# UN ANÁLISIS DE RAZONAMIENTOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN GRUPAL DE UNA DEMOSTRACIÓN

*Ferrero, María Martha, Ferraris, Cristina*
*Centro Regional Universitario Bariloche.*
*Universidad Nacional del Comahue. Argentina*
*mferrero@crub.uncoma.edu.ar*

**RESUMEN**
Las dificultades y logros por los que atraviesan tantos alumnos para llegar a concretar una demostración es la preocupación que nos lleva a profundizar en el estudio de los procedimientos y operaciones mentales involucrados en el *proceso* de aprendizaje de la demostración y no sólo en el *producto* final. Una de las actividades diseñadas en el marco del Proyecto de Investigación consistió en el registro etnográfico de la interacción en pequeños grupos durante la resolución de una tarea en clase, correspondiente a la materia Geometría Euclídea del Plano del Profesorado en Matemática. En este trabajo se examina el proceso de resolución de problemas a partir de las fases de Polya por las que transitaría un resolutor ideal, pero teniendo en cuenta que estamos trabajando con sujetos reales actuando grupalmente, para nosotros no hay fases perfectas. Concebiremos dichas fases como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución, pudiendo darse la ocurrencia simultánea de fases distintas atendiendo a los aportes e intercambios de distintos integrantes. Se analizan también otros componentes del proceso *contenido matemático, métodos de demostración*, *tipos de prueba* y *heurísticas*.

## INTRODUCCIÓN

Un hecho muy conocido para quienes se relacionan con el quehacer matemático es que la presentación de una demostración refleja la mayoría de las veces sólo una pequeña parte de la actividad cognitiva llevada a cabo, dado que el encadenamiento desde las premisas a la conclusión se muestra como producto, de manera lineal y lógica, sin rastros de las bifurcaciones, lagunas, titubeos, contramarchas o súbita inspiración por las cuales derivaron los pensamientos de quien ha logrado “la demostración”.

En general, estamos acostumbrados a lidiar con el producto final “demostración” comunicado en las clases o en los libros de manera inequívoca dentro de un sistema lógico-axiomático y a presentar nuestras propias demostraciones dentro del mismo sistema, ocultando los vericuetos seguidos por nuestra mente.

Nosotros como docentes, nos enfrentamos con mayor frecuencia a la producción escrita (y final) de los alumnos, muchas veces con el agregado de darle una calificación. Claro está que estos productos pueden diferir enormemente de lo aceptable como demostración dentro de la comunidad matemática, pero muchas veces no carecen de rasgos esenciales de actividad matemática. De hecho, las dificultades y logros por los que atraviesan tantos alumnos para llegar a concretar una demostración es la preocupación que nos lleva a profundizar en el estudio de los procedimientos y operaciones mentales involucrados en el *proceso* de aprendizaje de la demostración y no sólo en el *producto* final.

En el marco de los proyectos de investigación “La demostración en Geometría en la formación de profesores” (2002-2005) y “Aprendizaje de la Demostración en Geometría” (2005 y continúa), trabajamos bajo la hipótesis de que una manera eficiente de contribuir al mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, es el aportar elementos que enriquezcan la formación de los docentes, especialmente en el sentido de profundizar los procedimientos del método matemático. Es por eso que hemos considerado investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de profesorado de matemática enfocando a la demostración en Geometría, como una expresión del quehacer matemático.

Hemos elegido como dominio de conocimiento la Geometría Euclídea, dado el papel protagónico que esta disciplina ha tenido en el desarrollo de la demostración como contenido matemático, y porque aporta abundante material a la formación de los futuros docentes, propiciando el trabajo de contenidos procedimentales propios del quehacer matemático y muy especialmente en demostraciones.

Una de las actividades diseñadas para recoger información destinada a mejorar la comprensión de los procesos involucrados en actividades relacionadas con la demostración, consistió en el registro etnográfico de la interacción en pequeños grupos durante la resolución de una tarea en clase, correspondiente a la materia Geometría Euclídea del Plano del Profesorado en Matemática.

En esta materia, la metodología de trabajo habitual consiste en la introducción teórica de los temas a tratar, con participación de los alumnos en algunas discusiones sobre temas de interés (definiciones, orden de los conceptos tratados, axiomas, discusión de ejemplos, etc.) y luego se resuelven problemas propuestos en una guía de trabajos.

Para la resolución de problemas se estimula la formación de grupos, de modo de fomentar el intercambio de información y la comparación de procedimientos. El equipo de cátedra interviene intentando propiciar elementos hacia la autorregulación del aprendizaje por parte de los alumnos al ejercer un monitoreo de la actividad, esto es, mediante la observación de las ocurrencias, pasos que se van dando y soluciones que se van obteniendo se ofrece información que permite la toma de decisiones. El monitoreo realizado por el docente precede a la regulación, a la cual entendemos como la simple aplicación de correctivos

El episodio registrado siguió la modalidad de trabajo de uso frecuente en las clases prácticas de la cátedra implicada, difiriendo de una clase común en la presencia de las observadoras y en el requerimiento de dar finalización y entregar por escrito y en forma individual la resolución alcanzada.

## DISEÑO DEL TEST APLICADO

Atendiendo a los objetivos específicos del proyecto de investigación, a saber:

- establecer indicadores de la presencia de contenidos matemáticos implícitos o explícitos en una argumentación y de la utilización de métodos de demostración
- analizar los rasgos heurísticos presentes en situaciones de validación
- examinar las interrelaciones entre los distintos componentes de aprender a demostrar.

se pensó en una actividad que, sobre la base de un problema seleccionado de la guía de trabajos prácticos, reuniera las características de asequibilidad y potencialidad. La primera presupone que el problema se corresponde con el desarrollo intelectual de los estudiantes, esto es, consideramos que la situación planteada es acorde a los contenidos matemáticos desarrollados en las clases teóricas, no es trivial y los estudiantes están en condiciones de superar las dificultades que ofrece. La segunda característica fue ponderada en relación a la riqueza de conexiones entre conceptos relacionados al problema y mediante la anticipación de distintos modos de abordar la tarea y lograr el cometido.

El problema seleccionado fue presentado a los alumnos con el siguiente enunciado: *Demostrar que si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, es un paralelogramo.*

## APLICACIÓN DEL TEST

La resolución de la tarea se planteó durante el desarrollo de una clase práctica de la materia Geometría Euclídea del Plano y constituye la segunda instancia diseñada en el proyecto de investigación para recabar datos, tanto el test que le precede como el que le sigue son individuales.
Los nueve alumnos presentes se dividieron en dos subgrupos sin imponerse ningún criterio externo para la conformación de los grupos. Las integrantes del equipo de investigación actuaron como observadoras (2 por cada grupo) y la profesora a cargo de la cátedra realizó su actividad habitual como docente, iniciando con la entrega por escrito del enunciado del problema y la consideración especial de la consigna: discutir hacia el interior del propio grupo (sin interacciones entre distintos grupos) y realizar la presentación del problema resuelto en forma individual.

La clase se desarrolló en un clima de trabajo y la situación no prevista que se presentó fue que dos alumnas llegaron tarde. Se solucionó desde el punto de vista operativo de la investigación solicitándoles que realizaran la actividad conjuntamente y entregaran su producción, pero no se realizó observación de las interacciones de dicho par.

## PRIMEROS RESULTADOS Y ALGUNAS DECISIONES RELATIVAS AL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Una lectura preliminar de los registros obtenidos nos permite afirmar que la elección del problema propuesto fue adecuada en cuanto permitió la participación de todos los alumnos, revelándose como suficientemente rico en contenidos matemáticos (conceptuales y procedimentales) evocados por los alumnos, manifestándose el empleo de heurísticas, argumentaciones, situaciones de validación y la aparición de tres formas pertinentes de encarar la demostración en las presentaciones individuales y el esbozo de una cuarta demostración posible en el término de una de las discusiones observadas, cuyo seguimiento fue abandonado en favor de una idea considerada más productiva.

Estas consideraciones previas a un análisis más exhaustivo, nos permiten valorar la toma del test no sólo como fuente de datos sino también como una instancia de aprendizaje para los alumnos participantes.

Según el Modelo Teórico (Siñeriz y Ferraris. 2005) sobre el que desarrollamos nuestra investigación, son siete las componentes que decidimos tener en cuenta para el análisis de los procesos de aprendizaje de la demostración: *concepciones*, *contenido matemático, métodos de demostración*, *lenguaje*, *niveles de razonamiento*, *tipos de prueba* y *heurísticas*.

El material recogido (dos observaciones grupales y once producciones individuales) presenta un alto grado de complejidad y nos encontramos ante la necesidad de acotar los aspectos implicados, intentando priorizar aquellos que a nuestro criterio resultan más relevantes a los objetivos de la investigación.

Para este trabajo entonces, consideraremos sólo uno de los registros etnográficos al interior de un grupo y las producciones escritas de los miembros de dicho grupo a quienes identificaremos con las siglas de sus nombres y apellidos (LS, LC, JP, VF, AM).

## SOBRE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De acuerdo a Puig y Cerdán (1988) "el *proceso de resolución de un problema* es la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene adelante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea. Dar por acabada la tarea no quiere decir que el resolutor haya encontrado la solución del problema, sino que para él la situación ha dejado de ser problemática porque la ha dotado de sentido".

En los trabajos de Polya (1945) reconocemos el intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal y competente, presentando el proceso de resolución de un problema en cuatro fases bien definidas:

**Comprender el problema**

*¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?*

**Concebir un plan**

*¿Se ha encontrado con un problema semejante?*
*¿Conoce un problema relacionado con éste?*
*¿Podría enunciar el problema de otra forma?*
*¿Ha empleado todos los datos?*

**Ejecutar el plan**

*¿Son correctos los pasos dados?*

Examinaremos el proceso de resolución de problemas a partir de estas fases por las que transitaría un resolutor ideal, pero a diferencia de G. Polya y puesto que estamos trabajando con sujetos reales actuando grupalmente, para nosotros no habrá fases perfectas. Concebiremos dichas fases como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución, pudiendo darse la ocurrencia simultánea de fases distintas atendiendo a los aportes e intercambios de distintos integrantes.

Además tendremos en cuenta que al resolver un problema, no se resuelve un único problema sino una serie de problemas generados por un método o por la aplicación de herramientas heurísticas. Entonces las fases del proceso ya no sólo deben pensarse respecto al problema original sino también respecto al problema del espacio que se está abordando.

## ANÁLISIS DEL EPISODIO OBSERVADO

El grupo de alumnos no ha recibido entrenamiento específico en la utilización de las sugerencias heurísticas de Polya como parte de un método. La enseñanza de la demostración en clase se efectiviza en la realización de demostraciones con especial cuidado en la fundamentación de las implicaciones y en la provisión de consejos que se pueden tener en cuenta para realizar una demostración. Sin embargo, como se describe a continuación, la resolución de la tarea muestra que el desarrollo de estas fases se ha dado “en forma natural”.

La primera fase “Comprender el problema” resulta lineal y previa al resto de las fases, pero el aporte de ideas para “Concebir el plan” nos muestra una gran diversidad de posibles inicios con esbozos de planes que se bifurcan en el desarrollo de la “Ejecución del plan”:

En favor de una descripción que permita transitar por el desarrollo de estos intentos, la primera fase se describe en común a todos ellos, para luego analizar las fases siguientes de cada intento por separado en un cuadro. Para mantener una idea de la intercalación y superposición existente entre ellos se numeraron en el registro etnográfico (ver Anexo) cada una de las intervenciones, estos números se transcriben en el cuadro de análisis de los distintos intentos, el salto entre numeración permitirá al lector obtener una idea de las idas y venidas.

**FASE I:**
El grupo asume el problema como tal, es decir, como desafío a sus habilidades cognitivas y en esta fase realizan aportes los 5 miembros. El primer párrafo de la observación da cuenta de que comienzan leyendo cada uno por separado, antes de iniciar los intercambios registrados. Debemos referirnos entonces a dos dimensiones en el tratamiento del problema: la personal y la compartida. La primera se ve registrada en las producciones individuales o en comentarios en la observación (silencios, acciones de dibujar o leer) y constituye un aporte extra al registro etnográfico.
Fueron acciones personales en esta fase: lectura del enunciado, realización de un dibujo e introducción de notación adecuada. La lectura del enunciado fue inmediatamente incorporada a la discusión grupal por una de los alumnos y también se discutieron condiciones generales del dibujo, pero en todo momento la notación fue personal y no se registraron negociaciones al respecto (si bien no es uniforme el uso de los nombres dados a puntos y rectas, todas responden al formato establecido en clase de acuerdo con la corriente conjuntista: puntos con minúscula y rectas con mayúscula).

<u>Intercambios registrados durante la fase de comprensión</u>:

Con respecto al dibujo:

2 L: Hagan una figura, como hace V. siempre.
4 LC: ¿Te hiciste la figura para ver?
5 A. Sí.
7 AM: Hice dos rectas paralelas.
8 VF: Pero estás poniendo... (*más cosas de lo que dice el enunciado*). Tenés que dibujar un cuadrilátero.
9 AM: Pero puede ser un cuadradito o un paralelogramo.
10 JP: El dibujo tiene que ser como si no fuera un paralelogramo, como que no sabemos qué es.
11 AM: Podría ser un trapecio.

Con respecto a los datos (y teniendo en cuenta el dibujo)

6 LC: La hipótesis.
12 LS: ¿Qué tengo? ¿Qué es un cuadrilátero? ...
13 LC: Y que los lados son paralelos .

14 AM: Son congruentes. Entonces lo estoy haciendo mal esto de extenderlo. Ah, puede ser por absurdo.

15 VF: Y si lo hacemos por absurdo? (a LC) Negamos que sea paralelogramo y llegamos a que el lado no es congruente.

Con respecto a otros conceptos involucrados en el enunciado

3 AM: ¿Paralelogramo era dos pares de lados opuestos paralelos? ¡la hipótesis!

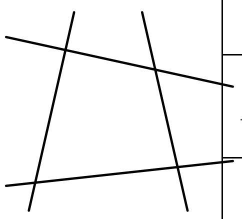
**FASES II, III y IV**

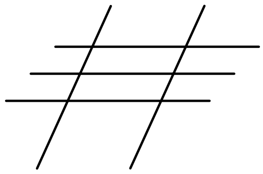
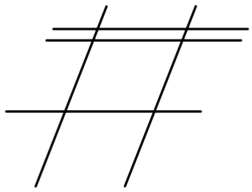
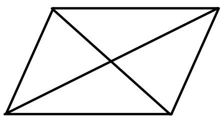
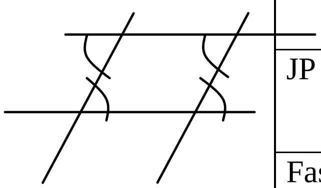
Esta etapa se caracteriza por el aporte de distintos modos de encarar el problema (Fase II), la ejecución de acciones (Fase III) que permitan tomar la decisión de abandonar el camino o que concluyen en la tesis (Fase IV).

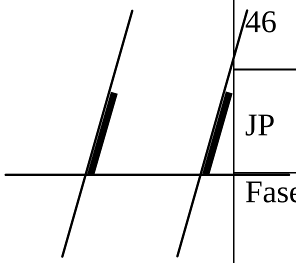
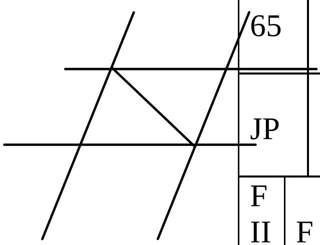
Los aportes consignados guardan como rasgo común que el problema ha sufrido una primera transformación a partir de la actualización de la definición de paralelogramo, que denota el uso de una herramienta heurística pertinente en esta situación. Los intentos propuestos se refieren a mostrar que el otro par de lados opuestos del cuadrilátero son también paralelos.

Encontramos dos vertientes que dan origen a las sugerencias aportadas: la consideración del dibujo y la memoria de problemas similares o de conceptos y propiedades relacionadas con el problema. Al respecto nos dice Delgado Rubí (2001) que memoria y dibujo están relacionados: *La imagen geométrica funciona en muchas ocasiones como el umbral para que el sujeto acceda al concepto, lo que lo relaciona con los mecanismos de la memoria.*

La aparición de la sugerencia de utilizar el método “por absurdo” muestra que también esa sugerencia se produjo por el intento de no incluir en el dibujo características particulares de la figura paralelogramo.

<table>
<tr><th>Dibujo guía</th><th colspan="8">Intervenciones y fases</th><th>Breve análisis</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>14</td><td>15</td><td>41</td><td>42</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td><td rowspan="3">① <u>Por absurdo</u><br>A partir del dibujo, es descartada porque la negación de “ser paralelogramo” no aporta información operativa.</td></tr>
<tr><td>AM</td><td>VF</td><td>VF</td><td>LS</td><td>VF</td><td>VF</td><td>JP</td><td>AM</td></tr>
<tr><td colspan="4">F II</td><td colspan="2">F III</td><td colspan="2">F IV</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr>
<tr><td>LC</td><td>VF</td><td>JP</td><td>LS</td><td>JP</td><td>VF</td></tr>
<tr><td colspan="4">F II</td><td>FIII</td><td>F IV</td></tr>
</table>
</td>
<td>② <u>Por simetría axial</u><br>El eje seleccionado posee el atributo relevante de dividir a la figura en partes congruentes pero falla perpendicularidad de puntos homólogos.<br>Se descarta.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>16</td><td>24</td><td>25</td><td>27</td><td>44</td></tr>
<tr><td>JP</td><td>JP</td><td>LS</td><td>JP</td><td>JP</td></tr>
<tr><td colspan="5">Fase II</td></tr>
</table>
</td>
<td>③ <u>Por unicidad de la paralela por un punto exterior</u><br>Se abandona.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>26</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>39</td></tr>
<tr><td>LC</td><td>AM</td><td>VF</td><td>LC</td><td>LS</td><td>VF</td><td>LS</td><td>VF</td><td>AM</td></tr>
<tr><td colspan="9">Fase II</td></tr>
<tr><td>40</td><td>43</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>64</td><td>74</td><td>75</td><td></td></tr>
<tr><td>LC</td><td>AM</td><td>LS</td><td>JP</td><td>LC</td><td>vs</td><td>C</td><td>AM</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">continúa F II</td><td colspan="2">monitoreo docente</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>④ <u>Por simetría central</u><br>No avanzan al elegir el centro como intersección de las diagonales (que es el punto medio si y sólo si el cuadrilátero es paralelogramo). Se producen resultados personales.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dibujo guía</td>
<td>Intervenciones y fases</td>
<td>Breve análisis</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>JP</td></tr>
<tr><td>Fase II y IV</td></tr>
</table>
</td>
<td>⑤ <u>Por alternos internos entre paralelas</u><br>Como el mismo alumno plantea se produce circularidad. Se abandona.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>46</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>58</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td rowspan="3">⑥ <u>Por traslación</u><br>Se abandona.<br>Los términos “distancia” y “equidistar” aparecen en un resultado personal</td></tr>
<tr><td>JP</td><td>JP</td><td>AM</td><td>JP</td><td>AM</td><td>JP</td><td>JP</td><td>JP</td><td>C</td><td>JP</td></tr>
<tr><td colspan="10">Fase II</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>76</td><td rowspan="3">⑦ <u>Por triángulos congruentes</u><br>Se atraviesan todas las fases del problema y se logran tres resultados personales.</td></tr>
<tr><td>JP</td><td>M</td><td>JP</td><td>M</td><td>JP</td><td>AM</td><td>JP</td><td>JP</td><td>vs</td><td>JP</td></tr>
<tr><td>F II</td><td colspan="6">F III</td><td colspan="3">F IV</td></tr>
</table>

El “procedimiento ⑦” recorre todas las fases, siendo la más larga la de ejecución del plan. En la fase II se produce una nueva transformación del problema: probar que dos triángulos son congruentes, lo cual da cuenta de una reorganización local de la información. Se logra el cometido en la fase III de ejecución del plan y nos encontramos en la fase IV cuando se utiliza el resultado para dar cierre a la primera transformación (puesto que busca fundamentar que los otros dos lados también son paralelos) y este último resultado para llegar a la tesis original: se trata de un paralelogramo.

## CONCLUSIONES

Como ya mencionamos y en base a la descripción realizada, vemos que la resolución de la tarea se desenvuelve siguiendo las fases descriptas por Polya “en forma natural”.

En cuanto al desarrollo de las acciones, hemos visto que la definición de paralelogramo las ha regulado y esto da cuenta de características avanzadas de actividad matemática de acuerdo con el modelo teórico de Vinner[1], mostrando que estos alumnos incorporan la definición al esquema conceptual que sustentan sobre el concepto “paralelogramo”.

[1] Vinner plantea que un concepto matemático se organiza en esquemas conceptuales cuyos componentes son “imagen conceptual” y “definición conceptual”. La utilización de ambos en la realización de la tarea revela un nivel de actividad matemática alto.

También se explicita la utilización de herramientas heurísticas, cuando los resolutores transforman el problema original en nuevos problemas y al descartar un camino por el examen de un caso particular (18 VF).

Aparecen también sugerencias heurísticas respecto de la mención de problemas relacionados (28 AM, 37 AM, 46 JP) y en referencia al dibujo (2 LC, 8 VF, 10 JP).

La manifestación de tanta diversidad en los intentos se explica en parte por el apego de los integrantes del grupo a la sugerencia heurística de realizar "un dibujo lo más general posible" y se destraba la situación cuando cambian de heurística y comienzan a realizar dibujos que respetan las hipótesis (intentos 4, 6 y 7)[2]

En el procedimiento 7, JP reorganiza su razonamiento en base a la introducción de un elemento auxiliar en la figura (diagonal del paralelogramo) y verbaliza el plan a seguir, compara elementos de los triángulos involucrados con ayuda de otros integrantes, convence al auditorio de haber logrado el cometido y entrega un resultado personal impecable desde el punto de vista matemático. Las otras dos producciones personales entregadas referidas a este procedimiento 7 muestran que el razonamiento exteriorizado por JP o bien no produjo el nivel necesario de reorganización o no fue completamente internalizado (aprehendido) por los otros integrantes que participaron en la discusión.

El hecho de que las restantes producciones personales siguen otros razonamientos (4 y 6') muestran que el intercambio grupal de ideas abrió otros caminos y nos señala que, lejos de ser invalidada, la autonomía de pensamiento es potenciada por la discusión grupal de la tarea.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Ferraris y Siñeriz (julio, 2005). *Indagación acerca de la evolución de los tipos de prueba en las producciones de alumnos de profesorado. XIX RELME, Montevideo.*

Ferraris, C. (2005). Programa de la cátedra "Geometría Euclídea del Plano"

Ferraris, Montoro y otros (2002). Proyecto "La demostración en Geometría en la formación de profesores" Universidad Nacional del Comahue - Argentina

Ferrero, Ferraris (2001). La adquisición de conceptos matemáticos: una perspectiva didáctica. *Revista Función Continua* 10 (2)


[2] Al ser las hipótesis del problema test condiciones suficientes para que el cuadrilátero sea paralelogramo resulta imposible lograr una figura de análisis que las respete y sin características particulares.

Hernández Fernández H., Delgado Rubí J., Fernández de Alaíza B. (2001). *Cuestiones de didáctica de la matemática*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.
Polya G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas: México.
Siñeriz L. (2000) Tesis Doctoral – Universidad de Valencia - España
Siñeriz L. y Ferraris C. (2005). *Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría.* VII SEM, Chivilcoy, Argentina
Siñeriz, Ferraris (2005). *Modelo teórico* RELME XIX
***Siñeriz, Montoro y otros (2005) Proyecto "Aprendizaje de la Demostración en Geometría" Universidad Nacional del Comahue - Argentina***

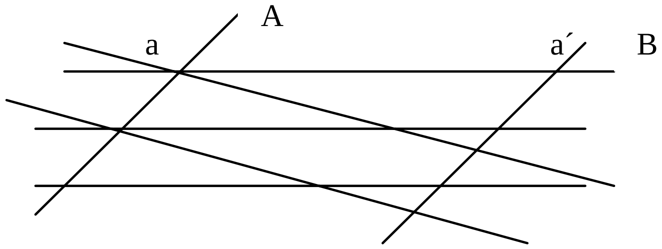
**GEOMETRÍA – OBSERVACIÓN SEGUNDO TEST**

Fecha 18-11-03
Consigna: Demostrar que si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, es un paralelogramo.

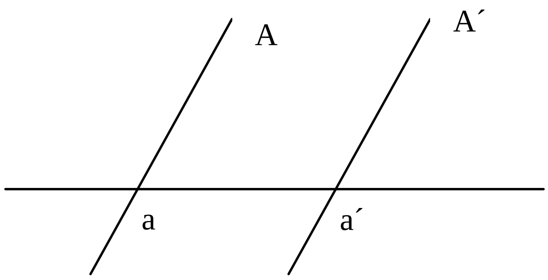
Grupo: AM, JP, VF, LC, LS

Observadoras: MF y MTJ

… Después de varias bromas quedan en silencio.
Comienzan leyendo cada uno por separado, bastante tiempo
Y que los lados son paralelos (*de acuerdo a la hipótesis*)
14 AM: Son congruentes. Entonces lo estoy haciendo mal esto de extenderlo. Ah, puede ser por absurdo.
15 VF: Y si lo hacemos por absurdo? (a LC) Negamos que sea paralelogramo y llegamos a que el lado no es congruente. Si suponés absurdo vas a llegar a que no son congruentes.
16 JP: .. yo pensaba, si hacemos…La paralela a la tercera, ver si es distinta. Estas dos son paralelas, esta es paralela a alguna. Tenes A y A´, las dos paralelas. B pasa por los dos puntos de abajo. Tiene seguro uno de los puntos, tenés que mostrar que pasa por el otro.
17 LC: … pero lo hacemos por simetría
18 VF: Por simetría te va a salir para un caso particular y hay que hacerlo en general
19 JP: ah! Sí, por simetría puede ser…
20 LS: Pero donde tenés el eje de simetría?
21 JP: Está bueno. b´ va a ir aquí y B acá. En el segmento que une los puntos medios. Tiene que ser perpendicular. Esto tendría que ser Dib incompleto:

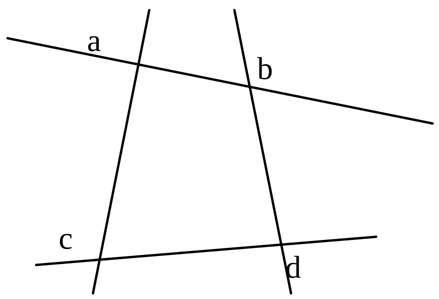



22 VF: Este tiene que ser congruente. No va a salir.
23 AM: pero si estos lados son congruentes, vos unís los extremos…
24 JP: Volvamos al punto anterior. Definimos dos rectas paralelas que incluyen a los segmentos. Vértices de abajo. Hasta ahora definimos A y A´ que son paralelas. Hay una recta paralela a B por b´.



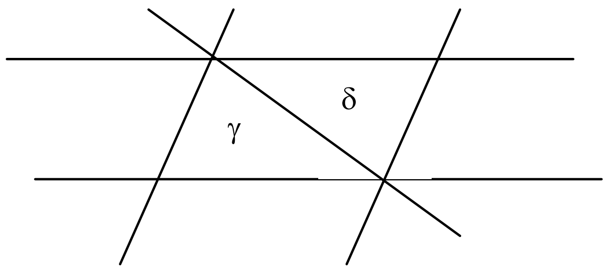

AM: ....
25 LS: No se puede
26 LC: Vas a tener que aplicar simetría, usás el 7b) y es esa la recta
27 JP: Lo corta en algún lado.
28 AM: Un ejercicio medio parecido lo había hecho por transitividad.
29 VF: Y por 7b. (*Risas generales*)
30 LC: Vas a tener que aplicar simetría, usás el 7b) y es esa la recta
31 LS: Ver de alguna forma si llega acá. Y si usamos la intersección de las diagonales?
32 VF: Pero estás partiendo que las diagonales se cortan.
33 LS: Pero es un cuadrilátero.
34 VF: Ah, entonces podés partir de eso.
35 LS: Lo que él decía también servía.
36 VF: Dos paralelas, cuando vos cortás, el segmento es el mismo.
37 AM: Nos salió el que era una recta y dos puntos.

38 JP: Ya está. Ah! Mirá tengo unas semejanzas acá… Decía que estaba el recíproco de los alternos internos que son congruentes, pero si (*los ángulos*) son congruentes son paralelas (*las rectas*). Ah! Pero esto ya sabía que eran paralelas. Estoy en una situación de circularidad.
… No le prestan mucha atención…
39 AM: Viste lo que decías para encontrar la otra que era paralela es la simetría central
Por la simetría central, la imagen de una recta era una recta paralela.
40 LC: Vamos a tener que hacer eso. Tenemos dos paralelas, ponemos una secante. Trazabas una....
41 VF: Y si partís de que no son congruentes?
42 LS: no, no tenés que partir de que no es un paralelogramo
43 AM: Lo que vos decías (a JP), tenés una simetría central, sabés que esta recta por una simetría central llegás a esta. Ahora que lo explico me doy cuenta que está mal, porque apareció esta recta así de la nada.
44 JP: Tengo dos paralelas, tengo que demostrar que son la misma. La paralela a B que pasa por b y la paralela a B que pasa por b´. Si son la misma, es la única paralela que pasa. Hay una que pasa por la "cabeza" de un segmento y la otra que pasa por la otra "cabeza". Tienen "techos" distintos. Y lo de las distancias cómo era. Lo podemos usar.
(Dirigiéndose a Profesora) ¿Vale sacar la carpeta?
45 Profesora: Prefiero que no. Para eso están entre todos. Temo más que se puedan confundir. (Como en el otro grupo los dejaron, afloja) Si necesitan, saquen. (Pero no sacan).
46 JP: Por algo que demostramos con las traslaciones, ésto pasa.
47 VF: Parto que no es un paralelogramo, tengo un par de lados que contienen rectas que se intersectan y estás negando la hipótesis.




Escribe ab $\cap$ cd = {p}$\Rightarrow$ ab y cd
48 VF: No son paralelas entonces no cumple la hipótesis de que tiene un par de lados paralelos Ah, no, tengo que los otros tampoco son paralelos
49 JP: Es un triángulo (risas)
50 AM: Es un trapecio.
51 VF: Aquél grupo se calló.

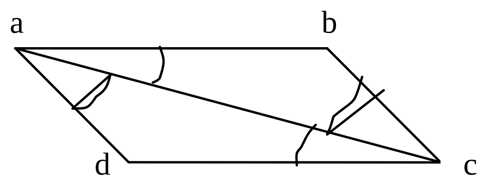
52 JP: y las distancias, cómo era? Tenemos una paralela que pasa por el exterior de un lado, pero la distancia es la misma. Si hacés la traslación, tenés la misma paralela.
53 AM: Y sí, pero...
….(hay un ratito de silencio, cada uno está haciendo algo en su hoja)
54 JP: yo creo que hay que usar una traslación. Por eso que las traslaciones (*composición*) da una traslación.
55 AM: Los definís a los segmentos que forman el cuadrilátero.
56 JP: Tienen la misma, definen segmentos congruentes (*no nombra la palabra distancia*)
57 LS: estoy usando que una recta en una simetría central va a una paralela … (JP la interrumpe) Una central te manda paralelas en paralelas.
58 JP: Bueno, pero la composición de simetrías centrales es una traslación…
Tenés que hacer dos centrales y la composición de centrales es una traslación.
59 LC: Pero no lo estás haciendo con las diagonales.
60 JP: Con la traslación ya está. Te lo mueve una distancia.
61 Profesora: ¿Qué es una distancia?
62 JP: Ahora tenemos continuidad: una abscisa. Bueno, dale. Piensen ustedes también!
Entre VF que demuestra lo que no había que demostrar...
VF se hace la ofendida.
63 Profesora: Les recuerdo que este ejercicio está en la práctica.
64 AM y JP: Con simetría central.
65 JP (mirando su dibujo en donde trazó una sola diagonal del paralelogramo) Este triángulo tiene este lado congruente a este... Pongámosle nombres γ y δ (*los triángulos*).




Este lado es congruente con éste porque es el mismo. Este lado es congruente con éste porque sí .
66 Observadora 1: (interviniendo sin que me pregunten): Por hipótesis!!!
67 JP: Este ángulo es congruente con éste porque son alternos internos entre paralelas Le ayudan con que sólo basta con un par de alternos internos entonces los triángulos son congruentes. Llegamos a que estos dos lados son congruentes. Criterio de semejanza.
68 Observadora 1: ¿Qué???? Congruencia.
69 JP: Bueno, sí.
70 AM: Y lo de paralelas es lo que estábamos viendo de la simetría.

71 JP: Ya tenemos que son congruentes (*los otros dos lados opuestos*) Por teorema de Thales (chiste). I´ve got it!!! Miren (*siguiendo su dibujo*): Este de acá es congruente con este de acá, estos triángulos son semejantes, congruentes, digo.

(ahora JP está queriendo usar criterios de congruencia, escribe
Hipótesis: ab // cd
ab ≡ cd




ab≡cd (por hipótesis)
ab // cd ⇒ bac ≡ acb alternos internos
⇒ abc ≡acd ⇒ los triángulos son congruentes ⇒ ad ≡ bc
72 JP: Estos son congruentes (*señala los ángulos*). Tengo que demostrar que estos son paralelos.
73 Chicas: ¡Recíproco de alternos internos!!
74 Profesora: AM, vos lo habías pensado por simetría y me gustaría que lo siguieras, al menos en tu casa.
75 AM: Sí, lo abandoné.
76 JP: (*Buscaba alternos internos complicados y se da cuenta que* $\alpha'$ *y* $\beta'$ *son los que necesita*). Por recíproco de alternos internos, si $\alpha'$ *y* $\beta'$ son congruentes, entonces B es paralela a B´.
…LS y Lo no escriben la demostración que dijo JP, están trabajando individualmente…
Una vez que se pusieron de acuerdo, tácitamente, en haber logrado lo que querían, cada uno escribe en su propia hoja la demostración.