SOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO USANDO EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA DIFERENCIA DE CUADRADOS O GNÓMONES

Julio Cesar Barreto García
U. E "José Antonio Sosa Guillen". Palito Blanco, Estado Yaracuy,Venezuela.
Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre". Extensión San Felipe
juliocbarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo mostramos otra forma de encontrar la solución de la ecuación cuadrática o mejor conocida ecuación de segundo grado, usando algunos procesos cognitivos y algunas aplicaciones algebraicas entre las que cabe destacar la diferencia de cuadrados, la cual se puede resolver usando el teorema de Pitágoras y una proposición de Thales de Mileto en la que se asegura que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo, con la longitud de la hipotenusa igual al diámetro de dicha semicircunferencia.

Esta diferencia de cuadrado nos puede ayudar a deducir también los gnómones, y usarlos para hallar la solución de la ecuación cuadrática, colocando las longitudes en un triángulo rectángulo adecuado. Además, encontramos otra forma de cuadrar un rectángulo y completar cuadrados en ecuaciones de segundo grado que aparecen en las cónicas y cuádricas.

PALABRAS CLAVE: Procesos cognitivos. Diferencia de cuadrados. Teorema de Pitágoras. Gnomon. Ecuación cuadrática.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las acciones cognitivas también llamada los procesos cognitivos en el campo de la Didáctica de la Matemática, es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de la diferencia de cuadrados y en alguna de sus aplicaciones en las diversas situaciones que se les presenten cuando se usen en la ecuación de segundo grado, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por (Duval, 1998) y desarrollados ampliamente por (Torregrosa y Quesada, 2007).

En este sentido, el proceso cognitivo de visualización está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración geométrica y el razonamiento se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les correspondan algebraicamente, y en este sentido tomamos en consideración la idea de área que tienen las diferentes figuras geométricas involucradas en las distintas configuraciones.

La coordinación de estos procesos cognitivos les permitirá construir desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables y hasta el teorema de Pitágoras, en términos de áreas.

Es importante destacar que usaremos algunos procesos cognitivos que se aplican en Didáctica de la geometría como propuesta didáctica en el aula, en particular, a la visualización-aprehensión como camino para llegar al razonamiento matemático.

REFERENTES TEÓRICOS (DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA)

Debemos tener en cuenta que en la coordinación de los procesos cognitivos en geometría Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) describen a la *visualización* como "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (p. 441).

Y debido a que este concepto es muy abstracto e implica el uso de todos los sentidos y no únicamente el de la vista, nos restringimos por el de *aprehensión*, en el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar", según el (Diccionario de la Real Academia Española, 2001).

En estas *aprehensiones,* nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo una *aprehensión operativa de reconfiguración* la cual se refiere a la manipulación de las subconfiguraciones iniciales como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas plana según el (Diccionario de la Real Academia Española, 2001).

Luego, de acuerdo con un *razonamiento discursivo como un proceso natural* que es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, llegamos a conclusiones que se pueden usar para deducir solución a los problemas, razonando sobre las figuras hechas en foami o cartulinas de colores las cuales pueden ser manipuladas por nuestros estudiantes, tratando problemas geométricos y haciendo una analogía entre la parte algebraica y geométrica, logrando así incentivar la *visualización* en nuestros estudiantes, aunque sea de una manera un poco restringida como en la *aprehensión,* ya que no es originada por el uso de todos los sentidos en su amplia acepción.

Además, usaremos un proceso cognitivo llamado *aprehensión operativa de cambio figura*l que se refiere a añadir (o quitar) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones, como por ejemplo al colocar una línea de división a un rectángulo para transformarlos en cuadrados y otros rectángulos que nos permitan formar el gnomon que tenga las misma área del rectángulo de donde se originó.

Usaremos una *conjetura sin demostración* que nos permitirá resolver el problema, aceptando las conjeturas simples a través de una *aprehensión operativa de cambio figural*, que nos conduce a la solución del problema, según los *procesos cognitivos* de (Duval, 1998).

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO APLICANDO LA DIFERENCIA DE CUADRADOS A PARTIR DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Deduciremos las soluciones de algunas ecuaciones de segundo grado que aunque se definen como expresiones del tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$, con A, B C $\in Q$ y $A \neq 0$. Como $A \neq 0$ podemos dividir la ecuación entre $A \neq 0$ y obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado que es equivalente $x^2 + ax + b = 0$, con los coeficientes $b = \frac{B}{A}$, $c = \frac{C}{A}$.

Veamos las soluciones de algunas ecuaciones de segundo grado de una manera geométrica, es decir razonando en términos de áreas, pero tomando en cuenta su expresión algebraica:

1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA FORMA: $\boldsymbol{x^2 = a \cdot b}$ (CON $\boldsymbol{a \neq b}$)

Hallemos una solución geométrica de la ecuación $x^2 = a \cdot b$ (con $a \neq b$**)**: Dado un rectángulo de lados a y b, como el mostrado en el lado izquierdo de la **Figura 1**:

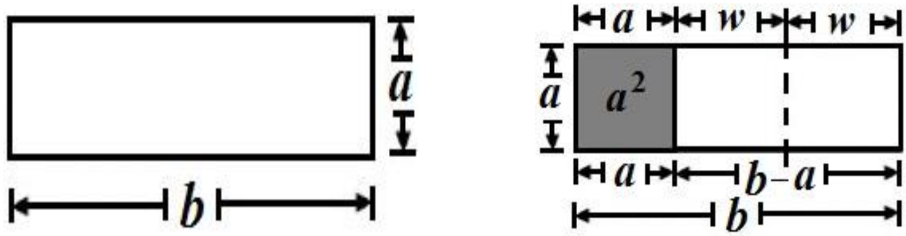

Figura 1: A la derecha formamos un cuadrado de lado ***a***, y un rectángulo de lados ***a*** y ***b-a***, los cuales se pueden hacer aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural* al rectángulo original mostrado a la izquierda, el cual tiene los lados ***a*** y ***b***

Tengamos en cuenta que $w = \frac{b-a}{2}$. Ahora, formemos la figura elemental mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* según la parte izquierda de la **Figura 2**:

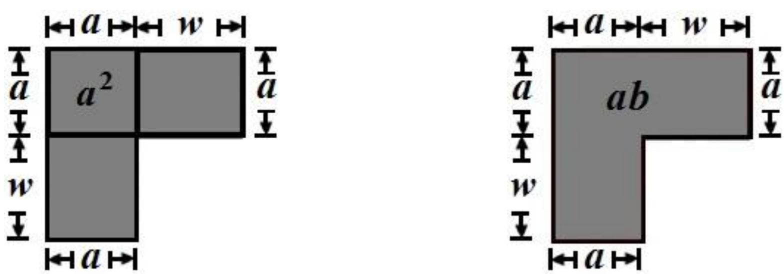

Figura 2: A la derecha notamos que podemos formar un gnomon y que le podemos agregar un cuadrado de lado ***w*** para formar el cuadrado grande de lado ***a+w***

El gnomon de acuerdo con la diferencia de cuadrados según lo vemos en la **Figura 3**:

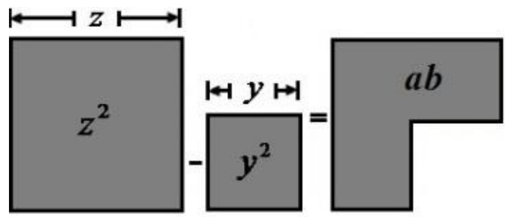

Figura 3: Notemos que al cuadrado gris grande de lado ***z*** le podemos quitar el cuadrado gris pequeño de lado ***y=w*** quedándonos el gnomon de gris, el cual vemos a la derecha y lo podemos dividir en dos rectángulos de áreas $z\ (z-y)$ e $y\ (z-y)$

La **Figura 3** muestra el gnomon o hexágono cóncavo de acuerdo con las longitudes de los cuadrados grises grande y pequeño. Se le aplica una *aprehensión operativa de cambio figural* para poder dividirlo en un rectángulo y un cuadrado según lo mostrado en la **Figura 4**:

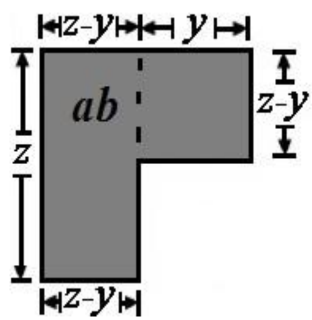

Figura 4: Gnomon de color gris dividido en rectángulos de áreas $z\ (z-y)$ e $y\ (z-y)$

Definición 1 (Polígono cóncavo y polígono convexo): Un polígono **convexo** "no tiene ángulos que apunten hacia dentro". En concreto, los ángulos internos no son mayores que 180°. Si hay algún ángulo interno mayor que 180° entonces es **cóncavo**. Vea la **Figura 5**:

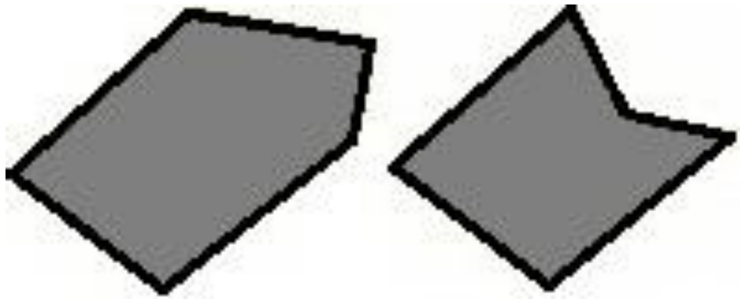

Figura 5: A la izquierda vemos un polígono convexo y a la derecha un polígono cóncavo. Para recordar: “Cóncavo es como tener una cueva”

La **Figura 4** muestra un polígono de seis lados llamado hexágono y que al ser además cóncavo se le denomina hexágono cóncavo y es llamado más comúnmente gnomon.

Nota Histórica: “Los griegos antiguos usaron el “gnomon” y esta es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño (o según Aristóteles es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma). Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general” (Puerta, 1996, p. 265).

Ahora bien, en virtud del teorema de Pitágoras de acuerdo con (Barreto, 2011), tenemos que dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados.

Para ello notamos que en este caso el cuadrado “diferencia” se construye sobre un cateto y se trata de hallar el otro cateto desconocido.

A diferencia del procedimiento usado cuando se construyen los cuadrados sobre las longitudes de los catetos y se encuentra el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa ampliamente discutido en la referencia de (Barreto, 2008b, 2009a) o para mayores resultados y extensiones revisar (Barreto, 2010). Veamos ahora la **Figura 6**:

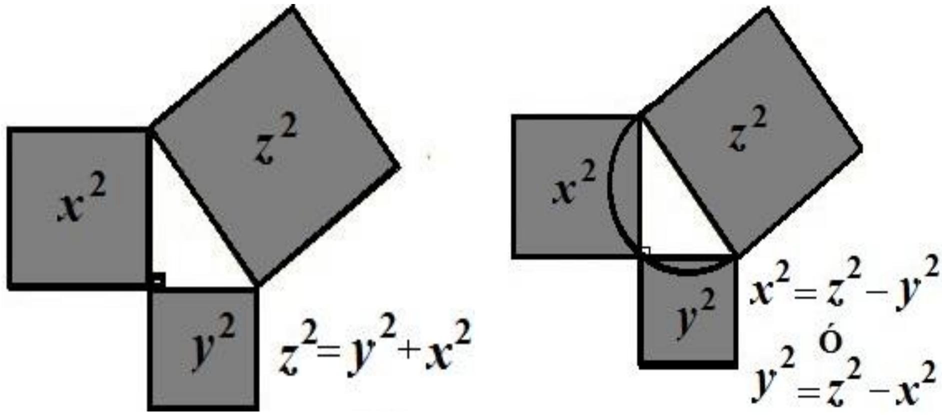

Figura 6: Acepción geométrica del teorema de Pitágoras. Deduciremos que este cuadrado rojo de lado ***x*** tiene la misma área que el rectángulo rojo de ancho ***a*** y largo ***b***. En la parte derecha vemos que se puede formar esta configuración con este triángulo rectángulo de acuerdo con la proposición establecida por Thales de Mileto en la que se asegura que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Nota Histórica: Cuando en geometría se hable del Teorema de Tales (o Thales), debemos aclarar a cuál de ellos nos referimos ya que existen al menos dos teoremas atribuidos al matemático Griego Tales de Mileto en el siglo VI a. C. El primero de ellos se refiere a la *construcción de un triángulo que sea semejante a otro existente*. Mientras que el segundo desentraña una *propiedad esencial de los circuncentros de todos los triángulos rectángulos* el cual nos enuncia que los circuncentros se encuentran en el punto medio de su hipotenusa, como observamos en la **Figura 6**.

En la siguiente configuración geométrica nuestros estudiantes pueden hacer una *aprehensión operativa de cambio figural* colocando una línea donde haga falta como se realizó en la **Figura 4**, la cual sirve para demostrar lo anteriormente mencionado, es decir que se cumple lo siguiente $z^2 - y^2 = z(z-y) + y(z-y)$, lo cual efectivamente concuerda con el área de ese rectángulo rojo que tiene por ancho ***a*** y por largo ***b***. Veamos la **Figura 7**:

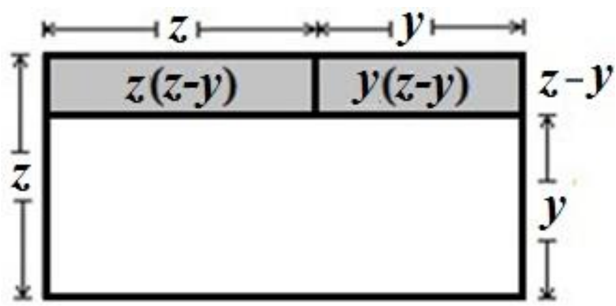

Figura 7: Tenemos una configuración geométrica para la diferencia de cuadrados.

Veamos como cuadramos el rectángulo de la **Figura 7** según lo realizado en la **Figura 8**:

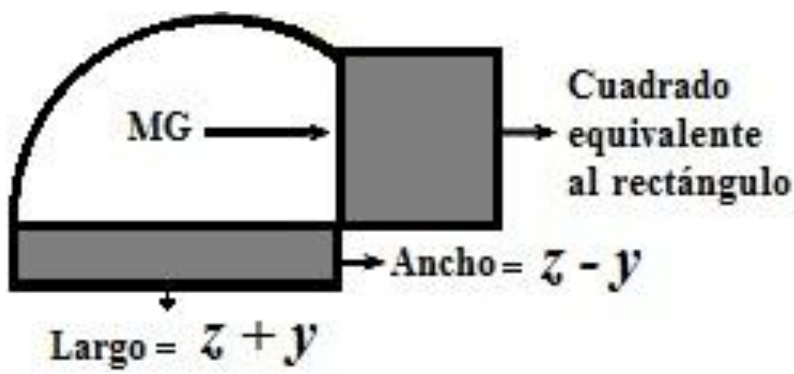

Figura 8: Con la Media Geométrica (MG), desarrollada por Barreto (2009b), podemos cuadrar el rectángulo del gnomon de la diferencia de cuadrado y notamos que encontramos el mismo cuadrado rojo de esta figura (Esto razonando en términos de áreas).

Resultando que podemos formar un cuadrado y expresarlo así: $z^2 - y^2 = x^2$ (1).

El problema de cuadratura es el más sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema según (Barreto, 2009b) y esta explicada en la *proposición 13 del sexto libro de los Elementos* (Puerta, 1996), en la que se muestra como *construir* un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

La *construcción* en cuestión se hace dibujando una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia: El segmento así generado es el lado del cuadrado buscado.

Según la **Figura 8**, aplicamos una *aprehensión discursiva* que se refiere a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas sean estas definiciones, teoremas, axiomas, cambiando del *anclaje discursivo al anclaje visual* que se refiere a la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

El cambio de anclaje se denomina al vínculo que puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada según (Duval, 1998).

Pero como este cuadrado rojo proviene de cuadrar el rectángulo blanco de ancho $\boldsymbol{a}$ y largo $\boldsymbol{b}$ mostrado a la izquierda de la **Figura 1**, entonces tenemos que se cumple que:

$$x^2 = a \cdot b \ (2)$$

Ahora bien, notemos que desarrollando la ecuación (1) tenemos además que se cumple:

$$z^2 - y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Así, de la ecuación (2) nos queda la siguiente identidad o factorización muy importante:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Observación: La solución de la ecuación $x^2 = a \cdot b$ (con $a = b$) es trivial pues nos queda que $\boldsymbol{x^2 = a^2}$ ó $\boldsymbol{x^2 = b^2}$, lo cual nos da como solución $x = a$ ó $\boldsymbol{x = b}$. Recordemos que estamos trabajando con longitudes por tanto no tenemos soluciones $x = -a$ ó $\boldsymbol{x = -b}$.

1.1. PRODUCTO NOTABLE DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS POR SU DIFERENCIA (BINOMIOS CONJUGADOS)

Los productos notables, son productos de polinomios que aparecen con mayor frecuencia y los binomios conjugados son aquellos que sólo se diferencien en el signo de la operación. Para multiplicar binomios conjugados, basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos, obteniendo una diferencia de cuadrados $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Veamos mediante el siguiente ejemplo como se realiza el producto, tomando en cuenta la distribución anterior:

$$\begin{aligned}(3x+5y)(3x-5y) &= (3x)(3x)+(3x)(-5y)+(5y)(3x)+(5y)(-5y)\\ &= 9x^2-15xy+15xy-25y^2\end{aligned}$$

Cancelando los términos opuestos que son semejantes:

$$(3x+5y)(3x-5y)=9x^2-25y^2$$

A este producto notable se le conoce como producto de una suma por la diferencia de dos términos o de un binomio, además se le llama como producto de un binomio conjugado y da como resultado una diferencia de cuadrados.

Una configuración geométrica está en la secuencia de la **Figura 9** de abajo mediante unas *aprehensiones operativas de reconfiguraciones*, donde a la izquierda tenemos un rectángulo de lados de lados $a+b$ y $a-b$ con área $(a+b)(a-b)$ y al agregarle un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$ y área b^2, podemos formar un cuadrado $\boldsymbol{a}$ de área a^2, y que al hacer la diferencia de cuadrados nos queda:

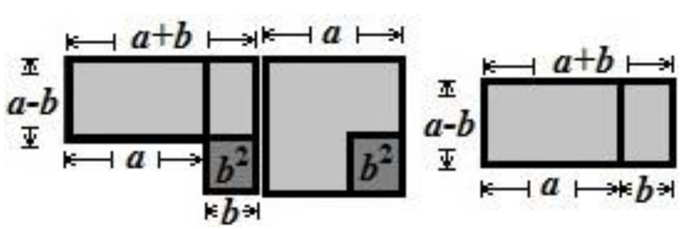

Figura 9: Acepciones geométricas de la diferencia de cuadrados a^2-b^2.

El cuadrado que sobra de lado b al hacer la diferencia de áreas lo quitamos y nos queda:

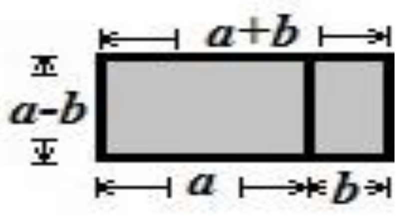

Figura 10: Según esta configuración en el rectángulo que se forma con lo que sobra de la diferencia de cuadrado $a^2 - b^2$ se cumple que esta tiene por área $(a+b)(a-b)$.

Así, geométricamente tenemos que: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA FORMA: $x^2 + ax = b$

Desde el punto de vista geométrico, la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + ax = b$ (siendo ***a*** y ***b*** positivos) equivale a determinar las dimensiones ***x*** y ***x+a*** de un rectángulo de área ***b***, puesto que podemos rescribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$x^2 + ax = x(x+a) = b$$

Usamos la teoría acerca de las deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos desarrollada en (Barreto, 2008a) para formalizar los siguientes temas a utilizar durante parte de la teoría.

De acuerdo con lo discutido en (Barreto, 2011) con la *Factorización por Factor Común* por ejemplo el resultado de multiplicar un binomio $a+b$ con un término c se obtiene algebraicamente aplicando la propiedad distributiva, veamos la configuración en la **Figura 11**:

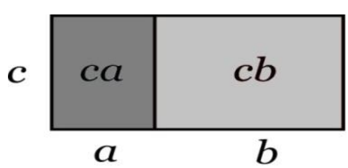

Figura 11: Geométricamente vemos que se cumple que: $c(a+b) = ca + cb$

Esta operación tiene una interpretación geométrica ilustrada en la **Figura 11**.

El área del rectángulo es $c(a+b)$ (el producto de las longitudes de ancho por el largo), que también puede obtenerse como la suma de las dos áreas de los rectángulos de colores verde y marrón que de acuerdo con Barreto (2008a) que tienen por área ***ca*** y ***cb*** respectivamente. Esto se basa en el Axioma de aditividad planteado para figuras geométricas elementales.

Ejercicio propuesto: Probar que $3x(4x+6y)=12x^2+18xy$ y haga una representación geométrica del mismo, para verificar que se cumple lo algebraico en lo geométrico.

Ahora continuando con la solución de la ecuación $x^2+ax=b$ supongamos, pues que el área del rectángulo mostrado a la izquierda de la siguiente **Figura 12** es ***b***:

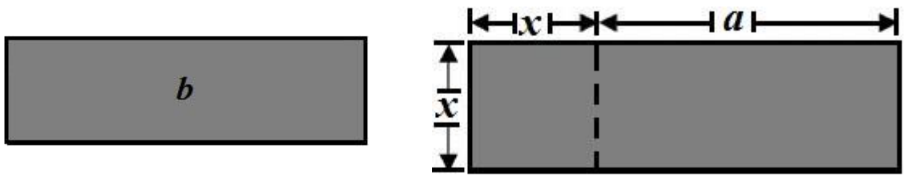

Figura 12: A la derecha hacemos una configuración al rectángulo de área ***b***, de acuerdo con las dimensiones ***x*** y ***x+a*** que están en la ecuación de segundo grado según la factorización de la misma, podemos formar el rectángulo a la derecha de la figura.

Ahora, de acuerdo con lo realizado en la **Figura 1** podemos hacer la subconfiguración de este rectángulo como lo vemos en la **Figura 13** en la izquierda, y además de acuerdo con la **Figura 2** obtenemos un gnomon como el mostrado en la parte derecha en la **Figura 13**:

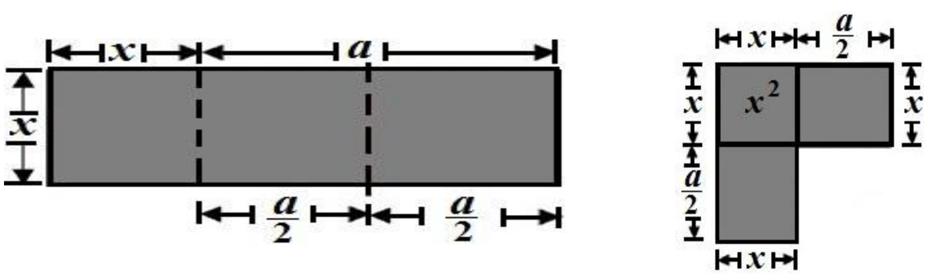

Figura 13: A la izquierda le aplicamos un *aprehensión operativa de cambio figural* al rectángulo que está a la derecha de la **Figura 12**, y a la derecha formamos un gnomon con estos rectángulos mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Entonces, el área del gnomon (hexágono cóncavo obtenido a partir del rectángulo anterior) de la **Figura 13** siguiente también tiene por área ***b***. Al cuadrarse encontramos un cuadrado de lado ***x*** que de cómo resultado un área de magnitud ***b***, es decir, $x^2 = b \Rightarrow x = \sqrt{b}$.

Por tanto de acuerdo a la resolución anterior tenemos que se cumple la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Es decir, el segmento $x + \frac{a}{2}$ es la longitud de la hipotenusa, lado mayor, de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes $\sqrt{b}$ (***b*** positivo) y $\frac{a}{2}$.

En consecuencia, el procedimiento para la resolución geométrica de la ecuación se reduce a construir un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{b}$ y $\frac{a}{2}$. Teniendo en cuenta que la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo es $x + \frac{a}{2}$. Veamos ahora la **Figura 14**:

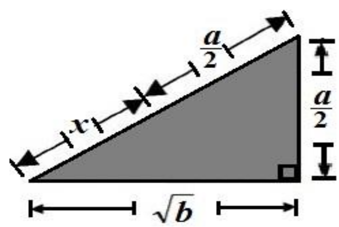

Figura 14: En la configuración notamos que para encontrar la solución ***x*** debemos quitarle a la longitud de la hipotenusa un segmento de longitud $\frac{a}{2}$.

Nota: Esto nos puede ayudar en la ardua tarea tan incómoda para los nuestros discentes como es el completar cuadrados como veremos en lo planteado en el **Ejercicio 2**.

Ejercicio 1: Halla la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Solución: Sean $a = 2$ y $b = 3$, reescribiendo la ecuación de esta forma $x^2 + 2x = 3$. Luego, de acuerdo a lo anteriormente deducido tenemos que:

$$3 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (x+1)^2 - (1)^2 = (x+1)^2 - 1.$$

Así,

$$3 + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow 4 = (x+1)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{4} = x + 1 \Rightarrow \pm 2 = x + 1 \Rightarrow \pm 2 - 1 = x.$$

O bien,

$$\begin{cases} 2 - 1 = x_1 \\ -2 - 1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Las cuáles son las dos soluciones reales de la ecuación cuadrática. Estas dos soluciones las puede verificar con la laboriosa resolvente de la ecuación de segundo grado.

Ejercicio propuesto: Sustituir las raíces y ver que es solución de la ecuación.

Al sustituir el valor de la raíz $x_1 = 1$, tenemos que la longitud de la hipotenusa es $h = 1 + 1 = 2$. Lo cual se ve geométricamente en la **Figura 14**:

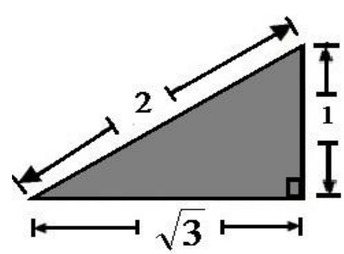

Figura 14: Acepción geométrica de la solución de la ecuación cuadrática dada en el anterior **Ejercicio 1.** Verificar que efectivamente se cumple el teorema de Pitágoras

Es decir podemos formar efectivamente las longitudes de un triángulo rectángulo, ahora al sustituir el valor de la raíz $x_2 = -3$, tenemos que la longitud de la hipotenusa es $x = -3 + 1 = -2$, que es la proyección de la longitud de la hipotenusa en sentido contrario.

Ejercicio propuesto: Dar una interpretación geométrica de la solución planteada anteriormente.

Ejercicio 2: Determinar si la ecuación $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2$ es la ecuación de una circunferencia.

Solución: Sean las dos ecuaciones $x^2 + 2x = r$ y $y^2 + 2y = s$ en variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ con $r > 0$ y $s > 0$ respectivamente. Luego, de acuerdo a lo anteriormente deducido tenemos que:

$$r = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (x+1)^2 - (1)^2 = (x+1)^2 - 1.$$

Y además,

$$s = \left(y + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (y+1)^2 - (1)^2 = (y+1)^2 - 1.$$

Luego sumándolas:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 2 &\Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 2\\ &\Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2 + 2 = 4.\end{aligned}$$

Es decir: $$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{4}\right)^2 = (2)^2$$

Que es la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $(-1,-1)$ y de radio 2.

3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA FORMA: $\boldsymbol{x^2 = ax + b}$

El cálculo geométrico de las raíces positivas de la ecuación cuadrática $x^2 = ax + b$**,** consiste en determinar las dimensiones $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x\text{-}a}$ de un rectángulo de área $\boldsymbol{b}$, puesto que podemos reescribir esto de la siguiente forma $\boldsymbol{x^2 - ax = x(x - a) = b}$ factorizando sacando factor común. Admitamos que el área del rectángulo de la parte izquierda de la **Figura 16** es $\boldsymbol{b}$, y realicemos las siguientes configuraciones a este rectángulo:

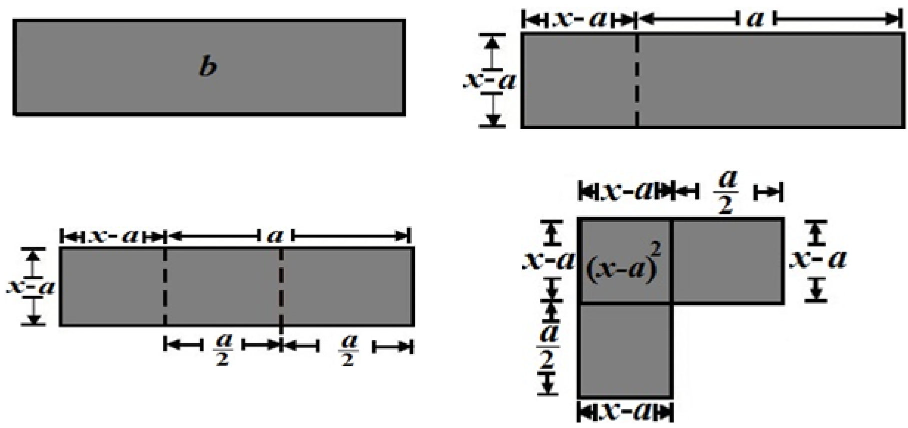

Figura 16: A la derecha hacemos una configuración al rectángulo de área b, de acuerdo con las dimensiones x y x-a que están en la ecuación al factorizarla. Abajo y a la izquierda le aplicamos un *aprehensión operativa de cambio figural* al rectángulo que está a la derecha de arriba, y abajo y a la derecha formamos un gnomon con estos rectángulos mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Entonces, el área del gnomon en la parte derecha de la **Figura 16** es $\boldsymbol{b}$. En consecuencia de lo deducido anteriormente de acuerdo con la diferencia de cuadrados nos queda que de acuerdo con lo deducido para hallar la solución de la ecuación $\boldsymbol{x^2 - ax = b}$:

$$b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Es decir, el segmento $x - \frac{a}{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyas longitudes de los catetos son $\sqrt{b}$ y $\frac{a}{2}$. Con esto, el procedimiento geométrico para resolver la ecuación es el siguiente: Se construye un triángulo rectángulo de longitudes en los catetos $\sqrt{b}$ y $\frac{a}{2}$. Luego se prolonga la hipotenusa una longitud igual a $\frac{a}{2}$. El segmento obtenido es $\boldsymbol{x}$ veamos la **Figura 17**:

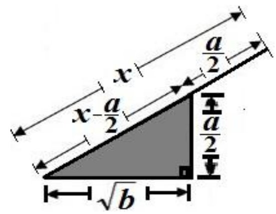

Figura 17: En la configuración notamos que para encontrar la solución $\boldsymbol{x}$ debemos sumarle (prolongar) a la longitud de la hipotenusa $x-\frac{a}{2}$ un segmento de longitud $\frac{a}{2}$.

Ejercicios propuestos:

- **a)** Halla la solución de la ecuación cuadrática $x^2-2x-3=0$.
- **b)** Dar una interpretación geométrica para la segunda raíz de la solución planteada anteriormente de acuerdo con el **Ejercicio 1**.
- **c)** Determinar si la ecuación $x^2-2x+y^2+2y=2$ es la ecuación de una circunferencia. **Respuesta:** $(x-1)^2+(y+1)^2=(2)^2$

4. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA FORMA: $\boldsymbol{x^2+b=ax}$

Resolver geométricamente la ecuación $x^2+b=ax$ equivale a calcular las dimensiones $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{x}$ de un rectángulo de área $\boldsymbol{b}$, pues podemos reescribir esto de la siguiente forma $\boldsymbol{ax-x^2=(a-x)x=b}$ factorizando sacando factor común. A la hora de dibujar un rectángulo de dichas dimensiones debes presentar dos casos diferentes:

- **(a)** $a-x>x$
- **(b)** $a-x<x$

La **Figura 18** muestra nuevas configuraciones de los casos anteriores, las cuales se pueden revisar en (Barreto, 2014) y se pueden verificar como ejercicios:

Figura 18: Deducir que de la configuración de la derecha nos queda que $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ y de la figura de izquierda nos queda que $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$

Conclusión

En esta experiencia realizada con los estudiantes se evidenció que el trabajo en equipo es muy importante sobre todo cuando se construye el aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en cartulinas de colores o en foami, los cuales le permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos llegando luego a razonamientos que les permiten crear un aprendizaje significativo.

Referencias bibliográficas

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Revista Números*, 69.

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Números*, 69.

Barreto, J. (2009a). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Revista Números*, 70.

Barreto, J. (2009b). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *Revista Números* (71). *Revista Números*, 71.

Barreto, J. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Revista Números*, 75.

Barreto, J. (2011). Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Matematicalia* 7 (2).

Barreto, J. (2014). *Teorema de Pitágoras: Un estudio del método geométrico al cálculo integral con aplicaciones*. Amazon. Colección de Secundaria (4).

Duval. R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. Dordrecht, Netherlands: *Kluwer Academic Publishers*, pp 37-51.

Puertas M. (1996). *Elementos*. España: Gredos

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 07 de diciembre de 2014 de http://www.rae.es/rae.html.

Torregrosa, G y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10 (2),* 273-300.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematic Education 27* (4), 435–457.