¿A QUÉ DISTANCIA SE ENCUENTRA EL HORIZONTE?

Cintia G. Cianciardo, Alberto Miyara, Marina Morzan, Marisa Piraíno, José A. Semitiel
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario – Argentina
semitiel@fceia.unr.edu.ar

RESUMEN

Este trabajo da a conocer una experiencia didáctica realizada en dos comisiones del Curso Introductorio de Ingreso 2006 a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniera y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, como trabajo de evaluación-aplicación del Curso de Capacitación Docente: "Taller de selección y producción de problemas de matemática: la construcción de modelos matemáticos en el análisis matemático en una variable", dictado por los ingenieros Alberto Miyara y Marisa Piraíno, durante el segundo semestre del 2005 en dicha facultad.

Las nuevas propuestas educativas contemplan como uno de los aspectos más novedosos e importantes dentro de la enseñanza de la matemática la incorporación de la resolución de problemas. Esto plantea fuertes interrogantes: ¿qué se entiende por problema?, ¿para qué introducir la resolución de problemas?, ¿qué problemas sirven a los fines educativos?, ¿cómo trabajar la resolución de problemas en clases de matemática? Justamente estos interrogantes fueron los tratados en el curso de capacitación docente y motivadores para realizar el presente trabajo, el cual consiste en cómo alumnos ingresantes a la universidad abordan el problema siguiente: "¿A qué distancia se encuentra el horizonte?".

Dicho problema, según las categorizaciones de Mayer, es un problema de transformación, es decir, una secuencia de operaciones en las cuales los datos no son explícitos y requiere en determinado momento de una decisión por parte de los alumnos.

Creemos que resolver este tipo de problemas sirven como un puntapié inicial para, de alguna manera, subsanar los requerimientos educativos respecto a la necesidad de incorporar problemas a la enseñanza, donde se observan relativamente pocos avances al respecto.

FUNDAMENTACIÓN

La simbolización de un problema es un aprendizaje constructivo, por lo tanto individual y distinto, en el cual cada uno utiliza sus propias estrategias. La incorporación de nuevas formas de resolución de problemas crea un conflicto con los viejos conocimientos, y por ello se tiende a rechazarlas. Ayudar a desarrollar capacidades y aptitudes en los alumnos para que éstos puedan resolver con éxito situaciones problemáticas de distinta índole es, quizá, uno de nuestros más complicados desafíos.

Dada entonces una situación problemática en particular, el objetivo radica en establecer cómo se la puede caracterizar, con el propósito de intentar modelizarla, cómo se la puede definir en términos de problemas y cómo, encontrada la metodología de la resolución específica, se llega al modelo.

Cuando los problemas que se resuelven son matemáticos o juegos, se tiene la posibilidad de adquirir metodologías de razonamiento permanentes, explicitadas mediante estrategias conducentes a modelizar tales situaciones.

Esto permite aprovechar los mecanismos de resolución y reutilizarlos en nuevas problemáticas. Por lo tanto, resulta de valorable importancia disponer de un gran número de estrategias o saber generarlas, tales que, conocidas y comprendidas las disciplinas implícitas, se intente transferirlas a los efectos de poder hallar solución al problema. En general tales estrategias corresponden más a procedimientos heurísticos (tentativas asistemáticas para acercarse a una solución) que a procedimientos algorítmicos.

Brousseau en su *Teoría de las Situaciones Didácticas*, atribuye un lugar preferencial a la resolución de problemas. En relación con el saber, la didáctica plantea que éste surge a partir de preguntas o problemas a los que el alumno se ve necesitado de dar respuesta, los problemas entonces, se inscriben dentro del proceso de aprendizaje; no al final como una mera aplicación de conocimientos ya adquiridos, no al principio como “motivadores”.

Las situaciones adidácticas son aquellas que apelan a los problemas haciendo que el alumno pueda actuar sobre la situación, hacer elecciones durante la acción, al tiempo que la situación le devuelve información sobre las consecuencias de su accionar. Los problemas se constituyen en instrumentos para la construcción de modelos matemáticos.

Y para que el alumno adquiera esta metodología es necesario que el docente, como mediador pedagógico, esté sólidamente formado, tanto en su disciplina como en los nuevos enfoques didácticos y pedagógicos. Y a través de la implementación en el aula de la resolución de problemas y la descripción de las técnicas más habituales en las mismas, tomando los aportes iniciados por Polya sobre “el hacer” del matemático.

EL PROBLEMA ***“¿A qué distancia se encuentra el horizonte?”***

Trabajamos con este problema en dos comisiones del Curso de Ingreso 2006 de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. El mismo fue uno de los elaborados en el taller de capacitación docente.

Se les entregó a los alumnos el enunciado sin decirles en qué contexto teórico estaba ni qué herramientas utilizar para resolverlo. Se dejó que pensaran solos y que charlaran entre ellos, se anotaron los comentarios que hacían y luego de 20 minutos aproximadamente, sin intervenir en forma alguna, aclaramos dudas, ideas y propusieron distintas estrategias de resolución. Algunas de las primeras reacciones registradas al darles el enunciado del problema fueron:

- “¿Me está cargando?”
- Risas
- “Debe estar en una enciclopedia...”
- “¿Esto es un problema?, ¿dónde están los datos?, ¿de qué tema se trata?”
- “¿Es una pregunta filosófica?”

Este trabajo consiste en un registro de las distintas ideas de resolución puestas en juego por los alumnos, los aciertos y los errores frente a este problema.

A continuación presentamos, tomando como base el problema como objeto de una ingeniería didáctica, los análisis a priori y a posteriori.

ANÁLISIS A PRIORI

- ¿Qué significa horizonte?
- ¿Cuáles son los datos del problema?
- ¿Se trata de un problema semiinmediato, de elaboración, de decisión, de investigación,…?
- ¿Qué objeciones se pueden hacer al enunciado?
- ¿Qué conceptos trigonométricos intervienen?

Las primeras preguntas y discusiones que surgieron entre ellos fueron qué es el horizonte y para qué se necesita saber su concepto para la resolución del problema.

Al trabajar en forma grupal surgió un debate que fuimos coordinando y guiando sobre esto último y algunas de las ideas y conclusiones obtenidas fueron:

- "Es una constante, ¿cómo se expresa?, o sea…, tanto más te acercas más se aleja"
- "La distancia es infinita"
- "La vista normal es 15km, lo que dice la radio"
- "El horizonte es imaginario"
- "Yo veo, desde donde estoy parado hasta donde baja la tierra, a partir de ahí no veo más"
- "Depende de la altura de la persona…"
- "… entonces la tierra tiene algo que ver…, ah!, el radio…"
- "¿Hay un triángulo rectángulo?..., ¡pero entonces depende de mi altura!"
- "Tenés una altura (la mía), una base (la tierra) y podes formar la hipotenusa"
- "¿El triángulo que se forma es isósceles?"
- "¿Viene *m*, *dam* y *km*?"
- "¿Un kilómetro cuántos metros son?"

El dato sobre el radio de la tierra se los facilitamos sólo cuando ellos mismos notaron la necesidad de utilizarlo para el cálculo de dicha distancia.

Luego de terminar esta actividad, analizamos las estrategias de resolución y las agrupamos en las siguientes categorías:

- Por medio del Teorema de Pitágoras: 49 alumnos
- Por medio de razones trigonométricas: 5 alumnos
- No lo resuelven: 3 alumnos

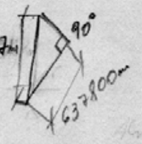
Algunas resoluciones destacadas fueron:

¿A qué distancia se encuentra el horizonte?

$h = 1,7\ m$

$r_t = 6378000\ m$

6378001,7 m



$\cos\alpha = \dfrac{6378000\ m}{6378001,7\ m}$

$\cos\alpha = 0,9\ldots = 0,0418$

2' 30''

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x\ Km}{6378001,7\ m}$

$\operatorname{sen}\alpha \cdot 6378001,7\ m = x$

$0,00072722 \cdot 6378001,7 = x$

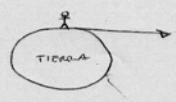
$4638,213\ m = x$

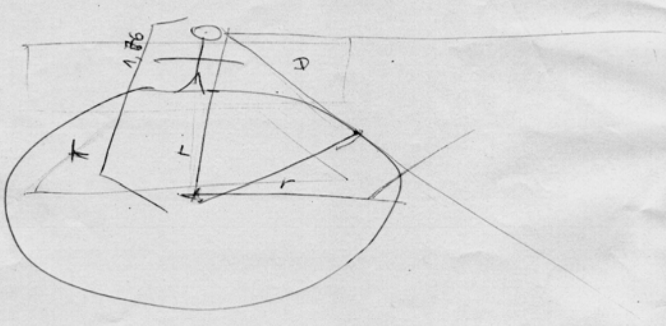
$\boxed{4,638\ Km}$

PROBLEMA DEL HORIZONTE

¿A qué distancia se encuentra el horizonte?

Faltaría especificar cuánto mide el radio terrestre





$r = 6378\ Km = 6378000\ m$

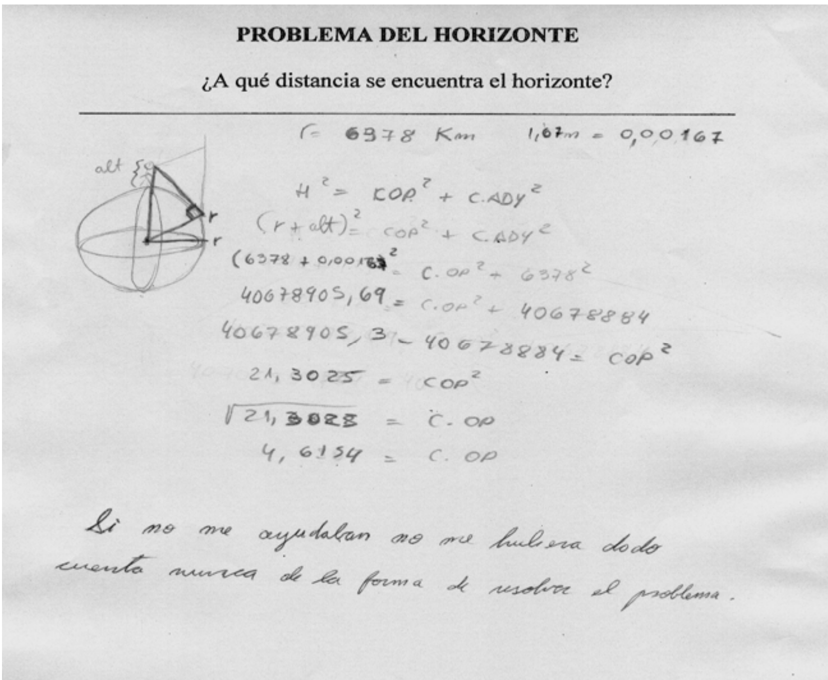
$T = 6378001,76\ m$

$r^2 + D^2 = T^2$

$D^2 = T^2 - r^2$

$D^2 = 22.450,6\ m$

$\boxed{D = 4,733206412\ Km}$



PROBLEMA DEL HORIZONTE

¿A qué distancia se encuentra el horizonte?

r= 6378 Km   1,67m = 0,00167

$H^2 = C.OP^2 + C.ADY^2$

$(r+alt)^2 = C.OP^2 + C.ADY^2$

$(6378 + 0{,}00167)^2 = C.OP^2 + 6378^2$

$40678905{,}69 = C.OP^2 + 40678884$

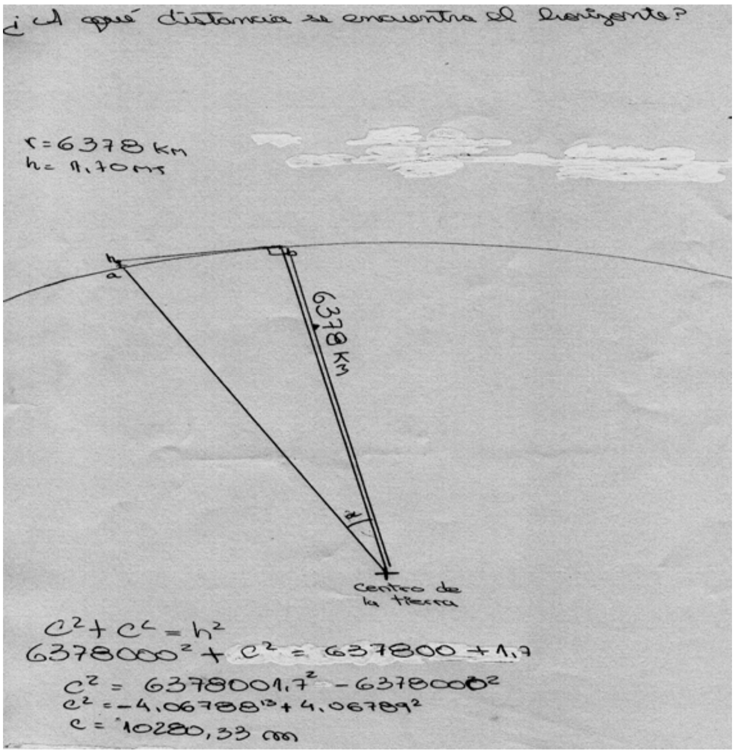
$40678905{,}3 - 40678884 = C.OP^2$

$21{,}3025 = C.OP^2$

$\sqrt{21{,}3025} = C.OP$

$4{,}6154 = C.OP$

Si no me ayudaban no me hubiera dado cuenta nunca de la forma de resolver el problema.



¿A qué distancia se encuentra el horizonte?

r=6378 km
h= 1,70 mts

$C^2 + C^2 = h^2$

$6378000^2 + C^2 = 637800 + 1{,}7$

$C^2 = 6378001{,}7^2 - 6378000^2$

$C^2 = -4{,}06788^{13} + 4{,}06789^2$

$C = 10280{,}33$ m

Luego, se les pidió que escriban las objeciones que le podían hacer al enunciado y entre las más destacadas pudimos observar:

- “El problema del enunciado es que da por sentado que el lector sabe cuál es el radio de la tierra y no da indicaciones sobre la altura de la persona a la cual debemos considerar”
- “La pregunta es muy genérica...”
- “Yo pondría: ¿A qué distancia se encuentra el horizonte sabiendo que el radio de la tierra es de 6378km?, ya que se podría resolver con mayor facilidad y uno darse cuenta del planteo fácilmente”
- “Ninguna, porque al tener el radio de la tierra se puede resolver”
- “Al enunciado le faltaron datos que hubiesen facilitado la resolución del problema”
- “No se entiende por falta de datos”
- “Creo que el enunciado es muy escaso, pero lo cual no significa que esté incompleto”

ANÁLISIS A POSTERIORI

De acuerdo a la experiencia realizada con las dos comisiones, pudimos observar:

- Desorientación ante la palabra horizonte, pero inmediata necesidad de aclarar su significado
- Dificultad en el manejo de unidades
- Falta de interpretación geométrica del problema
- Curiosidad e interés para llegar a obtener un resultado

Por último, se les pidió, que hagan comentarios con respecto al problema trabajado. Los más sobresalidos fueron:

- “Está bueno hacer estos tipos de problemas, donde se puede razonar y no hacer los ejercicios básicos. También se presta para dialogar y discutir el ejercicio y eso ayuda para el crecimiento grupal”
- “Es un ejercicio interesante ya que se debe utilizar algo muy simple (Pitágoras) para determinar algo que parece ser difícil. Además, el horizonte se modifica dependiendo de la altura de la persona, lo cual lo hace muy diferente entre las personas. Se debe tener creatividad para sacar algo así y aunque al principio parece complicado, es bastante sencillo”

- “El problema al principio parecía difícil por no aportar datos pero una vez que se piensa mas allá de los datos es fácil”
- “Es muy interesante conocer este tipo de datos, son preguntas que uno siempre se hace y no puede responder, -¿a qué distancia se encuentra el horizonte?-, -No sé, lejos…-, es muy bueno saber que existe esta distancia y es calculable”
- “No pueden poner un problema de esta índole a alguien que solo le enseñaron matemática contable”
- “Me pareció muy bueno el problema. No lo hubiera hecho sin alguna ayuda. Esta bien aparte porque aprendí algo que no sabía y es interesante”
- “Me pareció algo ilógico al principio pero resultó ser interesante ya que nunca me lo había preguntado y me sirvió para conocer algo más”
- “El problema en sí no necesita un gran conocimiento matemático para su resolución, aunque a simple vista parece difícil. Sin ayuda me hubiese llevado mas tiempo, pero creo que lo hubiese podido resolver”
- “No pensé que era un problema de matemática”
- “No se me ocurriría que era un problema matemático, ya que me parecía casi imposible saber dicha distancia. Una vez que me dieron el radio de la tierra, ahí si supe que se formaba el triángulo rectángulo con la ayuda del gráfico que me parece un mecanismo muy útil para darse cuenta de muchas cosas”
- “Es un problema muy ingenioso que te hace pensar porque parte de un enunciado sin números”
- “No estoy acostumbrado a hacer estos tipos de problemas, estaría bueno hacerlos para distracción”
- “Fue un ejercicio muy bueno para el razonamiento”
- “No es típico porque el planteo hay que hacerlo con gráficos”

CONCLUSIONES

Tal como se señaló en la fundamentación, creemos que los problemas ayudan a comprender el carácter dinámico de la matemática, favorecen el pasaje de una actitud pasiva a otra de actividad creativa, estimulan el pensamiento independiente provocando satisfacción por el logro obtenido y permiten realizar intercambio de interpretación de enunciados y estrategias de solución.

Una buena secuencia en estas estrategias puede ser el comenzar estimulando hacia una actitud abierta y flexible ante situaciones problemáticas. Una segunda puede ser contemplar diversas situaciones o alternativas.

Normalmente todos los problemas son poliédricos y, por tanto, admiten diversas interpretaciones. En esta línea hay que progresar en las formas de ver una situación, concebir ideas originales y ser conciente de las dificultades que se pueden encontrar. Aplazamientos de decisiones, discusiones, lluvia de ideas, etc., pueden ayudar en el proceso. No pocas veces y en diversidad de situaciones no se resuelven los problemas satisfactoriamente por falta de estrategia. En cuanto a la resolución de este problema se refiere, una parte importante de los errores cometidos fueron las dificultades de comprensión lectora. La tendencia de operar todos los datos presentados, venga o no a cuento, certifica esta falta de comprensión global. Por otra parte, los alumnos resuelven mejor los problemas si alguien se los lee que si los lee el mismo. Ello constituye un error pedagógico muy frecuente, porque cuanto más facilitemos los adultos el aprendizaje, menor será el esfuerzo del joven por aprender y por tanto menor será el aprendizaje.

Por medio de este problema, notamos además la resistencia que ejercieron los alumnos ante un enunciado que les exigía una cierta toma de decisiones y una modelización no convencional. A muchos de ellos, también, no les pareció un problema de índole matemático. Esto hace referencia, a nuestro parecer, al escaso tratamiento que se le da en la escuela media a la enseñanza por medio de la resolución de problemas.

Al respecto, George Polya afirma: *"La solución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles, el alumno aprende a perseverar pese a los fracasos, a apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial, a hacer un llamado a toda su fuerza de concentración"* y agrega que: *"Resolver problemas es una meta específica de la inteligencia y la inteligencia es, por excelencia, el don específico de los seres humanos"*. Sin embargo, a través del intercambio de ideas por parte de los alumnos, se comenzaron a desarrollar estrategias en conjunto y se creó un ambiente de entusiasmo y discusión. Creemos que cuando los estudiantes desarrollan estrategias cooperativas, fomentan el gusto por el cambio de información y por coordinar los esfuerzos, se hacen más permeables a las ideas de los demás, facilitan la división de tareas, y se promueven colaboraciones más heterogéneas y de mayor calidad. El trabajo en el aula en forma cooperativa es un tiempo privilegiado para la comunicación, y la búsqueda conjunta del conocimiento y del aprendizaje.

Algo a destacar también fue la confusión entre el concepto de "problema" y "ejercicio" por parte de los alumnos. Hay una diferencia básica entre ellos; no es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Una cosa es aplicar un algoritmo de forma más o menos mecánica, evitando las dificultades que introduce la aplicación de reglas cada vez más complejas, y otra, resolver un problema, dar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto.

En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que «las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones». Esto último, fue motivo de sorpresa por parte de los alumnos cuando notaron que al variar la altura de la persona, cambiaba la distancia al horizonte y por lo tanto la respuesta no era única, sino que depende de la altura que tomemos.

Por último, y para justificar de alguna manera lo que nos motivó al desarrollo del presente trabajo, adherimos a las palabras de Miguel de Guzmán (1984):

> *"…lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas".*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (1995). I*ngeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
Gil Pérez, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial Popular.
Hofstadter, D. (1999). *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* USA: Basic Books.
Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.