UN ANÁLISIS DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA SOBRE ALGUNOS ERRORES EN EL ÁLGEBRA

Silvia Caronía, Ana María Zoppi, María del Carmen Polasek, Marta Rivero; Roxana Operuk
Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones.
Prov. de Misiones (Argentina)
silvca2@gmail.com

RESUMEN

El presente es un informe parcial de avance de la investigación:"Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad: una asignatura en discusión". Es una investigación enmarcada en los paradigmas descriptivo, interpretativo y reflexivo. La población en estudio alcanza en total 1200 estudiantes.

Se busca analizar el estado de los conocimientos matemáticos en el ingreso y posteriormente, en la culminación del primer año de cada carrera. Pretende describir e interpretar la transformación que sufren esos conocimientos.

Se realiza el estudio de las respuestas a algunos de los ítems de las evaluaciones de ingreso en cuestiones relacionadas con el Álgebra y algunas particularidades de la Aritmética.

Se presenta una tipificación de los errores más frecuentes cometidos por cada estudiante, teniendo en cuenta tanto los conceptos involucrados como los procedimientos adoptados, y un análisis de las regularidades y coherencia de los mismos en los exámenes de ingreso y al cabo de un año de cursado.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, desde el interés didáctico, lo que importa no es discutir las políticas de ingreso, sino analizar "lo que está" en el pensamiento de los estudiantes que parecen saber o no saber determinados contenidos. Para ello se llevó a cabo el estudio en tres carreras de la FCEQyN (cohortes: 2003-2004)[1].

[1] Carreras: Profesorado de Matemática, Ingeniería Química y Genética.

Desde algunas teorías contemporáneas de la enseñanza y del aprendizaje, Brousseau (1998-1999), entre otros, reconocen ka existencia de obstáculos en el aprendizaje. En ese contexto nos preguntamos: ¿Cuáles son los errores más frecuentes detectados? ¿Qué características tienen? ¿Cuál es su consistencia interna en los procesos de pensamiento que revelan? ¿Existe una cierta regularidad? referidos por ejemplo a la transferencia de tipo algebraico, argumentativo, simbólico?, etc.

De todos los conocimientos matemáticos evaluados en las pruebas de ingreso, este estudio se centró en el análisis de las respuestas a los protocolos relacionadas con el Álgebra y algunas cuestiones referidas a la Aritmética, siendo ésta una decisión operativa del grupo de investigación, para realizar un recorte del problema.

Se analizó en forma individual cada prueba para: identificar y tipificar los errores cometidos e inferir en "qué estuvo pensando el alumno" cuando hizo su desarrollo. Además, se detectan las regularidades y coherencias en esos procesos considerados erróneos.

Transcurrido un año del cursado se diseñó una 2ª evaluación para analizar el "estado" en el que se encontraban los conocimientos de la población en estudio. Se partió para la confección de la misma, de los mismos contenidos evaluados en el ingreso, con el fin de analizar por ejemplo si cometió el mismo error, si lo pudo superar o si cometió "nuevos errores".

Por último se presenta algunas consideraciones acerca de los aportes de esta investigación a la Didáctica y a la formación de profesores.

¿CUÁLES FUERON LOS ERRORES DETECTADOS?

Para el análisis de los errores que se manifestaron en los exámenes de los ingresantes, se tomaron como referencia las investigaciones realizadas por autores como: Kieran (1989); Berté (1999) ; Panizza, Sadovsky y Sessa (1997), Engler y otros (2004) con el fin de cotejar si las cuestiones tratadas por los mismos, son similares a las que se pudieron advertir en esta población de ingresantes.

Del estudio de los exámenes efectuados y teniendo como base los errores tipificados por los investigadores antes mencionados, en nuestra indagación realizamos una nueva clasificación:

- *La aplicación de propiedades:* Los alumnos estiman posible la aplicación de la propiedad distributiva en los casos de: la raíz, la potencia, el cociente, respecto de la suma, entre otros. Estos tipos de errores están asociados a un *pensamiento lineal,* lo cual obstaculiza implícitamente a otros modelos no lineales.
  Por ejemplo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

- *Los manejos operatorios*: otros autores lo identifican como: *...”errores al operar algebraicamente, [...] empleo incorrecto de propiedades y definiciones...”...” el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos...”*, Confunden no solo las aplicaciones de las propiedades sino también, *las reglas de las operaciones*.

- *El orden en que efectúan las operaciones***:** Los estudiantes consideran que el orden del cálculo que deben realizar es de izquierda a derecha, de la manera como se presentan los términos. Vale explicitar desde la aritmética, dificultades relacionadas con la jerarquía de las operaciones, cuestiones éstas que influirán cuando operen algebraicamente Este tipo de error, algunos autores lo consideran como:*”errores técnicos.”*

- *La forma de ver el signo igual*: Los alumnos visualizan al signo igual como un simple separador de las *secuencias de operaciones* que realizan para llegar al resultado. Además lo conciben como la *“señal de hacer algo”, e*sta dificultad es un obstáculo a la hora de trabajar algebraicamente. El autor percibe que esta tergiversación produce la *violación de las propiedades de simetría y transitividad de la igualdad.*

- *El significado que le atribuyen a las letras***:** Los alumnos revelan el uso de las letras *como etiquetas*. Esta consideración obstaculiza el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas, en tal sentido las variables, por ejemplo la “x”, es identificada como objeto: 5x representan 5 manzanas. En otros casos las letras son “forzadas” y son tomadas como variables, recurriendo a la sustitución por tanteo o la suposición de que pueden “reemplazar” por “algo”. Con este “significado violan la simetría”.

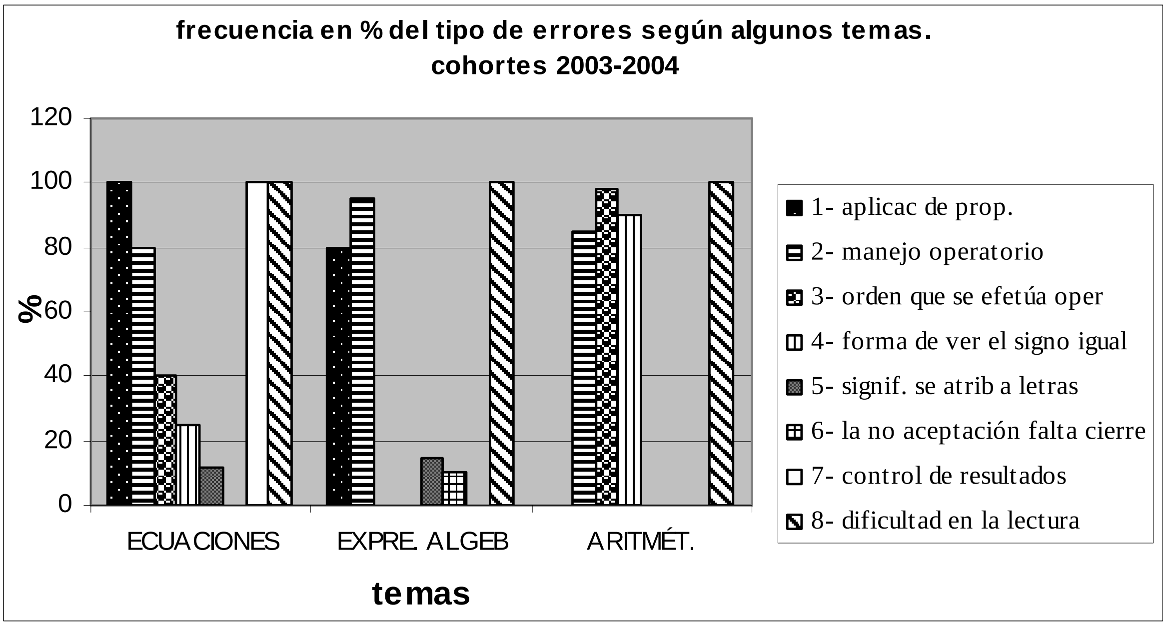
- *La no-aceptación de la falta de cierre:* Los alumnos tienen arraigada la aritmetización en los problemas algebraicos, ostentan la necesidad de arribar a un número concreto, igualan a un número, en general *a cero, no se dan cuenta que el procedimiento es a menudo la respuesta”*. Los alumnos…”*tratan las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables...”.*

- *La posibilidad de “control” de sus resultados: Tan pronto los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones tienden a abandonar el uso de la sustitución para la verificación...”*. Este tipo de error otros autores lo consideran como: *...”falta de verificación en la solución...”.*

- *La dificultad en la lectura y comprensión de los enunciados y consignas de trabajo: las pruebas de matemática también son, en alguna medida, prueba de lectura...".* Otros autores lo traducen como la..." *interpretación incorrecta del lenguaje...".*

LOS ERRORES TIPIFICADOS ¿SON FRECUENTES?

Se realizó el estudio de los errores cometidos en la prueba de ingreso, correspondiente a algunos temas básicos y se analizaron la frecuencia con que se produjeron, según el tipo de error encontrado. Lo expresado se observa en el siguiente gráfico:



LOS ERRORES TIPIFICADOS: ¿SON CONSISTENTES PARA EL MISMO ALUMNO?

Se toma en esta presentación un caso para analizar la coherencia interna del pensamiento del estudiante: es decir, si los errores cometidos se vinculan internamente entre sí.

- *Resolver la ecuación*: $3+\sqrt[3]{8x+1}=5$

$3+\sqrt[3]{8x+1}=5$

$3+\sqrt[3]{8(1)+1}=5$

$3+\sqrt[3]{9}$

$3+2=5$

> Supone la "x" como variable por eso le otorga un valor igual a 1(sustitución por tanteo). El "reemplazar" por "algo" viola la propiedad de simetría.
>
> Dificultad en *"el significado que le atribuyen a las letras"*
>
> *"Error en el manejo operatorio"*, confunde la definición de radicación, considera "la base 3" y busca el número al que hay que elevar para obtener 9.

- *En la siguiente expresión* $\dfrac{a^4+81}{a-3}$ *determine si el cociente es exacto o no*

Para $a=0 \Rightarrow$ el cociente es exacto

$\dfrac{\cancel{a}^4+81}{\cancel{a}-3}=$ -27 $\longrightarrow$ Cuando efectúa la "simplificación" considera implícitamente la propiedad distributiva del cociente respecto de la suma. Error en *"la aplicación de propiedades: modelo lineal"*

Para $a=-2 \Rightarrow$ el cociente no es exacto

$\dfrac{(-2)^4+81}{(-2-3)}=$

Para $a=2\Rightarrow$ el cociente es exacto, porque dividimos por 1 y el resultado es el numerador

$\dfrac{(2)^4+81}{(2-3)}=$

Al no tener en claro el cociente entre polinomios y la divisibilidad de los mismos, se supuso que este alumno interpreta que para analizar la exactitud del cociente debe arribar necesariamente a un "número", es por ello que sustituye la "letra" por tanteo. Comienza el análisis otorgando distintos valores, considerando a la misma como variable "a" y de acuerdo con los resultados que le ofrecen los mismos, determina la exactitud o no de la expresión.

En resumen en este caso, los ejercicios desarrollados en este alumno, se observó consistencia del error en el *significado que le atribuye a las letras* como así también la falta de *manejos operatorios adecuados* tanto en el empleo de propiedades como en el uso de las definiciones.

LOS ERRORES TIPIFICADOS: ¿SON PERSISTENTES PARA EL MISMO ALUMNO?

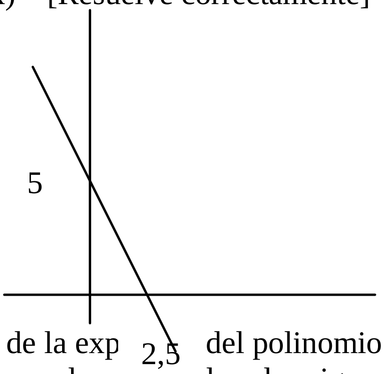
Con las dos evaluaciones realizadas, se pretendió observar y comparar la evolución en el pensamiento de cada estudiante.

Cabe aclarar lo que se consigna a continuación son algunos ítems de los exámenes que hemos estudiado, teniendo en cuenta también el recorte en sus contenidos. Los conceptos involucrados fueron ecuaciones con radicales, exponenciales y logarítmicas con distintos grados de dificultad, evaluándose también el manejo de propiedades y definiciones de potencia, logaritmos, propiedades de los números reales, etc. Se analizaron además ejercicios relacionados con polinomios: gráficas, operaciones, factoreo, divisibilidad.

<table>
<tr><th colspan="2">Alumno I</th></tr>
<tr><th>2004</th><th>2005</th></tr>
<tr>
<td>
Ejercicio Nº 3: Halle el valor de x:

a) $\sqrt{4x^2+5}-1=2x$ Desarrolla bien
b) $1+2^x5^x=\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$
$1+2^x5^x=\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$
$1+2^x.5^x=\frac{11}{1}$
$2^x.5^x=11-1$
$10x^2=10$
$x^2=\frac{10}{10}$
$x=\sqrt{1}$
$x=1$
Uso incorrecto de las propiedades de la potencia respecto al producto $2^x.\ 5^x = 10\ x^2$

c) $x=\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{9}-\log_3\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}\log_3 27$
$3^{\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{2}$
Dificultad en el manejo operatorio adecuado y en la definición
</td>
<td>
Ejercicio Nº 1: Encontrar la incógnita de cada ecuación presentada. Detallar los pasos realizados y justificarlos.
a) $-1+\sqrt{4x+1}=x$ Desarrolla bien
b) $3^{2x-1}=9$
Notamos variación en el procedimiento efectuado respecto a la resolución de ecuaciones exponenciales planteada en el 2004, utiliza logaritmo natural en sus procedimientos.
$2x-1.\ln 3=\ln 9$
$2x-1=\frac{\ln 9}{\ln 3}$
$2x=\frac{\ln 9}{\ln 3}+1$
$x=\frac{3}{2}$
c) $\log_a x=\log_a 9-\log_a 4$
$\log_a x=\frac{\log_a 9}{\log_a 4}$
$x=\ln\frac{9}{4}$
$x=\ln 2.25$
$x=0.81$
Error en la aplicación de propiedades en este caso supone, la diferencia de los logaritmos es igual al cociente de los logaritmos
</td>
</tr>
</table>

$x=\frac{1}{3}(-2)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3$ $\qquad x=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ $x=\frac{1}{3}$	Incorpora logaritmo natural en sus procedimientos, supone que puede sustituir el logaritmo de cualquier base por el logaritmo natural. Además en el 1º miembro suprime el logaritmo de base a. (uso incorrecto de propiedades y definiciones)
Ejercicio Nº 4 sean $P(x)=a_1x+a_0$ y $Q(x)=2x^2-11x+5$ a) Obtenga la expresión del polinomio P(x) sabiendo que su raíz es 5 y su gráfica corta al eje vertical en 5/2. Grafique P(x). b) Obtenga un polinomio S(x) tal que Q(x) = P(x). S(x). [*no contesta]* c) Grafique Q(x) [Resuelve correctamente] a) $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x=\frac{-5}{-2}$ $x=\frac{5}{2}$  En la conformación de la exp del polinomio confunde la raíz con la da al origen, obteniendo una expresión erronea. La gráfica responde a la “expresión hallada”. Sin embargo presenta error en el pasaje del coloquial al grafico, no distingue la ubicación de los elementos en la gráfica. Ejercicio Nº 5: dado el polinomio $P(x)=x^3-x^2-6x$ Diga si $R(x)=x-3$ es un factor de P(x). a) Factoree P(x) [Resuelve correctamente]	Ejercicio Nº 3: Del polinomio de primer grado $P(x)=a_1x+a_0$, se sabe que su raíz es 4 y su gráfica corta al eje vertical en -4. a) ¿Cuál es la expresión del polinomio? [Resuelve correctamente]. b) Graficar. [Resuelve correctamente]. c) ¿es P(x) un factor de $Q(x)=x^2-16$? Justificar su respuesta *[no contesta]*

CONCLUSIONES

Tal como se observó en esta investigación, hasta la fecha se mostró que:

- los errores hallados se corresponden con las observaciones realizadas en otras investigaciones por autores como: Kieran (1989); Berté (1999) ; Panizza, Sadovsky y Sessa (1997), Engler y otros (2004)

- estos errores respondieron a "patrones de comportamientos" a los que se reconoce como "error". En general se advirtió coherencia en los errores encontrados, cuestión que señala Brousseau (1998- 1999) , entre otros.

- Los errores encontrados no son independientes y se presentan habitualmente, como partes de una misma estructura de pensamiento. Es por ello que resultó compleja la identificación en forma independiente de los tipos de errores localizados en esta investigación.

- El análisis de las frecuencias detectadas mostró algunos errores que deberían ser considerados "muy especialmente" por su generalización en los temas sobre ecuaciones, expresiones algebraicas, como así también en cuestiones relacionadas con la aritmética. De los errores hallados, un 100% estuvieron vinculados con "las aplicaciones de propiedades", seguido entre un 80% y 90% en los "manejos operatorios adecuados". Otro error recurrente (100%) fue "la dificultad en la lectura y comprensión de los enunciados y consignas de trabajo" (Gráfico Nº1)

- La importancia que tiene la "dificultad en la lectura" que se ha detectado debería advertir además, acerca de los riesgos que conlleva la misma presentación de las consignas. Probablemente el leer e interpretar consignas debería ser en sí mismo un objetivo de aprendizaje.

- Con respecto a las *comparaciones* de los alumnos ingresantes 2004 con su 2º evaluación (2005), se detectaron en algunos casos: persistencia en los errores; no contestaban algunos de los ítems de ejercicios que anteriormente realizaban correctamente; presentaban "nuevos" errores y en otros casos evolucionaron en sus procedimientos

- El conocimiento de estos errores nos posibilitó trabajar para prevenir su emergencia. Por ejemplo**,** deberían proponerse de manera cuidadosa actividades conducentes a facilitar la comprensión de las propiedades y sus usos. Esto indica pensar en actividades significativas que no estén orientadas exclusivamente a la resolución del algoritmo y que, por el contrario, atiendan y apoyen los procesos comprensivos que deberían sustentar esas resoluciones.

- El aporte que consideramos importante en este estudio, independientemente de sus corroboraciones, es que pudimos reconocer procesos operatorios que subyacen como errores en el razonamiento de estos estudiantes. Así esperamos contribuir a una mejor comprensión de la actividad intelectual desplegada en situaciones como ésta que seguramente, al ser más analíticamente conocidas, podrán ser mejor tratadas desde una perspectiva pedagógica.

- Pensamos que este conocimiento más exhaustivo acerca de los errores en las resoluciones matemáticas debe ser una cuestión explícitamente considerada en la formación de los futuros docentes., además de contribuir a desnaturalizar la concepción dominante que sustentamos, según la cual: “el alumno es el que no estudia” o “con más ejercitación (de la misma clase) podrán saber”. Esto es así desde la población en general como también, lamentablemente, entre los mismos profesores del nivel superior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berté A. (1999). *Matemática Dinámica.* Buenos Aires: Editorial AZ. (pp.120-145)

Brousseau, G. (1978). *L`stude des processus d`apprentissages en situations scolaires.* IREM de Bordeaux. Francia.

Brousseau, G. (1999). *Educación y Didáctica de las Matemáticas.* Trabajo presentado en el V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Aguascalientes, México.

Engler, A., Gregorini, M I y otros. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa.* 6(23) SOAREM. (23-32)

Kieran, C. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.*_F. Filloy Yagüe (Ed.). Centro de Investigación y Estudios avanzados del IPN, México.

Panizza, M Sadosky, P. Sessa, C. (1997). *Los Primeros Aprendizajes Algebraicos: El Fracaso del Éxito*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires. Argentina.