SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES EN ASTRONOMÍA

María Inés Ciancio, Elisa Silvia Oliva, Sol Molina
Universidad Nacional de San Juan- Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Departamento de Geofísica y Astronomía
San Juan. Prov. de San Juan. (Argentina)
mciancio@iinfo.unsj.edu.ar   *eoliva@iinfo.unsj.edu.ar*

RESUMEN

El siguiente trabajo muestra los resultados observados desde la puesta en marcha de una práctica no tradicional, en la cátedra Álgebra Lineal, que se dicta para los alumnos del primer año de las Carreras de Licenciatura en Geofísica y Licenciatura en Astronomía de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan.

Esta actividad está diseñada para lograr en el alumno la transferencia de contenidos específicos de su área de estudio, por solución de problemas de Física, Astronomía General, etc.

En esta propuesta se presenta el trabajo realizado por los alumnos con una situación de Astronomía General: " Sistemas de Referencia Horizontal de Coordenadas Celestes", que será abordado mediante un modelo de Ecuaciones No Lineales, contenido no considerado en la currícula tradicional de Álgebra Lineal.

La apropiación de nuevos términos, conceptos y la búsqueda de técnicas de resolución de Sistemas No Lineales, como también el aprendizaje y uso de nuevos comandos del software seleccionado para dar respuesta al problema , y el análisis , en el contexto de Astronomía General, de la solución obtenida, son algunas de las instancias propuestas en esta experiencia educativa.

INTRODUCCIÓN

Para la solución de problemas científico - tecnológicos, es necesario realizar un modelo matemático a veces, simplificador del problema, pero que para obtener la solución del mismo, necesita de formulaciones simbólicas: planteo de fórmulas, aplicando conceptos de trigonometría plana y esférica; y resolución de gran volumen de cálculos, para hallar el par de coordenadas horizontales de una estrella.

Esta experiencia educativa, muestra el trabajo realizado con alumnos del primer año de las Carreras de Licenciatura en Geofísica y Licenciatura en Astronomía de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan, en la cátedra Álgebra Lineal.

Tomando en cuenta que desde el Álgebra se abordan diferentes situaciones reales, modeladas a través de “sistemas de ecuaciones lineales”, pareció oportuno incorporar como trabajo de investigación y aplicación de resultados un “sistema de ecuaciones no lineal”, en un modelo de posicionamiento de cuerpos celestes. Las fórmulas que permiten pasar de un sistema de referencia a otro, las coordenadas de un cuerpo celeste, vinculan: senos y cosenos, generando un sistema no lineal de ecuaciones trascendentes.

Este tipo de coordenadas, utilizadas para posicionar cuerpos celestes, y la posibilidad de pasar de un sistema a otro sistema referencial, genera un modelo de ecuaciones simultáneas no lineales, el cual bajo ciertos condicionamientos, como el conocimiento previo de algunos datos de partida, permite que se determinen las coordenadas referenciales en un nuevo sistema.

Debe tenerse en cuenta que los métodos para resolver Sistemas de Ecuaciones no lineales, son varios, y cada uno requieren el cumplimiento de ciertas hipótesis que hacen que el tema sea superior en complejidad y de difícil adaptabilidad, por los alumnos que lo deben resolver, por cuanto que los alumnos involucrados en esta experiencia son alumnos que transitan su primer año en la Facultad, lo cual hace que su bagaje de conocimientos matemáticos sean limitados.

En cuanto a las técnicas para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, los métodos gráficos: dan una estimación de la raíz, pero como se plantean fórmulas en 3-D, no son aplicables pues la respuesta obtenible es poco precisa para este sistema.

Entre los métodos analíticos , más eficientes son el algoritmo de punto fijo y el método de Newton Raphson, pero el análisis de hipótesis y su aplicación es imposible de poner en práctica por alumnos que cursan su primer semestre en la universidad, en una carrera de grado.

Otros métodos alternativos son: el de prueba y error, que consiste en elegir un valor del par de coordenadas horizontales y evaluar si satisface el sistema no lineal. Lo cual no sucederá en la mayoría de los casos, ello obliga a repetir el proceso para tratar de determinar una mejor aproximación , que haga que en todas las ecuaciones los residuos sean cercanos a cero. Esta técnica fortuita es ineficiente e inadecuada, por ser un método no sistémico.

El método de sustitución, consiste en despejar una función trigonométrica de una incógnita y reemplazarla en las restantes ecuaciones a fin de reducir el número de incógnitas a determinar, una vez hallada la solución de este sistema con menos ecuaciones, por sustitución regresiva permite completar la determinación de una raíz (par de coordenadas), es un método sencillo, pero se debe tener en cuenta donde se han realizado sustituciones.

IDENTIFICACIÓN DE CONCEPTOS GENERALES

Previamente es necesario que el alumno, identifique:

1- Ecuaciones lineales y Sistemas de Ecuaciones Lineales- Tipos de solución- Métodos de solución.
2- Ecuaciones no lineales, y pueda clasificar dentro de ellas las que corresponden a la tipología de Ecuación Algebraica y Ecuación Trascendente, para poder visualizar la presentación de un modelo no lineal.
3- Sistemas de Ecuaciones No Lineales.
4- Posición de un astro sobre la esfera celeste: Sistema de coordenadas astronómicas.

Metodología de Trabajo

Las actividades desplegadas pueden resumirse en las siguientes etapas

1º Etapa	→	**2º Etapa**	→	**3º Etapa**	→	**4º Etapa**	→	**5º Etapa**
Presentación de enunciados de Aplicaciones a su carrera elegida.		Conocimiento del sistema de coordenadas horizontal y del sistema ecuatorial celeste.		Transformación de coordenadas, entre el sistema horizontal y el sistema ecuatorial celeste.		Aplicación del método de sustitución al sistema no lineal, para convertir coordenadas.		Determinación con el software Maple, del vector solución (par de coordenadas de una estrella)

***Primera Etapa*:**

En el inicio de la actividad, se presenta a los alumnos una vez concluida la unidad de Sistemas de Ecuaciones Lineales, donde se hizo el análisis y aprendizaje de los diferentes métodos de resolución de los mismos, aplicaciones a situaciones reales; en lo posible vinculadas a su especialidad elegida y se trabajan modelos lineales y no lineales de ecuaciones.

Esta tarea de búsqueda de ejemplos de cada área, la realizan como aporte, los ayudantes alumnos de la asignatura que cursan estas carreras.

Así resultó la presentación de los sistemas que se utilizan como “Sistemas Referenciales”, para posicionar cuerpos celestes.

***Segunda Etapa*:**

En esta etapa se trabaja sobre los aspectos teórico-práctico más sobresaliente de estos sistemas de posicionamiento. A continuación se identifican los conceptos a abordar, y se presenta parte del documento elaborado.

- Sistemas de coordenadas astronómicas. Ubicación de un astro en la esfera celeste.
- Sistemas de coordenadas ecuatoriales y Sistema horizontal.

SISTEMAS DE REFERENCIA. COORDENADAS CELESTES

Los sistemas de coordenadas astronómicos celestes, sirven para poder ubicar los astros en la esfera celeste. La esfera celeste es la bóveda que rodea a un observador en la cual se “proyectan” todas las estrellas del firmamento.

Los sistemas se definen precisando planos fundamentales desde donde se miden las coordenadas. Los planos fundamentales intersecan a la esfera celeste definiendo los circuitos máximos.

Cada plano tiene un eje perpendicular que corta a la esfera en dos polos. Se necesita elegir también un punto origen y un sentido para las medidas.

Se pueden realizar conversiones de las coordenadas medidas de un astro en un sistema, a las coordenadas medidas en otro sistema para el mismo astro.

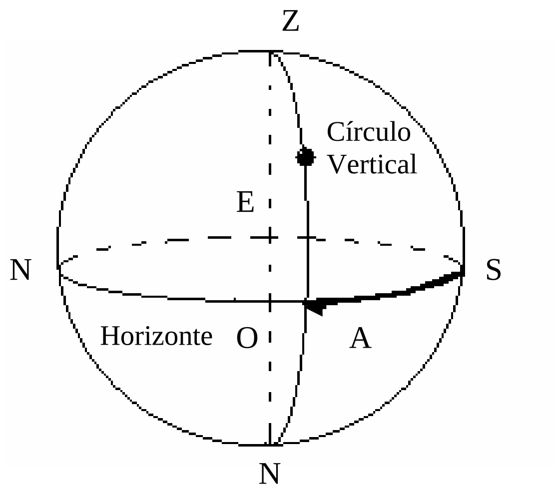
En esto centramos este trabajo, explicando puntualmente el traspaso de las coordenadas del sistema horizontal al ecuatorial. Dichos sistemas referenciales son los más utilizados en el campo de la astronomía.

Previamente se realizará una breve descripción de cada uno de los sistemas.

Sistema Horizontal

Este sistema es considerado el más confiable, pues es el único determinable a partir de medidas directas de alta precisión.

Coordenadas $\begin{cases} A: & \text{azimut} & \text{desde } 0^{\circ} \text{ a } 360^{\circ} \\ h: & \text{altura} & \text{de } 0^{\circ} \text{ a } 90^{\circ} \end{cases}$



El plano fundamental es el horizonte astronómico local. Este sistema considera al observador en el centro de la esfera celeste; y desde el horizonte se miden las coordenadas.

Este sistema es local porque las medidas dependen de la posición del observador en el globo terráqueo. El eje fundamental es la vertical astronómica del lugar, que es una recta perpendicular a la superficie terrestre, en ese lugar, que pasa por el centro de la esfera celeste. Este eje corta a la esfera en dos puntos: zenit **Z** y nadir astronómico **N**

El acimut se mide sobre el horizonte astronómico desde el sur hasta el círculo vertical que pasa por el astro. El círculo vertical es un círculo máximo perpendicular al horizonte, que pasa por el Zenit y el Nadir.

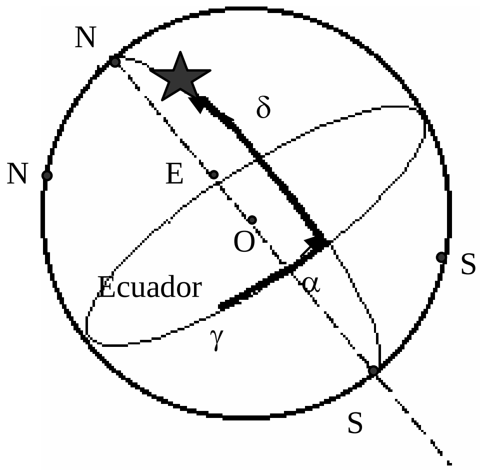
La altura h es el arco medido sobre el círculo vertical de la estrella, desde el horizonte hasta la estrella. Se mide de 0º a 90º positivo si es hacia el zenit, negativo si se mide hacia el nadir.

También se puede utilizar la distancia zenital en vez de la altura, ésta es 90º - h = z , se mide desde el zenit hasta el astro sobre el circulo vertical.

Estas coordenadas se pueden obtener con gran precisión con un teodolito.

Sistema ecuatorial celeste

Este sistema no es local, o sea, que donde sea que, las coordenadas no varían con la ubicación del observador en la esfera terrestre. En los catálogos se usan estas coordenadas, justamente por esta cualidad.



El plano fundamental es el ecuador celeste, que es el ecuador terrestre extendido hasta la esfera celeste. El eje fundamental es el eje polar celeste.

La ascensión recta α, se mide sobre el ecuador celeste desde el punto vernal hasta el círculo horario que pasa por el astro. Se cuenta desde 0º a 360º o de 0h a 24 hs, en el sentido norte-oeste- sur- este (NOSE). El punto vernal es la intersección del ecuador y la eclíptica.

La eclíptica es la órbita aparente que hace el sol en torno a la tierra, tiene una inclinación de 23º 27' con respecto al ecuador terrestre. El círculo horario es un círculo máximo que pasa por los polos.

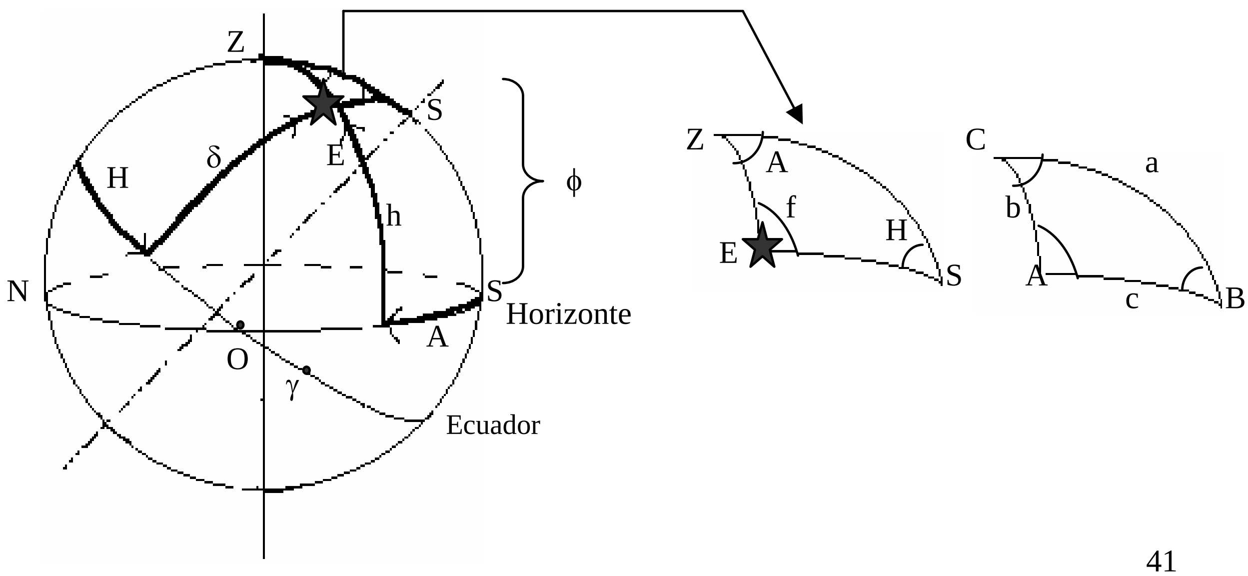
La declinación δ , es el arco sobre el círculo horario, desde el ecuador hasta el astro. Se mide desde 0º a 90º positiva hacia el norte y negativa hacia el sur. Estas coordenadas no varían con la posición del observador, pero si con la época dada que el punto vernal se va moviendo con los años; entonces cuando se dan estas coordenadas se debe especificar para qué fecha están calculadas.

***Tercera Etapa*:**

Acá se propone la "transformación de coordenadas", de un sistema a otro, y donde se utilizan los conceptos básicos de trigonometría plana y esférica que son necesarios para lograr la modelización del sistema de paso, el que resultará en un sistema de ecuaciones. Se presenta parte del documento trabajado:

Transformación de coordenadas

Ahora vamos a superponer los dos sistemas para lograr la transformación de las coordenadas de un sistema a otro. Vamos a tener dos planos fundamentales, el ecuador y el horizonte, y dos ejes fundamentales, la dirección al polo y la dirección al zenit. La inclinación entre los ejes va a depender de la latitud del lugar de observación, esta es el ángulo entre el horizonte celeste y el eje polar.



Determinamos un triángulo esférico formado por el meridiano del lugar, el círculo vertical y el círculo horario. Los lados son:

$$\boxed{a = zc = 90^\circ + \varphi \quad , \quad b = ze = 90^\circ - h \quad , \quad c = se = 90^\circ - \delta}$$

Los ángulos son: A = q = ángulo paraláctico , B = H= ángulo horario , C = A = azimut.

Usando las formas del teorema del Seno, teorema del Coseno y la relación entre ambos, obtenemos el sistema que deberemos resolver.

Teorema del seno

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen} c}}$$

Teorema del coseno

$$\boxed{\cos a = \cos b \ \cos c + \operatorname{sen} b \ \cos c \ \ \cos A}$$

Relación seno por coseno

$$\boxed{\operatorname{sen} c \ \cos b = \cos b \ \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \ \cos a \ \ \cos C}$$

Aplicamos el teorema del Seno al ángulo horario H, y al ángulo Azimutal A, luego usamos el teorema del coseno aplicado al lado que contiene la declinación y por último la relación de coseno por seno la aplicamos al lado que contiene la declinación δ multiplicado por el lado que tiene el ángulo horario H. Así obtenemos las siguientes relaciones, que representan el sistema de ecuaciones que debemos resolver:

$$\frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{sen}(90-\delta)} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(90-\delta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} H \cos\delta = \operatorname{sen} A \cosh}$$

$$\cos(90-\delta) = \cos(90+\phi)\cos(90-h) + \operatorname{sen}(90+\phi)\operatorname{sen}(90-h)\cos A \ \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}\phi - \cos\phi\cos(h)\cos A}$$

$$\operatorname{sen}(90-\delta)\cos(H) = \cos(90-h)\operatorname{sen}(90+\phi) - \operatorname{sen}(90-h)\cos(90+\phi)\cos A \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\delta\cos H = \operatorname{sen}(h)\cos\phi + \cos(h)\operatorname{sen}\phi\cos A}$$

Con esto generamos el siguiente Sistema de Ecuaciones no Lineales:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} H \ \cos\delta = \operatorname{sen} A \ \ \cosh \\ \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(h) \ \ \operatorname{sen}\phi - \cos\phi \ \cos(h) \ \cos A \\ \cos\delta \ \cos H = \operatorname{sen}(h) \ \cos\phi + \cos(h) \ \operatorname{sen}\phi \ \cos A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema planteado, se pueden determinar ciertas coordenadas en función de las otras.

***Cuarta Etapa*:**

En esta etapa, se comienza el análisis del sistema que deberá resolverse para una estrella particular, analizando el tipo de ecuaciones que lo integran , sus características, clasificación y alternativas de solución , para determinar la raíz del sistema : coordenadas del astro en la esfera celeste.

En esta etapa se hace la identificación de los conceptos generales previos.

Ejemplo de Aplicación

Se desea posicionar una estrella en una noche de observación. El catálogo brinda los valores angulares de A, h, ϕ .
Se dispone para la observación de un teodolito que permite ubicar el astro, al cual se deben ingresan las coordenadas de Azimut y altura h.
Para llevar adelante esta tarea , se deben determinar las coordenadas posicionales de la estrella haciendo las transformaciones necesarias.
Los datos encontrados son: A= 331º 55’ 27’’   ,   h= 29º 39’ 30’’ , ϕ = 37º 11’ 13’’

$$\begin{cases} \operatorname{sen} H \ \cos\delta = \operatorname{sen} A \ \ \cosh \\ \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(h) \ \ \operatorname{sen}\phi - \cos\phi \ \cos(h) \ \cos A \\ \cos\delta \ \cos H = \operatorname{sen}(h) \ \cos\phi + \cos(h) \ \operatorname{sen}\phi \ \cos A \end{cases}$$

Entre los métodos para la obtención de la solución del sistema de ecuaciones no lineales, “prueba y error”, sustitución, de punto fijo, Newton - Raphson, etc.

Se elige el método de sustitución, para obtener la solución aproximada del modelo, en forma sistemático, reduciendo el número de ecuaciones tanto como sea posible, despejando una variable en función de otras y eliminando dicha variable sustituyendo en las otras ecuaciones, hasta obtener una solución del sistema.

El método de prueba y error, no se aplica por ser un método inseguro y desordenado en la búsqueda de un vector solución de un sistema no lineal.

Respecto a las otras técnicas listadas, no se realiza su aplicación pues el alumno necesita un mayor cúmulo de conocimientos teóricos (derivación parcial, matriz jacobiana, condicionamiento del sistema, etc.), por cuanto en su formación inicial de grado resultan avanzados para el primer semestre de cursado universitario que están realizando estos alumnos.

***Quinta Etapa*:**

Para determinar los valores numéricos del vector solución, se utiliza el software MAPLE, el cual ya es conocido por el alumno, pues ha realizado una práctica previa en laboratorio de computación. Es un *sistema de cálculo simbólico* (implementa y aplica algoritmos algebraicos, para realizar cálculos con símbolos- que son objetos matemáticos- sin errores de redondeo o truncamiento) , y se puede adaptar a una gran cantidad de computadoras.

El trabajo con software científico, le permite al alumno, obviar la resolución a mano de un gran volumen de cálculos y así poder dedicar tiempo al razonamiento, interpretación de respuestas y discutir las mismas.

PASOS SEGUIDOS EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA, CON USO DE MAPLE

Los valores trabajados con Maple son:

Se ingresan en Maple los ángulos en radianes

```
> h:=Pi*(29+39/60+30/3600)/180:  A:=Pi*(331+55/60+27/3600)/180:
fhi:=Pi*(37+11/60+13/3600)/180:
```

Se calculan los términos independientes del sistema

$$\begin{cases} sen(H1)\ cos(delta) = sen(A)\ \ cos(h) \\ sen(delta) = sen(h)\ \ sen(fhi) - cos(fhi)\ cos(h)\ cos(A) \\ cos(delta)\ cos(H1) = sen(h)\ cos(fhi) + cos(h)\ sen(fhi)\ cos(A) \end{cases}$$

```
> b1:=evalf(cos(h)*sin(A));
```

$$b1 := -.4089820024$$

```
> b2:=evalf(sin(h)*sin(fhi)-cos(h)*cos(fhi)*cos(A));
```

$$b2 := -.3117496495$$

```
> b3:=evalf(sin(h)*cos(fhi)+cos(h)*sin(fhi)*cos(A));
```

$$b3 := .8576397133$$

Se busca la solución del sistema, con el software:

```
>solve({cos(delta)*sin(H1)=b1,sin(delta)=b2,cos(delta)*cos(H1)=b
3});
```

> Nota: El software no devuelve respuesta, porque el sistema es no lineal. Por lo tanto, se plantea la solución por método de sustitución.

```
> delta_radianes:=arcsin(b2);
```

$$delta\_radianes := -.3170338954$$

```
> delta_sexag:=evalf(delta_radianes*180/Pi);
```

$$delta\_sexag := -18.16470416$$

```
>solve({cos(delta_radianes)*sin(H1)=b1,cos(delta_radianes)*cos(H1)=b3})
;
> H1_radianes:=arcsin(b1/cos(delta_radianes));
```

$$H1\_radianes := -.4449723671$$

```
> H1_sexag=evalf(360+H1_radianes*180/Pi);
```

$$H1\_sexag = 334.5049614$$

Las coordenadas de la estrella en el sistema: son (delta, H1) =(-18,16470416º, 334,5049614º)

CONCLUSIONES GENERALES

Al finalizar este trabajo, no tradicional dentro de la cátedra Álgebra Lineal, se pudo observar que:

- Es posible incorporar además de los contenidos tradicionales, el conocimiento y aplicación de nuevos temas que luego abordará en cursos más avanzados, lo cual redunda en fortalecer el bagaje de conocimientos del alumno, promoviendo el aumento en la apropiación de contenidos no tradicionales.
- La propuesta de tareas participativas e integrativas, con el soporte informático adecuado, posibilita a los alumnos desarrollar habilidades y asimilar conocimientos significativos para su futura formación académica.
- La experiencia resulta altamente gratificante, tanto para el docente como para los alumnos, por cuanto se pudo observar una participación activa e integrada, dado que la propuesta de una actividad interdisciplinaria la cual moviliza hacia la apropiación de nuevos contenidos y manejo de nuevas técnicas de resolución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrillo, A.; Llamas, I. (1996). *Maple V. Aplicaciones Matemáticas para PC.* España: Rama.

Burden, R. y Faires, J. D. (1992). Análisis Numérico. (3º Edición) México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Canale,R. y Chapra,S. (2004) Métodos Numéricos para Ingenieros.(4º Edición) México: McGraw Hill.

Garcia, A.; Martinez, A. y Rincón, F. (1995). *Cálculo científico con Maple.* (1º Edición) España: Rama.

Garcia Merayo, F. y Nevot Luna, A. (1992). *Análisis Numérico*. (1º Edición) España: Paraninfo.

Gerald, C. y Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con aplicaciones*. (6ª Edición) México: Pearson.

Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y visualización gráfica con MATLAB.* (1ª Edición) México: Prentice-Hall.

Sociedad andaluza de Educación Matemática THALES- 1997/1998/1999-Revistas Epsilon

Vives, T. J (1971). *Astronomía de posición.* España: Alhambra.