Espace mathématique et espace physique

Julien Bernard

Espace mathématique et espace physique:
l'élaboration du problème de l'espace par Hermann Weyl entre 1917 et 1920

Aix-en-Provence (CEPERC), 18/12/2007,

Document de travail

L'intervention que nous proposons aujourd'hui s'intitule « Espace mathématique et espace physique: l'élaboration du problème de l'espace par Hermann Weyl entre 1917 et 1920 », c'est donc un thème centré sur un auteur et même sur une période précise de sa carrière intellectuelle. Mais nous allons essayer de voir à travers cette exposition en quoi est-ce que les outils conceptuels construits par Hermann Weyl pendant cette période sont toujours d'actualité pour arriver à penser l'apport de la théorie de la relativité générale à propos des grandes questions philosophiques sur la nature de l'espace.

Avant d'aborder la problématique qui nous intéressera aujourd'hui, lisons un extrait de la préface à la première édition d'*Espace, Temps, Matière* **(TEXTE 1 HAND OUT).**

Hermann Weyl s'excuse à plusieurs reprises du trop peu de philosophie présent dans *Espace, Temps, Matière*. Ce texte est un manuel de cours de théorie de la relativité générale. Il est certes parsemé de remarques épistémologiques diverses ou de développements philosophiques ponctuels (conceptuels ou historiques) sur les fondements de la physique mathématique. Ce n'est pourtant pas un ouvrage d'épistémologie et encore moins un ouvrage de théorie de la connaissance ou de philosophie générale.

Si donc, de l'aveu même de l'auteur, cet ouvrage ne propose qu'une *illustration* des rapports entre la philosophie et la physique mathématique, et pire encore s'il s'agit d'une illustration qui ne tient pas ses promesses, on est alors naturellement en droit de se poser la question de l'intérêt pour l'épistémologue de lire un tel ouvrage. Le philosophe des sciences ne doit-il considérer *Espace-Temps-Matière* et plus généralement les travaux relativistes d'Hermann Weyl dans la période de 1917 à 1920 uniquement comme une œuvre scientifique? C'est en tous cas plausible. On sait qu'Hermann Weyl n'a pas joué uniquement qu'un rôle de vulgarisateur de la théorie de la relativité. Par exemple, il a apporté des éclaircissements mathématiques essentiels dans la construction de l'espace relativiste par l'utilisation de la notion de connexion affine. Autre exemple : il a été le premier à proposer une structure mathématique (celle d'espace de jauge) susceptible d'opérer une unification des phénomènes gravitationnels et électromagnétiques. Ces avancées scientifiques dans la théorie de la relativité méritent certainement à eux-seuls l'attention du philosophe des sciences.

Cependant, quid de tous les paragraphes à tonalité philosophique qui ponctuent le texte. Le philosophe des sciences ne pourra-t-il y trouver, que de vagues sources d'inspiration pour une réflexion épistémologique sérieuse ?

Je vais essayer aujourd'hui de répondre à cette question en montrant qu'à côté du travail proprement scientifique et didactique du texte, et à côté des thèmes épistémologiques qui ne figurent qu'à l'état d'ébauches, on trouve un problème épistémologique original et approfondi qui peut servir de fil de lecture pour *Espace, Temps, Matière.* Ce problème c'est celui des rapports entre l'espace mathématique et l'espace physique. Précisons tout de suite que ces deux termes (« espace mathématique » et « espace physique ») ne se trouvent pas (du moins de façon récurrente) dans le texte. Nous les avons cependant choisis pour désigner deux pôles distincts de la réflexion d'Hermann Weyl sur l'espace dans la période qui s'étend de 1917 à 1920.

Notre premier travail pour aujourd'hui consistera donc à proposer une cartographie rapide des différents concepts d'espace qui interviennent dans le texte d'*Espace-Temps-Matière* afin d'en extraire deux conceptions majeures que nous appellerons « l'espace mathématique » et l' « espace physique ».

Nous développerons dans un deuxième temps les principales propriétés qu'Hermann Weyl attribue à ces deux notions d'espace. En particulier, il s'agira d'expliquer d'une part en quoi consistent leurs caractères respectifs d'homogénéité et d'hétérogénéité, et d'autre part, la place du sujet (compris comme système de coordonnée ou comme référentiel) dans l'élaboration de ces deux concepts d'espaces. Cette analyse permettra de préciser suffisamment le statut ontologique de ces deux espaces afin de justifier les noms que nous leur avons choisi.

Enfin, nous esquisserons la façon dont Hermann Weyl pense les rapports entre ces deux notions d'espace et montrerons comment cela lui fournit un cadre épistémologique général pour répondre à certaines des plus grandes questions philosophiques concernant la nature de l'espace: celle des rapports entre espace et l'expérience, celle du caractère substantiel/relationnel de l'esp, ou enfin la question de la place du sujet connaissant dans la détermination des structures spatiales, autrement dit dans l'élaboration de la géométrie.

Cartographie des concepts d'espace dans *Espace-Temps-Matière*

(Schéma général des concepts d'espace dans *Espace, Temps, Matière*)

La distinction la plus générale à faire au sein des divers concepts d'espace qui interviennent dans la pensée d'Hermann Weyl est celle qui oppose l'espace qu'il nomme « intuitif » à l'espace mathématisé.

Disons rapidement que l'espace qu'Hermann Weyl nomme « intuitif » est un espace psycho-physiologique. Il est le produit direct de nos perceptions sensorielles et appartient en propre à chaque sujet individuel. Il n'est pas constitué de points mais est un continu au sens où il est une totalité qui précède ses parties. Au contraire, l'espace mathématisé est véritablement *constitué* de points, objets idéaux dont la localisation peut être précisée d'une façon arbitrairement précise. De plus, cet espace n'appartient plus en propre au sujet psychologique individuel. Il est le fruit d'un processus d'objectivation.

Nous passons rapidement sur cette distinction car nous voulons montrer aujourd'hui que la problématique épistémologique centrale d'*Espace-Temps-Matière* et plus généralement la problématique des textes de Weyl sur l'espace datant de la période qui s'étend de 1917 à 1920, ne se situe pas dans cette première distinction entre l'intuitif et le mathématisé mais bien dans la distinction entre espace mathématique et espace physique, distinction qui est interne à la sphère de l'espace mathématisé. Dans la période de 1917 à 1920, lorsqu'Hermann Weyl fait la distinction entre d'un côté un espace (ou un temps) intuitif et de l'autre un espace (un temps) mathématisé c'est toujours aussitôt pour préciser que celui auquel a affaire la science c'est l'espace mathématisé et que son rapport à l'espace intuitif, si il pose un véritable problème épistémologique (cela, Weyl ne le niera jamais), ce problème n'est cependant pas prioritaire selon lui et est toujours repoussé à plus tard pendant cette période.

Cette pensée de l'espace physico-mathématique en *rupture* avec l'espace intuitif de la perception est visible dans *Espace, Temps, Matière* mais aussi dans le second chapitre du *Continu* (l'autre grand texte épistémologique d'Hermann Weyl de la même période). Dans ce dernier texte, après avoir bien souligné l'écart entre le continu intuitif et le continu mathématique, et après avoir félicité Henri Bergson pour avoir permis de mettre en évidence cet écart, Hermann Weyl précise aussitôt que cet écart n'est pas le signe d'une erreur ou d'une insuffisance dans la pensée scientifique du temps et de l'espace. Cet écart est simplement la marque du fait que l'étude scientifique de l'espace se constitue comme une *théorie physique* et non pas comme une phénoménologie de la perception. La rupture entre la sphère phénoménologique immédiate et le champ conceptuel de la science est parfaitement assumée. **(TEXTE 2 HAND OUT)** L'écart assumé dans ce texte entre le continu mathématique et le continu intuitif pourrait être étendu dans *Espace, Temps, Matière* entre l'espace mathématisé et l'espace intuitif (la question du continu n'étant qu'un sous-problème du problème de l'espace).

Cette mise à l'écart de la part d'Hermann Weyl de l'espace intuitif dans la réflexion épistémologique sur l'espace méritait d'être remarquée dans la mesure où, premièrement, cette approche n'est pas celle d'autres penseurs scientifiques qui ont réfléchi sur le même thème. Je pense ici à Henri Poincaré qui, lorsqu'il introduit la notion d'espace représentatif, (de l'espace intuitif d'Hermann Weyl) dans le quatrième chapitre de *la Science et l'hypothèse,* il ne le fait certainement pas uniquement pour ajouter ensuite qu'il est radicalement distinct de l'espace mathématique et pour le mettre aussitôt à l'écart. Poincaré thématise véritablement le lien qui mène de l'espace de la représentation à l'espace mathématisé.

De plus, par cette attitude de mise à l'écart du problème des liens entre espace mathématisé et espace intuitif, Hermann Weyl se pose contre la pensée qu'il développera lui-même à partir de 1920, et sans doute en partie grâce à sa rencontre avec l'intuitionnisme mathématique de L.E.J Brouwer. Dans cette seconde période de sa réflexion sur l'espace, il concevra vraiment ce qu'il appellera le problème de l'espace (*Raumproblem*, qui donnera le nom à sa conférence tenue à Madrid et Barcelone en 1923: *Mathematische Analyse des Raumproblems*), comme un problème triangulaire où espace mathématique, espace physique et espace intuitif joueront des rôles d'importances comparables. Il y aura une circulation permanente entre ces trois niveaux constitutifs de la notion d'espace.

Prenons cela pour acquis et plaçons-nous alors définitivement pour aujourd'hui dans la sphère de l'espace mathématisé. On remarque alors qu'Hermann Weyl oscille dans *Espace, Temps, Matière* entre deux types d'approches de cet espace, contradictoires en apparence. Dans une première série de textes, Hermann Weyl qualifie l'espace de « forme » et donne *l'homogénéité* comme sa caractéristique essentielle alors que, dans une seconde série de textes, il ne qualifie plus l'espace de « forme » mais de « réel » et montre au contraire son hétérogénéité.

Avant de rentrer dans l'analyse de cette opposition, disons immédiatement qu'elle ne répond pas à une hésitation de la part d'Hermann Weyl, ou à une évolution de sa pensée à l'intérieur même du livre. Il s'agit bien de deux concepts d'espace distincts, mais qui font tous les deux partie intégrante de la construction scientifique de l'espace relativiste. Après analyse de ces deux notions, nous verrons que la première notion est purement mathématique alors que la seconde intègre à l'espace mathématique une composante physique et empirique.

Nous pouvons dès à présent remarquer que cette dualité des notions d'espace transparait déjà à travers le plan de l'ouvrage, plan qui s'impose d'ailleurs dans la plus part des ouvrages traitant de la théorie de la relativité générale. Il s'agit dans un premier temps (qui correspond au deux premiers chapitres *d'Espace, Temps, Matière*) d'introduire certaines notions géométriques (espace affine, espace métrique, espace de Riemann) qui sont des notions mathématique (et non pas physique) au sens où elles sont traitées de façon entièrement déductive, indépendamment de toute considération de la matière et des lois physiques qui la gouverne. C'est seulement dans un deuxième temps (qui correspond aux deux autres chapitres d'*Espace, Temps, Matière*) qu'Hermann Weyl introduit la matière et ses lois. Nous ne quittons pourtant pas le domaine de la géométrie dans ces derniers chapitres puisque l'*espace* en est toujours l'objet. La géométrie mathématique se trouve donc complétée par une géométrie physique, et ce n'est qu'une fois que la notion d'espace est établie de ce point de vue physique, que l'on peut procéder à l'exposition des autres lois (non-spatiales) de la physique. Le schéma de la constitution progressive de la science physique est donc le suivant **(Voir Schéma)**

Ce schéma, hérité en droite ligne du travail d'A. Einstein et des idées du mathématicien B. Riemann, va à l'encontre de la manière classique (au sens de la physique classique) de penser l'architecture de la science puisque, pour Newton, il fallait d'abord fonder l'espace d'une manière purement mathématique puis traiter en physicien uniquement du *contenu* de cet espace. Cet intermédiaire que sera en théorie de la relativité générale, la géométrie physique comme étude physique de la *forme* de l'espace physique n'avait aucun équivalent en physique classique. Voilà donc pourquoi le plan même d'*Espace, Temps, Matière* annonce déjà la distinction entre espace mathématique et espace physique contre la conception classique de l'articulation entre mathématique et physique.

Rentrons à présent plus en profondeur dans les deux premiers chapitres d'*Espace, Temps, Matière* pour analyser la notion mathématique d'espace telle qu'elle est pensée par Hermann Weyl. **(TEXTE 3).** Un certain nombre de termes apparaissent ici « continuum », « forme », « homogénéité », « congruence » sur lesquels nous allons devoir faire porter notre analyse conceptuelle.

Premièrement, que l'espace soit un *continuum*, cela signifie d'abord qu'il est composé de points individuels dont la localisation peut être déterminée avec une précision arbitraire. Ces points peuvent être considérés comme étant autant d' « origines possibles » à partir desquelles peut s'étendre une configuration géométrique. (L'espace est donc composé de points P, Q, R… et si un certain objet géométrique s'étend à partir du point P, il est *constitutif* du concept d'espace que je puisse considérer cette même configuration comme s'étendant à partir du point Q ou R… Une fonction mathématique qui permet de passer du point P au point Q tout en respectant l'identité des objets géométriques qui ont été pour ainsi dire « déplacés » est appelé « transformation ».

La principale caractéristique qu'Hermann Weyl attribue à l'espace comme forme est son *homogénéité*. Ce terme d'*homogénéité* revient à plusieurs reprises dans les textes épistémologiques d'Hermann Weyl. Il admet d'abord une définition purement logique, à savoir qu'une certaine catégorie mathématique d'objets est homogène lorsque toute propriété vérifiée par au moins un objet de cette catégorie, est vérifiée pour tous les objets. Autrement dit, une catégorie d'objet est homogène si les individus qui la composent cette catégorie sont absolument indiscernables les uns des autres. Quand cette catégorie considérée est l'espace, l'homogénéité consiste donc à attribuer à l'espace ces deux propriétés apparemment contradictoires selon lesquelles l'espace est à la fois composé de points individuels *distincts* mais qui doivent pourtant être absolument indiscernables les uns des autres. Cela a pour conséquence qu'on doit pouvoir trouver une transformation qui permette de passer de n'importe quel point de l'espace à n'importe quel autre.

Notre présentation de la notion de l'espace comme *forme homogène* est jusqu'ici incomplète. Nous avons dit que cet espace étant constitué de points entre lesquels on pouvait passer par des applications respectant l'identité géométrique des objets spatiaux. Il reste à préciser ce qu'on entend par cette identité géométrique, ou bien, ce qui revient au même, il reste à donner la nature des applications mathématiques que l'on doit considérer comme des transformations dans l'espace.

Hermann Weyl est plus fidèle dans sa présentation de la géométrie à Félix Klein qu'à David Hilbert, les deux grands géomètres de Göttingen qui ont marqué son apprentissage. Il choisit en effet de ne pas prendre pour primitifs les objets géométriques proprement dits (les points, les droites, les plans…) mais les transformations qui respectent l'identité géométrique de ces objets. La caractérisation des applications que l'on doit considérer comme des *transformations* dans l'espace se fait par la donnée de structures mathématiques qui viennent ordonner le continuum d'abord considéré comme pure multiplicité de points sans relations. (On doit prendre ici le terme « structure » en son acception la plus large et non pas au sens des mathématiques « structuralistes » qui se sont développées dans la suite du vingtième siècle par exemple avec Nicolas Bourbaki)

Hermann Weyl ne définit pas d'emblée la structure d'espace euclidien qui est celle à laquelle il veut aboutir au premier chapitre mais il choisit une construction génétique, niveau par niveau, qui permet de mieux appréhender l'articulation entre les différentes relations spatiales. Il s'agit d'abord du niveau *topologique* qui concerne les relations de voisinages et les relations qui en sont dérivées (continuité, connexité, la dimension de l'espace…) Ce niveau topologique n'est pas explicité dans *Espace, Temps, Matière* mais Hermann Weyl l'avait fait dans d'autres textes antérieurs. Passons. Le deuxième niveau, et le premier à être explicité dans *Espace, Temps, Matière* est le niveau affine. Pour le dire grossièrement, c'est le niveau des relations spatiales qui expriment l'alignement des points et la possibilité de comparer la longueur des segments *de même direction*. Les transformations associées à cette structure sont donc appelées les transformations affines. Hermann Weyl caractérise ce niveau affine en se limitant à un sous-ensemble des transformations affines : *les translations*. La nature des translations est donnée par une axiomatique qui caractérise la structure dont sont munies ces translations lorsqu'on les compose. C'est l'axiomatique bien connue des espaces affines et des espaces vectoriels. Enfin, on arrive au dernier niveau, celui des relations métriques, où on donne un sens à la comparaison de longueur de deux segments de directions quelconques. C'est ce niveau qui achève de caractériser l'espace euclidien. Techniquement, cela passe par la donnée d'un nouvel objet mathématique : une forme quadratique qui est à la fois à la source des notions de longueur d'un segment et de la mesure d'un angle.

(Schéma)

Pour terminer notre exposition de la notion d'espace comme forme mathématique, il faut insister sur la place du système de coordonnées dans l'élaboration de cette notion. C'est sans doute sur ce dernier point que les analyses épistémologiques d'Hermann Weyl concernant l'espace comme forme mathématique, sont les plus originales et les mieux développées.

Comme nous l'avons vu au début de cet exposé, le sujet psychologique individuel qui perçoit immédiatement l'espace intuitif peut être mis à l'écart de la réflexion sur l'espace mathématisé de la science. L'espace mathématisé est obtenu par un processus d'idéalisation mais aussi de dé-subjectivisation, d'élimination de ce qu'il y a de subjectif dans la notion intuitive d'espace. Pour Hermann Weyl, il y a cependant une notion de sujet qui ne peut être purement et simplement être mise à l'écart dans la caractérisation de l'espace mathématique, c'est le sujet comme système de coordonnée. **(TEXTE 4)**

Le système de coordonnée c'est donc la notion de sujet dont on ne peut se passer pour décrire l'espace mathématisé. Certes, le mathématicien pur, celui qui n'effectue qu'un travail purement conceptuel sur les relations spatiales, peut peut-être (à la limite) se passer d'un système de coordonnées. Il considère alors uniquement les objets géométriques de façon *abstraite*, dans le sens où il travaille uniquement à partir d'une axiomatique qui caractérise conceptuellement les relations spatiales objectives sans avoir besoin d'individualiser aucun point. (par exemple, il travaille avec la seule axiomatique des espaces vectoriels). Mais pour que la géométrie mathématique ne soit pas qu'un pur jeu conceptuel mais qu'elle soit une première étape pour que le géomètre *expérimental* puisse effectuer des mesures en vu d'avoir accès à la dimension spatiale de la *réalité physique*, alors la donnée d'un système de coordonnées devient indispensable. A défaut de pouvoir désigner conceptuellement (i.e. par une définition) un point individuel de l'espace (c'est impossible puisque, par essence, l'espace est homogène), on doit fournir pour individualiser les points de l'espace une *donnée immédiate* : c'est le système de coordonnée. On retrouve ici une opposition entre le donné intuitif et le conceptuel, qui est un leitmotiv de la pensée épistémologique d'Hermann Weyl. Ici le conceptuel c'est la structure abstraite qui décrit les relations spatiales objectives dont est muni le continuum (la structure d'espace vectoriel, la métrique, etc.) tandis que le donné intuitif c'est le système de coordonnée qui permet d'individualiser les points de l'espace homogène afin de pouvoir ancrer le schème conceptuel des relations spatiales dans la réalité physique à mesurer **(TEXTE 5).**

La fin de ce texte montre bien en quoi l'introduction du système de coordonnée, même s'il est une donnée subjective, non-conceptuelle, n'abolit pas pour autant l'objectivité du savoir géométrique. En effet, l'introduction d'un système de coordonnée, nécessaire pour la mesure physique, n'est légitime qu'en raison de l'indifférence des différents systèmes de coordonnée pour représenter un même système de relations géométriques objectives. On voit que cette indifférence dans le choix du système de coordonnées est en fait liée à l'homogénéité de l'espace. Nous avions interprété au début de l'exposé l'homogénéité de l'espace de façon objectuelle comme la possibilité pour un objet de se déplacer d'un point à un autre sans perdre son identité géométrique. Nous pouvons à présent proposer une interprétation subjectuelle qui consiste à interpréter l'homogénéité de l'espace comme exprimant la possibilité de représenter un même objet depuis une multiplicité de sujets (i.e. systèmes de coordonnées) « objectivement équivalents ». Hermann Weyl explique ainsi souvent comment les différentes transformations géométriques peuvent toujours admettre ces deux interprétations : soit comme déplacement de l'objet dans l'espace, soit comme changement de coordonnée à l'égard d'un même objet immobile.

Ce qu'est techniquement un système de coordonnées, cela dépendra du type d'espace mathématique considéré. Dans un espace affine de dimension 2, le système de coordonnées sera donné par 3 points non alignés (une origine et deux directions), si cet espace est de dimension 3, il faudra ajouter un 4ème point extérieur au premier plan. Par contre, si cet espace est muni d'une métrique, deux points suffiront à donner des coordonnées (un qui servira d'origine, et un qui définira avec le premier l'étalon de mesure). L'originalité d'Hermann Weyl ici c'est qu'il donne les outils conceptuels qui permettent de saisir ce qui fait l'unité entre ces différentes notions contextualisées de systèmes de coordonnées. Le système de coordonnées c'est toujours ce minimum que je dois me donner pour pouvoir individualiser les points de l'espace. Mais c'est en même temps un système maximum dans le sens où il s'agit du plus grand système de points tel que je ne puisse distinguer conceptuellement le système de coordonnées choisi, parmi la multiplicité infini de ces systèmes. Comme il le dit à la fin du texte, « il n'y a aucune propriété saisissable conceptuellement, qui s'appliquant à l'un ne s'applique pas à l'autre ». Le système de coordonnées est donc en quelque sorte le plus grand des systèmes de points à l’égard duquel l’espace reste homogène. Et c'est cette maximalité qui est à l’origine de cette capacité du système de coordonnées à individualiser tous les points de l’espace, c'est-à-dire à leur appliquer à chacun cette étiquette conceptuelle qu’est le nombre et qui est indispensable pour l’application physique.

Au lieu de partir comme nous l’avons fait des axiomes mathématiques, c'est-à-dire du niveau objectif, puis de redescendre au niveau subjectif par l’introduction d’un système de coordonnées, nous aurions pu parcourir le chemin inverse et montrer comment à partir d’une configuration géométrique qui se donne dans un système de coordonnée particulier, on pourrait remonter au niveau objectif en s’*abstrayant* de la particularité de ce système de coordonnées. Cette abstraction doit être comprise dans le sens technique de l’abstraction mathématique qui est rendue possible en raison de l’homogénéité de l’espace à l’égard des systèmes de coordonnées. Cette homogénétié implique en effet l’existence d’une relation mathématique fonctionnelle invariante qui exprime le passage des coordonnées des différents objets géométriques lorsqu’on passe d’un système de coordonnées à un autre (d'où la seconde question posée par Weyl dans le dernier texte que nous avons lu).

L’homogénéité de l’espace vis-à-vis des divers systèmes de coordonnées n’est donc pas qu’une propriété mathématique structurelle contingente de certains espaces mais elle est une *exigence de la raison* pour que le savoir géométrique mathématique qui rend possible la mesure physique soit objectif, indifférent à la particularité du sujet qui l'exprime. Cette exigence est ce qu’Hermann Weyl appelle dans le texte que nous avons lu « principe de relativité ». Il ne s’agit pas encore ici du principe de relativité physique, au fondement de la théorie d’Einstein, puisque nous ne sommes encore que dans la caractérisation de l’espace mathématique comme forme. Il s’agit alors plutôt ici d’un principe de relativité géométrique (ou cinématique si on ajoute la dimension temporelle) qui consiste en l’exigence d’une homogénéité de l’espace vis-à-vis des systèmes de coordonnées.

Nous pouvons marquer une pause dans notre analyse conceptuelle et résumer les principaux traits de la notion d'espace comme forme chez Hermann Weyl. Nous avons vu que les deux notions fondamentales qui caractérisaient cet espace comme forme étaient les notions de *continuum* et de *transformation*.

L'espace comme forme a un premier versant *subjectif* dans la mesure où cet espace est composé d'une multiplicité homogène de points qui sont autant d'origines possibles pour des systèmes de coordonnées, qui sont des données subjectives. Quand Hermann Weyl insiste sur ce versant subjectif, il interprète alros l'espace comme un continuum amorphe (c'est-à-dire qu'il met de côté les structures conceptuelles affines et métriques) pour ne considérer l'espace que comme ce qui est au fondement de l'individualité des différents points. L'espace est ce qui fait la différence entre l'Ici et le Maintenant et les autres points spatiaux ou temporels. Il est alors une donnée subjective qui vient s'ajouter à une réalité physique par elle-même aspatiale et intemporelle, afin de pouvoir l'exprimer. **(TEXTE 6)**

Mais l'espace comme forme a également un versant objectif. Lorsqu'on ne considère plus uniquement le continuum amorphe mais les structures affines et métriques dont on le munit, alors les différents points indiscernables qui composent l'espace apparaissent comme autant de points de vue possible sur une même réalité géométrique, la relation fonctionnelle qui lie les coordonnées des différents objets géométriques dans les divers systèmes de coordonnées permettant ce jeu constant entre le niveau objectif des relations le niveau subjectif des différents systèmes de coordonnées, ce jeu constituant l'essence même de la géométrie.

Arrêtons-nous là pour ce qui est de l'espace mathématique. A cette première notion d'espace comme forme homogène, s'oppose une seconde notion qui apparaît dans la seconde partie d'*Espace, Temps, Matière* et dont la distinction avec la première est rendue manifeste par le fait que cette nouvelle notion d'espace est hétérogène. L'opposition entre deux espaces, l'un hétérogène et l'autre homogène, est un thème courant aussi bien dans des ouvrages de physique mathématique que dans des ouvrages purement mathématiques. Dans ces derniers, l'opposition entre homogénéité et hétérogénéité peut apparaître lorsqu'on passe d'un niveau d'analyse mathématique à un autre (donner l'exemple d'un espace topologiquement homogène mais métriquement hétérogène). Dans *Espace, Temps, Matière*, ce n'est pas à ce genre de distinction de niveaux mathématiques que l'on a affaire mais il y a bien au contraire une différence de statut ontologique entre les deux notions d'espaces qui interviennent dans l'ouvrage. L'espace hétérogène dont nous parlons maintenant est l'espace de la théorie de la relativité générale, un espace physique qui ne peut être déterminé entièrement *a priori* mais doit être empiriquement déterminé.

Précisons que cette distinction que nous faisons ici entre l'*a priori* et *l'empiriquement déterminé* n'est pas la distinction kantienne. La distinction que nous proposons ici entre *a priori* et empirique est une distinction *interne* à la théorie de la relativité générale qui consiste à opposer d'un côté ce qui, dans cette théorie, est fixé conceptuellement par la donnée de lois mathématiques et ce qui, d'un autre côté, est un objet physique dont la singularité ne peut être déterminé que par la mesure expérimentale. L'opposition que nous faisons ici entre *a priori* et empirique est donc proche de la distinction que font les physiciens entre ce qui est de l'ordre de la loi, et ce qui est de l'ordre des conditions initiales qui ne peuvent être anticipées conceptuellement. **(Schéma : distinction interne / distinction externe)**

Pour comprendre la nature de l'espace physique, il faut rappeler les traits essentiels de la théorie de la relativité générale. Le cœur de cette théorie sont les équations de la gravitation, lois physiques affirmant que la courbure de l'espace(-temps) (la courbure étant une propriété mathématique de l'espace qui peut varier d'un point à un autre) est interdépendante de la répartition des masses dans l'environnement physique considéré **(Illustration)**. La physique s'introduit donc dans la détermination des propriétés structurelles de l'espace et cela à deux niveaux ontologiquement distincts.

Premièrement, l’espace physique est déterminé par les équations de la gravitation d’Einstein. Ces équations sont des lois physiques qui fixent conceptuellement le rapport entre espace et matière. Ces équations, en tant que telles, doivent donc être placées dans la portion *a priori* de la théorie (toujours au sens interne d’*a priori*). Ces équations ont cependant un statut *physique* contrairement aux lois proprement géométriques (au sens de la géométrie *mathématique*) dans la mesure où elles expriment une propriété physique de la matière, à savoir son interaction avec un nouvel objet physique : le champ gravitationnel (mathématiquement, c'est un tenseur métrique) exprimant la courbure de l’espace. Ce tenseur est l’élément, dans la théorie de la relativité générale, qui donne un sens à la notion de distance. Il joue en tant que tel le même rôle que la notion euclidienne de distance (disons la formule de Pythagore). A ceci près, et la différence est énorme, qu’il s’agit d’un objet physique (d’un objet dynamique comme disent les physiciens). Autrement dit, même si la nature mathématique de la métrique est fixée conceptuellement (à savoir le fait d’être « un tenseur du second ordre »), en revanche les valeurs particulières des coefficients de cette métrique ne peuvent être fixées conceptuellement puisqu’ils dépendent de la répartition contingente de la matière dans l’environnement donné. Les coefficients de la métrique doivent donc être mesurés expérimentalement, ce sont cette fois des éléments *a posteriori* qui participent à la constitution de la notion physique d’espace. **(TEXTE 7)**

Ayant distingué chez Hermann Weyl l’espace mathématique comme forme, et l’espace physique comme métrique dynamique, nous allons à présent esquisser comment Hermann Weyl trouve dans cette distinction et dans le lien entre les deux notions, le terrain épistémologique propice pour répondre à certaines des principales problématiques concernant la nature de l’espace : le problème du rapport de l’espace à l’expérience, le problème de la place du sujet dans la constitution de la notion d’espace et enfin le problème de la nature substantielle ou relationnelle de l’espace.

Nous avons vu dans le dernier texte lu que le cœur de la théorie de la relativité générale pour Hermann Weyl n’était pas le principe de relativité mais bien la découverte que les structures conceptuelles qui organisent l'espace (les structures affines et métriques) ne peuvent être déterminées entièrement *a priori* (au sens faible d'*a priori*) mais reposent sur un nouvel objet physique : le tenseur métrique qui, de par son statut physique, ne peut être connu que par des mesures expérimentales. La présence d'une donnée empirique (en un sens fort), autrement dit la dépendance des structures spatiales à l'égard de « conditions initiales » de l'environnement physique, introduit dans la théorie de l'espace un élément empirique dont on ne peut se passer. Néanmoins, l'épistémologie d'Hermann Weyl à l'égard de l'espace est loin d'être un empirisme grossier. L'espace n'est pas constitué par une collection de faits bruts mais est l'objet *d'une théorie physique*, ce qui implique en amont de la mesure expérimentale proprement dite, la présupposition nécessaire de structures conceptuelles *a priori* qui rendent possibles ces mesures. Ces structures conceptuelles fixent a *priori* les lois d'interaction entre la matière et les notions spatiales de distance, de ligne droite, etc.. Mais il faut aussi que soit posée *a priori* les structures mathématiques qui expriment que, localement, l'espace est assimilable à un espace euclidien. L'espace physique ne se pose donc pas contre l'espace mathématique mais il intègre plutôt ce dernier. Il est intéressant de voir que beaucoup des arguments qu'Hermann Weyl utilise pour montrer que la mesure de l'espace physique est rendue possible par la présupposition *a priori* d'une structure mathématique, sont proches de ceux qu'utilisaient à cette même époque les néokantiens pour adapter l'idéalisme transcendantal à la nouvelle théorie de l'espace (à ceci près qu'Hermann Weyl donne toujours un sens faible à *a priori* mais n'est-ce pas ce que font aussi les néokantiens ? Laissons ouverte cette question)

Une difficulté subsiste pour comprendre cet empirisme physique qui veut se servir de l'espace mathématique comme d'une condition de possibilité pour accéder à un espace physique. En effet, comment concilier le fait que l'espace physique (forme métrique empiriquement déterminée) qui est hétérogène puisse intégrer l'espace mathématique par nature homogène. La solution d'Hermann Weyl consiste à distinguer d'un côté l'individualisation des points de l'espace par un système de coordonnées qui ne fait qu'étiqueter conceptuellement les points par des nombres, et de l'individualisation *physique* d'un point de l'espace par son contenu matériel **(faire un schéma et expliquer, TEXTE 8)**

Cette distinction implique qu’Hermann Weyl donne finalement un sens uniquement mathématique au principe de relativité. Il n’a pas un statut empirique mais est une exigence de la raison qui exprime l’indifférence de la réalité physique de l’espace à l’appareil conceptuel mathématique que chaque sujet lui appose pour l’appréhender.

Enfin, en ce qui concerne l’opposition entre un espace relationnel et un espace substantiel, l’opposition de Weyl entre espace mathématique et espace physique nous semble également féconde même si Weyl ne thématise pas cette question. La séparation entre le point mathématique comme origine d’un système de coordonnée, et le point physique identifié par son contenu, est en effet nous semble-t-il l’outil conceptuel indispensable pour penser la nature relationnelle de l’espace relativiste. Si ce qui compte dans la détermination de la structure spatiale c’est l’interaction de la matière, et non pas l’hypothétique position absolue de chaque particule par rapport à un référentiel physique privilégié, on comprend alors pourquoi Weyl interprète le principe de relativité comme exprimant une indifférence de l’espace physique à l’égard de la grille conceptuelle que chaque sujet se trouve obligé de lui appliquer pour pouvoir l’appréhendé. Cette position relationnelle sur la nature de l’espace, héritée sans doute du jeune Einstein, explique la disparition dans le texte de Weyl de la notion physique de référentiel au profit de la notion mathématique de système de coordonnées.

Pour conclure, nous avons exposé à travers certains textes à teneur épistémologique ou philosophique qui ponctuent le travail proprement scientifique d'*Espace-Temps-Matière,* comment Hermann Weyl pensait dans les années de 1917 à 1920 ce qu'il identifiera par la suite comme étant le problème de l'espace. Alors que ce problème sera trinitaire lorsqu'il aura muri dans les années 1920, après la rencontre entre Weyl et Brouwer, le problème de l'espace sous sa forme précoce est plutôt un problème bipolaire qui se situe à l'intersection entre mathématiques et physique.

Notre analyse conceptuelle nous a montré comment Weyl pensait, parfois de façon opposée, cette dualité entre espace mathématique et espace physique. L'espace mathématique est pensé comme une forme par nature homogène, c'est-à-dire susceptible de recevoir n'importe quel objet spatial en chacun de ces points tout en respectant l'identité géométrique de cet objet. Cette homogénéité de l'espace mathématique est pensée comme une exigence de la raison pour que le savoir géométrique puisse être objectif c'est-à-dire indépendant de la singularité des sujets qui pensent l'espace. C'est certainement dans l'analyse de la notion de sujet comme système de coordonnées que les analyses épistémologiques d'Hermann Weyl sur l'espace comme forme mathématique sont les plus innovantes. Le système de coordonnée est pensé comme une donnée subjective non-conceptuelle que l'on doit se donner pour pouvoir individualiser tous les points de l'espace en vu d'une application physique. L'introduction des systèmes de coordonnées n'abolit pas l'objectivité géométrique en raison même de l'homogénéité de l'espace qui implique l'existence d'une relation fonctionnelle qui lie toutes les représentations que l'on peut se faire d'une même réalité géométrique dans différents systèmes de coordonnées. Cette origine subjective de la distinction entre les points individuels amène Weyl à penser l'espace mathématique comme la donnée d'une projection subjective qui temporalise et localise une réalité physique par soi atemporelle et aspatiale. Mais ce versant subjectif de l'espace mathématique est contrebalancé par un versant objectif qui consiste dans les structures conceptuelles affines et métriques qui constituent le savoir géométrique en tant que tel.

A l'opposé de cette espace mathématique se tient un espace physique pensé par la théorie de la relativité générale. Sa métrique est au contraire hétérogène et l'accès à cet espace n'est plus *a priori*. La géométrie devient théorie physique et en tant que telle elle comporte un aspect empirique au sens le plus fort du terme, les coefficients de la métrique étant mesurés expérimentalement. Mais comme dans toute théorie physique, ces mesures ne sont rendues possibles qu'en vertu de présuppositions *a priori* que sont les concepts de la géométrie infinitésimale d'un côté et, de l'autre côté, les lois physiques d'interaction de la matière avec la métrique de l'environnement physique. L'espace physique ne vient pas remplacer l'espace mathématique mais le complète par l'introduction d'un nouvel objet physique dynamique: le champ gravitationnel relativiste qui interagit avec la matière. L'espace ne peut être connu physiquement qu'en tant qu'il est informé par la matière.

Nous avons vu enfin que dans l'interaction entre ces deux notions d'espace, Hermann Weyl trouvait le cadre épistémologique pour répondre ou du moins donner des amorces de réponses aux principaux problèmes philosophiques qui ont trait à la nature de l'espace. La clarification apportée par la distinction entre l'individualisation purement subjective des points de l'espace (qui n'a trait qu'à la façon dont nous étiquetons arbitrairement les points de l'espace par des nombres) et la distinction physique des points de l'espace (qui a trait au contenu matériel de l'espace) permet à Hermann Weyl de contourner les fausses apories issues de la confrontation entre l'espace homogène des mathématiques et l'espace physique hétérogène, et lui permet de défendre une conception relationnelle et un empirisme physique à propos de la nature de l'espace.

(préciser prolongement Klein sur les transformations, groupes symétries...) Mieux pbmtiser le pbm de savoir si la géom infinitésimale reste un a priori sens fort ou si elle est une hypothèse physique.)

Première façon de penser ces rapports: l'esp math comme étant la ^m chose que l'esp phys mais en faisant abstraction des conditions intiales particulières. Puisque la particularité de chaque condition initiale particulière (répartition matière) est à l'origine d'une hétérogénisation de l'esp (tous les points n'étant plus indifférents), faire abstraction de cela revient à ne considérer l'esp que localement en un point et alors on peut en fcto du sdc choisi donner n'importe quelle valeur à la métrique. Esp math = le concept de métrique riemannienne.

Deuxième façon: Déplacer la matière en ^m tps que l'origine sys de coord: dans ce cas c'est le sujet-origine est bien un sdc et pas un ref. (Pbmter avec Norton) L'esp math comme l'ensb des façons dont on peut poser un schéma conceptuel sur une ^m rté phys. On retrouve la subjectivité de l'esp dans le sens de l'indifférence du hic et nunc

Avant de passer à l'interaction entre cette notion mathématique d'espace comme forme et la notion physique d'espace, il faut esquisser un thème que nous ne pourrons que survoler mais qui a joué un rôle essentiel pour fournir à la théorie de la relativité générale son expression mathématique. Il s'agit du passage d'une géométrie globale à une géométrie locale ou infinitésimale. Ce passage trouve son origine historique dans les travaux des mathématiciens du XIXème siècle et en particulier dans l'étude analytique des courbes et des surfaces. Une première grande étape de cette histoire est la découverte par F. Gauss du fait que lorsqu'on étudie une surface plongée à l'intérieur de l'espace euclidien tridimensionnel, on peut arriver à distinguer mathématiquement les traits géométriques de cette surface qui dépendent de la façon dont cette surface est disposée à l'intérieur de l'espace, des traits pour ainsi dire « intrinsèques » à la surface qui ne dépendent pas de sa disposition dans l'espace. Ces caractéristiques intrinsèques s'expriment à travers un objet mathématique (une forme différentielle) similaire à la notion de métrique euclidienne, à ceci près que les coefficients de cette métrique varient en fonction du lieu où nous nous situons dans la surface, cette variation étant l'expression de la particularité géométrique de la surface choisie.

La seconde étape importante est franchie par le mathématicien B. Riemann, élève de Gauss, qui construit la notion d'espace de Riemann. Il s'agit aussi de définir la forme d'un espace par une forme différentielle variable en fonction du lieu. Cependant, contrairement à Gauss, Riemann ne plonge pas initialement la surface qu'il étudie dans un espace euclidien tridimensionnel pour ensuite en abstraire ce qui est indépendant ce qui est indépendant de la disposition de la surface dans l'espace, mais il arrive en quelque sorte à se placer d'emblée dans la géométrie intrinsèque de la surface sans avoir à passer par l'hypothèse auxiliaire d'un espace euclidien dans lequel la surface serait plongée. Cela permet de libérer la géométrie locale de toute supposition du caractère euclidien de l'espace, dans un contexte de naissance des géométries non-euclidiennes.

Ce passage d'une géométrie globale à une géométrie locale prend place dans le second chapitre d'*Espace, Temps, Matière*. Hermann Weyl reprend les deux étapes que nous avions vues dans la construction de la structure des relations spatiales (l'étape affine puis l'étape métrique). La différence c'est que les structures affines et métriques ne sont fixées que localement (c'est-à-dire au voisinage de chaque point) par l'axiomatique. La façon dont les structures affines et métriques varient dans le passage d'un point à un autre est donnée par de nouveaux objets géométriques qui sont : la connexion affine (pour le niveau affine) et la connexion métrique (pour le niveau métrique). L'important à comprendre dans ce passage du global au local, c'est que désormais les relations affines et métriques de l'espace ne sont plus fixées uniquement par un schéma conceptuel rigide (comme c'était le cas pour la géométrie euclidienne, où les relations affines étaient entièrement caractérisées par les axiomes, et la métrique était fixée par une formule déterminée. Dans la géométrie locale, tant qu'on en reste qu'au niveau purement conceptuel, les relations affines et métriques ne sont pas déterminées. Seule est déterminée conceptuellement la dépendance entre ces relations affines et métriques et les valeurs de ces deux objets géométriques particuliers que sont les connexions affines et métriques. On peut se représenter cela de façon imagée en disant que la géométrie infinitésimale ne fixe plus la forme de l'espace mais donne un canevas conceptuel, une sorte d'espace muni d'une forme affine et métrique indérminée, mais qui le devient sitôt qu'on précise la valeur des coefficients de la métrique, valeurs qui ne sont pas déterminable *a priori*.

Quand Weyl insiste sur cet aspect objectif, l'espace comme forme ressemble plutôt à l'espace des néokantiens, c'est-à-dire qu'il est un système conceptuel que le mathématicien doit poser de façon a priori pour rendre possible la mesure (a priori au sens faible, expliquer, dire que Weyl n'adhérerait pas à cette façon de parler)

(?? repenser cette partie pour mettre l'exemple plus loin

La coprésence de plusieurs notions d'espace qualifiées d'homogène ou d'hétérogène est courante à la fois dans des ouvrages physiques traitant de la théorie de la relativité générale mais aussi dans des ouvrages purement mathématiques développant la notion d'espace de Riemann. Dans ce dernier cas, la distinction entre l'homogénéité et l'hétérogénéité des espaces considérés tient souvent à une différence entre deux points de vue mathématiques adoptés sur un même espace. Par exemple, on remarque souvent qu'un certain espace de Riemann est homogène du point de vue de sa structure topologique alors qu'il est hétérogène du point de vue de sa structure métrique. (Montrer un exemple)

Nous allons montrer que la distinction qui intervient dans Espace, Temps, Matière n'est pas de ce type là. C'est-à-dire que si Hermann Weyl attribue à ces deux notions d'espace des attributs contradictoires (l'un est homogène, l'autre hétérogène) c'est qu'ils ne se situent tout simplement pas au même niveau ontologique et c'est ce que nous voulons capturer par les appellations d'« espace mathématique » et d'« espace physique ». Pour expliquer cela, il va falloir considérer les propriétés qu'Hermann Weyl attribue à ces deux espaces.)

(?? le mettre où ! remarquer que distinction espace mathématique/espace physique correspond à l'ordre dans lequel on présente les choses dans un manuel de relativité : 1) on donne les outils mathématiques (géométrie mathématiques) : espace de Riemann, courbure, tenseurs… Puis dans un second temps on écrit les équations d'Einstein (en les justifiant parfois par des critères comme principe relativité, lien avec théorie de la relativité restreinte). C'est alors la géométrie physique.)

L'espace réel

Texte?

Les statuts ontologiques:

- Idée du plan des ouvrages de théorie de la relativité (géométrie mathématique / géométrie physique / reste physique)
- idée que ce que j'appelle espace mathématique/espace physique dans le texte, ce serait plutôt espace avant la matière, espace après la matière.
-

s