

UN RELATO DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: LA VERSIÓN COMUGNITIVA (MÓDULO 3)¹

ANNA SFARD

Nuestro tema en esta unidad es el aprendizaje de las matemáticas, y en este momento nos ocupamos de decidir cómo hablar sobre fenómenos pertinentes, es decir, cómo usar las palabras centrales, tales como “aprendizaje” y “matemáticas”. En el segundo módulo, tomamos nuestras decisiones sobre la palabra “aprendizaje”. Aparentados con la definición operativa, ya estamos listos para abordar la pregunta de cómo hablar sobre “matemáticas”. Eso es lo que haré en este módulo.

Comienzo recordando nuestra definición de aprendizaje, la cual presenté en el segundo módulo después de haber declarado que seguiría la línea participacionista. La definición que elegí es esta: aprendizaje es el proceso de cambiar nuestras maneras regulares² de hacer cosas. Estas maneras regulares es lo que cambia cuando aprendemos. El tipo de aprendizaje más apreciado en nuestra sociedad es el que acerca nuestras maneras individuales de actuar a lo que hacen las personas con más experiencia que nosotros para alcanzar resultados deseados. Así que, las maneras regulares mejor valoradas son las que han sido desarrolladas a lo largo de la historia y prevalecen ahora en una sociedad. Estas maneras de actuar recurrentes e históricamente establecidas las denomino **actividades**. Entre las actividades que evolucionaron a través de generaciones antes de alcanzar su forma actual, y que ahora son aprendidas por casi cualquier miembro de la sociedad, están: cocinar, vestirse, hablar, ejercitarse, dibujar y muchas, muchas más.

Para resumir, en esta unidad estamos interesados en el aprendizaje a través del cual el aprendiz se convierte en un participante de una actividad históricamente desarrollada. Los colegios son instituciones creadas especialmente para promover este tipo de aprendizaje.

¹ Traducción del audio de la presentación que hace Anna Sfard en <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/anna-sfard-unit>. La charla se enmarca en *ICMI Awardees Multimedia Online Resources (AMOR)*, proyecto cuyo objetivo es construir recursos en línea que reflejen una investigación altamente significativa e influyente en educación matemática a nivel internacional. Traducción realizada por Patricia Perry.

² Traduzco *patterned ways* con la expresión “maneras regulares”, donde con el adjetivo “regular”, de acuerdo con el DRAE, quiero decir “ajustado a una regla y conforme a ella”, “uniforme”. Sea esta una oportunidad para llamar la atención sobre la definición que da el DRAE para el vocablo “patrón”. De las once entradas, solo la octava (“m. Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual.”) alude a algo cercano a la primera entrada que tiene el término “*pattern*” en, por ejemplo, *Colliers Dictionary*: “A *pattern* is the repeated or regular way in which something happens or is done”. [N.T.]

La pregunta que ha de formularse ahora es: ¿cuál es esa actividad históricamente desarrollada en la que tratamos de participar cuando aprendemos matemáticas?

Para hallar una respuesta, comencé la búsqueda en bibliotecas y en la red. He aquí lo que encontré. Se describen las matemáticas como: espejo de la realidad, espejo de la verdad, ciencia de patrones, descriptor del universo, sistema hipotético, aspecto de la cultura, lenguaje y sistema lógico. Estas descripciones son apenas una parte pequeña pero representativa de todo lo que encontré. Mírenlas de cerca, por favor, y no podrán dejar de notar que no hablan sobre actividad. En efecto, miren esto: universo, espejo, lenguaje, aspecto de la cultura, ciencia, sistema. Ninguna de ellas es actividad. En lugar de procesos, todas mencionan constructos estáticos. Así que, ¿podemos pensar realmente en las matemáticas como una actividad? Y, en caso de que se pueda, ¿qué clase de actividad sería?

Podría decirse que las matemáticas son un tipo de **investigación**. Así como biología es la actividad de hacer investigación en organismos vivos como plantas y animales, y física es la actividad de hacer investigación en objetos materiales, así mismo, matemáticas es la actividad de hacer investigación en objetos matemáticos. Entonces, si se sabe qué es investigación entonces también se sabe qué es matemáticas. Pero ¿podemos decir qué es investigación, de manera suficientemente clara como para que definir matemáticas como investigación llegue a ser útil en... bueno, la investigación? ¿Lo podemos hacer?

Primero, al tratar de decir qué es investigación, tenemos que recordar que la investigación siempre es sobre algo, tiene un foco especial, es investigación en X. Aquí, la X significa un sustantivo que especifica el objeto de la investigación, y este objeto puede ser cualquier cosa. Un objeto físico, como en el caso de la física; un organismo vivo como en biología; pueden ser eventos pasados como en historia; y puede ser un objeto matemático como en el caso de las matemáticas.

Y aquí está mi definición de investigación en X. *Investigación en X es la actividad de construir una teoría de X*. Pero claramente, definir es un proceso recursivo y, dicho esto, tengo que responder la pregunta de qué es una teoría, es decir, qué es esta cosa llamada ‘teoría’.

Ok, entonces mi definición de teoría puede ser: *una teoría de X es un relato sobre X, potencialmente útil*. Pero, entonces, lo siento amigos, otro acertijo semántico: ¿Qué es un relato³? En este punto, incluso quienes han estado observando condescendentemente mi implacable acto definitorio, pueden pensar que esta vez me excedí. Primero, “relato” es realmente una palabra con la que incluso los bebés parecen estar familiarizados. Segundo, ¿qué tiene que ver una cosa tan frívola como relato con una cosa tan seria como teoría?

Pero, por favor, observen más de cerca. Aquí presento tres ejemplos de resultados de investigación. En psicología, se puede contar el relato: “Las experiencias en la niñez de una persona tienen un impacto considerable en su vida futura”. En matemáticas, se puede decir: “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados”. En física se dice: “S es igual a un medio de g multiplicado por el cuadrado de t”. ¿No son relatos esos tres resultados de

³ Traduzco “*story*” con el término “relato”. [N.T.]

investigación? Incluso el de física, que a primera vista parece improbable considerarlo ejemplo de un relato, se convierte en una narrativa una vez la decodificamos y la escribimos en palabras en lugar de símbolos y podemos decir: “La distancia recorrida por un objeto en caída libre es igual a un medio de la constante gravitacional multiplicada por el cuadrado del tiempo del recorrido”. Por supuesto, estas tres proposiciones que están viendo aquí no son relatos completos, son solo puntas de icebergs, el resto de los cuales se puede encontrar en revistas y libros académicos.

Así que, aquí viene mi definición de relato. El término “relato sobre X”, donde X es un sustantivo, se usa para referir a una secuencia coherente de verbalizaciones que, cuando se toman juntas, se puede decir que son ‘sobre X’ (o ‘en X’ o ‘de X’). La cualidad ‘ser sobre’ (en inglés, *aboutness*) significa que X es el objeto gramatical de algunas de las verbalizaciones de la secuencia, y la secuencia entera es consistente y cohesiva.

El término “consistente” dice que no hay contradicción, no hay conflicto lógico, entre las verbalizaciones. El término “cohesiva” indica la presencia de vínculos entre léxico y gramática que mantienen unida la secuencia, es decir, conectan sus verbalizaciones sucesivas temáticamente. La conexión puede ser cronológica, como es el caso cuando las verbalizaciones sucesivas están vinculadas con palabras como ‘antes’, ‘después’ o ‘siguiente’; puede ser lógica, generada por el uso de conectores como ‘por lo tanto’, ‘se sigue’, ‘y’, ‘o’; y puede ser causal, expresándose en la presencia de palabras como ‘porque’. Los usos más actuales del término relato o narrativa implican interconexiones cronológicas de las diferentes partes, y por lo tanto nuestra presente definición conduce a un entendimiento más amplio de este término del que pueden estar acostumbrados algunos de ustedes.

La última pregunta que ha de responderse para considerar que nuestra definición está completa es sobre el término “útil”, que a menudo se reemplaza por el adjetivo ‘verdadero’. Para explicar, he de decir algunas palabras sobre el papel que los relatos cumplen en nuestras vidas.

Desde Aristóteles, a menudo se dice que los humanos nacen narradores. Nuestra propensión a los relatos tiene buenas razones. Además de que contar relatos es nuestro pasatiempo favorito, los relatos cumplen dos papeles centralmente importantes, de hecho, indispensables en nuestras vidas. Primero, son nuestra mejor herramienta para **dar sentido**. En efecto, dar sentido a algo significa combinar todo lo que se sabe en un relato singular sobre este algo –en una secuencia de verbalizaciones que sea consistente y cohesiva– exactamente como se estableció en nuestra definición de relato.

Segundo, los relatos son nuestra herramienta para **decidir sobre cómo actuar**. Se median las propias acciones con relatos cuando, por ejemplo, durante la compra del almuerzo se decide qué comprar sobre la base de lo que se sabe acerca de las clases de comida que son buenas para la propia salud. Los relatos matemáticos, a su vez, pueden mediar la planeación de una nueva casa, como sucede cuando se fundamentan las decisiones en lo aprendido en el colegio sobre formas geométricas.

Las teorías científicas y matemáticas se construyen precisamente con este propósito. Ciertamente, algunas personas median sus acciones con teorías que pueden no contar como científicas a los ojos de cualquier persona, como es el caso cuando uno trata de curarse de una enfermedad con magia y hechizos. Esto solo muestra que cuáles relatos cuentan como útiles es un asunto complejo y depende de los gustos y las elecciones del narrador.

La mención de la utilidad como propiedad requerida de las teorías matemáticas puede evocar alguna duda. Algunos matemáticos pueden compartir la convicción de D.H Hardy, expresada en su libro *A mathematician's apology*, de que sus actividades no tienen nada que ver con “algo útil”. No obstante, la mayoría de matemáticos parecen estar de acuerdo con Andrew Forsyth, quien afirmó que casi cualquier relato matemático en últimas llegará a ser útil, previsto que tengamos la paciencia para esperar un problema que pueda ser resuelto con su ayuda.

La última pregunta que tiene que formularse es “¿qué rasgos debe tener un relato para merecer el nombre de “teoría”. En otras palabras, ¿qué es lo que hace que un relato sea útil como dispositivo para dar sentido y para ser un mediador provechoso de nuestras acciones?

Claramente, en ciencias naturales, para contar como teoría, un relato debe ser no ambiguo, consistente con la experiencia, ampliamente aplicable, y general, es decir, debe presentar regularidades en lugar de casos específicos, y esto es solo el comienzo de una extensa lista de requerimientos.

En matemáticas, por otra parte, al menos en principio, para considerar que un relato es una teoría se necesita consistencia y cohesividad. Dicho esto, los matemáticos también se esfuerzan por que sus teorías sean tan completas como sea posible, creyendo que para cada verbalización sobre X, esta oración o su negación debería hacer parte de la teoría de X.

Y ¿cómo aseguramos que nuestros relatos tienen todos estos rasgos característicos? Rasgos que son necesarios si nuestros relatos han de contar como teorías.

Bien, ello se hace contando los relatos en un discurso especialmente diseñado. La palabra “discurso”, que se definirá ahora de manera operativa, es nuestra herramienta para relatar, herramienta relatora.

Aquí está mi definición: *discurso es una forma de comunicación, un juego comunicacional que define a una comunidad*. La comunidad de un discurso dado la conforman personas que pueden participar en este discurso. Es exactamente lo mismo que con los juegos: la comunidad de, digamos, ajedrez, está conformada por personas que pueden jugar ajedrez.

Es importante recordar que el discurso puede estar en palabras, pero con frecuencia es multimodal. En ocasiones, ocurre en sonidos que no son palabras, en movimiento corporal, gestos, expresiones faciales, imágenes –cualquiera de estos o todos ellos–. El discurso se puede llevar a cabo con otros o con uno mismo. En este último caso la actividad discursiva se denomina **pensamiento**.

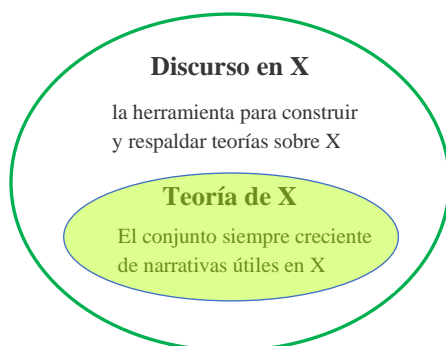
Aquí, surge la siguiente pregunta: ¿cómo podemos distinguir un discurso de otro? Y el hecho es que podemos hacerlo y, por lo regular, de manera fácil. En efecto, imagine que entra a un aula escolar. Nadie le dice qué se aprende ahí, pero después de un tiempo corto usted sabe si está en, digamos, clase de matemáticas o en otra. ¿Cómo averigua esto?

El carácter matemático de la conversación que ocurre en el aula lo señalan una serie de rasgos característicos. El primero y más evidente de ellos son las palabras que se oyen: nombres de números, nombres de funciones, derivada y muchas más. Pero esto no es suficiente. Estas palabras también aparecen en otros discursos. Pero también guían los mediadores visuales característicos, es decir, recursos visuales con los cuales quien habla aclara de qué está hablando. Además, hay relatos, o narrativas, que en el aula se aceptan como útiles (o verdaderos), es decir, están incluidos en la teoría matemática que está siendo desarrollada.

Finalmente, están las rutinas características, ciertas maneras regulares de hacer cosas que se reconocen como matemáticas. Entre ellas, puede haber rutinas para leer notaciones matemáticas y para operar sobre símbolos, para convencer, que aquí se conoce como demostración; rutina para explicar el uso de palabras clave matemáticas, conocida como definir, etc.

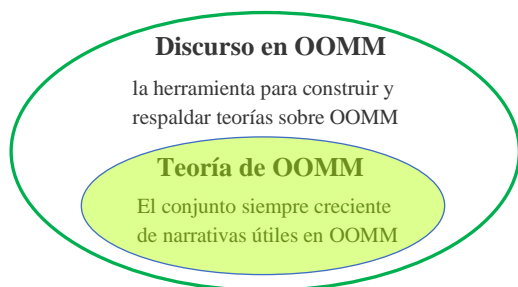
Bueno, casi hemos terminado por hoy. Comencé preguntando qué son las matemáticas y debo terminar con una respuesta. Dije que las matemáticas son un tipo de investigación. Investigación en X, a su vez, es un discurso especial, en el que se desarrolla una teoría de X.

Investigación en X



Ahora, para obtener la definición de matemáticas, todo lo que tenemos que hacer es remplazar X por objetos matemáticos (OOMM, para abreviar).

Investigación en OOMM



Y poner “matemáticas” en lugar de “investigación en OOMM”. Y obtenemos lo siguiente: Matemáticas es un discurso en el que se construyen teorías de objetos matemáticos. Así que, parece que hemos terminado de definir matemáticas.

Matemáticas

Discurso en OOMM

la herramienta para construir y respaldar teorías sobre OOMM

Teoría de OOMM

El conjunto siempre creciente de narrativas útiles en OOMM

Pero, aún no. Hay una pregunta pendiente: ¿qué son esas cosas llamadas objetos matemáticos? Infortunadamente, tengo que mantenerlos en suspenso hasta el siguiente módulo. Los veo allí.