 2.3 en forma individual
7	5	Organización en grupos de acuerdo con sus soluciones
	15	Puesta en común
	10	Realimentación tarea 2.3
8	55	Examen
9	30	Realimentación del examen
	25	Sesión final

Las tareas de aprendizaje se detallan en el anexo 3 y las tareas de evaluación (prueba diagnóstica y examen final) en el documento anexo 4. Cada de una de las sesiones de las tareas de aprendizaje, en su mayoría, cuenta con una presentación de la tarea, en la que el profesor hace algunas aclaraciones respecto al contexto. Con la implementación, nos referimos al desarrollo de las tareas por los estudiantes; en esta parte el profesor hace acompañamiento permanente y usa las ayudas que

requiera, éstas se encuentran en el anexo 3. El agrupamiento se refiere a la forma de organización de los estudiantes para desarrollar las tareas. Finalmente, en la realimentación de cada tarea, esperamos que el docente se enfoque en los errores con más recurrencia en la aplicación de las tareas y que refuerce el uso de la ecuación de la circunferencia y las relaciones entre sus elementos.

TAREAS DE APRENDIZAJE Y DE EVALUACIÓN

En este apartado, presentamos las tareas de aprendizaje y de evaluación de nuestra unidad didáctica para el tema longitud de la circunferencia. Con el término tareas de aprendizaje, nos referimos a las actividades que solucionan los estudiantes con el fin de adquirir los conocimientos y desarrollar habilidades que les permitan el alcance de los objetivos. Para nuestra unidad didáctica, presentamos cinco tareas de aprendizaje. Las dos primeras correspondientes al objetivo 1 y las tres restantes al objetivo 2. Además, presentamos las tareas de evaluación que permiten medir el alcance de los objetivos en el caso del examen final y los conocimientos previos en el caso de la tarea diagnóstica.

Tarea diagnóstica

La tarea diagnóstica es una tarea de evaluación que permite medir cuáles conocimientos tienen los estudiantes antes de abordar la unidad didáctica. Para la implementación de la unidad didáctica, consideramos que los estudiantes deben contar con una serie de conocimientos necesarios para el desarrollo efectivo de las tareas de aprendizaje. Algunos de los conocimientos previos que identificamos están relacionados con aspectos numéricos, otros con aspectos geométricos y otros con aspectos algebraicos. En la tabla 6, presentamos el listado completo de conocimientos previos.

Tabla 6

Listado de conocimientos previos del tema longitud de circunferencia

CP	Descripción
1	Identificar la forma geométrica de circunferencia
2	Conocer el concepto de longitud y/o perímetro
3	Identificar la estructura de una ecuación
4	Identificar las fórmulas que permiten encontrar el perímetro de algunas figuras geométricas
5	Desarrollar procesos algebraicos para el despeje de variables en una ecuación
6	Efectuar adiciones entre números reales
7	Efectuar sustracciones entre números reales
8	Efectuar multiplicaciones entre números reales
9	Efectuar divisiones entre números reales
10	Conocer la relación entre círculo y circunferencia

- 11 Reconocer los números irracionales
- 12 Identificar el número π entre los números irracionales
- 13 Aproximar números decimales infinitos a determinadas cifras decimales
- 14 Reconocer el orden entre números decimales
- 15 Identificar figuras circulares
- 16 Identificar el radio y diámetro en una figura circular

Nota. CP: conocimientos previos.

Los conocimientos previos que se relacionan en la tabla 6 están organizados de acuerdo con aspectos como el despeje de ecuaciones lineales con una incógnita, el reconocimiento de figuras geométricas y formas circulares y el manejo de operaciones con números reales. De acuerdo con estos conocimientos previos, diseñamos la tarea diagnóstica para medir el nivel de apropiación de estos conocimientos. Esta tarea diagnóstica contiene 6 actividades cada una con varios literales o numerales. A continuación, presentamos la tarea diagnóstica.

Tarea diagnóstica

1. Responde cada una de las preguntas

- a. Un domador de caballos permanece siempre en el mismo punto mientras sostiene una cuerda atada a su caballo a cierta distancia. Describe la forma geométrica que hace el caballo mientras gira a su alrededor.
- b. Observa las formas geométricas de la figura A

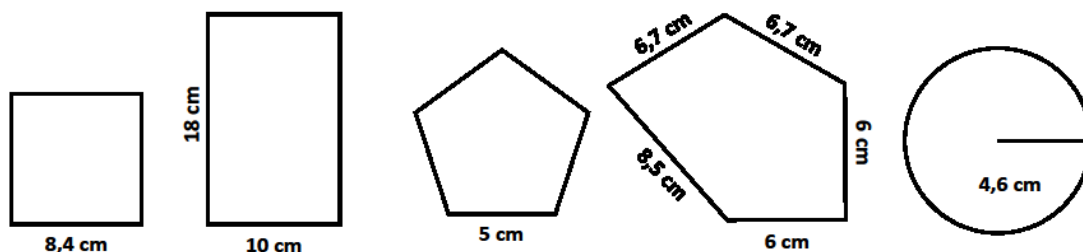


Figura A. Perímetro de figuras geométricas

- Resalta con un color el perímetro de cada una de las figuras
- Encuentra la medida del perímetro de cada una de las figuras
- ¿Qué fórmula usarías para hallar el perímetro en cada figura?
- ¿Qué procedimiento usaste para calcular el perímetro de cada una de las figuras?
- ¿Las fórmulas determinadas para encontrar el perímetro de las anteriores preguntas te permite encontrar el perímetro de una figura circular? Justifica tu respuesta

- c. En la figura B, indica en los espacios en blanco cuál es el círculo y cuál es la circunferencia. Luego traza un radio en color azul y un diámetro en color rojo.

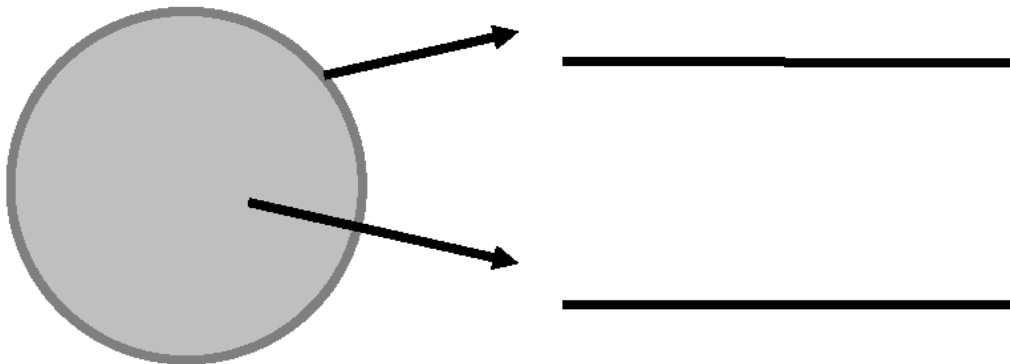


Figura B. Relación círculo circunferencia

2. En matemáticas es muy nombrado y reconocido el número π (pi), llamado así por ser la dieciseisava letra del alfabeto griego y tener una representación numérica de 3,141592...

a. Según la forma y características del número pi, ¿a qué conjunto numérico pertenece y por qué?

b. Aproxima a las centésimas los siguientes números decimales:

- 3,1416
- 1,26357
- 81,389
- 0,3892

c. Ordena de forma ascendente los siguientes números decimales:

- 8,01
- 32,48
- 0,9734
- 1,59864

3. Soluciona cada uno de los siguientes literales:

a. Resuelve las siguientes operaciones:

- $54,05 - 29,2 =$
- $2,546 + 3,45 =$
- $24 - 12,674 =$

b. Si sabemos que: $3 \div 1,5 = 2$ y también sabemos que $6 \div 1,5 = 4$, entonces en la ecuación $\blacksquare \div 1,5 = 16$, el número que hace que la ecuación sea correcta es _____. ¿Qué relación observas en las tres ecuaciones?

c. ¿Cuál es la aproximación a tres cifras decimales de la suma de $3\pi + 5$?

d. Completa:

- La mitad de 3,5 es _____
- El doble de 3,14 es _____

4. Resuelve las siguientes preguntas asociadas a las ecuaciones:

a. Escribe en forma de ecuación

- Si a un número se le suma su triple da 384. ¿Cuál es el número?
- Si al triple de mi edad añado 7 años, tendría 100 años. ¿Qué edad tengo?

b. Encuentra el valor de x en la ecuación $5x - 3 + 8x = 6x - 2$

5. Responde las siguientes preguntas relacionadas con cuerpos redondos

a. Menciona el cuerpo geométrico que se puede construir con las plantillas de la figura C

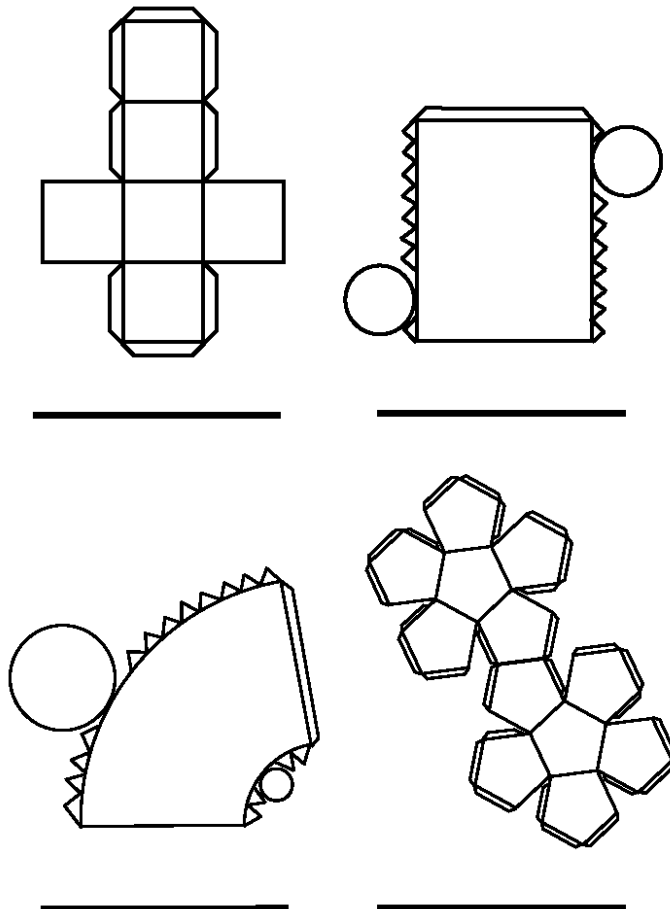


Figura C. Plantillas de sólidos geométricos

- b. Propone el desarrollo plano (plantilla) de la figura D

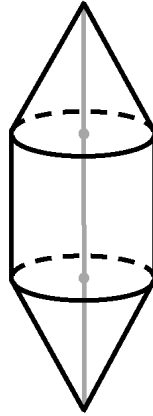


Figura D. Sólido compuesto

6. Realiza las siguientes conversiones

- a. 36.000 km a m
- b. 25.000 cm a m
- c. 450 m a cm

Después de la aplicación de la tarea diagnóstica y sus correspondientes resultados, proponemos que el profesor desarrolle la realimentación. El profesor puede profundizar en aquellos conocimientos en los que considere que los estudiantes presentan mayor dificultad. El profesor también puede analizar las dificultades a partir de la incurrancia en errores de los estudiantes, estos asociados con los conocimientos previos. En la tabla 7, presentamos un ejemplo de dificultad asociada con el reconocimiento de figuras circulares y los errores relacionados con esta dificultad.

Tabla 7

Listado de dificultades y errores asociados con los conocimientos previos

Error	Descripción	Conocimiento previo asociado
D1. Reconocer figuras circulares y sus elementos.		
1	Describe una figura diferente a una circunferencia	15
2	Colorea el interior de la figura y lo asocia con la circunferencia	2
3	Nombra diámetro al radio y/o radio al diámetro	16
4	Traza un segmento exterior y lo relaciona con el diámetro o con el radio	16
5	Traza cuerdas que no pasan por el centro y las relaciona con el diámetro	16
6	Define las figuras circulares como polígonos	1

Cada uno de los errores presentados en la tabla 7 está relacionado con uno de los conocimientos previos presentados en la tabla 6. Además, identificamos tres dificultades adicionales relacionadas con reconocer el contorno de diferentes figuras y asociarlas con el perímetro, operar y relacionar números decimales y plantear y resolver ecuaciones. El listado completo de los errores asociados a los conocimientos previos se encuentra en el anexo 5.

Tarea T1.1 Bases para portalápices

Con esta tarea de aprendizaje, esperamos que los estudiantes puedan resolver situaciones asociadas a la circunferencia mediante el uso de la ecuación de la longitud, la representación de los diferentes elementos de la circunferencia y el establecimiento de relaciones entre estos elementos. La meta de esta tarea de aprendizaje es que los estudiantes asocien y representen elementos de un contexto a los elementos de la circunferencia y reconozcan la relación entre las longitudes del radio y de la circunferencia.

Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren de conocimientos acerca de las figuras circulares, los cuerpos redondos y la construcción de circunferencias mediante el uso del compás. También requieren el conocimiento informal de la representación de longitudes mediante recursos como cables y alambres, con los cuales los estudiantes pueden comparar y establecer relaciones entre las longitudes de los elementos de la circunferencia.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos contribuir al reconocimiento de los elementos de la circunferencia desde una situación en contexto. Además, esperamos contribuir al reconocimiento de la relación entre la longitud del radio y la longitud de la circunferencia.

Formulación

La formulación de la tarea bases para portalápices contiene una situación en contexto e incluye cinco actividades. La actividad 3 está compuesta por cuatro numerales. A continuación, presentamos la formulación de la tarea bases para portalápices.

Una amiga te llama y te pide el favor de ayudarle a elaborar unos portalápices artesanales. Tu amiga te dice que aún no tiene los cilindros para elaborar los portalápices y que debe hacer las bases de éstos de forma que coincidan en tamaño con el borde de la base de los cilindros. Tu amiga no sabe cómo hacer las bases sin tener los cilindros. Ella quiere que le ayudes a construir esas bases de tal forma que estas queden pintadas y con el borde decorado con alambre de colores. La única información precisa que ella te da es que el borde exterior de la base del cilindro mide 16 cm y 6 mm.

Actividad 1. Responde la siguiente pregunta en la hoja: ¿Cómo podrías construir la base para los portalápices con esta información?

Actividad 2. Construye la base de los portalápices en el cartón. Te sugerimos marcar el centro de la base.

Actividad 3. Realiza las siguientes actividades en la hoja

3.1 Compara la longitud de la base que construiste con la longitud requerida.

3.2 Compara la longitud de la base que construiste con la longitud de apertura del compás que usaste para construir la base. ¿Qué resultado encontraste?

3.3 Realiza la división entre la longitud de la base y la longitud de apertura del compás. ¿Qué resultado encontraste?

3.4 ¿Qué resultado obtienes al dividir la longitud de la circunferencia entre el resultado del numeral anterior?

Actividad 4. Dibuja una circunferencia de cualquier tamaño y luego compara su longitud con la longitud de su radio. ¿Podemos encontrar alguna similitud con la actividad 3?

Actividad 5. Escribe un mensaje en el cual le cuentes a tu amiga cómo hiciste para construir la base de los portalápices.

Conceptos y procedimientos

El desarrollo de esta tarea involucra conceptos como el reconocimiento de cuerpos redondos y figuras circulares, elementos de la circunferencia y el perímetro de una figura circular. Esta tarea también involucra el reconocimiento de relaciones entre los elementos de la circunferencia. El procedimiento implicado en esta tarea corresponde al despeje de ecuaciones lineales con una incógnita.

Sistemas de representación

El desarrollo de esta tarea implica el uso de cuatro sistemas de representación. El sistema de representación manipulativo está involucrado con el uso del alambre para medir y establecer relaciones entre longitudes. El sistema de representación geométrico está involucrado en la construcción de la base de los portalápices mediante el compás. El sistema de representación simbólico numérico está presente en la representación de las mediciones de los elementos de la circunferencia. Por último, el sistema de representación simbólico algebraico está involucrado en el uso de una ecuación lineal para determinar el radio de la circunferencia.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea bases para portalápices está enmarcada en el contexto social de acuerdo con el marco conceptual PISA 2012. La tarea está relacionada con la construcción de una base para unos portalápices mediante la longitud de apertura del compás, es decir, la longitud del radio de la base.

Materiales y recursos

Los materiales y recursos requeridos para el desarrollo de la tarea son: hojas blancas, compás, regla, lápiz, cartón con 2 o 3 mm de espesor, tijeras, calculadora y alambre decorativo. Con el compás, los estudiantes construyen una circunferencia de igual longitud a la base requerida. Ellos pueden construir algunas circunferencias sobre las hojas blancas para establecer relaciones de proporcionalidad en relación con la apertura del compás. Posteriormente, los estudiantes comparan las longitudes de las circunferencias mediante el uso del alambre decorativo. Luego, comparan las longitudes de la base y la apertura del compás en cada circunferencia construida mediante el uso de las hojas, el compás, el alambre, el lápiz, la regla y la calculadora.

Agrupamiento e interacciones

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes se organizan inicialmente en parejas, de modo que puedan colaborar con el uso del material y aportar ideas para la solución del problema. Cada estudiante presenta el desarrollo de las actividades en su propia hoja. Al finalizar el producto, los estudiantes comparten con sus demás compañeros los mensajes que escribieron para poder construir la base de los portalápices.

La interacción se presenta en tres momentos. En un primer momento, el desarrollo de la tarea permite una comunicación y negociación constante entre los integrantes de cada pareja de estudiantes. En un segundo momento, el profesor guía el proceso mediante ayudas y preguntas orientadoras que permiten a los estudiantes superar las dificultades y errores que pueden presentarse en cada pareja durante el desarrollo de la tarea. Estas ayudas pueden encontrarse en el anexo 3. Y en un tercer momento, las parejas de estudiantes comunican y debaten las soluciones de la tarea durante la puesta en común.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en cinco partes. En la primera parte, el profesor hace una intervención para mostrar a los estudiantes una forma de construir circunferencias sin compás, para el caso de estudiantes que no cuenten con el material (10 minutos). En la segunda parte, los estudiantes hacen la lectura de la tarea y proceden a la construcción de las circunferencias mediante el uso del compás

o la técnica mostrada por el profesor (5 minutos). En la tercera parte, los estudiantes comparan la longitud de la circunferencia realizada con la longitud de la circunferencia requerida (10 minutos). En la cuarta parte, los estudiantes establecen relaciones entre longitudes de otras circunferencias y realizan conjeturas (20 minutos). Por último, los estudiantes presentan los resultados obtenidos mediante la puesta en común (25 minutos).

Errores

En cuanto al desarrollo de la tarea Bases para portalápices, algunos errores en que pueden incurrir los estudiantes son: asociar los datos a elementos de la circunferencia sin tener en cuenta las definiciones y características de estos elementos; establecer relaciones no equivalentes entre longitudes de la circunferencia; realizar procedimientos de aproximación de elementos de longitudes de la circunferencia sin utilizar modelos o expresiones matemáticas que los fundamenten. En el anexo 1, presentamos el listado de errores que pueden presentarse en el desarrollo de esta tarea.

Grafos de criterios de logro

El grafo de criterios de logro del objetivo 1 nos permite visualizar los posibles procedimientos que puede realizar un estudiante para resolver la tarea Bases para portalápices. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro correspondientes a esta tarea de aprendizaje.

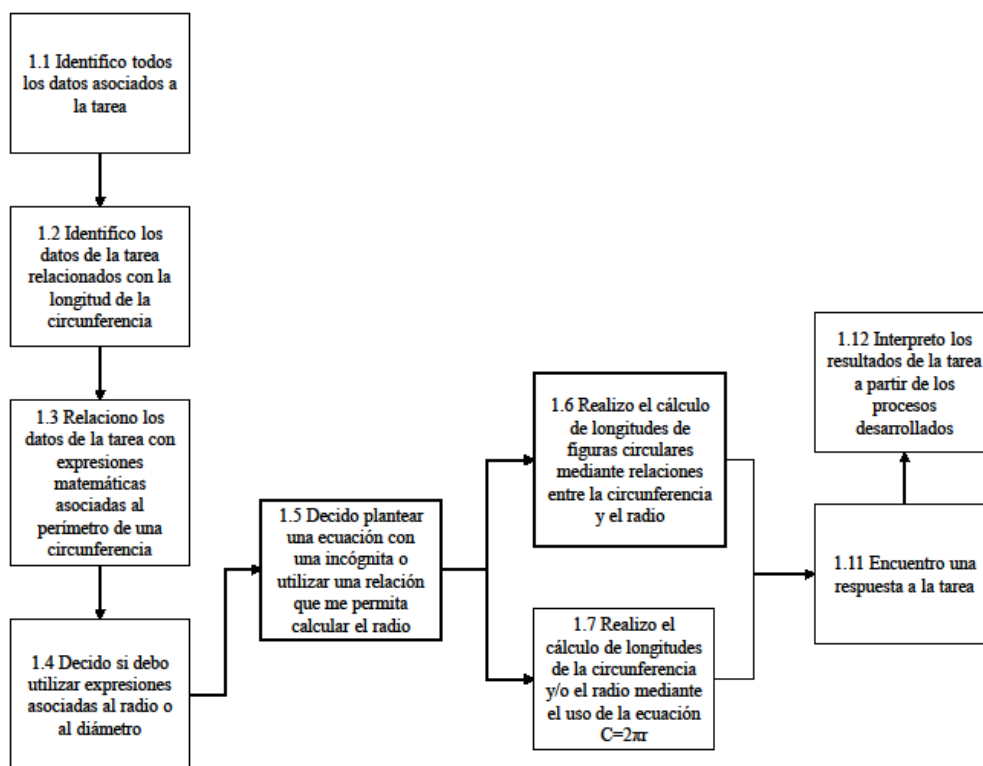


Figura 6. Grafo de criterios de logro de T1.1 Base para portalápices

En la figura 6, observamos que para la tarea Bases para portalápices los estudiantes identifican los datos asociados a la tarea y aquellos datos relacionados con la longitud de una circunferencia. Luego, establecen la relación entre la apertura del compás y la longitud del borde de la base, de modo que usen expresiones matemáticas para expresar esta relación. En este sentido, los estudiantes deciden si usan expresiones asociadas al radio o al diámetro de la circunferencia. Posteriormente, los estudiantes deciden entre usar una ecuación o escribir una relación numérica que les permita calcular el radio de la circunferencia. Luego, realizan los cálculos correspondientes de acuerdo con el tipo de expresión matemática que hayan escogido. Por último, encuentran la respuesta a la tarea y manifiestan su interpretación de los datos de acuerdo con el contexto.

Actuación del profesor

Para favorecer el desarrollo óptimo de esta tarea, proponemos al profesor promover la comparación de las diferentes longitudes de la circunferencia, de modo que los estudiantes establezcan relaciones numéricas y las evidencien en la ecuación de la longitud de la circunferencia. Consideramos que este proceso es importante aún en aquellos estudiantes que muestran buen dominio en el uso de ecuaciones lineales con una incógnita.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

En el desarrollo de esta tarea es posible que los estudiantes usen el alambre decorativo para hacer una aproximación a la circunferencia requerida. En este sentido, el profesor puede proponer a los estudiantes encontrar otras formas diferentes para construir la base de los portalápices. Por ejemplo, el profesor puede proponer a los estudiantes usar las medidas de las longitudes relacionadas con la formulación. Consideramos importante que el profesor promueva el uso del material para la medición y comparación de longitudes. Asimismo, el profesor puede incentivar a los estudiantes a generar sus propias conclusiones y a establecer relaciones entre los elementos de la circunferencia y el contexto.

Evaluación

Para la evaluación de la tarea bases para portalápices, proponemos al profesor la observación de tres aspectos que le permiten hacer una interpretación de las actuaciones de los estudiantes. El primer aspecto está relacionado con la identificación de elementos de la circunferencia en la situación planteada. Con la observación de este aspecto, el profesor puede determinar posibles causas de las dificultades de los estudiantes para establecer relaciones entre los elementos de la circunferencia y el contexto. El segundo aspecto está relacionado con el uso de expresiones matemáticas relacionadas con la longitud de la circunferencia y sus elementos. La observación de este aspecto permite al profesor identificar las concepciones que tienen los estudiantes respecto al manejo de algoritmos y, en general, el uso de expresiones matemáticas. El tercer aspecto está relacionado con la interpretación de las relaciones numéricas entre las longitudes de la circunferencia. La observación de este aspecto permite al profesor determinar posibles causas de las dificultades de los estudiantes para calcular longitudes de la circunferencia mediante el uso de ecuaciones y expresiones matemáticas.

Tarea T1.2 El carrusel

Presentamos la tarea T1.2 que corresponde a la segunda tarea del objetivo 1. Con esta tarea buscamos que los estudiantes identifiquen en un enunciado el diámetro de la circunferencia y lo relacionen con la ecuación de la longitud de la circunferencia. La meta de la tarea es relacionar las longitudes de diferentes figuras circulares respecto a sus elementos o a su longitud. Para el desarrollo de la tarea, el profesor puede motivar a los estudiantes en la búsqueda de estrategias que permitan dar solución a la situación.

A continuación, presentamos los elementos de la tarea de aprendizaje. Estos sirven de guía al profesor para planear su actuación y analizar la de los estudiantes durante la implementación. Sugerimos revisar el anexo 3 para consultar con más detalle todos los elementos asociados con la tarea de aprendizaje.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren de las nociones de reconocimiento de figuras circulares en gráficos. Los estudiantes determinan las longitudes de figuras circulares y semicirculares con ayuda de la ecuación de la longitud de la circunferencia.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con la tarea T1.2, esperamos que los estudiantes identifiquen el diámetro de las formas circulares que se presentan en el plano del carrusel. Con estos, los estudiantes encuentran la relación que existe entre el diámetro y la longitud de la circunferencia. Luego, determinan como usar el diámetro en la ecuación de la longitud de la circunferencia para encontrar la longitud total del carrusel.

Formulación

El profesor hace entrega de una hoja a cada pareja de estudiantes con el planteamiento de la tarea y el plano del carrusel. A continuación, presentamos la formulación de la tarea el carrusel.

El dueño de un parque de diversiones requiere construir un carrusel y contrata a un arquitecto para que diseñe los planos. El arquitecto diseña un plano dividido en cuatro secciones. En la primera sección, aparece el plano global compuesto por dos figuras circulares y una semicircular. En las tres secciones restantes, aparecen las medidas de cada figura. A partir del plano, el dueño del parque desea saber la longitud total del carrusel para realizar el inventario de cuánto material debe utilizar para su construcción. Ayuda al dueño del parque a encontrar la longitud total de las dos formas circulares y la semicircular a partir de las medidas que se presentan en el plano y ten en cuenta que las medidas están dadas en metros.

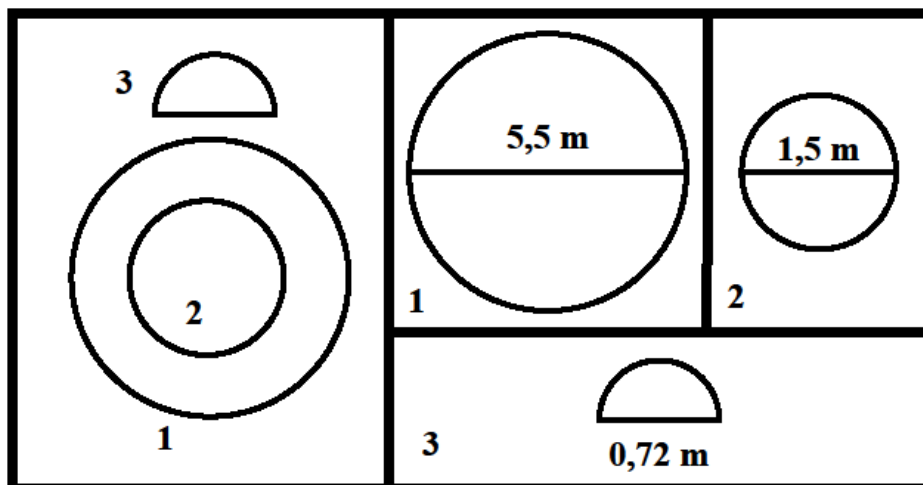


Figura. Plano del carrusel

Conceptos y procedimientos

Los conceptos y procedimientos que promovemos con el desarrollo de esta tarea están asociados con identificar figuras circulares y semicirculares y extraer los valores de los diámetros de cada una de las figuras circulares en el plano del carrusel. También, están relacionados con asociar el diámetro de cada una de las figuras a la ecuación de la longitud de la circunferencia, encontrar las longitudes de cada una y determinar la longitud total del carrusel.

Sistemas de representación

En la tarea de aprendizaje, fortalecemos tres sistemas de representación: el sistema simbólico-algebraico, el sistema numérico y el sistema geométrico. El primero se utiliza en la relación del diámetro con la ecuación de la longitud de la circunferencia. El segundo se usa en las operaciones entre cantidades decimales para encontrar las longitudes. El tercero se aplica en la identificación de las figuras circulares en el plano del carrusel.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea T1.2 está enmarcada en un contexto profesional de acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012. La tarea de aprendizaje está relacionada con el uso de medidas para encontrar la longitud de un carrusel en un parque de diversiones.

Materiales y recursos

Para la elaboración de la tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren de recursos como hojas de papel, lápiz y borrador. El desarrollo de la tarea no requiere del uso de calculadora o de otro tipo de materiales.

Agrupamiento e interacciones

Los estudiantes se ubican por parejas. Luego, discuten entre ellos los procedimientos que deben desarrollar para encontrar la solución. El profesor resuelve las inquietudes que se generen en la

discusión de cada pareja. Finalmente, el profesor dirige un debate de ideas en gran grupo en el que los estudiantes argumentan las estrategias utilizadas para la solución de la tarea.

Temporalidad

Al iniciar la sesión, el profesor hace la presentación de la tarea y la organización de los grupos de trabajo (10 minutos). Después, los estudiantes tienen un tiempo para leer, analizar y solucionar la tarea de aprendizaje y entregarla nuevamente (25 minutos). El profesor desarrolla un debate de ideas sobre el planteamiento general de la tarea (10 minutos). Por último, el profesor hace la realimentación de la tarea (10 minutos).

Errores

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores. Por ejemplo, ellos pueden realizar varios procedimientos con los datos de la tarea sin llegar a una respuesta numérica; usar un punto en vez de la coma decimal; asociar longitudes en un enunciado o en un gráfico únicamente en línea recta. Para estos casos y los que se encuentran en el anexo 1, brindamos una serie de ayudas en el documento anexo 3.

Grafos de criterios de logro

Los criterios de logro de la tarea T1.2 aparecen en el orden en que se desarrollan los procedimientos de la tarea y se muestran en un grafo de criterios de logro. Este grafo permite al profesor analizar la actuación de los estudiantes al momento de abordar la tarea. En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea El carrusel.

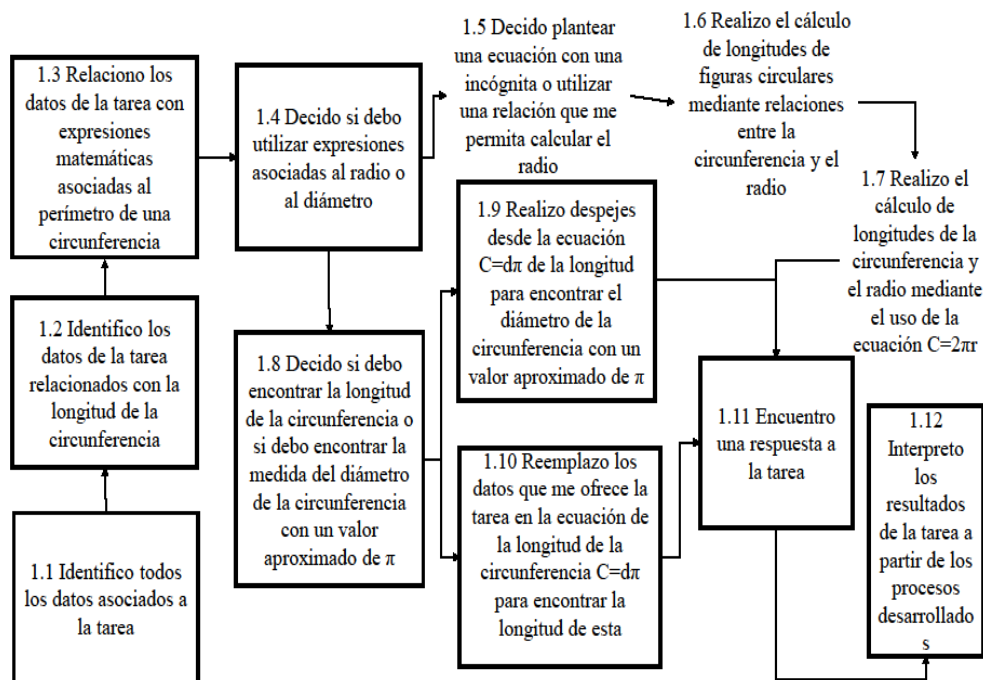


Figura 7. Grafo de criterios de logro de T1.2

En la figura 7, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Los criterios de logro en los recuadros son los procedimientos que consideramos los estudiantes pueden activar en el desarrollo de la tarea. Sin embargo, mostramos todo el grafo debido a que algunos estudiantes pueden relacionar el diámetro con el radio y utilizar los procedimientos asociados con el radio. Los primeros criterios de logro están asociados con la extracción de datos en la situación. En el criterio 1.4, los estudiantes deciden si trabajan con el diámetro o el radio de las figuras circulares. En el criterio 1.8, los estudiantes determinan si deben encontrar la longitud o hallar el diámetro con ayuda de la longitud de las figuras circulares. En los últimos criterios, los estudiantes encuentran una solución a la tarea y la relacionan con su contexto.

Actuación del profesor

En una primera etapa, el profesor presenta la tarea y contextualiza a los estudiantes con el plano del carrusel y la relación de este con la circunferencia y sus elementos. Antes de iniciar con el desarrollo de la tarea, el profesor aclara las inquietudes que se presenten respecto al contexto de la tarea y procede a organizar las parejas. Durante la implementación de la tarea, el profesor propone ayudas como medio de solución a las inquietudes de los estudiantes. Es conveniente que el profesor haga un acompañamiento permanente a cada uno de los grupos de trabajo. Al finalizar el tiempo de desarrollo de la tarea, cada grupo expone sus resultados y las dificultades que se presentaron en el desarrollo. En esta etapa, el profesor es moderador. Finalmente, el profesor realimenta la tarea y hace énfasis en las relaciones entre los elementos de la circunferencia y la ecuación de la longitud.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Es importante que el profesor contextualice la tarea. Para esto, el profesor presenta un carrusel para que los estudiantes logren diferenciar los elementos de la circunferencia y materializar mentalmente la estructura del carrusel que se les proporciona. Adicionalmente, en la tarea El carrusel es posible que aún no exista claridad en el uso de la ecuación de la circunferencia, por lo que es importante que el profesor enfatice en la realización correcta de los procedimientos. En el caso que los estudiantes incurran en errores o haya desconocimiento de los procedimientos, el profesor puede implementar las ayudas planteadas para la tarea en el documento anexo 3 de fichas de tareas.

Evaluación

Sugerimos que el profesor dé mayor valoración a algunos de los procedimientos relevantes de la tarea y acordes con el objetivo 1. Por ejemplo, sugerimos que el profesor se centre en procedimientos asociados con la identificación de los diámetros en cada una de las figuras circulares en el plano del carrusel. El profesor también puede observar los procedimientos que desarrollan los estudiantes para asociar dichos diámetros con la ecuación de la longitud de la circunferencia. Por último, el profesor puede tener en cuenta los procedimientos asociados con la contextualización de la respuesta obtenida.

Tarea T2.1 Maqueta circular

En la tarea T2.1 Maqueta circular, esperamos que los estudiantes encuentren longitudes asociadas con la circunferencia en un contexto profesional. Durante el desarrollo de la tarea, esperamos que los estudiantes usen las relaciones establecidas con las tareas del objetivo 1 o por medio del despeje de las variables en la ecuación de la longitud de la circunferencia. Además, esperamos que los estudiantes realicen un modelo con los resultados obtenidos. Con el desarrollo de esta tarea, esperamos favorecer la representación y resolución de un problema mediante el planteamiento de una ecuación con una incógnita a partir de la ecuación de la longitud de la circunferencia. También, esperamos que los estudiantes asocien la longitud del puente con el diámetro de una circunferencia, encuentren la relación radio-diámetro y asocien la longitud de los muros a construir con la longitud de una circunferencia.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes deben trazar circunferencias con el compás y realizar mediciones de longitudes con la regla. También, los estudiantes requieren los conceptos de circunferencias concéntricas, centro de una circunferencia y longitud en una figura circular. Por último, los estudiantes deben conocer la ecuación de la longitud de la circunferencia.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje, esperamos favorecer la resolución de problemas mediante la representación exacta de una maqueta circular. Para esta representación, esperamos que los estudiantes relacionen los elementos de la circunferencia y propongan las ecuaciones correspondientes que conlleven a la solución de la tarea.

Formulación

El profesor entrega una hoja a cada grupo de estudiantes con el planteamiento de la tarea. La formulación de la tarea incluye dos actividades. La primera requiere la construcción de la maqueta y la segunda requiere hallar la longitud del diámetro en otra situación. A continuación, presentamos la formulación de la tarea T2.1 Maqueta circular.

El día de hoy eres un arquitecto y vas a crear parte de una maqueta de una planta de aguas residuales. Debes construir esta maqueta con el cartón paja y representar los sedimentadores. Los sedimentadores son *estructuras circulares* en las plantas de tratamiento de aguas residuales, encargados de separar partículas contaminantes o lodo del agua. Para esto, puedes tener como referente la imagen de la maqueta circular que se muestra a continuación.

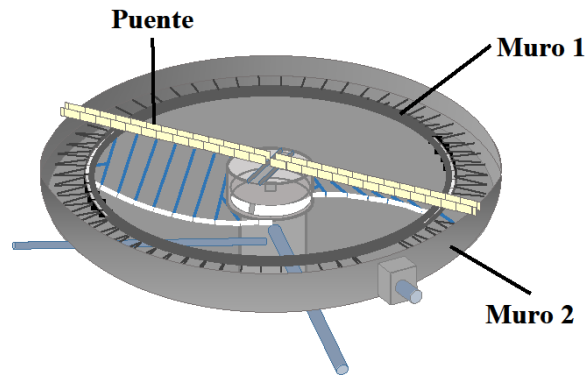


Figura. Maqueta Circular

La parte de la maqueta que vas a construir corresponde a un sedimentador que tiene un puente de 15cm de longitud. Debes hacer los dos muros sin que quede sobrepuesto el cartón paja. Para la construcción, debes tener en cuenta que el muro 1 tiene 5cm de altura mientras que el muro 2 tiene 7cm. También, debes tener en cuenta que los muros están separados por 6cm.

Realiza una descripción paso a paso de cómo construiste la maqueta y luego responde las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la longitud del largo del cartón cartulina que sirve para construir cada muro?
- Si otro sedimentador tiene un muro exterior de longitud 75cm, ¿cuál es la longitud de su puente?

Conceptos y procedimientos

Los conceptos en esta tarea están asociados con el reconocimiento de formas circulares, cuerpos redondos, los elementos de la circunferencia y la ecuación de su longitud. También, identificamos los conceptos de distancia y circunferencias concéntricas. Los procedimientos están relacionados con la formulación y despeje de ecuaciones con una incógnita.

Sistemas de representación

Con la tarea de aprendizaje, esperamos fortalecer el sistema de representación geométrico mediante el reconocimiento de figuras circulares y cuerpos redondos. La tarea contiene los sistemas simbólico algebraico y el numérico para el planteamiento de una ecuación que permita encontrar la longitud de la maqueta y los procedimientos requeridos.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

Esta tarea la ubicamos en un contexto profesional, según con los contextos de PISA 2012. La tarea plantea a los estudiantes desempeñar un rol de arquitecto al construir una maqueta con el uso de materiales.

Materiales y recursos

Para la elaboración de los muros, los estudiantes usan materiales como cartón cartulina, compás, bisturí o tijeras, regla, borrador y lápiz. El cartón cartulina debe tener dimensiones no menores a las de un pliego.

Agrupamiento e interacciones

Para esta tarea, proponemos formar grupos de tres estudiantes. Los grupos deben analizar las posibles formas de solucionar la tarea y tomar una decisión del procedimiento a seguir para construir los muros de la maqueta. Luego, los grupos discuten los resultados y sobreponen los muros construidos para comparar las longitudes halladas con las longitudes requeridas. Al finalizar la tarea, los grupos exponen la solución ante sus compañeros. El trabajo en grupo permite una discusión acerca de la toma de decisiones para la solución de la tarea, así como la motivación en realizar una construcción exacta de los muros del sedimentador.

Temporalidad

El desarrollo de esta tarea contempla tres momentos. En el primer momento, los estudiantes hacen el trazo de una circunferencia a partir del diámetro y luego la recortan (30 minutos). En el segundo momento, los estudiantes reconocen los elementos y hallan las longitudes solicitadas (15 minutos). En el tercer momento, los estudiantes justifican y comprueban los procedimientos realizados (15 minutos).

Errores

En el desarrollo de esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como confundir los valores de los elementos de la circunferencia, por ejemplo, escribir el valor del radio en vez de diámetro para hallar la longitud de la circunferencia en la expresión $C = d\pi$. También, los estudiantes pueden omitir el uso de datos conocidos, información adicional o del contexto para encontrar longitudes requeridas en la tarea. Otros errores están relacionados con los argumentos equivocados o incompletos en los resultados obtenidos.

Grafos de criterios de logro

El grafo de criterios de logro muestra los caminos y posibles procedimientos que los estudiantes pueden desarrollar para resolver la tarea. En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro correspondiente a la tarea T2.1.

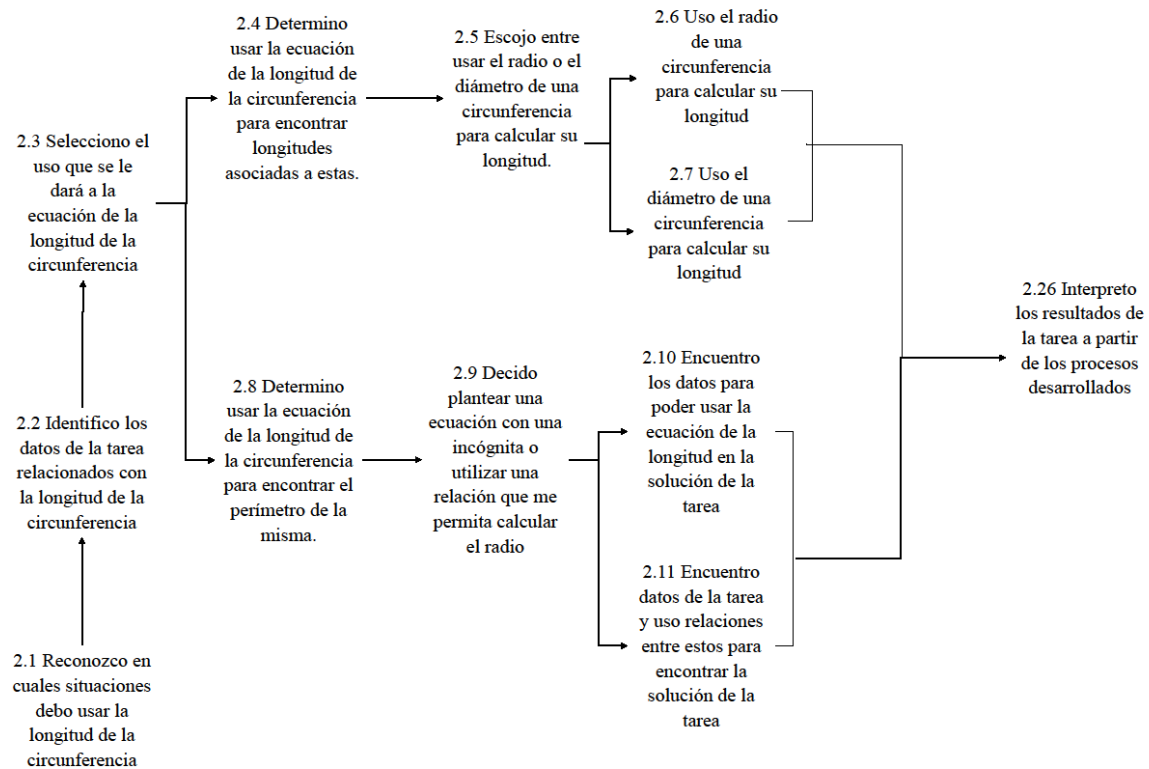


Figura 8. Grafo de criterios de logro T2.1

Uno de los caminos de aprendizaje presentados en la figura 8 requiere el uso del diámetro o del radio para hallar la longitud de la circunferencia, que corresponde al muro de la maqueta. En otro camino, los estudiantes pueden resolver la segunda parte de la tarea al hallar la longitud del puente de otra maqueta mediante el diámetro.

Actuación del profesor

Inicialmente, el profesor contextualiza la tarea en relación con los conceptos técnicos, el mecanismo y el funcionamiento de un sedimentador. Luego, el profesor interactúa con cada uno de los grupos y orienta la tarea en dos contextos, el profesional, en la construcción de una maqueta y el matemático en la exactitud de las longitudes a encontrar. En esta actuación, el profesor brinda las ayudas necesarias a cada grupo con el fin de orientar la solución. Por último, el profesor organiza la presentación de cada uno de los grupos y formula cuestionamientos que evidencie la correcta interpretación y solución de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Inicialmente, el profesor hace una contextualización de la tarea. Esta es necesaria por el desconocimiento de los términos relacionados con el tratamiento de aguas residuales. Sugerimos ver la

imagen de la formulación de la tarea o proyectarla con el fin de identificar los elementos de la maqueta y la forma de la estructura final. Finalmente, proponemos realizar una puesta en común con el propósito de escuchar los resultados de los procedimientos y la solución de la tarea.

Evaluación

Para la evaluación de la tarea de aprendizaje, proponemos que el profesor dé mayor relevancia a los aspectos que están más relacionados con el propósito del objetivo. Uno de esos aspectos está relacionado con el uso de datos implícitos y explícitos de la tarea y el planteamiento de las ecuaciones que conllevan a su solución. También, consideramos relevante la justificación que hacen los estudiantes respecto a los procedimientos utilizados en la construcción de la maqueta.

Tarea T2.2 La bicicleta

Con la tarea T2.2 La bicicleta, esperamos que los estudiantes estén en capacidad de resolver situaciones relacionadas con la distancia recorrida por un objeto circular en determinado número de vueltas. De igual forma, esperamos que la tarea permita identificar el tipo de situaciones en las que es posible usar la ecuación de la longitud de la circunferencia y su relación con la distancia que puede recorrer un objeto circular. Los estudiantes deben hacer uso del diámetro o la relación entre éste y el radio. Así mismo, los estudiantes deben tener en cuenta datos que no están explícitos en el enunciado como la relación de los piñones y los platos, que sirve para encontrar el número de vueltas. De esta manera, los estudiantes usan conocimientos directamente relacionados con el tema y conocimientos asociados al funcionamiento de la bicicleta. Con esta tarea de aprendizaje, los estudiantes fortalecen capacidades matemáticas de razonamiento, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico y comunicación.

Requisitos

Para dar solución a esta tarea, los estudiantes deben usar conocimientos previos en temas como proporcionalidad, unidades de longitud del sistema inglés, solución de ecuaciones con una incógnita y operaciones básicas con números reales. Los estudiantes deben tener claridad en la definición del diámetro. Esperamos que en las tareas de aprendizaje del objetivo 1 los estudiantes adquieran habilidades en el reconocimiento de las relaciones entre los elementos de la circunferencia.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos que los estudiantes identifiquen y distingan el diámetro de la circunferencia de otros valores presentes en el enunciado. También, esperamos que los estudiantes usen un lenguaje algebraico apropiado para representar la situación mediante la expresión algebraica de la longitud de la circunferencia, bien sea mediante el uso del diámetro o del radio. Así mismo, esperamos que los estudiantes usen datos distintos a los requeridos en la ecuación de la longitud de la circunferencia para establecer el número de vueltas que puede dar la rueda de una bicicleta de acuerdo con la relación entre el plato y el piñón.

Formulación

El profesor hace entrega de una hoja a cada uno de los estudiantes con el planteamiento de la tarea. La tarea de aprendizaje tiene dos preguntas. La primera solicita una distancia a partir de un número

de vueltas y la segunda solicita el tipo de plato y piñón en un terreno determinado. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Una bicicleta es una máquina que transmite el movimiento mediante dos ruedas dentadas unidas por una cadena. La mayor de estas ruedas recibe el nombre de plato y es la que está unida directamente a los pedales. La rueda menor recibe el nombre de piñón y se sitúa en el eje de la rueda trasera, tal como lo muestra la figura. De acuerdo con la combinación que se realice entre el plato y el piñón de la bicicleta se determina su desarrollo. Esto es lo que conocemos como los cambios de la bicicleta. Los cambios de nuestra bici nos permiten subir colinas, arrancar y acelerar de la manera más eficiente.

Se puede definir el desarrollo como la longitud que avanza la bicicleta por cada vuelta completa del pedal, es decir, es la mezcla de marchas y velocidades que la bicicleta ofrece. Por eso, los dientes almacenados en cada uno de estos elementos marcan el sistema de desarrollo de transmisión de la bicicleta. El desarrollo métrico de una bicicleta es la distancia que recorremos en una pedalada.

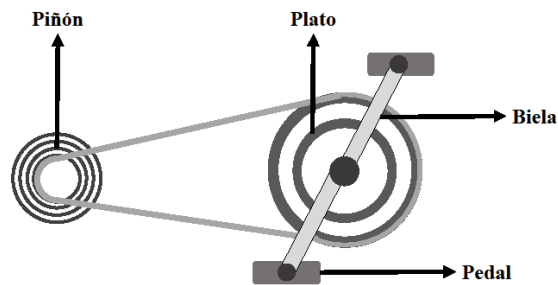


Figura A. Plato y piñón de la bicicleta

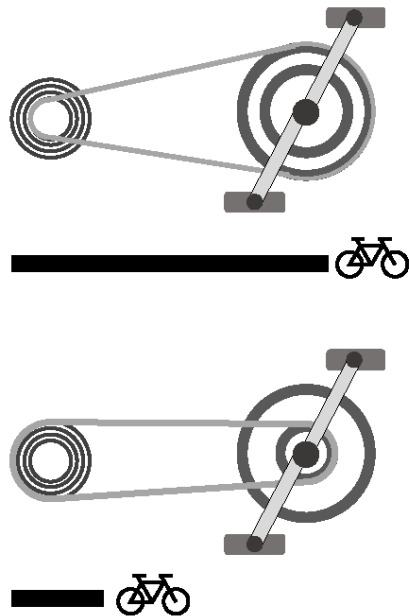


Figura B. Desarrollo métrico

Un ciclista hace un recorrido plano, para ello usa su bicicleta de montaña, la cual tiene sus ruedas de 70 centímetros de diámetro exterior. Para este recorrido, usa el cambio de su bicicleta con el piñón de 14 dientes (Pequeño) y plato de 42 dientes (Grande). ¿Cuántos metros recorre por una pedalada? ¿De qué tamaño podrían ser el plato y el piñón para recorrer un camino en subida? Justifica tu respuesta.

Conceptos y procedimientos

El desarrollo de esta tarea requiere conceptos como el reconocimiento de una distancia recorrida por un objeto circular, elementos de la circunferencia y las relaciones que pueden surgir entre estas. Adicionalmente, esperamos que los estudiantes propongan una razón que represente la relación plato-piñón en el desarrollo de una bicicleta. En la tarea se utilizan procedimientos de despeje de ecuaciones lineales con una incógnita y operaciones básicas entre números reales.

Sistemas de representación

Los sistemas de representación que fortalecemos con esta tarea son el verbal, el simbólico algebraico y el simbólico numérico. El primero está presente en la tarea cuando los estudiantes distinguen entre un conjunto de datos aquel que corresponde al diámetro. El segundo está presente en el uso de una ecuación lineal con incógnita que se plantea para encontrar la longitud de la rueda. El tercero está relacionado con el uso de valores numéricos que surgen de la ecuación de la longitud de la circunferencia.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en un contexto personal de acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012. La tarea está relacionada con una actividad común como es el uso de la bicicleta como medio de transporte o para la práctica de ejercicio.

Materiales y recursos

Como recursos previstos, contamos con el video “Cómo elegir el desarrollo de tu bicicleta”². Este video tiene como finalidad dar al estudiante ideas claras sobre lo que ocurre al seleccionar cada plato y piñón (cambios de la bicicleta). También, el video hace referencia a las partes del mecanismo de pedaleo y la relación que existe entre los platos y el piñón para determinar el número de vueltas que da la rueda. Adicionalmente, sugerimos el uso de la calculadora para facilitar el cálculo de operaciones. Para la presentación de la tarea y el video, consideramos necesario el uso del tablero digital o video beam. Adicionalmente, los estudiantes necesitan materiales habituales de la clase como lápices, hojas y cuaderno.

Agrupamiento e interacciones

La tarea de aprendizaje se desarrolla en tres momentos. En el primero, los estudiantes trabajan de forma individual en la solución de la primera pregunta. Para este primer momento, el profesor interactúa con los estudiantes mediante la implementación de las ayudas previstas (anexo 3). En un segundo momento, los estudiantes se organizan en grupos de tres personas de tal forma que cada grupo lo integre al menos un estudiante con conocimiento del funcionamiento de la bicicleta.

² Video: ¿cómo elegir el desarrollo de tu bicicleta? <https://www.youtube.com/watch?v=v5nCMJReIKQ>

En este momento se presenta la interacción profesor - grupo, en la que el profesor escucha, interroga y orienta a los grupos en sus discusiones. El profesor orienta en definiciones propias del contexto, como desarrollo métrico, marcha o cambios. En el último momento, el profesor concluye la tarea y fomenta la participación de varios grupos. En este momento, los estudiantes argumentan y explican la solución de la tarea.

Temporalidad

En primera instancia, el profesor presenta la tarea y cada estudiante hace la lectura individual correspondiente de la formulación (10 minutos). Luego, el profesor proyecta el video que explica la relación entre el plato y piñón de una bicicleta (10 minutos). Después, los estudiantes resuelven la primera pregunta en forma individual (10 minutos). Luego, los estudiantes se organizan en grupos para la discusión de la tarea y proceden a resolver la segunda pregunta (10 minutos). Finalmente, un representante de cada grupo comparte la respuesta de la segunda pregunta en plenaria con el resto de los grupos (5 minutos)

Errores

Con el desarrollo de esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como omitir datos aportados en el enunciado para encontrar longitudes requeridas en el problema. También, los estudiantes pueden incurrir en usar el número de vueltas en lugar del diámetro o radio. Otro error está relacionado con calcular la longitud de la circunferencia y no hallar la distancia recorrida.

Grafos de criterios de logro

En el grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 La bicicleta, mostramos dos procedimientos que pueden realizar los estudiantes para resolver la tarea de aprendizaje. En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro.

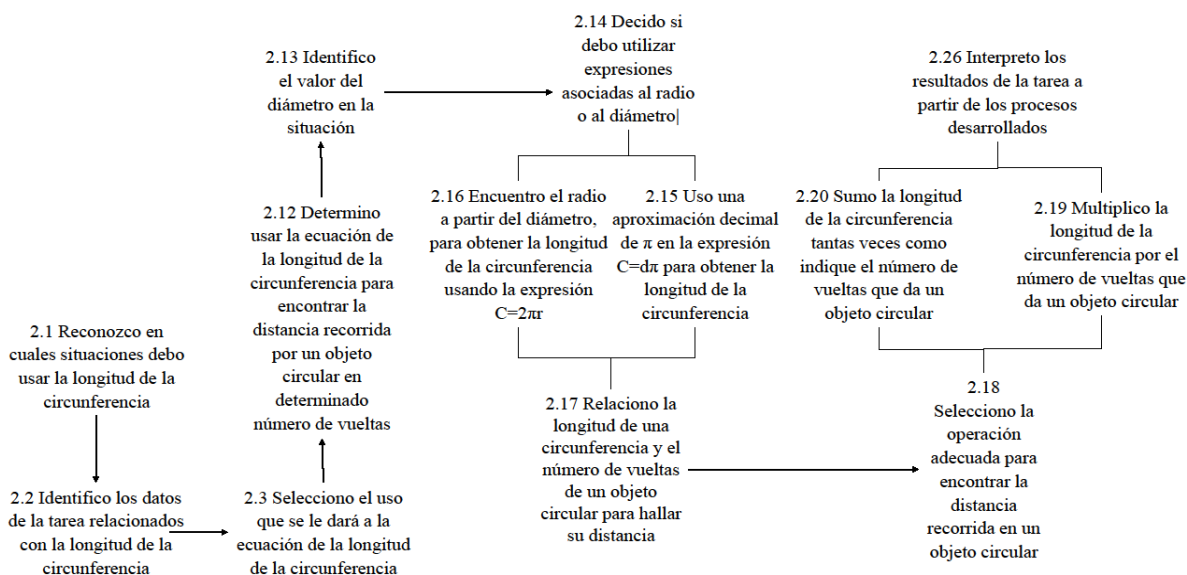


Figura 9. Grafo tarea La bicicleta

En el grafo de la tarea de La bicicleta, observamos los caminos de aprendizaje que pueden tomar los estudiantes para resolver la tarea. En uno de los caminos, los estudiantes pueden usar el radio o el diámetro para calcular las distancias requeridas. En otro camino, los estudiantes pueden escoger entre multiplicar por el número de vueltas o sumar la longitud de la circunferencia según la cantidad de vueltas.

Actuación del profesor

Para esta tarea de aprendizaje, el profesor inicialmente contextualiza a los estudiantes en aspectos técnicos del desarrollo de la bicicleta. En un segundo momento, el profesor actúa como orientador al brindar las ayudas previstas durante el desarrollo individual de la tarea. En la interacción grupal, el profesor acompaña los debates que se puedan dar en los grupos. Finalmente, el profesor usa las explicaciones de los estudiantes en la puesta en común para realimentar y reforzar los conocimientos asociados con la longitud de la circunferencia.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Para esta tarea de aprendizaje, sugerimos que el profesor contextualice la tarea de acuerdo con los términos técnicos relacionados con el desarrollo de la bicicleta. Aunque el video contribuye en la ilustración de la situación, el profesor debe asegurarse que los estudiantes tengan claridad en la relación plato-piñón antes de iniciar con la solución de la tarea. El profesor puede apoyarse en los estudiantes que hacen uso de la bicicleta y que cuentan con este conocimiento.

Evaluación

Para la evaluación de la tarea de aprendizaje, sugerimos que el profesor haga énfasis en tres aspectos importantes. El primero relacionado con el uso del diámetro o el radio, esto con el fin de fortalecer el primer objetivo. El segundo relacionado con la argumentación de los procedimientos usados para la solución de la tarea con el fin de valorar la resolución de problemas. El tercero relacionado con los procedimientos para determinar distancias recorridas por un objeto circular con el uso de la ecuación de la circunferencia.

Tarea T2.3 El odómetro

Presentamos la tarea T2.3 que corresponde a la última tarea de aprendizaje de la unidad didáctica. Esta tarea de aprendizaje pretende que los estudiantes calculen el radio o el diámetro de un objeto circular que ha recorrido una distancia en determinado número de vueltas. Además, la tarea recopila varios aspectos que se aplicaron en las tareas anteriores.

A continuación, presentamos los elementos de la tarea. Recomendamos al profesor ver el documento anexo 3 que contiene además de la ficha de la tarea el listado de ayudas. Dicho listado contribuye a la solución de algunas de las inquietudes que los estudiantes pueden presentar al momento de abordar la tarea.

Requisitos

La tarea propone utilizar el conocimiento informal que los estudiantes tienen sobre círculo y circunferencia. También, los estudiantes requieren de conceptos relacionados con segmentos equidistantes y medidas de longitud del sistema internacional. Además, los estudiantes requieren conocimientos de los conceptos de radio y diámetro y las relaciones utilizadas en el objetivo 1.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos favorecer la resolución de problemas mediante el planteamiento de una ecuación con una incógnita a partir de la longitud de la circunferencia o el uso de relaciones. Además, esperamos que los estudiantes encuentren la longitud de la circunferencia de un objeto circular que recorre una distancia en determinado número de vueltas y que de esta longitud logren establecer su diámetro.

Formulación

El profesor hace entrega de una hoja con el planteamiento de la tarea a cada uno de los estudiantes. La formulación de la tarea contiene la definición de odómetro y la explicación de su funcionamiento. Después, el profesor presenta las aplicaciones del odómetro y los diferentes tipos. A continuación, mostramos la formulación de la tarea El odómetro.

La rueda contadora o también conocida como odómetro se utiliza para medir trayectos y distancias en terrenos de superficies desiguales. Por ello, el odómetro se emplea fundamentalmente en campos, terrenos de cultivo, prados y bosques. Tiene un contador en la rueda que funciona automáticamente y marca el número de vueltas y centímetros. Podemos encontrar odómetros (mecánicos o electrónicos) en un automóvil o vehículo (también llamado cuenta kilómetros).

Una cuestión para tener en cuenta es el tamaño de la rueda del odómetro, pues la oferta de odómetros comprende una gran variedad de tamaños de rueda, tan pequeños como las de un carrito de compras o tan grandes como las de una bicicleta. Cuanto más irregular sea la superficie para medir, mayor deberá ser el tamaño de la rueda para obtener las estimaciones más precisas.

Los tamaños de la rueda se miden según el diámetro y/o el perímetro o la circunferencia de la rueda, los tamaños más pequeños corresponden a ruedas de entre 8 cm y 16 cm de diámetro. Las ruedas de tamaño medio tienen 32 cm de diámetro y las ruedas de gran tamaño tienen un diámetro de 64 cm.

Si al medir una distancia determinada con el odómetro este marca 24,49 metros en 13 vueltas, ¿qué terreno crees que se midió?

Conceptos y procedimientos

Los conceptos y procedimientos que promovemos en esta tarea de aprendizaje están asociados con determinar la longitud de un objeto circular que recorre determinado número de vueltas. Además, esperamos que los estudiantes identifiquen el diámetro de una forma circular y que desarrollen operaciones de conversión de medidas de longitud.

Sistemas de representación

Con la tarea de aprendizaje, buscamos fortalecer los sistemas de representación simbólico algebraico y el numérico. El primero se utiliza en el planteamiento de una ecuación que permita encontrar la longitud del objeto circular. El segundo se utiliza en los procedimientos que desarrollan los estudiantes con las cantidades numéricas que propone la tarea.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en un contexto profesional de acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012. Consideramos que la tarea permite reconocer un instrumento utilizado en varios campos profesionales.

Materiales y recursos

Antes de la implementación de la tarea, el profesor hace la presentación en power point y muestra los distintos tipos de odómetros y terrenos que se pueden medir con éstos. Además, los estudiantes requieren de papel y lápiz para desarrollar la tarea.

Agrupamiento e interacciones

Los estudiantes resuelven la tarea en forma individual y eligen uno de los terrenos propuestos. En un segundo momento, los estudiantes se agrupan de acuerdo con el terreno elegido por cada uno (si quedan grupos muy grandes el profesor puede separar un equipo en dos equipos pequeños). En cada grupo, los estudiantes compararan sus respuestas y generan un argumento de acuerdo con la elección de su terreno. Finalmente, un representante de cada grupo defiende la idea en una plenaria que modera el profesor.

En el trabajo individual, el profesor interactúa con cada uno de los estudiantes y ofrece las ayudas necesarias. Además, el trabajo en grupo permite una discusión acerca de la toma de decisiones para la solución de la tarea, así como la motivación de seleccionar el terreno más adecuado. En la interacción, el profesor identifica los errores en los que pueden incurrir los estudiantes y brinda las ayudas necesarias para continuar con la solución.

Temporalidad

Para esta tarea, proponemos tres momentos. En el primero cada estudiante hace la solución individual de la tarea (20 minutos). En el segundo momento, los grupos de estudiantes que seleccionan el mismo terreno preparan la argumentación de éste (10 minutos). En el tercer momento, los estudiantes debaten en torno al terreno que más se ajusta según la medida realizada con el odómetro (10 minutos).

Errores

En la tarea de aprendizaje, los estudiantes pueden incurrir en errores asociados con la extracción de los datos de la tarea, con las operaciones que se desarrollan o con la argumentación y relación de la respuesta numérica en el contexto de la tarea. Por ejemplo, los estudiantes pueden tomar los datos de los diámetros de los diferentes tamaños de los odómetros y no lograr relacionarlos con la distancia recorrida por el objeto circular. También, pueden obtener una respuesta numérica pero

no lograr relacionarla con el contexto de la tarea o no poder corroborar si los procedimientos desarrollados son los adecuados.

Grafos de criterios de logro

Los criterios de logro de la tarea T2.3 se presentan en el orden en que los estudiantes pueden desarrollar los procedimientos y estos se muestran en un grafo de criterios de logro. Este grafo permite al profesor analizar la actuación de los estudiantes al momento de abordar la tarea. En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea El odómetro.

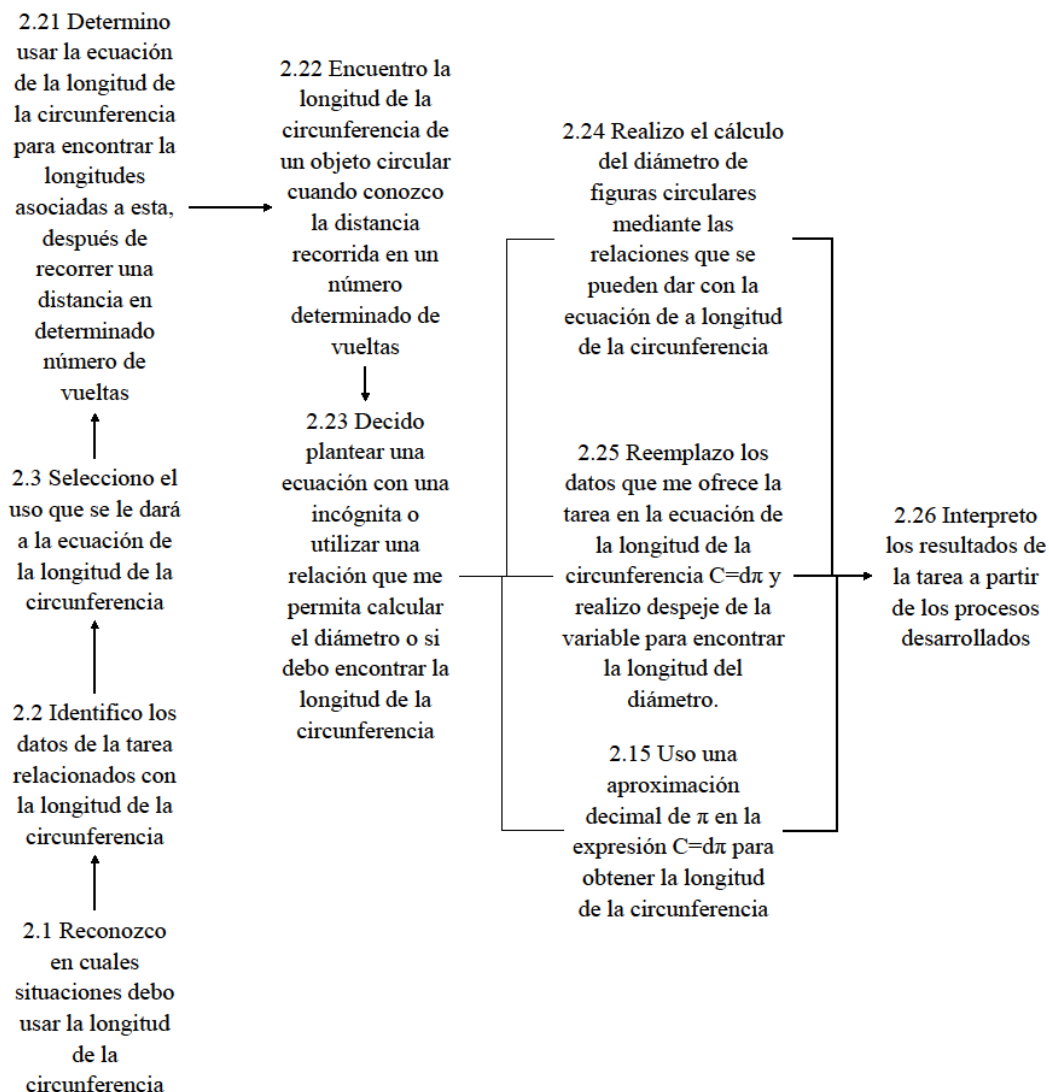


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea El odómetro

En la figura 10, los primeros criterios de logro están asociados con la extracción de datos de la tarea y con seleccionar el uso que se le da a la ecuación de la circunferencia. Los siguientes criterios de logro son los procedimientos que el estudiante desarrolla con los datos extraídos de la tarea en

la ecuación de la longitud de la circunferencia. Los últimos criterios de logro están relacionados con dar una respuesta a la situación e interpretar ese resultado en el contexto de la tarea.

Actuación del profesor

El profesor debe motivar y orientar a los estudiantes durante el desarrollo de la tarea de aprendizaje. Al inicio de la tarea, el profesor muestra la presentación en power point de los odómetros y los terrenos. Luego, el profesor ofrece las ayudas necesarias a los estudiantes cada vez que se generen dudas sobre la tarea de aprendizaje, tanto en el trabajo individual como en el grupal. Por último, el profesor debe ser el moderador en el debate de ideas sobre los terrenos.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Sugerimos al profesor estar atento a las actuaciones de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje. Lo anterior permite al profesor tener una valoración más acertada al momento de evaluar el aprendizaje de la tarea y la consecución de las expectativas. Además, recomendamos al profesor estar atento a que no se generen confusiones en los estudiantes respecto al tamaño de los odómetros o a los terrenos que se pueden medir.

Evaluación

Sugerimos al profesor dar una mayor valoración a los criterios de logro que están relacionados con el propósito del objetivo 2. De acuerdo con esto, consideramos que los criterios de logro que deben tener mayor valoración son aquellos relacionados con encontrar el valor del diámetro del odómetro, dar una respuesta a la tarea y justificar la respuesta en el contexto.

Examen final

Con el desarrollo e implementación de las tareas de aprendizaje, el profesor puede realizar una parte de la evaluación del aprendizaje de los estudiantes en relación con el contenido de la unidad didáctica. Como parte final de esta evaluación, proponemos un examen final que, junto con el desarrollo de las tareas de aprendizaje, ayude a determinar el alcance los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Para esto, proponemos actividades que los estudiantes desarrollan en forma individual. Con estas actividades, esperamos que el profesor pueda recoger información respecto a conocimientos y habilidades básicas como el reconocimiento del perímetro de una figura circular, la identificación de elementos de la circunferencia en diferentes situaciones, el uso de relaciones entre elementos de la circunferencia para el cálculo de longitudes y la argumentación y justificación de un proceso para la solución de una situación en contexto. Adicionalmente, proponemos una rúbrica de evaluación que permita al profesor caracterizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes mediante el establecimiento de niveles e indicadores de logro.

Diseño del examen final

El examen final que proponemos consta de tres preguntas. La primera pregunta es una situación en un contexto matemático y está relacionada con el objetivo 1. Las preguntas 2 y 3 presentan situaciones en un contexto social, específicamente en contextos deportivos. Estas preguntas están relacionadas con el objetivo 2. A continuación, presentamos el diseño del examen final para la unidad didáctica longitud de la circunferencia.

Pregunta 1: Figura circular

Calcula el perímetro de la región sombreada que se muestra en la siguiente imagen.

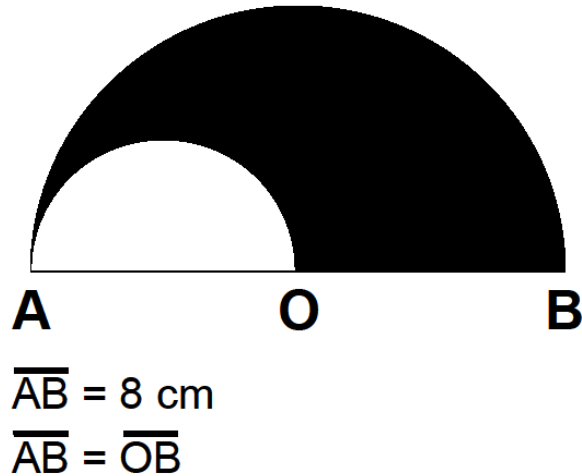


Figura. Perímetro de figura circular

Pregunta 2: La Bicicleta

Camilo y Andrés salen a hacer deporte en sus bicicletas y a su vez quieren aprender a calcular la distancia que pueden recorrer. Ellos quieren aplicar los conocimientos que adquirieron en su clase de geometría respecto a longitud y circunferencia. Resuelve las siguientes situaciones de acuerdo con el diámetro exterior de las ruedas de la bicicleta de Camilo, que se muestra en la siguiente imagen.

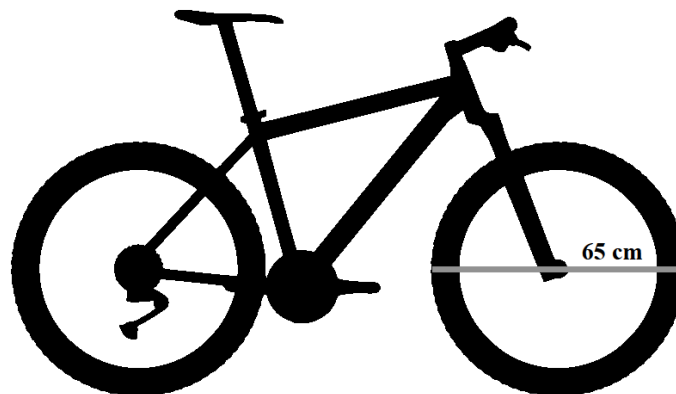


Figura. Diámetro de la rueda de una bicicleta

Camilo y Andrés se preguntan cuál de los dos recorrerá más distancia si las ruedas de ambas bicicletas dan 20 vueltas. Las ruedas de la bicicleta de Andrés tienen un diámetro exterior de 70cm.

1. ¿Qué distancia deberán recorrer cada uno de ellos en sus bicicletas? Explica en qué influye la longitud de la rueda con la distancia recorrida.

- Camilo probó una opción diferente de ruedas para su bicicleta y con ellas recorrió una distancia de 18.840 cm cuando las ruedas dieron 100 vueltas. ¿Cuál es el diámetro de estas ruedas? Explica el proceso en el que se relacionó la distancia recorrida con la longitud de la rueda y el diámetro de esta.

Pregunta 3: Pista Atlética

Un velocista quiere practicar en una pista atlética como la que se muestra en el esquema A. El velocista quiere hacer pruebas de 100, 200, 300 y 400 metros respectivamente, siempre en dirección contraria a las manecillas del reloj. Resuelve las siguientes situaciones de acuerdo con la información presentada.

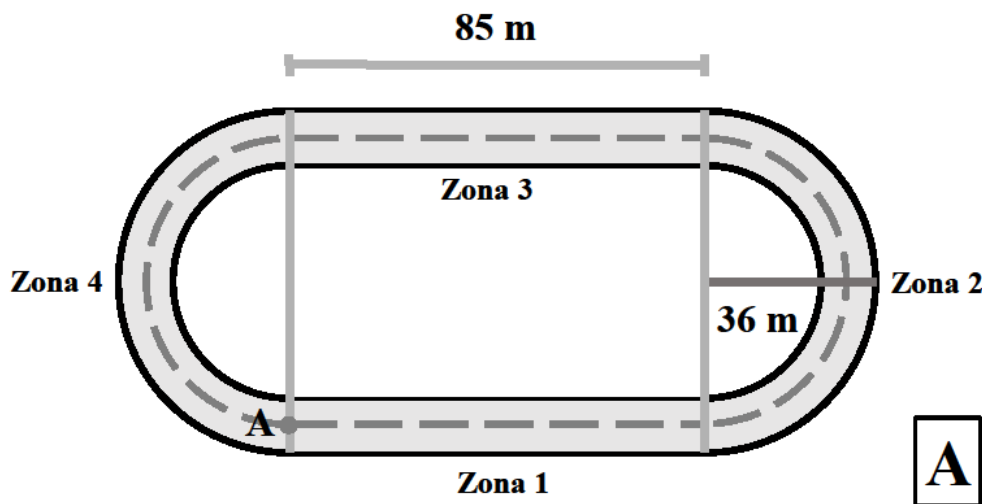


Figura. Pista atlética esquema A

- Un entrenador le dice al velocista que si un atleta parte del punto A y recorre 400 m, entonces el atleta debe quedar en la zona 2 al finalizar el trayecto. Justifica si esta afirmación es falsa o verdadera.
- Supongamos que se quiere hacer una modificación a la pista y reducir todo su trayecto, de forma que cada zona recta disminuye en 5m y cada zona curva disminuye en 5m. Explica el procedimiento para calcular las nuevas dimensiones de la pista en el esquema B.

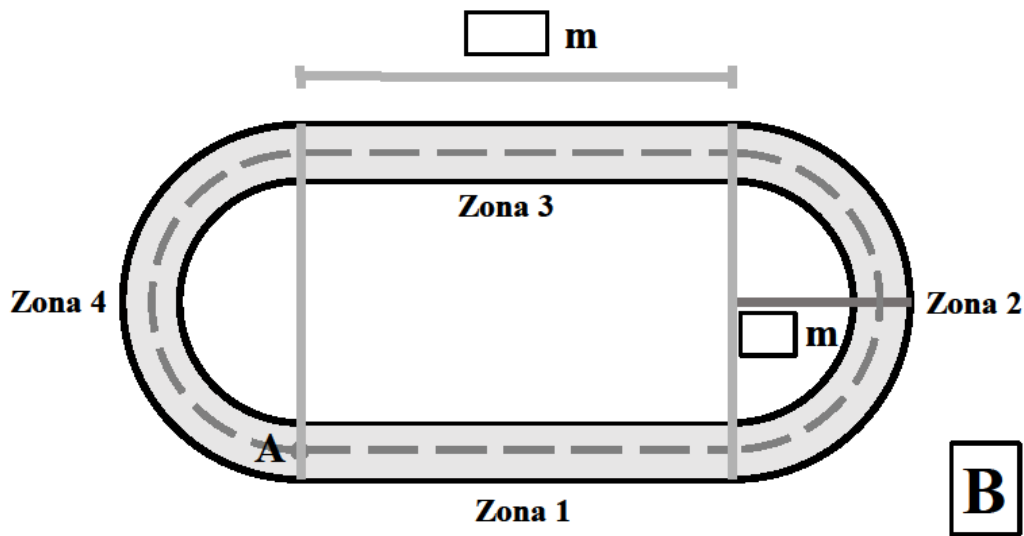


Figura. Pista atlética esquema B

La primera pregunta del examen final presenta una situación en la que los estudiantes calculan el perímetro de una figura semicircular. Con esta pregunta, proponemos evaluar la identificación de elementos de la circunferencia, el uso de relaciones entre sus elementos y la implementación de la ecuación de la longitud de la circunferencia para el cálculo del perímetro de la figura.

La segunda pregunta del examen final presenta una situación en un contexto deportivo que involucra elementos como las ruedas de bicicleta y distancias recorridas. Esta situación relaciona los elementos de la circunferencia con el cálculo de distancias recorridas por un objeto circular. La pregunta contiene dos literales. El primer literal tiene como requerimiento el cálculo de una distancia recorrida por una bicicleta en relación con el diámetro de sus ruedas y un número de vueltas establecido. El segundo literal tiene como requerimiento el cálculo del diámetro con base en una distancia recorrida y un número de vueltas determinado. Con el desarrollo de esta actividad, buscamos evidenciar las relaciones entre la longitud de la circunferencia y las distancias recorridas por un objeto circular. Además, buscamos evidenciar el uso de estas relaciones en el cálculo de distancias recorridas por un objeto circular y el cálculo de longitudes de los elementos de la circunferencia.

La tercera pregunta del examen final presenta una situación en un contexto deportivo que involucra una pista atlética. Esta situación relaciona las longitudes que conforman el perímetro de una figura compuesta. La pregunta contiene dos literales. El primer literal tiene como requerimiento la justificación de una situación mediante el cálculo de una parte del perímetro de una figura compuesta y la comparación con una longitud determinada. El segundo literal tiene como requerimiento la modificación de la pista atlética mediante operaciones aplicadas a sus longitudes y el uso de relaciones o ecuaciones relacionadas con la longitud de la circunferencia para el cálculo de las zonas semicirculares de la pista.

Rúbrica del examen final

En este apartado, proponemos la rúbrica del examen final. La implementación de este instrumento tiene como propósito facilitar y direccionar la evaluación del examen final. Por medio de este instrumento los estudiantes pueden conocer cómo serán evaluados y el profesor mirar el nivel en que se encuentran sus estudiantes. Este direccionamiento está relacionado con la propuesta de González y Gómez (2018), pues articula conceptos pedagógicos como criterios de logro, caminos de aprendizaje, errores y dificultades. Estos conceptos pedagógicos, nos permiten caracterizar niveles de alcance de logro mediante el establecimiento de indicadores. Definimos en la rúbrica los cuatro siguientes niveles de logro: superior, alto, básico y bajo. A continuación, presentamos como ejemplo la rúbrica del examen final en relación con el objetivo 1.

Tabla 6
Niveles del logro e indicadores para el objetivo 1

Nivel del logro	Indicadores
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro para uno de los caminos de aprendizaje del objetivo, sin incurrir en ningún error.
Alto	El estudiante incurre en errores que no afectan la estructura de la solución de la tarea, como, por ejemplo, encuentra las longitudes de las dos semicircunferencias, pero no suma dichos valores para determinar la longitud total, y activa todos los criterios del logro hasta el CdL1.11.
Básico	El estudiante incurre en errores como E8 al usar la longitud de dos circunferencias y no de semicircunferencias, E58 trata de encontrar las longitudes a ensayo y error sin encontrar una relación con el contexto del problema, E10 al cambiar el valor del radio por el diámetro para encontrar la longitud en la ecuación $C = 2\pi r$, al incurrir en E14 y E15 al trabajar π como una variable con un valor que no coincide con una aproximación correcta o E26 al usar un valor erróneo de las longitudes de las semicircunferencias para determinar la longitud total. El estudiante incurre en el error E23 al omitir datos importantes de la tarea y al momento de reemplazarlos en la ecuación de la longitud que seleccione hace que incurra en una respuesta no acertada o E31 al hacer diferentes operaciones sin tener en cuenta el contexto del problema.

Tabla 6

Niveles del logro e indicadores para el objetivo 1

Nivel del logro	Indicadores
Bajo	<p>El estudiante incurre en errores como E43 y determina el área de la figura sombreada y no la longitud, o E44 al no utilizar ninguna expresión para reemplazar los datos que extrae de la tarea para determinar las longitudes.</p> <p>El estudiante lee la situación y no extrae los datos que le permitan encontrar las longitudes, o no encuentra una relación entre el contexto de la tarea y el tema y desiste de continuar, de modo que activa solo los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2 y CdL1.3. También, puede ocurrir que el estudiante decide no desarrollarla, ya sea porque no la entendió o no le nace desarrollarla.</p>

Respecto a la tabla de la rúbrica del examen final, en la primera columna podemos observar los niveles de logro y en la segunda los indicadores que caracterizan cada nivel de logro. El nivel superior se caracteriza por la no incurrancia en errores y la activación de todos los criterios de logro en alguno de los caminos de aprendizaje. El nivel alto se caracteriza por la incurrancia en errores de omisión que no están directamente relacionados con el tema de la unidad didáctica y que aun así permiten evidenciar el manejo de relaciones entre los elementos de la circunferencia. El nivel básico se caracteriza por la incurrancia en errores relacionados con la implementación de relaciones o ecuaciones asociadas con la longitud de la circunferencia. Por último, el nivel bajo se caracteriza por la incurrancia en errores relacionados con la no identificación y la no interpretación de los elementos de la circunferencia, así como en la no identificación de las relaciones entre sus elementos y el no reconocimiento de conceptos básicos como el perímetro en la situación planteada.

CONCLUSIONES

Este documento es el resultado de una propuesta que presentamos en la unidad didáctica para la enseñanza del tema de longitud de la circunferencia. Esta unidad didáctica tiene como propósito promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas mediante la implementación de tareas secuenciadas y relacionadas con el tema matemático. Esta propuesta está fundamentada en referentes didácticos y conceptos pedagógicos como los propuestos por Cañadas, et al. (2018) y González et al. (2018). Profundizamos en cada uno de estos aspectos a continuación.

Para el desarrollo de nuestra unidad didáctica, comenzamos por diferenciar los aspectos relativos a la enseñanza y aquellos relativos al aprendizaje. Organizamos los aspectos relativos a la enseñanza con base en lo referentes didácticos de Cañadas et al. (2018). Estos nos permitieron organizar los contenidos de acuerdo con la estructura conceptual y procedimental, los sistemas de representación y la fenomenología. De esta forma, establecimos los conceptos, procedimientos,

representaciones y situaciones relacionadas con la longitud de la circunferencia que harían parte de la unidad didáctica. Organizamos los aspectos relativos al aprendizaje de acuerdo con los conceptos pedagógicos propuestos por González (2018), que incluyen las expectativas de aprendizaje y las expectativas afectivas, las limitaciones del aprendizaje, los criterios de logro y los grafos de criterios de logro. Estos conceptos pedagógicos nos permitieron establecer las capacidades matemáticas fundamentales a las que queríamos contribuir, los objetivos de aprendizaje, los criterios de logro y los errores y dificultades relacionados con la longitud de la circunferencia. Después, presentamos un esquema general para la implementación de la unidad didáctica. Posteriormente, presentamos las tareas de aprendizaje y las tareas de evaluación. Las tareas de evaluación incluyen la tarea diagnóstica para el reconocimiento de los conocimientos previos y el examen final como parte de la evaluación del alcance de los objetivos de aprendizaje. Las tareas de aprendizaje incluyen dos tareas para el desarrollo del objetivo 1 y tres tareas para el desarrollo del objetivo 2. Finalmente, incluimos un listado de anexos para complementar la información de los diferentes apartados.

El proceso de la elaboración de la unidad didáctica comenzó con una fase de diseño en la que analizamos el tema de la longitud de la circunferencia a la luz de los conceptos pedagógicos y referentes didácticos anteriormente mencionados. En la segunda fase, implementamos el primer diseño de la unidad didáctica con estudiantes de grado noveno de una institución educativa distrital de la ciudad de Bogotá. En una tercera fase, recolectamos la información mediante el uso de instrumentos propuestos en la maestría en educación matemática de la universidad de los Andes. En una última fase, realizamos ajustes al diseño de la unidad didáctica y presentamos una nueva versión.

Con la unidad didáctica longitud de la circunferencia, esperamos contribuir con una perspectiva del aprendizaje de las matemáticas que trascienda la implementación de algoritmos y procedimientos, y en su lugar promueva la interpretación y conceptualización de las relaciones entre los elementos de la circunferencia. En este sentido, consideramos que esta unidad didáctica permite a los estudiantes reconocer y utilizar diferentes sistemas de representación para conceptualizar los elementos y las relaciones concernientes a la longitud de la circunferencia. También, consideramos que la unidad didáctica provee diferentes situaciones y contextos en los que los estudiantes pueden desarrollar el aprendizaje significativo de los elementos de la circunferencia y las relaciones entre éstos.

Una de las limitaciones que puede tener la unidad didáctica está relacionada con la no inclusión del sistema de representación ejecutable. En este sentido, proponemos al profesor usar este sistema de representación para evidenciar relaciones entre los elementos de la circunferencia, especialmente en cuanto a relaciones de proporcionalidad. Para esto, consideramos que aplicativos como CabriGeometre y Geoebra pueden favorecer la conceptualización de las relaciones y los elementos de la circunferencia, puesto que presentan ambientes dinámicos que favorecen el desarrollo del pensamiento espacial.

LISTADO DE ANEXOS

En la tabla 7, presentamos el listado de anexos relacionados a lo largo del documento.

Tabla 6
Listado de anexos

A	Descripción
1	Listado completo de errores en los que podrían incurrir los estudiantes durante la aplicación de cada una de las tareas de aprendizajes. Los errores se encuentran agrupados en tres dificultades
2	Listado de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica
3	Fichas de tareas de aprendizaje. En este anexo se incluyen los requerimientos de las tareas de aprendizaje y sus tablas de ayudas.
4	Fichas de tareas de evaluación. En este anexo se incluyen las rúbricas del examen final.
5	Listado completo de errores asociados con los conocimientos previos. Los errores se encuentran agrupados en cuatro dificultades

Nota. A: Anexo

REFERENCIAS

- Cañadas, María C.; Gómez, Pedro; Pinzón, Andrés (2018). Análisis de contenido. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, María José; Gómez, Pedro (2018). Análisis cognitivo. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Gómez, Pedro (2018). Compartir el trabajo con los colegas. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 413-425). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Madrid: Autor.