Doit-on réguler l'appropriation des connaissances ?

Elsa Martin, Hubert Stahn

GREQAM

Groupement de Recherche en Economie
Quantitative d'Aix-Marseille - UMR-CNRS 6579
Ecole des Hautes études en Sciences Sociales
Universités d'Aix-Marseille II et III

Document de Travail
n°2011-38

Doit-on réguler l'appropriation des connaissances ?

Elsa Martin
Hubert Stahn

September 2011

Doit-on réguler l'appropriation des connaissances ?

Elsa MARTIN
CESAER[*], AgroSup Dijon

Hubert STAHN
GREQAM[†], Université de la Méditerranée

Septembre 2011

Résumé

Nous proposons dans ce travail de considérer le stock de connaissances exploitables par des laboratoires privés à des fins de dépôts de brevets comme un commun dont l'évolution au cours du temps dépend à la fois du nombre de brevets déposés et d'un co-produit des activités de recherche de l'Université. Nous montrons tout d'abord que la compétition entre les laboratoires supposés stratégiques génère, à court terme, une sur-appropriation du stock de connaissances dont l'effet, à long terme, est de réduire les possibilités de dépôts de brevets. Nous montrons ensuite que la taxation des dépôts de brevets constitue un outil efficace de régulation du processus de privatisation des connaissances.

Mots-clés : Science et technologie, brevet, ressource en bien commun
Codes de classification J.E.L. : O31, H42
Coordonnées :

MARTIN Elsa
C.E.S.A.E.R.
AgroSup Dijon
26, Bd du Docteur Petitjean
BP 87 999
21 079 Dijon Cedex
FRANCE
tel +33 380 772 691
fax +33 380 772 571
E-mail : elsa.martin@dijon.inra.fr

STAHN Hubert (*)
G.R.E.Q.A.M
Université de la Méditerranée
Château Lafarge
Route des Milles
13 290 Les MILLES
FRANCE
tel +33 442 935 981
fax +33 442 930 968
E-mail : hubert.stahn@univmed.fr
(*) Auteur pour la correspondance

[*]Centre d'Economie et Sociologie appliquées à l'Agriculture et aux Espaces Ruraux, UMR 1041 of the INRA
[†]Groupement de Recherche en Economie Quantitative d'Aix-Marseille, UMR 6579 of the CNRS

1 Introduction

Dans une économie basée sur la connaissance, la politique des brevets, et en particulier la nature du système de taxation, constituent un élément non négligeable d'une politique d'innovation. En effet, même si le brevet, dont l'objet est d'inciter à l'innovation, crée de facto une position de monopole, il peut être pertinent, d'un point de vue social, de moduler le coût d'obtention et/ou de renouvellement d'un brevet suivant la longueur ou la largeur choisie afin de rendre le processus d'innovation plus efficace[1]. Ces arguments sont biens connus depuis les contributions de Klemperer (1990), Gilbert-Shapiro (1990) ou Scotchmer (1991). Mais, dans la plupart de ces travaux, la connaissance sur laquelle s'appuie le brevet est déjà supposée comme étant nouvelle, utile et non triviale, et surtout comme pouvant immédiatement faire l'objet d'une privatisation. Les arguments en faveur d'une politique de taxation des brevets reposent donc généralement sur des considérations liées au marché final et à la nature de la concurrence. Dans cet article, nous proposons d'apporter une justification nouvelle de la taxation des brevets en ne regardant plus en aval mais plutôt en amont. Il s'agit de mieux comprendre l'impact d'un système de taxation des brevets sur le processus de privatisation de la connaissance issue du secteur public de la recherche.

Nous proposons de partir d'une définition particulière de la notion de Science et de Technologie. Nous n'opposerons pas des principes généraux à un savoir pratique ou la recherche pure à la recherche appliquée. Nous retiendrons plutôt la distinction introduite par Dasgupta-David (1987) reposant sur l'idée qu'il s'agit de deux secteurs ayant des modes de fonctionnent différents[2]. Le premier développe un savoir académique caractérisé par un mode d'évaluation spécifique par les pairs : il sera désigné par le terme Université dans la suite. Tandis que le deuxième développe une activité de recherche dont les résultats sont fortement assujettis à leur valorisation sur le marché : ce sera le secteur des laboratoires privés. Cette opposition entre universités et laboratoires privés peut sembler relativement dépassée puisque les universités sont actuellement en compétition avec les laboratoires privés et gèrent même leur propre portefeuille de brevets. Mais cette activité, comme le suggère Thursby et al (2009), résulte d'une pratique de conseil, c'est-à-dire d'une activité restant assujettie au marché. Cela ne remet donc pas en cause la distinction proposée. Il suffit simplement d'introduire une définition plus restrictive de l'Université en considérant une communauté produisant un savoir non marchand et régie par ses propres règles d'évaluation.

[1] Le lecteur pourra également se référer à Cornelli et Schankermann (1999) pour les questions de longeur et de largeur. Pour des considérations plus générales sur la politique des brevets, voir également Encaoua, Guellec et Martinez (2006).

[2] Voir également Barba Navaretti et al. (1996) ou Carraro et Siniscalco (2003).

Nous allons donc nous concentrer sur deux communautés relativement différentes entre lesquelles circulent néanmoins de la connaissance. En effet, Jaffe (1989) a pu établir de manière empirique que l'élasticité des savoir applicables (mesurée par les brevets induits par la recherche scientifique) par rapport à la recherche académique est relativement importante[3], même si les canaux spécifiques de cette transmission de savoir restent assez variés. Par exemple Klevorick et al (1995) ont pu établir que l'impact des recherches récentes est relativement faible tandis que Cohen et al. (2002), en utilisant la base de données de Carnegie Mellon, ont mis en avant que la recherche fondamentale a globalement un impact non négligeable sur la R&D. Ainsi, même s'il y a débat sur le mécanisme de transmission le plus efficient[4] ou le plus intéressant du point de vue des entreprises[5], l'existence d'un tel transfert est indéniable et induit une compétition entre les laboratoires privés pour s'approprier la partie qui peut directement être valorisée du savoir, partie issue de l'Université (au sens où nous l'avons définie plus haut). Comme ce mécanisme de privatisation passe par la mise en place de brevets, leur taxation pourrait faire office d'instrument de régulation du processus d'appropriation pour, par exemple, comme le souligne Heller et Eisenberg (1998) dans le cas de la recherche biomédicale, limiter la sur-appropriation des connaissances dans un but stratégique dont l'effet à plus ou moins long terme est de tarir les usages potentiels de ces connaissances.

La question qui se pose est alors de savoir comment modéliser le mécanisme d'appropriation /privatisation des connaissances académiques par les laboratoires privés. Il s'agit à la fois de saisir l'évolution du stock des opportunités de développement de nouvelles innovations ainsi que l'exploitation à chaque instant de ce stock par les laboratoires privées. Pour ce faire, nous avons choisi d'adopter une approche dynamique. Ce choix nous permettra de distinguer entre les effets de court terme et de long terme. Les effets de court terme se traduiront notamment par une sur-appropriation/privatisation des connaissances dont l'effet, à long terme, sera de réduire les opportunités de développement de nouvelles applications.

Le stock d'opportunités provient de l'Université. Pour être plus précis, celle-ci produit à chaque instant un flux de connaissances disponibles gratuitement et plus ou moins directement applicables. De ce point de vue, elle contribue à chaque instant à l'accroissement de ce stock qui a toutes les caractéristiques d'un commun au sens de l'approche CPR (Common-Pool Ressource)[6].

[3] Voir également Adams (1990) ou Narin et al. (1997).

[4] Par exemple, Audretsch et al. (2005) mettent en avant des considérations géographiques en insistant sur la proximité entre laboratoires privés et Université tandis que Cohen et al (2005) insistent sur les publications scientifiques et toute forme de ressources en libre accès.

[5] Par exemple Acs et al. (1994) insistent sur les avantages comparatifs des start-ups, tandis que Link et Rees (1990) considèrent que les grosses entreprises qui disposent d'un département de R&D ont plus à gagner.

[6] Le lecteur pourra se référer à Hess et Ostrom (2003,2007) qui propose une application de l'approche CPR à l'économie de la connaissance.

Par ailleurs, cette communauté est régie par ses propres mécanismes d'évaluation qui, sur la base de la distinction introduite par Dasgupta-David (1987), n'intègre que très partiellement les incitations produites par le marché. Il semble donc assez naturel de supposer que cette contribution est, à chaque instant, exogène.

Les laboratoires privés ont, quant à eux , l'opportunité d'exploiter à chaque instant ce commun (i) en transformant une partie de ces connaissances publiques en produits susceptibles de rencontrer une demande mais également (ii) en limitant, par le biais d'un dépôt de brevets, l'accès à cette connaissance par leurs concurrents, non seulement aujourd'hui mais également dans le futur. Notre vision du processus de maturation d'une idée peut, de ce point de vue, être considérée comme assez fruste puisque le point (i) suppose implicitement qu'une partie de la connaissance académique peut directement être valorisée[7]. Mais cette simplification permet de mettre l'accent sur les conséquences liées à la réduction du stock d'opportunité d'innovation, c'est-à-dire le point (ii). Pour être plus précis, nous supposons que les bénéfices attendus de la R&D dépendent non seulement de la part de connaissances captée par un laboratoire privé mais également du stock total d'opportunités d'innovations. Il s'agit, dans la logique de Heller et Eisenberg (1998), de saisir l'idée selon laquelle l'appropriation passée des connaissances réduit, à chaque instant, les opportunités de développement de nouvelles innovations.

Comme les différents laboratoires sont en compétition tout en subissant un effet externe passant par une variable de stock, il semble assez logique de formaliser leurs interactions au moyen d'un jeu dynamique. L'introduction du temps continu nous permettra d'analyser ce processus de privatisation de la connaissance comme un jeu différentiel et plus précisément d'avoir recours au concept d'équilibre Markovien Nash parfait. L'objectif de ce travail va alors consister à confronter la solution de ce jeu à la solution d'un planificateur afin de mettre en évidence les sources d'inefficacité. Nous nous proposons en particulier de montrer que l'équilibre Markovien parfait d'un tel jeu possède la propriété selon laquelle les différents laboratoires privés s'approprient à chaque instant trop de connaissances produites par le monde académique et, par ce biais, limitent le développement d'un stock durable de connaissances exploitables. Finalement, puisque la privatisation de la connaissance et, en particulier, le mécanisme d'exclusion qu'il implique, passe par le dépôt de brevets, nous montrerons qu'il est possible de mettre en place un processus de taxation des brevets de manière à limiter la sur-exploitation du stock et contribuer à la constitution d'une réserve suffisante de connaissances applicables.

L'organisation de cette article sera donc la suivante. Dans une deuxième section, nous rap-

[7] En effet, en négligeant la question de la maturation d'une idée, nous éludons aussi le débat visant à évaluer les contributions relatives des secteurs public et privé au processus de développement d'une innovation (voir par exemple Aghion et al (2008)).

pellerons nos principales hypothèses et présenterons la structure du modèle. Dans une troisième section nous présenterons et analysons l'équilibre Markovien Nash parfait de ce jeux d'appropriation de la connaissance. Cela nous permettra dans une quatrième section de comparer ces résultats à une situation dans laquelle un planificateur central est en charge de la stratégie de dépôt de brevets. Une meilleure compréhension des sources de cette inefficacité nous amènera dans une cinquième section à proposer une règle de taxation des brevets dont l'objet est de restaurer l'efficacité. Enfin, la sixième section sera dédiée à la conclusion de ce travail.

2 Une illustration

Pour illustrer l'argument développé en introduction nous allons considérer un modèle relativement simple permettant de mieux comprendre les interactions stratégiques entre les laboratoires privés. Nous commencerons par exposer brièvement le contexte puis nous présenterons les hypothèses effectuées sur le comportement de ces laboratoires

2.1 Le contexte

Les unités privées de recherche indicées par $i = 1, ..., n$ sont mues par des mécanismes de marché. Par conséquent, nous pouvons aisément les caractériser par une fonction de profit instantané qui mesure à chaque instant du temps les bénéfices induits par l'appropriation de connaissances scientifiques, nets des coûts de maturation et d'ajustement des idées brutes privatisées par les laboratoires privés de recherche. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons même qu'ils supportent un coût unitaire constant c proportionnel au volume brut d'idées traitées $x_i(t)$. Par contre, la spécification du bénéfice attendu est plus complexe puisqu'il s'agit de capturer l'idée selon laquelle une appropriation excessive limite les profits futurs attendus. Or, à un instant donné, le stock d'idées exploitables $S(t)$ reflète assez fidèlement l'ensemble des décisions passées. Il est donc assez naturel de supposer que les bénéfices attendus sont non seulement une fonction croissante des idées $x(t)$ traités en t mais également du niveau de stock $S(t)$ d'idées vierges exploitables. Afin de rendre le modèle soluble, nous supposerons que ce bénéfice attendu à chaque instant du temps est de la forme $\frac{1}{a}\left(x_i(t) \cdot S(t)\right)^{\alpha}$.et nous poserons $\alpha = \frac{1}{2}$.[8] En d'autres termes, nous considérerons que la fonction de profit instantané d'un laboratoire privé i est donnée par :

$$\pi_i\left(x_i(t), S(t)\right) = 2\sqrt{x_i(t) \cdot S(t)} - c \cdot x_i(t)$$

[8]Mais le lecteur remarquera que l'ensemble des arguments exposés dans ce papier restent valides pour tout $\alpha \in]0, 1/2]$.

Il ne nous reste donc plus qu'à introduire la dynamique du stock de connaissances exploitables. Ce stock, comme nous l'avons déjà évoqué, est abondé à chaque instant par la recherche universitaire. Etant donné que ce type de recherche est supposé être indépendant de la logique de marché, nous supposerons que cette contribution R est exogène et constante dans le temps. Mais le stock est également réduit par les prélèvements $(x_i(t))_{i=1}^n$ effectués par les laboratoires privés. Le processus de privatisation étant basé sur l'exclusion, nous pouvons même avancer que ce stock sera réduit globalement par la somme des idées exploitées par chaque laboratoire. De ce point de vue la dynamique du stock est donnée par :

$$\dot{S} = R - \sum_{i=1}^{n} x_i(t),\ avec\ S(0) = 0$$

où le volume des connaissances disponibles initialement est normalisé à zéro.

2.2 Le concept d'équilibre

De manière assez évidente nous avons affaire à un jeu différentiel dans lequel chaque laboratoire va chercher à choisir sa stratégie d'appropriation optimale de manière à résoudre le programme suivant :

$$\max_{x_i(t)} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[2\sqrt{x_i(t) \cdot S(t)} - c \cdot x_i(t) \right] dt \tag{1}$$

$$s.l.c \quad : \quad \dot{S}(t) = R - \sum_{i=1}^{n} x_i(t),\ \text{avec } S(0) = 0 \text{ et } \forall t,\ S(t) \geq 0$$

où ρ est le taux d'escompte. Nous irons même jusqu'à négliger la contrainte de non négativité du stock afin de simplifier l'argumentaire.

En formulant le problème aussi simplement (sous la forme d'un équilibre de Nash en boucle ouverte) nous supposons implicitement que les laboratoires privés n'observent pas les stratégies jouées par leurs partenaires dans le passé. Or l'état du stock est une information accessible par tous qui agrège l'ensemble des stratégies passées. En outre, il semble évident que tous les laboratoires exploitent cette information pour fixer leurs stratégies courantes et ont conscience que les autres agissent de même. Par conséquent, nous n'aborderons pas le jeu différentiel que se livrent ces laboratoires au moyen d'un équilibre de Nash en boucle ouverte dans lequel chaque joueur définit sa meilleure réponse par rapport à un profil intertemporel $(x_j(\cdot))_{j\neq i}$ des stratégies de ses opposants. Nous ferons plutôt l'hypothèse que les stratégies $x_i(t) = \phi_i(S(t), t)$ sont Markoviennes et, comme tous les joueurs sont symétriques, nous considérerons un équilibre symétrique.

Par ailleurs, le lecteur aura déjà noté qu'à chaque instant, notre problème ne dépend du temps que par le biais du stock lui-même (notre problème est autonome). Nous pouvons donc nous restreindre à des stratégies Markoviennes stationnaires pour lesquelles la stratégie $x_i = \phi_i(S)$ est uniquement fonction du stock. En outre, il est bien connu que les stratégies Markoviennes stationnaires d'équilibre d'un jeu différentiel autonome ont la propriété d'être un équilibre Markovien pour tout sous-jeu démarrant en t avec un stock S donné. Nous pourrons par conséquent aisément caractériser notre équilibre d'équilibre Markovien Nash Parfait Symétrique.[9]

3 L'équilibre Markovien Nash Parfait Symétrique (MNPS)

De manière plus précise, un équilibre MNPS du jeu sera constitué par la fonction $\phi(S)$ qui satisfait le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \phi(S(t)) &= \arg\max_{x(t)} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[2\sqrt{x(t) \cdot S(t)} - c \cdot x(t) \right] dt \qquad (2) \\ s.l.c \quad : \quad \dot{S}(t) &= R - x(t) + (n-1) \cdot \phi(S(t)), \ S(0) = 0 \end{aligned}$$

auquel nous pouvons associer le Hamiltonien en valeur courante défini comme suit :

$$H(x, S, \lambda) = 2\sqrt{x \cdot S} - c \cdot x + \lambda \cdot [R - x - (n-1) \cdot \phi(S)]$$

Nous savons que s'il existe une fonction $\phi(S)$ telle que :

1. $H(\phi(S), S, \lambda) = \max_x H(x, S, \lambda)$
2. $\dot{\lambda} = \rho\lambda - \partial_S H(\phi(S), S, \lambda))$
3. $\dot{S} = R - n\phi(S)$
4. $S(t), \lambda(t) \geq 0$, et $\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \cdot \lambda(t) \cdot S(t) \leq 0$
5. $\max_x H(x, S, \lambda)$ est concave en S

alors nous avons affaire à un équilibre MNPS.

La condition 1 stipule simplement que le contrôle x, lorsqu'il est prédit par la règle $\phi(S)$, doit être optimal. Comme la fonction H est concave en x, cette condition peut se réécrire :

$$\sqrt{\frac{S}{\phi(S)}} - c - \lambda = 0 \qquad (3)$$

[9] Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Dockner et al. (2006).

La condition 2 définit la dynamique de la variable adjointe. En utilisant le théorème de l'enveloppe, elle devient :

$$\dot{\lambda} = \rho \cdot \lambda - \sqrt{\frac{\phi(S)}{S}} + \lambda \cdot (n-1) \cdot \frac{d\phi(S)}{dS} \tag{4}$$

Le troisième terme de cette dernière équation est lié à l'hypothèse selon laquelle les joueurs poursuivent des stratégies de Markov. Chacun suit donc une règle de décision parfaitement anticipée par ses opposants qui est fonction du stock de connaissances. Notre problème principal à ce stade est d'identifier une règle de rétroaction satisfaisant nos conditions, en particulier les équations (3) et (4). Or dans ces dernières, le rapport $\frac{\phi(S)}{S}$ apparaît. Cela suggère donc une règle de rétroaction relativement simple : linéaire de la forme $x = \phi(S) = \beta \cdot S$ où β est une constante représentant la proportion de brevets déposés par rapport au stock de connaissances exploitables. Dans ces conditions, l'équation (3) devient :

$$\sqrt{\frac{1}{\beta}} = c + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{\beta}} - c$$

où $\dot{\lambda} = 0$. Nous pouvons ainsi utiliser l'équation (4) pour déterminer la valeur β du coefficient de rétroaction, puisque :

$$0 = \rho \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\beta}} - c\right) - \sqrt{\beta} + \left(\sqrt{\frac{1}{\beta}} - c\right) \cdot (n-1) \cdot \beta \tag{5}$$

Si cette équation admet une solution réelle positive unique, il sera alors assez aisé de déterminer, en utilisant la condition 3, la trajectoire convergente du stock de connaissances. Après avoir validé 4 et 5, nous pourrons conclure que :

Proposition 1 *Il existe un $\beta_N(n,c,\rho) \in \mathbb{R}_{++}$ unique tel que la règle de décision $\phi(S) = \beta_N(n,c,\rho) \cdot S$ est un équilibre MNPS du jeu différentiel opposant les laboratoires privés dans le phénomène d'appropriation des connaissances publiques. Par ailleurs :*

(i) ce phénomène admet un équilibre stationnaire donné par :

$$S_N^*(R,n,c,\rho) = \frac{R}{n \cdot \beta_N(n,c,\rho)}, \quad x_N^*(R,n) = \frac{R}{n}, \quad et \quad \lambda_N^*(n,c,\rho) = \sqrt{\frac{1}{\beta_N(n,c,\rho)}} - c$$

(ii) dont le processus y menant est caractérisé par $S_N(t;R,n,c,\rho) = S_N^*(R,n) \cdot \left(1 - e^{-n\beta_N t}\right)$, $x_N(t;R,n,c,\rho) = x_N^*(R,n) \cdot \left(1 - e^{-n\beta_N t}\right)$, et $\lambda_N(t;R,n,c,\rho) = \lambda_N^*(n,c,\rho)$, $\forall t$.

Ce résultat d'existence (et d'unicité) nous permet également de mieux comprendre, d'une part, l'impact des différents paramètres sur le comportement à court terme de privatisation de la connaissance et, d'autre part, les effets à long terme de ces changements de comportement sur le stock de connaissances exploitables. Pour être plus précis, il s'agit, dans le premier cas, d'étudier l'impact d'un changement des paramètres sur la règle de décision Markovienne $x = \beta_N(n, c, \rho) \cdot S$ puis, dans le second, de comprendre les conséquences que cela peut avoir sur la dynamique d'équilibre du stock $S_N(t; R, n, c, \rho)$ de connaissances exploitables.

De manière assez évidente, nous devrions observer qu'une hausse du coût marginal c de mise en oeuvre d'une innovation conduit à une réduction du taux $\beta_N(n, c, \rho)$ de brevets déposés à chaque instant induisant ainsi une augmentation à tout instant du stock de connaissances exploitables. L'effet d'une augmentation du taux d'actualisation ρ est aussi assez prévisible. En effet, une préférence accrue pour le présent va induire une augmentation du taux de brevets déposés à chaque instant afin d'accroître les revenus présent au risque de réduire les connaissances exploitables dans le futur.

Mais il faudrait également savoir si cet équilibre MNPS reflète l'hypothèse émise par Heller et Eisenberg (1998) selon laquelle la concurrence entre les laboratoires induit, à court terme, un mécanisme de sur-accumulation de brevets dont l'effet, à long terme, est une réduction du stock de connaissances applicables. Pour s'en convaincre à ce stade de l'analyse, il suffit d'augmenter le degré de compétition entre les laboratoires (c'est-à-dire augmenter n) et de vérifier que nous obtenons bien une augmentation du taux de brevets déposés par rapport au stock, conduisant ainsi à une réduction au cours du temps du stock de connaissances exploitables dans le futur. Plus formellement, nous pouvons montrer que :

Proposition 2 *Notre équilibre MNPS vérifie les propriétés suivantes :*
(i) une augmentation de c réduit le taux de brevets déposés (c'est-à-dire $\frac{\partial \beta_N}{\partial c} < 0$) et augmente le stock de connaissances disponibles dans le futur (c'est-à-dire $\frac{\partial S_N(t)}{\partial c} > 0 \ \forall t$) ;
(ii) une augmentation de taux d'actualisation ρ accroit le taux de brevets déposés (c'est-à-dire $\frac{\partial \beta_N}{\partial \rho} > 0$) et réduit le stock disponible (c'est-à-dire $\frac{\partial S_N(t)}{\partial \rho} < 0 \ \forall t$) ;
(iii) l'accroissement de la concurrence accroit β (c'est-à-dire $\frac{\partial \beta_N}{\partial n} > 0$) et réduit le stock disponible (c'est-à-dire $\frac{\partial S_N(t)}{\partial n} < 0 \ \forall t$).

4 L'inefficacité de l'équilibre MNPS

Afin d'évaluer l'efficacité de l'équilibre MNPS du jeu précédemment établi, il nous faut caractériser l'équilibre socialement optimal ou efficace. Si nous poursuivons notre argument basé sur Heller et Eisenberg (1998), nous savons qu'un équilibre stratégique, encore appelé solution privée, a de fortes chances d'être inefficace en raison de la concurrence qui s'exerce entre les laboratoires privés pour l'appropriation de connaissances exploitables. En effet, étant donné que le niveau d'appropriation de chacun des rivaux est fonction du stock disponible et que tous sont parfaitement capables d'anticiper ceci, chacun des laboratoires aura intérêt, à court terme, à s'approprier plus d'idées qu'économiquement rationnel tout simplement pour s'en emparer avant ses rivaux. Il va en résulter, à court terme, une allocation intertemporelle privée des brevets qui ne correspondra pas à l'allocation socialement optimale et la conséquence sera qu'à long terme, le stock de connaissances exploitables sera réduit. Pour vérifier ceci, nous allons commencer par caractériser le processus optimal de privatisation des connaissances pour ensuite pouvoir le comparer avec l'équilibre MNPS et ainsi caractériser plus en détails les inefficacités à l'oeuvre.

4.1 Le processus optimal de privatisation

Afin de caractériser l'équilibre efficace et de confirmer analytiquement ces intuitions, nous supposons qu'une agence publique de brevets (elle maximise le bien-être de l'ensemble des laboratoires) choisit le programme d'allocation des brevets. Sous un tel régime, les effets précédemment évoqués sont pris en compte et, par conséquent, l'allocation intertemporelle de brevets sera socialement optimale. Dans un tel contexte, l'agence de brevets choisit optimalement les différentes quantités de brevets émises par chaque firme au cours du temps, i.e détermine $(x_i(t))_{i=1}^n$ de manière à optimiser la valeur présente de la somme des profits actualisée des différents laboratoires privés. Par ailleurs, comme la fonction de profit de chaque laboratoire est concave en $x_i(t)$ et la dynamique linéaire en $x_i(t)$, nous pouvons nous restreindre aux solutions symétriques. Par conséquent, il s'agit, pour un décideur public qui prend en considération l'allocation optimale des brevets, de résoudre le programme suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \int_0^{+\infty} ne^{-\rho t} \left[2\sqrt{x(t) \cdot S(t)} - c \cdot x(t) \right] dt \\ s.l.c \quad : \quad & \dot{S} = R - n \cdot x(t), \ S(0) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Si λ représente la valeur sociale du stock S de connaissances qui peuvent être privatisées, l'Hamiltonien d'un tel problème devient :

$$H(x, S, \lambda) = n \cdot \left(2\sqrt{x \cdot S} - c \cdot x \right) + \lambda \cdot (R - n \cdot x)$$

Comme ce Hamiltonien est concave en (x, S), nous savons par les conditions de Mangasarian que toute trajectoire $(x(t), S(t), \lambda(t))$ dont :

1. le contrôle est optimal :

$$\partial_x H(x, S, \lambda) = \sqrt{\frac{S}{x}} - c - \lambda = 0 \tag{7}$$

2. les dynamiques de la variable adjointe et du stock sont données par :

$$\dot{\lambda} = \rho \cdot \mu - \partial_S H(x, S, \lambda) = \rho \cdot \lambda - n \cdot \sqrt{\frac{x}{S}} \tag{8}$$

$$\dot{S} = R - n \cdot x(t) \text{ avec } S(0) = 0 \tag{9}$$

3. les conditions de transversalité $S, \lambda \geq 0$, et $\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \cdot \lambda(t) \cdot S(t) \leq 0$ sont satisfaites,

a la propriété d'être une trajectoire optimale.

Plusieurs trajectoires peuvent néanmoins vérifier cet ensemble de conditions[10], ce qui nous amène, le cas échéant, à procéder à une sélection. De ce point de vue, nous appliquerons un principe de simplicité : la règle optimale doit être facile à mettre en oeuvre. Si nous remarquons maintenant que la condition d'optimalité du contrôle (7) est identique à la condition (3) obtenue dans le jeu différentiel, nous devrions à nouveau pouvoir montrer qu'une règle de décision Markoviennne linéaire vérifie les 3 conditions précédentes. Ainsi, posons à nouveau $x = \beta \cdot S$ et montrons qu'il est possible de construire un $\beta_O > 0$ tel que les conditions 1 à 3 sont vérifiées. Sous ces conditions, l'équation (7) nous permet à nouveau d'observer que $\dot{\lambda} = 0$, tandis que l'équation (8) nous permet de définir le coefficient β_O. Il est donné par :

$$\rho \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - c \right) - n \cdot \sqrt{\beta_O} = 0 \tag{10}$$

et nous pouvons montrer que :

Proposition 3 *Il existe un $\beta_O \in \mathbb{R}_{++}$ unique tel que la règle de décision $\phi(S) = \beta_O \cdot S$ est une règle optimale d'appropriation de la connaissance publique par les laboratoires privés. Par ailleurs :*

(i) cette règle conduit à un équilibre stationnaire donné par :

$$S_O^* = \frac{R}{n \cdot \beta_O}, \quad x_O^* = \frac{R}{n}, \quad et \quad \lambda_O^* = \sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - c$$

(ii) dont le processus y menant est caractérisé par $S_O(t) = S_O^* \cdot \left(1 - e^{-n\beta_O t}\right)$, $x_O(t) = x_O^* \cdot \left(1 - e^{-n\beta_O t}\right)$, et $\lambda_O(t) = \lambda_O^*$, $\forall t$.

[10] Cela est particulièrement possible dans notre cas car le Hamiltonien n'est pas strictement concave en (x, S). Nous aurions pu restaurer la stricte concavité en optant pour une fonction $f(x, S) = (x, S)^{\alpha/2}$ avec $\alpha < 1$ sans fondamentalement changer les résultats mais au prix d'une technicité accrue.

4.2 Les déterminants de l'inefficacité

Disposant maintenant d'un mécanisme d'allocation optimale des brevets, il est assez aisé de montrer qu'un équilibre MNPS induit une sur-appropriation des connaissances à court terme et une réduction du stock de connaissances utilisables dans le futur. Pour être plus précis, nous pouvons affirmer que :

Proposition 4 *La comparaison du mécanisme optimal de privatisation de la connaissance à l'équilibre MNPS, nous permet d'affirmer que :*
(i) la proportion de brevets déposés par un laboratoire par rapport au stock de connaissances exploitables dans le cas d'un équilibre MNPS est toujours supérieure à celle prédite par la règle Markovienne efficace, c'est-à-dire $\beta_N > \beta_O$ *;*
(ii) le stock optimal de connaissances publiques est toujours (à l'état stationnaire et tout le long de la trajectoire menant à cet équilibre) supérieur au stock correspondant à l'équilibre en rétroaction, c'est-à-dire $S^*_O > S^*_N$ *et* $\forall t$, $S_O(t) > S_N(t)$ *;*
(iii) même si à l'équilibre stationnaire la quantité de brevet est la même dans les deux cas, cette quantité reste supérieure à la quantité optimale tout le long de la trajectoire, c'est-à-dire $x^*_O = x^*_N$ *mais* $\forall t$, $x_N(t) > x_O(t)$.

L'équilibre MNPS est donc sous-optimal, mais pourquoi ? Dans un monde dans lequel les agents sont symétriques, la réponse à cette question est assez souvent liée à une différence d'anticipations relative à l'évolution temporelle de l'effet de la variation de la variable de stock sur les profits optimaux instantanés (ou, plus formellement, relative à la dynamique de la variable adjointe).

Pour être plus précis, prenons tout d'abord le point de vue du régulateur et supposons qu'il cherche à évaluer l'effet, dans un futur proche, d'une diminution du stock de connaissances applicables. Indépendamment des phénomènes d'actualisation, celui-ci conclura immédiatement à une baisse du profit maximal instantané de tous les laboratoires. Le raisonnement est fondamentalement différent à l'équilibre MNPS de notre jeux. En effet, en se plaçant dans les mêmes conditions, chaque laboratoire n'anticipera que l'effet d'une baisse de ces propres profits, c'est ce qui est classiquement appelé un effet de congestion. De plus, en attribuant aux autres un comportement Markovien corrélé positivement avec le stock, il pourra être amené à penser que les autres réduiront leurs acquisitions futures de brevets, limitant ainsi la réduction du stock de connaissances et donc ses propres pertes sur ses profits futurs.

Comme tenu de cette différence d'anticipation, il est assez évident que le régulateur limitera le volume de dépôts de brevets à chaque instant du temps afin de ne pas mettre en danger les opportunités de profits futurs au niveau de l'ensemble des unités privées de recherche. Un laboratoire privé, en sous-estimant ces conséquences, sera quant à lui plutôt amené à opter pour une stratégie consistant à sur-exploiter à chaque instant du temps le stock de connaissances exploitables.

5 La régulation de la sur-appropriation

Ce constat relatif aux causes probables de l'inefficacité d'un équilibre MNPS nous amène à penser qu'il faudrait réduire les anticipations des laboratoires privés quant à leurs profits futurs. Nous avons vu que ces anticipations sont basées sur l'état du stock de connaissances applicables. Cela milite donc assez naturellement pour la mise en place d'une subvention basée sur le niveau de ce stock : sa réduction contribuant ainsi à une révision à la baisse du volume de subventions obtenues et donc des profits futurs anticipés.

Pour être plus précis, la mise en place d'une subvention $\Sigma = \sigma \cdot S$ proportionnelle au stock résiduel de connaissances applicables a pour seul effet de modifier la dynamique de la variable adjointe. En effet, si nous considérons le programme d'optimisation (2) et que nous y ajoutons cette subvention, seule la condition 2, introduite dans la section 4, sera affectée. Elle devient (voir l'équation 4) :

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \partial_S H\left(\phi(S), S, \lambda)\right) = \rho \cdot \lambda - \left(\sqrt{\frac{\phi(S)}{S}} + \sigma - \lambda \cdot (n-1) \cdot \frac{d\phi(S)}{dS}\right)$$

et permet ainsi de construire une nouvelle règle de décision Markovienne d'équilibre donnée par $\phi(S) = \beta'_N \cdot S$. Or, nous avons vu à la section 4 que le choix d'une telle règle, associé à la condition d'optimalité (voir équation 3) du niveau de privatisation de la connaissance applicable, aboutissait à l'invariance de la variable adjointe au cours du temps. Par conséquent le nouveau taux de rétroaction β'_N après introduction de la subvention sera obtenu par :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\beta'_N}} - c - \lambda = 0 \\ 0 = \rho \cdot \lambda - \sqrt{\beta'_N} - \sigma + \lambda \cdot (n-1) \cdot \beta'_N \end{cases}$$

Rappelons maintenant que la règle de décision optimale est également une règle Markovienne linéaire (voir section 4) donnée par l'équation $\phi(S) = \beta_O \cdot S$. De ce point de vue, pour mettre en oeuvre la solution optimale, il suffit de fixer cette subvention de manière à ce que la règle de rétroaction linéaire obtenue à l'équilibre MNPS soit la même que celle se réalisant à l'optimum. En d'autres termes, il suffit du chercher le taux de subvention σ tel que β_O est solution du système précédent, c'est-dire que le taux de subvention est donné par l'expression suivante :

$$\sigma = (\rho + (n-1) \cdot \beta_O) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - c \right) - \sqrt{\beta_O}$$

qui est positive (voir annexe E).

Mais la mise en place d'une telle subvention suppose l'observation du stock de connaissances exploitables pour des applications futures. Il est donc plus pertinent d'asseoir la politique de régulation sur des éléments plus directement observables comme par exemple le volume de brevets déposés. Dans ces conditions, la nature de l'intervention prendra plutôt la forme d'une taxe $T = \tau \cdot x$ destinée à limiter la sur-accumulation de brevets en augmentant leur coût.

Ce taux de taxe est tout aussi aisé à déterminer que la subvention introduite précédemment. En effet, sur la base des conditions d'un équilibre MNPS (voir section 2), nous savons que seule la condition d'optimalité (condition 1) du niveau de brevet sera affectée par cette taxe et qu'elle s'écrira alors (voir équation 3) :

$$0 = \partial_x H (x, S, \lambda)) = \sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - (c + \tau) - \lambda$$

Comme toutes les autres conditions restent inchangées, nous pouvons, en reprenant le même type d'argument que précédemment, affirmer que le processus d'appropriation de la connaissance publique est optimal dès lors que le taux de taxe τ est fixé de manière à ce que le coefficient β_O de rétroaction optimal vérifie :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - (c + \tau) - \lambda = 0 \\ 0 = \rho \cdot \lambda - \sqrt{\beta_O} + \lambda \cdot (n-1) \cdot \beta_O \end{cases}$$

ou, en d'autres termes, que le taux de taxe optimal est donné par :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - \frac{\sqrt{\beta_O}}{(\rho + (n-1) \cdot \beta_O)} - c$$

qui est positive (voir annexe E).

6 Conclusion

Pour conclure, partant de la distinction opérée par Dasgupta-David (1987) entre les secteurs de la Science et la Technologie, nous avons proposé dans ce travail de considérer la connaissance produite par l'Université comme un commun exploité par des laboratoires privés à des fins d'appropriation sous la forme de dépôts de brevets. Nous nous sommes alors basés sur la littérature en économie des ressources naturelles renouvelables pour retrouver le résultat de Heller et Eisenberg (1998) selon lequel un équilibre MNPS est inefficace en raison de la concurrence trop sévère qui s'opère entre les laboratoires privés à court terme, induisant ainsi à long terme une réduction des opportunités de développement de nouvelles applications. Nous avons aussi vérifié le résultat plus classique en économie des ressources naturelles renouvelables selon lequel la compétition génère des effets de congestion non internalisés à l'équilibre MNPS.

En regardant de plus près la politique d'innovation pouvant être mise en oeuvre afin de corriger les inefficacités préalablement mises en évidence, nous avons finalement démontré qu'un schéma de taxation des brevets déposés par les laboratoires privés pouvait constituer un instrument intéressant au service d'une telle politique. La possibilité d'une subvention proportionnelle au stock de connaissances exploitables a été évoqué comme pouvant constituer un instrument tout aussi efficace mais nécessite que le régulateur soit en mesure d'observer le stock de connaissances exploitables pour des innovations futures.

Deux principales extensions à ce travail pourraient être envisagées.

Tout d'abord, concernant les formes fonctionnelles choisies, nous avons signalé dans le texte que l'ensemble de nos arguments restent valides pour toutes les fonctions de bénéfices $\frac{1}{a}\left(x_i(t)\cdot S(t)\right)^{\alpha}$ telles que $\alpha \in]0,1/2]$. Il s'agirait de voir dans quelle mesure nous pouvons étendre nos résultat à d'autres classes de fonctions, sans pour autant alourdir les notations.

En outre, le lecteur aura certainement remarqué que la question du financement se pose avec la politique de subvention proportionnelle au stock de connaissances exploitables, ce qui n'est pas le cas avec une politique de taxation des brevets. Cette dernière génère même un gain pour l'agence de brevet qui pourrait par exemple être transféré à l'Université pour qu'elle co-produise plus de connaissances exploitables par les laboratoires privés. Dans ce contexte, il deviendrait intéressant d'endogénéiser la variable R de contribution de l'Université au stock. Mais une telle possibilité consisterait en un nouveau travail qui se distinguerait de la présente contribution. C'est pour cette raison que nous la laissons pour un travail futur.

Références

[1] Aghion P., Dewatripont M. and Stein J.C. 2008. "Academic freedom, private-sector focus, and the process of innovation," *RAND Journ of Econ*, 39 617-635

[2] Adams J.D. (1990) "Fundamental Stocks of Knowledge and Productivity Growth" *J. Political Econom.* 98 : 673-702

[3] Acs Z.J., D.B. Audretsch, M.P. Feldman (1994) "R&D Spillovers and Recipient Firm Size" *Rev. Econom. Statist* 76 : 336-340

[4] Audretsch D.B., E.E. Lehmann, S. Warning (2005) "University Spillovers and new firm location" *Res. Policy* 34 : 1113-1122

[5] Barba Navaretti G., P.S. Dasgupta, K.G. Mäler and D. Siniscalco (1996) "Production and Transmission of Knowledge : Institution and Economic Incentives : An Introduction" in *Creation and transfer of Knowledge : institutions and Incentives* edited by Barba Navaretti G., P.S. Dasgupta, K.G. Mäler and D. Siniscalco, Berlin, Springer Verlag

[6] Carraro C. and D. Siniscalco (2003) "Science versus Profit in Research" *J. of the Europ. Econom. Ass.* 1(2-3) : 576-590

[7] Cohen W.M, R.R Nelson, J.P. Walsh (2002) "Links and Impacts : The Influence of Public Research on Industrial R&D" *Man. Science* 40(1) : 1-23

[8] Cornelli F. and M. Schankerman (1999), "Patent rewards and R&D incentives", *Rand Journ. of Econ.*, 30(2), 197-213

[9] Dasgupta P.S. and P.A. David (1987) "Information disclosure and the Economics of Science and Technology" in *Arrow and the Accent of Modern Economic Theory* edited by G.R. Feiwel, New York, State University of New York Press.

[10] Dockner E., S. Jorgensen, N van Long and G. Sorger (2006) "Differential Games in Economics and Management Science" Cambridge University Press

[11] Encaoua D., D. Guellec, C. Martinez (2006) "Patent Systems for Encouraging Innovation : Lessons from Economic Analysis" *Res. Policy*, 35 :1423-1440

[12] Gilbert R., and C. Shapiro (1990) "Optimal Patent Lenght and Breadth", *Rand Journ. of Econ.*, 21, 106-112

[13] Heller M.A., and R. Eisenberg (1998) "Can Patents Deter Innovation ? The Anticommons in Biomedical Research" *Science* 280 : 698-701

[14] Hess C. and E. Ostrom 2003. Ideas, Artefacts anf Facilities : Information as a Common-Pool Resource. *Law and Contempory Problems* 66 : 111-45.

[15] Hess C. and E. Ostrom 2007. *Understanding Knowledge as a Common : from Theory to Practice.* Cambridge Massachusetts : MIT Press.

[16] Jaffe A. B. (1989) "Real Effects of Academic Research" *Amer. Econom. Rev.* 79 (5) : 957-970

[17] Klemperer P. "How broad should the scope of patent protection be ?", *Rand Journ. of Econ.* 21 :113-130

[18] Klevorick A.K., R. Levin, R.R. Nelson, S. Winter (1995) "On the Source and Significance of Interindustry Differences in Technological Opportunities" *Res. Policy* 24 (2) : 195-205

[19] Link A.L., J. Rees (1990) "Firm Size, University Based Research and the Returns to R&D" *Small Bus. Econom.* 2 : 25-31

[20] Narin F.K., S. Hamilton, D. Olivastro (1997) "The Increasing Link between US Technology and Public Science" *Res. Policy* 26 (3) : 317-330

[21] Scotchmer, S. (1999), "On the Optimality of the Patent Renewal system", *Rand Journ. of Econ.*, 30 (2) : 181-196

[22] Thursby, J., Fuller, A. W.,and Thursby M. (2009) "US faculty patenting : Inside and outside the university,"Research Policy, Elsevier, vol. 38 :14-25

ANNEXES

A Preuve de la proposition 1

1- Vérifions d'abord qu'il existe une solution unique positive à l'équation (5). Celle-ci peut se réécrire :

$$\rho - c \cdot \rho \cdot \sqrt{\beta_N} + n \cdot \beta_N - 2 \cdot \beta_N - c \cdot \sqrt{\beta_N} \cdot \beta_N \cdot (n-1) = 0 \tag{11}$$

En posant $y_N = \sqrt{\beta_N}$, et en réorganisant, nous obtenons l'équation du troisième degré suivante :

$$f_N(y_N) = c \cdot (n-1) \cdot y_N^3 - (n-2) \cdot y_N^2 + c \cdot \rho \cdot y_N - \rho = 0 \tag{12}$$

Comme $f_N(0) = -\rho$ et $\lim_{y \to +\infty} f_N(y) = +\infty$, il est évident qu'il existe une solution positive. Pour vérifier que celle-ci est unique, nous nous proposons de passer par le discriminant de ce polynôme et d'utiliser dans ce cas bien connu de dimension 3, les résultats de Cardan (1545). Procédons tout d'abord au changement de variable suivant : $y = z + \frac{n-2}{3 \cdot c \cdot (n-1)}$. Le polynôme devient :

$$z^3 + p \cdot z + q = 0 \text{ avec } \begin{cases} p = \dfrac{3 \cdot \rho \cdot c^2 \cdot (n-1) - (n-2)^2}{3 \cdot c^2 \cdot (n-1)^2} \\ q = \dfrac{-2 \cdot (n-2)^3 + 9 \cdot \rho \cdot c^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) - 27 \cdot \rho \cdot c^2 \cdot (n-1)^2}{27 \cdot c^3 \cdot (n-1)^3} \end{cases}$$

Il est possible de montrer que si $\Delta = q^2 + \frac{4}{27} \cdot p^3 > 0$, alors le polynôme précédent, et donc le nôtre, admet une solution réelle unique. Un calcul permet par ailleurs d'observer que :

$$\frac{27 \cdot c^4 \cdot (n-1)^4}{\rho} \cdot \Delta = 4 \cdot c^4 \cdot \rho^2 \cdot (n-1) + 4 \cdot (n-2)^3 + 8 \cdot c^2 \cdot \rho \cdot (n+1)^2 > 0$$

dès lors qu'il y a au moins deux joueurs ($n \geq 2$). Le lecteur, s'il le désire, pourra également calculer explicitement cette solution en poussant plus loin son investigation de la méthode de Cardan. Mais en l'état cela n'est pas nécessaire pour notre argument.

2- Les trajectoires et les équilibres stationnaires découlent immédiatement de ce premier résultat. En effet, s'il existe un unique $\beta_N > 0$, la dynamique du stock de connaissances sera donnée par $\dot{S} = R - n \cdot \beta_N \cdot S$ avec $S(0) = 0$. Puisque l'équilibre stationnaire $S_N^* = \frac{R}{n \cdot \beta_N}$ est une solution particulière, nous obtenons, après ajustement de la constante, que $S_N(t) = S_N^* \cdot \left(1 - e^{-n\beta_N t}\right)$, un processus qui converge vers S_N^* puisque $\beta_N > 0$. En utilisant la règle de rétroaction, nous pouvons également en déduire que $x_N^* = \beta \cdot S_N^* = \frac{R}{n}$ et que $x_N(t) = x_N^* \cdot \left(1 - e^{-n\beta_N t}\right)$. Par ailleurs par construction $\forall t$, $\lambda_N = \sqrt{\frac{1}{\beta_N}} - c$.

3-Concernant les conditions de transversalité, il est clair que $S_N(t) \geq 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \cdot \lambda_N(t) \cdot S_N(t) = \left(\sqrt{\frac{1}{\beta_N}} - c\right) \cdot S_N^* \cdot \lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \cdot \left(1 - e^{-n\beta_N t}\right) = 0$$

Il reste donc à vérifier que $\lambda_N \geq 0$. En nous référant à $y_N = \sqrt{\beta_N}$ et $\lambda_N = \sqrt{\frac{1}{\beta_N}} - c$, cela revient à vérifier que $y_N < \frac{1}{c}$. Il est même possible d'aller plus loin et d'affirmer que cette condition est <u>équivalente</u> à $f_N(\frac{1}{c}) > 0$. En effet, en procédant par l'absurde, nous noterons que si $y_N < \frac{1}{c}$ et $f_N(\frac{1}{c}) \leq 0$, le polynôme $f_N(y)$ admettrait une nouvelle racine $y_1 \geq \frac{1}{c}$ puisque $f_N(\frac{1}{c}) \leq 0$ et $\lim_{y \to +\infty} f_N(y) = +\infty$. Concernant la réciproque, supposons maintenant que $f_N(\frac{1}{c}) > 0$ et $\frac{1}{c} \leq y_N$, il y aurait à nouveau une racine $y_2 < \frac{1}{c}$ puisque $f_N(0) = -\rho$ et $f_N(\frac{1}{c}) > 0$.

Or nous avons démontré au point 1 que le polynôme admet une unique solution. Cela montre donc bien que $\left(y_N < \frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow \left(f_N(\frac{1}{c}) > 0\right)$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier cette dernière condition. Nous obtenons :

$$f_N\left(\frac{1}{c}\right) = (n-1)\cdot c^2 - (n-2)\cdot c^2 + \rho - \rho = c^2 > 0$$

4-Vérifions enfin que $H_N(S,\lambda) = \max_x H(x,S,\lambda)$ est concave en S. Compte tenu de la règle de choix retenu,

$$H_N(S,\lambda) = 2\sqrt{(\beta_N S)\cdot S} - c\cdot(\beta_N \cdot S) + \lambda\cdot[R - n\cdot(\beta_N\cdot S)]$$

Or cette fonction est clairement linéaire en S, donc a fortiori concave.

B Preuve de la proposition 2

1- Les effets des paramètres sur $\beta_N(c,\rho,n)$.

Compte tenu du point 1 de la preuve de la proposition 1, il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation (11) sachant que $\beta_N = y_N^2$. Nous obtenons ainsi que :

$$\begin{cases} \frac{\partial\beta}{\partial c} = \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\left(\frac{\partial f_N}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial f_N}{\partial y}\right)^{-1} = -2y_N\frac{(n-1)\cdot y_N^3+\rho\cdot y_N}{f_N'(y_N)} < 0 \\ \frac{\partial\beta}{\partial\rho} = -2y_N\frac{c\cdot y_N-1}{f_N'(y_N)} > 0 \\ \frac{\partial\beta}{\partial n} = -2y_N^3\frac{c\cdot y_N-1}{f_N'(y_N)} > 0 \end{cases}$$

puisque nous savons, grâce à la preuve de la proposition 1, que $f_N'(y_N) > 0$ et que y_N est solution et appartient à $\left]0, \frac{1}{c}\right[$.

2- Les effets des paramètres sur la trajectoire de $S_N(t) = \frac{R}{n\cdot\beta_N}\cdot\left(1-e^{-n\beta_N t}\right)$.

Puisque e^x est une fonction convexe, remarquons au préalable que l'inégalité de convexité nous permet d'affirmer que :

$$e^0 - e^x > e^x\cdot(0-x) \Leftrightarrow e^x - 1 - xe^x < 0$$

A partir de là, nous observons que :

$$\frac{\partial S_N(t)}{\partial c} = \frac{\partial S_N(t)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial c} = \frac{R}{n\cdot\beta_N^2}\cdot\left(e^{-n\beta t} - 1 - (-n\beta t)e^{-n\beta t}\right)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial c} > 0$$

et

$$\frac{\partial S_N(t)}{\partial\rho} = \frac{\partial S_N(t)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\rho} = \frac{R}{n\cdot\beta_N^2}\cdot\left(e^{-n\beta t} - 1 - (-n\beta t)e^{-n\beta t}\right)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\rho} < 0$$

La dernière dérivée est un peu plus longue à calculer puisque n modifie directement (terme noté $\frac{\delta S_N}{\delta n}$) et indirectement (terme $\frac{\partial S_N(t)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial c}$) S, via β. Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_N(t)}{\partial n} &= \frac{\delta S_N}{\delta n} + \frac{\partial S_N(t)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial n} \\ &= \frac{R}{n^2\cdot\beta_N}\left(e^{-n\beta t} - 1 - (-n\beta t)e^{-n\beta t}\right) + \frac{R}{n\cdot\beta_N^2}\cdot\left(e^{-n\beta t} - 1 - (-n\beta t)e^{-n\beta t}\right)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial n} \\ &= \frac{R}{n^2\cdot\beta_N^2}\cdot\left(e^{-n\beta t} - 1 - (-n\beta t)e^{-n\beta t}\right)\cdot\left(\beta + n\cdot\frac{\partial\beta}{\partial n}\right) < 0 \end{aligned}$$

C Preuve de la proposition 3

La preuve est similaire à la preuve de la proposition 1. Nous serons donc assez succinct.

1- Construction du β_O.

Nous observons que cela revient maintenant à résoudre l'équation (10) qui se réécrit :

$$f_O(y) = n \cdot (y)^2 + c \cdot \rho \cdot y - \rho = 0 \tag{13}$$

dont le discriminant est : $\Delta = c^2 \cdot \rho^2 + 4 \cdot n \cdot \rho > 0$ et qui possède par conséquent deux solutions réelles de signes opposés : $y^*_{1,2} = \frac{-c \cdot \rho \pm \sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot n}$. Notre changement de variable $y_O = \sqrt{\beta_O}$ nous fait sélectionner la racine positive. Par conséquent :

$$y_O = \frac{-c \cdot \rho + \sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot n} = \sqrt{\beta_O} \Leftrightarrow \beta_O = \frac{\left(-c \cdot \rho + \sqrt{\Delta^*}\right)^2}{4 \cdot n^2}$$

2- Les trajectoires.

Il suffit de prendre les mêmes trajectoires qu'au point 2 de la preuve de la proposition 1 en remplaçant β_N par β_O.

3- Pour vérifier les conditions de transversalité, il suffit, compte tenu du mode de construction des trajectoires, de s'assurer que $\lambda_O = \sqrt{\frac{1}{\beta_O}} - c > 0$ en encore que $y_O < \frac{1}{c}$. Comme le polynôme $f_O(y)$ est strictement croissant pour tout $y > y_{\min} := -\frac{c\rho}{n}$, il suffit à nouveau de vérifier que $f_O(\frac{1}{c}) = n(\frac{1}{c})^2 > 0$.

D Preuve de la proposition 4

1-Remarquons tout d'abord que comparer β_N à β_O revient en fait à ranger y_N et y_0, qui sont respectivement solution des équations (11) et (13). Sur la base des éléments de démonstration utilisés au point 3 de la preuve (A), nous pouvons avancer que $\forall y < y_N$, $f_N(y) < 0$ et réciproquement $\forall y > y_N$, $f_N(y) > 0$. Par conséquent, pour ranger y_N et y_0, il suffit de comparer $f_N(y_O)$ à 0. Pour réaliser cette comparaison, observons tout d'abord que :

$$f_N(y) - f_O(y) = c \cdot (n-1) \cdot y^2 \cdot \left(y - \frac{2}{c}\right)$$

Puisque $f_O(y_O) = 0$, nous en déduisons que $f_N(y_O) = c \cdot (n-1) \cdot y_O^2 \cdot \left(y_O - \frac{2}{c}\right)$. Or nous avons montré au point 3 de la preuve (C) que $y_O < \frac{1}{c}$. Puisque le nombre de firmes est au moins égal à deux, il s'ensuit que $f_N(y_O) < 0$ et donc que $y_O < y_N$. Nous pouvons ainsi conclure que $\beta_O < \beta_N$.

2- Vérifions tout d'abord que $\forall t$, $S_0(t) \geq S_N(t)$. Pour cela, remarquons que les deux trajectoires sont obtenues à partir de la même fonction :

$$S(\beta, t) = \frac{R}{n \cdot \beta} \cdot \left(1 - e^{-n\beta t}\right)$$

pour deux valeurs différentes de β que nous savons rangées, c'est-à-dire $\beta_O < \beta_N$. Par ailleurs, notons que :

$$\frac{\partial S(\beta, t)}{\partial \beta} = \frac{R}{n \cdot \beta^2} \left(e^{-n\beta t} - 1 - e^{-n\beta t} \cdot (-n\beta t)\right) < 0$$

(voir la remarque préalable à la preuve du point 2 de la proposition 2) et comme $\beta_O < \beta_N$ que $\forall t$, $S_0(t) \geq S_N(t)$.

3- Montrons maintenant que $\forall t$, $x_N(t) \geq x_O(t)$. Ce résultat est immédiat car $x(\beta, t) = \frac{R}{n} \cdot \left(1 - e^{-n\beta t}\right)$ et $\frac{\partial x(\beta,t)}{\partial \beta} = R \cdot e^{-n\beta t} \cdot t > 0$.

E Non-négativité de la subvention et de la taxe

Remarquons tout d'abord que le taux de taxe est en relation directe avec le taux de subvention puisque :

$$\tau = \left(\rho + (n-1) \cdot \beta_O\right)^{-1} \sigma$$

Comme $(\rho + (n-1) \cdot \beta_O) > 0$, il suffit de s'assurer que le taux de subvention est strictement positif. Pour valider ce résultat, il faut revenir à la preuve de la proposition 1 développée dans l'annexe A. Pour être plus précis, à σ donné, le coefficient de rétroaction, ou plutôt la quantité $y' = \sqrt{\beta'}$, satisfait (voir équation 12) :

$$F_N(y', \sigma) = c \cdot (n-1) \cdot \left(y'\right)^3 - (n-2) \cdot \left(y'\right)^2 + (c \cdot \rho + \sigma) \cdot \left(y'\right) - \rho = 0$$

Or, compte tenu des propriétés de cette fonction (voir l'annexe A), nous savons que $F_N(\sqrt{\beta_N}, 0) = 0$ et $\partial_y F_N(y, 0) > 0$. Comme $\beta_N > \beta_O$, il s'ensuit que $F_N(\sqrt{\beta_O}, 0) < 0$. Remarquons maintenant que $\partial_\sigma F_N(\sqrt{\beta_O}, \sigma) = \sqrt{\beta_O} > 0$. De ce point de vue s'il existe un σ tel que $F_N(\sqrt{\beta_O}, \sigma) = 0$, nous pouvons immédiatement en conclure que $\sigma > 0$.