

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'ESTIMATEURS D'ERREUR POUR LA MÉTHODE DE
VOLUMES FINIS APPLIQUÉE AUX ÉQUATIONS D'EULER

CRISTIAN ILINCA

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

NOVEMBRE 1996

©Cristian Ilinca, 1996.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26482-3

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

DÉVELOPPEMENT D'ESTIMATEURS D'ERREUR POUR LA MÉTHODE DE
VOLUMES FINIS APPLIQUÉE AUX ÉQUATIONS D'EULER

présenté par: ILINCA Cristian

en vue de l'obtention du grade de: maître ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. TRÉPANIÉRIE Jean-Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre

À mes parents,
pour leur amour et leur amitié,
à mes frères,
pour leur support,
à toute ma famille.

Remerciements

Je désire remercier en premier lieu M. Jean-Yves Trépanier, directeur de recherche, pour sa disponibilité, son support scientifique, moral et matériel et pour la confiance qu'il m'a accordée en m'offrant l'opportunité de réaliser cette maîtrise.

Je tiens à remercier Ricardo Camarero, Marcello Reggio et Dominique Pelletier pour avoir pris le temps de me conseiller chaque fois que j'en avais besoin.

Merci à ma belle-soeur Lumi, et aussi à Paul, François, André et Samir pour leur support et leur amitié.

J'exprime ma reconnaissance envers mes frères pour tout ce qu'ils ont fait pour moi, avant et pendant la durée du travail à l'École Polytechnique de Montréal.

Résumé

Le sujet de ce mémoire est la simulation numérique des écoulements régis par les équations d'Euler. Les équations d'Euler sont utilisées pour obtenir des solutions des écoulements nonvisqueux, compressibles et rotationnels. La stratégie numérique de résolution utilisée consiste à discrétiser les équations par la technique de volumes finis, à l'aide d'éléments triangulaires.

Pendant tout ce travail on a poursuivi deux objectifs principaux. Premièrement, on propose des méthodes robustes de prédiction pour des écoulements compressibles subsoniques et supersoniques ainsi que pour des écoulements avec des discontinuités comme les ondes de choc. Deuxièmement, mais le plus important, on présente un estimateur d'erreur basé sur l'analyse *a posteriori* de la solution.

Les méthodes de calcul proposées sont basées sur une technique de volumes finis du premier ou du deuxième ordre dans l'espace et sur une discrétisation explicite dans le temps, qui utilise des ressources informatiques moins importantes qu'une discrétisation implicite même si l'avancement de la solution dans le temps est moins rapide.

Pour évaluer le flux à l'interface des éléments on utilise un schéma basé sur

le solveur de Roe qui consiste à trouver la solution exacte au problème approché de Riemann. Ce schéma amont satisfait implicitement les conditions de Rankine-Hugoniot à travers un choc et ne demande pas de viscosité artificielle explicite.

L'amélioration de la précision a nécessité l'extension du schéma à un ordre supérieur, en utilisant plusieurs techniques de reconstruction de la solution. On a fait des comparaisons entre les différentes techniques utilisées en calculant les erreurs par rapport aux solutions analytiques et le taux de convergence pour chaque méthode. Pour accélérer la convergence on utilise une technique multi-grille par agglomération.

On desire développer une méthode adaptative qui utilise l'estimation d'erreurs dans la solution numérique. L'estimateur d'erreur proposé est basé sur la technique d'extrapolation de Richardson et il peut être utilisé pour un facteur de raffinement quelconque. Premièrement, on détermine le taux de convergence à l'aide de trois solutions obtenues sur des maillages différents et deuxièmement on évalue les erreurs sur les trois maillages. Par la suite, on présente une procédure d'adaptation du maillage basée sur le critère de l'uniformisation de l'erreur dans le domaine de calcul.

On présente des simulations d'écoulements compressibles subsoniques (problème de Ringleb), d'écoulements supersoniques sans ondes de choc (Vortex supersonique) et avec ondes de choc, dont on a trouvé les solutions analytiques. À la fin, on applique la méthodologie développée pour un écoulement autour du profil **NACA – 0012**.

Abstract

The subject of this master's thesis is the numerical simulation of flows governed by the Euler equations. The Euler equations, directly obtained by means of the Navier - Stokes equations ignoring the terms of the viscous dissipation, are used to obtain solutions of non-viscous, compressible and rotational flows. The numerical solution strategy consists in the discretisation of the equations by means of finite-volume technique using triangular elements.

During this work, two main objectives were considered. We tried first to propose some robust prediction methods for compressible subsonic and supersonic flows and for flows with discontinuities such as shock waves. But, mainly, we tried to develop an error estimator based on a *posteriori* analysis of the solution.

The computational methods showed are based on a finite volumes technique of first or second order in space solved using an explicit time discretisation. This technique use low computational ressources compared to the implicit discretisation, but the convergence of the solution in time is not as fast.

The flux across the cell faces is evaluated using a scheme based on Roe's solver which applies an exact solution to the linearized Riemann problem. This upwind

scheme satisfies implicitly the Rankine - Hugoniot conditions across a shock wave and doesn't require an explicit artificial viscosity.

The improvement of the accuracy requires the extension of the scheme at a higher order. This is accomplished using several reconstruction techniques of the solution. We compare the different techniques employed by computing the numerical solution errors and comparing to the analytical solution and also by computing the convergency rate for each method. In order to accelerate the convergence, we have used a multi-grid agglomeration technique.

Most of the adaptive methods needs an estimation of the error in the numerical solution. The error estimator proposed in this work is based on Richardson extrapolation technique and it can be used for any refinement factor. First, we have to establish the convergence rate by using three solutions obtained on different grids and subsequently we can estimate the errors on the three grids. We propose after that an adaptive method based on the uniformization of the error in the computational domain.

Several simulations including Ringleb subsonic flow, supersonic flows without shock waves (Supersonic Vortex), supersonic flows with shock waves (wedge), are presented in this study. Finally, the coupled grid adaptation - error estimation procedure was applied to the computation of the flow field around the **NACA - 0012** profile.

Table des matières

Dédicace.....	iv
Remerciements.....	v
Résumé.....	vi
Abstract.....	viii
Table des matières.....	x
Liste des tableaux.....	xiii
Liste des figures.....	xv
Liste des sigles et abréviations.....	xix
1 Introduction.....	1
1.1 Les équations d'Euler.....	2
1.2 Schémas numériques de discrétisation.....	3
1.3 Calcul des erreurs exactes et évaluation du taux de convergence.....	5
1.4 L'estimateur d'erreur.....	6
1.5 Méthodes d'adaptation du maillage.....	8

1.6 Applications - Test	9
2 Formulation mathématique et numérique du problème	11
2.1 Introduction	11
2.2 Les équations d'Euler	12
2.3 Discrétisation des équations d'Euler	13
2.3.1 Introduction sur les schémas 'upwind'	13
2.3.2 Schéma de Roe pour le cas unidimensionnel	15
2.3.3 Extension du schéma de Roe pour le cas bidimensionnel	22
2.3.4 Discrétisation explicite dans le temps	25
2.3.5 Conditions aux limites	26
2.4 Extension du schéma de Roe au deuxième ordre	28
2.4.1 Reconstruction basée sur le théorème de Gauss	29
2.4.2 Reconstruction basée sur la technique des moindres carrés	31
3 Estimation de l'erreur et adaptation du maillage	36
3.1 Taux de convergence	36
3.1.1 Taux de convergence exact	37
3.1.2 Taux de convergence estimé	38
3.2 La technique de transfert de la solution entre deux maillages	39
3.3 Estimateur de l'erreur	41
3.4 Adaptation du maillage	43
3.4.1 Adaptation du maillage par raffinement et déraffinement	43
3.4.2 Algorithme d'adaptation	45
4 Résultats	47
4.1 Le vortex supersonique	47

4.1.1	Modèle physique et solution analytique pour le vortex super-sonique	48
4.1.2	Analyse de l'erreur	50
4.2	Résultats pour le problème de Ringleb	64
4.2.1	Modèle physique et solution analytique pour le problème de Ringleb	64
4.2.2	Analyse de l'erreur	67
4.3	Résultats pour le problème de confluence de deux écoulements super-soniques	81
4.3.1	Modèle physique et solution analytique	81
4.3.2	Analyse de l'erreur	82
4.3.3	Adaptation du maillage	83
4.4	Résultats pour un écoulement autour du profil NACA-0012	92
5	Conclusion	100
	Références	103

Liste des tableaux

4.1	Les erreurs globales exactes pour différents maillages structurés . . .	51
4.2	Les erreurs globales exactes pour différents maillages non-structurés .	51
4.3	Les taux de convergence exacts pour différentes méthodes sur des maillages structurés	51
4.4	Les taux de convergence exacts pour différentes méthodes sur des maillages non-structurés	52
4.5	Les erreurs globales estimées pour différents maillages structurés . . .	52
4.6	Les erreurs globales estimées pour différents maillages non-structurés	52
4.7	Les taux de convergence estimés pour différentes méthodes	53
4.8	Les erreurs globales pour différents maillages structurés	68
4.9	Les erreurs globales pour différents maillages non-structurés	68
4.10	Les taux de convergence globales pour différentes méthodes sur des maillages structurés	68
4.11	Les taux de convergence globales pour différentes méthodes sur des maillages non-structurés	69
4.12	Les erreurs globales estimés pour différents maillages structurés . . .	69
4.13	Les erreurs globales estimés pour différents maillages non-structurés .	70
4.14	Les taux de convergence estimés pour différentes méthodes	70

4.15 Les erreurs globales exactes	83
4.16 Les erreurs globales estimées	83
4.17 Les erreurs globales exactes et estimées (les normes L_2) pour différents maillages non-structurés après le premier cycle d'adaptation	89
4.18 Les erreurs globales estimées en norme L_2 sur différents maillages non-structurés initiaux	93
4.19 Les erreurs globales estimées en norme L_2 sur les différents maillages non-structurés après le premier cycle d'adaptation	93

Liste des figures

2.1	Décomposition de la différence du flux pour résoudre le problème de Riemann	16
2.2	Discontinuité entre deux états du fluide pour le cas bidimensionnel . .	23
2.3	Élément ‘miroir’ utilisé pour l’implantation des conditions aux limites	27
2.4	Volume de contrôle utilisé pour la reconstruction basée sur le théorème de Gauss	29
2.5	Procédure utilisée pour le calcul du gradient à l’aide du théorème de Gauss	31
2.6	Facteur géométrique pour la reconstruction basée sur la technique de moindres carrés	34
2.7	Voisins considérés pour la reconstruction basée sur la technique des moindres carrés	35
3.1	Interpolation de la solution à partir d’un maillage grossier sur un maillage plus fin	40
3.2	Les étapes à suivre pour l’estimateur d’erreur	43
3.3	Les étapes à suivre dans le cycle d’adaptation	46
4.1	Lignes de courant pour le vortex supersonique	48
4.2	Maillages pour le vortex supersonique	56

4.3	La distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe	57
4.4	La distribution de l'erreur exacte en densité pour le schéma de Roe .	58
4.5	La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2	59
4.6	La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2	60
4.7	La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma de Roe. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.	61
4.8	La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.	62
4.9	Les erreurs globales exactes en utilisant le schéma de Roe	63
4.10	Modèle physique pour l'écoulement de Ringleb	65
4.11	Maillages utilisés pour le problème de RINGLEB	72
4.12	La distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe	73
4.13	La distribution de l'erreur exacte en densité pour le schéma de Roe .	74
4.14	La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur le théorème de Gauss	75
4.15	La distribution de l'erreur exacte en densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur le théorème de Gauss	76
4.16	La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur la technique de moindres carrés	77
4.17	La distribution de l'erreur exacte en densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur la technique de moindres carrés	78

4.18	La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma de Roe. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.	79
4.19	La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.	80
4.20	Solution analytique	81
4.21	Maillages utilisés et distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe	85
4.22	La distribution de l'erreur en densité pour le schéma de Roe	86
4.23	Maillages obtenus après un cycle d'adaptation et distribution de la densité pour le schéma de Roe	87
4.24	La distribution de l'erreur en densité après un cycle d'adaptation pour le schéma de Roe	88
4.25	Maillage obtenu après deux cycles d'adaptation	89
4.26	La distribution de la densité et de l'erreur exacte en densité après deux cycles d'adaptation	90
4.27	Les erreurs globales exactes et estimées en norme L_2 en utilisant le schéma de Roe	91
4.28	Maillages initiaux et distribution de la densité pour le schéma de Roe	95
4.29	Maillages obtenus après un cycle d'adaptation et distribution de la densité pour le schéma de Roe	96
4.30	Les distributions de l'erreur sur les maillages initiaux et après un cycle d'adaptation	97

4.31 La distribution de la densité et le maillage après deux cycles d'adaptation 98

4.32 Maillage obtenu après deux cycles d'adaptation (vue générale) 99

Liste des sigles et abréviations

a	vitesse du son
A	la matrice jacobienne du vecteur du flux
A_i	aire élémentaire
A_{cible}	aire élémentaire cible
A_{cible_i}	aire cible du élément i
c	vitesse du son (valeur de stagnation)
c_p, c_v	chaleurs spécifiques du gaz
E	énergie totale de l'unité de masse
e_k	vecteurs propres de la matrice jacobienne du vecteur du flux
$\ e_i \ $	erreur locale
$\ e_{cible} \ $	erreur locale cible
$\ E \ $	erreur globale
$\ E_{cible} \ $	erreur globale cible
f, g	composantes cartésiennes du vecteur du flux
$f^{(i)}$	solution discrète sur le maillage i
f_{exact}	solution discrète exacte

$f_{exact}^{(i)}$	solution discrète exacte pour une méthode d'ordre i
\mathbf{F}	le vecteur flux
$\mathbf{F}_{i+1/2}$	le vecteur flux à l'interface
H	enthalpie de l'unité de masse
h	taille élémentaire
h_i	taille élémentaire du maillage i
h_{cible}	taille élémentaire cible
h^{cible}_i	taille cible du élément i
\vec{i}, \vec{j}	verseurs des axes de coordonnées cartésiennes
l	frontière du domaine
L_{ij}	matrice obtenue par la méthode des moindres carrés
M	nombre de Mach
$\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}_1, \vec{n}_2$	vecteurs de la normale extérieure
n_x, n_y	composantes cartésiennes du vecteur de la normale extérieure
p	pression
ρ	taux de convergence
P	la matrice des vecteurs propres à droite pour le cas 2-D
r	facteur de raffinement constant
r_{ij}	facteur de raffinement entre les maillages i et j
\vec{r}	vecteur position
S	la vitesse du choc

S_k	la surface du élément k
t	temps
T	température
u, v	composantes cartésiennes de la vitesse de fluide \mathbf{u}
\mathbf{u}	vitesse du fluide
U, V	les vitesses normale et tangentielle à une face du maillage
U_d, V_d	les vitesses normale et tangentielle à une face du maillage sur l'élément du domaine de calcul
U_m, V_m	les vitesses normale et tangentielle à une face du maillage sur l'élément 'miroir'
\mathbf{U}	vecteur des variables conservatives
$\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y$	les dérivées du vecteur des variables conservatives selon les directions x et y , respectivement
\mathbf{U}_t	la dérivée du vecteur des variables conservatives par rapport au temps t
\mathbf{U}^n	le vecteur des variables conservatives au pas de temps n
\mathbf{U}_i	le vecteur des variables conservatives pour l'élément i
$\mathbf{U}^{(i)}$	le vecteur des variables conservatives pour un élément du maillage i
w_k	facteur de pondération géométrique
q	module de la vitesse de l'écoulement
Q	la matrice des vecteurs propres \mathbf{e}_k à droite pour le cas 1-D
x, y	coordonnées cartésiennes

α_k	intensité de l'onde k
ϵ	facteur de reduction
γ	rapport des chaleurs spécifiques du gaz
Δt	le pas de temps
Δx	la taille élémentaire du maillage dans le cas 1-D
Φ	la fonction du potentiel
Ψ	la fonction de courant
λ_k	valeurs propres de la matrice jacobienne du vecteur du flux
Λ	la matrice des valeurs propres de la matrice jacobienne du vecteur du flux
ρ	densité
ω	facteur de relaxation
Ω	surface élémentaire
Ω_c	surface d'un 'volume de contrôle' en 2-D
$\Omega(u, v)$	la fonction de transformation de Legendre
$ $	valeurs absolues
$\ \ ^{(L_1)}$	norme L_1
$\ \ ^{(L_2)}$	norme L_2
$(\tilde{})$	valeurs évaluées à l'état moyen de Roe
$()_R$	valeurs évaluées à droite d'une interface
$()_L$	valeurs évaluées à gauche d'une interface

Chapitre 1

Introduction

Dans le passé, les aérodynamiciens utilisaient des résultats expérimentaux afin de prédire les caractéristiques d'un écoulement. Même si une telle procédure a l'avantage de générer la solution la plus réaliste, ce type de méthode exige un prix très élevé et nécessite beaucoup de temps. Aujourd'hui, en dynamique des fluides et en aérodynamique, les résultats numériques sont obtenus plus rapidement et à un coût moindre que les résultats expérimentaux [10]. Cela fait que les compagnies aéronautiques, même les plus grandes qui ont les moyens pour obtenir des résultats expérimentaux, accordent de plus en plus d'importance aux codes numériques afin de réaliser leurs projets.

La calcul numérique est d'autant plus attirant lorsqu'il est possible d'estimer les erreurs qui existent dans la solution numérique. Pour contrôler et diminuer ces erreurs, plusieurs procédures d'adaptation sont envisageables. En fait, aujourd'hui, tous les chercheurs impliqués dans la *CFD* considèrent que l'estimation d'erreur est

un problème important et difficile à résoudre lors d'un calcul numérique.

Le but principal de ce mémoire est de développer une nouvelle technique d'estimation d'erreur basée sur la technique d'extrapolation de Richardson et d'établir ses performances. En utilisant cette technique, une procédure d'adaptation du maillage sera proposée dans le but d'équi-distribuer l'erreur. Ce travail sera réalisé en utilisant des méthodes de calcul basées sur la technique de volumes finis et des études de convergence seront réalisées afin d'atteindre nos objectifs.

1.1 Les équations d'Euler

La simulation numérique d'un écoulement est reliée au choix du modèle mathématique. Lorsqu'on néglige la dissipation visqueuse, la représentation physique la plus rigoureuse des écoulements est fournie par les équations d'Euler. Elles représentent l'expression mathématique de la loi de conservation pour la masse, de la quantité du mouvement et de l'énergie. Les équations d'Euler forment un système hyperbolique non-linéaire et selon la méthode utilisée pour avancer la solution dans le temps, la résolution demande plus ou moins de ressources informatiques.

Le fait que l'on puisse représenter des écoulements avec des ondes de choc est dû au choix de ce modèle et à l'utilisation d'une technique de discrétisation appropriée. Dans certains cas, les conditions de Rankine-Hugoniot à travers un choc sont automatiquement satisfaites. Étant donné que les écoulements-test qui sont visées par ce mémoire présentent des ondes de choc, cette propriété demeure très importante.

1.2 Schémas numériques de discrétisation

On pourrait classer les méthodes en explicites, qui sont soumises à des restrictions du pas de temps imposé par le critère CFL (Courant-Friedrichs-Levi) de stabilité, et implicites, qui solutionnent les équations de conservation d'une façon couplée, ce qui fait qu'elles ne sont pas limitées par le critère CFL. Par contre, les schémas numériques implicites demandent beaucoup de ressources informatiques parce qu'ils conduisent à la résolution d'une matrice multidimensionnelle. La technique employée lors de ce travail est basée sur une discrétisation *explicite* dans le temps.

Regardons rapidement les schémas numériques de discrétisation les plus connus qui ont été développés par la technique des volumes finis. S.K. Godunov (1959) [7] a été le premier à résoudre le problème de Riemann qui se manifeste comme une discontinuité entre deux états uniformes de fluide. Il a trouvé un procédé itératif pour résoudre les problèmes Riemann présents à l'interface de chaque paire d'états adjacents. Cependant, le coût de calcul est très élevé lorsqu'on utilise une solution initiale inadéquate. Toutes les méthodes développées pendant les années 1960-1970 consistent à trouver la solution au problème approché de Riemann. Ces schémas demandaient de la viscosité artificielle explicite pour satisfaire les critères de stabilité.

Les schémas proposés après l'année 1970 sont basés sur la théorie des caractéristiques et on peut les classer en deux catégories: 'Division du vecteur du flux' (FVS - Flux Vector Splitting) et 'Division de la différence du flux' (FDS - Flux Difference Splitting).

Steger et Warming (1979) [24] ont été les premiers à diviser le flux à un point

d'écoulement en deux composantes de flux et chaque composante pouvait être différenciée en amont suivant le signe des valeurs propres correspondantes. Particulièrement, pour les équations d'Euler les valeurs propres représentent les vitesses et les directions d'ondes de propagation de l'information dans l'écoulement.

En 1982, Van Leer [26] a suggéré une autre méthode FVS très simple et facile à linéariser pour être utilisée dans les schémas implicites.

Une des méthodes les plus connues actuellement est celle proposée par Roe [22], [23]. Elle est basée sur la théorie de la division de la différence du flux entre deux états du fluide séparés par une interface (FDS). La linéarisation introduite par Roe assure alors que les équations de Rankine-Hugoniot sont satisfaites pour un choc et ne demande pas de viscosité artificielle explicite. Cependant, le schéma proposé par Roe admet des ondes d'expansion comme solutions non-physiques et demande une correction d'entropie comme celle introduite par Harten [6].

La méthode de Enquist et Osher [5] satisfait la condition d'entropie mais l'exploitation de ce schéma demeure très coûteuse relativement au schéma de Roe. Plus récemment (1991), Liou et Steffen [12] ont proposés une combinaison entre la méthode de la division du vecteur flux et celle de division de la différence du flux qui s'appelle AUSM (Advective Upwind Splitting Method). Elle rivalise en précision et robustesse avec le schéma de Roe, d'autant plus que la complexité numérique y est moins élevée. Cependant, la propriété de satisfaire exactement les conditions de Rankine-Hugoniot est perdue.

Le chapitre 2 de ce mémoire présente la méthode de calcul proposée qui est basée sur une discrétisation *explicite* dans le temps et sur une technique de volumes finis

du premier ou du deuxième ordre dans l'espace qui utilise le solveur développé par Roe. Le domaine de calcul est subdivisé à l'aide d'éléments triangulaires.

L'application de la technique multi-grille (Multi-Grid) aux équations d'Euler a permis d'avancer la solution plus vite dans le temps, en réalisant de grandes économies sur le temps de calcul. Parmi les méthodes les plus connues pour accélérer la convergence des schémas explicites, on remarque celles de Ni [15], Jameson [11] et Venkatakrishnan (Implicit Residual Averaging Technique). La procédure utilisée lors de ce travail est basée sur la technique multi-grille par agglomération. Cela va permettre d'utiliser un schéma explicite, même si la restriction CFL imposée au pas de temps devient sévère lorsqu'on utilise un maillage fin.

L'extension du schéma de Roe au deuxième ordre est basée sur la substitution de la solution supposée constante sur chaque élément par une autre linéaire. On propose deux façons de calculer les gradients. La première méthode utilise le théorème de Gauss [3] en considérant un gradient constant sur le volume de contrôle. La deuxième méthode est une reconstruction basée sur la technique des moindres carrés [17].

1.3 Calcul des erreurs exactes et évaluation du taux de convergence

Pour un problème dont la solution exacte est connue on peut facilement calculer les erreurs. Tout d'abord on calcule les erreurs sur chaque élément à l'aide d'une technique d'intégration de Gauss. Ensuite, en utilisant soit la norme L_1 , soit la norme L_2 , on somme les erreurs pour tout le domaine de calcul [9].

L'ordre de convergence de la méthode de résolution peut être extrait d'une étude de raffinement du maillage sur un problème où la solution exacte est connue [1]. La façon de calculer les erreurs exactes et l'ordre de convergence d'une méthode pour un problème dont la solution exacte est connue est illustrée au chapitre 3.

Pour un problème dont la solution exacte est inconnue, Roache[20] suggère une méthode d'évaluation du taux de convergence par une étude de raffinement du maillage de type *a posteriori*.

On peut déterminer le taux de convergence à l'aide de 3 solutions globales, en utilisant la norme L_1 ou L_2 , obtenues sur des maillages différents, pour un facteur de raffinement quelconque. Si le facteur de raffinement est constant, l'expression du taux de convergence est très simple. Dans le cas contraire, si il n'est pas constant, l'équation à résoudre est transcendente et Roache propose une méthode d'itération par substitution [21]. Le taux de convergence diffère d'un problème à l'autre dépendant si l'on a réussi ou non à atteindre la zone asymptotique. Cette technique d'évaluation du taux de convergence est présentée au chapitre 3.

1.4 L'estimateur d'erreur

Les estimateurs d'erreur peuvent être de type *a posteriori*, utilisant la solution calculée, ou de type *a priori*, utilisant des informations génériques au sujet de la solution et du maillage. L'analyse d'erreur avec un estimateur *a posteriori* peut donner des informations concernant la solution et peut être utilisée pour piloter le schéma adaptatif qui optimise le maillage.

Une large classe de méthodes adaptatives utilisent l'estimation de l'erreur dans la solution numérique comme base à l'adaptation. Les estimateurs d'erreur peuvent être classifiés en trois grands groupes: les estimateurs de projection de flux, les estimateurs résiduels et les estimateurs basés sur des techniques d'extrapolation. Ce type d'études peuvent être facilement retrouvés dans le travail réalisé à l'aide de la méthode des éléments finis [18], [19], [25], [30].

La méthode de projection, [30] est basée sur l'observation que, dans la discrétisation par éléments finis, la solution approximative est continue, mais les dérivées sont discontinues aux interfaces des éléments. Ces dérivées discontinues sont projetées dans un espace de fonctions continues, une norme de la différence entre les dérivées continues et celles discontinues étant utilisée comme une mesure de l'erreur.

Plus récemment, des estimateurs résiduels ont été développés en vue d'obtenir une équirépartition de l'erreur dans une solution calculée sur un maillage non-isotropique [8]

Pour les problèmes de type elliptique, ces estimateurs ont donné de très bons résultats mais, lorsqu'on essaie d'appliquer ces techniques pour des problèmes hyperboliques, la précision diminue. Norton [16] a prouvé le fait que l'erreur de la solution numérique d'un problèmes de type hyperbolique est formée par deux composantes: une composante locale et une composante convective qui n'était pas prévue par ces estimateurs.

Dans le cadre de la solution numérique des équations d'Euler par la méthode des volumes finis, des indicateurs d'erreur ont plutôt été utilisés. L'indicateur d'erreur le plus simple, utilisé de façon intensive, est le gradient d'une variable de l'écoulement

comme la densité. On suppose que les plus grandes erreurs se trouvent dans les régions de forts gradients. Dans le cas des écoulements compressibles avec des ondes de choc, les erreurs calculées sur la base du gradient de la solution ont la tendance à augmenter au fur et à mesure que la discontinuité est résolue d'une meilleure façon. Des estimateurs d'erreur apparaissent lentement dans la littérature. L'estimateur d'erreur proposé par Van Straalan et al. [27] utilise la solution d'une équation écrite pour les erreurs estimées. Mais, quelquefois, pour des problèmes de type hyperbolique, la résolution d'une telle équation devient aussi difficile que la résolution du problème lui-même.

L'estimateur d'erreur utilisé dans ce mémoire, et présenté au chapitre 3, est basé sur la technique d'extrapolation de Richardson [20], [21]. On utilise 2 solutions obtenues sur des maillages différents, pour un facteur de raffinement quelconque, avec le taux de convergence déjà calculé [20]. Cette technique implique l'hypothèse de la convergence monotone de la solution vers la solution exacte, ce qui n'est pas toujours le cas.

1.5 Méthodes d'adaptation du maillage

L'objectif d'une procédure d'adaptation est d'optimiser la discrétisation du domaine de calcul pour atteindre une haute précision avec un faible coût de calcul. Cette procédure consiste dans des changements de taille et d'orientation des éléments afin d'améliorer la précision de la solution qu'on a calculée au cycle précédent et, en même temps, de distribuer uniformément l'erreur dans les éléments du maillage.

Il y a plusieurs techniques pour atteindre l'objectif prévu: des méthodes de raffinement et de déraffinement local [9], [18], [28], des techniques basées sur le déplacement des noeuds [14] par analogie avec le comportement élastique des ressorts en tension et en torsion. Les techniques basées sur le déplacement des noeuds peuvent être utiles surtout dans les cas tridimensionnels à cause des limitations de la mémoire.

La procédure d'adaptation proposée dans ce mémoire est basée sur le changement de la taille des éléments selon les informations données par l'estimateur d'erreur. Le remaillage est réalisé en utilisant les sous-routines **ADX** [28].

La stratégie d'adaptation, présentée au chapitre 3, consiste à imposer une *erreur-cible* pour tous les triangles du domaine. Si l'erreur estimée est plus grande que l'*erreur - cible*, le triangle est divisé, en accord avec la différence entre les deux erreurs, en deux triangles plus petits. Sinon, le triangle sera visé pour effacement. Si un noeud du domaine n'appartient qu'aux triangles qui sont visés pour effacement, il sera effacé et un remaillage local sera réalisé. Afin d'augmenter la qualité du maillage, des techniques de relaxation et de changement de diagonales seront utilisées.

1.6 Applications - Test

Lors des simulations numériques présentées au chapitre 4, on rencontre deux catégories de maillages aux triangles: des maillages structurés et des maillages non-structurés. Dans un maillage structuré tous les noeuds sont entourés par le même

nombre d'éléments et on peut construire une application biunivoque sur un triangle logique. Pour les maillages non-structurés aucune restriction topologique ne s'applique et les noeuds ne sont pas entourés par le même nombre d'éléments. En utilisant ces deux types de maillages, ainsi que les techniques de calcul proposées aux chapitres 2 et 3, on va faire apparaître par des épreuves les qualités et les défauts pour chacun de ces types de maillages.

La méthodologie présentée aux chapitres 2 et 3 sera appliquée pour plusieurs types d'écoulement: écoulement subsonique ou supersonique, écoulement avec ondes de choc ou sans ondes de choc. Les résultats obtenus seront illustrés au chapitre 4.

Chapitre 2

Formulation mathématique et numérique du problème

2.1 Introduction

La première étape consiste à établir le modèle mathématique de l'écoulement et le schéma numérique pour la résolution de ce modèle. Les écoulements qui seront étudiés sont régis par les équations d'Euler qui forment un système hyperbolique non-linéaire. La discrétisation spatiale sera effectuée par une technique de volumes finis basée sur le solveur de Roe [22], [23]. Par la suite, on propose deux techniques de reconstruction de la solution afin d'améliorer la précision du schéma de Roe.

2.2 Les équations d'Euler

En négligeant les termes de dissipation visqueuse dans les équations de Navier-Stokes, on obtient les équations d'Euler qui représentent le modèle le plus exact pour la description des écoulements compressibles non-visqueux, d'autant plus que leur résolution représente un chemin naturel vers la simulation numérique des équations de Navier-Stokes.

Pour le cas bi-dimensionnel cartésien, on peut écrire les équations d'Euler de la façon suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

où les variables conservatives \mathbf{U} et les flux convectifs f et g sont les suivants:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Le système sera fermé par l'équation d'état pour les gaz parfaits:

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2}{2\rho} \right] \quad (2.3)$$

où ρ représente la densité, u et v sont les vitesses dans les directions x et y , E représente l'énergie totale par unité de masse et p la pression statique. ($\gamma \equiv c_p/c_v = 1,4$)

2.3 Discrétisation des équations d'Euler

2.3.1 Introduction sur les schémas 'upwind'

Les méthodes de discrétisation 'upwind' sont basées sur la théorie des caractéristiques. Le nom 'upwind' est justifié par les différences en amont utilisées selon les directions caractéristiques. Ces schémas sont appliqués aux équations de la forme suivante, dont l'information se propage selon des directions préférentielles:

$$U_t + f(U)_x = 0 \quad (2.4)$$

Considérons la résolution de l'équation de convection scalaire:

$$U_t + aU_x = 0 \quad (2.5)$$

où $a > 0$ et $a = ct$. Dans ce cas, le schéma 'upwind' classique s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.6)$$

où le terme de droite représente une différence en amont ('upwind') et le terme de gauche est une discrétisation explicite dans le temps. Un tel décentrage en espace fait que le schéma est stable. L'équation 2.6 peut se réécrire:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (2.7)$$

Le schéma est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Ceci représente la condition connue dans la littérature sous le nom *CFL* (Courant - Friedrichs - Lewy) [4].

En pratique, le coefficient $a \neq ct$ et une généralisation de ce schéma est requise. Cette fois, on ne connaît pas 'à priori' la direction caractéristique selon laquelle

l'information se propage. Cette direction est reliée au signe du coefficient a . On définit donc:

$$a^+ = \frac{a + |a|}{2} \quad a^- = \frac{a - |a|}{2} \quad (2.8)$$

On remarque que lorsque $a > 0$ alors $a^- = 0$ et $a^+ = a$, alors que si $a < 0$ on a $a^+ = 0$ et $a^- = a$. Dans ces conditions, le schéma 'upwind' s'écrit dans la forme connue dans la littérature sous le nom *CIR* (Courant - Isaacson - Rees) [4]:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a^+ \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} + a^- \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.9)$$

En remplaçant les formules 2.8 dans 2.9, on a:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \left(\frac{a + |a|}{2} \right) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} + \left(\frac{a - |a|}{2} \right) \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.10)$$

ou encore:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + |a| \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.11)$$

où le terme de droite représente la somme d'une différence centrée et d'un terme de viscosité artificielle qui assure la stabilité du schéma. Le terme de viscosité artificielle contient une différence centrée du deuxième ordre et il peut être écrit de la façon suivante:

$$\left(\frac{|a|\Delta x\Delta t}{2} \right) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.12)$$

Le schéma de Roe appliqué aux équations d'Euler utilise la même méthodologie. Pour le cas unidimensionnel, on découple les trois équations en fonction du signe de la vitesse de chaque onde. Par la suite, en utilisant une discrétisation de type 2.11, deux sommations seront faites: une sommation sur les ondes avec vitesse négative et l'autre sur les ondes avec vitesse positive. Finalement, en prenant la moyenne des deux sommations, on recouple les trois équations.

2.3.2 Schéma de Roe pour le cas unidimensionnel

La méthode de Roe est appliquée premièrement à un écoulement unidimensionnel gouverné par les équations de type hyperbolique d'Euler [22]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

où:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho E u + up \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La méthode proposée par Roe et basée sur la théorie de la division de la différence du flux entre deux états du fluide séparés par une interface (FDS). L'approche de Roe est basée sur l'observation de Godunov que l'avancement dans le temps de la solution peut être réalisé par la résolution d'une série de problèmes de Riemann [7] (voir la figure 2.1).

À gauche ($x < 0$) les variables conservatives sont $\mathbf{U} = \mathbf{U}_L$ et à droite ($x > 0$) $\mathbf{U} = \mathbf{U}_R$. Roe propose une approximation linéaire du problème de Riemann pour les équations d'Euler. Le flux \mathbf{F} est localement linéaire par rapport à \mathbf{U} et on peut écrire:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (2.15)$$

où les coefficients de la matrice jacobienne \mathbf{A} sont constants et ils sont calculés de la façon suivante:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{U}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{U}_3} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

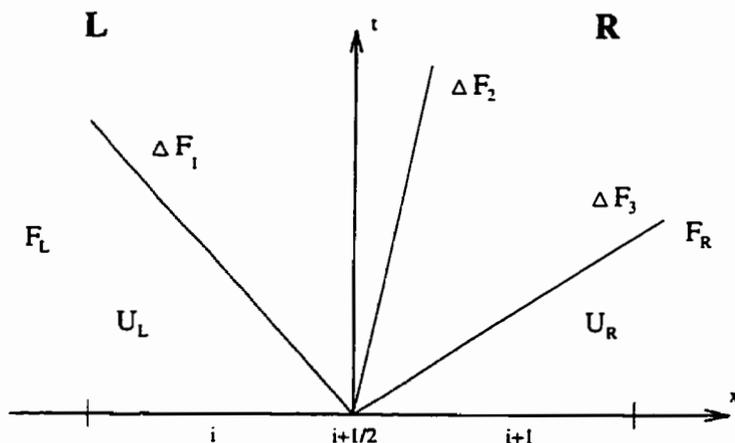


Figure 2.1: Décomposition de la différence du flux pour résoudre le problème de Riemann

où:

$$\frac{\partial F_1}{\partial U_1} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial U_2} = 1 \quad \frac{\partial F_1}{\partial U_3} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial U_1} = \frac{(\rho u)^2}{2\rho^2}(\gamma - 3) \quad \frac{\partial F_2}{\partial U_2} = \frac{(\rho u)}{\rho}(3 - \gamma) \quad \frac{\partial F_2}{\partial U_3} = \gamma - 1 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_1} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(\rho u)^3}{\rho^3} - \frac{\rho E + p(\rho u)}{\rho} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_2} = \frac{\rho E + p}{\rho} - (\gamma - 1) \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_3} = \gamma \frac{(\rho u)}{\rho} \quad (2.21)$$

La matrice \mathbf{A} s'écrit en terme des variables conservatives:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\rho u)^2}{2\rho^2}(\gamma - 3) & \frac{(\rho u)}{\rho}(3 - \gamma) & \gamma - 1 \\ \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(\rho u)^3}{\rho^3} - \frac{\rho E + p(\rho u)}{\rho} & \frac{\rho E + p}{\rho} - (\gamma - 1) \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} & \gamma \frac{(\rho u)}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

où encore en terme des variables primitives ρ , u , E et p :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2}{2}(\gamma - 3) & u(3 - \gamma) & \gamma - 1 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^3 - \frac{\rho E + p}{\rho}u & \frac{\rho E + p}{\rho} - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

Finalement, on peut écrire:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2}{2}(\gamma - 3) & u(3 - \gamma) & \gamma - 1 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^3 - uH & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

où H est l'enthalpie totale:

$$H = \frac{\rho E + p}{\rho} \quad (2.25)$$

Le système d'équations (2.13) devient:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

Compte tenu du fait que la matrice \mathbf{A} est diagonalisable, il existe donc une base composée par les vecteurs propres de \mathbf{A} :

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où a est la vitesse du son:

$$a^2 = (\gamma - 1) \left(H - \frac{1}{2}u^2 \right) \quad (2.29)$$

De plus, on peut écrire un vecteur dans l'espace réel en utilisant cette base, selon:

$$\mathbf{U} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.30)$$

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont constants. En utilisant la propriété que $\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$ et en multipliant les deux membres de la relation 2.30 par \mathbf{A} , on obtient:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda_1 \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \alpha_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.31)$$

où λ_k sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} :

$$\lambda_k = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (u - a, u, u + a) \quad (2.32)$$

Étant donnés les deux états à gauche \mathbf{U}_L et à droite \mathbf{U}_R et tenant compte de la propriété 2.31, on peut écrire la relation suivante pour la différence du flux entre ces deux états du fluide:

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \sum_k \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k \quad (2.33)$$

où \mathbf{e}_k représentent les vecteurs propres de la matrice \mathbf{A} à droite. Chaque terme de la somme représente l'effet d'une onde. α_k est l'intensité de l'onde et λ_k , sa vitesse. De plus, en utilisant la technique de discrétisation en amont ("upwind") basée sur la théorie des caractéristiques, le flux à l'interface peut être calculé de deux façons différentes:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}_L + \sum (-) \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k \quad (2.34)$$

si on considère les ondes avec vitesse négative comme direction de propagation, ou:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}_R - \sum (+) \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k \quad (2.35)$$

si les ondes avec vitesse positive sont prises comme direction de propagation. $\sum^{(-)}$ et $\sum^{(+)}$ dénotent une sommation sur les ondes avec vitesse négative et positive, re-

spectivement. En pratique, on prend la moyenne des deux expressions et on obtient:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k |\lambda_k| \mathbf{e}_k \quad (2.36)$$

Pour les problèmes linéaires cette solution est exacte, mais dans le cas non-linéaire, Roe a proposé de construire une matrice linéarisée $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ dont les valeurs et vecteurs propres vérifient les relations suivantes:

1. $\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \sum \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k$ (voir 2.33)
2. $\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum \alpha_k \mathbf{e}_k$ (voir 2.30)
3. $\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = S(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$, où S est la vitesse du choc. Ceci représente la condition Rankine - Hugoniot qui est ajoutée aux premières deux conditions. Ces trois conditions définissent l'état moyen de Roe.

Lorsque toutes les conditions sont vérifiées, on aura que $S\alpha_k = \lambda_k \alpha_k$ pour tous les k . Roe a calculé les valeurs des variables primitives $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{H}$ qui interviennent dans la matrice $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ pour satisfaire la consistance des équations avec celles de départ (les conditions (1) et (2)), et aussi les conditions de saut de Rankine-Hugoniot (la condition (3)).

La satisfaction de ces trois conditions définit ce qu'on appelle 'l'état moyen de Roe' que l'on retrouve souvent dans la littérature sous le nom de 'propriétés U':

1. $\tilde{\mathbf{A}}$ représente une application linéaire de \mathbf{U} vers \mathbf{F}
2. les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{A}}$ sont linéairement indépendants.

3. Lorsque $\mathbf{U}_L \rightarrow \mathbf{U}_R \rightarrow \mathbf{U}$, alors $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \rightarrow \mathbf{A}$

4. Pour chaque paire $(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$, $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)(\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R$

Les valeurs moyennes calculées par Roe, données par les formules suivantes, sont appelées 'les valeurs moyennes de Roe':

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\
 \omega &= \frac{\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\
 \tilde{u} &= \omega u_L + (1 - \omega) u_R \\
 \tilde{H} &= \omega H_L + (1 - \omega) H_R \\
 \tilde{E} &= \omega E_L + (1 - \omega) E_R \\
 \tilde{a}^2 &= (\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Le système d'équations à résoudre devient donc:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{2.38}$$

où:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\tilde{u}^2}{2}(\gamma - 3) & \tilde{u}(3 - \gamma) & \gamma - 1 \\ \frac{\gamma - 1}{2} \tilde{u}^3 - \tilde{u} \tilde{H} & \tilde{H} - (\gamma - 1) \tilde{u}^2 & \gamma \tilde{u} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

On peut facilement remarquer la similitude qui existe entre les matrices \mathbf{A} et $\tilde{\mathbf{A}}$. En fait, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{U})$ et $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}})$, où $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$. On remarque aussi que lorsque $\mathbf{U}_L \rightarrow \mathbf{U}_R \rightarrow \mathbf{U}$, alors $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \rightarrow \mathbf{A}$.

Si $\bar{a} \neq 0$ la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ possède trois vecteurs propres linéairement indépendants et par conséquent, on peut y appliquer une décomposition spectrale sous la forme:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \quad (2.40)$$

où $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ est une matrice diagonale qui contient les valeurs propres $\tilde{\lambda}_k$ de $\tilde{\mathbf{A}}$ sur la diagonale principale:

$$\lambda_k = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) = (\tilde{u} - \bar{a}, \tilde{u}, \tilde{u} + \bar{a}) \quad (2.41)$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{vmatrix} \tilde{u} - \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u} + \bar{a} \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

Toutes les variables ayant le symbole $\tilde{\cdot}$ sont évaluées à l'état moyen de Roe. Les trois vecteurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ sont donnés par les relations suivantes:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \bar{a} \\ \tilde{H} - \tilde{u}\bar{a} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \bar{a} \\ \tilde{H} + \tilde{u}\bar{a} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

En plus, $\tilde{\mathbf{Q}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ sont les matrices des vecteurs propres $\tilde{\mathbf{e}}_k$ à droite et à gauche, respectivement.

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{u} - \bar{a} & \tilde{u} & \tilde{u} + \bar{a} \\ \tilde{H} - \tilde{u}\bar{a} & \frac{1}{2}\tilde{u}^2 & \tilde{H} + \tilde{u}\bar{a} \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

Compte tenu du fait que le déterminant de la matrice engendrée pour les vecteurs propres $|(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)| = \frac{2\tilde{a}^3}{\gamma-1}$ est nul lorsque $\tilde{a} \neq 0$, les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{A}}$ sont linéairement indépendants. Cela est une des 'propriétés U'.

La relation (2.36) qui exprime le flux à l'interface s'écrit alors:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{Q}}|\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}\Delta\mathbf{U} \quad (2.45)$$

où:

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L \quad (2.46)$$

et $|\tilde{\mathbf{A}}|$, la matrice diagonale des valeurs absolues des valeurs propres de $\tilde{\mathbf{A}}$. En écrivant le flux à l'interface de cette façon, l'extension du schéma de Roe pour le cas bidimensionnel devient une tâche possible.

En conclusion, la méthode de Roe consiste à trouver la solution exacte à un problème approché de Riemann en linéarisant ce problème afin qu'il devienne résoluble par une méthode directe. La linéarisation est faite à en remplaçant la matrice \mathbf{A} avec une matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ qui représente la matrice jacobienne évaluée à l'état moyen de Roe. De plus, la définition de cet état découle de la satisfaction des certaines conditions appelées 'les propriétés U'.

2.3.3 Extension du schéma de Roe pour le cas bidimensionnel

Pour le cas bidimensionnel, la méthodologie de calcul demeure la même. Dans ce cas, l'échange d'information entre les deux états du fluide est fait en suivant une

direction normale aux interfaces qui séparent deux éléments du maillage. Il faut donc calculer le flux normal à l'interface des éléments L et R illustrés à la figure 2.2.

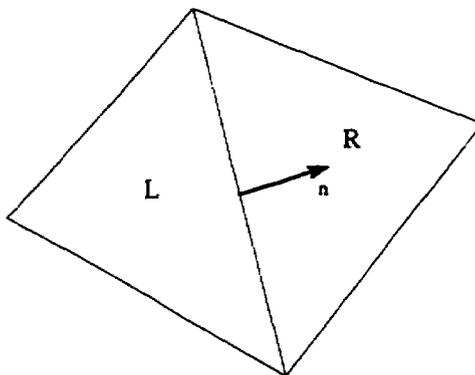


Figure 2.2: Discontinuité entre deux états du fluide pour le cas bidimensionnel

Le flux normal à l'interface de deux états de Riemann s'exprime par les deux composantes de la normale unitaire extérieure à l'interface, n_x et n_y , selon:

$$\mathbf{F} = (f\vec{i} + g\vec{j}) (n_x\vec{i} + n_y\vec{j}) \quad (2.47)$$

Par analogie avec le cas uni-dimensionnel, on linéarise le flux \mathbf{F} par rapport au vecteur \mathbf{U} et on introduit les valeurs moyennes de Roe:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \quad (2.49)$$

où $\tilde{\Lambda}$ est une matrice diagonale qui contient les valeurs propres λ_k de $\tilde{\mathbf{A}}$ sur la

diagonale principale.

$$\lambda_k = \begin{bmatrix} \tilde{U} - \tilde{a} \\ \tilde{U} \\ \tilde{U} \\ \tilde{U} + \tilde{a} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

et \tilde{P} , \tilde{P}^{-1} sont les matrices des vecteurs propres à droite et à gauche, respectivement.

Les vitesses normale et tangentielle à l'interface sont:

$$\tilde{U} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \quad \tilde{V} = \tilde{v}n_x - \tilde{u}n_y \quad (2.51)$$

Le module de la vitesse moyenne est:

$$\tilde{q}^2 = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \quad (2.52)$$

Les autres valeurs moyennes seront définies par:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\ \omega &= \frac{\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{u} &= \omega u_L + (1 - \omega) u_R \\ \tilde{v} &= \omega v_L + (1 - \omega) v_R \\ \tilde{H} &= \omega H_L + (1 - \omega) H_R \\ \tilde{E} &= \omega E_L + (1 - \omega) E_R \\ \tilde{a}^2 &= (\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{q}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

La relation (2.36) qui exprime le flux normal à l'interface s'écrit:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \tilde{P} | \tilde{\Lambda} | \tilde{P}^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (2.54)$$

où les éléments de la matrice $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{P}\tilde{\Lambda}\tilde{P}^{-1}$ sont les suivants [8]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}\tilde{q}^2 n_x - \tilde{u}\tilde{u}_n & \tilde{u}_n - (\gamma-2)\tilde{u}n_x & \tilde{u}n_y - (\gamma-1)\tilde{v}n_x & (\gamma-1)n_x \\ \frac{\gamma-1}{2}\tilde{q}^2 n_x - \tilde{u}\tilde{u}_n & \tilde{v}n_x - (\gamma-1)\tilde{u}n_y & \tilde{u}_n - (\gamma-2)\tilde{v}n_y & (\gamma-1)n_y \\ (\frac{\gamma-1}{2}\tilde{q}^2 - \tilde{H})\tilde{u}_n & \tilde{H}n_x - (\gamma-1)\tilde{u}\tilde{u}_n & \tilde{H}n_y - (\gamma-1)\tilde{v}\tilde{u}_n & \gamma\tilde{u}_n \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

où $\tilde{u}_n = \tilde{u}$ lorsqu'on écrit le jacobien du vecteur flux selon la direction x , et $\tilde{u}_n = \tilde{v}$ lorsque la direction de référence est y .

2.3.4 Discrétisation explicite dans le temps

L'avancement dans le temps du vecteur des variables conservatives \mathbf{U} est fait d'une façon explicite:

$$\frac{\mathbf{U}_k^{n+1} - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_k^n, x) \quad (2.56)$$

où \mathbf{f} est une fonction qui représente le bilan des flux calculés aux interfaces de l'élément k . Le vecteur de variables conservatives \mathbf{U} au pas de temps $n + 1$ sera donc calculé en utilisant seulement le vecteur \mathbf{U} obtenu au pas de temps n :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \mathbf{f}(\mathbf{U}^n, x)\Delta t \quad (2.57)$$

L'avantage d'utiliser une méthode explicite de discrétisation réside dans le fait qu'elle ne demande pas beaucoup de mémoire d'ordinateur. Cet avantages est important, surtout lorsque le maillage contient beaucoup d'éléments. Le désavantage de la méthode explicite consiste dans la limitation des pas de temps par le critère CFL, phénomène qui rend la vitesse de convergence très faible.

Le critère CFL demande un pas de temps Δt qui satisfait les conditions de stabilité numérique Courant-Friedrichs-Levy. La vitesse de propagation de l'informa-

tion dans le domaine est égale à la vitesse des ondes, donnée par les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$: $\tilde{U} - \tilde{a}$, \tilde{U} , $\tilde{U} + \tilde{a}$, (\tilde{U} étant la vitesse normale à l'interface). Pour chaque interface du domaine de calcul on détermine le module des valeurs propres. La valeur maximale de ces modules sera la vitesse de référence pour l'imposition du critère CFL et la valeur maximale du pas de temps sera donnée par le plus petit quotient entre la longueur et la vitesse de référence pour toutes les interfaces du domaine de calcul.

Finalement, le vecteur de variables conservatives \mathbf{U} pour un élément k du domaine de calcul, au pas de temps $n + 1$, s'écrit de la façon suivante:

$$\mathbf{U}_k^{n+1} = \mathbf{U}_k^n + \frac{\Delta t}{S_k} \sum_{i=1}^{N_{faces}=3} \mathbf{F}_i^n l_i \quad (2.58)$$

où S_k est la surface de l'élément k et l_i sont les longueurs de chaque face de l'élément k . Les flux \mathbf{F}_i sont les flux calculés pour les interfaces du domaine de calcul en utilisant la méthodologie présentée dans la section précédente.

2.3.5 Conditions aux limites

Une des étapes de la résolution numérique des équations différentielles d'Euler est l'imposition des conditions aux limites. Compte tenu du fait que les problèmes à traiter présentent des écoulements subsoniques et supersoniques, l'analyse des conditions aux limites fait apparaître plusieurs types de frontières dépendant du régime de l'écoulement. Les types de frontières utilisées sont les suivantes: 'entrée subsonique', 'entrée supersonique', 'sortie subsonique', 'sortie supersonique' et 'paroi solide'.

L'implantation des conditions sur les frontières du domaine de calcul est faite à

l'aide des éléments 'miroirs' tels que présentés à la figure 2.3.

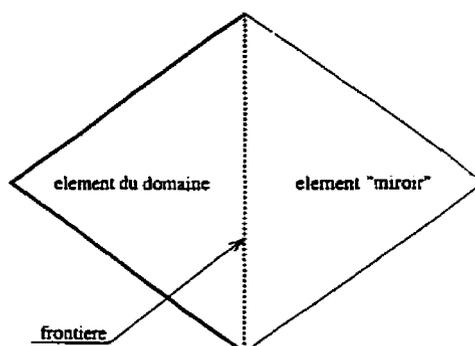


Figure 2.3: Élément 'miroir' utilisé pour l'implantation des conditions aux limites

L'imposition des conditions aux limites pour un système d'équations hyperboliques est basée sur la théorie des caractéristiques. Pour le système des équations présenté à la section 2.3.2, quatre conditions doivent être imposées. On doit donc fournir des valeurs pour quatre variables. En termes des conditions aux limites, deux types de frontières 'entrée' sont étudiés: 'entrée subsonique' et 'entrée supersonique'.

Pour l'entrée subsonique, trois conditions sur quatre sont imposées (l'angle d'entrée, la pression totale et la température totale) et on fait l'hypothèse d'une détente isentropique. Pour une frontière de type 'sortie subsonique', le rapport entre la pression statique à la sortie et la pression totale au réservoir est imposé.

Pour l'entrée supersonique, toutes les variables d'écoulement sont imposées. Aucune condition n'est imposée à la 'sortie supersonique'.

Sur les parois solides on impose que le flux à travers la frontière soit égal à zéro. Cette condition peut s'écrire en termes de vitesses normales U et tangentielles V à l'interface des deux éléments tels que présentés à la figure 2.3:

$$U_d = -U_m \quad V_d = V_m \quad (2.59)$$

où U_d et V_d sont les vitesses sur l'élément du domaine de calcul, tandis que U_m et V_m sont les vitesses sur l'élément 'miroir'.

2.4 Extension du schéma de Roe au deuxième ordre

L'extension du schéma de Roe au deuxième ordre est basée sur la reconstruction de la solution constante sur chaque élément en une autre solution linéaire par élément. L'algorithme contient les étapes de calcul suivantes:

1. Calcul de gradients.
2. Construction d'une solution linéaire par élément, mais discontinue entre les éléments.
3. Évaluation des flux aux interfaces.
4. Calcul de la solution à l'étape suivante.

On propose deux façons de calculer les gradients.

2.4.1 Reconstruction basée sur le théorème de Gauss

La première méthode utilise le théorème de Gauss sur un volume de contrôle entourant un noeud tel que montré à la figure 2.4. Les centroides des éléments entourant le noeud et les centres des faces voisines sont pris comme chemin d'intégration.

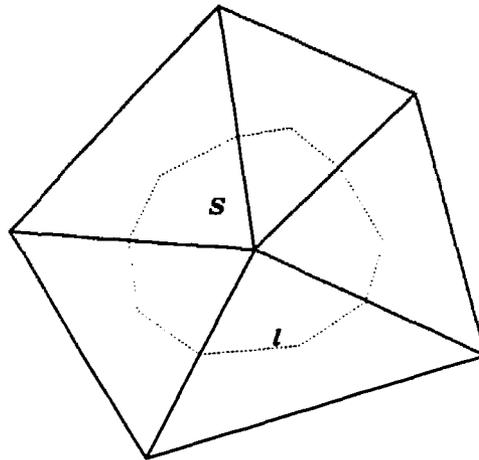


Figure 2.4: Volume de contrôle utilisé pour la reconstruction basée sur le théorème de Gauss

Pour le cas bi-dimensionnel, le théorème de Gauss s'écrit de la façon suivante:

$$\int_S \nabla U(x, y) d\Omega = \int_l U(x, y) \hat{n} dl \quad (2.60)$$

En considérant un gradient constant sur le volume de contrôle, l'équation (2.60) devient:

$$\nabla U(x, y) \approx \frac{1}{\Omega_c} \int_l U(x, y) \hat{n} dl \quad (2.61)$$

La procédure utilisée est illustrée à la figure 2.5 pour le triangle ABC . On illustre la contribution du triangle ABC à la valeur du gradient en A .

En pratique, on peut faire une simplification du calcul en démontrant que:

$$\int_{DEF} \mathbf{U}(x, y) \hat{n} dl = \frac{1}{2} \int_{BC} \mathbf{U}(x, y) \hat{n} dl \quad (2.62)$$

Alors une seule contribution pour chaque triangle voisin sera nécessaire pour calculer le gradient. Ceci découle directement du fait que l'on puisse considérer la solution U constante sur l'élément ABC et donc aussi sur le triangle DEF . En utilisant la définition de l'intégrale de contour, on aura pour le triangle DEF :

$$\int_{\text{triangle}_{DEF}} \mathbf{U} \hat{n} dl = 0 \quad (2.63)$$

Cela conduit à la relation suivante:

$$\int_{DE} \mathbf{U} \hat{n}_1 dl + \int_{EF} \mathbf{U} \hat{n}_2 dl = \int_{DF} \mathbf{U} \hat{n} dl \quad (2.64)$$

Cependant, on a:

$$\int_{DF} \mathbf{U} \hat{n} dl = \frac{1}{2} \int_{BC} \mathbf{U} \hat{n}' dl \quad (2.65)$$

Finalement, la contribution du triangle ABC s'écrit:

$$\int_{DE} \mathbf{U} \hat{n}_1 dl + \int_{EF} \mathbf{U} \hat{n}_2 dl = \frac{1}{2} \int_{BC} \mathbf{U} \hat{n}' dl \quad (2.66)$$

À l'aide du gradient ainsi calculé à chaque noeud, on calcule un gradient au centroïde du triangle par simple moyenne pondérée par le volume. On peut alors reconstruire une solution linéaire par élément selon:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{U}(x_0, y_0) + r \nabla \mathbf{U} \quad (2.67)$$

où $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ est la valeur de la solution moyenne, constante par élément, $\nabla \mathbf{U} = (\nabla \mathbf{U}_x, \nabla \mathbf{U}_y)$ le gradient calculé au centre de cet élément et $r = (x - x_0, y - y_0)$ représente la position par rapport au centre du triangle.

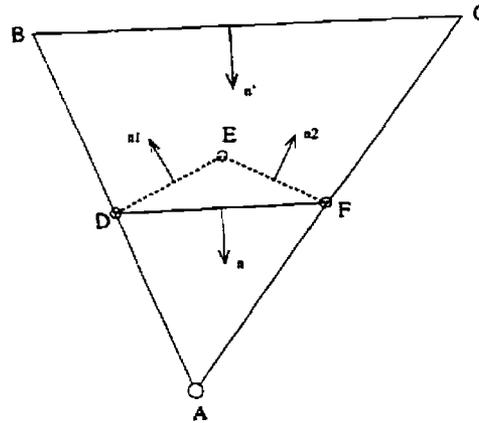


Figure 2.5: Procédure utilisée pour le calcul du gradient à l'aide du théorème de Gauss

2.4.2 Reconstruction basée sur la technique des moindres carrés

Cette méthode est une reconstruction basée sur la technique des moindres carrés [17]. Le but de cette technique est la reconstruction de la solution U à l'aide de polynômes de degré k avec une erreur locale $\mathbf{O}(\Delta \mathbf{x}^{k+1})$ (k -exact Least-Square Reconstruction). Le terme k -exact signifie que la reconstruction d'une fonction polynomiale sera exacte jusqu'à l'ordre k . Si $k = 1$, la reconstruction va créer des fonctions linéaires sur chaque élément avec une erreur locale plus petite que $\mathbf{O}(\Delta \mathbf{x}^2)$. Sous forme mathématique, on écrit pour tous les voisins i qui entourent un élément c illustré à la figure 2.7:

$$\Delta U_i = \Delta x_i U_x + \Delta y_i U_y + \frac{(\Delta x_i)^2}{2} U_{xx} + \frac{(\Delta y_i)^2}{2} U_{yy} + \frac{(\Delta x_i)(\Delta y_i)}{2} U_{xy} + \dots \quad (2.68)$$

qui représente un développement en série de Taylor où $\Delta u_i \equiv u_i - u_c$, $\Delta x_i \equiv x_i - x_c$, $\Delta y_i \equiv y_i - y_c$ et toutes les dérivées sont évaluées en (x_c, y_c) , le centroïde du triangle

c. Compte tenu du fait que la reconstruction visée est d'ordre 1, on néglige les termes quadratiques et la relation 2.68 s'écrit de la façon suivante :

$$\Delta U_i = \Delta x_i U_x + \Delta y_i U_y \quad (2.69)$$

En écrivant la relation 2.69 pour les n voisins qui entourent un élément c (voir la figure 2.7), on aura:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \Delta x_1 U_x + \Delta y_1 U_y \\ \Delta U_2 &= \Delta x_2 U_x + \Delta y_2 U_y \\ \Delta U_3 &= \Delta x_3 U_x + \Delta y_3 U_y \\ &\dots \\ \Delta U_n &= \Delta x_n U_x + \Delta y_n U_y \end{aligned} \quad (2.70)$$

On a un système de n équations à 2 inconnues que l'on peut résoudre par une technique de moindres carrés. Nous avons retenu l'algorithme connu sous le nom 'Data-independent least-squares reconstruction' (DI- L_2) [17].

Pour tenir compte de la topologie du maillage, on va introduire un facteur géométrique w . On peut voir à la figure 2.6 que l'influence de chaque triangle est différente en fonction de sa position par rapport au triangle C . Si un élément voisin est proche du triangle C , le facteur w est élevé et son influence sera importante. Au contraire, si un élément voisin est loin du triangle C , le facteur w est petit et son influence sera donc moins importante. Alors on peut pondérer chaque équation de 2.70 par un facteur w et on obtient:

$$\begin{aligned}
w_1 \Delta U_1 &= w_1 (\Delta x_1 U_x + \Delta y_1 U_y) \\
w_2 \Delta U_2 &= w_2 (\Delta x_2 U_x + \Delta y_2 U_y) \\
w_3 \Delta U_3 &= w_3 (\Delta x_3 U_x + \Delta y_3 U_y) \\
&\dots \\
w_n \Delta U_n &= w_n (\Delta x_n U_x + \Delta y_n U_y)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

que l'on peut écrire de façon symbolique:

$$[R]_{n,2} [X]_{2,1} = [\Delta U]_{n,1} \tag{2.72}$$

où:

$$[R] = \begin{vmatrix} \Delta x_1 w_1 & \Delta y_1 w_1 \\ \Delta x_2 w_2 & \Delta y_2 w_2 \\ \dots & \dots \\ \Delta x_n w_n & \Delta y_n w_n \end{vmatrix} \quad [X] = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix} \quad [\Delta U] = \begin{vmatrix} w_1 \Delta U_1 \\ w_2 \Delta U_2 \\ \dots \\ w_n \Delta U_n \end{vmatrix} \tag{2.73}$$

La méthode des moindres carrés consiste à multiplier les deux termes par $[R]^T$:

$$[R]^T_{2,11} [R]_{11,2} [X]_{2,1} = [R]^T_{2,11} [\Delta U]_{11,1} \tag{2.74}$$

On obtient donc le système suivant, connu aussi sous le nom des 'équations normales':

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 w_i^2 & \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i w_i^2 \\ \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i w_i^2 & \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 w_i^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta U_i w_i^2 \\ \sum_{i=1}^n \Delta y_i \Delta U_i w_i^2 \end{vmatrix} \tag{2.75}$$

Cette façon de calculer le gradient est similaire à celle proposée par Ollivier-Gooch [17] et correspond à un moindre carré pondéré:

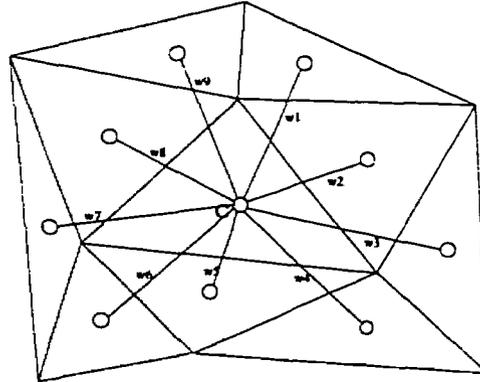


Figure 2.6: Facteur géométrique pour la reconstruction basée sur la technique de moindres carrés

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\Delta_w x_i)^2 & \sum_{i=1}^n \Delta_w x_i \Delta_w y_i \\ \sum_{i=1}^n \Delta_w x_i \Delta_w y_i & \sum_{i=1}^n (\Delta_w y_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta_w u_i \Delta_w x_i \\ \sum_{i=1}^n \Delta_w u_i \Delta_w y_i \end{pmatrix}$$

où n est le nombre de voisins, $\Delta_w(\cdot) \equiv w_i \Delta(\cdot)$ et $w_i = \frac{1}{[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2]^{\frac{t}{2}}}$, avec $t = 0, 1, 2$.

Le facteur géométrique choisi pour nos calculs, w_i , est donné par la relation suivante et il représente exactement la pondération utilisée par Ollivier-Gooch [17] pour $t = 2$:

$$w_i = \frac{1}{[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2]} \quad (2.76)$$

On évalue les gradients aux centres de chaque élément en tenant compte de tous les voisins (voir fig.2.7). Le système à résoudre sur chaque élément peut être écrit d'une manière plus compacte:

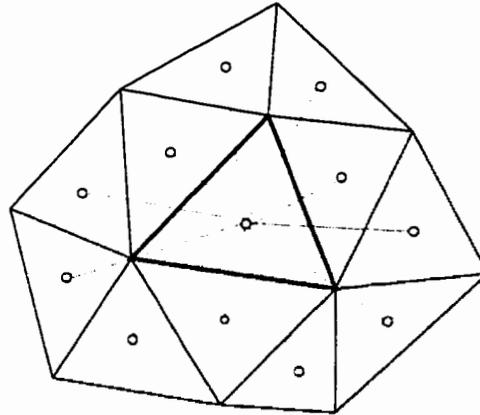


Figure 2.7: Voisins considérés pour la reconstruction basée sur la technique des moindres carrés

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Les coefficients L_{11} , L_{12} , L_{21} et L_{22} sont calculés une seule fois au début du programme, tandis que les coefficients f_1 et f_2 changent à chaque pas de temps.

Chapitre 3

Estimation de l'erreur et adaptation du maillage

3.1 Taux de convergence

L'un des facteurs les plus importants pour la précision et la robustesse d'une méthode est le taux de convergence, d'autant plus qu'il est demandé explicitement lorsqu'on fait l'estimation de l'erreur. Le taux de convergence diffère d'un problème à l'autre et il a été démontré que, si l'on a réussi ou non à atteindre la zone asymptotique, les résultats seraient différents.

3.1.1 Taux de convergence exact

Le taux de convergence de la méthode de résolution peut être extrait d'une étude de raffinement du maillage sur un problème où la solution exacte est connue [1]. Soit deux maillages avec les tailles linéaires caractéristiques $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ et $h^{(2)} = 2h^{(1)}$. On peut calculer les erreurs globales en densité à l'aide des normes L_1 ou L_2 selon les relations suivantes, où ρ_i et ρ_{a_i} sont les solutions numériques et analytiques sur chaque élément.

$$\| \mathbf{E} \|^{(L_1)} = \sum_1^n \int (\rho_i - \rho_{a_i}) d\Omega \quad (3.1)$$

$$\| \mathbf{E} \|^{(L_2)} = \sqrt{\sum_1^n \int (\rho_i - \rho_{a_i})^2 d\Omega} \quad (3.2)$$

L'ordre de convergence peut être écrit de la façon suivante:

$$\mathbf{p} = \frac{\ln\left(\frac{\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(1)}}{\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(2)}}\right)}{\ln\left(\frac{h^{(1)}}{h^{(2)}}\right)} \quad k = 1, 2 \quad (3.3)$$

On peut facilement voir que pour $h^{(2)} = 2h^{(1)}$ l'équation 3.3 devient:

$$\mathbf{p} = \frac{\ln\left(\frac{\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(1)}}{\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(2)}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \quad k = 1, 2 \quad (3.4)$$

Par exemple, le taux de convergence $\mathbf{p} = 1$ si $\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(2)} = 2\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(1)}$ et la

méthode est d'ordre 1, ou $p = 2$ si $\| \mathbf{E} \|^{(L_k)(2)} = 4 \| \mathbf{E} \|^{(L_k)(1)}$ et la méthode est d'ordre 2.

3.1.2 Taux de convergence estimé

Pour un problème où la solution exacte est inconnue, Roache[20] suggère une méthode d'évaluation du taux de convergence impliquant une étude de raffinement du maillage de type *a posteriori*. On peut déterminer le taux de convergence à l'aide de 3 solutions $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ obtenues sur des maillages différents et interpolées sur le maillage le plus fin, pour un facteur de raffinement quelconque ($f^{(1)}$ est la solution sur le maillage le plus fin). La technique d'extrapolation des solutions $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ sur le maillage le plus fin (1) est illustrée à la section suivante.

Si le facteur de raffinement r est constant, l'expression du taux de convergence est très simple:

$$p = \ln \left(\frac{f^{(3)} - f^{(2)}}{f^{(2)} - f^{(1)}} \right) \frac{1}{\ln(r)} \quad (3.5)$$

Les termes $f^{(3)} - f^{(2)}$ et $f^{(2)} - f^{(1)}$ sont les normes L_1 ou L_2 appliquées aux différences entre les solutions $f^{(3)}$ et $f^{(2)}$, et $f^{(2)}$ et $f^{(1)}$ respectivement. Pour la norme L_2 on peut écrire:

$$f^{(3)} - f^{(2)} = \sqrt{\sum_1^n \int (f^{(3)}_i - f^{(2)}_i)^2 d\Omega} \quad (3.6)$$

$$f^{(2)} - f^{(1)} = \sqrt{\sum_1^n \int (f^{(2)}_i - f^{(1)}_i)^2 d\Omega} \quad (3.7)$$

ou, en utilisant la norme L_1 :

$$f^{(3)} - f^{(2)} = \sum_1^n \int |f^{(3)}_i - f^{(2)}_i| d\Omega \quad (3.8)$$

$$f^{(2)} - f^{(1)} = \sum_1^n \int |f^{(2)}_i - f^{(1)}_i| d\Omega \quad (3.9)$$

Dans le cas où r n'est pas constant, l'équation à résoudre est transcendente:

$$\frac{f_{23}}{r_{23}^p - 1} = r_{12}^p \left(\frac{f_{12}}{r_{12}^p - 1} \right) \quad (3.10)$$

où $f_{ij} = f^{(i)} - f^{(j)}$ et r_{ij} est le facteur de raffinement entre les maillages i et j .

Pour résoudre cette équation et extraire p , on utilise une méthode d'itération par substitution [20]. Si ρ est la valeur de p à l'itération précédente et ω un facteur de relaxation ($\omega = 0.5$), la valeur de p à l'itération courante sera:

$$p = \omega\rho + (1 - \omega) \frac{\ln(\alpha)}{\ln(r_{12})} \quad (3.11)$$

$$\alpha = \frac{r_{12}^\rho - 1}{r_{23}^\rho - 1} \frac{f_{23}}{f_{12}} \quad (3.12)$$

3.2 La technique de transfert de la solution entre deux maillages

Des différences entre les solutions calculées sur plusieurs maillages sont requises lors du processus d'estimation de l'erreur. Ceci implique le transfert de toutes les

solutions sur le maillage le plus fin. Dans notre cas, les solutions obtenues sur deux maillages grossiers seront transférées sur le maillage le plus fin.

Cette procédure nécessite une technique d'interpolation dans un maillage non-structuré. Cette technique est basée sur le calcul du gradient aux centres de chaque élément par la méthode des moindres carrés illustrée au chapitre 2.4.2. Supposons qu'il faille interpoler une solution du maillage grossier (1) sur le maillage fin (2). On connaît la solution $U^{(1)}$ et les gradients $U^{(1)}_x$ et $U^{(1)}_y$ aux centroïdes de chaque élément du maillage (1).

La première étape consiste à trouver tous les éléments du maillage (2) dont les centroïdes sont à l'intérieur du chaque triangle du maillage (1) (voir la figure 3.1). Si le centroïde E d'un élément du maillage (2) se trouve à l'intérieur d'un élément ABC du maillage (1), on considère que l'élément de centroïde E est à l'intérieur de l'élément ABC de centroïde O .

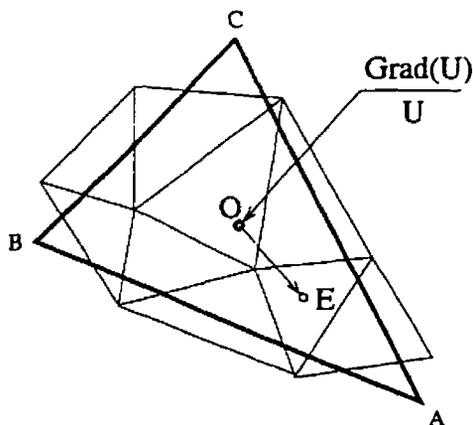


Figure 3.1: Interpolation de la solution à partir d'un maillage grossier sur un maillage plus fin

On peut alors reconstruire une solution $U^{(2)}$ au centroïde E du maillage (2), avec la formule suivante:

$$U^{(2)}(x_E, y_E) = U^{(1)}(x_O, y_O) + \vec{r} \nabla U^{(1)} \quad (3.13)$$

où $U^{(1)}(x_O, y_O)$ est la valeur de la solution moyenne sur l'élément du maillage (1), $\nabla U^{(1)} = (U^{(1)}_x, U^{(1)}_y)$ est le gradient calculé au centre de cet élément et $\vec{r} = \vec{r}(x_E - x_O, y_E - y_O)$ représente la position du centroïde E du maillage (2) par rapport à O .

3.3 Estimateur de l'erreur

L'estimateur d'erreur proposé est basé sur la technique d'extrapolation de Richardson généralisée [20]. Dans cette technique, on suppose que les solutions discrètes f ont une représentation en série de Taylor du type:

$$f(h) = f_{exact} + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots \quad (3.14)$$

où h est la taille du maillage et a_i sont des coefficients qui ne dépendent pas de la taille h dans la zone asymptotique. En faisant une combinaison entre deux solutions discrètes f_1 et f_2 , on peut facilement obtenir une approximation pour la solution exacte f_{exact} . Pour des méthodes d'ordre 1, on obtient la relation suivante:

$$f_{exact}^{(1)} = f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r - 1} + \dots \quad (3.15)$$

alors que pour des méthodes d'ordre 2 on peut écrire:

$$f_{exact}^{(2)} = f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r^2 - 1} + \dots \quad (3.16)$$

où $r = \frac{h_2}{h_1}$ est le facteur de raffinement. En généralisant, à une méthode d'ordre p , les expressions (3.15), (3.16) conduisent à la relation suivante:

$$f_{exact}^{(p)} \approx f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r^p - 1} \quad (3.17)$$

L'estimateur d'erreur pour la solution sur le maillage grossier sera donc donné par:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{r^p f_{12}}{1 - r^p} \quad (3.18)$$

tandis que pour la solution sur le maillage fin, on aura l'estimateur:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{f_{12}}{1 - r^p} \quad (3.19)$$

où $f_{12} = f_2 - f_1$ est calculé soit comme une norme L_1 , soit comme une norme L_2 (voir les relations (3.7), (3.9)).

En conclusion, l'algorithme à suivre est présenté à la figure 3.2. À l'aide de trois solutions obtenues sur trois maillages différents, on calcule le taux de convergence p . En utilisant les formules 3.18 et 3.19 appliquées aux solutions obtenues sur les maillages (1) et (2), les estimés de l'erreur seront calculés. De la même façon, les estimés de l'erreur pour les solutions obtenues sur les maillages (2) et (3) seront calculés. Finalement, un estimé sur le maillage le plus grossier (1), deux estimés sur le maillage moyen (2) et un estimé sur le maillage le plus fin (3) seront obtenus.

3.4 Adaptation du maillage

Le couplage entre le maillage et la solution numérique représente un facteur important pour diminuer les ressources informatiques requises et augmenter la précision

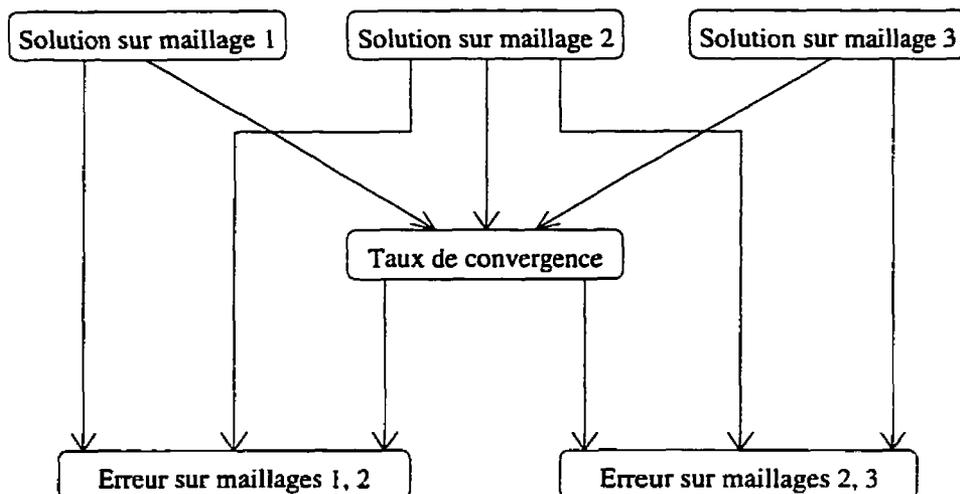


Figure 3.2: Les étapes à suivre pour l'estimateur d'erreur

de calcul. L'objectif de la procédure d'adaptation est de réduire l'erreur dans tout le domaine de calcul et, en même temps, de distribuer uniformément l'erreur dans l'éléments du maillage. Cela n'implique pas nécessairement une augmentation du nombre de points du maillage. En effet, dans beaucoup de cas pratiques, le nombre de points pourra être réduit par la procédure adaptative tout en diminuant l'erreur par une redistribution judicieuse des éléments.

3.4.1 Adaptation du maillage par raffinement et déraffinement

La relation entre l'erreur globale \mathbf{E} et les erreurs locales e_i peut s'écrire de la façon suivante:

$$\|\mathbf{E}\|^2 = \sum \|e_i\|^2 \quad (3.20)$$

On va essayer maintenant de réduire l'erreur globale d'un facteur ϵ à chaque étape adaptative. L'erreur globale cible devient donc:

$$\| \mathbf{E}_{cible} \| = \epsilon \| \mathbf{E} \| \quad (3.21)$$

On utilise le principe d'équidistribution de l'erreur cible et on aura pour l'erreur globale cible:

$$\| \mathbf{E}_{cible} \|^2 = \sum \| \mathbf{e}_{cible}^i \|^2 = N_e \| \mathbf{e}_{cible} \|^2 \quad (3.22)$$

et encore pour l'erreur locale cible:

$$\| \mathbf{e}_{cible} \| = \frac{\| \mathbf{E}_{cible} \|}{\sqrt{N_e}} \quad (3.23)$$

où N_e est le nombre d'éléments du maillage courant. Cette relation est une bonne approximation à condition que le nombre d'éléments du maillage suivant ne soit pas trop différent de celui du maillage initial. Par la suite, en tenant compte du fait qu'il y a une relation de couplage entre l'erreur locale $\| \mathbf{e} \|$ et la taille h de l'élément, on peut écrire:

$$\| \mathbf{e} \| = kh^p \quad \| \mathbf{e}_{cible} \| = kh_{cible}^p \quad k = const. \quad (3.24)$$

où p est le taux de convergence déjà calculé (voir le chapitre précédent). Donc, la taille cible pour chaque élément sera:

$$h_{cible}^i = h_i \left(\frac{\| \mathbf{e}_{cible} \|}{\| \mathbf{e}_i \|} \right)^p \quad (3.25)$$

Compte tenu du fait que les sous-routines *ADX* utilisent les aires des éléments au lieu des tailles afin de réaliser le remaillage, on va réécrire les relations 3.24 et 3.25 de la façon suivante:

$$\| \mathbf{e} \| = kA^{\frac{p}{2}} \quad \| \mathbf{e}_{cible} \| = kA_{cible}^{\frac{p}{2}} \quad k = const. \quad (3.26)$$

L'aire cible pour chaque élément sera donc:

$$A^{cible}_i = A_i \left(\frac{\|e_{cible}\|}{\|e_i\|} \right)^{\frac{2}{p}} \quad (3.27)$$

De cette façon, l'aire de chaque élément va augmenter ou va diminuer selon la relation 3.27. Pour certains éléments, les aires cibles seront beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites que les aires initiales. Dans ces conditions, des éléments voisins peuvent avoir des aires trop grandes, une par rapport à l'autre. Ceci pourrait causer des difficultés au solveur. De plus, des facteurs de raffinement ou de déraffinement local trop grands peuvent produire des oscillations de la solution d'une étape adaptative à l'autre. Afin d'éviter ces anomalies, on va utiliser les limiteurs suivants:

$$\frac{A_i}{4} \leq A^{cible}_i \leq 4A_i \quad (3.28)$$

Il faut aussi imposer un nombre maximal de points permis par les ressources informatiques disponibles.

3.4.2 Algorithme d'adaptation

On présente à la figure 3.3 les étapes à suivre dans le cycle d'adaptation.

À l'aide de l'estimateur d'erreur on va calculer le nouveau maillage $3'$ par raffinement et déraffinement. Les maillages $2'$ et $1'$ seront obtenus par grossissement uniforme du maillage $3'$. Par la suite, on va calculer les solutions sur les maillages grossiers $2'$ et $1'$ pour estimer les erreurs de la solution sur le maillage $3'$, en utilisant le nouveau taux de convergence. De cette façon on va obtenir le maillage $3''$ et on continue la procédure d'adaptation afin d'obtenir l'erreur désirée.

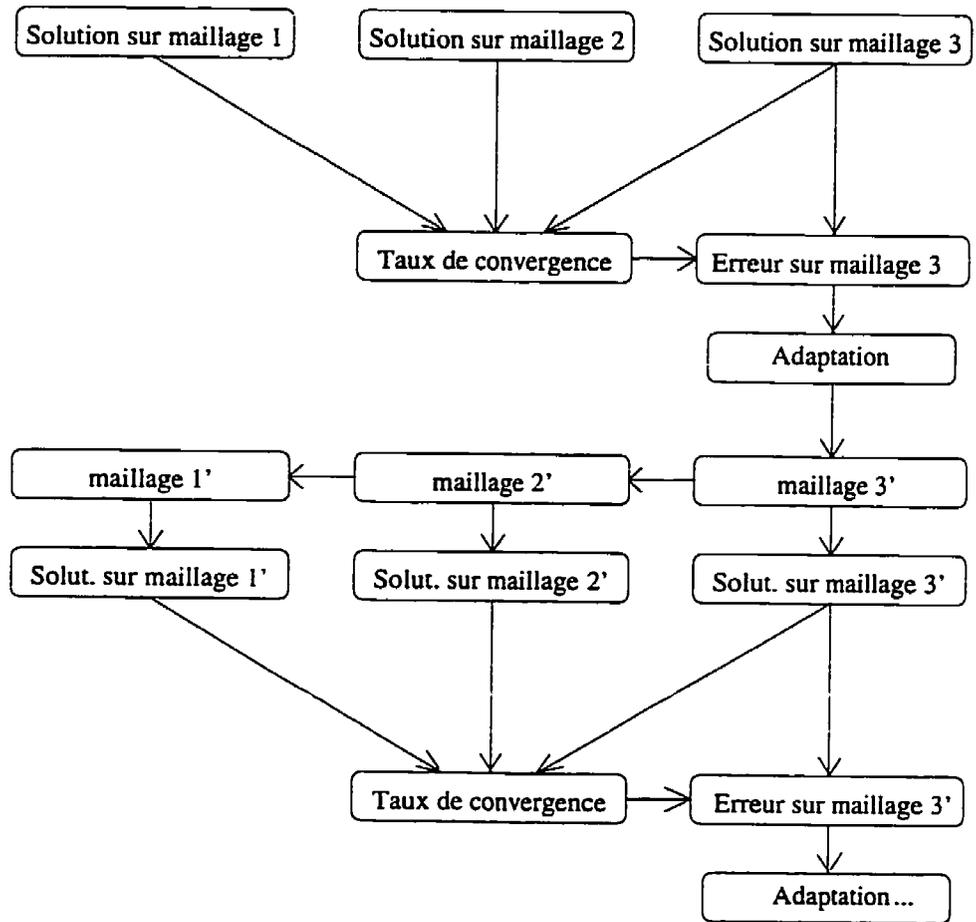


Figure 3.3: Les étapes à suivre dans le cycle d'adaptation

Chapitre 4

Résultats

Ce chapitre présente les résultats obtenus lors des simulations numériques en utilisant les différentes méthodes de prédiction présentées dans les chapitres précédents. On propose des comparaisons avec des solutions analytiques et aussi des études d'erreur.

4.1 Le vortex supersonique

Des simulations sont réalisées pour l'écoulement d'un vortex supersonique tel que présenté à la figure 4.1 [1].

4.1.1 Modèle physique et solution analytique pour le vortex supersonique

La géométrie du problème est illustrée schématiquement à la figure 4.1. Le rayon intérieur est $r_{int} = 1$ et le rayon extérieur est $r_{ext} = 1.384$. L'écoulement est supersonique avec $M_{int} = 2.25$, $\rho_{int} = 1$, $p_{int} = \frac{1}{\gamma}$.

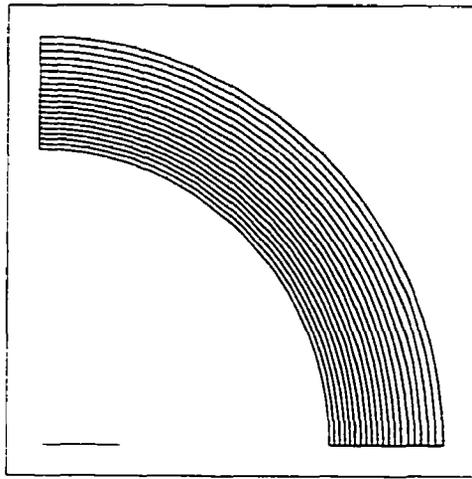


Figure 4.1: Lignes de courant pour le vortex supersonique

Tous les paramètres, densité ρ , pression p , température T , nombre de Mach M et vitesse du son a ne dépendent que du rayon r et sont donnés par:

$$\rho(r) = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{int}^2 \left(1 - \left(\frac{r}{r_{int}} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.1)$$

$$p(r) = \frac{1}{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{int}^2 \left(1 - \left(\frac{r}{r_{int}} \right)^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.2)$$

$$T(r) = \frac{p(r)}{\rho(r)} \quad (4.3)$$

$$a(r) = \sqrt{\gamma T(r)} \quad (4.4)$$

$$M(r) = \sqrt{\frac{k^2}{\frac{r}{r_{int}^2} - \frac{\gamma-1}{2}k^2}}, \quad k = 1.586 \quad (4.5)$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse du fluide, u et v , sont données par les relations suivantes:

$$u(i) = a[r(i)]M[r(i)]\frac{y(i)}{r(i)} \quad (4.6)$$

$$v(i) = -a[r(i)]M[r(i)]\frac{x(i)}{r(i)} \quad (4.7)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes: 'entrée supersonique' (à droite et en haut de la figure 4.1) pour laquelle toutes les variables d'écoulement sont imposées en utilisant les formules déjà présentées; aucune condition n'est imposée à la sortie (à gauche et en bas de la figure 4.1) et les variables conservatives sont extrapolées de l'intérieur du domaine; sur les parois solides on impose les conditions illustrées à la section 2.3.5.

4.1.2 Analyse de l'erreur

Pour chaque résolution du problème, on a utilisé trois maillages avec un facteur de raffinement égal à 2. Différents types de maillages triangulaires sont utilisés, soit les structurés et les non-structurés (voir la figure 4.2).

Les erreurs globales exactes pour différents maillages structurés sont présentées au tableau 4.1. Pour calculer les erreurs globales, on a utilisé les deux normes L_1 et L_2 . Les taux de convergence exacts, calculés en utilisant la norme L_2 , sont présentés au tableau 4.3. Compte tenu du fait que les taux de convergence varient d'une paire de maillages à l'autre, on présente les valeurs obtenues pour chaque paire de maillages. Les taux de convergence calculés avec la norme L_1 sont presque identiques. En regardant le tableau 4.1, on voit que les erreurs sont différentes en fonction de la norme utilisée. Cependant, compte tenu du fait que les taux de convergence calculés à l'aide de ces deux normes sont presque identiques, on peut tirer la conclusion que les deux normes L_1 et L_2 conduisent aux mêmes résultats pour l'étude d'erreur. Pour les maillages non-structurés, les erreurs globales exactes, ainsi que les taux de convergence exacts sont présentés aux tableaux 4.2 et 4.4 respectivement.

Pour le schéma d'ordre 1, on obtient presque les mêmes taux de convergence quel que soit le type du maillage, même si les erreurs globales sont plus élevées pour les maillages structurés. Pour les deux schémas d'ordre 2, les taux de convergence sont plus élevés lorsqu'on utilise des maillages structurés.

Les tableaux 4.5 et 4.6 permettent de mettre en évidence la précision de l'estimateur lorsque les erreurs globales estimées pour différents maillages structurés et

Taille	Erreur					
	Roe		Ordre 2 (Gauss)		Ordre 2 (Moindres carrés)	
	L1	L2	L1	L2	L1	L2
1.00	0.0877	0.1209	1.743E-03	3.242E-03	1.921E-03	3.219E-03
0.50	0.0437	0.0596	4.673E-04	8.555E-04	6.105E-04	9.700E-04
0.25	0.0225	0.0313	1.867E-04	3.220E-04	1.869E-04	3.143E-04

Tableau 4.1: Les erreurs globales exactes pour différents maillages structurés

Taille	Erreur					
	Roe		Ordre 2 (Gauss)		Ordre 2 (Moindres carrés)	
	L1	L2	L1	L2	L1	L2
1.00	0.0546	0.0837	2.332E-03	4.411E-03	2.570E-03	4.306E-03
0.50	0.0267	0.0390	8.437E-04	1.742E-03	8.802E-04	1.733E-03
0.25	0.0141	0.0203	3.304E-04	6.124E-04	3.368E-04	6.285E-04

Tableau 4.2: Les erreurs globales exactes pour différents maillages non-structurés

non-structurés sont présentées. Les erreurs globales estimées et exactes demeurent

Roe	Ordre 2 (Gauss)	Ordre 2 (Moindres carrés)
0.96 .. 1	1.41 .. 1.92	1.63 .. 1.73

Tableau 4.3: Les taux de convergence exacts pour différentes méthodes sur des maillages structurés

Roe	Ordre 2 (Gauss)	Ordre 2 (Moindres carrés)
0.92 .. 1	1.34 .. 1.51	1.31 .. 1.46

Tableau 4.4: Les taux de convergence exacts pour différentes méthodes sur des maillages non-structurés

Taille	Erreur			
	Roe		Ordre 2	
	L1	L2	L1	L2
1.00	0.0847	0.1211	1.290E-03	1.826E-03
0.50	0.0418	0.0563	3.704E-04	5.020E-04
0.25	0.0200	0.0262	1.063E-04	1.380E-04

Tableau 4.5: Les erreurs globales estimées pour différents maillages structurés

presque égales pour les deux types de maillage. Pourtant, la précision des estimations

Taille	Erreur			
	Roe		Ordre 2	
	L1	L2	L1	L2
1.00	0.0732	0.1086	1.272E-03	1.913E-03
0.50	0.0323	0.0475	3.039E-04	4.494E-04
0.25	0.0142	0.0207	7.262E-05	1.055E-04

Tableau 4.6: Les erreurs globales estimées pour différents maillages non-structurés

est moins bonne pour les schémas d'ordre 2. Ceci est peut-être dû à l'interpolation linéaire de la solution d'un maillage à l'autre, lors du processus d'estimation.

La même conclusion s'applique pour les taux de convergence estimés (le tableau 4.7) avec des différences plus significatives par rapport au taux de convergence exact, surtout pour les maillages non-structurés.

Roe		Ordre 2	
maillages structurés			
L ₁	L ₂	L ₁	L ₂
1.1	1.06	1.8	1.86
maillages non-structurés			
L ₁	L ₂	L ₁	L ₂
1.18	1.19	2.06	2.09

Tableau 4.7: Les taux de convergence estimés pour différentes méthodes

La figure 4.3 présente les distributions de la densité en utilisant le schéma de Roe pour les deux types de maillage. On y remarque que l'utilisation d'un maillage non-structuré va conduire vers une solution avec des oscillations plus fortes, surtout lorsque le maillage est grossier. Les solutions obtenues sur les maillages les plus fins sont presque identiques.

Les distributions de l'erreur en densité en utilisant le schéma de Roe sont présentées à la figure 4.4. On remarque l'apparition d'une onde de choc dans le voisinage de l'entrée. Cette discontinuité est plus significative pour les distributions de l'erreur obtenues sur les maillages structurés, tandis que sur les maillages non-structurés les distributions sont plutôt bruitées. La remarque la plus importante est que, en

regardant encore une fois les tableaux 4.1 et 4.2 (pour schéma de Roe), cette onde de choc diminue la qualité de la solution. Ce phénomène est aussi illustré à la figure 4.9 qui présente les erreurs globales exactes en utilisant le schéma de Roe. Malgré la discontinuité remarquée pour les solutions obtenues sur les maillages structurés, les taux de convergence demeurent égaux pour les deux types de maillage.

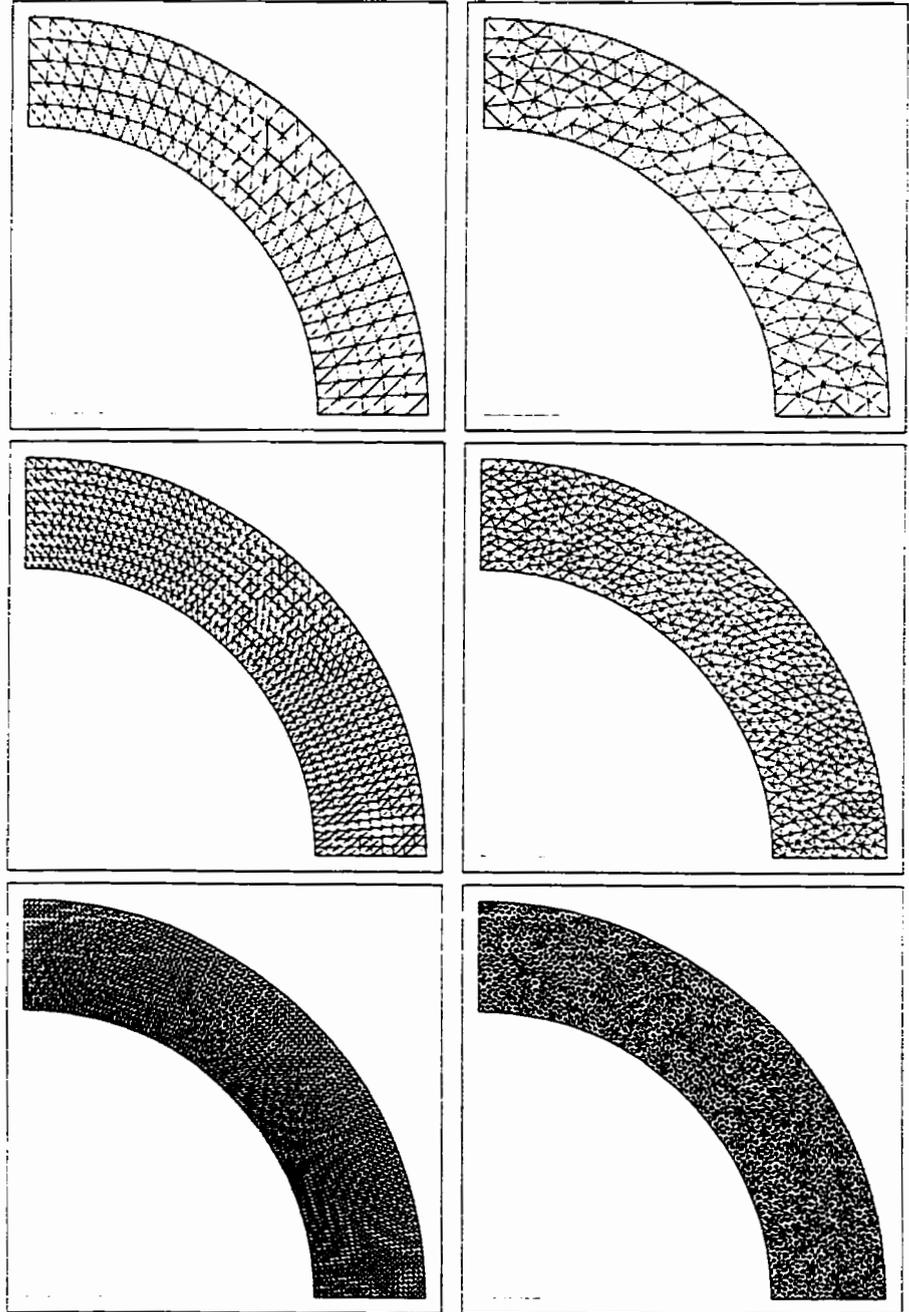
La situation change beaucoup lorsqu'on regarde les figures 4.5 et 4.6 pour le schéma d'ordre 2. On remarque les mêmes oscillations dans le cas d'un maillage non-structuré grossier, mais cette fois il n'y a aucune onde de choc dans le voisinage de l'entrée pour les maillage structurés. De plus, la qualité d'une solution obtenue sur un maillage structuré est meilleure que celle d'une solution obtenue sur un maillage non-structuré, phénomène qui peut être vérifié aussi à l'aide des tableaux 4.1 et 4.2. Les différences entre les solutions obtenues en utilisant les deux schémas d'ordre 2 sont peu significatives, les résultats présentés étant obtenus pour chacune des deux méthodes.

Les estimés de l'erreur obtenus pour les maillages structurés ou non-structurés (ordre 1) les plus fins sont présentées à la figure 4.7. Les contours obtenus sont comparables et cela nous conduit à la conclusion que les estimés sont corrects, d'autant plus qu'entre les erreurs globales estimées et exactes il n'y a qu'une faible différence.

Pour les schémas d'ordre 2, les estimés de l'erreur sont présentés à la figure 4.8. On remarque que les distributions de l'erreur sont assez régulières sur les maillages structurés, tandis que sur les maillages non-structurés, les distributions sont bruitées. L'estimateur d'erreur reproduit ce phénomène. En fait, on avait observé le même phénomène lors de simulations faites en utilisant le schéma de Roe.

Les distributions de l'erreur estimée pour les schémas d'ordre 2 ne présentent pas de concentration de l'erreur sur les parois solides et à la sortie. Ceci nous fait croire que la couche présentée par les distributions de l'erreur exacte à la figure 4.8 est due à l'implantation de la solution analytique. De cette façon, on pourrait aussi expliquer le fait que les taux de convergence pour les schémas d'ordre 2 sont plus petits que 2.

Finalement, plusieurs améliorations sont envisageables: l'augmentation de la précision de la solution analytique (y compris la qualité de la géométrie); l'amélioration des conditions aux limites, surtout pour les parois solides.



a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.2: Maillages pour le vortex supersonique

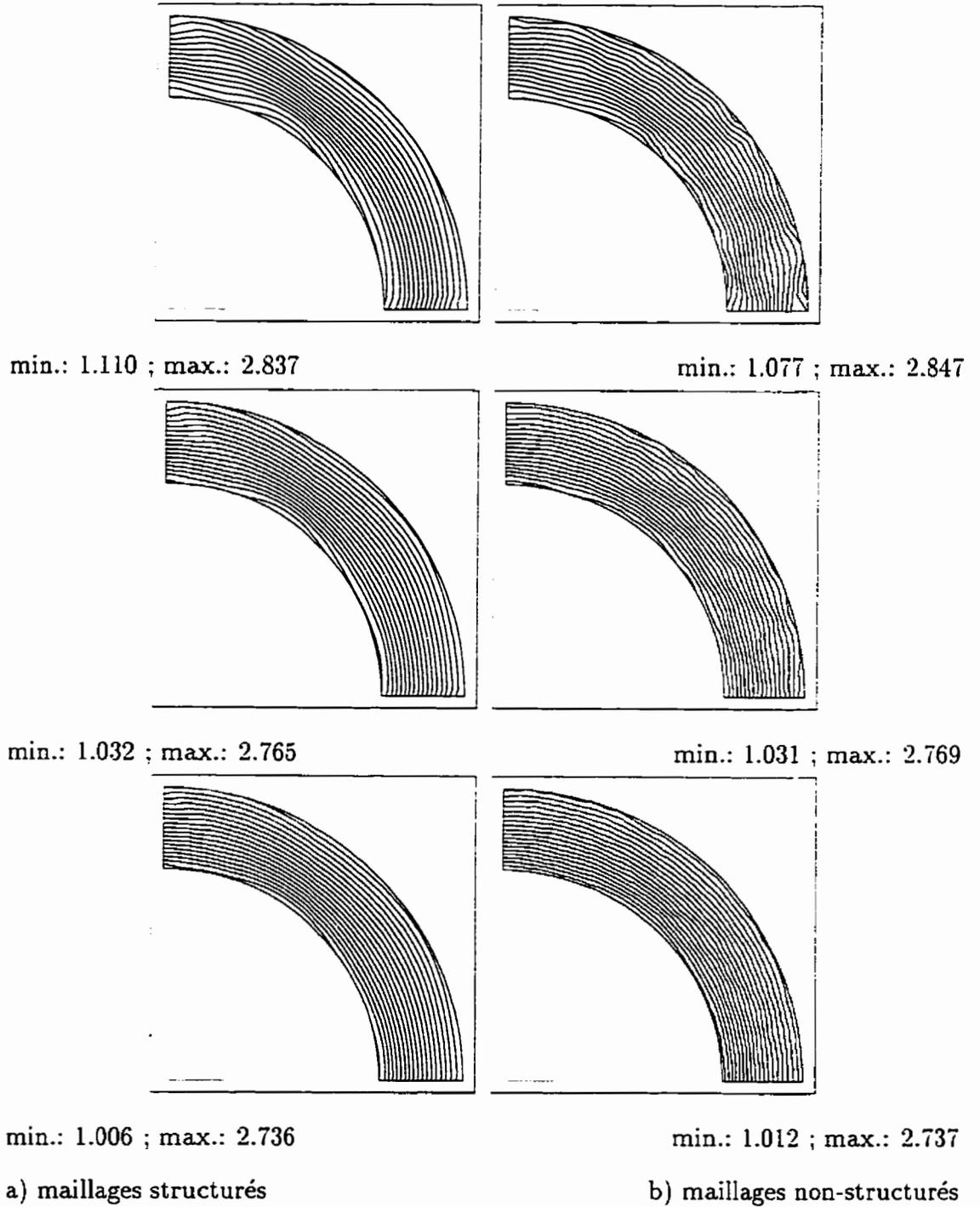
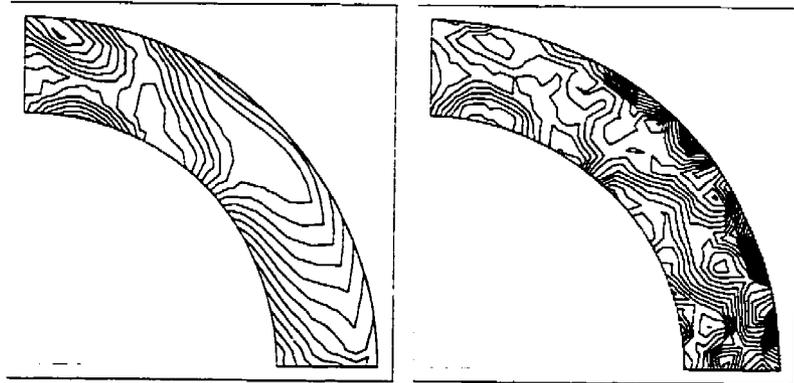
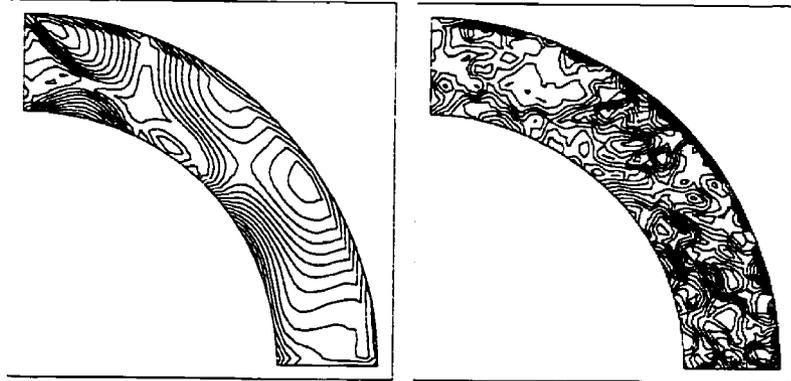


Figure 4.3: La distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe



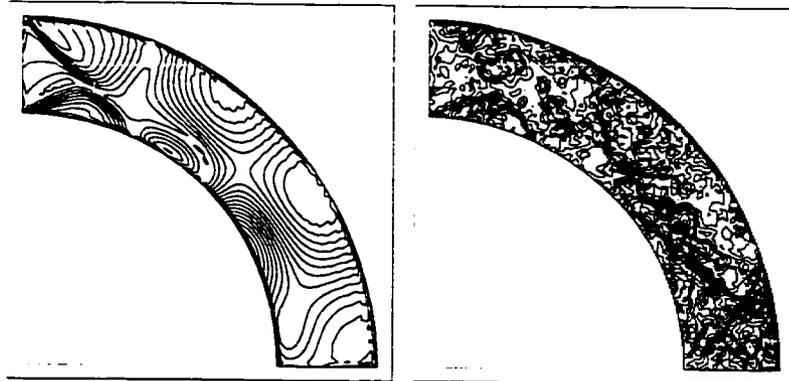
min.: 5.25E-4 ; max.: 5.08E-1

min.: 2.08E-3 ; max.: 3.86E-1



min.: 3.41E-4 ; max.: 2.44E-1

min.: 1.63E-5 ; max.: 1.68E-1



min.: 1.81E-5 ; max.: 1.19E-1

min.: 3.87E-6 ; max.: 8.38E-2

a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.4: La distribution de l'erreur exacte en densité pour le schéma de Roe

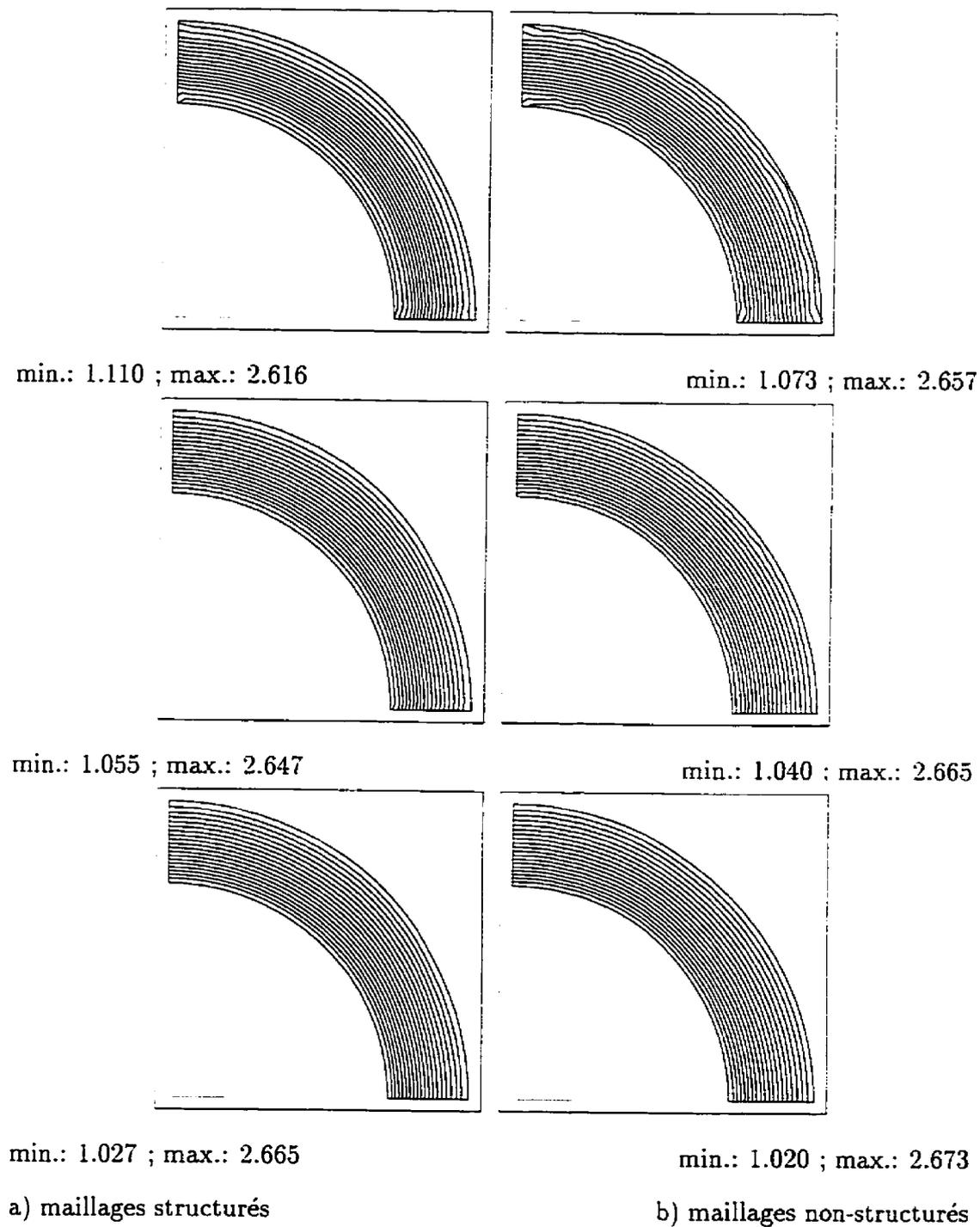
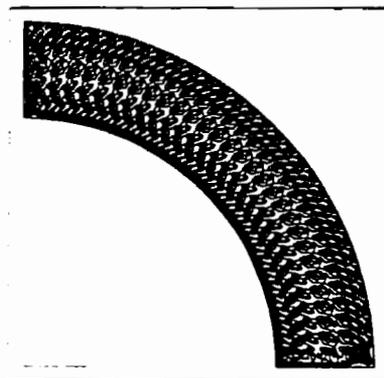
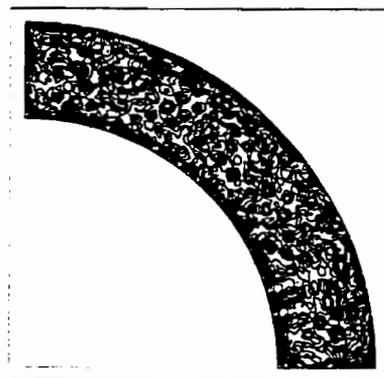


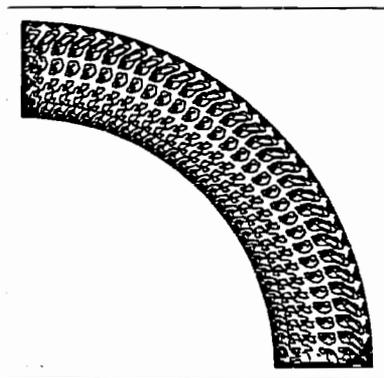
Figure 4.5: La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2



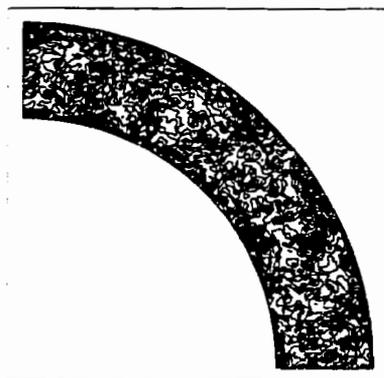
min.: 5.65E-5 ; max.: 1.00E-3



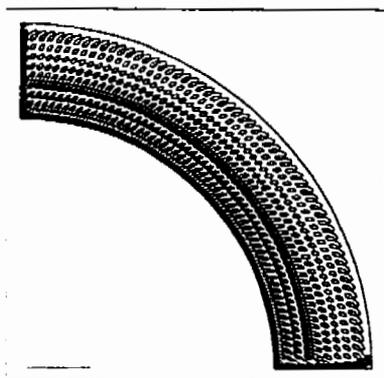
min.: 1.59E-4 ; max.: 6.50E-3



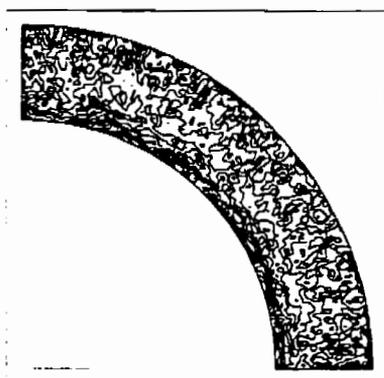
min.: 1.55E-5 ; max.: 5.00E-4



min.: 7.98E-5 ; max.: 1.21E-3



min.: 5.40E-6 ; max.: 1.00E-4

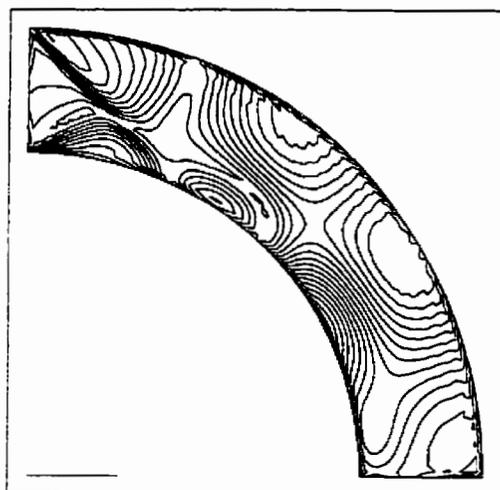


min.: 1.34E-5 ; max.: 2.54E-4

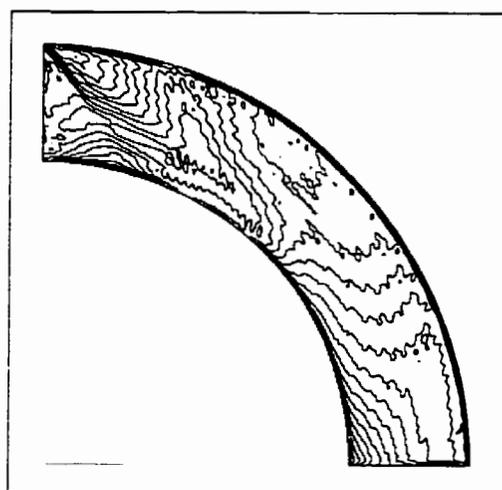
a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

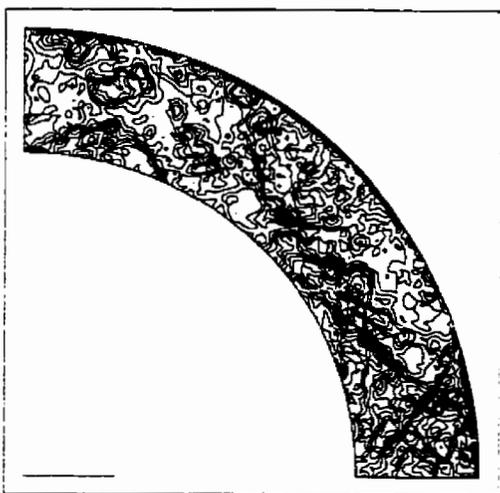
Figure 4.6: La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2



min.: 1.81E-5 ; max.: 1.19E-1

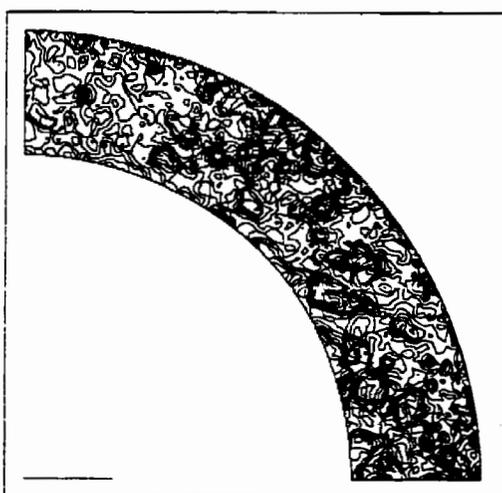


min.: 7.72E-4 ; max.: 8.00E-2



min.: 3.87E-6 ; max.: 8.38E-2

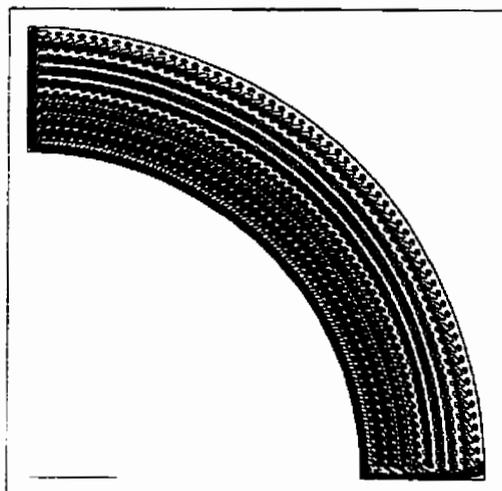
a) exacte



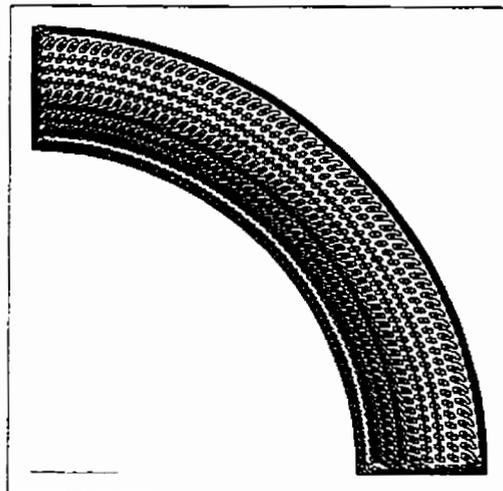
min.: 3.78E-4 ; max.: 8.67E-2

b) estimé

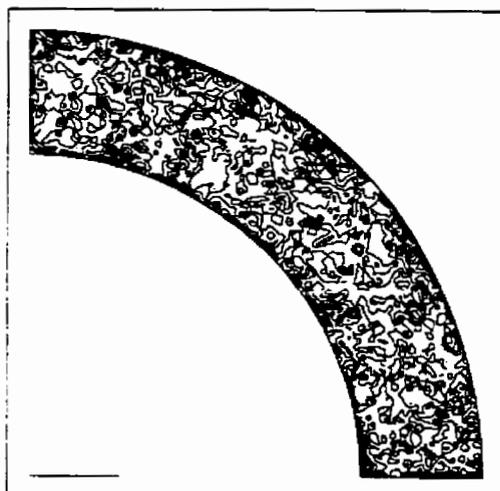
Figure 4.7: La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma de Roe. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.



min.: $5.40E-6$; max.: $1.00E-4$

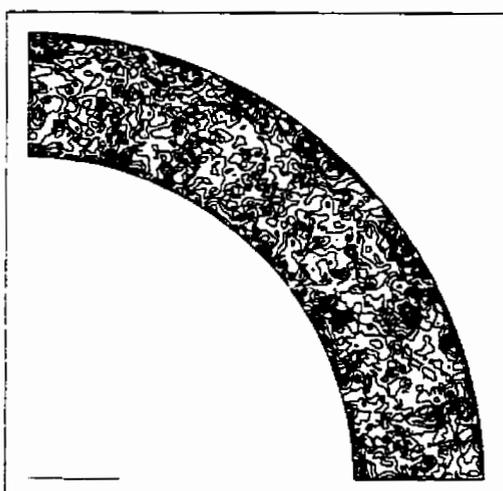


min.: $1.00E-5$; max.: $1.50E-4$



min.: $1.34E-5$; max.: $2.00E-4$

a) exacte



min.: $1.00E-6$; max.: $1.00E-4$

b) estimé

Figure 4.8: La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.

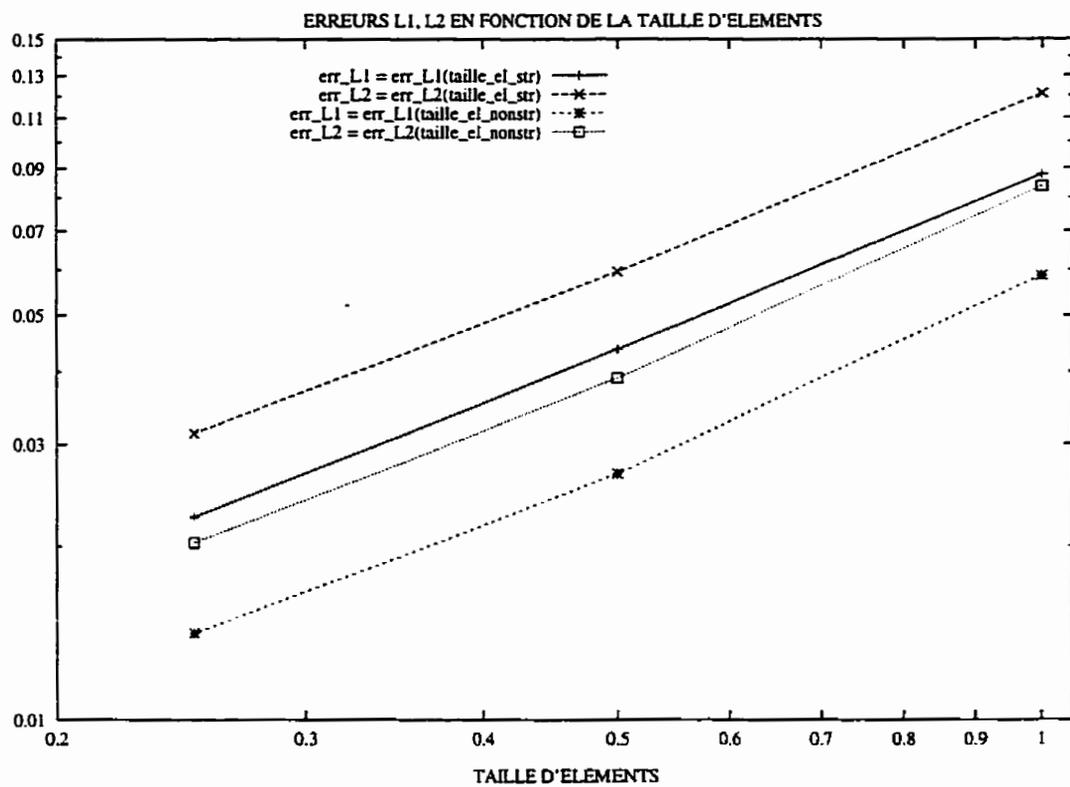


Figure 4.9: Les erreurs globales exactes en utilisant le schéma de Roe

4.2 Résultats pour le problème de Ringleb

4.2.1 Modèle physique et solution analytique pour le problème de Ringleb

L'écoulement de Ringleb fait partie de la famille des écoulements potentiels bi-dimensionnels régis par l'équation 4.8:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\Phi_{xx} - 2\frac{uv}{c^2}\Phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Phi_{yy} = 0 \quad (4.8)$$

Afin de calculer la solution analytique, on utilise la méthode de la transformation hodographique. La vitesse q et l'angle θ par rapport à la direction de référence sont utilisées comme variables indépendantes et seront fonctions de x et y . Il y a deux méthodes principales et la plus connue est celle indirecte, qui utilise la transformation de Legendre:

$$\Omega(u, v) = xu + yv - \Phi \quad (4.9)$$

À l'aide de cette transformation, l'équation (4.8) devient:

$$q^2\Omega_{qq} - q\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\Omega_{q\theta} + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\Omega_{\theta\theta} = 0 \quad (4.10)$$

où, en utilisant la transformation de Molenbrock-Tschapligin [13] pour la fonction de courant Ψ , on obtient:

$$q^2\Psi_{qq} - q\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\Psi_{q\theta} + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\Psi_{\theta\theta} = 0 \quad (4.11)$$

Soit la quantité $\tau = \left(\frac{q}{q_{lim}}\right)^2$, où q_{lim} est la vitesse limite de l'écoulement. La famille de solutions peut s'écrire:

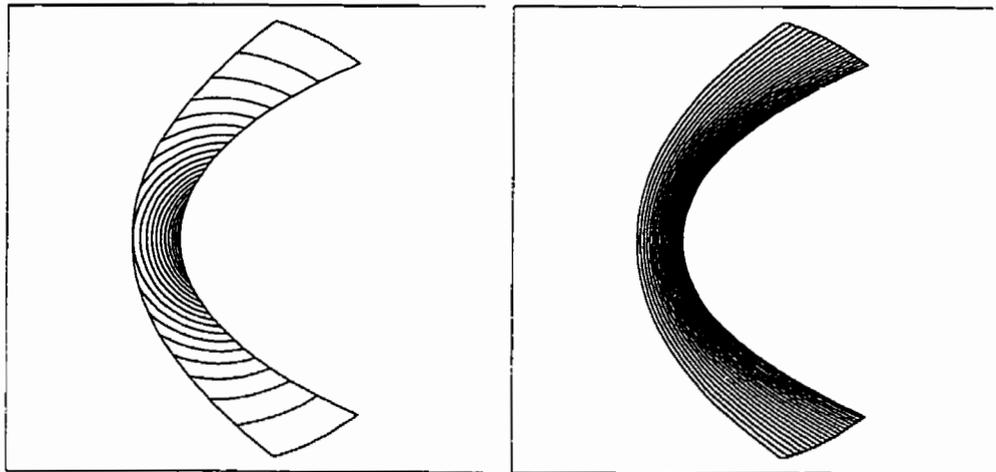
$$\Psi_\alpha(\tau, \theta) = \tau^{\frac{\alpha}{2}} F_\alpha(a_\alpha, b_\alpha, \alpha + 1, \tau) e^{i\alpha\theta} \quad (4.12)$$

où:

$$a_\alpha + b_\alpha = \alpha - \frac{1}{\gamma - 1} \quad a_\alpha b_\alpha = -\frac{\alpha(\alpha + 1)}{2(\gamma - 1)} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (4.13)$$

Pour obtenir l'écoulement de Ringleb, on impose $\alpha = -1$ dans (4.12). Dans ce cas, on obtient la solution suivante:

$$\Psi = \frac{1}{q} \sin \theta \quad (4.14)$$



a) iso-vitesses (q) entre 2 lignes de courant

b) lignes de courant (Ψ)

Figure 4.10: Modèle physique pour l'écoulement de Ringleb

Les formules suivantes seront utilisées pour calculer la solution analytique qui est présentée à la figure 4.10 (la densité ρ , la vitesse du son c et le module de la vitesse q sont considérées comme des valeurs de stagnation):

$$x = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{2}{k^2} \right) + \frac{J}{2} \quad (4.15)$$

$$y = \frac{1}{k\rho q} \sqrt{1 - \left(\frac{q}{k}\right)^2} \quad (4.16)$$

$$k = \frac{1}{\psi}, \quad \text{constant sur les lignes de courant} \quad (4.17)$$

$$J = \frac{1}{c} + \frac{1}{3c^3} + \frac{1}{5c^5} + \frac{1}{2} \lg \frac{1+c}{1-c} = J(c) \quad (4.18)$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{2} q^2} = c(q) \quad (4.19)$$

$$\rho = c^{\frac{2}{\gamma-1}} = \rho(c) \quad (4.20)$$

À l'aide de ces formules, on peut construire le domaine de calcul (ρ, c, q, k sont considérées comme des valeurs connues). L'entrée subsonique est en bas sur la figure 4.10, tandis que la sortie est en haut. La construction du domaine de calcul fait apparaître certaines difficultés dues au fait que les parois solides sont représentées par des courbes de pente très élevée dans le voisinage de $y = 0$. Ceci implique l'utilisation d'une technique d'interpolation afin de trouver plus de points sur les frontières solides. Sinon, la qualité de la solution serait diminuée.

En utilisant une méthode itérative de Newton-Raphson, on peut trouver toutes les variables ρ, c, q, k en fonction de x et y donnés (à la figure 4.10 on présente la distribution de la vitesse q et les lignes de courant Ψ). On obtient aussi que

$$\frac{\rho_{\text{sortie}}}{\rho_0} = 0.9384.$$

4.2.2 Analyse de l'erreur

Les erreurs globales exactes pour les différents maillages structurés ou non-structurés (illustrés à la figure 4.11), sont présentées aux tableaux 4.8 et 4.9. Il n'y a que des faibles différences entre les résultats obtenus pour les deux types de maillage. On remarque que la précision du schéma basé sur la technique de moindres carrés est plus élevée que celle du schéma basé sur le théorème de Gauss, autant pour les maillages structurés que pour les maillages non-structurés.

On constate sur les tableaux 4.10 et 4.11 que pour les deux méthodes d'ordre 2, les taux de convergence calculés en utilisant la norme L_2 varient beaucoup d'une paire de maillages à l'autre. Lorsqu'on utilise la norme L_1 , cette variation diminue. Les variations sont encore plus significatives pour la technique de moindres carrés. Donc, on pourrait dire que les erreurs sont différentes en fonction de la norme utilisée. Mais, ceci serait en contradiction avec les résultats obtenus pour le vortex supersonique. Il faut chercher une raison pour laquelle le taux de convergence obtenu à l'aide des maillages moyen et fin est plus petit que celui attendu. En tenant compte que, surtout pour les méthodes d'ordre 2 et en utilisant un maillage très fin, les différences entre la solution exacte et celle numérique sont très faibles, on s'est rendu compte que le niveau de précision de la solution numérique dépasse la précision du calcul de la solution analytique. Donc, la précision des erreurs exactes n'est plus très élevée, ce qui fait que le taux de convergence exact soit plus petit que celui prévu par la théorie.

Les erreurs globales estimées sont présentées aux tableaux 4.12 et 4.13, ce qui permet de mettre en évidence une faible dégradation de la précision de l'estimateur.

Taille	Erreur					
	Roe		Ordre 2		Ordre 2 (Moindres carrés)	
	L1	L2	L1	L2	L1	L2
1.00	0.5573	0.1528	4.541E-02	1.255E-02	1.828E-02	5.150E-03
0.50	0.3600	0.0994	7.235E-03	2.149E-03	3.364E-03	1.181E-03
0.25	0.2140	0.0594	1.402E-03	8.642E-04	9.489E-04	7.953E-04

Tableau 4.8: Les erreurs globales pour différents maillages structurés

Taille	Erreur					
	Roe		Ordre 2 (Gauss)		Ordre 2 (Moindres carrés)	
	L1	L2	L1	L2	L1	L2
1.00	0.6005	0.1647	7.045E-02	1.945E-02	3.230E-02	9.248E-03
0.50	0.4574	0.1256	9.575E-03	2.657E-03	3.462E-03	1.110E-03
0.25	0.2800	0.0775	2.296E-03	8.996E-04	1.161E-03	7.787E-04

Tableau 4.9: Les erreurs globales pour différents maillages non-structurés

Même si la précision des estimés est diminuée par rapport à ceux obtenus pour

Roe	Ordre 2 (Gauss)	Ordre 2 (Moindres carrés)
0.75	1.31 .. 2.54	0.57 .. 2.12

Tableau 4.10: Les taux de convergence globales pour différentes méthodes sur des maillages structurés

Roe	Ordre 2 (Gauss)	Ordre 2 (Moindres carrés)
0.72	1.56 .. 2.87	0.56 .. 3.05

Tableau 4.11: Les taux de convergence globales pour différentes méthodes sur des maillages non-structurés

le vortex supersonique, les résultats permettent d'avoir une bonne idée sur l'ordre de grandeur de l'erreur dans la solution.

Les taux de convergence estimés pour les différentes méthodes utilisées sont présentés au tableau 4.14. On y remarque aussi une dégradation de la précision par rapport aux résultats exacts. D'ailleurs, on s'attendait à cette dégradation car les erreurs globales estimés sont reliées au calcul du taux de convergence estimé.

Taille	Erreur			
	Roe		Ordre 2	
	L1	L2	L1	L2
1.00	0.760	0.212	4.385E-02	1.473E-02
0.50	0.560	0.158	7.469E-03	2.957E-03
0.25	0.417	0.118	1.272E-03	5.935E-04

Tableau 4.12: Les erreurs globales estimés pour différents maillages structurés

Les distributions de la densité et de l'erreur en densité, utilisant le schéma de Roe, sont présentées par les figures 4.12 et 4.13. On remarque des petites oscillations de la solution dans le cas d'un maillage non-structuré grossier. En regardant les

Taille	Erreur			
	Roe		Ordre 2	
	L1	L2	L1	L2
1.00	0.832	0.225	6.850E-02	2.179E-02
0.50	0.618	0.169	8.745E-03	3.539E-03
0.25	0.477	0.121	1.116E-03	5.748E-04

Tableau 4.13: Les erreurs globales estimés pour différents maillages non-structurés

Roe		Ordre 2	
maillages structurés			
L ₁	L ₂	L ₁	L ₂
0.43	0.42	2.55	2.31
maillages non-structurés			
L ₁	L ₂	L ₁	L ₂
0.41	0.4	2.97	2.62

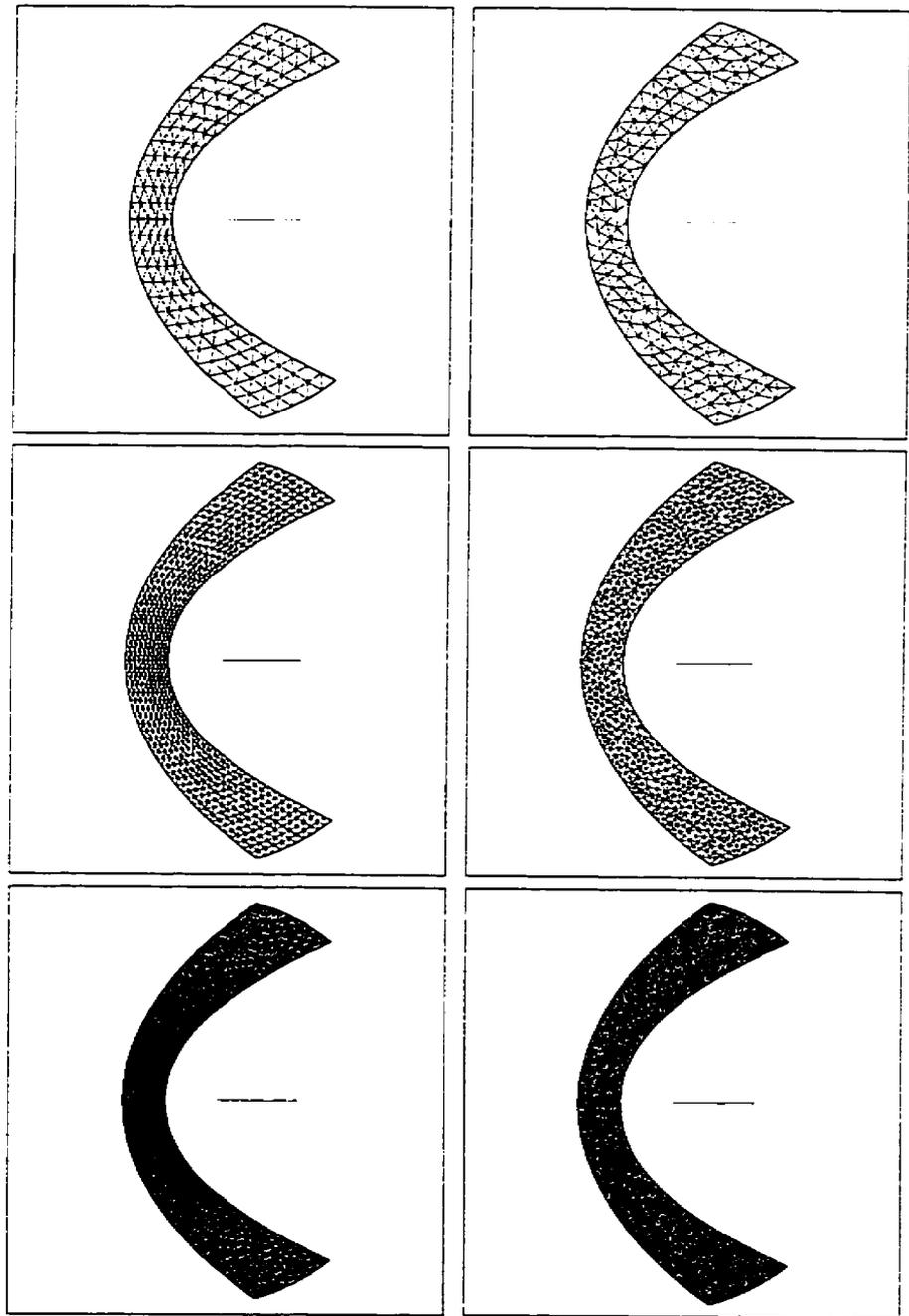
Tableau 4.14: Les taux de convergence estimés pour différentes méthodes

distributions de l'erreur, les oscillations sont encore plus fortes sur les maillages non-structurés.

Les différences entre les solutions obtenues en utilisant les deux schémas d'ordre 2 sont très faibles (voir les figures 4.14, 4.15, 4.16, 4.17). Cependant, on constate que les erreurs sont concentrées dans les zones où les parois solides sont représentées par des courbes de pente très élevée (dans le voisinage de $y = 0$). Ceci est peut-être

dû à l'implantation de la solution analytique dans la construction du domaine de calcul.

Les estimés de l'erreur obtenus pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés obtenus par le schéma de Roe sont présentés à la figure 4.18. Pour les schémas d'ordre 2, les estimés de l'erreur sont présentés à la figure 4.19. On remarque une très bonne précision de l'estimé pour le cas d'un schéma d'ordre 1 implanté sur des maillages structurés. Pour les schémas d'ordre 2, l'apparition d'une couche limite est très évidente sur la paroi interne. Ce phénomène demeure toujours inconnu mais est peut-être dû à l'implantation des conditions limites au deuxième ordre. Une autre raison pour la dégradation de la précision de l'estimation pourrait être la façon d'interpoler les solutions obtenues sur les maillages grossiers lors de la procédure d'estimation.



a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.11: Maillages utilisés pour le problème de RINGLEB

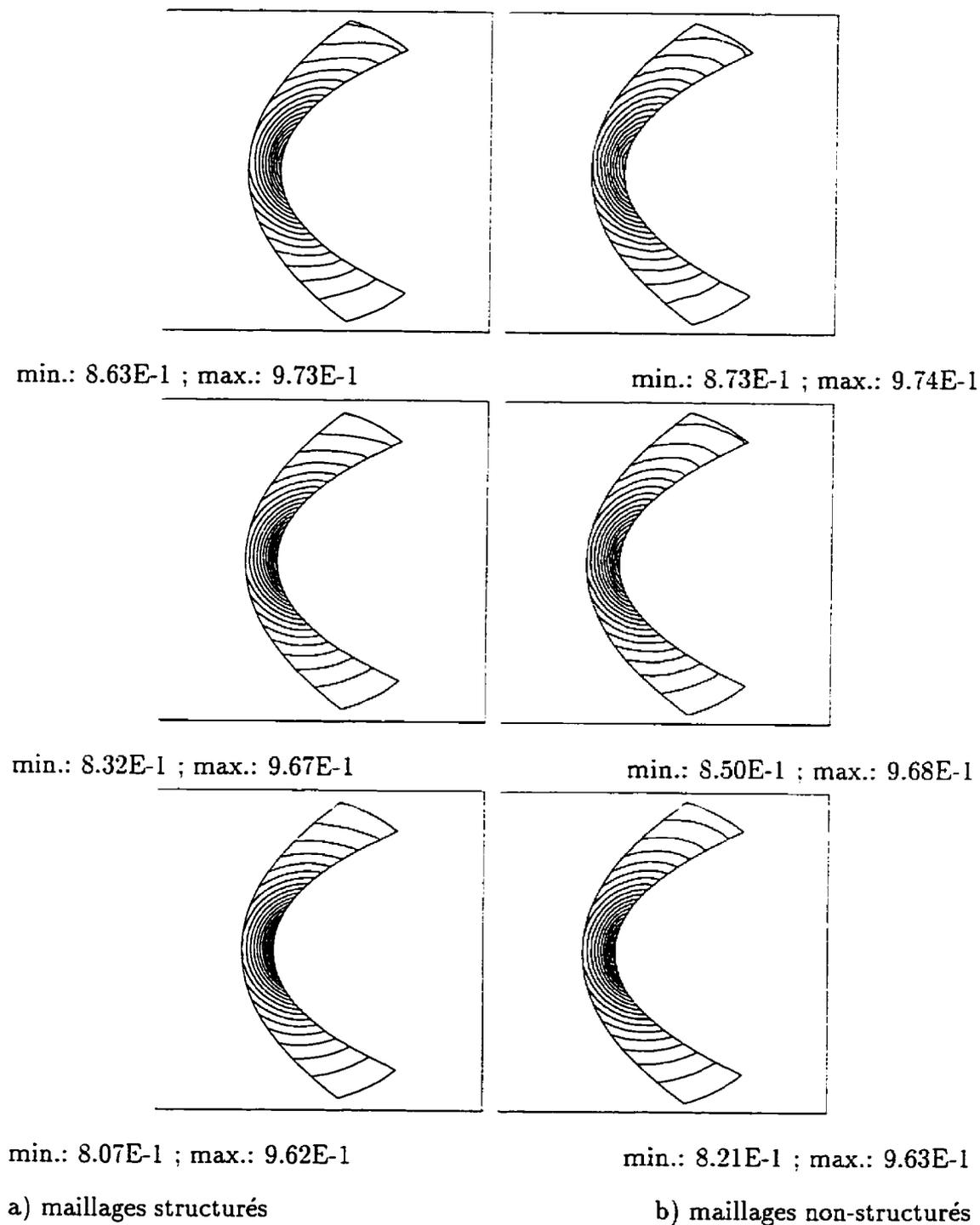
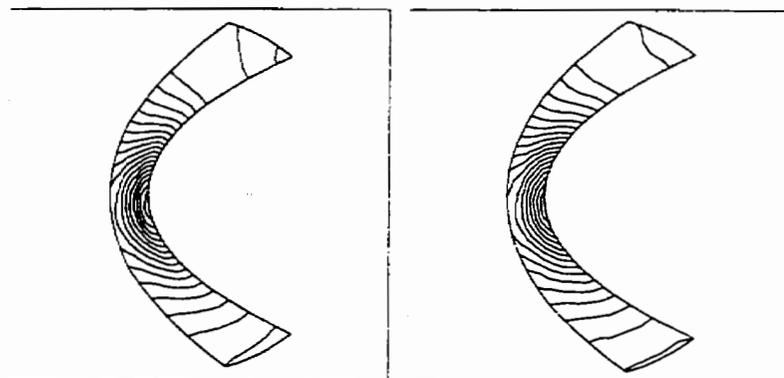
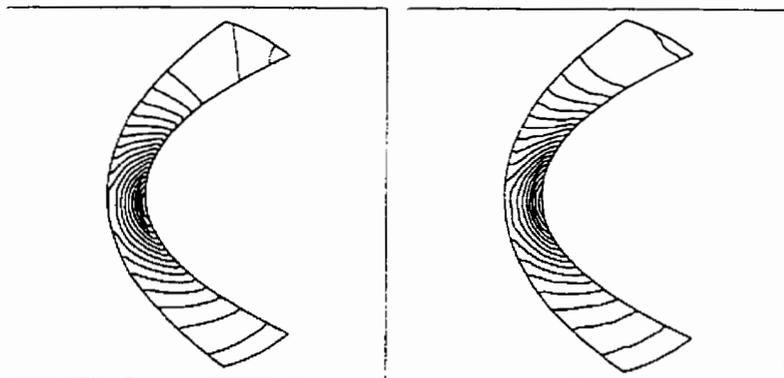


Figure 4.12: La distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe



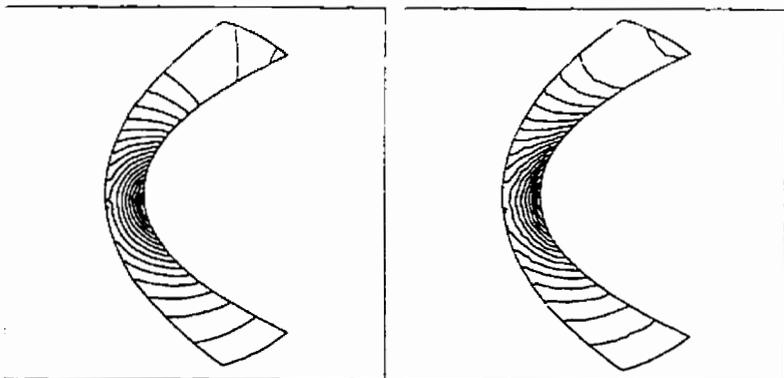
min.: $9.39E-4$; max.: $8.53E-2$

min.: $3.90E-4$; max.: $9.01E-2$



min.: $2.70E-4$; max.: $5.85E-2$

min.: $2.22E-4$; max.: $7.29E-2$



min.: $7.21E-5$; max.: $3.74E-2$

min.: $5.53E-5$; max.: $4.66E-2$

a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.13: La distribution de l'erreur exacte en densité pour le schéma de Roe

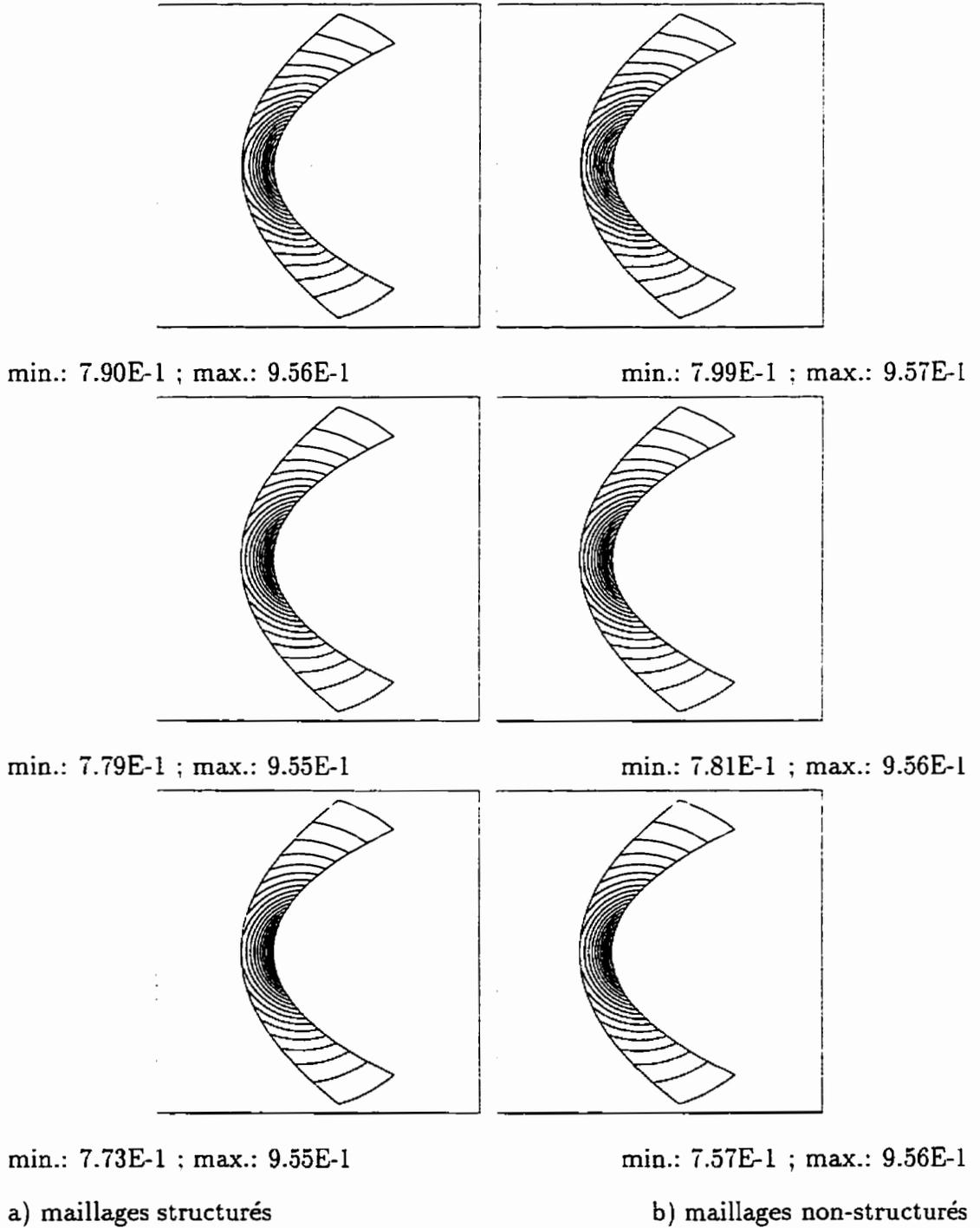
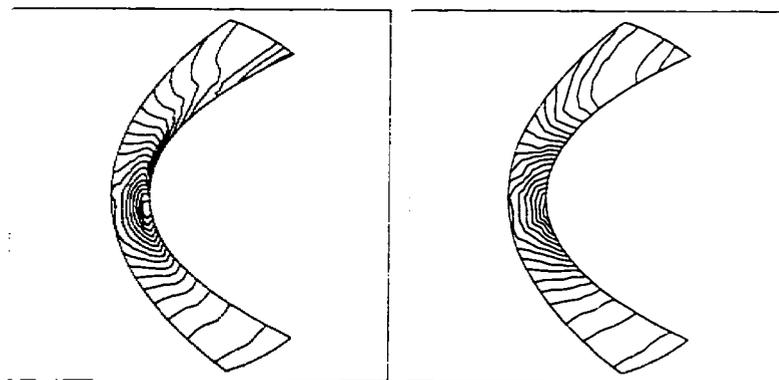
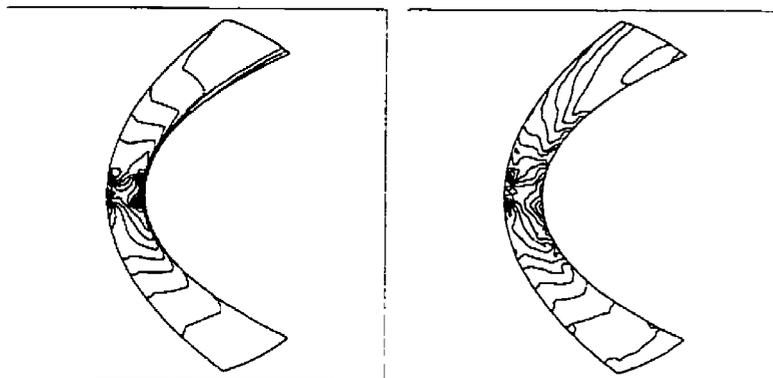


Figure 4.14: La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur le théorème de Gauss



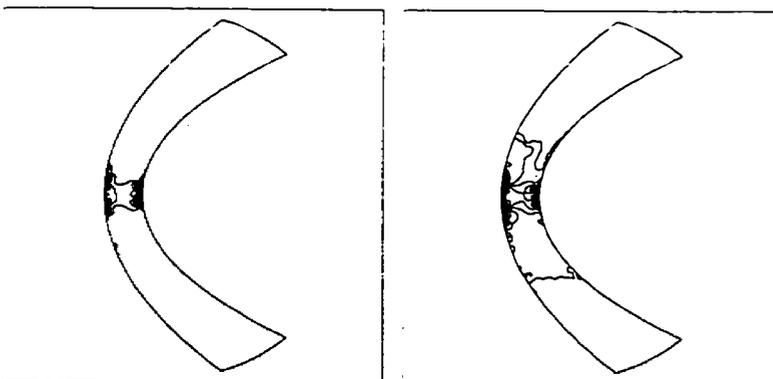
min.: $7.99E-5$; max.: $7.35E-3$

min.: $1.75E-4$; max.: $1.11E-2$



min.: $2.15E-6$; max.: $2.32E-3$

min.: $1.84E-5$; max.: $2.17E-3$



min.: $4.94E-7$; max.: $3.48E-3$

min.: $8.80E-7$; max.: $2.61E-3$

a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.15: La distribution de l'erreur exacte en densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur le théorème de Gauss

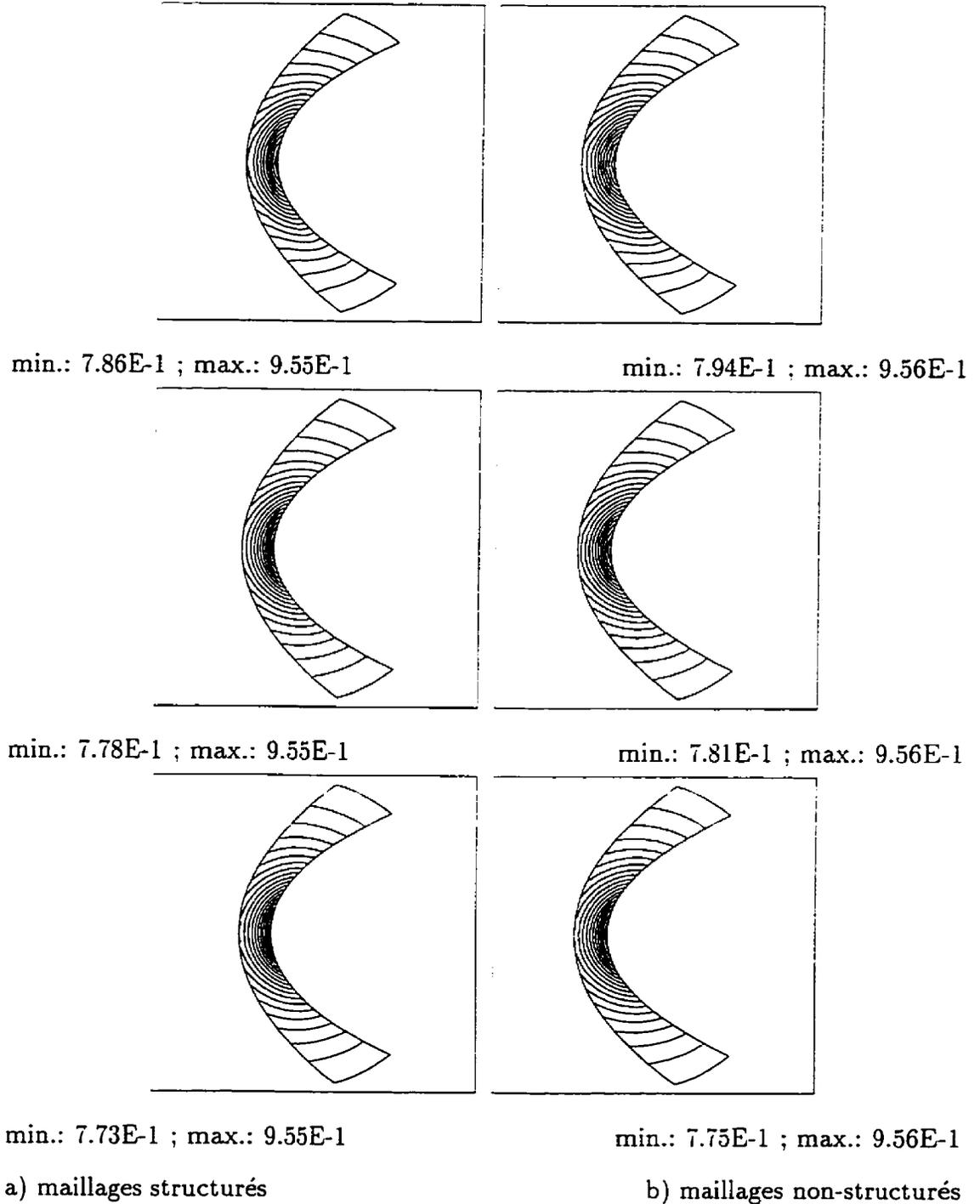
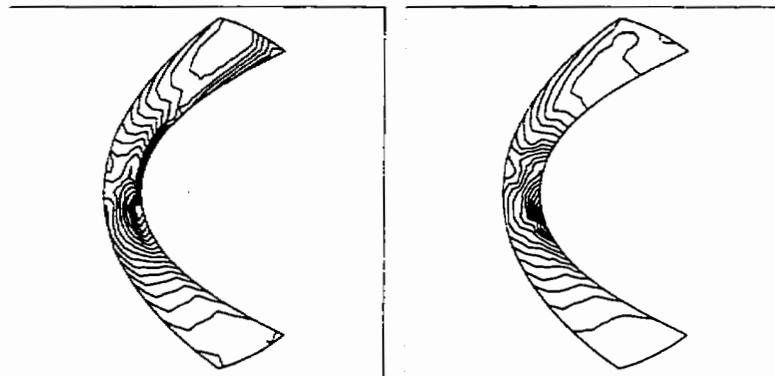
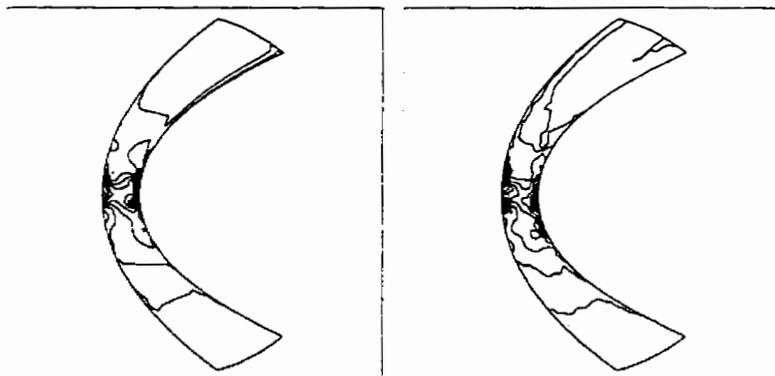


Figure 4.16: La distribution de la densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur la technique de moindres carrés



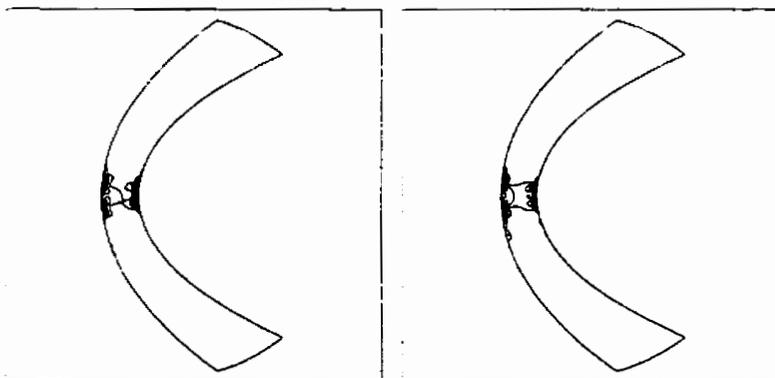
min.: $5.13E-5$; max.: $3.21E-3$

min.: $1.34E-5$; max.: $6.49E-3$



min.: $5.66E-6$; max.: $2.34E-3$

min.: $3.34E-6$; max.: $2.03E-3$



min.: $1.09E-6$; max.: $3.54E-3$

min.: $1.41E-6$; max.: $2.99E-3$

a) maillages structurés

b) maillages non-structurés

Figure 4.17: La distribution de l'erreur exacte en densité en utilisant le schéma d'ordre 2 basé sur la technique de moindres carrés

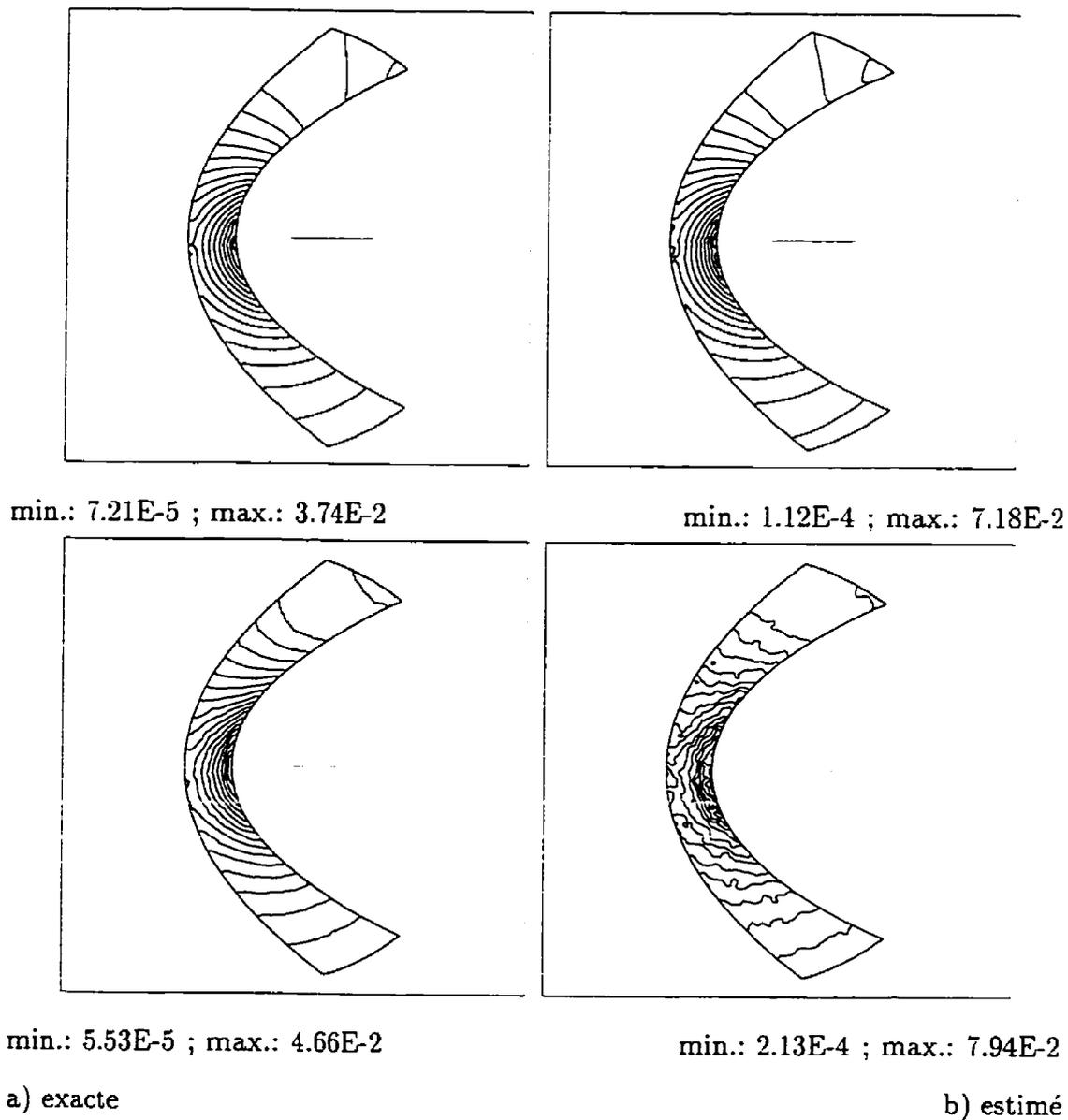


Figure 4.18: La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma de Roe. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.

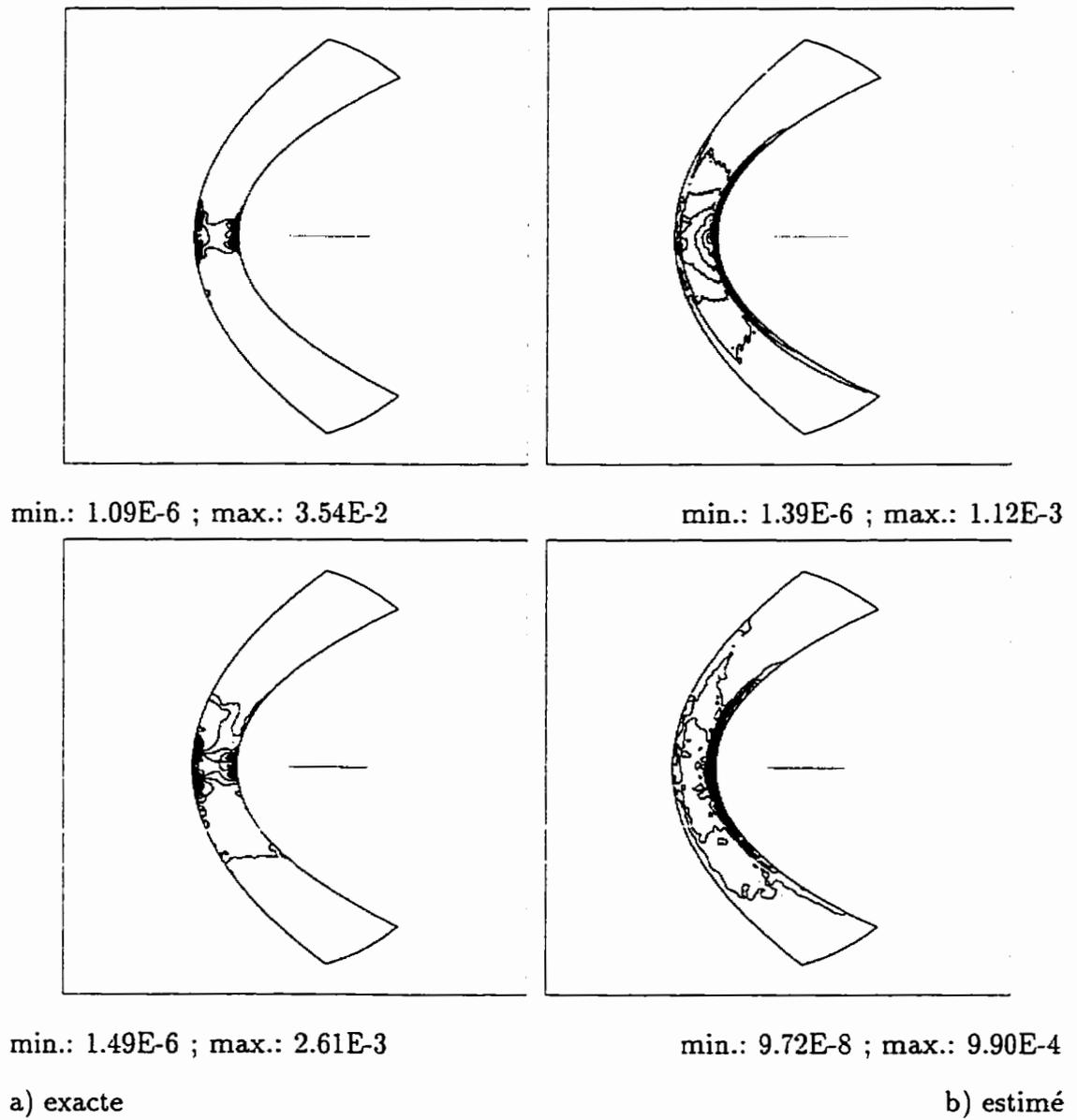


Figure 4.19: La distribution de l'erreur en densité en utilisant le schéma d'ordre 2. Les solutions sont obtenues pour les maillages les plus fins structurés ou non-structurés.

4.3 Résultats pour le problème de confluence de deux écoulements supersoniques

Des simulations ont été réalisées pour un écoulement supersonique avec chocs, dont la géométrie et les paramètres de l'écoulement sont montrés à la figure 4.20.

[2]

4.3.1 Modèle physique et solution analytique

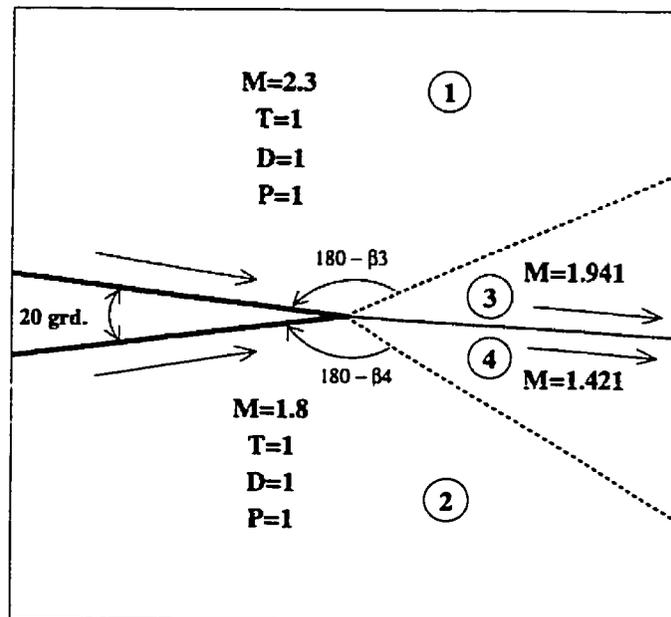


Figure 4.20: Solution analytique

On a partagé le domaine en 4 zones, dans lesquelles l'écoulement est isentropique. Dans les zones 3 et 4, la pression $p_3 = p_4 = 1.7238$, la densité $\rho_3 = \rho_4 = 1.468$ et la température $t_3 = t_4 = 1.1738$. Les angles formés par les ondes de choc sont

$\beta_3 = 33.605$ degrés et $\beta_4 = 44.992$ degrés.

4.3.2 Analyse de l'erreur

Lors des simulations suivantes, on va réaliser un couplage entre les procédures d'estimation de l'erreur et d'adaptation du maillage. Les maillages aux triangles utilisés sont non-structurés et la résolution du problème est effectuée par le schéma de Roe. La figure 4.21 illustre les maillages utilisés ainsi que les résultats pour la densité. Les erreurs globales exactes sont présentées au tableau 4.15, tandis que les erreurs globales estimés sont présentées au tableau 4.16. Les taux de convergence sont calculés en utilisant la norme L_1 ou la norme L_2 . Les valeurs sont plus petites que 1, fait qui est peut-être dû à la présence des ondes de choc, en supposant qu'à l'intérieur d'une onde de choc le taux de convergence locale est beaucoup diminué. Pourtant, la raison pour laquelle le taux calculé en utilisant la norme L_1 est deux fois plus grand que celui calculé en utilisant la norme L_2 demeure toujours inconnue. On observe qu'il y a des différences plus significatives (par rapport aux problèmes présentés auparavant) entre les résultats exacts et nos estimations, surtout lorsqu'on utilise la norme L_2 . Les taux de convergence estimés sont aussi plus petits que les taux exacts. Cependant, la figure 4.22 montre que la distribution de l'erreur estimée ressemble beaucoup à celle de l'erreur exacte.

Afin d'augmenter la précision de l'estimateur et, en même temps, la qualité de la solution numérique, une procédure d'adaptation du maillage sera utilisée. Cela va mettre en évidence le couplage qui existe entre la procédure d'estimation de l'erreur et celle d'adaptation du maillage.

Ordre 1		
Maillage	L_1	L_2
Maillage ₁	4.1330E-2	6.1994E-2
Maillage ₂	2.6738E-2	4.7639E-2
Maillage ₃	1.5280E-2	3.6470E-2
Convergence	taux $p \approx 0.7$	taux $p = 0.38$

Tableau 4.15: Les erreurs globales exactes

Ordre 1		
Maillage	L_1	L_2
Maillage ₁	8.41E-2	0.242
Maillage ₂	6.14E-2	0.208
Maillage ₃	4.49E-2	0.168
Convergence	taux $p = 0.451$	taux $p = 0.22$

Tableau 4.16: Les erreurs globales estimées

4.3.3 Adaptation du maillage

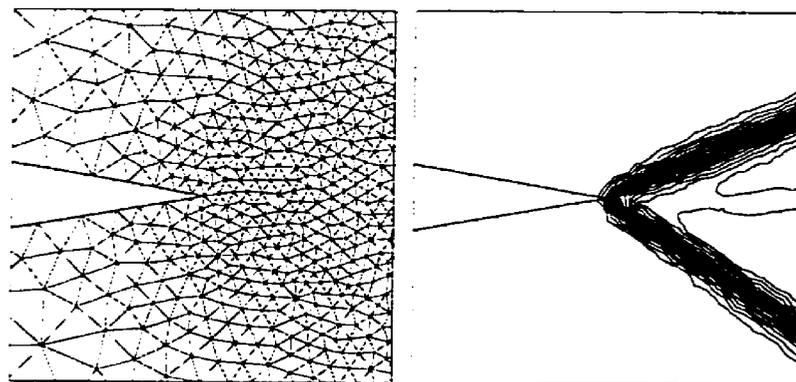
On présente l'adaptation du maillage en fonction des caractéristiques de la solution. On utilisera la méthode basée sur l'estimateur d'erreur présenté auparavant. Le maillage initial est un maillage non-uniforme qui contient 7360 noeuds et 14450 éléments. Les deux autres maillages utilisés pour faire les estimations ont 1856 noeuds et 3575 éléments, et 507 noeuds et 945 éléments (voir la figure 4.21). On va tenter de réduire l'erreur d'un facteur $\epsilon = 0.7$ à chaque étape adaptative.

Cependant, à chaque étape adaptative, il faut créer deux autres maillages, plus

grossiers, à partir de celui le plus fin et semblables à celui-ci. Le facteur de grossissement utilisé est approximativement égal à 2. Ces deux maillages seront utilisés lors du processus d'estimation de l'erreur sur le maillage le plus fin.

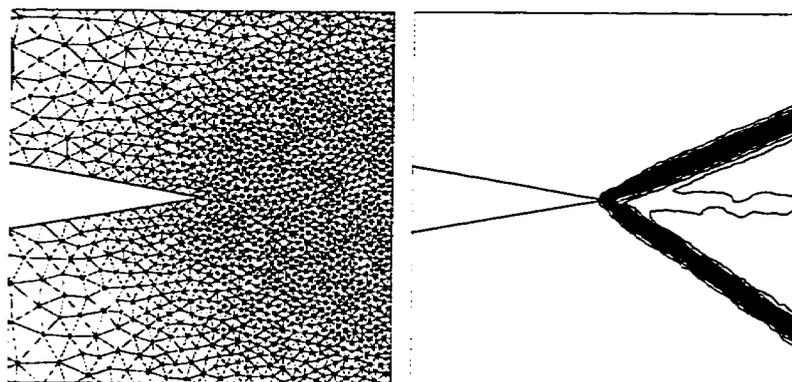
Après le premier cycle d'adaptation, le maillage obtenu a 5706 noeuds et 11319 éléments. Ce maillage et les deux autres qui seront utilisés au cycle suivant d'adaptation sont présentés à la figure 4.23, tandis que les erreurs exactes et estimées sont présentées au tableau 4.17. Même si le nombre d'éléments du maillage adapté est plus petit que celui du maillage initial, l'erreur globale est diminuée d'un facteur $\epsilon \approx 0.76$, ce qui se trouve dans le voisinage de celui prévu ($\epsilon_{\text{prévu}} = 0.7$). De plus, la précision de l'estimateur d'erreur augmente pour les solutions obtenues sur les maillages adaptés. Cette affirmation est aussi illustrée par la figure 4.27 qui présente les erreurs globales exactes et estimées en fonction du nombre d'éléments, avant et après l'adaptation du maillage.

En utilisant la même procédure d'adaptation, cette fois appliquée aux maillages obtenus après le premier cycle d'adaptation, on va obtenir un nouveau maillage adapté présenté à la figure 4.25. Ce maillage contient 5624 noeuds et 11211 éléments. On remarque que le nombre d'éléments du maillage adapté est encore plus petit que celui obtenu après le premier cycle d'adaptation, tandis que l'erreur globale exacte ($2.452\text{E-}2$ pour la norme L_2) est diminuée d'un facteur $\epsilon \approx 0.85$. La distribution de la densité et les erreurs exactes en densité sont illustrées à la figure 4.26.



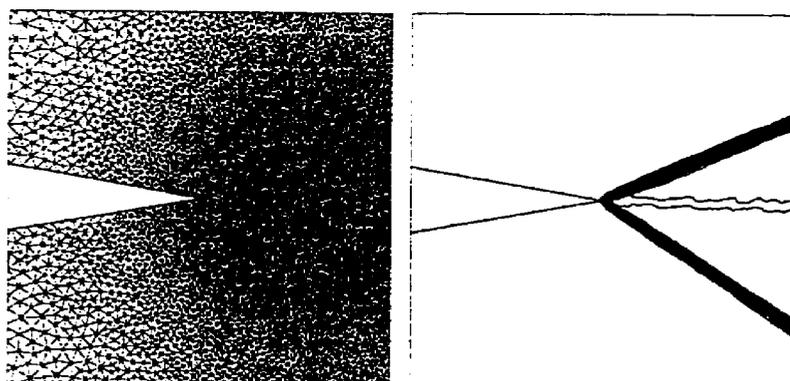
éléments: 945

min.: 1.00 ; max.: 1.465



éléments: 3575

min.: 1.00 ; max.: 1.468



éléments: 14450

min.: 1.00 ; max.: 1.470

a) maillages

b) distribution de la densité

Figure 4.21: Maillages utilisés et distribution de la densité en utilisant le schéma de Roe

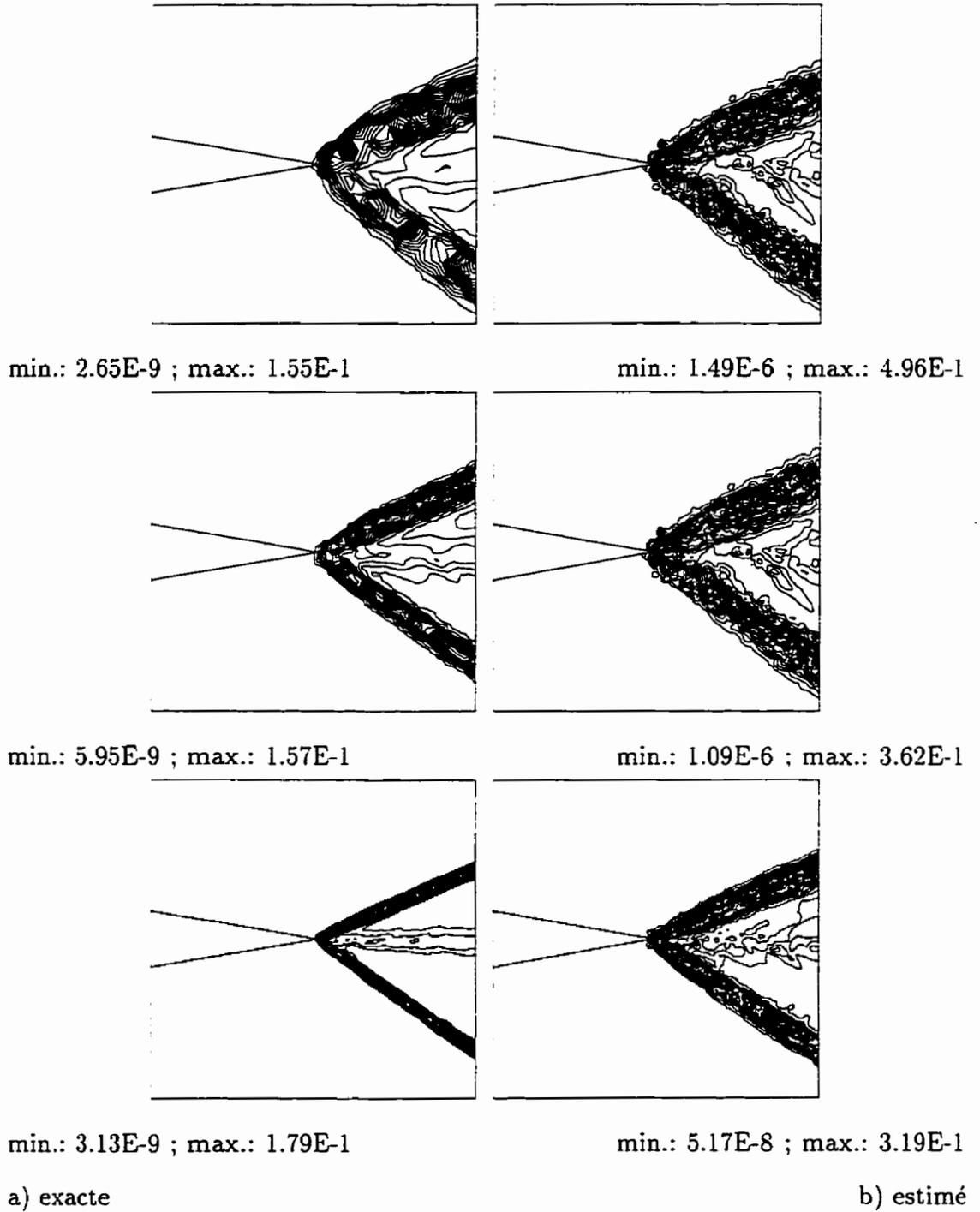
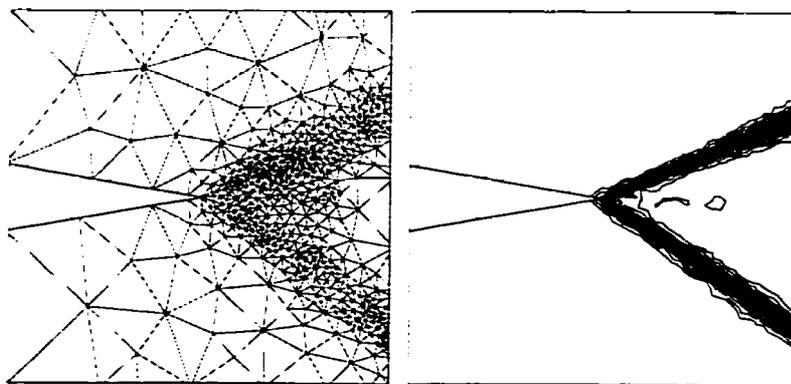
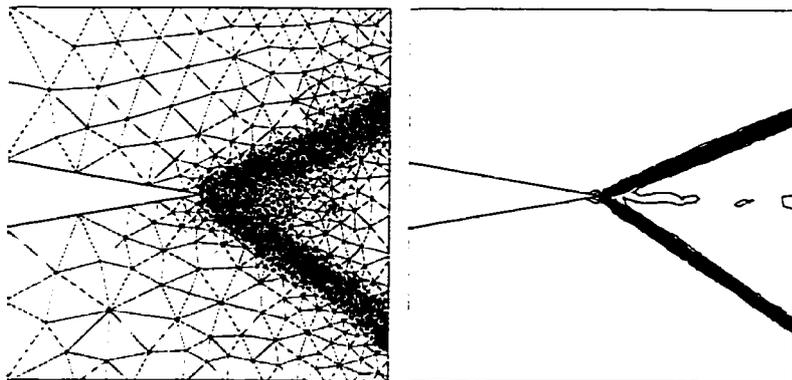


Figure 4.22: La distribution de l'erreur en densité pour le schéma de Roe



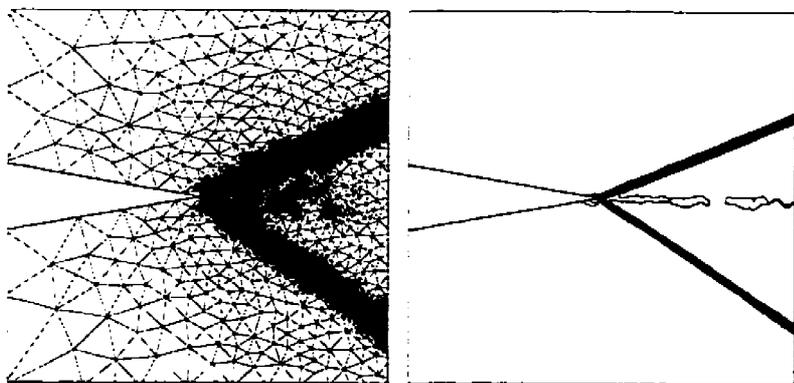
éléments: 1151

min.: 1.00 ; max.: 1.466



éléments: 3627

min.: 1.00 ; max.: 1.467



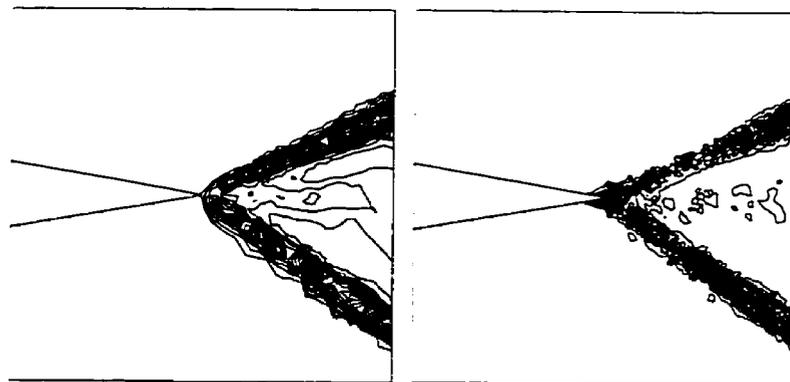
éléments: 11319

min.: 1.00 ; max.: 1.469

a) maillages

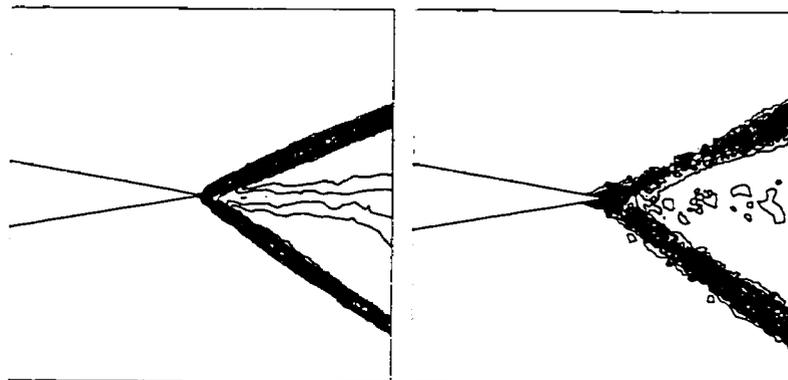
b) distribution de la densité

Figure 4.23: Maillages obtenus après un cycle d'adaptation et distribution de la densité pour le schéma de Roe



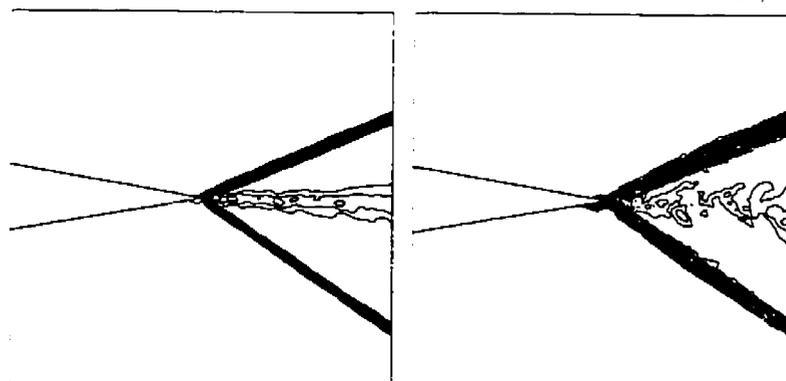
min.: $8.37E-6$; max.: $2.52E-1$

min.: $1.42E-7$; max.: $5.35E-1$



min.: $4.36E-6$; max.: $2.15E-1$

min.: $9.26E-8$; max.: $3.49E-1$



min.: $4.10E-9$; max.: $1.87E-1$

min.: $1.56E-7$; max.: $2.37E-1$

a) exacte

b) estimé

Figure 4.24: La distribution de l'erreur en densité après un cycle d'adaptation pour le schéma de Roe

Maillage	Erreurs exactes	Erreurs estimées
Maillage ₁	4.7852E-2	8.7974E-2
Maillage ₂	3.7125E-2	5.7460E-2
Maillage ₃	2.8110E-2	3.7666E-2
Convergence	taux p = 0.4	taux p = 0.74

Tableau 4.17: Les erreurs globales exactes et estimées (les normes L_2) pour différents maillages non-structurés après le premier cycle d'adaptation

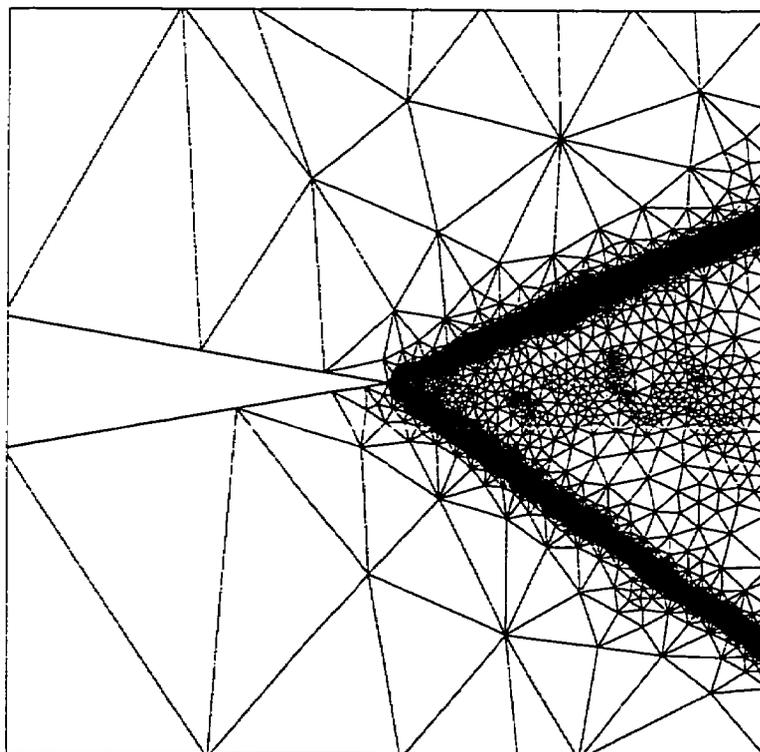
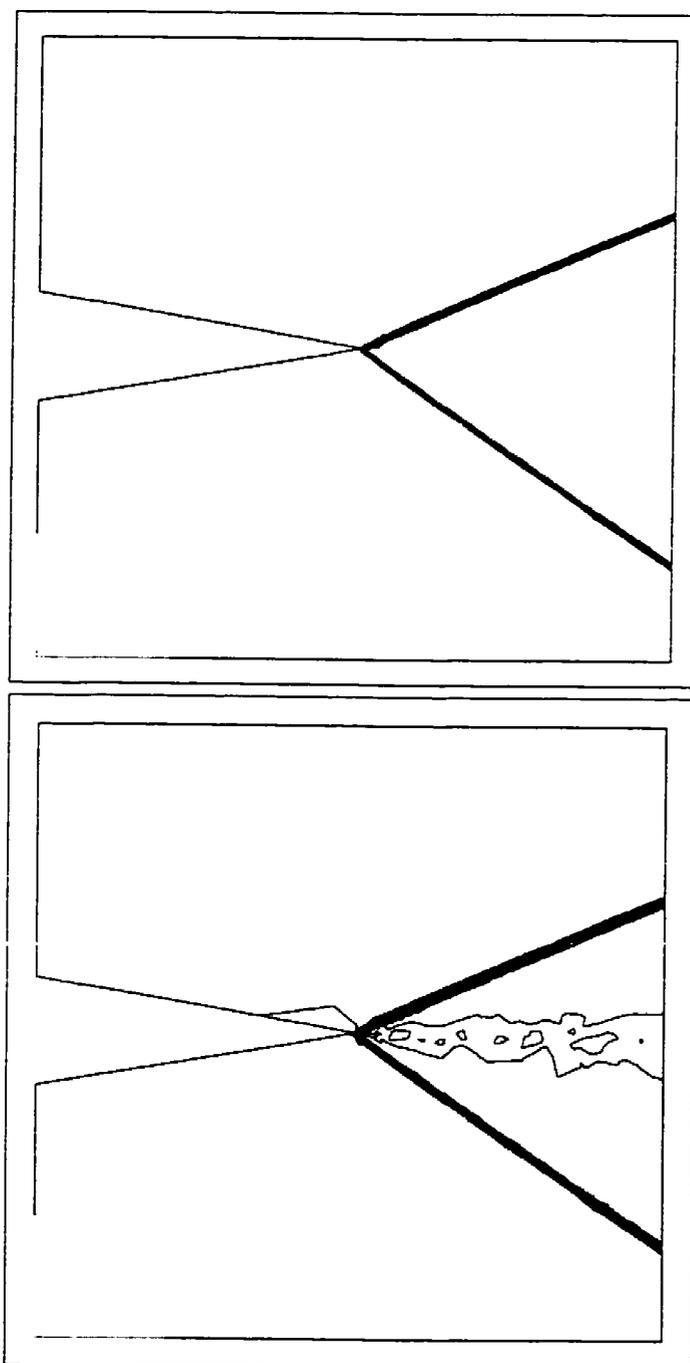


Figure 4.25: Maillage obtenu après deux cycles d'adaptation



a) dens.(min.:1.00 ; max.:1.47)

b) erreur(min.:7.5E-12 ; max.:2.3E-1)

Figure 4.26: La distribution de la densité et de l'erreur exacte en densité après deux cycles d'adaptation

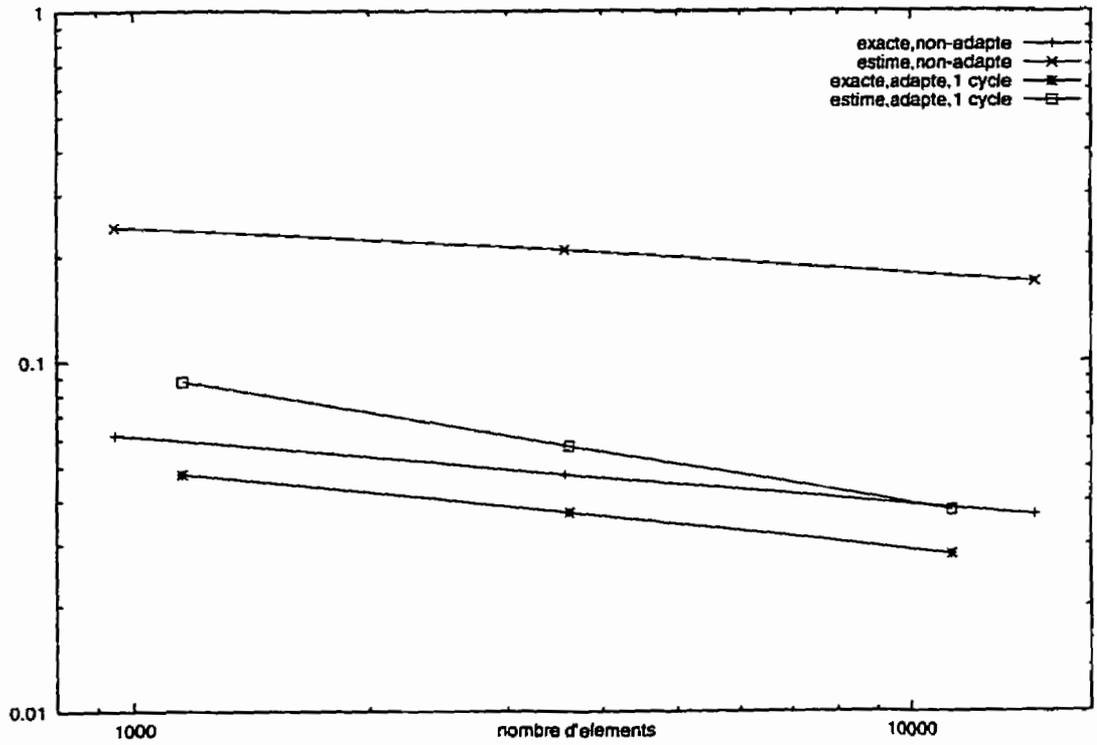


Figure 4.27: Les erreurs globales exactes et estimées en norme L_2 en utilisant le schéma de Roe

4.4 Résultats pour un écoulement autour du profil NACA-0012

Le dernier test consiste à simuler un écoulement autour du profil NACA – 0012 pour un nombre de Mach à l’infini égal à 0.8 et avec un angle d’incidence égal à 0. La figure 4.28 illustre le domaine de calcul et les maillages initiaux utilisés (‘zoom’ sur le profil). La frontière numérique du domaine est un cercle de rayon égal à 20 cordes. Sur la circonférence de ce cercle, nous imposons des conditions aux limites de type infini. La simulation expérimentale d’un tel écoulement a montré l’existence d’une onde de choc.

La résolution du problème est effectuée par le schéma de Roe. Le maillage initial est un maillage non-uniforme qui contient 2883 noeuds et 5576 éléments. Les deux autres maillages utilisés pour faire les estimations ont 1579 noeuds et 3021 éléments, respectivement 812 noeuds et 1529 éléments et sont illustrés sur la figure 4.28. Les erreurs globales estimées en norme L_2 sont présentées au tableau 4.18. En utilisant la méthode d’adaptation basée sur l’estimateur d’erreur présenté auparavant, le maillage obtenu après l’adaptation a 6100 noeuds et 12032 éléments. L’erreur globale estimée sur le maillage le plus fin est diminuée d’un facteur $\epsilon \approx 0.613$, ce qui se trouve dans le voisinage de celui prévu ($\epsilon_{prévu} = 0.7$), même un peu plus petit (voir le tableau 4.19). La distribution de la densité sur les maillages adaptés est illustrée à la figure 4.29. En regardant la figure 4.30, on remarque que l’estimateur d’erreur prédit une erreur plus uniforme pour les solutions obtenues sur les maillages adaptés. À l’étape suivante d’adaptation, le maillage obtenu a presque le même nombre d’éléments que le précédent (voir la figure 4.32). La distribution de la

densité ainsi qu'un 'zoom' sur le maillage adapté près du profil sont présentés à la figure 4.31.

Maillage	Erreurs estimées
Maillage ₁	9.1765E-2
Maillage ₂	7.7950E-2
Maillage ₃	6.7303E-2
Convergence	taux p = 0.479

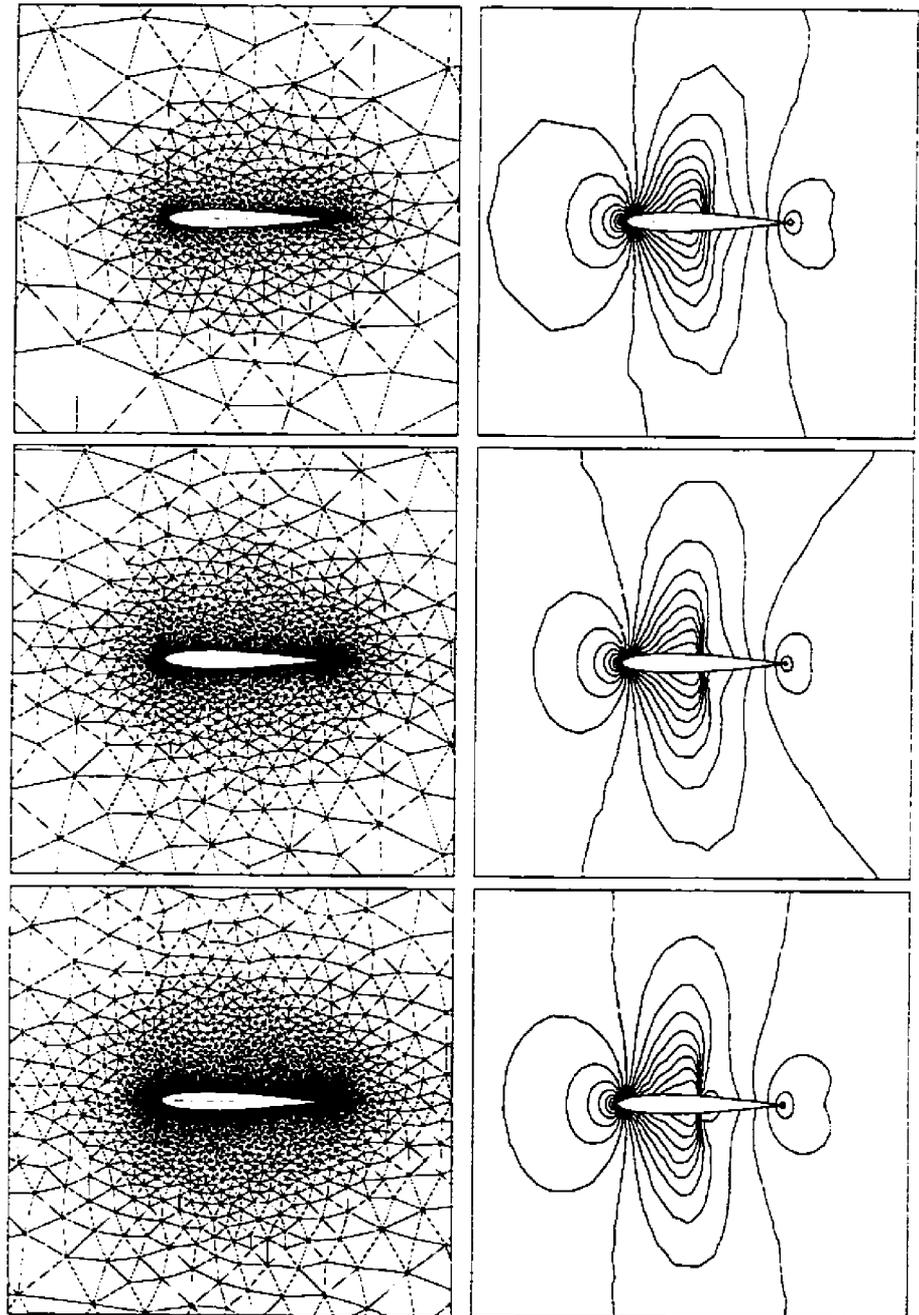
Tableau 4.18: Les erreurs globales estimées en norme L_2 sur différents maillages non-structurés initiaux

Maillage	Erreurs estimées
Maillage ₁	6.4934E-2
Maillage ₂	5.1715E-2
Maillage ₃	4.1261E-2
Convergence	taux p = 0.675

Tableau 4.19: Les erreurs globales estimées en norme L_2 sur les différents maillages non-structurés après le premier cycle d'adaptation

On constate que lorsqu'on raffine le maillage dans le voisinage de l'onde de choc, celle-ci se déplace vers l'arrière. Après un cycle d'adaptation la position du choc était à $\frac{x}{c} = 0.48$, tandis qu'après deux cycles d'adaptation la position du choc est à $\frac{x}{c} = 0.495$. Cela est dû au fait que le facteur de raffinement est trop élevé pour une seule étape d'adaptation. Donc, pour aboutir à un maillage précis (compte tenu de l'influence du maillage sur la qualité de la solution), on devrait faire encore plus de cycles d'adaptation avec des facteurs de raffinement plus petits pour ne pas avoir

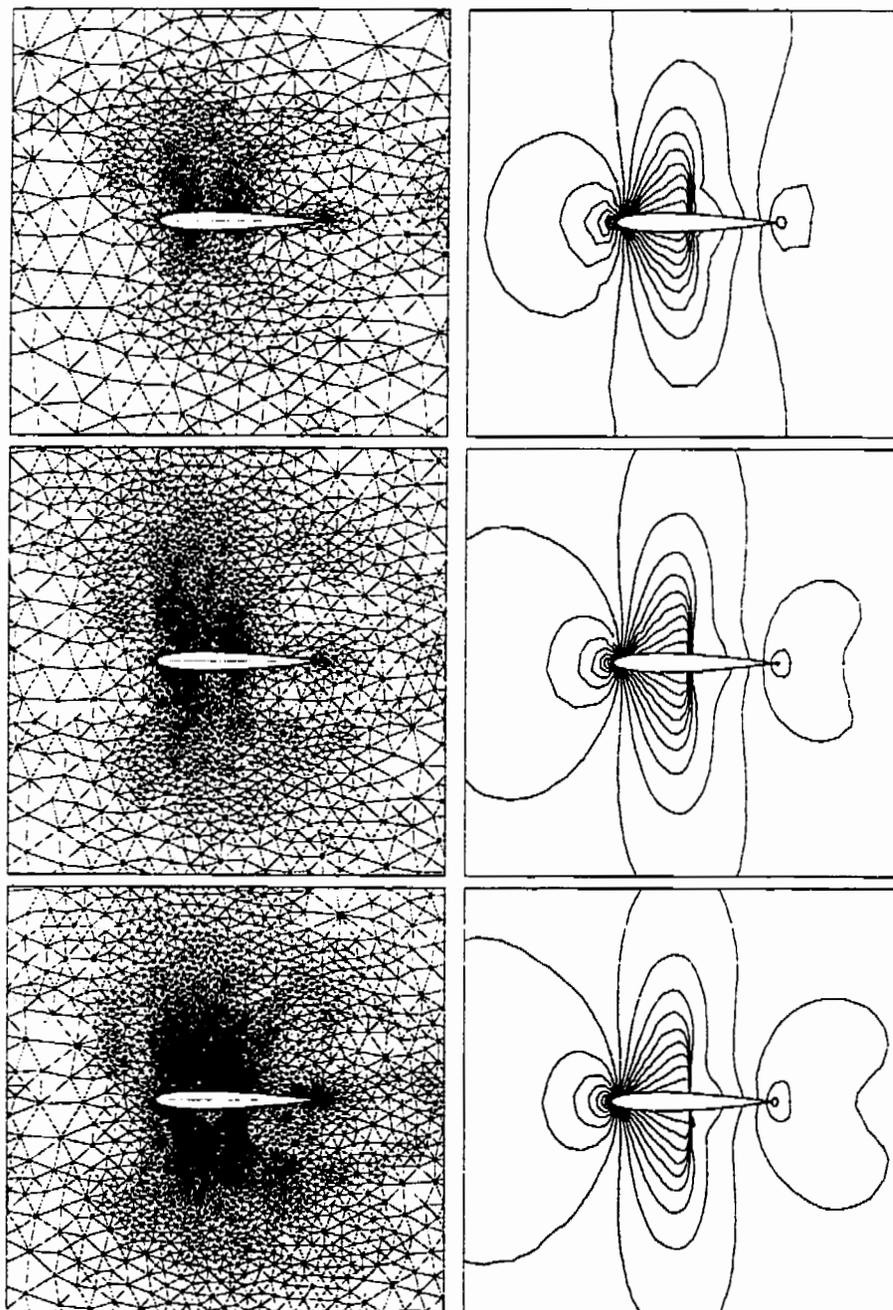
d'oscillations du maillage d'une étape à l'autre. En tenant compte que cela implique un travail très long et que la qualité de la solution est déjà fortement supérieure à celle initiale, on s'est arrêté après les deux cycles d'adaptation déjà présentés.



a) maillages

b) distribution de la densité

Figure 4.28: Maillages initiaux et distribution de la densité pour le schéma de Roe



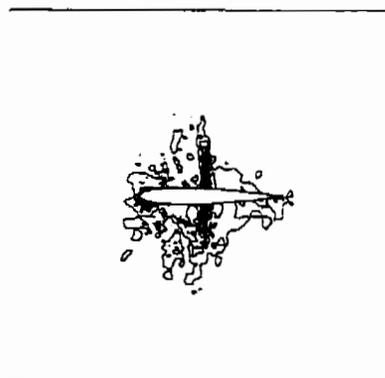
a) maillages

b) distribution de la densité

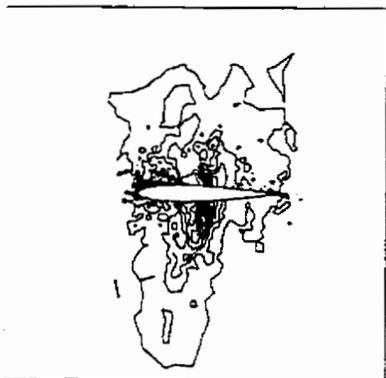
Figure 4.29: Maillages obtenus après un cycle d'adaptation et distribution de la densité pour le schéma de Roe



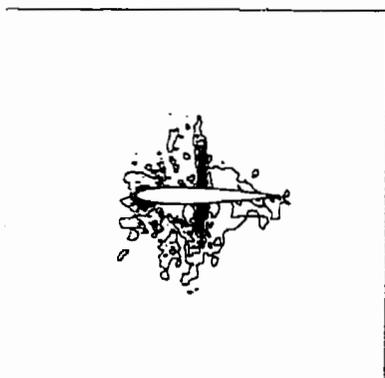
min.: 3.68E-6 ; max.: 4.34E-1



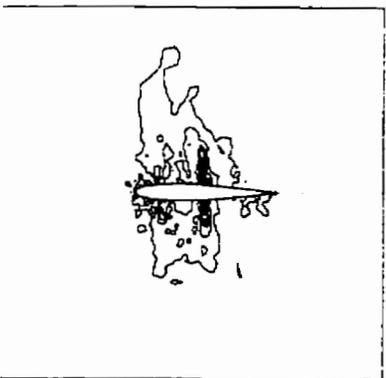
min.: 6.71E-5 ; max.: 5.86E-1



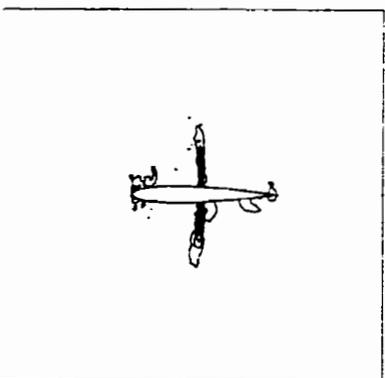
min.: 3.13E-6 ; max.: 3.68E-1



min.: 5.34E-5 ; max.: 4.67E-1



min.: 5.81E-7 ; max.: 5.17E-1

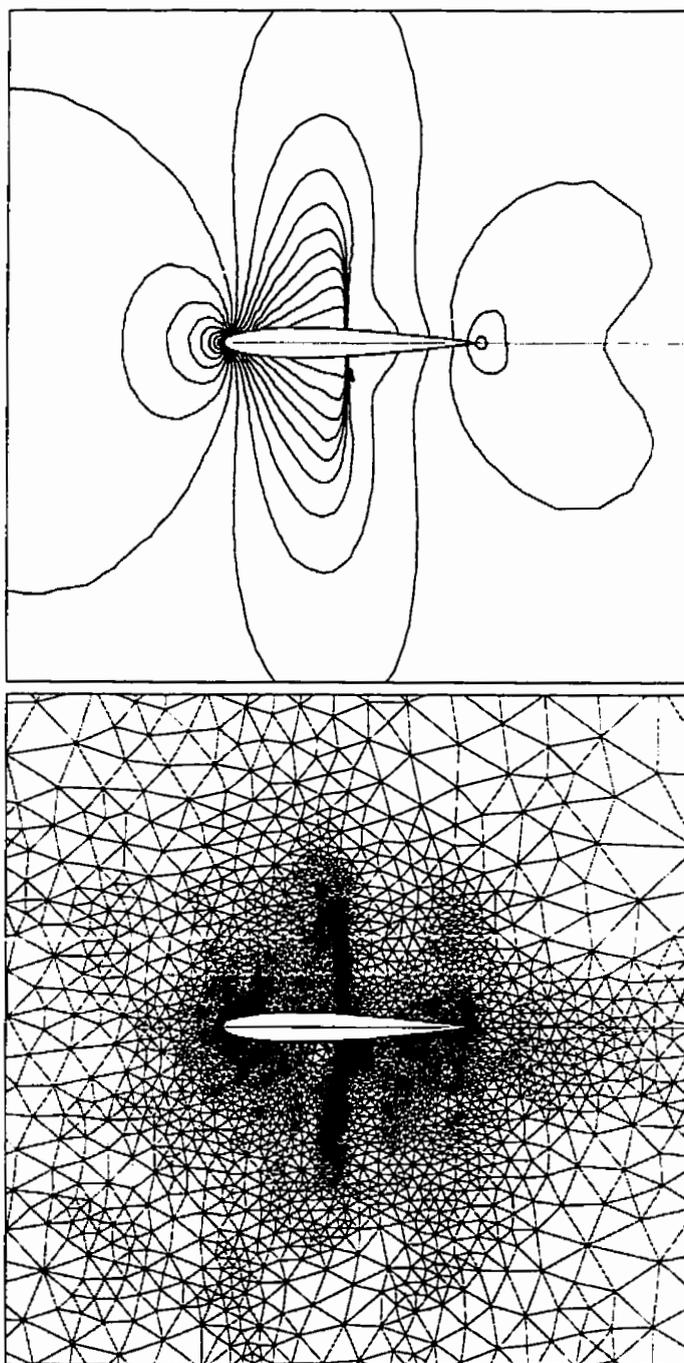


min.: 4.73E-5 ; max.: 5.54E-1

a) maillages initiaux

b) maillages adaptés

Figure 4.30: Les distributions de l'erreur sur les maillages initiaux et après un cycle d'adaptation



a) densité (min.: $5.07E-1$; max.: $9.73E-1$)

b) maillage ("zoom")

Figure 4.31: La distribution de la densité et le maillage après deux cycles d'adaptation

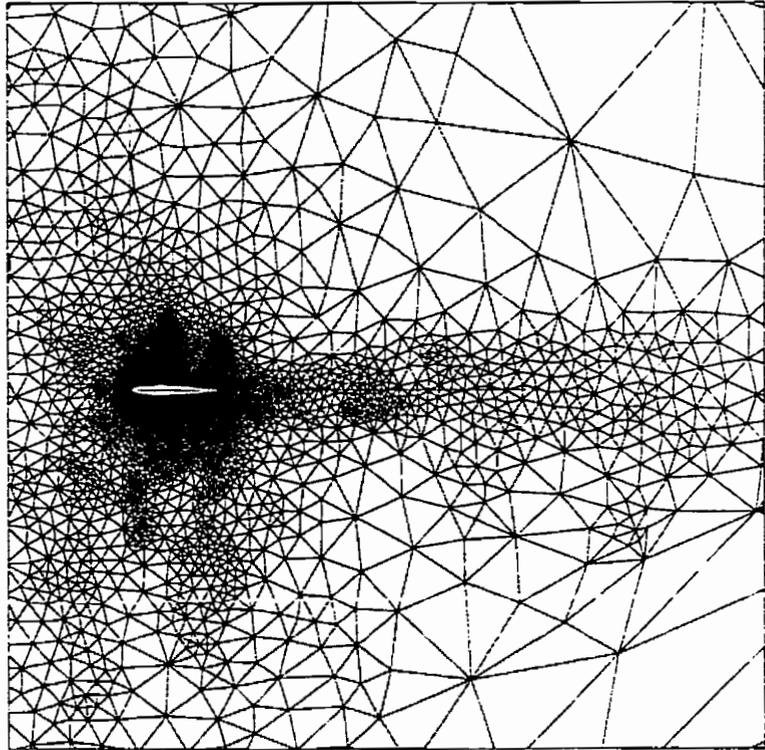


Figure 4.32: Maillage obtenu après deux cycles d'adaptation (vue générale)

Chapitre 5

Conclusion

L'objectif principal de cette étude était le développement d'une méthode d'estimation d'erreur basée sur la technique d'extrapolation de Richardson [20], [21], appliquée aux écoulements régis par les équations de Euler. La stratégie numérique de résolution utilisée a consisté à discrétiser les équations d'Euler par volumes finis, à l'aide d'éléments triangulaires, et en utilisant le schéma de Roe. L'extension du schéma de Roe au deuxième ordre a été réalisée par une reconstruction de la solution supposée constante sur chaque élément par une autre linéaire.

La procédure de calcul ainsi développée a été validée sur quelques tests pour lesquels on disposait de solutions analytiques: un écoulement supersonique sans ondes de choc (vortex supersonique), un écoulement supersonique avec ondes de choc (problème de confluence) et un écoulement compressible subsonique (problème de Ringleb). On propose aussi une procédure d'adaptation du maillage utilisant une analyse d'erreur de la solution. Pour ces problèmes, des comparaisons avec

les solutions analytiques ont été faites et, en général, une bonne concordance a été observée entre nos prédictions et les résultats analytiques. Finalement, on a simulé un écoulement autour du profil **NACA – 0012**. Les prédictions numériques pour cet écoulement ont montré encore une fois que le couplage entre l'estimateur d'erreur et l'adaptation permet d'améliorer les solutions.

Il demeure quelques anomalies que l'étude de convergence a fait apparaître, à savoir:

- *Le taux de convergence varie avec le raffinement du maillage d'une paire de maillages à l'autre.*
- *Les valeurs observées du taux de convergence sont parfois plus petites que celles prédites par la théorie.*
- *Le taux calculé en utilisant la norme L_1 est parfois différent de celui calculé en utilisant la norme L_2 .*

Ceci démontre que certaines améliorations sont nécessaires afin d'augmenter la précision des calculs. Parmi ces améliorations, on peut citer:

- *Augmenter la précision de la solution analytique (y compris la construction du domaine de calcul).*
- *Améliorer l'implantation des conditions aux limites pour le schéma d'ordre 2, surtout sur les frontières solides.*

En conclusion, la méthode d'estimation d'erreur basé sur la technique d'extrapolation de Richardson représente un chemin très simple vers une bonne prédiction de

l'erreur dans une solution numérique. La précision des estimations est moins bonne pour les schémas d'ordre 2; ceci est probablement dû à la technique d'interpolation linéaire de la solution d'un maillage à l'autre. Une des améliorations envisageables pour cette technique est l'utilisation de 'points Gauss' lors du transfert de la solution sur les éléments du maillage fin. Cependant, le comportement général demeure bon. De plus, cette technique ne demande pas de grandes ressources informatiques parce que seulement des maillages plus grossiers sont utilisés lors du processus d'estimation de l'erreur.

A la suite de ce travail, des extensions de la méthode d'estimation d'erreur sont envisageables. L'une de ces extensions est l'utilisation de l'estimateur pour les maillages multigrilles agglomérés. Ceci permettrait d'économiser sur la résolution et la construction des maillages grossiers car les maillages agglomérés sont construits automatiquement par la procédure de multi-grille. On peut aussi envisager des améliorations pour la procédure d'adaptation du maillage. Le nombre d'éléments du domaine pourrait être minimisé par l'utilisation de triangles élancés suivant la direction du choc ou suivant la direction d'écoulement dans les zones où il n'y a pas de choc.

Références

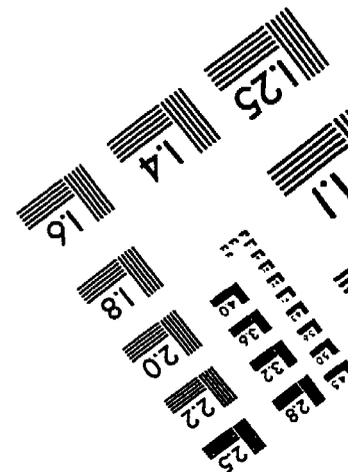
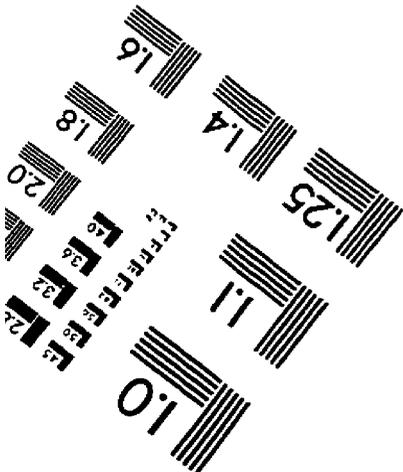
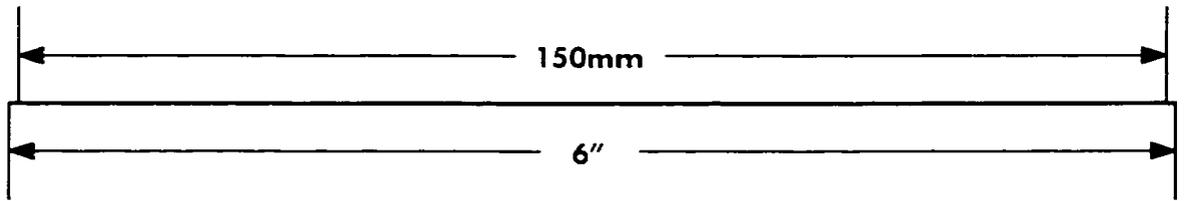
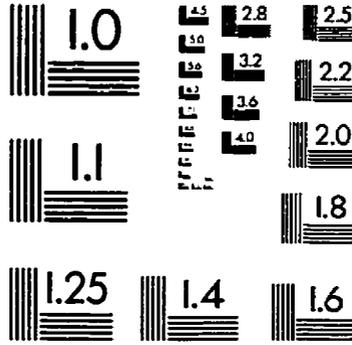
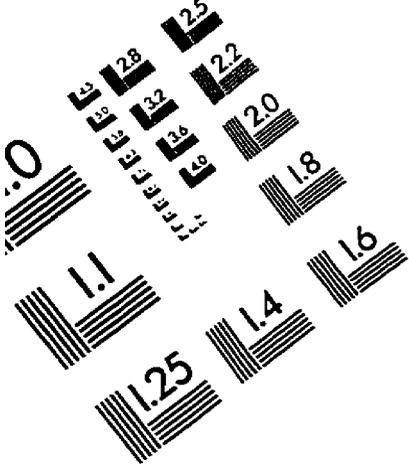
- [1] AFTOSMIS, M., GAITONDE, D. et SEAN TAVARES, T. (1994) On the accuracy, stability and monotonicity of various reconstruction algorithms for unstructured meshes. *AIAA - 32rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, US, AIAA-94-0415.
- [2] ANDERSON, J.D. Jr. Modern compressible flow: With historical perspective. *McGraw-Hill, second edition*, 1993
- [3] BARTH, T.J., JESPERSEN, D.C. The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes. *AIAA Paper 89-0336*, January 1989
- [4] COURANT, R., ISAACSON, E. et REES, M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences *Comm. Pure App. Math.* 5, 1952
- [5] ENQUIST, B., OSHER, S. Stable and Entropy Satisfying Approximation for Transonic Flow Calculations. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 34, 1980
- [6] HARTEN, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, 1983

- [7] GODUNOV, S.K. A Finite Difference Method for the Numerical Computation of discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics. *Mat. Sb.* 47, 1959
- [8] ILINCA, A. Calcul des écoulements compressibles tridimensionnels sur des maillages en mouvement et adaptatifs. *École Polytechnique de Montréal*, Thèse de doctorat, 1994
- [9] ILINCA, F. Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents. *École Polytechnique de Montréal*, Thèse de doctorat, 1996
- [10] JAMESON, A. The evolution of computational methods in aerodynamics. *Technical Report MAE 1608*, Princeton University, 1983
- [11] JAMESON, A. Solution of the Euler Equations by a Multi-Grid Method. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 13, 1983
- [12] MENG-SING LIOU, CHRISTOPHER J. STEFFEN, JR. A new flux splitting scheme. *NASA Technical Memorandum 104404*, May 1991
- [13] MOLENBROEK P. Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeits-potentials. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Grunert Hoppe, Reihe 2, Bd.9, 1890
- [14] NAKAHASHI, K. and DEIWERT, G.S. Three dimensional adaptive grid method. *AIAA Journal*, Vol. 24, 1986.
- [15] NI, R.H. A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations. *AIAA Journal*, Vol. 20, 1982

- [16] NORTON, K.W. and SULI, E. A Posteriori and A Priori Error Analysis of Finite Volume Methods. *In the Mathematics of Finite Elements and Applications*, Edited by J.R. Whiteman, John Wiley Sons Ltd., 1994
- [17] OLLIVIER-GOOCH, C.F. (1996) A new class of ENO schemes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction. *AIAA - 34rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, US, AIAA-96-0887.
- [18] PELLETIER, D., ZAKI, A. and FORTIN, A. Adaptive Remeshing for Hyperbolic Transport Problems *Computational Fluid Dynamics*, Vol.3, pp. 79-99, 1994
- [19] PELLETIER, D., IGNAT, L. On the Accuracy of the Grid Convergence Index and the Zhu-Zienkiewicz Error Estimator *Forum on the Quantification of Uncertainty in CFD, Joint ISME, ASME Fluid Engineering Conference*, Aug. 13-18, 1995.
- [20] ROACHE, P.J. (1994) Perspective: A method for uniform reporting of grid refinement studies. *Journal of Fluids Engineering*, september 1994, vol. 116.
- [21] ROACHE, P.J. (1995) Verification of codes and calculations. *AIAA - 26rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, San Diego, CA, US, AIAA-95-2224.
- [22] ROE, P.L. Approximated Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Scheme. *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981.
- [23] ROE, P.L., PIKE, J. Efficient Construction and Utilisation of Approximate Riemann Solutions. *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Vol. 6, 1984.

- [24] STEGER, J.L., WARMING, R.F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods. *Journal of Computational Physics*, Vol 40, 1981.
- [25] STROUBOULIS, T. and ODEN, J.T. A Posteriori Error Estimation of Finite Element Approximations in Fluid Mechanics. *Comm. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 78, pp. 201-242, 1990.
- [26] VAN LEER, B. Flux-vector splitting for the Euler Equations. *Lecture Note in Physics*, Vol. 170, 1982.
- [27] VAN STRAALAN, B.P., SIMPSON, R.B. and STUBLY, G.D. A Posteriori Error Estimation for Finite Volume Simulations of Fluid Flow Transport. *Proceedings of the CFD95 Conference*, Banff, 1995.
- [28] TRÉPANIÉ, J.Y and YANG, H. Adx: Algorithms for adaptive discretisation based on triangular grids. *Technical Report EPM/RT-93/3*, École Polytechnique de Montréal, 1993.
- [29] VENKATAKRISHNAN, V., MAVRIPLIS, D.J. (1995) Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids. *AIAA - American Institute of Aeronautics and Astronautics*, AIAA-95-1705-CP.
- [30] ZIENKIEWICH, O.C., ZHU, J.Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Int. J. Num. Meth. in Engrg.*, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.

TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved