

# ENSEÑEMOS MATEMÁTICA FAVORECIENDO LA COMUNICACIÓN Y LA ACTIVIDAD DEL ALUMNO

*Susana González de Galindo, Patricia Villalonga de García, Marta Marcilla*  
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán.  
Prov. de Tucumán (Argentina)  
[sgalindo@fbqf.unt.edu.ar](mailto:sgalindo@fbqf.unt.edu.ar), [pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar](mailto:pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar), [marmarcilla@fbqf.unt.edu.ar](mailto:marmarcilla@fbqf.unt.edu.ar)

## RESUMEN

En este trabajo se describe la estructura de una estrategia didáctica elaborada para superar la metodología de enseñanza, de corte tradicional, vigente aún en clases masivas de Matemática de primer año universitario. Fue diseñada considerando criterios orientadores de la enseñanza de la Matemática, derivados de teorías cognitivas del aprendizaje.

## INTRODUCCIÓN

Matemática I es una asignatura del primer cuatrimestre de primer año de las carreras que se cursan en una Facultad argentina de ciencias. En ella se desarrollan contenidos básicos del Cálculo Diferencial e Integral de una variable. Sus clases, de tipo tradicional, se caracterizaban por: deficiente relación docente-alumno (1/400 en las clases teóricas y 1/100 en las prácticas), alumnos pasivos y desmotivados y mínima comunicación entre los participantes.

El objetivo de este trabajo fue diseñar una estrategia didáctica, en la que se recurre al uso de un material instruccional, elaborado según lineamientos de teorías cognitivas, que favorece la actividad del alumno y la comunicación entre los agentes del acto educativo. La misma fue implementada en el año 2006.

## MARCO TEÓRICO

Las tendencias pedagógicas seleccionadas para fundamentar teóricamente la estrategia didáctica que se describe en este trabajo, fueron: el Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky con la Teoría de la Actividad de Leontiev, las teorías Psicogenética de Piaget y del Aprendizaje significativo de Ausubel y principios de la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática (González, 1996; Coll, Palacios y Marchesi, 1992; Pérez Gómez, 1992; Moreira, 1997; Gascón, 2001; Sadovsky, 2005). El estudio de estas teorías y el análisis de los Estándares para la enseñanza y para la

evaluación de la enseñanza del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM) (NCTM, 1989; 1991; 1995; 2000) permitieron elaborar el *Marco teórico de referencia*.

Se adoptó como modelo de aprendizaje, el que sostienen las teorías cognitivas estructuralistas, las que consideran que el origen de los cambios es interno y atribuyen importancia relevante tanto al significado de los aprendizajes como a la influencia de los factores sociales.

### **CRITERIOS ORIENTADORES DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

Del marco teórico se derivaron los siguientes *criterios* que debieran guiar el proceso de enseñanza, la selección y forma de presentación de las distintas actividades que se propongan al alumno, la modalidad del desarrollo de las clases, el diseño de los instrumentos de evaluación y el proceso de evaluación del aprendizaje de la Matemática (González de Galindo, 2003):

Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje el docente debería:

- C<sub>1</sub>) Favorecer el protagonismo activo del estudiante como responsable de su aprendizaje.*
- C<sub>2</sub>) Propiciar el intercambio grupal de significados.*
- C<sub>3</sub>) Otorgar mayor dinamismo al proceso de enseñanza y aprendizaje, con un ritmo que mantenga atención e interés, considerando a la evaluación formativa como medio para introducir los cambios pertinentes para ajustar dicho proceso a las características y capacidades de los alumnos.*
- C<sub>4</sub>) Presentar los contenidos de modo de facilitar el desarrollo de las habilidades propias del conocimiento matemático: definir, demostrar, identificar, interpretar, recodificar, graficar, resolver, comparar, modelar, algoritmizar, calcular, optimizar, aproximar y controlar (Hernández Fernández et al, 2001).*
- C<sub>5</sub>) Favorecer el cambio del rol docente, desde el de transmisor de conocimientos ciertos y acabados, al de facilitador de aprendizajes centrados en cuestionamientos, reflexión crítica y construcción de significados, con la capacidad de generar en la clase una atmósfera de coparticipación distendida.*
- C<sub>6</sub>) Despertar el interés por los contenidos matemáticos, basándose en el uso y necesidad práctica de los mismos para resolver problemas vinculados a la ciencia y a la vida diaria.*

C7) Diseñar las actividades de clases y los instrumentos de evaluación del aprendizaje estableciendo conexiones entre contenidos, de modo que se aprecie la importancia que se conceden a los aprendizajes significativos.

## DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

### Pautas Generales

La propuesta metodológica que se presenta tiene como finalidad promover el desarrollo de los alumnos, atribuyéndoles un papel activo en su aprendizaje para lograr que sean ellos quienes generen y construyan el conocimiento, confiriendo al docente el rol de facilitador y orientador (Coll, 1992). Para promover el intercambio de significados, se decidió estimular la participación grupal. Se optó por la siguiente modalidad de asistencia a la *zona de desarrollo próximo (ZDP)* de Vigotsky: colaboración en actividades compartidas como factor constructor del desarrollo y preguntas de carácter mayéutico. La interacción entre compañeros pretende facilitar el aprendizaje, ya que frente a un problema, alumnos con capacidades similares actúan en forma más eficiente que como lo hacen en forma individual (Hernández Fernández et al., 2001; Villani y Orquiza, 1995; Arcavi, 1999). Para conseguirlo, considerando los criterios del marco teórico y atendiendo a las limitaciones del contexto, se diseñó *un material instruccional ad hoc* para desarrollar los contenidos de “Continuidad de una función” en ocho horas reloj. Esta guía fue elaborada dejando “espacios en blanco” para ser llenados por los alumnos durante el desarrollo de las clases. Antes de su implementación fue sometida a validación por pares (González de Galindo, Marcilla y Villalonga de García, 2006). Antes de llevar a la práctica la estrategia se analizaron los resultados de una prueba de lápiz y papel, destinada a evaluar los conocimientos previos de los alumnos, requeridos para el aprendizaje de “Continuidad de una función”.

Cada alumno, al desarrollar las actividades incluidas en la guía debía inicialmente intercambiar opiniones con los compañeros de un minigrupo, para luego compartir posturas con el resto de la clase, bajo la orientación e intervención oportuna del profesor.

En el debate en el aula se intentó favorecer la *metacognición* ya que al comparar y relacionar los distintos contenidos, los alumnos explicitan sus propios criterios de comprensión (Campanario y Moya, 1999).

Con respecto a la enseñanza se consideró necesario emplear métodos participativos, hacer matemáticas como un trabajo de modelización, mostrándola como un producto temporal e histórico, incluir actividades motivadoras y aplicaciones culturales que posibiliten llegar a la institucionalización del saber (Sadovsky, 2005).

Con respecto al aprendizaje se vio la necesidad de favorecer la comunicación entre los distintos lenguajes matemáticos, plantear situaciones de aprendizaje por descubrimiento e investigación y actividades de solución abierta.

Con respecto a la evaluación se consideró que debía tener carácter formativo y conceder importancia a la evaluación de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales (Villalonga de García, 2003).

La estrategia didáctica diseñada, cuya estructura se describe en este trabajo, puede considerarse una adaptación del *ciclo reflexivo cooperativo* (Gómez García e Insausti Tuñón, 2004). La misma responde, también, a las consideraciones sobre el *espacio colectivo de enseñanza y aprendizaje* realizadas por Bixio (2005).

## **PROCESOS DESARROLLADOS PARA LOGRAR EL CONOCIMIENTO**

La estructura de la estrategia didáctica consta de diversos momentos que los alumnos deben atravesar para llegar a la definición formal de los conceptos. Estos momentos están relacionados con los siguientes **procesos**:

- *Concientización de las ideas previas y del grado de dominio de los prerrequisitos de aprendizaje.*
- *Confrontación de las propias ideas y de las consensuadas en el pequeño grupo.*
- *Introducción formal de los conceptos y teoremas.*
- *Aplicación de los nuevos contenidos.*

## **MOMENTOS DEL TRABAJO EN EL AULA**

El modelo de trabajo en el aula pone énfasis en la naturaleza individual y colectiva del proceso de aprendizaje. Se decidió alternar espacios de trabajo independiente, destinados a la reflexión del alumno sobre sus estructuras cognitivas, con otros destinados a la interacción cooperativa. El trabajo en el aula está planificado para ser desarrollado en seis momentos:

### **Momento 1: Indicaciones del docente y lectura de la actividad de la guía.**

En este momento el docente debe comentar sobre los conceptos que se desarrollarán y formular preguntas relativas a prerrequisitos para su aprendizaje. Frente a cada actividad debe brindar las indicaciones necesarias.

**Momento 2: Reflexión personal.** Fase en la que el estudiante comienza a involucrarse activamente en el proceso de aprendizaje de forma individual, tomando conciencia de sus conocimientos sobre el tema. Para completar los espacios en blanco, intencionalmente intercalados en la guía, el alumno debe interrelacionar conceptos, emitir juicios y formular hipótesis, obteniendo una solución personal a la actividad planteada.

**Momento 3: Discusión intra grupo.** Los alumnos comparten con sus compañeros del pequeño grupo lo que cada uno ha completado. Luego de un proceso de discusión e intercambio de ideas, cada minigrupo debe dar una solución consensuada. En este momento, la comunicación entre los participantes es un requisito indispensable para el desarrollo de la actividad.

**Momento 4: Discusión plenaria.** Debido a la masividad, pretender que cada pequeño grupo exponga sus resultados requeriría de mucho tiempo, por lo que se decidió que el docente, después de supervisar rápidamente el trabajo de los grupos, seleccione para ser expuesta en la pizarra, aquella solución que pueda tener connotaciones más adecuadas para la reestructuración y apropiación de los contenidos abordados. En este momento, el docente debe conceder espacios de discusión para todas las cuestiones en las que no haya acuerdo, puntualizar los errores en que incurran los alumnos al exponer sus puntos de vista y reflexionar sobre ellos, reforzando, por otra parte, las respuestas que considere correctas. Esta puesta en común corresponde a una situación de aprendizaje y confrontación, en la que el docente interviene para facilitar la comunicación y la construcción de conocimientos, promoviendo intercambios y debates cooperativos.

**Momento 5:** Institucionalización del saber. Es la etapa de reestructuración de las ideas y de la introducción formal de los nuevos contenidos matemáticos. A partir de las observaciones realizadas en momentos anteriores, el profesor señala qué hallazgos pueden considerarse válidos de acuerdo a lo establecido por la comunidad científica.

**Momento 6:** Resolución de situaciones problemáticas. El alumno debe aplicar los nuevos contenidos para resolver problemas. Los mismos deben ser elegidos de manera tal de enfrentar a los alumnos con desafíos que le permitan progresos en sus conceptualizaciones.

A modo de ejemplo se presenta en el Apéndice una sección de una guía teórico práctica elaborada sobre el tema “Continuidad de una función”. Las actividades propuestas están interrelacionadas

entre sí, de modo tal que cada una de ellas lleve a la siguiente, la contenga en cierta forma y logre superarla en algún grado de complejidad. En su elaboración la preocupación fundamental estuvo centrada en la construcción del significado (Pimm, 1990).

## CONCLUSIONES

Con el diseño de la nueva estrategia se encontrarían contemplados en gran medida los *Criterios* orientadores de la enseñanza de la Matemática derivados del Marco Teórico, ya que:

*C<sub>1</sub>*): *Se favorece el protagonismo del estudiante (Momentos 2, 3 y 4).*

*C<sub>2</sub>*): *Se propicia el intercambio grupal de significados (Momentos 3 y 4).*

*C<sub>3</sub>*): *El proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula se desarrolla con un ritmo más dinámico que el tradicional, gracias a la modalidad de las clases, en las que se alternan instancias de trabajo individual (Momento 2) con otras de trabajo colectivo (Momentos 3 y 4), además de espacios en los que el docente formaliza el saber (Momento 5).*

*C<sub>4</sub>*): *Los contenidos matemáticos deben estructurarse en la guía de manera de favorecer el desarrollo de las habilidades matemáticas.*

*C<sub>5</sub>*): *De acuerdo a la estructura diseñada, el rol del docente es el de facilitador de aprendizajes originados en reflexiones críticas y cuestionamientos.*

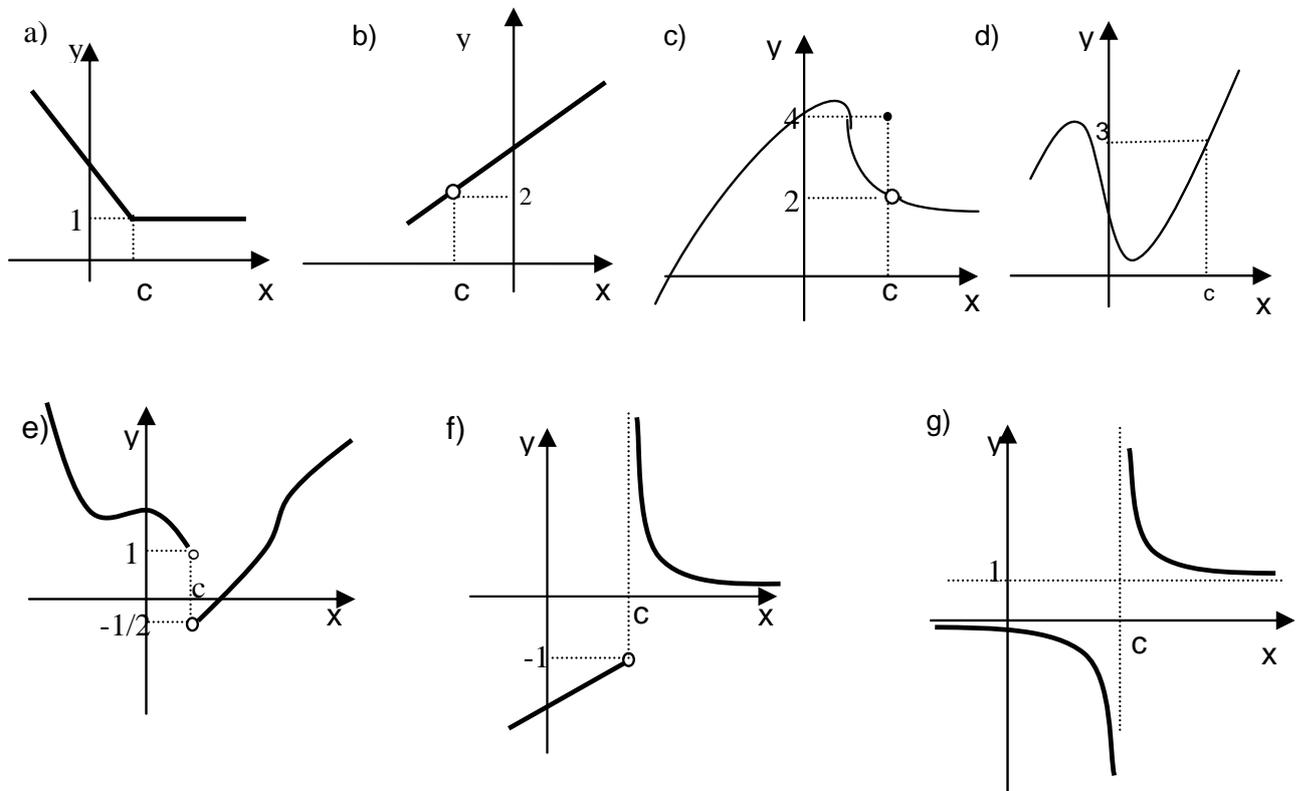
*C<sub>6</sub>*): *Se logra incrementar el interés por el aprendizaje de esta asignatura, al incorporarse en la guía problemas vinculados a la vida diaria y a las ciencias.*

*C<sub>7</sub>*): *Las actividades deben diseñarse contemplando las nociones previas requeridas para el aprendizaje de los contenidos propuestos y enfatizando las conexiones entre ellos.*

## APÉNDICE

### Continuidad de una función en un punto

Después de haber analizado ejemplos de la vida diaria y de las ciencias que describen procesos que se consideran continuos, es decir, que se desarrollan sin interrupciones, estudiaremos las condiciones que se deben cumplir para que una función sea continua en un punto. Para ello, analiza en los siguientes gráficos la existencia de  $f(c)$  y del  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ . Si existen, indica su valor.



**Fig. 1**

Según tu criterio ¿cuáles corresponden a gráficos de funciones continuas en el punto  $c$ ? .....

Para los mismos, ¿qué relación se verifica entre  $f(c)$  y el  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ? .....

Esta conclusión te permite definir función continua en un punto:

**Definición de función continua en un punto c**

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto c. Se dice que f es continua en un punto c si:

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
-------------------------------------

La igualdad anterior implica, en realidad, tres condiciones: dos de existencia y una de igualdad ¿Puedes escribirlas? i)..... ii)..... iii).....=.....

**Discontinuidad de una función en un punto**

En cada uno de los gráficos de la Fig. 1 que correspondan a funciones discontinuas, ¿cuál o cuáles de las condiciones i), ii) y iii) no se cumplen?

- |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1) i) ..... | 2) i) ..... | 3) i) ..... | 4) i) ..... | 5) i) ..... |
| ii) .....   |
| iii) .....  |

Reflexiona: ¿Cuántas condiciones deben dejar de cumplirse para que puedas afirmar que una función es discontinua? .....

Podemos dar ahora la siguiente definición:

**Definición de función discontinua en un punto c**

Una función f es discontinua en un punto c si.....
--

**Tipos de discontinuidades**

En la Fig. 1, observa los gráficos correspondientes a funciones discontinuas.

¿Cuáles son factibles de ser transformados en gráficos de otras funciones que sean continuas, o sea, en gráficas de funciones que pueda realizarse sin levantar la mano?

En cada uno de estos gráficos ¿qué condición de existencia se cumple siempre?

Este tipo de discontinuidad se denomina evitable. Las restantes discontinuidades, por no cumplir con esa condición se denominan no evitables. O sea las discontinuidades de una función en un punto pueden clasificarse en dos tipos:

Tipos de discontinuidades	
Evitable	No evitable
Si .....	Si .....

**Ejercicios:**

1) En cada una de las funciones que se definen a continuación, estudia la continuidad en el punto  $c=2$

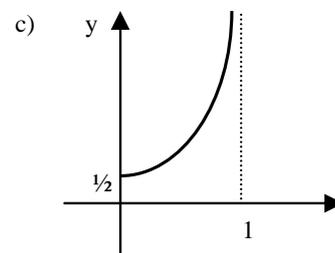
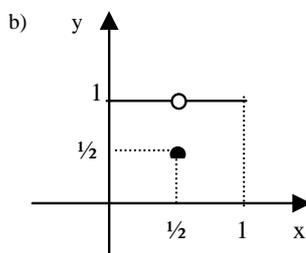
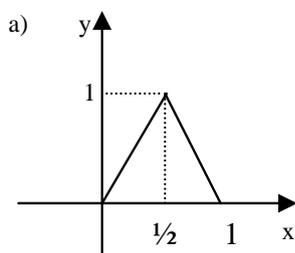
a)  $f(x) = x - 2$       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$       c)  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$       d)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2) En cada uno de los gráficos que se observan en la Fig. 2 analiza:

2<sub>1</sub>) ¿Existe  $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$ ? En caso afirmativo, escribe su valor. Justifica tu respuesta.

2<sub>2</sub>) ¿Es f continua en 1/2?



**Fig. 2**

## APLICACIÓN

En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo  $t$  (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación) es una función de la temperatura  $T$  del cultivo,

medida en °C. Si esta función está dada por:  $t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24} T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \frac{4}{3} T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$

estudia la continuidad de la función  $f$  cuando la temperatura es  $36$  °C e interpreta el problema.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A. (1999). Y en Matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. Vol. 38, pp. 39-56.
- Bixio, C. (2005). *Enseñar a aprender. Construir un espacio colectivo de enseñanza aprendizaje*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.
- Campanario, J. M. y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 17 (2), 179-192.
- Coll, C. (1992). Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: La concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza. En C. Coll, J. Palacios, A. Marchesi. *Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la educación*. Madrid: Alianza Editorial.
- Coll, C.; Palacios, J. y Marchesi, A. (1992). *Desarrollo psicológico y educación, II*. Alianza Editorial. Madrid.
- Czar, M. y Pizarro de Raya, A. (1993). Las corrientes psicológicas en el estudio del aprendizaje. En M. Czar, A. Pizarro de Raya, C. Badfessi de Tapaltar, G. *Concepciones del aprendizaje y práctica docente. Módulo IV*, pp. 3-64. Curso de Formación Pedagógica para Docentes Universitarios. Instituto coordinador de programas de capacitación. Secretaría de Planeamiento de la U.N.T. Tucumán.