

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ALGORITHMES CONIQUES POUR LA MINIMISATION
QUASICONCAVE

CHRISTOPHE MEYER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

AOÛT 1996



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26427-0

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ALGORITHMES CONIQUES POUR LA MINIMISATION
QUASICONCAVE

présentée par: MEYER Christophe

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. GAUVIN Jacques, Ph.D., président

Mme JAUMARD Brigitte, T.Doctorat T.Hab., membre et directrice de recherche

M. HANSEN Pierre, D.Agr., membre

M. HORST Reiner, Dr.Rer.Mat.Habil., membre externe

REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus vifs vont à ma directrice de recherche Brigitte Jaumard pour de multiples raisons. D'abord pour m'avoir permis de découvrir un nouveau continent, un pays, une province et une ville où il fait bon vivre en me permettant de venir à Montréal pour un premier stage, puis pour m'avoir proposé de faire ce doctorat, avec en prime une aide financière qui m'a permis de m'y consacrer entièrement. Outre l'aide financière, elle m'a également donné les meilleures conditions de travail possibles en les circonstances, une grande liberté de recherche qui m'a permis de prendre confiance en moi, beaucoup de conseils et de discussions utiles, et une aide appréciée en ce qui concerne la rédaction et la mise en forme des résultats. Je la remercie aussi pour avoir réussi à me convaincre de participer activement aux conférences, en commençant par les Journées d'Optimisation, organisées chaque année par le centre, puis FRANCORO à Mons en Belgique et tout récemment l'imposante conférence SIAM à Victoria, dans la magnifique île de Vancouver.

Deux des plus grands spécialistes du domaine, coauteurs d'un livre qui fait référence, sont l'Allemand Reiner Horst et le Vietnamien Hoang Tuy. J'ai eu le grand honneur de voir leur nom associé à cette thèse, de différentes façons. Je remercie Hoang Tuy pour avoir eu la patience de travailler avec moi sur certaines parties de cette thèse au cours de deux séjours à Montréal, et Reiner Horst pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je suis également reconnaissant aux autres membres du jury, Jacques Gauvin et Pierre Hansen (je remercie également ce dernier pour ses conseils durant cette thèse), pour avoir bien voulu se plonger dans cette thèse.

Cette thèse s'est faite au sein du GERAD (Groupe d'Études et de Recherche en

Analyse des Décisions), qui est un centre interuniversitaire en recherche opérationnelle regroupant les chercheurs de l'École des Hautes Études Commerciales, de l'École Polytechnique, de la Faculté d'Administration de l'Université McGill et de l'Université du Québec à Montréal. Je remercie le personnel pour leur disponibilité et leur aide, particulièrement les secrétaires Francine Benoit, Carole Dufour, Nicole Paradis et Christine Picard, aux sourires toujours appréciés. Je tiens également à souligner le travail remarquable des techniciens Guy Bordeleau, Daniel Charbonneau et Pierre Girard du GERAD-CRT (CRT=Centre de Recherche sur les Transports) qui réussissent l'exploit quotidien de faire fonctionner en réseau plus d'une centaine d'ordinateurs de types différents.

Je remercie également les étudiantes avec qui j'ai passé quelques bons moments (trop peu hélas!), en particulier Elisabeth (Bete), Valeria, Irina, Sylvie et Marie-Claude.

Je remercie aussi le personnel administratif de l'École Polytechnique pour leur disponibilité, plus particulièrement Diane, Suzanne et Anne-Marie du Département de Mathématiques et de Génie Industriel, et Louise Grenon du Service des Études Supérieures.

Finalement, rien de tout cela n'aurait été possible sans mes parents, qui m'ont donné la possibilité de faire des études et qui m'ont toujours encouragé, et que je remercie chaleureusement.

RÉSUMÉ

Le problème de minimisation quasiconcave consiste à minimiser une fonction quasiconcave et continue sur un certain domaine convexe, c'est-à-dire à trouver un point de ce domaine de plus basse valeur. Il s'agit d'un problème difficile, qui peut avoir de nombreux minima locaux. Cependant il possède une propriété intéressante qui le rend plus facile à résoudre qu'un problème d'optimisation général, à savoir que le minimum d'une fonction quasiconcave sur un ensemble convexe borné est atteint en un de ses points extrêmes. En particulier, si le domaine est polyédral, cela permet de réduire le problème de minimisation quasiconcave en le calcul d'un nombre fini (mais possiblement très grand) de points. Ce problème est donc intéressant en ce qu'il n'est ni trop facile ni trop difficile. Il constitue de ce fait un tremplin vers l'optimisation de problèmes plus généraux. De plus, malgré son manque de généralité, le problème de minimisation quasiconcave possède un certain nombre d'applications pratiques intéressantes.

Le premier auteur à proposer une méthode de résolution générale du problème de minimisation concave sur un polytope (c'est-à-dire un ensemble convexe borné défini par des contraintes linéaires) est le mathématicien Vietnamien Hoang Tuy en 1964. Sa méthode consiste à recouvrir le polytope de cônes polyédraux dont l'origine commune est un point extrême du polytope. On considère ensuite chaque cône, et on tente de montrer qu'il ne peut pas contenir de solutions meilleures que celles déjà connues. Si on réussit, on élimine le cône; sinon on le subdivise en sous-cônes par un procédé appelé ω -subdivision. En 1973, Zwart montre que l'algorithme tel que proposé peut cycloper et propose une correction, sans toutefois en prouver la convergence. Presque en même temps, dans le cadre de sa thèse de doctorat, Bali propose

un algorithme légèrement différent. Sa preuve de convergence est malheureusement jugée peu concluante. Pour contourner ce problème de convergence, des modifications importantes au processus de subdivision d'un cône sont apportées. Avec ces modifications, il est possible de montrer la convergence de l'algorithme. Malheureusement, ces nouvelles méthodes de subdivisions sont beaucoup moins naturelles que la méthode originelle, et les performances de l'algorithme s'en ressentent. Tuy (1991) a d'une certaine façon résolu ce problème en développant une règle de subdivision qui permet d'utiliser presque toujours des ω -subdivisions. Parallèlement une version de type énumération implicite (*branch-and-bound*) est proposée pour ce type d'algorithme par Thoai et Tuy (1980).

La première partie de cette thèse s'inscrit dans le cadre de ces recherches sur les algorithmes coniques pour la minimisation concave et quasiconcave sur un polytope. Le premier chapitre est consacré à la définition du problème de minimisation quasiconcave et à ses propriétés. Nous rappelons également l'algorithme de Tuy de 1964 et ses différentes extensions.

Dans le deuxième chapitre, nous revisitons la famille des bornes inférieures simpliciales à laquelle appartient la borne inférieure actuellement utilisée dans les algorithmes coniques. Cette borne inférieure est construite à partir d'une valeur γ , par l'entremise des γ -extensions. Jusqu'à présent, cette valeur γ , qui doit être vue comme un objectif que l'on souhaite dépasser, a toujours été choisie égale à la valeur de la meilleure solution rencontrée. Si l'objectif est dépassé, c'est-à-dire si la borne inférieure est supérieure à γ , on peut conclure que le cône courant ne peut pas contenir de meilleure solution que celles déjà connues et l'éliminer. Nous proposons un choix différent de γ , qui consiste à prendre la valeur d'une borne inférieure pour le cône courant, l'objectif étant ici l'amélioration de cette borne. Cette nouvelle façon de voir les choses nous amène à définir la notion de γ -extension inférieure qui diffère de la γ -extension usuelle lorsque la fonction objectif f est constante par endroit. Cette généralisation de la borne simpliciale actuelle ne gomme pas son défaut prin-

cial, à savoir de ne pas être correctement définie lorsque le cône est dégénéré. Ce mauvais comportement à la limite constitue un obstacle important à la preuve de convergence des algorithmes coniques tels que celui proposé par Bali. Il est dû au fait que l'hyperplan définissant cette borne tend à passer par l'origine du cône lorsque le cône tend à devenir dégénéré. Nous montrons que ce problème disparaît lorsque l'hyperplan est astreint à s'appuyer sur tout le polytope plutôt que seulement sur la portion de celui-ci contenu dans le cône. La nouvelle borne inférieure ainsi définie domine la borne actuelle, au sens où elle donne toujours une valeur au moins aussi bonne, parfois meilleure. Curieusement ces deux bornes sont étroitement liées entre elles, les programmes linéaires qui les définissent étant duaux l'un de l'autre. Ce lien permettra par la suite d'utiliser cette nouvelle borne (ou plus précisément l'hyperplan associé) pour prouver la convergence d'algorithmes coniques utilisant la borne inférieure actuelle. Nous considérons ensuite le problème de déterminer l'hyperplan s'appuyant sur le polytope qui donne la meilleure borne simpliciale. Ce problème est réduit à un problème de maximisation quasiconcave, qui peut lui-même être réduit à un problème de maximisation concave lorsque la fonction f est concave. Cette réduction jette un éclairage sur la complexité du calcul de la meilleure borne simpliciale puisqu'une solution approchée du problème de maximisation concave peut être obtenue en temps polynômial. Nous proposons un algorithme pour calculer la meilleure borne, qui tient compte de la structure du problème.

Le chapitre suivant est consacré à la définition d'une nouvelle classe de borne inférieure, appelée bornes double-simpliciales. Cette procédure nécessite la connaissance d'un second cône, qui contient la portion de polytope contenu dans le cône courant. L'idée est d'inscrire cette portion de polytope dans l'union de deux simplexes définis par ces deux cônes et un hyperplan. À nouveau le problème de déterminer l'hyperplan donnant la meilleure borne est considéré et est reformulé en termes de problème de maximisation quasiconcave. Un algorithme pour calculer cette meilleure borne double-simpliciale est également donné. En choisissant adéquatement

le deuxième cône, nous montrons que la borne double-simpliciale peut être vue comme une continuation de la borne simpliciale.

Le quatrième chapitre est consacré aux subdivisions. Nous y établissons le résultat de base pour les ω -partitions, qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour prouver la convergence de trois algorithmes utilisant exclusivement ce type de subdivisions. Nous définissons également un recouvrement minimal de cônes et montrons qu'avec cette procédure de subdivision l'algorithme de Tuy résout correctement les contre-exemples qui lui ont été opposés. Ce recouvrement est utilisé par le dernier algorithme du chapitre suivant.

Dans ce chapitre justement, cinq algorithmes coniques sont proposés et prouvés convergents pour la minimisation de fonction concave ou quasiconcave sur un polytope. Le premier utilise occasionnellement des bisections pour assurer sa convergence. Des résultats numériques préliminaires visant à mesurer l'efficacité des bornes simpliciales et double-simpliciales sont proposés. Ils montrent notamment qu'un calcul approché de la meilleure borne inférieure double-simpliciale réduit significativement le temps nécessaire pour minimiser une fonction concave sur un polytope. Le deuxième algorithme correspond à peu de chose près à celui de Bali. Sa convergence est prouvée dans le cas quasiconcave, ainsi que celle de sa variante de type *branch-and-bound*. Le quatrième algorithme est en quelque sorte le pendant de ce dernier algorithme mais avec des γ -extensions définies à partir d'une borne inférieure plutôt qu'à partir de la meilleure solution connue. Il correspond également au premier algorithme dans lequel aucune bisection ne serait utilisée. Le cinquième algorithme se démarque des 4 autres en ce qu'il utilise des recouvrements de cône plutôt que des partitions. Une procédure anti-cyclage, basée sur la notion de meilleure borne simpliciale est proposée. Les résultats concernant cet algorithme sont très préliminaires mais laissent entrevoir un nouveau type d'algorithme conique, semblable à l'algorithme proposé par Tuy en 1964 mais convergent, qui concentrerait sa recherche sur les points extrêmes du polytope contrairement aux algorithmes coniques actuels.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous considérons la minimisation de la somme d'un produit de fonctions convexes positives et d'une fonction convexe sur un ensemble convexe quelconque mais borné. Ce problème apparaît notamment dans la gestion de portefeuilles boursiers. Sa fonction objectif n'est pas quasiconcave en général; il ne s'agit donc pas d'un problème de minimisation quasiconcave. Nous proposons une reformulation en problème de minimisation quasiconcave sur un ensemble convexe simple, quoique non polyédral et non borné, dans un espace de dimension égale au nombre de fonctions convexes apparaissant dans le produit. La valeur de la fonction objectif de ce problème réduit est obtenue en résolvant un problème de minimisation convexe dans l'espace de départ. Ce problème de minimisation quasiconcave réduit est résolu par un algorithme conique. Une des particularités de ce dernier est que l'origine commune des cônes est choisie à l'extérieur du domaine. Deux bornes inférieures sont développées. La première s'apparente à la borne simpliciale à la différence que la portion de domaine est incluse dans le polyèdre obtenu en coupant du cône courant le simplexe défini par l'hyperplan, plutôt que dans le simplexe lui-même. La deuxième borne requiert une seule évaluation de la fonction objectif du problème réduit, ce qui est appréciable étant donné que chaque évaluation nécessite la résolution d'un problème de minimisation convexe. Malheureusement cette borne n'a pu être développée qu'en dimension 2 (c'est-à-dire pour le cas où deux fonctions apparaissent dans le produit dans la fonction objectif du problème initial). Des résultats numériques sont présentés.

Finalement, nous concluons cette thèse par une série de questions ouvertes, portant plus particulièrement sur la minimisation d'une fonction quasiconcave sur un polytope.

ABSTRACT

The problem of quasiconcave minimization consists in minimizing a quasiconcave continuous function over a convex set, i.e., finding a point of this set of smallest possible value. It is a difficult problem which may have many local minima. Nevertheless it has a nice property that make it more tractable than general optimization problem, namely that the minimum of a quasiconcave function over a bounded convex set is reached at one of its extreme points. In particular, if the set is polyhedral, this allows to solve the quasiconcave minimization problem by computing a finite (but possibly very large) number of points. This problem is thus interesting in that it is not too easy nor too difficult. It also serves as a springboard for handling more complex optimization problems and despite its lack of generality, it has some interesting real world applications.

The first author to propose a general method to solve this problem on a polytope (i.e., a bounded convex set defined by linear inequalities) is the Vietnamese mathematician Hoang Tuy in 1964. His method consists in covering the polytope by polyhedral cones vertexed at an extreme point of the polytope. He considers then each cone and tries to prove that it cannot contain a better solution than the ones at hand. If this test is successful, the cone is eliminated; otherwise it is subdivided into subcones by a process called ω -subdivision. In 1973, Zwart shows that the algorithm can cycle and gives a correction, without proving its convergence. Almost simultaneously, in his Ph.D. thesis, Bali proposes a slightly different algorithm. His convergence proof is unfortunately judged not convincing. In order to alleviate this convergence problem, important modifications in the subdivision process are made. With these modifications, the convergence of the algorithm can be proved. Unfor-

tunately, these new subdivision methods are less natural than the original one, and the practical efficiency of the algorithm is affected. Tuy (1991) in a certain manner solved this problem by developing a subdivision process that "almost always" uses ω -subdivision. In the mean time, a branch-and-bound variant of Tuy's algorithm is developed by Thoai and Tuy (1980).

The first part of this thesis is in line with this research on conical algorithms for the concave and quasiconcave minimization over a polytope. The first chapter is devoted to the definition of the quasiconcave minimization problem and to its properties. We also recall Tuy's algorithm and its various extensions.

In the second chapter, we revisit the class of simplicial lower bounds which contains the lower bound currently used in the conical branch-and-bound algorithms. Such a lower bound is defined with respect to a value γ , by mean of so called γ -extensions. Until now, this value of γ , which should be considered as a goal to surpass, was always chosen as the value of the best known solution. If the goal is surpassed, i.e., if the lower bound is greater than or equal to γ , we can conclude that the cone cannot contain a better solution and eliminate it. We propose a different choice for γ , which consists in taking the value of a lower bound for the current cone. the goal being the improvement of this bound. This new way of defining γ leads us to the definition of a lower γ -extension which differs from the usual γ -extension when f is constant on some part of the optimization domain. This generalization of the existing simplicial lower bound does not eliminate its main drawback, namely that it is not well defined when the cone is degenerated. This bad behavior at the limit constitutes an important obstacle to the proof of the convergence of conical algorithms, like that proposed by Bali. It is due to the fact that the hyperplane defining this lower bound tends to go through the origin of the cone when the cone tends to become degenerated. We show that this problem disappears when the hyperplane is forced to support the whole polytope instead of only the portion of it contained in the cone. The new simplicial lower bound defined in this manner dominates the existing one in the sense that it

always gives a value at least as good, and sometimes strictly better. Strangely, these two lower bounds are strongly related to each other, the linear programs that define them being dual. This relation will allow us to use this new bound (or more precisely the hyperplane associated with it) to prove the convergence of conical algorithms that actually use the existing lower bound. We consider then the problem of determining the hyperplane supporting the polytope that yields the best simplicial lower bound. This problem is reduced to a quasiconcave maximization problem, which itself can be reduced to a concave maximization problem when the function f is concave. This reduction sheds light on the complexity of the computation of the best simplicial lower bound since it is well known that an approximate solution of the concave maximization problem can be computed in polynomial time. We propose an algorithm to compute the best bound, which makes use of the structure of the problem.

The next chapter is devoted to the definition of a new class of lower bounds, called double-simplicial lower bounds. This procedure needs the knowledge of a second cone, which contains the portion of the polytope contained in the current cone. The idea is to include this portion of polytope in the union of two simplices defined by the two cones and by a hyperplane. Again the problem of finding the hyperplane giving the best lower bound is considered and is reformulated as a quasiconcave maximization problem. An algorithm for computing this best double-simplicial lower bound is also given. By choosing adequately the second cone, we show that the double-simplicial lower bound can be seen as a continuation of the simplicial lower bound.

The fourth chapter is devoted to subdivisions. We establish the basic result for ω -partitions, that will be used in the next chapter to prove the convergence of three conical algorithms using exclusively this kind of subdivision. We also define a minimal covering of cone and show that with this subdivision procedure, Tuy's algorithm correctly solves the counter-examples that were opposed to it. This covering is used by the last algorithm presented in the next chapter.

In this next chapter, five conical algorithms are proposed and showed convergent

for the minimization of concave or quasiconcave continuous function over a polytope. The first uses occasionally bisections in order to ensure its convergence. Preliminary numerical results which are aimed to measure the efficiency of simplicial and double-simplicial lower bounds are presented. They show in particular that an approximate computation of the best double-simplicial lower bound significantly reduces the time needed to minimize a concave function over a polytope. The second algorithm corresponds more or less to Bali's one. Its convergence is proved in the quasiconcave case, as well as that of its branch-and-bound variant. The fourth algorithm is in a way the counterpart of this last algorithm but with γ -extensions defined from a lower bound rather than from the value of the best known solution. It also corresponds to the first algorithm in which no bisection is used. The last algorithm differs from the 4 others in that it uses covering of cone rather than partition. An anti-cycling procedure, based on the notion of best simplicial lower bound is proposed. Results concerning this algorithm are very preliminary, but let foresee a new kind of conical algorithm, similar to Tuy's algorithm but convergent, which concentrates its search on the extreme points of the polytope unlike the existing conical algorithms.

In the second part of this thesis, we consider the minimization of the sum of a product of convex positive functions and of an additional convex function over a convex set. This problem appears in particular in bond portfolio optimization. Its objective function is not quasiconcave in general, hence it is not a quasiconcave minimization problem. We propose to reformulate it as quasiconcave minimization problem over a simple convex set, although not bounded and not polyhedral, in a space of dimension equal to the number of functions in the product. The value of the objective function of this reduced problem is obtained by solving a convex minimization problem in the space of the original variables. This quasiconcave minimization problem is solved by a conical algorithm. One of its particularities is that the common origin of the cones is chosen outside the feasible set. Two lower bounds are developed. The first is similar to the simplicial lower bound with the difference that the portion of the domain

is included in the polyhedron obtained by cutting the simplex from the cone, rather than in the simplex itself. The second lower bound requires only one evaluation of the objective function, which is appreciable since each evaluation needs the solution of a convex program. Unfortunately, this bound could be developed only in dimension 2 (i.e., if they are two functions in the product defining the objective function of the original problem). Computational results are presented.

Finally we conclude this thesis with some open questions, concerning more particularly the minimization of a quasiconcave function over a polytope.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	xi
TABLE DES MATIÈRES	xvi
LISTE DES TABLEAUX	xx
LISTE DES FIGURES	xxi
CHAPITRE 1 Introduction	1
1.1 Minimisation concave et quasiconcave	2
1.2 Intérêts	5
1.3 Résultats mathématiques	10
1.4 Algorithme conique de Tuy	14
1.4.1 Idées de base	15
1.4.2 Algorithme	17
1.4.3 Développements	18
1.5 Extensions de l'algorithme conique de Tuy	21
1.5.1 Subdivisions	21
1.5.2 Variante de type <i>branch-and-bound</i>	26
1.5.3 Extensions à des problèmes plus généraux	28
1.5.4 Méthodes de coupes	30

1.5.5	Méthodes d'annexion polyédrale	32
1.6	Autres méthodes pour la minimisation (quasi)concave	34
1.6.1	Méthodes d'énumération	35
1.6.2	Méthodes d'approximations extérieures	36
1.6.3	Méthodes de subdivisions successives	37
CHAPITRE 2 Borne inférieure simpliciale		42
2.1	γ -extensions	43
2.2	Borne inférieure simpliciale	47
2.2.1	Définition	48
2.2.2	Défaut de la borne simpliciale classique	48
2.2.3	Un remède: les hyperplans s'appuyant sur le polytope	51
2.2.4	Nouvelle borne simpliciale	54
2.2.5	Liens avec la borne simpliciale classique	56
2.2.6	Interprétation de ρ	60
2.2.7	Conclusion	64
2.3	Détermination de la meilleure borne inférieure simpliciale	65
2.3.1	Définition	65
2.3.2	Formulation en termes de problème de maximisation quasiconcave	66
2.3.3	Conditions d'optimalité	71
2.3.4	Procédure itérative pour le calcul de la meilleure borne	74
2.3.5	Conclusion	78
2.4	Variation de la borne simpliciale lorsque K varie	79
2.4.1	Variation de la borne simpliciale	79
2.4.2	Relations entre $\hat{\alpha}$, $\tilde{\omega}$ et ρ	82
CHAPITRE 3 Borne inférieure double-simpliciale		85
3.1	Borne inférieure double-simpliciale	85
3.2	Détermination de la meilleure borne inférieure double-simpliciale	88

3.2.1	Formulation en termes de problème de maximisation quasiconcave	89
3.2.2	Condition d'optimalité	92
3.2.3	Procédure itérative pour le calcul de la meilleure borne	94
3.3	Lien avec la borne inférieure simpliciale	97
CHAPITRE 4 Subdivisions		100
4.1	Résultat de base pour les ω -partitions	100
4.2	Recouvrement de cône	103
4.2.1	Recouvrement radial	104
4.2.2	Partition induite	105
4.2.3	Application aux contre-exemples de l'algorithme de Tuy	106
4.2.4	Recouvrement de simplexe	113
CHAPITRE 5 Algorithmes coniques		115
5.1	Algorithme conique de type <i>branch-and-bound</i> avec partition normale	116
5.1.1	Algorithme	117
5.1.2	Convergence	118
5.1.3	Résultats numériques	122
5.2	Algorithme conique avec ω -partitions et γ -extensions calculées à partir de la borne supérieure	127
5.2.1	Algorithme	128
5.2.2	Convergence	129
5.2.3	Variante de type <i>branch-and-bound</i>	131
5.3	Algorithme conique de type <i>branch-and-bound</i> avec ω -partitions et γ - extensions calculées à partir de la borne inférieure	134
5.3.1	Algorithme	134
5.3.2	Convergence	136
5.4	Algorithme conique de type <i>branch-and-bound</i> avec recouvrement	138
5.4.1	Algorithme	138

5.4.2	Procédure anti-cyclage	141
5.4.3	Discussion	147
CHAPITRE 6 Minimisation de la somme d'un produit de fonctions convexes et d'une fonction convexe additionnelle sur un ensemble convexe 150		
6.1	Définition du problème	151
6.2	Reformulation en problème de minimisation quasiconcave	153
6.3	Opérations de base	159
6.3.1	Construction d'un cône initial	159
6.3.2	Subdivisions	163
6.3.3	Bornes inférieures	164
6.3.4	Bornes supérieures	174
6.4	Algorithme	174
6.4.1	Cas général	174
6.4.2	Cas particuliers	178
6.5	Résultats numériques	179
CONCLUSION		186
BIBLIOGRAPHIE		190

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Points extrêmes du problème de Zwart	108
4.2	Cônes générés par l'algorithme de Tuy pour le problème de Zwart . . .	108
4.3	Points extrêmes du problème de Bali	111
4.4	Cônes générés par l'algorithme de Tuy pour le problème de Bali . . .	111
5.1	Temps de calcul	125
5.2	Qualité des bornes	126
6.1	Problèmes-tests	180
6.2	Nombre d'itérations (<i>nb_iter</i>) pour la borne inférieure par plan de coupe	181
6.3	Résultats numériques pour les problèmes de type I	182
6.4	Résultats numériques pour les problèmes de type II	182
6.5	Résultats numériques pour les problèmes de type IO	183
6.6	Résultats numériques pour les problèmes de type II0	183
6.7	Résultats numériques pour les problèmes de type III0	185

LISTE DES FIGURES

1.1	Recouvrement simplicial de Horst, Thoai et De Vries	39
2.1	γ -extension inférieure et fonction quasiconcave	46
2.2	Borne inférieure simpliciale classique	49
2.3	Procédure de calcul de la borne inférieure simpliciale $BIS1(Y)$	50
2.4	Procédure de calcul de la borne inférieure simpliciale $BIS2(Y)$	56
2.5	Bornes inférieures simpliciales classique et nouvelle	57
2.6	Interprétation de ρ pour un cône dégénéré	62
2.7	Différentes meilleures bornes inférieures simpliciales données par les problèmes ($PMBIS$)	71
2.8	Procédure de calcul de la meilleure borne inférieure simpliciale $MBIS$	74
2.9	Non-convergence de la procédure $MBIS$ avec γ -extension supérieure	77
2.10	Contre-exemple pour la Proposition 2.9 avec un hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$	81
3.1	Borne inférieure double-simpliciale	86
3.2	Procédure de calcul de la meilleure borne inférieure double-simpliciale $MBIDS$	95
4.1	Graphe de recherche de l'algorithme de Tuy pour le problème de Zwart	109
4.2	Graphe de recherche de l'algorithme de Tuy pour le problème de Bali	112
4.3	Recouvrement radial de simplexe en dimension 2	113
6.1	Construction d'un cône initial ($k = 2$)	160
6.2	Calcul de la borne inférieure par plan de coupe	167

6.3 Calcul de la borne inférieure simpliciale 170

CHAPITRE 1

Introduction

Ce chapitre est consacré à la définition du problème de minimisation quasiconcave et à une revue des différentes méthodes existantes pour le résoudre, avec un accent particulier sur les algorithmes coniques. Dans la Section 1.1, nous donnons quelques définitions de base et nous définissons les problèmes de minimisation concave et de minimisation quasiconcave. Dans la Section 1.2, nous expliquons pourquoi ces problèmes sont intéressants, sur un plan théorique d'abord avec la possibilité de résoudre des problèmes d'optimisation très généraux, puis sur un plan pratique avec quelques applications. Dans la Section 1.3, nous avons regroupé les résultats mathématiques portant sur les fonctions concaves et quasiconcaves.

Les Sections 1.4 et 1.5 sont consacrées à l'algorithme présenté par Tuy en 1964 pour résoudre le problème de minimisation concave sur un polytope, et à ses dérivés. Les concepts de base sont présentés au fur et à mesure. La recherche d'un minimum local, le calcul d'une partition conique initiale avec origine des cônes en un point extrême du polytope, les γ -extensions, les ω -subdivisions et les coupes de concavité sont tous des éléments de l'algorithme original de Tuy et sont donc présentés dans la Section 1.4.1. Dans la Section 1.5.1, nous passons en revue les procédures de subdivision qui ont été développées pour assurer la convergence de l'algorithme de Tuy. Nous introduisons à cette occasion les notions de partition (exhaustive, normale), de recouvrement et de bisection. Dans la Section 1.5.2, nous présentons la variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme de Tuy et en profitons pour expliquer comment calculer des

bornes inférieures. Dans la Section 1.5.3, nous considérons brièvement le problème de minimisation concave sur un ensemble convexe qui n'est pas nécessairement polyédral. Le concept d' ε -optimalité et le calcul d'une partition conique initiale avec origine des cônes en un point intérieur de l'ensemble convexe sont introduits à ce moment. Finalement, dans la Section 1.6, nous présentons les autres méthodes de résolution du problème de minimisation (quasi)concave (c'est-à-dire celles ne découlant pas de l'algorithme de Tuy de 1964), à savoir les méthodes d'énumération, d'approximations extérieures et de subdivisions simpliciales.

1.1 Minimisation concave et quasiconcave

Dans cette section, nous rappelons les notions d'*ensemble convexe*, de *fonction concave* et *quasiconcave*, nécessaires pour définir les problèmes qui nous intéressent. Le lecteur est supposé familier avec les concepts de continuité et les concepts de base d'analyse convexe (points extrêmes, facettes, hyperplan d'appui, etc ...). Dans le cas contraire, il pourra par exemple se reporter à Luenberger [45] ou à Minoux [48]. On notera par $\text{conv}(E)$, $\text{aff}(E)$, $\text{int}(E)$ et δE respectivement l'enveloppe convexe de l'ensemble E , le sous-espace affine engendré par E , l'intérieur et la frontière de E .

Définition 1.1 *Un ensemble C de \mathbb{R}^n est dit convexe si et seulement si pour tout point x^1 et x^2 de C , le segment $[x^1, x^2]$ est inclus dans C .*

Définition 1.2 *Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite concave si*

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

pour tout $x^1, x^2 \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Définition 1.3 Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite quasiconcave si

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$$

pour tout $x^1, x^2 \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$.

En particulier, toute fonction concave est quasiconcave.

Lorsque nous aurons à parler de fonction ou de problème qui peut être indifféremment concave ou quasiconcave, nous utiliserons le terme générique *quasi(concave)*.

Le concept de concavité est lié à celui, mieux connu, de convexité.

Définition 1.4 Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite quasiconvexe (respectivement convexe) si et seulement si la fonction $-f$ est quasiconcave (respectivement concave).

Dans cette thèse, nous supposons que $X = \mathbb{R}^n$, c.-à-d. que nous considérons des fonctions (quasi)concaves et continues sur tout l'ensemble \mathbb{R}^n .

Le Problème de Minimisation QuasiConcave (*PMQC*) consiste à trouver le *minimum global* d'une fonction quasiconcave et continue f sur un ensemble convexe fermé C . Plus précisément, on cherche un point \bar{x} de C tel que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \text{pour tout } x \text{ de } C.$$

Lorsque C est borné, l'existence de \bar{x} découle du Théorème de Weierstrass (voir par exemple Mawhin [47, p.137]). Si C est non borné, on suppose ici qu'un tel point existe.

Le problème de minimisation quasiconcave est noté:

$$(PMQC) \quad \min_{x \in C} f(x).$$

Le concept de *minimum global* s'oppose à celui de *minimum local*: un point \bar{x} de C est dit minimum local s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \text{pour tout } x \text{ de } B_\varepsilon \cap C$$

où B_ε est la boule de centre \bar{x} et de rayon ε .

Un problème voisin de (PMQC) mais en même temps très différent consiste à maximiser (plutôt que minimiser) une fonction quasiconcave sur un ensemble convexe. Ce problème est mieux connu et est plus facile à résoudre. Il est cependant encore l'objet de nombreuses recherches (voir par exemple Nesterov et Nemirovskii [53]).

À noter que puisque $\max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (-f(x))$ pour toute fonction f et tout domaine D , le problème de minimisation (quasi)concave peut aussi être vu comme un problème de maximisation (quasi)convexe, tandis que le problème de maximisation (quasi)concave peut se reformuler comme un problème de minimisation (quasi)convexe. Par la suite, nous utiliserons les expressions *minimisation (quasi)concave* pour l'objet principal de cette thèse, et *maximisation (quasi)concave* lorsque nous rencontrerons ce problème.

Un cas particulier important du problème (PMQC) est obtenu lorsque C est un polytope $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ (c'est-à-dire un polyèdre borné) où A est une matrice réelle de taille $m \times n$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m . On parle alors de Problème de Minimisation QuasiConcave sur un Polytope (PMQCP).

On définit de façon analogue le Problème de Minimisation Concave sur un Polytope (PMCP).

Dans cette thèse, nous ne faisons aucune hypothèse sur la matrice A (par exemple sur sa densité ou sa structure), ni sur la fonction f autre que la quasiconcavité et la continuité (en particulier, f n'est supposée ni séparable ni différentiable).

Les problèmes (*PMQCP*) et (*PMCP*) sont considérés dans leur généralité dans les Chapitres 2 à 5, tandis qu'une instance particulière du problème (*PMQC*) où C est un ensemble convexe non borné est considérée dans le Chapitre 6.

1.2 Intérêts

Un des intérêts principaux du problème de minimisation quasiconcave est que "presque tous" les problèmes de minimisation peuvent s'y ramener. Pour montrer cela, nous introduisons le concept de *fonction d.c.*: une fonction f est dite d.c. sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il existe deux fonctions f_1 et f_2 convexes sur X telles que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pour tout x de X (à noter que f peut être considérée de façon équivalente comme la différence des deux fonctions concaves $-f_1$ et $-f_2$). L'un des premiers à avoir utilisé ce concept est Landis [44]; voir Tuy [67] pour une récente revue de la littérature sur les fonctions d.c. et leurs applications.

Il se trouve que "presque toutes" les fonctions réelles sont d.c.: par exemple, toute fonction C^2 est d.c., toute fonction obtenue par la composition de fonctions d.c. est encore d.c., l'infimum et le supremum d'une famille finie de fonctions d.c. est d.c., etc (voir par exemple Tuy [67] pour une preuve de ces résultats, et pour d'autres du même genre).

Considérons le problème de minimisation très général suivant

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (1.1)$$

où f et g sont deux fonctions d.c.. Remarquons d'abord que l'hypothèse que le domaine est décrit par une seule contrainte n'est pas restrictive. En effet, supposons que le domaine soit $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ où $g_i, i = 1, \dots, m$ sont

des fonctions d.c.. Alors cet ensemble peut être réécrit $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$ avec $g(x) = \sup_{i=1, \dots, m} \{g_i(x)\}$ et g est une fonction d.c. comme supremum de fonctions d.c..

Le problème (1.1) peut se réécrire

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.c.} & \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \leq t, \end{cases} \end{array}$$

soit encore

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.c.} & \sup\{g(x), f(x) - t\} \leq 0. \end{array} \tag{1.2}$$

La fonction $h : (x, t) \mapsto \sup\{g(x), f(x) - t\}$ est d.c.: soit donc $h_1 - h_2$ une décomposition de h en différence de deux fonctions convexes. Le problème (1.2) se réécrit alors

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.c.} & h_1(x, t) - h_2(x, t) \leq 0, \end{array}$$

soit, en introduisant une deuxième variable supplémentaire u ,

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.c.} & \begin{cases} h_1(x, t) - u \leq 0 \\ u - h_2(x, t) \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

Ce dernier problème est de la forme

$$\begin{array}{ll} \min & cx' \\ \text{s.c.} & x' \in D \setminus \text{int}(C) \end{array} \tag{1.3}$$

où c est un vecteur non nul de \mathbb{R}^{n+2} et D et C sont deux sous-ensembles convexes et fermés de \mathbb{R}^{n+2} , avec $x' = (x, t, u)$, $D = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid h_1(x, t) - u \leq 0\}$ et

$$C = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid h_2(x, t) - u \leq 0\}.$$

Pour simplifier, supposons que D est polyédral. Si la solution optimale du programme linéaire $\min_{x' \in D} cx'$ n'appartient pas à $\text{int}(C)$, le problème (1.3) est résolu. Sinon, en prenant comme nouvelle origine cette solution optimale, on peut supposer que $0 \in D \cap \text{int}(C)$ et que $0 = \min\{cx' \mid x' \in D\}$. Son dual (voir Tuy [67] pour une définition de la dualité en optimisation globale) est alors le problème de minimisation quasiconcave

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(y) \\ \text{s.c.} \quad & y \in C^* \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $\varphi(y) = \min\{cx' \mid x' \in D, x'y \geq 1\}$ est une fonction quasiconcave et $C^* = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} \mid yx' \leq 1 \forall x' \in C\}$ un ensemble convexe. On peut montrer (voir par exemple Tuy [67]) que les problèmes (1.3) et (1.4) ont même valeur optimale.

Le problème (1.4) peut être résolu par n'importe quel algorithme conique pour la minimisation quasiconcave (voir par exemple Tuy [66, p.77]). De plus, le problème primal (1.3), même s'il n'est pas un problème de minimisation quasiconcave puisque le domaine n'est pas convexe, peut être résolu par des algorithmes utilisant essentiellement les mêmes idées que les algorithmes coniques pour la minimisation quasiconcave (voir par exemple Tuy [67]). Le cas où D est un ensemble convexe non polyédral est également pris en compte par ces méthodes primales.

À noter que si dans le problème (1.1), la fonction g est convexe, on obtient directement un problème de minimisation concave en le reformulant de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \min \quad & t - f_2(x) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f_1(x) \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

où $f_1 - f_2$ est une décomposition de la fonction f en différence de deux fonctions convexes.

On peut argumenter que ces réductions conduisent généralement à des domaines

convexes non polyédraux alors qu'une grande part de cette thèse est consacrée à la minimisation quasiconcave sur un polytope. En fait, ce dernier problème intervient comme un problème de base dans les méthodes de résolution du problème de minimisation quasiconcave sur un ensemble convexe puisque ces méthodes consistent généralement à approximer cet ensemble par un polytope, l'approximation étant affinée au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme (voir Section 1.5.3). D'où l'importance de développer des méthodes efficaces pour résoudre le problème de minimisation quasiconcave sur un polytope. On peut donc, d'une certaine façon, établir une hiérarchie des problèmes d'optimisation globale:

- problèmes de minimisation (quasi)concave sur un polytope,
- problèmes de minimisation (quasi)concave sur un convexe quelconque.
- problèmes de minimisation d.c. qui couvrent "presque tous" les problèmes d'optimisation.

À noter cependant que trouver une décomposition d.c. d'une fonction quelconque f reste un problème difficile dans le cas général. On peut cependant obtenir une telle décomposition pour des fonctions particulières (voir par exemple Chen, Hansen, Jaumard et Tuy [11]).

Il est parfois possible de transformer un problème de minimisation qui n'est pas quasiconcave en un problème de minimisation quasiconcave sans avoir à calculer une décomposition d.c.. C'est ce que nous ferons dans le Chapitre 6, pour le problème bien particulier de la minimisation de la somme d'un produit de fonctions convexes et d'une fonction convexe sur un ensemble convexe.

Enfin, il est difficile de clore cette section sans évoquer les applications pratiques de la minimisation (quasi)concave. La plupart des problèmes d'optimisation pratiques sont généralement très complexes, si bien qu'il faudra attendre de disposer de méthodes efficaces pour la minimisation d.c. avant de pouvoir espérer les résoudre par des méthodes d'optimisation globale. Cependant certains d'entre eux peuvent se modéliser sous forme de problèmes de minimisation (quasi)concave ou y être réduits.

C'est le cas par exemple du *problème de production et transport avec coût de production concave*, considéré par Tuy, Ghannadan, Migdalas et Värbrand [68]. Étant données k usines U^1, \dots, U^k fabriquant un certain produit et m entrepôts E^1, \dots, E^m . on cherche à déterminer le niveau de production y_i de l'usine U^i , $i = 1, \dots, k$ et la quantité de produit x_{ij} transportée de l'usine U^i à l'entrepôt E^j de façon à satisfaire la demande b_j de chaque entrepôt, tout en minimisant le coût total. Ce coût est la somme du coût de production $g(y)$ aux différentes usines et des coûts de transport c_{ij} , supposés linéaires, entre l'usine U^i et l'entrepôt E^j pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, m$. La fonction g est supposée concave, ce qui permet de modéliser les économies d'échelle. Contrairement à la plupart des autres modèles semblables de la littérature, g n'est pas supposée séparable, ce qui permet de prendre en compte des situations telles que l'achat groupé de matériau brut par les usines auprès d'un même fournisseur. Ce problème d'optimisation revient à minimiser une fonction concave sur un polytope:

$$\begin{array}{ll} \min & g(y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i, & i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j, & j = 1, \dots, m \\ y_i \leq s_i, & i = 1, \dots, k \\ y_i, x_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m \end{cases} \end{array}$$

où s_i est la capacité limite de production de l'usine U^i , $i = 1, \dots, k$.

Compte tenu de sa structure particulière, ce problème peut même être résolu en temps fortement polynômial pour k fixé, malgré que le problème de minimisation concave est *NP*-difficile dans le cas général.

Une autre application est le problème de Weber à plusieurs facilités, considéré par Chen *et al.* [11]. Étant donnés n points a^1, \dots, a^n dans le plan, on veut localiser

p points x^1, \dots, x^p de façon à minimiser la somme des distances des points $a^j, j = 1, \dots, n$ au plus proche des $x^i, i = 1, \dots, p$. Par exemple les $a^j, j = 1, \dots, n$ peuvent représenter des habitations et les $x^i, i = 1, \dots, p$ des services (centres d'achat, casernes de pompiers, etc). Ce problème revient à minimiser une fonction d.c. sur un polytope. En appliquant l'une des transformations décrites plus haut, le problème peut être ramené à la minimisation d'une fonction concave sur un ensemble convexe. D'autres applications peuvent être trouvées dans Benson [7].

1.3 Résultats mathématiques

Le résultat le plus important en minimisation quasiconcave est sans aucun doute le suivant.

Proposition 1.1 *Soient X un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiconcave et continue sur X et $C \subseteq X$ un ensemble non-vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n . Alors le minimum global de f sur C est atteint en un point extrême de C .*

Preuve: Puisque f est continue et que C est un ensemble compact, le minimum global de f sur C existe par le Théorème de Weierstrass (voir par exemple Mawhin [47, p.137]). Il suffit de montrer que pour tout point x de C , il existe un point extrême \underline{x} de C tel que $f(x) \geq f(\underline{x})$. D'après le Théorème de Carathéodory (voir par exemple Rockafellar [55]), il existe $n+1$ points extrêmes x^ℓ de C tels que

$$x = \sum_{\ell=1}^{n+1} \eta_\ell x^\ell, \quad \sum_{\ell=1}^{n+1} \eta_\ell = 1, \quad \eta_\ell \geq 0 \quad (\ell = 1, \dots, n+1).$$

Soit \underline{x} satisfaisant $f(\underline{x}) = \min\{f(x^\ell) \mid \ell = 1, \dots, n+1\}$. Puisque f est quasiconcave, on obtient

$$f(x) \geq \min\{f(x^1), \dots, f(x^{n+1})\} = f(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

Puisqu'une fonction concave est quasiconcave, ce résultat s'applique aussi si f est concave et continue. Le résultat suivant montre que l'hypothèse de continuité peut être supprimée dans la mesure où la continuité est une conséquence de la propriété de concavité.

Proposition 1.2 (voir par exemple Benson [7, p.49]). *Soit f une fonction concave définie sur un ensemble convexe X de \mathbb{R}^n . Si $X = \mathbb{R}^n$ ou si X est un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n , alors f est une fonction continue sur X .*

Malgré cette propriété intéressante, le problème de minimisation concave est NP -difficile, même pour le cas particulier de la minimisation d'une fonction concave quadratique sur un hypercube (voir par exemple Kalantari et Bagchi [32]).

Dans cette thèse, nous aurons besoin à l'occasion d'effectuer des opérations sur des fonctions (quasi)concaves. Le résultat suivant découle directement de la définition d'une fonction (quasi)concave.

Proposition 1.3 *Soit f une fonction (quasi)concave définie sur un sous-ensemble convexe X de \mathbb{R}^n , et soit $X' \subseteq X$ un sous-ensemble convexe de X . Alors la fonction $f_{X'}$ qui à tout x de X' associe $f(x)$ est (quasi)concave sur X' .*

En particulier, si $X = \mathbb{R}^n$, f est (quasi)concave sur toute demi-droite.

Proposition 1.4 (voir par exemple Avriel, Diewert, Schaible et Zang [4, Proposition 2.18]). *Soit $f_i, i = 1, \dots, q$ une collection de fonctions quasiconcaves (respectivement concaves) sur un sous-ensemble convexe X de \mathbb{R}^n . Alors la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout x de X par*

$$f(x) = \inf\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, q\}$$

est quasiconcave (respectivement concave) sur X .

Preuve:

Soient x^1, x^2 deux points de X et $\mu \in [0, 1]$. Considérons d'abord le cas où les fonctions $f_i, i = 1, \dots, q$ sont quasiconcaves. On veut montrer que $f(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$.

$$\begin{aligned} f_i(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) &\geq \min\{f_i(x^1), f_i(x^2)\} \\ &\geq \min_{j=1, \dots, q} \{\min\{f_j(x^1), f_j(x^2)\}\} \\ &= \min\{f(x^1), f(x^2)\} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

On en déduit que le minimum du membre de gauche pour $i = 1, \dots, q$ est supérieur à $\min\{f(x^1), f(x^2)\}$, c.-à-d. que $f(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$, ce qui prouve la quasiconcavité de f .

Supposons maintenant que les fonctions $f_i, i = 1, \dots, q$ sont concaves. On veut montrer que $f(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \mu f(x^1) + (1 - \mu)f(x^2)$. Par concavité de f_i , on a

$$\begin{aligned} f_i(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) &\geq \mu f_i(x^1) + (1 - \mu)f_i(x^2) \\ &\geq \mu \min_{j=1, \dots, q} \{f_j(x^1)\} + (1 - \mu) \min_{j=1, \dots, q} \{f_j(x^2)\} \\ &= \mu f(x^1) + (1 - \mu)f(x^2) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

En considérant le minimum du membre de gauche pour $i = 1, \dots, q$, on obtient le résultat voulu. ■

Proposition 1.5 (voir par exemple Avriel et al. [4, Propositions 2.16 et 3.2]). Soit f_1 une fonction réelle et (quasi)concave sur $X \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit f_2 une fonction croissante et (quasi)concave sur l'image de X par f_1 . Alors la fonction composée $f_2 \circ f_1$ est aussi (quasi)concave sur X .

Preuve:

Considérons d'abord le cas concave. Pour tout $x^1 \in X, x^2 \in X$ et $\mu \in [0, 1]$,

on a

$$f_1(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \mu f_1(x^1) + (1 - \mu)f_1(x^2).$$

Puisque f_2 est croissante et concave.

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) &\geq f_2(\mu f_1(x^1) + (1 - \mu)f_1(x^2)) \\ &\geq \mu f_2 \circ f_1(x^1) + (1 - \mu)f_2 \circ f_1(x^2). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas quasiconcave. Pour tout $x^1 \in X$, $x^2 \in X$ et $\mu \in [0, 1]$, on a

$$f_1(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \min\{f_1(x^1), f_1(x^2)\}.$$

Puisque f_2 est croissante,

$$f_2 \circ f_1(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq f_2(\min\{f_1(x^1), f_1(x^2)\}). \quad (1.5)$$

Supposons sans perte de généralité que $f_1(x^1) \leq f_1(x^2)$. Alors le membre de droite de (1.5) est égal à $f_2 \circ f_1(x^1)$ et puisque f_2 est croissante, on a $f_2 \circ f_1(x^1) \leq f_2 \circ f_1(x^2)$. Donc

$$f_2 \circ f_1(\mu x^1 + (1 - \mu)x^2) \geq \min\{f_2 \circ f_1(x^1), f_2 \circ f_1(x^2)\}$$

qui prouve la quasiconcavité de $f_2 \circ f_1$. (À noter que puisque toute fonction croissante sur \mathbb{R} est clairement quasiconcave, l'hypothèse f_2 quasiconcave, qui n'a d'ailleurs pas été utilisée dans la preuve, peut être omise.) ■

Proposition 1.6 Soit f une fonction quasiconcave sur \mathbb{R}^n et soit g la fonction à deux variables α et β définie par

$$g(\alpha, \beta) = f\left(\Omega + \frac{\alpha}{\beta}u\right)$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$ sont fixés.

La fonction g est quasiconcave pour $\alpha > 0, \beta > 0$.

Preuve:

Ce résultat peut s'obtenir comme cas particulier de résultats plus généraux donnés dans Avriel *et al.* [4]. Nous préférons cependant en donner une preuve directe. Il s'agit de montrer que

$$g(\mu\alpha_1 + (1 - \mu)\alpha_2, \mu\beta_1 + (1 - \mu)\beta_2) \geq \min\{g(\alpha_1, \beta_1), g(\alpha_2, \beta_2)\}$$

pour tout $\mu \in [0, 1]$ et pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Sans perte de généralité, supposons que $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2}$. On peut vérifier que pour tout $\mu \in [0, 1]$, on a la double inégalité

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \leq \frac{\mu\alpha_1 + (1 - \mu)\alpha_2}{\mu\beta_1 + (1 - \mu)\beta_2} \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

On en déduit que $\Omega + \left(\frac{\mu\alpha_1 + (1 - \mu)\alpha_2}{\mu\beta_1 + (1 - \mu)\beta_2}\right)u \in \left[\Omega + \frac{\alpha_1}{\beta_1}u, \Omega + \frac{\alpha_2}{\beta_2}u\right]$. Par quasiconcavité de f , on a alors

$$f\left(\Omega + \left(\frac{\mu\alpha_1 + (1 - \mu)\alpha_2}{\mu\beta_1 + (1 - \mu)\beta_2}\right)u\right) \geq \min\left\{f\left(\Omega + \frac{\alpha_1}{\beta_1}u\right), f\left(\Omega + \frac{\alpha_2}{\beta_2}u\right)\right\}$$

ce qui termine la preuve. ■

1.4 Algorithme conique de Tuy

Tuy [62] est le premier à proposer, en 1964, une méthode de résolution générale pour le problème de minimisation concave sur un polytope (*PMCP*). Comme nous le verrons dans cette thèse, plus de 30 ans plus tard, une partie importante des algorithmes actuels de résolution, non seulement des problèmes (*PMCP*) mais aussi de (*PMQCP*) et (*PMQC*), s'inspire directement de ce premier algorithme de Tuy.

Dans la Section 1.4.1 nous donnons les idées de base. L'algorithme est présenté

de façon plus formelle dans la Section 1.4.2. Finalement, dans la Section 1.4.3, nous décrivons brièvement les développements qui ont suivi la publication de cet algorithme et nous situons cette thèse par rapport à ceux-ci.

1.4.1 Idées de base

Le principe de la méthode proposée par Tuy est de recouvrir le polytope P par des cônes polyédraux de même origine dont les directions extrêmes sont déterminées par des points extrêmes de P , et de prouver qu'aucun de ces cônes ne peut contenir une meilleure solution que la meilleure solution connue.

Supposons que le polytope soit non-dégénéré. On commence par chercher un minimum local x^0 de la façon suivante. Par n'importe quelle technique de programmation linéaire, on détermine un point extrême de P initial. On se déplace ensuite vers un point extrême adjacent de valeur strictement inférieure et on répète l'opération à partir de ce nouveau point jusqu'à trouver un point x^0 tel que $f(x) \geq f(x^0)$ pour tout voisin de x^0 .

Pour simplifier certaines notations, on prend ce point comme origine du repère. c.-à-d. on pose $O = x^0$. Puisque O est un point extrême non-dégénéré de P , il y a exactement n directions extrêmes de P qui émanent de ce point. Soit K^0 le cône correspondant. On pose $\mathcal{C}^0 = \{K^0\}$ et $\bar{f}^0 = f(O)$.

À l'itération k de l'algorithme, on a un point \bar{x}^k qui est la meilleure solution connue et $\bar{f}^k = f(\bar{x}^k)$ qui est sa valeur. On dispose également d'une collection \mathcal{C}^k de cônes d'origine O telle que

$$\left(\bigcup_{K \in \mathcal{C}^k} K \right) \cap P = P. \quad (1.6)$$

Soit K un cône de cette collection, et soient $u^j, j = 1, 2, \dots, n$ les vecteurs directeurs de ses directions extrêmes (dorénavant on utilisera le terme génératrice plutôt que *direction extrême* pour désigner la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur u^j ;

lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'origine, on identifiera de plus la génératrice à son vecteur directeur en parlant de génératrice u^j ; finalement le cône K sera noté de façon abrégée $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$.

Sur la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K , on définit le point y^j de la façon suivante:

$$y^j = \theta_j u^j \text{ avec } \theta_j = \max\{\theta \mid f(\theta u^j) \geq \gamma\} \quad (1.7)$$

avec $\gamma = \bar{f}^k$ (si le problème de maximisation qui définit θ_j est non borné, on choisit θ_j aussi grand que l'on veut mais fini).

Si le simplexe $\tilde{S}_y = \text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$ contient $K \cap P$, alors K ne peut pas contenir de solution de valeur meilleure que \bar{f}^k : en effet, d'après la Proposition 1.1 et par définition des points $y^j, j = 1, \dots, n$, le minimum de f sur \tilde{S}_y est supérieur à \bar{f}^k et cette valeur est une borne inférieure de f sur $K \cap P$ d'après l'inclusion $K \cap P \subseteq \tilde{S}_y$. Donc $f(x) \geq \bar{f}^k$ pour tout x de $K \cap P$.

On note par $\tilde{\alpha}x = 1$ l'équation de l'hyperplan passant par les points $y^j, j = 1, \dots, n$ et on considère le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{\alpha}x \\ \text{s.c.} \quad & Ax \leq b. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ce programme linéaire cherche le point extrême de P le plus loin de O dans la direction de l'hyperplan. Clairement si sa valeur optimale $\tilde{\rho}$ est inférieure à 1, $K \cap P$ est inclus dans \tilde{S}_y . Si $\tilde{\rho} > 1$, on considère une solution optimale $\tilde{\omega}$. Soit $\tilde{\lambda}$ tel que $\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y^j$. On définit l'ensemble $J_{\neq} = \{j \mid \tilde{\lambda}_j \neq 0\}$. Pour chaque j de J_{\neq} , on construit le cône K^j à partir de K en remplaçant la génératrice u^j par $\tilde{\omega}$. Il est facile de montrer que pour tout point x s'écrivant comme combinaison linéaire positive des $u^\ell, \ell = 1, 2, \dots, n$, il existe un j de J_{\neq} tel que x peut s'écrire comme combinaison positive des $u^\ell, \ell \neq j$ et de $\tilde{\omega}$, c.-à-d. que l'union des cônes $K^j, j \in J_{\neq}$ contient K . On dit que $K^j, j \in J_{\neq}$ est un sous-cône de K et que l'ensemble $\{K^j, j \in J_{\neq}\}$ est une

subdivision du cône K par rapport au point $\tilde{\omega}$.

En remplaçant tous les cônes K de \mathcal{C}^k pour lesquels le programme linéaire (1.8) a donné une valeur optimale strictement supérieure à 1 par les sous-cônes K^j correspondant, on obtient une nouvelle collection \mathcal{C}^{k+1} vérifiant (1.6). Les points $\tilde{\omega}$ calculés durant cette itération sont utilisés pour mettre à jour \bar{f}^k .

Clairement, si à une certaine itération p , tous les cônes de la collection \mathcal{C}^p ont une valeur optimale $\bar{\rho} \leq 1$, \bar{f}^p est solution optimale du problème (PMCP). De plus, puisque chaque génératrice correspond à un point extrême de P , l'algorithme génère un nombre fini de cônes distincts.

Les points y^j définis par (1.7) sont appelés γ -extensions.

L'hyperplan d'équation $\tilde{\alpha}x = 1$ définit une coupe $\tilde{\alpha}x \geq 1$ qui élimine le simplexe \tilde{S}_y . Une telle coupe est appelée coupe de Tuy (en anglais: Tuy-cut), ou encore coupe de concavité.

Le point ω , solution optimale du programme linéaire (1.8) associé au cône K , est noté $\omega(K)$ (s'il y a plusieurs solutions optimales, on en choisit une). La subdivision d'un cône par rapport à un tel point est appelée ω -subdivision.

Les algorithmes recouvrant le domaine par des cônes sont appelés algorithmes coniques.

À noter que les expressions γ -extension et ω -subdivision seront quelque fois utilisées de façon générique, c'est-à-dire sans valeur précise pour γ et ω .

1.4.2 Algorithme

Plutôt que de donner l'algorithme sous sa version originale où une itération correspond au renouvellement d'une collection de cônes, nous le donnons sous une forme plus moderne où une itération correspond à la subdivision d'un cône. On dit qu'un cône est éliminé si la valeur optimale ρ du problème linéaire (1.8) pour ce cône est inférieure à 1. L'algorithme s'arrête lorsque tous les cônes ont été éliminés.

Algorithme TUY64 (algorithme conique proposé par Tuy en 1964)

Étape 1 (initialisation): calculer un point extrême x^0 de P qui est un minimum local. Choisir x^0 comme nouvelle origine du repère. Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec O et $f(O)$ respectivement. Soit K^0 le cône défini par O et ses points extrêmes adjacents. Calculer les \bar{f} -extensions y^j sur les génératrices de K . Soit $\bar{\alpha}x = 1$ l'équation de l'hyperplan passant par les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$. Résoudre le programme linéaire (1.8). de façon à obtenir $\rho(K^0)$ et $\omega(K^0)$ respectivement la valeur optimale et une solution optimale. Si $\rho(K^0) \leq 1$, faire $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$, sinon faire $\mathcal{L} \leftarrow \{K^0\}$.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si la liste \mathcal{L} est vide. stop: \bar{x} est une solution optimale du problème ($PMCP$); sinon sélectionner un cône \tilde{K} de \mathcal{L} .

Étape 3 (subdivision): subdiviser \tilde{K} via le point $\omega(\tilde{K})$ tel qu'expliqué dans la section précédente. Soit \mathcal{P} l'ensemble des sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (élimination): pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer les \bar{f} -extensions y^1, \dots, y^n et résoudre le programme linéaire (1.8). Soient $\rho(K)$ la valeur optimale et $\omega(K)$ une solution optimale. Si $\rho(K) \leq 1$, éliminer K de la liste \mathcal{L} .

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K)); \bar{x} \leftarrow \omega(K)$.
Retourner à l'Étape 2.

Pour se rapprocher le plus possible de l'algorithme original de Tuy, on peut choisir de sélectionner le cône \tilde{K} à l'Étape 2 sur la base du "premier entré, premier sorti".

1.4.3 Développements

Malheureusement, même s'il génère un nombre fini de cônes distincts, l'algorithme présenté dans la section précédente n'est pas assuré de terminer après un nombre

fini d'itérations. En effet, Zwart [75] a montré sur un exemple que l'algorithme pouvait cycler, c.-à-d. générer une suite de cônes K^1, K^2, \dots, K^p avec $K^1 = K^p$ et $K^{i+1} =$ sous-cône de K^i pour $i = 1, 2, \dots, p - 1$. Presque simultanément, Bali, dans sa thèse [5], donnait un autre exemple (à noter que ces deux exemples illustrent l'incapacité de l'algorithme à prouver qu'une solution est optimale, et non à trouver une telle solution). Pendant ce temps, Gallo et Ülkcü [15] adaptaient l'algorithme TUY64 à la programmation bilinéaire. La différence essentielle est le remplacement de $J_{\neq} = \{j \mid \tilde{\lambda}_j \neq 0\}$ par $J_{>} = \{j \mid \tilde{\lambda}_j > 0\}$. Avec cette modification [14], TUY64 résout correctement le problème de Zwart; malheureusement un nouveau contre-exemple pour l'algorithme de Tuy spécialisé à la programmation bilinéaire est trouvé par Vaish [73], ce qui laisse à penser qu'un contre-exemple pour le cas concave peut aussi être trouvé.

Après avoir noté que le cyclage apparaissait puisque le point $\omega(K)$ pouvait être en dehors du cône K , Bali [5] et Zwart [76] proposent d'ajouter la contrainte $x \in K$ dans le programme linéaire (1.8), c.-à-d. de considérer le nouveau programme linéaire:

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{\alpha}x \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in K. \end{cases} \end{array} \quad (1.9)$$

Cette modification élimine les cyclages, mais ne rend pas forcément l'algorithme fini pour autant. En effet les points $\omega(K)$ définissant les génératrices des cônes ne sont plus des points extrêmes de P mais de $K \cap P$, donc le nombre de points $\omega(K)$ distincts peut maintenant être infini puisque $K \cap P$ varie avec K . On dit qu'un algorithme infini est convergent si la suite \bar{f} tend vers la valeur optimale du problème que l'on cherche à résoudre.

Dans sa thèse, Bali [5] (voir aussi Jacobsen [29]) donne une preuve de convergence de l'algorithme TUY64 ainsi modifié (cet algorithme modifié est dorénavant appelé

BALI73). La preuve est basée sur l'idée que l'enveloppe convexe de tous les simplexes $S = \text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$ tend à contenir P . Malheureusement, cette preuve est jugée erronée par Tuy qui note [64, p.229]: "... the convergence of Bali's algorithm is still an unsettled question (the proof given in [29] assumes a separation property which may not hold in the general case)".

Pour assurer la convergence, le processus de subdivision de l'algorithme BALI73 est modifié. Plutôt que de subdiviser un cône K par rapport au point $\omega(K)$, on effectue des *bissections* (Thoai et Tuy [61]; voir Section 1.5.1), puis des subdivisions *exhaustives* plus générales (Tuy, Khatchaturov et Utkin [69]). Mais ces subdivisions donnent de moins bons résultats en pratique que les ω -subdivisions, car elles utilisent de façon moins efficace, ou même pas du tout, l'information collectée au cours du déroulement de l'algorithme. Tuy [64] a en partie résolu ce dilemme avec le concept de *subdivision normale* (voir Section 1.5.1) qui permet d'utiliser "presque toujours" des ω -subdivisions tout en assurant la convergence de l'algorithme.

Cette thèse aborde à son tour le problème de convergence de l'algorithme TUY64 et de ses dérivés. En particulier,

- nous proposons une autre preuve de la convergence de l'algorithme BALI73, basée sur un hyperplan s'appuyant sur tout le polytope plutôt que seulement sur la portion de polytope contenue dans le cône courant (voir Chapitre 5.2). Cet hyperplan est associé à la *borne inférieure simpliciale* qui est étudiée dans le Chapitre 2.
- Nous définissons et prouvons la convergence d'une variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme BALI73, qui utilise des γ -extensions avec γ égal à la borne inférieure courante plutôt qu'à la valeur de la meilleure solution courante (voir Chapitre 5.3).

- Nous proposons un algorithme conique semblable à TUY64 mais de type *branch-and-bound* (voir Chapitre 5.4). Le problème de cyclage potentiel est contrôlé par l'introduction d'une fonction strictement croissante définie sur l'ensemble des cônes. Cette fonction est basée sur le concept de *meilleure borne simpliciale* développé au Chapitre 2. Cet algorithme utilise le recouvrement de cône utilisé implicitement par Gallo et Ūlkūcū [15]: ce recouvrement est défini dans le Chapitre 4.2.

1.5 Extensions de l'algorithme conique de Tuy

Dans la Section 1.5.1, nous passons en revue les procédures de subdivision qui ont été développées pour assurer la convergence de l'algorithme BALI73. Dans la Section 1.5.2, nous présentons la variante de type *branch-and-bound* de cet algorithme. Dans la Section 1.5.3, nous considérons brièvement le problème de minimisation concave sur un ensemble convexe qui n'est pas nécessairement polyédral. Dans les Sections 1.5.4 et 1.5.5, nous présentons deux méthodes qui ne sont pas coniques à proprement parler, mais qui sont basées sur des idées énoncées par Tuy dans son article en 1964: La méthode de coupe combine recherches locales et coupes de concavité tandis que la méthode d'annexion polyédrale est basée sur une réinterprétation de l'algorithme de Tuy en termes d'annexion de points extrêmes (ces annexions sont faites globalement plutôt que localement, ce qui élimine le problème de cyclage).

1.5.1 Subdivisions

Dans cette section, nous définissons plus formellement les subdivisions en général et nous passons en revue les procédures particulières qui ont été développées pour assurer la convergence de l'algorithme BALI73.

1.5.1.1 Partitions et recouvrements

Une subdivision peut être une partition ou, plus généralement, un recouvrement. Une définition générale de la partition est la suivante.

Définition 1.5 (Horst et Tuy [27, Définition IV.1]). Soient M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et I un ensemble fini d'indices. Un ensemble $\{M_i \mid i \in I\}$ de sous-ensembles de M est dit une partition de M si

$$(i) \quad M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

$$(ii) \quad M_i \cap M_j = \delta M_i \cap \delta M_j \quad \forall i, j \in I \quad i \neq j,$$

où δM_i désigne la frontière (relative) de M_i .

La définition suivante est inspirée de Horst, Thoai et De Vries [24] (voir également Horst, Thoai et De Vries [23]). Les conditions (i)-(iii) ont été séparées de façon à introduire le concept de recouvrement minimal.

Définition 1.6 Soient M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et I un ensemble fini d'indices. Un ensemble $\{M_i \mid i \in I\}$ de sous-ensembles de M est dit un recouvrement de M si

$$(i) \quad M \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i.$$

Le recouvrement est dit minimal si de plus

$$(ii) \quad M_i \cap M \neq \emptyset \quad \forall i \in I$$

$$(iii) \quad M_j \not\subseteq \bigcup_{i \in I; i \neq j} M_i \quad \forall i \in I.$$

Dans cette thèse, les M et les M_i seront généralement des cônes, mais nous aborderons aussi brièvement les subdivisions simpliciales et rectangulaires pour lesquelles les M sont respectivement des simplexes et des hyperrectangles (voir Section 1.6.3 et Chapitre 4.2.4). Que la subdivision soit une partition ou un recouvrement, on dit que les M_i sont des fils de M , et que M est le père des M_i . Dans le cas des subdivisions coniques, on dit aussi que M_i est un sous-cône de M . On associe généralement à un algorithme conique un graphe dont les nœuds sont les cônes générés et tel qu'il y ait un arc reliant K à K' si et seulement si le cône K' est un sous-cône de K . Une suite de cônes générée par une procédure de subdivision est une suite $\{K^h\}$ telle que

K^{h+1} est un sous-cône de K^h pour tout h , c'est-à-dire correspond à un chemin dans le graphe défini ci-dessus.

Le recouvrement n'a été que très peu utilisé dans des algorithmes coniques pour la minimisation (quasi)concave. À notre connaissance, ce type de subdivision n'apparaît que dans l'algorithme TUY64 de Tuy [62] avec les problèmes de cyclage déjà mentionnés. Le reste de cette section est consacré aux partitions. Le recouvrement est considéré dans le Chapitre 4.

1.5.1.2 Partition radiale

Les partitions de cônes sont généralement définies en termes de partitions de simplexes (voir par exemple Horst et Tuy [27, p.137]). Ce passage à un simplexe est par ailleurs indispensable pour définir les partitions exhaustives et normales. Puisqu'un des buts de cette thèse est de montrer qu'on peut se passer de telles partitions pour prouver la convergence des algorithmes coniques, nous définissons directement la partition radiale d'un cône sans passer par un simplexe.

Soit v un point arbitraire du cône non-dégénéré $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$. Ce point s'écrit de façon unique:

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Soit $J_{\neq} = \{j \mid \lambda_j \neq 0\}$. Pour tout $j \in J_{\neq}$, soit K^j le cône d'origine O et dont les génératrices sont $u^1, \dots, u^{j-1}, v, u^{j+1}, \dots, u^n$.

Proposition 1.7 *L'ensemble des K^j , $j \in J_{\neq}$, définit une partition de K .*

Preuve:

Voir par exemple Jacobsen [29] pour une preuve directe (c.-à-d. ne faisant pas appel à des simplexes). Ce résultat s'obtient également comme un cas particulier de la Proposition 4.1. ■

Cette partition est dite radiale.

Si $v = \omega(K)$ où $\omega(K)$ est la solution du problème linéaire (1.9) associé à K (voir Section 1.4.3), la partition radiale est appelée ω -partition.

1.5.1.3 Bisections et autres partitions exhaustives

L'idée des partitions exhaustives est de s'assurer que toute suite de cônes générés par la procédure tend vers une demi-droite, c.-à-d. que les n génératrices tendent vers une limite commune. En termes moins mathématiques mais peut-être plus intuitifs, on veut que l'"ouverture" du cône, ou encore l'"angle" si on est en dimension 2, tend vers 0.

Soit K^0 un cône, et soit H^0 un hyperplan intersectant toutes les génératrices de K^0 . Puisque les autres cônes de la suite sont inclus dans K^0 par définition d'une partition, l'hyperplan H^0 intersecte toutes les génératrices de tout cône de la suite. Soient K un tel cône et U la section de K par H^0 : U est un $(n - 1)$ -simplexe de \mathbb{R}^n , appelé base de K .

Supposons que $U = \text{conv}\{u^1, \dots, u^n\}$. On définit le diamètre $\delta(U)$ du simplexe U comme étant la longueur de sa plus grande arête, c.-à-d., $\delta(U) = \max_{i,j} \|u^i - u^j\|$. Clairement, une suite de cônes tend vers une demi-droite si et seulement si la suite de $(n - 1)$ -simplexes associée tend vers un point de H^0 . On peut alors donner une définition plus formelle d'une partition exhaustive.

Définition 1.7 Une procédure de partition (de cônes) est dite exhaustive si toute suite infinie $K^1 \supseteq \dots \supseteq K^{h-1} \supseteq K^h \supseteq \dots$ de cônes générée vérifie $\lim_{h \rightarrow +\infty} \delta(K^h \cap H^0) = 0$.

Si v appartient à une arête de U de longueur maximum, c.-à-d. si $v = \alpha u^p + (1 - \alpha)u^q$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\|u^p - u^q\| = \delta(U)$, la partition radiale du cône K via v est appelée bissection de ratio α . À noter que K est alors partitionné en exactement deux sous-cônes, d'où le terme "bissection".

Les bisections définissent une procédure de partition exhaustive:

Théorème 1.1 (voir, par exemple, Tuy [66, p.21]). Une procédure de partition consistant uniquement en des bisections de ratio $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, pour un certain α fixé, est exhaustive.

Le concept de *bisection* est dû à Horst [20], celui de *partition exhaustive* à Thoai et Tuy [61]. D'autres procédures de partition exhaustives ont été proposées par Tuy, Khatchaturov et Utkin [69].

1.5.1.4 Partition normale

Une procédure de partition est dite normale si uniquement des bisections et des ω -partitions sont utilisées et si les bisections interviennent un nombre infini de fois dans toute suite infinie de cônes générée par la procédure.

Une procédure classique de partition normale est définie de la façon suivante:

Soit $\tau(K)$ l'index de génération du cône K (c.-à-d. $\tau(K) = 0$ si K est un cône initial; $\tau(K) = \tau(K') + 1$ si K est le fils du cône K') et soit N un entier naturel. Si $\tau(K)$ est divisible par N , on bissecte K ; sinon, on effectue une ω -partition (voir, par exemple, Tuy [66, p.25-26]). Le concept de *partition normale* est dû à Tuy [64]. Il permet d'utiliser des ω -partitions "presque toujours" puisque le ratio de bisections sur ω -partitions $\frac{1}{N-1}$ peut être aussi petit que l'on veut, quoique non nul.

Le résultat suivant est à la base des preuves de convergence des algorithmes coniques utilisant une procédure de partition normale.

Proposition 1.8 (Tuy [66, p.20]). Soit $U^h = \text{conv}\{u^{h1}, u^{h2}, \dots, u^{hn}\}$, $h = 1, 2, \dots$ une suite de $(n-1)$ -simplexes tels que U^{h+1} soit un fils de U^h par une partition via un certain point $v^h \in U^h$. S'il existe une suite infinie $\Delta \subset \{1, 2, \dots\}$ telle que pour tout $h \notin \Delta$ la partition de U^h est une bisection de ratio $\alpha_h \geq \alpha_0 > 0$ alors, si la suite $\{v^h, h \in \Delta\}$ est infinie, au moins un de ses points d'accumulation est un sommet de $U^* = \bigcap_{h=1}^{\infty} U^h$.

1.5.2 Variante de type *branch-and-bound*

Le principe de cette variante est de calculer une borne inférieure à l'Étape 4 de l'algorithme BALI73 lorsqu'on n'est pas capable d'éliminer un sous-cône (rappelons que BALI73 est l'algorithme TUY64 présenté dans la Section 1.4.2 avec le programme linéaire (1.9) utilisé à la place de (1.8)).

Plus précisément, soient K un cône non-dégénéré et \bar{f} la valeur de la meilleure solution courante. On calcule les \bar{f} -extensions $y^j, j = 1, \dots, n$ le long des génératrices de K . Soit $\tilde{\alpha}x = 1$ l'équation de l'hyperplan passant par ces points. On résout le problème linéaire (1.9) qui consiste à maximiser $\tilde{\alpha}x$ sur $K \cap P$. Si sa valeur optimale $\rho(K)$ est inférieur à 1, $K \cap P$ est inclus dans le simplexe $\text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$ sur lequel le minimum de f est supérieur à \bar{f} , donc K peut être éliminé.

Le calcul d'une borne inférieure est intéressant si $\rho(K) > 1$. Par définition de $\rho(K)$, $K \cap P$ est inclus dans le simplexe $\tilde{S} = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x \leq \rho(K)\}$. Une borne inférieure $\underline{f}(K)$ de f sur $K \cap P$ est donc $\min_{x \in \tilde{S}} f(x)$. Puisque f est concave, cette valeur est égale au minimum de f en les points extrêmes de \tilde{S} . Ces points extrêmes sont O et $\tilde{z}^j = \rho(K)y^j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Donc

$$\underline{f}(K) = \min\{f(O), f(\rho(K)y^1), \dots, f(\rho(K)y^n)\}. \quad (1.10)$$

Si $\underline{f}(K) \geq \bar{f}$, alors $f(x) \geq \bar{f}$ pour tout x de $K \cap P$, donc on peut éliminer le cône K . Clairement, si K' est un cône contenant K , $\underline{f}(K')$ est encore une borne inférieure pour K . Cette observation permet de s'assurer, de façon quelque peu artificielle, que la borne inférieure ne décroît pas lorsqu'on passe d'un cône à un sous-cône.

La version *branch-and-bound* de l'algorithme BALI73 est alors:

Étape 1 (initialisation): calculer un point extrême x^0 de P qui est un minimum local. Choisir x^0 comme nouvelle origine du repère. Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec O et $f(O)$ respectivement. Soit K^0 le cône défini par O et ses points extrêmes adjacents. Calculer les \bar{f} -extensions y^j

sur les génératrices de K . Soit $\bar{\alpha}x = 1$ l'équation de l'hyperplan passant par les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$. Résoudre le programme linéaire (1.9). Soient $\rho(K^0)$ et $\omega(K^0)$ respectivement la valeur optimale et une solution optimale. Calculer une borne inférieure $\underline{f}(K^0)$ de f sur $K^0 \cap P$ par la formule (1.10). Si $\underline{f}(K^0) \geq \bar{f}$, faire $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$; sinon faire $\mathcal{L} \leftarrow \{K^0\}$.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution optimale du problème (PMCP). Sinon soit $\tilde{K} \in \arg \min\{\underline{f}(K) \mid K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (subdivision): partitionner \tilde{K} via le point $\omega(\tilde{K})$ tel qu'expliqué dans la Section 1.5.1.2. Soit \mathcal{P} la liste de sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (calcul de borne inférieure): pour chaque cône $K \in \mathcal{P}$, calculer les \bar{f} -extensions $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ le long des génératrices de K . Soit $\bar{\alpha}x = 1$ l'équation de l'hyperplan passant par les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$. Résoudre le programme linéaire (1.9). Soient $\rho(K)$ et $\omega(K)$ respectivement la valeur optimale et une solution optimale. Calculer une borne inférieure $\underline{f}(K)$ de f sur $K \cap P$ par la formule (1.10). Si $\underline{f}(\tilde{K}) > \underline{f}(K)$, prendre pour borne inférieure $\underline{f}(K) = \underline{f}(\tilde{K})$.

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K)); \bar{x} \leftarrow \omega(K)$.

Étape 6 (élimination): éliminer de \mathcal{L} tous les cônes K tels que $\underline{f}(K) \geq \bar{f}$.

Retourner à l'Étape 2.

La première variante de type *branch-and-bound* a été proposée par Thoai et Tuy [61] avec un procédé de partitionnement basé exclusivement sur des bisections. Dans [64], Tuy propose d'utiliser des partitions normales.

Une autre borne inférieure a été proposée par Tuy, Thieu et Thai [72] dans le cas où C est un ensemble convexe non nécessairement polyédral. Elle consiste à choisir un point x de la frontière δC de C situé dans K (par exemple, l'intersection d'une génératrice avec δC) et à considérer un hyperplan H s'appuyant sur C en ce point.

Si l'hyperplan H intersecte toutes les génératrices de K , il définit avec K un simplexe contenant $K \cap C$ et la borne inférieure est alors égale au minimum de f en les points extrêmes de ce simplexe. Si par contre au moins une génératrice de K n'est pas intersectée par H (c.-à-d. si toute la demi-droite correspondant à une génératrice est contenue dans le demi-espace délimité par H et contenant O), aucune borne ne peut être calculée.

Dans le Chapitre 2, nous considérons de façon détaillée la borne inférieure simpliciale, qui englobe ces deux bornes comme cas particuliers. En particulier, nous définissons une nouvelle borne qui dans certains cas domine strictement celle définie au début de cette sous-section. Nous considérons également des bornes simpliciales construites à partir de γ -extensions calculées avec γ égal à la borne inférieure simpliciale du cône père. Ce choix assure que la borne inférieure des sous-cônes est toujours au moins aussi bonne que celle du cône père, et ceci de façon non artificielle. La borne inférieure simpliciale joue un rôle essentiel dans les preuves de convergence des algorithmes du Chapitre 5.

Le Chapitre 3 est consacré à la borne inférieure double-simpliciale, obtenue en minimisant f sur l'union de deux simplexes.

Pour ces deux classes de bornes inférieures, nous introduisons le concept de *meilleure borne* et donnons une méthode pour la calculer.

1.5.3 Extensions à des problèmes plus généraux

Les algorithmes coniques discutés jusqu'ici et qui sont prouvés convergents s'étendent facilement au cas où f est une fonction quasiconcave avec l'hypothèse additionnelle que la fonction est continue.

Dans cette section, nous discutons un peu plus en détail l'extension au cas où le domaine C est un ensemble convexe quelconque borné, non-vide et de dimension n .

Puisque le nombre de points extrêmes (c.-à-d. de solutions potentielles) est infini

dans ce cas, il paraît encore plus difficile de trouver exactement un minimum global. On se contente alors généralement d'une solution approchée, à une certaine tolérance ε près: si f^* est la valeur optimale de $(PMQC)$ et \bar{x} un point réalisable de C vérifiant $f(\bar{x}) \leq f^* + \varepsilon$ où $\varepsilon \geq 0$ est fixée à l'avance, on dit que \bar{x} est une solution ε -optimale du problème $(PMQC)$.

Les algorithmes qui résolvent le problème $(PMQC)$ sont généralement le résultat d'un mariage entre les approches d'approximations extérieures (voir Section 1.6.2) et de recouvrement par cônes.

Supposons sans perte de généralité que l'origine O est un point intérieur de C . On commence par construire un polytope Q ayant peu de points extrêmes et contenant C . Typiquement Q est un simplexe, qui peut être construit de la façon suivante: on minimise chacune des variables x_j sur C , de façon à obtenir une borne inférieure $\underline{x}_j, j = 1, 2, \dots, n$ et on maximise $\sum_{j=1}^n x_j$ sur C , de façon à obtenir une valeur \bar{s} . On définit alors le simplexe $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq \bar{s}; x_j \geq \underline{x}_j (j = 1, 2, \dots, n)\}$.

Soient $q^\ell, \ell = 1, 2, \dots, n+1$ les points extrêmes du simplexe Q . Soit K^j le cône d'origine O et dont les génératrices sont définies par les points $q^\ell, \ell \neq j$. On peut montrer facilement que l'ensemble des cônes $K^j, j = 1, 2, \dots, n+1$ forme une partition de \mathbb{R}^n .

L'idée très générale de la méthode est la suivante: l'algorithme génère une suite de polytopes $Q^1 \supseteq Q^2 \supseteq \dots \supseteq Q^k \supseteq \dots \supseteq C$ approximant de mieux en mieux C . À l'itération k , on résout le problème de minimisation quasiconcave sur le polytope Q^k par l'un des algorithmes coniques discutés jusqu'ici en partant de $n+1$ cônes à l'Étape 1 plutôt que d'un seul. Soit x^k la solution optimale. Si x^k appartient à C , x^k est solution optimale du problème $(PMQC)$. Sinon on sépare x^k de O par un hyperplan tel que C soit contenu dans l'un des demi-espaces. On ajoute la contrainte correspondante à la description de Q^k , ce qui nous donne le polytope Q^{k+1} , et on

itère le processus.

En réalité les deux approches (approximations extérieures et méthode conique) sont beaucoup plus intégrées que cela: en particulier, l'approximation extérieure est affinée durant le déroulement même de l'algorithme conique. Pour plus de détails, on peut se reporter par exemple à Horst, Thoai et Benson [22].

Les algorithmes coniques ont aussi été adaptés au cas où C n'est pas borné (voir par exemple Horst et Tuy [27, p.328]).

1.5.4 Méthodes de coupes

Rappelons brièvement la construction des coupes de concavité, déjà abordée dans la Section 1.4.1. Soit x^0 un point extrême non-dégénéré de P qui est un minimum local, et soit K le cône d'origine O et dont les génératrices sont définies par les n points extrêmes adjacents à x^0 . Soit $\bar{f} = f(x^0)$ la valeur de x^0 . On calcule les γ -extensions y^j le long des génératrices de K pour $j = 1, 2, \dots, n$ (voir Section 1.4.1). Soit $\tilde{H}_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}(x - x^0) = 1\}$ l'hyperplan passant par les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$: \tilde{H}_y définit avec K un simplexe $\tilde{S}_y = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}(x - x^0) \leq 1\}$ dont les points extrêmes sont par définition x^0, y^1, \dots, y^n . Puisque la valeur de ces points est supérieure à \bar{f} par construction, on a $f(x) \geq \bar{f}$ pour tout x de \tilde{S}_y . L'inégalité $\tilde{\alpha}(x - x^0) \geq 1$ est appelée coupe de concavité: elle exclut le simplexe \tilde{S}_y , et en particulier le point x^0 , du polytope P sans exclure aucun point x de P vérifiant $f(x) < \bar{f}$.

Si x^0 est un point extrême dégénéré de P , il est aussi possible de définir des coupes: voir par exemple Horst et Tuy [27, p.95]).

La méthode de coupe est la suivante. Au début de l'algorithme, on a un polytope $P^0 = P$ et un point extrême x^0 de P^0 qui est un minimum local. On note par \bar{f}^0 sa valeur. On construit une coupe de concavité $\alpha^0(x - x^0) \geq 1$ avec $\gamma = \bar{f}^0$. Cette coupe est ajoutée à P^0 pour former un nouveau polytope P^1 . On effectue alors une nouvelle

recherche locale pour trouver un point extrême x^1 de P^1 qui est un minimum local. on génère une nouvelle coupe, et ainsi de suite.

Notons par $\alpha^k(x - x^k) \geq 1, k = 1, \dots, n$, les coupes de concavité générées. Horst et Tuy [27, p.189] ont montré que si la suite $\{\alpha^k\}$ est bornée, alors cette méthode de coupe se termine après un nombre fini d'itérations avec une solution optimale du problème (*PMCP*). Malheureusement, on ne sait pas comment définir les coupes de façon à satisfaire cette condition.

Cette méthode n'est pas très performante en pratique. Les expériences numériques montrent en effet que les coupes tendent à éliminer une portion toujours plus petite du polytope résiduel, et que par conséquent le nombre de coupes nécessaires croît, et avec lui, le temps de calcul.

Pour pallier à ces difficultés, la méthode de coupe utilise souvent d'autres types de coupes, plus profondes, comme par exemple les *coupes faciales* (voir par exemple Horst et Tuy [27, p.190]).

La méthode de coupe est souvent combinée avec l'algorithme conique BALI73 de la façon suivante: lorsque la meilleure solution est améliorée à l'Étape 5 (voir Section 1.4.2), on ajoute au polytope une coupe de concavité construite avec $\gamma = f(O)$ et excluant l'origine O des cônes. On recommence ensuite l'algorithme BALI73 à partir de l'Étape 1, et ainsi de suite. Un tel algorithme est dit à deux phases: la Phase 1 correspond à une recherche locale et la Phase 2 à une procédure conique qui cherche un point meilleur que celui trouvé à la Phase 1 ou prouve que ce point est optimal. Si un point meilleur est trouvé, l'algorithme repasse en Phase 1 après avoir ajouté une coupe de concavité, puis après qu'un minimum local ait été calculé, repasse en Phase 2, et ainsi de suite. Si l'algorithme à deux phases stoppe avec un point extrême du polytope résiduel, ce point est en réalité un point extrême du polytope initial. En effet, puisqu'il a une valeur strictement inférieure aux valeurs γ ayant servi à définir les coupes, il ne peut pas satisfaire à égalité les contraintes

correspondant à ces coupes.

Cette combinaison a été proposée par Zwart [76], mais son algorithme comporte une erreur (voir Tuy [63]). Voir Horst et Tuy [27] pour une version corrigée.

1.5.5 Méthodes d'annexion polyédrale

L'algorithme TUY64 peut aussi être vu comme une méthode qui construit une suite de polytopes P^k tels que $\min_{x \in P^k} f(x) \geq \bar{f}^k$ où \bar{f}^k est la valeur de la meilleure solution connue de P à l'itération k . L'algorithme s'arrête lorsqu'un polytope de cette suite contient P en concluant que la meilleure solution connue courante est optimale. Les polytopes P^k sont définis de la façon suivante:

$$P^k = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}^i x \leq 1, i = 1, \dots, i_k\}$$

Chaque contrainte $\tilde{\alpha}^i x \leq 1$ est associée à un cône K^i : l'hyperplan d'équation $\tilde{\alpha}^i x = 1$ est l'hyperplan passant par les γ -extensions le long des génératrices de K^i .

Supposons que le cône K^i soit sélectionné pour être subdivisé. Cela signifie que la valeur optimale du problème linéaire (1.8) est strictement supérieure à 1 pour K^i . c.-à-d. qu'un point extrême x^k de P viole la contrainte $\tilde{\alpha}^i x \leq 1$: on remplace alors cette contrainte par celles correspondant aux sous-cônes de K^i , ce qui nous donne un nouveau polytope P^{k+1} . Cette opération revient à "annexer" (au moins localement) le point x^k au polytope P^k .

Soit CY^k l'enveloppe convexe de O et de toutes les γ -extensions calculées jusqu'à l'itération k . Par définition $\min_{x \in CY^k} f(x) \geq \bar{f}^k$. Puisque

$$\begin{aligned} P^k &= \left(\bigcup_{i=1, \dots, i_k} K^i \right) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}^i x \leq 1, i = 1, \dots, i_k\} \\ &\subseteq \bigcup_{i=1, \dots, i_k} (K^i \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}^i x \leq 1\}) \end{aligned}$$

et que $K^i \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}^i x \leq 1\} \subseteq CY^k$ pour tout $i = 1, \dots, i_k$, on a $P^k \subseteq CY^k$, d'où l'on déduit $\min_{x \in P^k} f(x) \geq \bar{f}^k$.

Comme on l'a vu précédemment, l'algorithme original de Tuy peut cycler. Ce cyclage s'explique par le fait que l'annexion n'est que locale, c.-à-d. que le point annexé vérifie les contraintes qui lui sont associées mais peut en violer d'autres. Prolongeant les travaux de Vaish et Shetty [74], Istomin [28] et Mukhamediev [49], Tuy [63] développe une méthode d'annexion polyédrale qui résout le problème de minimisation concave sur un polytope en un nombre fini d'itérations.

L'initialisation est similaire à celle de l'algorithme TUY64. À l'itération k , on a \bar{f}^k qui est la valeur de la meilleure solution connue et un polytope P^k tel que $\min_{x \in P^k} f(x) \geq \bar{f}^k$. De plus, on a $O \in P^k$ et P est contenu dans le cône d'origine O engendré par P^k . On note par V^k l'ensemble des v tels que $vx \leq 1$ est une facette de P^k ne passant pas par O . Pour tout v de V^k , on définit le programme linéaire

$$\begin{aligned} LP(v; P) \quad & \max \quad vx \\ & \text{s.c.} \quad x \in P. \end{aligned}$$

Soit $\rho(v)$ sa valeur optimale. Si $\rho(v) \leq 1$ pour tout v de V^k , on a l'inclusion $P \subseteq P^k$ et le point extrême associé à \bar{f}^k est solution optimale. Sinon, soit x^k la solution optimale d'un programme linéaire $LP(v; P)$ pour lequel $\rho(v) > 1$. Ce point est utilisé pour mettre à jour la meilleure solution connue, c.-à-d. $\bar{f}^{k+1} = \min\{\bar{f}^k, f(x^k)\}$. On calcule ensuite la \bar{f}^{k+1} -extension y^k de x^k et on définit $P^{k+1} = \text{conv}(P^k, \{y^k\})$ (c.-à-d. on "annexe" y^k à P^k). Noter qu'on a $\min_{x \in P^{k+1}} f(x) \geq \bar{f}^k$, $O \in P^{k+1}$ et P est bien inclus dans le cône engendré par P^{k+1} .

Cet algorithme est fini puisque à chaque itération il génère un point extrême de P qui est à l'extérieur de l'approximation courante et qui sera dans les approximations subséquentes de par le processus d'annexion (en effet par définition, y^k est au-delà de x^k sur la demi-droite $[Ox^k]$). Il ne peut donc pas y avoir de répétition des points

extrêmes, comme c'était le cas dans l'algorithme proposé par Tuy en 1964.

Il reste à expliquer comment calculer l'ensemble V^{k+1} à partir de l'ensemble V^k . Ce calcul fait appel au concept de *polaire*.

Proposition 1.9 (voir par exemple Tuy [63]). *Soit P un polytope de pleine dimension, avec $O \in P$ et soit*

$$Q = \{y \mid yx \leq 1 \text{ pour tout } x \text{ de } P\}$$

le polaire de P . Alors toute facette $vx = 1$ de P ne passant pas par O correspond à un point extrême $v \neq O$ de Q , et réciproquement tout point extrême $v \neq O$ de Q correspond à une facette $vx = 1$ de P ne passant pas par O .

Soit Q^k le polytope dont les points extrêmes sont les éléments de V^k . Le calcul de V^{k+1} se ramène donc à trouver l'ensemble des points extrêmes de Q^{k+1} obtenu de Q^k en ajoutant la contrainte $y^k x \leq 1$. Plusieurs procédures ont été développées pour résoudre ce problème (voir Chen, Hansen et Jaumard [10] pour une revue de la littérature).

À noter que dans certains cas, la méthode d'annexion polyédrale permet de travailler dans un espace de dimension plus petite (voir Tuy [65]).

1.6 Autres méthodes pour la minimisation (quasi)-concave

Dans cette section, nous présentons brièvement les principes des autres méthodes de résolution des problèmes de minimisation (quasi)concave, à savoir les méthodes d'énumération de points extrêmes, d'approximations successives et finalement de subdivisions successives où les éléments subdivisés sont des simplexes et des hyperrectangles plutôt que des cônes. Pour plus de détails, on peut se reporter à Horst et Tuy [27] et à Benson [7].

1.6.1 Méthodes d'énumération

Au vu de la Proposition 1.1, une méthode finie pour la minimisation (quasi)concave sur un polytope consiste à énumérer tout simplement ses points extrêmes et à retenir celui de plus basse valeur. De fait, des méthodes efficaces d'énumération de points extrêmes ont été proposées. Si le polytope est non-dégénéré, et si m désigne le nombre de contraintes du polytope, n la dimension de l'espace et v le nombre de points extrêmes, Chen, Hansen et Jaumard [10] et Avis et Fukuda [3] proposent deux algorithmes d'énumération de complexité $O(mnv)$. La limite de cette approche réside dans le grand nombre de points extrêmes, qui peut être exponentiel par rapport à m et n . En remarquant que les complexités des algorithmes de Chen, Hansen et Jaumard et de Avis et Fukuda laissent relativement peu de place à des améliorations (on peut espérer au mieux une complexité en $O(v)$), on peut considérer que cette approche aveugle qui consiste à énumérer les points extrêmes a pratiquement atteint ses limites.

Tout au moins sur un ordinateur classique. En effet, puisque ce qui nous intéresse vraiment est un point extrême qui est solution optimale du problème de minimisation (quasi)concave, et non pas la liste de tous les points extrêmes avec leur valeur, on peut rêver de résoudre ce problème en $O(\sqrt{v})$ sur un ordinateur quantique, dont le fonctionnement est basé sur la physique quantique. Un tel ordinateur est capable, en théorie, de calculer les valeurs d'une fonction f en les 2^n points extrêmes de l'hypercube $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1\}$ au moyen d'une seule évaluation de la fonction! Malheureusement, il n'est pas possible d'accéder directement à ces valeurs. On peut cependant faire certaines opérations sur elles. Ainsi la méthode de Dürr et Høyer [13] (voir aussi [17] et [9]), appliquée à notre problème, permet de trouver le minimum d'une fonction quasiconcave continue sur un hypercube avec une probabilité de succès au moins égale à $1 - \frac{1}{2^c}$ en $O(c\sqrt{\frac{v}{t}})$ évaluations de la fonction f où v est le nombre de points extrêmes et t le nombre de minima globaux. Bien entendu, le polytope est très simple, en particulier on peut facilement déterminer ses points extrêmes, mais

l'algorithmique quantique n'en est qu'à ses premiers balbutiements. Elle a cependant déjà un succès de taille: un algorithme quantique polynômial pour la factorisation de nombres entiers qui, s'il était mis un jour en œuvre, aurait un impact dévastateur sur les techniques de cryptage actuelles (voir Shor [57] qui contient également une introduction à l'algorithmique quantique). À noter cependant que l'ordinateur quantique n'existe pour l'instant que sur papier et que les difficultés techniques à surmonter pour sa réalisation sont immenses. Aussi, les algorithmes quantiques sont par essence probabilistes (typiquement, à chaque exécution, l'algorithme a une probabilité $> \frac{1}{2}$ de donner une bonne réponse; pour augmenter cette probabilité à une valeur proche de 1, on peut résoudre le même problème à plusieurs reprises).

Refermons cette parenthèse sur les algorithmes quantiques et probabilistes en soulignant que tous les algorithmes considérés dans cette thèse sont déterministes et résolvent exactement le problème de minimisation (quasi)concave.

1.6.2 Méthodes d'approximations extérieures

On suppose ici que C est borné et s'écrit $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$ où g est une fonction convexe.

Le principe des méthodes d'approximations extérieures consiste à relaxer le domaine C , c'est-à-dire à l'approximer par un ensemble P^0 le contenant et sur lequel le problème de minimisation (quasi)concave est facile à résoudre. Si la solution optimale x^0 de la relaxation appartient à C , la solution optimale du problème initial est x^0 ; sinon, on génère un ensemble P^1 tel que $C \subseteq P^1 \subseteq P^0$ et $x^0 \notin P^1$ et ainsi de suite. On suppose ici que les $P^k, k = 0, 1, \dots$ sont des polytopes.

Une méthode d'approximations extérieures est définie en spécifiant la construction de l'approximation initiale P^0 , la façon dont est raffinée l'approximation courante et comment résoudre les problèmes relaxés.

L'approximation initiale est généralement un simplexe, dont la construction diffère suivant les algorithmes particuliers et la nature de C (si C est un ensemble convexe

quelconque, une méthode a été décrite dans la Section 1.5.3).

À l'itération k , on a une approximation P^k et une solution optimale x^k du problème de minimisation (quasi)concave sur P^k . On suppose de plus qu'on connaît un point O intérieur à C . Le polytope P^{k+1} est déduit de P^k en ajoutant une contrainte $\ell^k(x) \leq 0$ vérifiant $\ell^k(x^k) \geq 0$ et $\ell^k(x) \leq 0$ pour tout x de C . Généralement ℓ^k est une fonction affine de la forme $\ell^k(x) = p(y^k)(x - y^k) + g(y^k)$ où y^k est un point du segment $[Ox^k]$ n'appartenant pas à l'intérieur de C et $p(y^k)$ est un sous-gradient de g en y^k .

Le problème de minimisation (quasi)concave sur P^{k+1} est résolu en calculant le minimum de f sur l'ensemble des points extrêmes de P^{k+1} . Cet ensemble est déduit de l'ensemble des points extrêmes de P^k et de la contrainte $\ell^k(x) \leq 0$ par ce qu'on appelle des procédures d'énumération dynamique de points extrêmes (voir par exemple Chen, Hansen et Jaumard [10]).

De nombreux algorithmes d'approximations extérieures ont été proposés. Dans [25] et [26], Horst, Thoai et Tuy ont réuni ces approches et développé une théorie de la convergence.

1.6.3 Méthodes de subdivisions successives

L'algorithme TUY64 de Tuy et ses dérivés font appel à des subdivisions de cônes. Deux autres entités géométriques sont souvent utilisées comme élément de subdivision: l'hyperrectangle et le simplexe. Les méthodes utilisant des subdivisions rectangulaires se spécialisent dans la résolution de problèmes de minimisation concave où la fonction objectif est séparable, c'est-à-dire est la somme de fonctions concaves à une variable. Nous ne nous y attarderons pas. Le lecteur intéressé est invité à consulter Benson [7] ainsi que Horst et Tuy [27]. Le reste de cette section est consacré aux méthodes de subdivisions simpliciales.

On suppose que l'ensemble convexe C est borné et que f est concave. Une première étape consiste à calculer un simplexe S^0 contenant C . Ce simplexe est ensuite subdivisé en un certain nombre de sous-simplexes recouvrant S^0 , qui à leur tour peuvent

être subdivisés si on n'est pas capable de les éliminer. Un algorithme de subdivisions simpliciales s'arrête lorsque tous les simplexes ont été éliminés.

Comme pour les méthodes de subdivisions coniques, deux opérations sont particulièrement importantes: la subdivision et le calcul d'une borne inférieure. Commençons par la subdivision. Les partitions radiales de simplexe sont définies de façon semblable aux partitions radiales de cône: étant donné un simplexe $S = \text{conv}\{s^1, \dots, s^{n+1}\}$ et un point $v = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j s^j$ de S avec $\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j = 1$ et $\tilde{\lambda}_j \geq 0$, la partition radiale de S est composée des simplexes $S^j = \text{conv}\{s^1, \dots, s^{j-1}, v, s^{j+1}, \dots, s^{n+1}\}$ pour j tels que $\tilde{\lambda}_j \neq 0$. Lorsque $v = \alpha s^p + (1 - \alpha)s^q$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et que $[s^p, s^q]$ est une plus longue arête de S , la partition radiale est appelée bisection de ratio α .

Il existe également un recouvrement de simplexe, proposé par Horst, Thoai et De Vries [24] et [23]:

Théorème 1.2 (*Horst, Thoai et De Vries [23]*).

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0 \ (j = 1, \dots, n + 1)\}$ un simplexe de facettes $F^j := S \cap \{x \mid g_j(x) = 0\}$ ($j = 1, \dots, n + 1$) et de sommets s^1, \dots, s^{n+1} . Soit $x^0 \in \text{int}S$ et notons par s^j le sommet de S opposé à F^j (c.-à-d. $s^j \notin F^j$) pour $j = 1, \dots, n + 1$. De plus, soit

$$v^j = s^j + \mu_j(x^0 - s^j), \quad \mu_j > 1 \ (j = 1, \dots, n + 1).$$

Finalement, soit

$$H^j = \text{aff}\{v^i \mid i = 1, \dots, n + 1; i \neq j\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_j(x) = 0\}$$

avec les fonctions affines définies de telle sorte que $h_j(x^0) > 0$ ($j = 1, \dots, n + 1$).

Alors

$$S := \{S^j \mid h_j(s^j) < 0 \ (j = 1, \dots, n + 1)\}$$

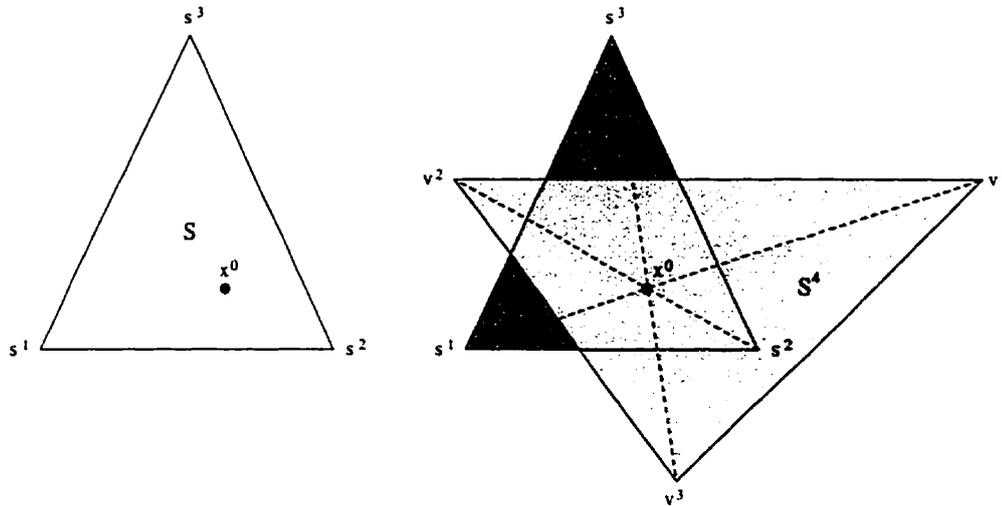


Figure 1.1: Recouvrement simplicial de Horst, Thoai et De Vries

où

$$S^j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, n+1; i \neq j), \quad h_j(x) \leq 0\}$$

pour $j = 1, \dots, n+1$, et

$$S^{n+2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \dots, n+1)\}$$

définit un recouvrement simplicial de S .

Ce recouvrement est illustré par la Figure 1.1. Les valeurs de μ peuvent être choisies de façon à ce que le simplexe "central" S^{n+2} puisse être éliminé (voir Horst, Thoai et De Vries [23]).

Considérons maintenant le calcul de borne inférieure de f sur $S \cap C$. Soit x un point de $S \cap C$: $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j s^j$ avec $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$ et $\lambda_j \geq 0$. Par concavité de f , on a

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(s^j).$$

Une borne inférieure de f sur $S \cap C$ est donc

$$\begin{aligned} \underline{f}(S) = \min & \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(s^j) \\ \text{s.c.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j s^j \in C \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Cette borne inférieure revient à minimiser l'*enveloppe convexe* de f sur $S \cap C$ (voir par exemple Rockafellar [55] pour la notion d'enveloppe convexe et Benson [7] pour son utilisation en minimisation concave). À noter que si C est un polytope, le problème convexe (1.11) devient un problème linéaire. De plus cette borne inférieure est toujours supérieure au minimum de f sur le simplexe S .

Dans le cas où C est un polytope P , plusieurs algorithmes de subdivisions simpliciales finis ont été développés. Par exemple, Benson [6] propose un tel algorithme dans lequel une borne inférieure est obtenue en résolvant (1.11) sur P plutôt que sur $S \cap P$ (c.-à-d. sans la contrainte $\lambda \geq 0$). Chaque calcul de borne donne un point extrême de P qui est conservé dans une liste et utilisé pour mettre à jour la meilleure solution connue. Les subdivisions sont des partitions radiales par rapport à des points de cette liste qui ne sont pas des points extrêmes de simplexes déjà existants. Plus précisément, étant donné un tel point, on détermine un simplexe auquel il appartient et on effectue une partition radiale de ce simplexe par rapport à ce point. Si la liste est épuisée, l'algorithme cherche un point extrême de P qui n'est pas un point extrême de simplexes et effectue une partition radiale. Si un tel point n'existe pas, tous les points extrêmes de P ont été énumérés et l'algorithme conclut que la meilleure solution courante est optimale. Le point extrême de la liste qui est examiné en premier est celui associé au simplexe non éliminé de plus petite borne.

Benson et Sayin [8] essentiellement précisent comment calculer un point extrême de

P qui n'est point extrême d'aucun simplexe lorsque la liste de points candidats est épuisée: cette recherche est faite tout au long de l'algorithme en calculant les points extrêmes voisins des points utilisés.

CHAPITRE 2

Borne inférieure simpliciale

Dans ce chapitre, nous considérons plus en détail les bornes inférieures obtenues en minimisant f sur un simplexe contenant $K \cap P$ où $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ est un polytope contenant O et $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$ est un cône. Rappelons que les deux bornes inférieures utilisées actuellement dans les algorithmes coniques appartiennent à cette classe (voir Chapitre 1.5.2).

Les procédures de subdivision telles que celles présentées dans le Chapitre 1.5.1 assurent que les cônes produits par les algorithmes coniques sont non-dégénérés. Cependant des cônes dégénérés peuvent apparaître comme limite d'une suite infinie de cônes lorsque l'algorithme n'est pas fini. Comme les bornes inférieures simpliciales sont appelées à jouer un rôle crucial dans les preuves de convergence des algorithmes coniques, il est naturel qu'elles soient définies à l'infini. C'est pourquoi nous ne supposons pas dans ce chapitre que le cône K pour lequel nous calculons une borne est non-dégénéré. Nous faisons par contre les hypothèses suivantes:

(\mathcal{H}_1): K n'est pas contenu dans une face de P passant par O .

(\mathcal{H}_2): chaque génératrice de K intersecte la frontière de P en un point distinct de O .

À noter que dans le cas d'algorithmes coniques utilisant des partitions, l'hypothèse (\mathcal{H}_2) est vérifiée si la partition initiale est construite en choisissant l'origine des cônes en un point extrême non-dégénéré de P comme expliqué dans le Chapitre 1.4.1, ou en un point intérieur de P comme expliqué dans le Chapitre 1.5.3. Dans ce

dernier cas, l'hypothèse (\mathcal{H}_1) est aussi vérifiée puisque aucune face de P ne passe alors par O . Si O est un point extrême non-dégénéré de P , on peut vérifier l'hypothèse (\mathcal{H}_1) en supprimant de P les contraintes satisfaites en ce point. Par définition de la partition initiale et puisque des partitions sont utilisées par la suite, ces contraintes sont en effet redondantes dans $K \cap P$ pour tout cône K généré par l'algorithme. Le polyèdre résultant n'est plus forcément borné, mais peut être rendu tel en ajoutant des contraintes satisfaites par tout x de P .

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Dans la Section 2.1, nous généralisons le concept de γ -extensions déjà rencontré au Chapitre 1.4.1 en introduisant les notions de γ -extensions inférieures et supérieures. Nous définissons ensuite dans la Section 2.2 une nouvelle borne simpliciale qui domine celle actuellement utilisée. Dans la Section 2.3, nous considérons le problème de trouver la meilleure borne simpliciale. Nous reformulons ce problème en termes de problème de maximisation quasiconcave et nous donnons un algorithme itératif pour le résoudre. Finalement, dans la Section 2.4, nous adoptons un autre point de vue: plutôt que de partir d'un cône et de calculer une borne simpliciale, nous partons d'une borne simpliciale et cherchons à quels cônes peut être associée cette borne. Nous établissons également des relations entre différentes quantités liées à une borne simpliciale pour de tels cônes: ces relations joueront un rôle clé dans les preuves de convergence des algorithmes coniques n'utilisant que des ω -partitions donnés dans le Chapitre 5.

2.1 γ -extensions

Dans cette section, nous rappelons et nous étendons la notion de γ -extension, introduite par Tuy (voir Chapitre 1.4.1).

Jusqu'à présent, les γ -extensions intervenant dans les algorithmes coniques ont toujours été définies avec γ égal à la valeur de la meilleure solution courante, c'est-à-dire à une borne supérieure de la valeur optimale recherchée. Dans cette thèse, nous

considérons également des γ -extensions calculées avec γ égal à une borne inférieure de la valeur optimale recherchée. Dans les deux cas, γ peut être vue comme un objectif que l'on souhaite dépasser: avec le premier choix, on espère trouver une borne inférieure qui soit supérieure à γ de façon à pouvoir éliminer le cône; avec le second, on espère plus modestement trouver une borne inférieure plus grande que γ de façon à améliorer la borne inférieure courante.

Dans cette thèse, nous choisissons de considérer des γ -extensions finies, suivant en cela ce qui se fait généralement dans la littérature (voir par exemple la définition des γ -extensions dans le Chapitre 1.4.1: θ_j est choisi aussi grand que l'on veut mais fini si le problème de maximisation qui le définit n'est pas borné). Ce choix se justifie par des raisons pratiques: à moins que la fonction f soit suffisamment simple pour qu'un calcul analytique soit possible, les γ -extensions sont calculées au moyen d'une recherche unidimensionnelle (par exemple, une recherche dichotomique). On souhaite tout simplement que cette recherche ait lieu sur un intervalle borné.

Pour définir des γ -extensions finies dans le cas général, nous avons besoin d'un ensemble convexe borné contenant O et tel que pour tout cône K^{0i} de la partition initiale et pour tout cône $K \subseteq K^{0i}$, l'enveloppe convexe des points d'intersection des génératrices de K avec la frontière de cet ensemble n'intersecte pas $K \cap P$. Une boule B satisfaisant ces conditions peut être facilement construite. Pour tout cône $K^{0i} = \text{cône}\{O; u^{0i1}, u^{0i2}, \dots, u^{0in}\}$ de la partition initiale, on note par Λ_i^* la valeur optimale du problème linéaire $\max\{\sum_{j=1}^n \lambda_j \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j u^{0ij} \in K^{0i} \cap P\}$. Soit $R_i = \Lambda_i^* \times \max_j \|u^{0ij}\|$: $K^{0i} \cap P$ (et par conséquent $K \cap P$ pour tout cône $K \subseteq K^{0i}$) est inclus dans la boule de centre O et de rayon R_i . Il suffit donc de prendre pour B une boule de centre O et dont le rayon R est strictement supérieur à $\max_i R_i$.

Cette construction s'inspire en grande partie de ce qui est fait dans la littérature: voir par exemple Thoai et Tuy [61] et Jacobsen [29].

Nous sommes maintenant en mesure de définir les γ -extensions. Soient Ω un point de P , u un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et $z = \Omega + \theta_z u$ un point de B distinct de Ω , et soit

γ un réel satisfaisant $\gamma \leq \min\{f(\Omega), f(z)\}$.

Soit

$$\bar{\theta} = \max\{\theta \mid f(\Omega + \theta u) \geq \gamma, \Omega + \theta u \in B, \theta \geq \theta_z\}.$$

Le point $\bar{y} = \Omega + \bar{\theta}u$ est appelé γ -extension supérieure de z par rapport à Ω .

La γ -extension *inférieure* est définie à partir de la γ -extension supérieure. Soit $\underline{\theta}$ le plus petit réel $\theta \geq \theta_z$ tel que $f(\Omega + \theta u)$ soit constante pour $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Le point

$$\underline{y} = \begin{cases} \Omega + \underline{\theta}u & \text{si } f(\bar{y}) = \gamma, \\ \bar{y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelé γ -extension inférieure de z par rapport à Ω . À noter que dans tous les cas, f est constante sur $[\underline{y}, \bar{y}]$.

Si $z = \Omega$, c.-à-d. si $\theta_z = 0$, on parle de γ -extension supérieure (respectivement inférieure) de Ω le long de u .

La notion de γ -extension supérieure coïncide avec la notion de γ -extension que l'on retrouve dans la littérature (voir par exemple Horst et Tuy [27]) et qui a été introduite originellement par Tuy (voir Chapitre 1.4.1).

La γ -extension inférieure ne diffère de la γ -extension supérieure que si f est constante autour de ce dernier point. La Figure 2.1 illustre ce cas: \underline{y} et \bar{y} sont respectivement les γ -extensions inférieure et supérieure de z par rapport à Ω , et \underline{y}' et \bar{y}' sont respectivement les γ -extension inférieure et supérieure de Ω le long de u .

Notons par $f_{\Omega,u}$ la fonction qui à tout θ associe $f(\Omega + \theta u)$, par $\underline{y} = \Omega + \underline{\theta}_\Omega u$ la γ -extension inférieure de Ω le long de u avec $\gamma = f(\Omega)$, par $\bar{y} = \Omega + \bar{\theta}_\Omega u$ la γ -extension supérieure de Ω le long de u et par $y_B = \Omega + \theta_B u$ l'intersection de la demi-droite $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \Omega + \theta u, \theta \geq 0\}$ avec δB . On a alors les résultats suivants:

Proposition 2.1 *Si f est quasiconcave, $f_{\Omega,u}$ est décroissante sur $[\underline{\theta}_\Omega, \theta_B]$.*

Preuve:

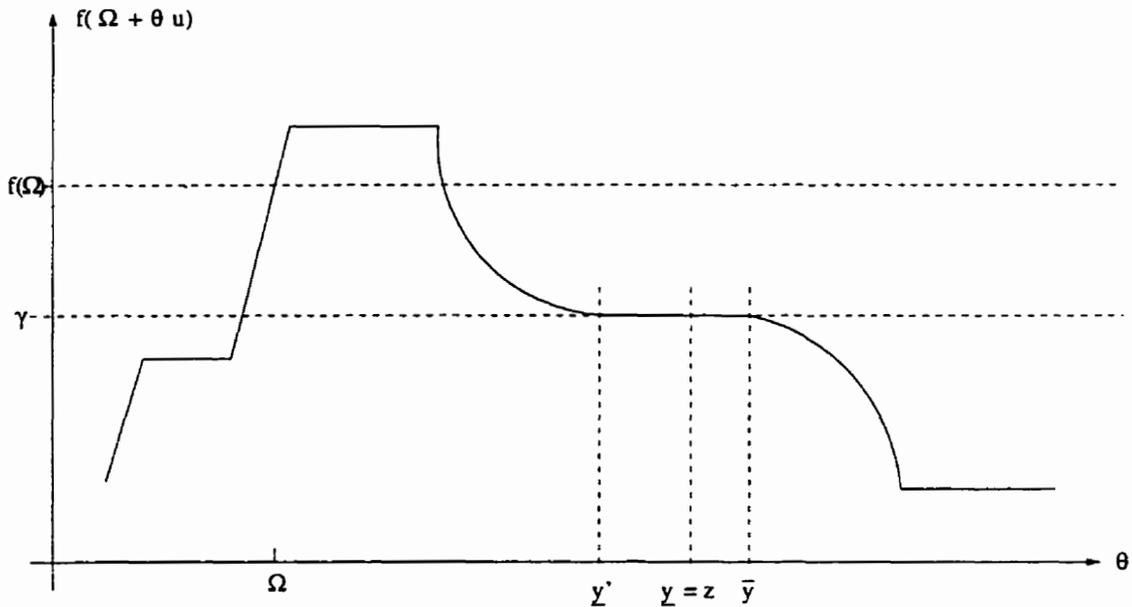


Figure 2.1: γ -extension inférieure et fonction quasiconcave

Soient θ_1 et θ_2 tels que $\theta_B \geq \theta_2 \geq \theta_1 \geq \underline{\theta}_\Omega$. Par quasiconcavité de $f_{\Omega,u}$, on a $f_{\Omega,u}(\theta_1) \geq \min\{f_{\Omega,u}(\underline{\theta}_\Omega), f_{\Omega,u}(\theta_2)\}$. Si le minimum est atteint en $f_{\Omega,u}(\theta_2)$, la preuve est terminée. Supposons donc que le minimum est atteint en $\underline{\theta}_\Omega$. Alors $f_{\Omega,u}(\theta_2) \geq f_{\Omega,u}(\underline{\theta}_\Omega) \geq \gamma$ ce qui implique $\theta_2 \leq \bar{\theta}_\Omega$ par définition de $\bar{\theta}_\Omega$. Puisque $f_{\Omega,u}$ est constante sur $[\underline{\theta}_\Omega, \bar{\theta}_\Omega]$ et que cet intervalle contient θ_1 et θ_2 , on a $f_{\Omega,u}(\theta_1) = f_{\Omega,u}(\theta_2)$. ■

Si f est concave, ce résultat peut être amélioré de la façon suivante:

Proposition 2.2 *Si f est concave, $f_{\Omega,u}$ est strictement décroissante sur $[\bar{\theta}_\Omega, \theta_B]$.*

Preuve:

Cette proposition n'a de l'intérêt que si l'intervalle $[\bar{\theta}_\Omega, \theta_B]$ n'est pas réduit à un point. Supposons que c'est le cas, et soient θ_1 et θ_2 vérifiant $\theta_B \geq \theta_2 > \theta_1 \geq \bar{\theta}_\Omega$. On peut alors écrire $\theta_1 = \mu\bar{\theta}_\Omega + (1 - \mu)\theta_2$ avec $0 < \mu \leq 1$. Par concavité de f , on a alors $f_{\Omega,u}(\theta_1) \geq \mu f_{\Omega,u}(\bar{\theta}_\Omega) + (1 - \mu)f_{\Omega,u}(\theta_2)$. Puisque $\bar{\theta}_\Omega \neq \theta_B$, on a

$f_{\Omega,u}(\bar{\theta}_\Omega) = \gamma$ et $f_{\Omega,u}(\theta) < \gamma$ pour $\theta \in]\bar{\theta}_\Omega, \theta_B]$ par définition de $\bar{\theta}_\Omega$. En particulier, $f_{\Omega,u}(\bar{\theta}_\Omega) > f_{\Omega,u}(\theta_2)$. Puisque $\mu \neq 0$, on en conclut que $f_{\Omega,u}(\theta_1) > f_{\Omega,u}(\theta_2)$. ■

Remarquer que par quasiconcavité de f , un point $x = \Omega + \theta u$ de B vérifiant $f(x) \leq f(\Omega)$ est nécessairement dans l'intervalle $[\Omega + \underline{\theta}_\Omega u, \Omega + \theta_B u]$, et que s'il vérifie $f(x) < f(\Omega)$, alors il appartient à l'intervalle $] \Omega + \bar{\theta}_\Omega u, \Omega + \theta_B u]$.

À noter que si f est telle que l'ensemble de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \gamma\}$ est borné pour tout γ , les γ -extensions sont naturellement finies: on n'a donc pas besoin de définir une boule B dans ce cas.

Finalement, notons que pour tous les algorithmes présentés dans le Chapitre 5 sauf un, la fonction f n'est évaluée qu'à l'intérieur de la boule B . Il suffit donc que la fonction f soit définie, continue et (quasi)concave sur B plutôt que sur \mathbb{R}^n .

2.2 Borne inférieure simpliciale

Une borne inférieure simpliciale est obtenue en minimisant f sur un simplexe contenant $K \cap P$, ledit simplexe étant obtenu en intersectant le cône par un demi-espace. Dans la Section 2.2.1, nous définissons cette borne de façon plus précise. Dans la Section 2.2.2, nous rappelons la borne simpliciale décrite dans le Chapitre 1.5.2 en y incorporant les concepts de γ -extensions inférieure et supérieure et nous expliquons son défaut. Un remède est proposé dans la Section 2.2.3 qui consiste à considérer des hyperplans s'appuyant sur tout le polytope P plutôt que seulement sur la portion contenue dans le cône courant. Dans la Section 2.2.4, une nouvelle borne simpliciale utilisant ces hyperplans est définie. Dans la Section 2.2.5, nous montrons que cette nouvelle borne est très étroitement liée à la borne simpliciale définie dans la Section 2.2.2 mais que dans certains cas elle domine strictement cette dernière.

2.2.1 Définition

Soit $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$ un cône possiblement dégénéré. Soit H un hyperplan ne passant pas par O , intersectant les génératrices de K en les points $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ et tel que $S = \text{conv}\{O, z^1, \dots, z^n\}$ contient $K \cap P$. Alors $\min_{x \in S} f(x)$ est une borne inférieure de f sur $K \cap P$.

Cette borne inférieure est appelée borne inférieure simpliciale et est notée $BIS(K, H)$.

Par quasiconcavité de f , le minimum de f sur S est atteint en un de ses points extrêmes. D'où l'expression de la borne simpliciale:

$$BIS(K, H) = \min\{f(O), f(z^1), \dots, f(z^n)\}. \quad (2.1)$$

Si K est non-dégénéré, un exemple de borne simpliciale est la borne inférieure décrite dans le Chapitre 1.5.2 où H est l'hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$ et parallèle à l'hyperplan H_γ déterminé par les γ -extensions.

À noter que si K est dégénéré, l'ensemble S n'est pas un simplexe au sens traditionnel du terme puisque les points O, z^1, \dots, z^n ne sont alors plus affinement indépendants. Par abus de langage, nous continuerons cependant d'utiliser ce terme.

2.2.2 Défaut de la borne simpliciale classique

Nous commençons par rappeler le calcul de la borne simpliciale décrite dans le Chapitre 1.5.2 en y incorporant le concept de γ -extension inférieure et supérieure.

Soit $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$ un cône non-dégénéré, et soit y^j un point de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K , distinct de O et appartenant à la boule B , pour $j = 1, 2, \dots, n$.

En pratique, les points $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ seront des γ -extensions pour une certaine valeur de γ inférieure à $\min\{f(O), f(v^1), \dots, f(v^n)\}$ où les $v^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont les points d'intersection des génératrices de K avec la frontière du polytope. Si aucune information préalable n'est disponible, les γ -extensions supérieures devraient être

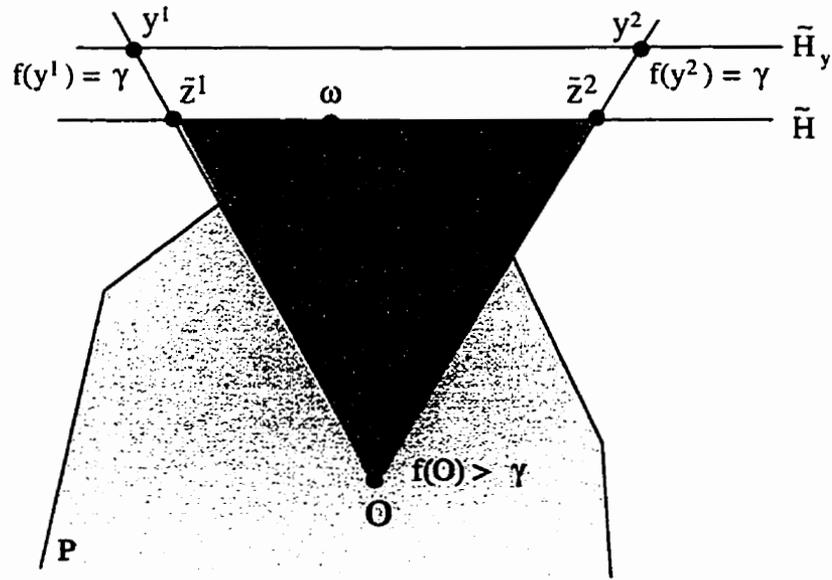


Figure 2.2: Borne inférieure simpliciale classique

utilisées. Dans certains cas cependant, l'utilisation des γ -extensions inférieures est plus appropriée, ou même est indispensable (voir par exemple la Section 2.3.4).

On considère ensuite l'hyperplan \tilde{H}_y passant par les points $y^j, j = 1, 2, \dots, n$. Puisque cet hyperplan ne passe pas par O , on peut écrire son équation sous la forme $\tilde{\alpha}x = 1$. On déplace ensuite cet hyperplan parallèlement jusqu'à ce qu'il s'appuie sur $K \cap P$, de façon à obtenir un hyperplan \tilde{H} d'équation $\tilde{\alpha}x = \tilde{\rho}$ (voir Figure 2.2). Par définition, $\tilde{\rho}$ est la valeur optimale du problème

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{\alpha}x \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in K. \end{cases} \end{array}$$

En posant $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j y^j, \lambda \geq 0$, on obtient le problème linéaire équivalent

$$PLBIS1(Y) \quad \max \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

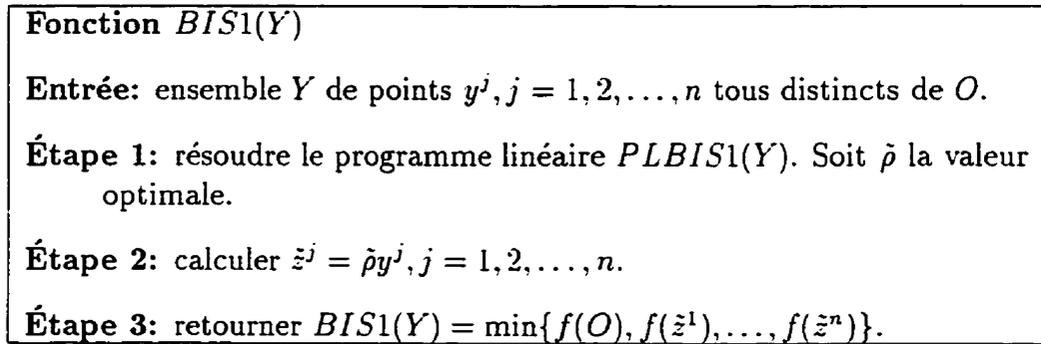


Figure 2.3: Procédure de calcul de la borne inférieure simpliciale $BIS1(Y)$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} A \sum_{j=1}^n \lambda_j y^j \leq b \\ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Finalement, la borne simpliciale $BIS1(Y)$ est déterminée par

$$BIS1(Y) = BIS(K, \tilde{H}) = \min\{f(O), f(\tilde{z}^1), \dots, f(\tilde{z}^n)\} \quad (2.2)$$

avec

$$\tilde{z}^j = \tilde{\rho}y^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

À noter que si K est dégénéré, $BIS1(Y)$ définit encore une borne inférieure de f sur $K \cap P$. En effet, par définition de $\tilde{\rho}$ et de $PLBIS1(Y)$, on a $K \cap P \subseteq \text{conv}\{O, \tilde{\rho}y^1, \dots, \tilde{\rho}y^n\}$ et donc par quasiconcavité de f , $\min_{x \in K \cap P} f(x) \geq \min\{f(O), f(\tilde{\rho}y^1), \dots, f(\tilde{\rho}y^n)\}$.

L'algorithme de la borne simpliciale classique est résumé dans la Figure 2.3.

Le défaut principal de cette borne simpliciale est qu'elle n'est pas correctement définie si K est dégénéré.

En effet, dans le cas dégénéré, il peut arriver qu'il existe une infinité d'hyperplans

\tilde{H}_y passant par les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ (par exemple si deux génératrices de K coïncident), auquel cas la borne simpliciale n'est pas définie de façon unique.

Les cas où l'hyperplan \tilde{H}_y est déterminé de façon unique ne sont guère plus sympathiques, car cet hyperplan contient alors entièrement K . En effet, puisque K est dégénéré, il est entièrement inclus dans un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension strictement inférieure à n , donc dans un sous-espace de dimension $n - 1$; or les sous-espaces de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$ sont justement ce qu'on appelle "hyperplan".

À partir du moment où l'hyperplan \tilde{H}_y contient K , l'hyperplan \tilde{H} qui lui est parallèle et s'appuyant sur $K \cap P$ coïncide avec \tilde{H}_y . Finalement, puisque les génératrices de K sont contenues entièrement dans \tilde{H} , il y a une infinité de points d'intersection des génératrices avec l'hyperplan et il n'est plus possible de définir un simplexe \tilde{S} contenant $K \cap P$ (il est facile de voir que choisir un point d'intersection de façon arbitraire sur chacune des génératrices ne donne pas une borne inférieure).

Ce mauvais comportement de la borne simpliciale classique à la limite a été un obstacle important à la démonstration de la convergence infinie des algorithmes coniques (voir par exemple Horst et Tuy [27]) et a nécessité d'adapter les règles de subdivision en conséquence (d'où l'introduction des bisections et autres subdivisions exhaustives et plus récemment des subdivisions normales: voir le Chapitre 1.5.1).

2.2.3 Un remède: les hyperplans s'appuyant sur le polytope

L'hyperplan définissant la borne simpliciale classique s'appuie sur $K \cap P$. Lorsque K est dégénéré, un tel hyperplan peut passer par O , auquel cas la borne simpliciale n'est plus définie. Dans cette section, nous montrons, sous les hypothèses (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2) , que si l'hyperplan est assujéti à s'appuyer non pas sur $K \cap P$ mais sur tout le polytope P , il ne peut pas passer par O .

Dans un premier temps, nous caractérisons les hyperplans s'appuyant sur P .

Lemme 2.1 L'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x = \beta\}$ s'appuie sur $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ si et seulement si il existe $\mu \geq 0$ tel que $\alpha = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i$ et $\beta = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$.

Preuve:

H s'appuie sur P si et seulement si la solution optimale du programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \max & \alpha x \\ \text{s.c.} & a^i x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

est β , ce qui est équivalent à dire, d'après les résultats sur la dualité en programmation linéaire (voir par exemple Luenberger [45]) que le problème dual

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \\ \text{s.c.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^m \mu_i a^i = \alpha \\ \mu \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a une solution optimale de valeur β . •

Proposition 2.3 Soit H un hyperplan s'appuyant sur P et formant avec le cône (possiblement dégénéré) $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$ un simplexe S . Alors, sous les hypothèses (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2) , H ne passe pas par O .

De plus, si $O \in \text{int}P$, il existe un réel M indépendant de K tel que la distance $d(H, O)$ de H à O soit supérieure à M .

Preuve:

D'après le Lemme 2.1, l'équation de H s'écrit $\alpha' x = \beta'$ avec $\alpha' = \sum_{i=1}^m \mu'_i a^i$, $\beta' = \sum_{i=1}^m \mu'_i b_i$ et $\mu' \geq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\beta' \geq 0$. Soient $I_= = \{i \mid b_i = 0, \mu'_i > 0\}$ et $I_> = \{i \mid b_i > 0, \mu'_i > 0\}$ (rappelons que b_i est positif pour tout i puisque O est un point du polytope P).

Montrons que $I_>$ est non-vide. Pour cela, supposons le contraire. Dans ce cas

$I_=<$ est non-vidé. D'après l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , pour tout i de $I_=<$, il existe un point v^i de K tel que $a^i v^i < 0$. En utilisant l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , on peut supposer sans perte de généralité que v^i appartient à P . Soit v le barycentre de ces points: v appartient à $K \cap P$ et donc à S . De plus, il vérifie $a^i v < 0$ pour tout i de $I_=<$, d'où l'on déduit $\alpha' v = \sum_{i=1}^m \mu'_i a^i v < 0$. Donc la demi-droite $\lambda v, \lambda \geq 0$ est entièrement contenue dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha' x \leq \beta'\}$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle H intersecte les génératrices de K . On en conclut que $I_>$ est non-vidé. Soit k un de ses éléments: on a alors $\beta' = \sum_{i=1}^m \mu'_i b_i \geq \mu'_k b_k > 0$, ce qui montre que $O \notin H$.

En posant $\alpha = \frac{\alpha'}{\beta'}$, on peut alors écrire l'équation de H sous la forme $\alpha x = 1$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i, \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = 1$ et $\mu_i = \frac{\mu'_i}{\beta'} \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Puisque $\sum_{i=1}^m \mu_i b_i = 1$ avec $\mu \geq 0$, on a $\mu_i \leq \frac{1}{b_i}$ pour tout i de $I_>$. Soit v le point défini plus haut. Rappelons que $a^i v < 0$ pour tout i de $I_=<$, $a^i v \leq b_i$ pour tout i de $I_>$ et $\alpha v \geq 0$. On a donc

$$\sum_{i \in I_=<} \mu_i (-a^i v) = \sum_{i \in I_>} \mu_i a^i v - \alpha v \leq \sum_{i \in I_>} \mu_i b_i = 1$$

d'où $\mu_i \leq \frac{1}{-a^i v}$ pour tout $i \in I_=<$.

Si O est un point intérieur de P , $I_=<$ est vide, d'où $\|\alpha\| \leq \sum_{i=1}^m \mu_i \|a^i\| \leq \sum_{i=1}^m \frac{\|a^i\|}{b_i}$.

Or la distance de l'hyperplan à O est égale à $d(H, O) = \frac{|\alpha O - 1|}{\|\alpha\|} = \frac{1}{\|\alpha\|}$. Il

suffit donc de prendre $M = 1 / \sum_{i=1}^m \frac{\|a^i\|}{b_i}$. ■

À noter que si O est un point de la frontière de P , on pourrait retrouver le même problème qu'avec des hyperplans s'appuyant sur $K \cap P$, à savoir qu'une suite de cônes non contenus dans une face de P passant par O (c.-à-d. satisfaisant l'hypothèse (\mathcal{H}_1)) pourrait tendre vers un cône limite contenu dans une face de P passant par O , auquel cas un hyperplan s'appuyant sur P et formant avec ce cône limite un simplexe

pourrait passer par O . Mais puisqu'un cône dégénéré n'est pas forcément contenu dans une face de P passant par O , l'hypothèse (\mathcal{H}_1) est moins forte que de supposer que le cône est non-dégénéré. De plus, il est souvent possible de se ramener au cas où O est un point intérieur de P (voir la remarque en début de ce chapitre).

2.2.4 Nouvelle borne simpliciale

La borne simpliciale classique possède la propriété intéressante que s'il existe un simplexe contenant $K \cap P$ et contenu dans $S_y = \text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$ où $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont des γ -extensions pour une certaine valeur γ , ce simplexe est trouvé par la méthode (tout au moins si K est un cône non-dégénéré). Cette propriété est souhaitable puisque la valeur de γ servant à définir les γ -extensions est souvent un objectif que l'on souhaite dépasser (par exemple, γ peut être la valeur de la meilleure solution courante, auquel cas on est intéressé à ce que la borne inférieure soit supérieure de façon à pouvoir éliminer le cône; ou bien γ peut être une borne inférieure que l'on souhaite améliorer).

De façon à avoir une propriété semblable, nous cherchons un hyperplan s'appuyant sur P , qui intersecte les génératrices de K et qui minimise ρ tel que le simplexe obtenu soit contenu dans $\text{conv}\{O, \rho y^1, \dots, \rho y^n\}$. Plus précisément, on cherche $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ avec $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^m \hat{\mu}'_i a^i$ où $\hat{\mu}'$ est une solution optimale du problème

$$\begin{array}{ll} \min & \rho \\ & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \mu'_i a^i (\rho y^j) \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m \mu'_i b_i = 1 \\ \mu' \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} (2.4) \\ (2.5) \\ (2.6) \end{array}$$

Les contraintes (2.5) et (2.6) expriment que l'hyperplan d'équation $\alpha x = 1$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i$ s'appuie sur P , et les contraintes (2.4) traduisent que ρy^j est de l'autre côté de l'hyperplan par rapport à O .

Il est possible d'éliminer la variable ρ et de rendre le problème linéaire en posant $\mu_i = \rho \mu'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Le problème devient alors

$$PLBIS2(Y) \quad \min \quad \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \mu_i a^i y^j \geq 1, & j = 1, 2, \dots, n \\ \mu \geq 0. \end{cases}$$

Soient $\hat{\rho}$ sa valeur optimale et $\hat{\mu}$ une solution optimale. L'hyperplan $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ avec $\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\rho}} \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i a^i$ s'appuie sur P et intersecte les génératrices de K en

$$\hat{z}^j = \frac{y^j}{\hat{\alpha} y^j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

La nouvelle borne simpliciale est alors

$$BIS2(Y) = BIS(K, \hat{H}) = \min\{f(O), f(\hat{z}^1), \dots, f(\hat{z}^n)\}.$$

En comparant (2.7) avec l'expression correspondante (2.3) pour la borne simpliciale classique, on constate que les points \hat{z}^j sont plus difficiles à calculer que leurs homologues \tilde{z}^j . On peut remédier en partie à ce défaut en ajoutant des variables d'écart:

$$PLBIS2'(Y) \quad \min \quad \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} (\sum_{i=1}^m \mu_i a^i) y^j - \nu_j = 1, & j = 1, 2, \dots, n \\ \mu, \nu \geq 0. \end{cases}$$

Si $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ est une solution optimale de ce problème, les points $\hat{z}^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont

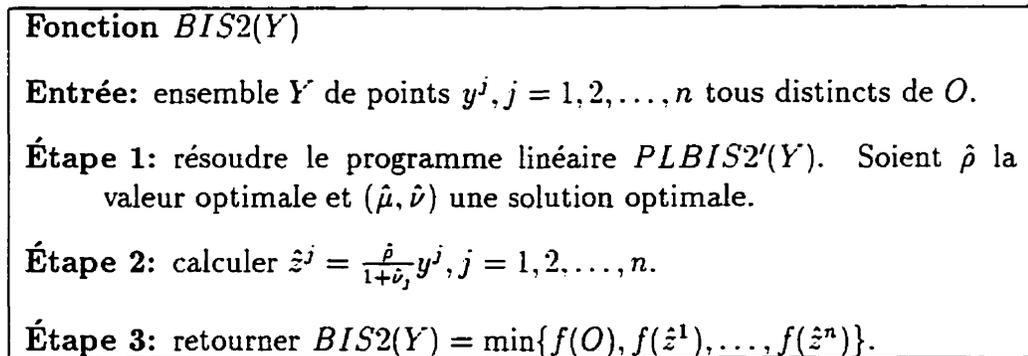


Figure 2.4: Procédure de calcul de la borne inférieure simpliciale $BIS2(Y)$

alors donnés par la formule

$$\hat{z}^j = \frac{\hat{\rho}}{1 + \hat{\nu}_j} y^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

(En pratique les logiciels de programmation linéaire tels que CPLEX [12] permettent l'accès aux variables d'écart ν_j lorsqu'on résout le problème $PLBIS2(Y)$: il n'est donc pas nécessaire d'introduire explicitement ces variables d'écart.)

L'algorithme de calcul de cette borne est résumé dans la Figure 2.4.

2.2.5 Liens avec la borne simpliciale classique

En observant les programmes linéaires utilisés pour calculer les deux bornes simpliciales $BIS1$ et $BIS2$, à savoir

$$\begin{array}{ll}
 PLBIS1(Y) & \min \sum_{j=1}^n \lambda_j \\
 & \text{s.c.} \quad \begin{cases} a^i(\sum_{j=1}^n \lambda_j y^j) \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

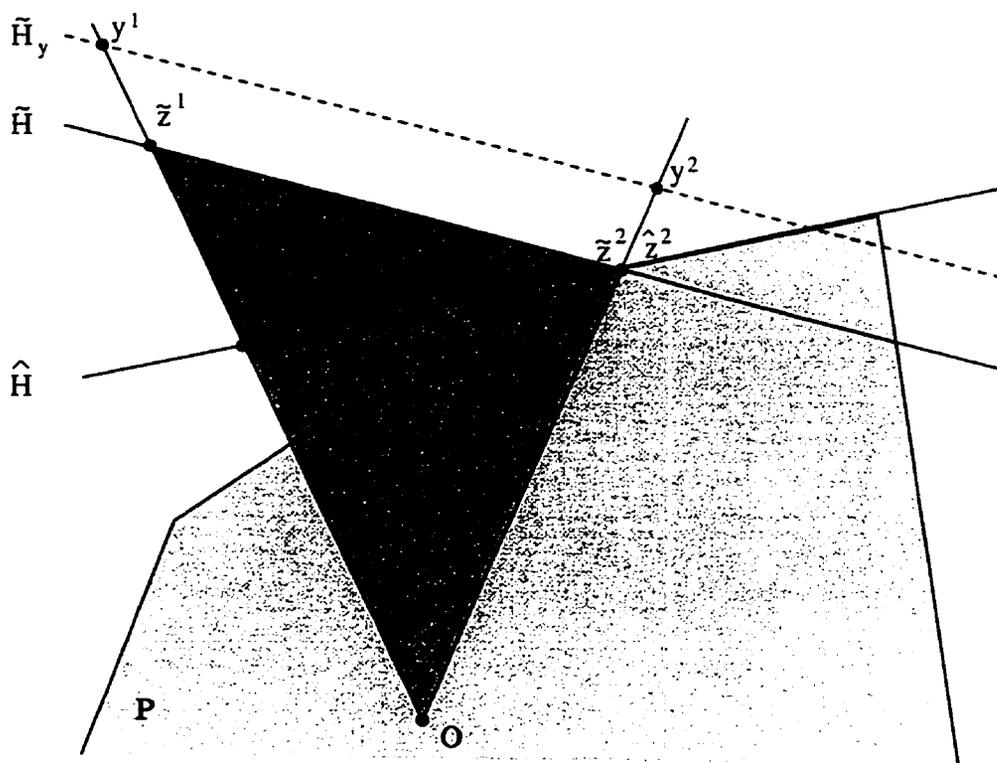


Figure 2.5: Borne inférieure simpliciale classique et nouvelle

et

$$\begin{aligned}
 PLBIS2(Y) \quad \max \quad & \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m \mu_i a^i y^j \geq 1, & j = 1, 2, \dots, n \\ \mu \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

on constate qu'ils sont duaux!

Cette importante observation a plusieurs conséquences. Rappelons tout d'abord quelques notations.

Soient $\tilde{\lambda}$ une solution optimale de $PLBIS1(Y)$ de valeur optimale $\tilde{\rho}$ et $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ une solution optimale de $PLBIS2'(Y)$ de valeur $\hat{\rho}$.

À partir de $\tilde{\lambda}$, on construit un point $\tilde{\omega}$ de $K \cap P$ par $\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y^j$. On note $\tilde{S} =$

$\text{conv}\{O, \tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n\}$ avec $\tilde{z}^j = \tilde{\rho}y^j, j = 1, 2, \dots, n$.

À partir de $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$, on définit un hyperplan \hat{H} d'équation $\hat{\alpha}x = 1$ avec $\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\rho}} \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i a^i$.

Cet hyperplan définit un simplexe $\hat{S} = \text{conv}\{O, \hat{z}^1, \dots, \hat{z}^n\}$ contenant $K \cap P$.

Propriété 2.1 *BIS1 s'obtient en calculant les $\hat{z}^j, j = 1, 2, \dots, n$ à l'Étape 2 de la fonction BIS2 par la formule $\hat{z}^j = \hat{\rho}y^j, j = 1, 2, \dots, n$.*

En effet, par définition $BIS1(Y) = \min\{f(O), f(\hat{z}^1), \dots, f(\hat{z}^n)\}$ avec $\hat{z}^j = \hat{\rho}y^j, j = 1, 2, \dots, n$ où $\hat{\rho}$ est la valeur optimale de $PLBIS1(Y)$. Mais puisque $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$ sont duaux, on a $\hat{\rho} = \tilde{\rho}$.

Propriété 2.2 $\tilde{\omega}$ est un point d'appui de \hat{H} , c.-à-d. appartient à $K \cap P \cap \hat{H}$.

Par réalisabilité de $\tilde{\lambda}$, le point $\tilde{\omega}$ appartient à $K \cap P$. Puisque $\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j = \tilde{\rho}$ par optimalité de $\tilde{\lambda}$, et $\hat{\alpha}(\tilde{\rho}y^j) \geq 1, j = 1, 2, \dots, n$ par définition de $\hat{\alpha}$, on a $\hat{\alpha}\tilde{\omega} \geq 1$. Mais puisque \hat{H} s'appuie sur P , on a aussi $\hat{\alpha}\tilde{\omega} \leq 1$. On en déduit que $\hat{\alpha}\tilde{\omega} = 1$, c.-à-d. que $\tilde{\omega}$ appartient à \hat{H} .

Incidemment, cette propriété montre que \hat{H} s'appuie sur le polytope P en un point de K , ce qui ne semblait pas évident a priori. À noter que la réciproque de la Propriété 2.2 n'est pas vraie: tout point de $K \cap P \cap \hat{H}$ ne correspond pas à une solution optimale de $PLBIS1(Y)$ (voir Exemple 2.1).

Propriété 2.3 *On a l'inclusion $K \cap P \subseteq \hat{S} \subseteq \tilde{S}$. De plus, pour tout j tel que $\tilde{\lambda}_j > 0$, on a $\tilde{z}^j = \hat{z}^j$.*

On sait déjà que $K \cap P \subseteq \hat{S}$. D'autre part, puisque $\hat{z}^j = \frac{1}{1+\hat{\nu}_j} \tilde{z}^j$ avec $\hat{\nu}_j \geq 0$, on a $\hat{z}^j \in [O\tilde{z}^j]$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. D'où l'inclusion $\hat{S} \subseteq \tilde{S}$.

Finalement, d'après les relations de complémentarité en programmation linéaire, on a $\tilde{\lambda}_j \hat{\nu}_j = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, ce qui montre que $\hat{z}^j = \tilde{z}^j$ pour tout j tel que $\tilde{\lambda}_j > 0$.

Propriété 2.4 $BIS2(Y) \geq BIS1(Y)$.

Cette propriété découle directement de l'inclusion $\hat{S} \subseteq \tilde{S}$ de la Propriété 2.3. À noter que si $BIS1(Y)$ est atteint en un point \tilde{z}^j tel qu'il existe une solution optimale $\tilde{\lambda}$ de $PLBIS1(Y)$ vérifiant $\tilde{\lambda}_j > 0$, on a $BIS2(Y) = BIS1(Y)$ puisque \tilde{z}^j est aussi un point de \hat{S} d'après la Propriété 2.3. L'exemple suivant montre que $BIS2$ peut être strictement meilleure que $BIS1$.

Exemple 2.1 Soit K un cône de \mathbb{R}^3 défini par $K = \text{cône}\{O; u^1, u^2, u^3\}$ avec $u^1 = (-1, 1, 0)$, $u^2 = (1, 1, 0)$ et $u^3 = (0, 1, 1)$. Soit P un polytope dont les contraintes jouant un rôle dans K sont

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Considérons la fonction concave définie par $f(x) = -x_1^2 - x_3$ et fixons γ à -4 . Les γ -extensions (inférieures et supérieures) le long des génératrices de K sont $y^1 = 2u^1$, $y^2 = 2u^2$ et $y^3 = 4u^3$. Le programme linéaire $PLBIS1(Y)$ est alors

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 4\lambda_1 + 4\lambda_3 \leq 1 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 \leq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution optimale est $\tilde{\lambda} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ de valeur $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}$. Les points utilisés pour calculer la borne simpliciale $BIS1$ sont donc

$$\begin{aligned} \tilde{z}^1 &= \frac{1}{2}y^1 = u^1 & \text{de valeur } f(\tilde{z}^1) &= -1 \\ \tilde{z}^2 &= \frac{1}{2}y^2 = u^2 & \text{de valeur } f(\tilde{z}^2) &= -1 \\ \tilde{z}^3 &= \frac{1}{2}y^3 = 2u^3 & \text{de valeur } f(\tilde{z}^3) &= -2. \end{aligned}$$

On en déduit que $BIS1(Y) = -2$.

Une solution optimale du problème dual $PLBIS2(Y)$:

$$\min \quad \mu_1 + \mu_2$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 4\mu_1 & \geq 1 \\ 4\mu_2 & \geq 1 \\ 4\mu_1 + 4\mu_2 & \geq 1 \\ \mu_1, \mu_2 & \geq 0 \end{cases}$$

est $\hat{\mu} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. On en déduit que l'hyperplan \hat{H} est l'hyperplan d'équation $x_2 = 1$.

Les points d'intersection des génératrices de K avec \hat{H} sont alors

$$\hat{z}^1 = \frac{1}{2}y^1 = u^1 \quad \text{de valeur } f(\hat{z}^1) = -1$$

$$\hat{z}^2 = \frac{1}{2}y^2 = u^2 \quad \text{de valeur } f(\hat{z}^2) = -1$$

$$\hat{z}^3 = \frac{1}{4}y^3 = u^3 \quad \text{de valeur } f(\hat{z}^3) = -1.$$

On en déduit que $BIS2(Y) = -1 > BIS1(Y)$.

À noter que le point u^3 appartient à $K \cap P$ et est sur \hat{H} . Puisque $u^3 = \frac{1}{4}y^3$, u^3 correspond à la solution réalisable $\tilde{\lambda}' = (0, 0, \frac{1}{4})$ de $PLBIS1(Y)$ qui n'est clairement pas optimale. Donc tout point de $K \cap P \cap \hat{H}$ ne correspond pas à une solution optimale de $PLBIS1(Y)$.

2.2.6 Interprétation de ρ

Dans cette section, nous regroupons deux résultats portant sur ρ , valeur optimale communes des problèmes $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$. Le premier donne une interprétation géométrique de l'égalité $\rho = 1$ tandis que le deuxième montre comment varie ρ lorsque Y varie. Pour prouver plus facilement le deuxième résultat, nous donnons une reformulation de $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$ qui vise à transférer respectivement dans la fonction objectif et le second membre tout ce qui dépend de Y . Ces reformulations seront utiles en pratique pour implanter efficacement la procédure de calcul de la meilleure borne simpliciale définie dans la Section 2.3.4.

Proposition 2.4 Soit y^j un point de la génératrice j de K , distinct de O , pour $j = 1, 2, \dots, n$ et soit ρ la valeur optimale du problème $PLBIS1(Y)$. Alors

$$i) \rho < 1 \text{ si et seulement si } \text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P = \emptyset.$$

ii) $\rho \leq 1$ si et seulement si il existe un hyperplan ne passant pas par O et séparant les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ de $K \cap P$.

Preuve:

Plutôt que de prouver i), nous considérons sa contraposée. Supposons d'abord que $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P \neq \emptyset$. Alors il existe $\lambda \geq 0$ satisfaisant $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ tel que $w = \sum_{j=1}^n \lambda_j y^j$ appartient à P : λ est donc une solution réalisable de valeur 1 du problème $PLBIS1(Y)$. Comme il s'agit d'un problème de maximisation, sa valeur optimale ρ est supérieure à 1.

Réciproquement, supposons que $\rho \geq 1$ et soit $\tilde{\lambda}$ une solution optimale de $PLBIS1(Y)$. Soit $\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y^j$ le point de $K \cap P$ correspondant: $\frac{1}{\rho} \tilde{\omega}$ appartient au segment $[O\tilde{\omega}]$ donc à P . Puisque $\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j = \rho$, le point $\frac{1}{\rho} \tilde{\omega}$ appartient aussi à $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\}$, d'où $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P \neq \emptyset$.

Considérons maintenant la proposition ii). Soit $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ l'hyperplan associé à la solution optimale du problème $PLBIS2(Y)$: \hat{H} s'appuie sur P donc P est contenu dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x \leq 1\}$. D'autre part, $\hat{\alpha}\rho y^j \geq 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, soit encore $\hat{\alpha}y^j \geq \frac{1}{\rho}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Si $\rho \leq 1$, on a donc $\hat{\alpha}y^j \geq 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, ce qui montre que \hat{H} sépare P (et donc en particulier $K \cap P$) des $y^j, j = 1, 2, \dots, n$.

Réciproquement, soit H un hyperplan ne passant pas par O et séparant les $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ de $K \cap P$. Puisque H ne passe par O , son équation peut s'écrire $\alpha x = 1$: on a alors $\alpha y^j \geq 1, j = 1, 2, \dots, n$ et $K \cap P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \leq 1\}$. Supposons que $\rho > 1$ et soit $\tilde{\lambda}$ une solution optimale de $PLBIS1(Y)$. Considérons le point $\omega = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y^j$. On a $\alpha\omega = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \alpha y^j \geq \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j = \rho > 1$. Mais ω appartient à $K \cap P$ par définition de $\tilde{\lambda}$, d'où contradiction. Donc $\rho \leq 1$. ■

En particulier, si le cône K est non-dégénéré et si $K \cap P$ est inclus dans le simplexe $S = \text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$, on a $\rho \leq 1$. En effet, l'hyperplan H_y défini par les

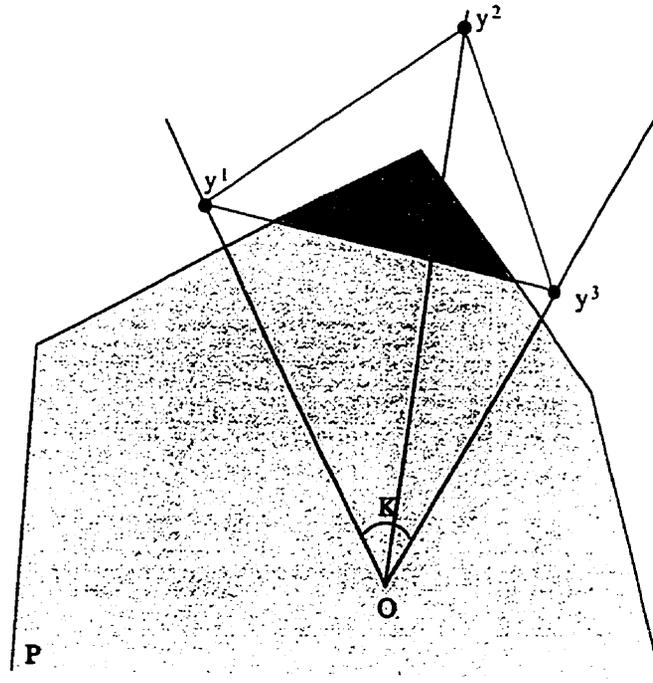


Figure 2.6: Interprétation de ρ pour un cône dégénéré

$y^j, j = 1, 2, \dots, n$ ne passe par O et sépare $K \cap P$ des $y^j, j = 1, 2, \dots, n$. Si par contre le cône K est dégénéré, l'inclusion $K \cap P \subseteq \text{conv}\{O, y^1, \dots, y^n\}$ n'implique pas $\rho \leq 1$ car l'intersection $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P$ peut être non-vide comme le montre la Figure 2.6. Dans un autre ordre d'idée, ceci montre aussi qu'on ne gagnerait rien à considérer un cône défini par p génératrices, $p > n$.

Avant d'énoncer le prochain résultat, nous donnons une reformulation des problèmes $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$. Cette reformulation n'est pas nouvelle pour $PLBIS1(Y)$ (voir par exemple Horst et Thoai [27]).

Soit u^j un point de référence de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K (par exemple le point d'intersection de la génératrice avec la frontière du polytope). Alors on peut écrire y^j sous la forme $y^j = \theta_j u^j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Le problème $PLBIS1(Y)$ devient alors

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} A \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j u^j \leq b \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

soit, après un changement de variable évident

$$\begin{aligned} PLBIS1r(\theta) \quad \max \quad & \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\theta_j} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} A \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j \leq b \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual correspondant est

$$\begin{aligned} PLBIS2r(\theta) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m \mu_i a^i u^j \geq \frac{1}{\theta_j} \\ \mu \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Clairement les valeurs optimales de $PLBIS1(Y)$, $PLBIS2(Y)$, $PLBIS1r(\theta)$ et $PLBIS2r(\theta)$ restent les mêmes.

À noter que le domaine de réalisabilité de $PLBIS1r(\theta)$ et la fonction objectif de $PLBIS2r(\theta)$ ne dépendent pas de θ . On a de plus le résultat suivant:

Proposition 2.5 Soient $\theta \geq \theta' > 0$. Si ρ et ρ' désignent respectivement les valeurs optimales des couples primal-dual $(PLBIS1r(\theta), PLBIS2r(\theta))$ et $(PLBIS1r(\theta'), PLBIS2r(\theta'))$, alors

$$\rho' \geq \rho.$$

De plus, le domaine de réalisabilité de $PLBIS2r(\theta')$ est inclus dans celui de $PLBIS2r(\theta)$.

Preuve:

Par hypothèse $\theta_j \geq \theta'_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. On a alors $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\theta'_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\theta_j}$. Puisque le domaine réalisable est le même pour $PLBIS1r(\theta)$ et $PLBIS1r(\theta')$, on en déduit $\rho' \geq \rho$.

Soit μ une solution réalisable de $PLBIS2r(\theta')$. Alors $\sum_{i=1}^m \mu_i a^i u^j \geq \frac{1}{\theta'_j} \geq \frac{1}{\theta_j}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, ce qui montre que μ est réalisable pour $PLBIS2r(\theta)$. (À noter que cela donne une autre façon d'obtenir l'inégalité $\rho' \geq \rho$.) ■

2.2.7 Conclusion

Dans cette section, nous avons introduit une nouvelle borne simpliciale $BIS2$. Celle-ci est correctement définie sous des hypothèses sur K moins restrictives que pour la borne actuelle $BIS1$ et ces hypothèses peuvent être facilement vérifiées dans de nombreux cas. De plus cette nouvelle borne donne toujours une valeur au moins aussi bonne que $BIS1$, parfois meilleure, au prix d'un léger accroissement des calculs.

De façon un peu magique, ces deux méthodes sont étroitement liées entre elles. En particulier, le point extrême $\tilde{\omega}$ de $K \cap P$ qui apparaît naturellement dans le calcul de $BIS1$ est un point en lequel l'hyperplan \hat{H} qui définit $BIS2$ s'appuie sur P . Ces deux quantités, qui doivent être considérées comme étant aussi importantes que la borne elle-même, sont notées $\omega(K)$ et $\hat{H}(K)$ quelle que soit la borne effectivement utilisée. Ce lien entre ces deux bornes permettra en particulier, grâce aux propriétés de l'hyperplan \hat{H} , de montrer la convergence de l'algorithme BALI73 (voir Chapitre 5.2) malgré que cet algorithme utilise une procédure basée sur la borne $BIS1$.

2.3 Détermination de la meilleure borne inférieure simpliciale

Dans un algorithme de type *branch-and-bound*, il est très important d'avoir une bonne borne inférieure: en effet, cela fait souvent la différence entre ajouter des cônes dans la liste de cônes à traiter, ou bien réduire la taille de cette liste en en éliminant un (rappelons que l'algorithme s'arrête lorsque tous les cônes ont été éliminés, c'est-à-dire lorsque la liste est vide). C'est pourquoi nous considérons dans cette section le calcul de la meilleure borne simpliciale. Dans la Sous-section 2.3.1, nous définissons plus précisément le problème considéré. Ce dernier est transformé en un problème de maximisation quasiconcave dans la Sous-section 2.3.2. Afin de pouvoir développer une procédure mieux adaptée à la structure du problème, nous considérons les conditions d'optimalité dans la Sous-section 2.3.3. Finalement, cette procédure est donnée dans la Sous-section 2.3.4.

2.3.1 Définition

Dans cette section, nous restreignons les hyperplans définissant une borne simpliciale à s'appuyer sur P et à intersecter les génératrices de K dans la boule B , et nous nous intéressons à la meilleure borne simpliciale sous ces conditions. Plus précisément, soit $\mathcal{H}(K, B)$ l'ensemble des hyperplans s'appuyant sur P et intersectant les génératrices de K dans B . Nous considérons le problème

$$(PMBIS) \quad \max_{H \in \mathcal{H}(K, B)} BIS(K, H).$$

Notons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{H}(K, B)$ n'est pas vide. En effet, considérons $Y = (y^1, \dots, y^n)$ où $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont les points d'intersection des génératrices de K avec la sphère délimitant la boule B . Par définition de B , $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P = \emptyset$, donc le problème linéaire $PLBIS1(Y)$ a une valeur optimale $\tilde{\rho} < 1$ d'après la Proposi-

tion 2.4. Cette valeur optimale est également celle de son problème dual $PLBIS2(Y)$. La solution optimale de ce dernier problème définit donc un hyperplan \hat{H} appartenant à $\mathcal{H}(K, B)$.

À noter que la valeur optimale du problème ($PMBIS$) est encadrée par la borne simpliciale correspondant à cet hyperplan \hat{H} et par $f(O)$ (aucune borne inférieure ne peut être strictement supérieure à $f(O)$), donc est finie.

Remarquons aussi qu'on n'a rien perdu en se restreignant à des hyperplans s'appuyant sur P plutôt que sur $K \cap P$. Supposons que H est un hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$ et formant avec K un simplexe contenu dans B . Soit γ sa borne simpliciale. Soit Y l'ensemble des points d'intersection y^j des génératrices de K avec H . La valeur optimale de $PLBIS1(Y)$ est égale à 1 et $BIS1(Y) = \gamma$. Par la Propriété 2.4. on a $BIS2(Y) \geq \gamma$ et cette borne est obtenue pour un hyperplan \hat{H} appartenant à $\mathcal{H}(K, B)$.

De façon évidente, si on remplace la boule B par une boule B' de même centre O et de rayon $R' > R$, la valeur de la meilleure borne simpliciale sera au moins aussi bonne que la meilleure borne simpliciale avec B . Le problème de la meilleure borne simpliciale avec un rayon R infini a été considéré par Hansen, Jaumard, Meyer et Tuy [18] dans le cas où K est un cône non-dégénéré et où f est une fonction concave.

2.3.2 Formulation en termes de problème de maximisation quasiconcave

Dans cette sous-section, nous donnons trois reformulations du problème ($PMBIS$) de détermination de la meilleure borne simpliciale sous forme de problème de maximisation quasiconcave sur un polytope. La dernière reformulation devient un problème de maximisation concave lorsque f est concave, mais nécessite au préalable le calcul de n γ -extensions. La première reformulation est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Le problème (PMBIS) est équivalent au problème de maximisation quasiconcave sur un polytope*

$$(PMBIS1) \quad \max \quad \inf \left\{ f(O), f\left(\frac{u^1}{\zeta_1}\right), \dots, f\left(\frac{u^n}{\zeta_n}\right) \right\}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \zeta_j = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i u^j & j = 1, 2, \dots, n & (2.9) \\ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = 1 & & (2.10) \\ \zeta_j \geq \frac{\|u^j\|}{R}, & j = 1, 2, \dots, n & (2.11) \\ \mu \geq 0. & & (2.12) \end{cases}$$

Preuve:

Les contraintes (2.10) et (2.12) traduisent que l'hyperplan $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ avec $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i$ s'appuie sur P et les contraintes (2.9) et (2.11) traduisent le fait que les points $\hat{z}^j = \frac{u^j}{\zeta_j}, j = 1, 2, \dots, n$ sont les points d'intersection des génératrices de K avec \hat{H} et appartiennent à la boule B de rayon R .

Les contraintes de (PMBIS1) sont linéaires. Pour i tel que $b_i > 0$, μ_i est borné (considérer les contraintes (2.10) et (2.12)). Sous l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , on peut montrer que les μ_i pour i tel que $b_i = 0$ sont aussi bornés (voir la preuve de la Proposition 2.3). De (2.9) et (2.11), on déduit que les $\zeta_j, j = 1, 2, \dots, n$ sont également bornés. Donc les contraintes (2.9)-(2.12) définissent un polytope.

Il reste à montrer que la fonction objectif est quasiconcave. D'après la Proposition 1.6, les fonctions $(1, \zeta_j) \mapsto f\left(\frac{u^j}{\zeta_j}\right)$ sont quasiconcaves sur $]0, +\infty[$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. D'après la Proposition 1.4, l'infimum de fonctions quasiconcave est quasiconcave, donc la fonction objectif $\zeta \mapsto \inf \left\{ f(O), f\left(\frac{u^1}{\zeta_1}\right), \dots, f\left(\frac{u^n}{\zeta_n}\right) \right\}$ est quasiconcave pour $\zeta > 0$. ■

Proposition 2.6 *Le problème (PMBIS1) est équivalent au problème de maximisation quasiconcave*

$$(PMBIS2) \quad \max \quad \inf \left\{ f(O), f\left(\frac{u^1}{\zeta_1}\right), \dots, f\left(\frac{u^n}{\zeta_n}\right) \right\}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \zeta_j \leq \sum_{i=1}^m \mu_i a^i u^j & j = 1, 2, \dots, n & (2.9') \\ \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = 1 & & (2.10) \\ \zeta_j \geq \frac{\|u^j\|}{R}, & j = 1, 2, \dots, n & (2.11) \\ \mu \geq 0. & & (2.12) \end{cases}$$

Preuve:

À noter que la seule différence avec le problème (PMBIS1) est le remplacement du signe "=" par " \leq " dans les contraintes (2.9). Clairement (PMBIS2) est une relaxation de (PMBIS1) donc $\gamma^2 \geq \gamma^1$ où γ^1 et γ^2 désignent respectivement les valeurs optimales des problèmes (PMBIS1) et (PMBIS2).

Soit maintenant $(\hat{\mu}, \hat{\zeta})$ une solution optimale de (PMBIS2). On définit $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ avec $\hat{\mu}' = \hat{\mu}$ et $\hat{\zeta}'_j = \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i a^i u^j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Clairement $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ satisfait les contraintes (2.9), (2.10) et (2.12). Puisque $\hat{\zeta}'_j \geq \hat{\zeta}_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, la contrainte (2.11) est également satisfaite, donc $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ est une solution réalisable de (PMBIS1). On en déduit également que $f\left(\frac{u^j}{\hat{\zeta}'_j}\right) \geq \min \left\{ f\left(\frac{u^j}{\hat{\zeta}_j}\right), f(O) \right\} \geq \gamma^2$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Donc la valeur de la fonction objective correspondant à $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ est supérieure à γ^2 , ce qui montre qu'on a aussi $\gamma^2 \leq \gamma^1$. ■

Proposition 2.7 *Soit $\frac{u^j}{\zeta_j}$ la $f(O)$ -extension supérieure de O le long de la génératrice j de K pour $j = 1, \dots, n$. Le problème (PMBIS2) est équivalent au problème de maximisation quasiconcave*

$$(PMBIS3) \quad \max \quad \inf \left\{ f(O), f\left(\frac{u^1}{\zeta_1}\right), \dots, f\left(\frac{u^n}{\zeta_n}\right) \right\}$$

$$\begin{cases}
 \zeta_j \leq \sum_{i=1}^m \mu_i a^i u^j & j = 1, 2, \dots, n & (2.9') \\
 \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = 1 & & (2.10) \\
 \zeta_j \geq \frac{\|u^j\|}{R}, & j = 1, 2, \dots, n & (2.11) \\
 \mu \geq 0 & & (2.12) \\
 \zeta_j \leq \bar{\zeta}_j & j = 1, 2, \dots, n. & (2.13)
 \end{cases}$$

De plus, si f est concave, $(PMBIS3)$ est un problème de maximisation concave.

Preuve:

Le problème $(PMBIS3)$ diffère de $(PMBIS2)$ par l'ajout des contraintes (2.13). On en déduit immédiatement $\gamma^3 \leq \gamma^2$ où γ^2 et γ^3 désignent respectivement les valeurs optimales des problèmes $(PMBIS2)$ et $(PMBIS3)$.

À noter que par définition des γ -extensions, $\bar{\zeta}_j$ vérifie la contrainte (2.11).

Soit $(\hat{\mu}, \hat{\zeta})$ une solution optimale de $(PMBIS2)$. On définit $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ avec $\hat{\mu}' = \hat{\mu}$ et $\hat{\zeta}'_j = \min\{\hat{\zeta}_j, \bar{\zeta}_j\}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Clairement $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ satisfait les contraintes (2.10)-(2.13). Puisque $\hat{\zeta}'_j \leq \hat{\zeta}_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, la contrainte (2.9) est également satisfaite, donc $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ est une solution réalisable de $(PMBIS3)$. Pour j tel que $\hat{\zeta}'_j = \bar{\zeta}_j$, on a $f(\frac{u^j}{\hat{\zeta}'_j}) \geq f(O)$ par définition de $\bar{\zeta}_j$, et pour j tel que $\hat{\zeta}'_j = \hat{\zeta}_j$, on a $f(\frac{u^j}{\hat{\zeta}'_j}) = f(\frac{u^j}{\hat{\zeta}_j})$. Donc la valeur de la fonction objective correspondant à $(\hat{\mu}', \hat{\zeta}')$ est supérieure à γ^2 , ce qui montre qu'on a aussi $\gamma^3 \geq \gamma^2$.

Supposons maintenant que f est concave. La fonction $f_w : \lambda \mapsto f(\lambda u^j)$ est concave et décroissante sur $\left[\frac{1}{\bar{\zeta}_j}, \frac{R}{\|u^j\|}\right]$ et la fonction $g : y \mapsto \frac{1}{y}$ est convexe sur $\left[\frac{\|u^j\|}{R}, \bar{\zeta}_j\right]$, donc la fonction composée $f_w \circ g$ est concave sur $\left[\frac{1}{\bar{\zeta}_j}, \frac{R}{\|u^j\|}\right]$ d'après la Proposition 1.5. ■

À noter que le coût à payer pour passer d'un problème de maximisation quasiconcave à un problème de maximisation concave est le calcul préalable des $\bar{\zeta}_j, j = 1, 2, \dots, n$

qui requiert n recherches unidimensionnelles.

Une interprétation géométrique des problèmes ($PMBIS1$), ($PMBIS2$) et ($PMBIS3$) est la suivante: les 3 problèmes cherchent un hyperplan d'équation $\alpha x = 1$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^m \mu_i a^i$ et n points $\frac{u^j}{\zeta_j}, j = 1, 2, \dots, n$ sur chacune des génératrices de K , qui définissent la valeur de la borne inférieure. Dans ($PMBIS1$), ces points correspondent à l'intersection des génératrices de K avec l'hyperplan. Dans ($PMBIS2$), ces points peuvent être n'importe où dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \geq 1\}$ (mais toujours sur les génératrices). Ils définissent un simplexe contenant celui déterminé par l'hyperplan, donc la borne inférieure peut éventuellement être dégradée. La fonction objectif assure qu'il n'en est rien. Dans ($PMBIS3$), non seulement les points $\frac{u^j}{\zeta_j}, j = 1, 2, \dots, n$ sont dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \geq 1\}$, mais doivent être au-delà de la $f(O)$ -extension le long de la génératrice correspondante. Si cette dernière contrainte joue un rôle, c'est-à-dire si la $f(O)$ -extension est dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x > 1\}$ pour la génératrice considérée, le point $\frac{u^j}{\zeta_j}$ ne peut pas appartenir à l'hyperplan. Mais puisque ce point peut être placé sur la $f(O)$ -extension (qui a une valeur supérieure à $f(O)$ par définition), le problème ($PMBIS3$) a toujours la possibilité de "choisir" les points $\frac{u^j}{\zeta_j}, j = 1, 2, \dots, n$ de façon à ne pas dégrader la valeur optimale par rapport à ($PMBIS1$) et ($PMBIS2$). La Figure 2.7 montre différentes solutions susceptibles d'être obtenues par ces trois problèmes.

Contrairement à ce qui se passe pour les problèmes de minimisation concave, il est possible de calculer une solution ε' -optimale d'un problème de maximisation concave en temps polynômial par rapport à la taille du problème et à $\log \frac{1}{\varepsilon'}$: voir par exemple Akgül [1]. Les résultats de cette section donnent donc une indication intéressante sur la complexité de cette classe de borne inférieure. Si la fonction objectif est quasiconcave continue, ces méthodes polynômiales ne donnent généralement qu'un maximum local. Pour obtenir un maximum global, il faut faire une hypothèse légèrement plus

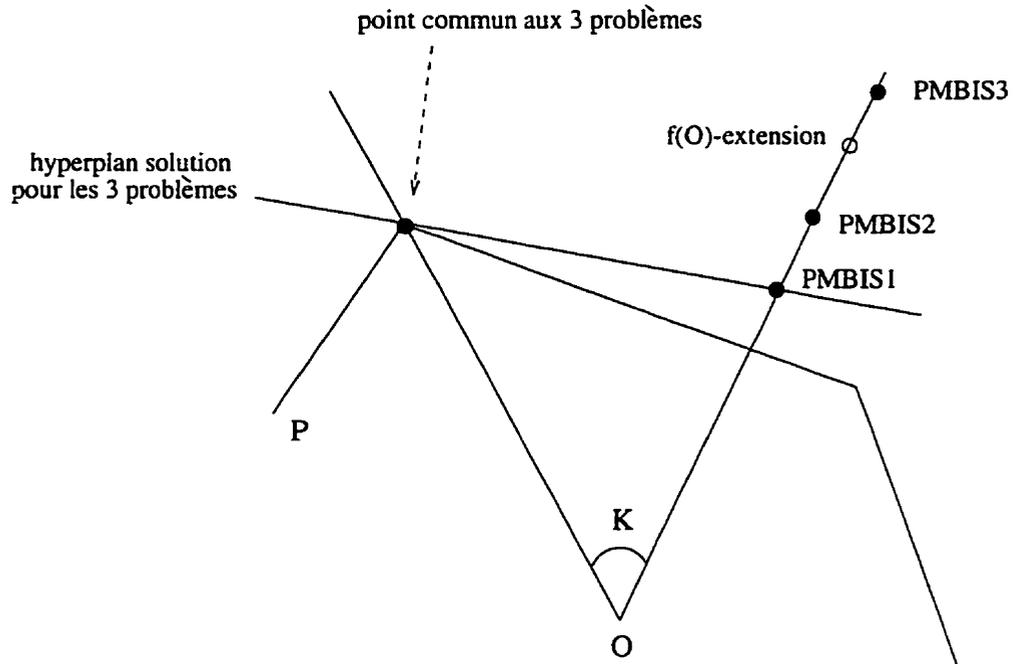


Figure 2.7: Différentes meilleures bornes inférieures simpliciales données par les problèmes ($PMBIS$)

forte sur la fonction objectif, et donc dans notre cas, sur f (voir Akgül [1]).

Dans la Section 2.3.4, nous donnons une procédure itérative simple pour résoudre les problèmes ($PMBIS1$), ($PMBIS2$) et ($PMBIS3$) sans hypothèse additionnelle sur f .

2.3.3 Conditions d'optimalité

Dans cette section, nous énonçons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un hyperplan soit solution optimale du problème ($PMBIS$). Ces conditions seront utiles pour développer des procédures de calcul de la meilleure borne simpliciale et pour prouver leur convergence dans la Section 2.3.4.

Éliminons tout de suite le cas facile:

Proposition 2.8 Soit \hat{H} un hyperplan de $\mathcal{H}(K, B)$. Si sa borne simpliciale $\hat{\gamma} = BIS(K, \hat{H})$ est égale à $f(O)$, alors \hat{H} est une solution optimale du problème ($PMBIS$).

Preuve:

Puisque O est un point réalisable de $K \cap P$, toute borne inférieure de f sur $K \cap P$ est inférieure à $f(O)$. Donc toute borne inférieure égale à $f(O)$ est forcément la meilleure possible. ■

Par la suite, on suppose que l'on n'est pas dans ce cas.

Théorème 2.2 Soit \hat{H} un hyperplan s'appuyant sur P et définissant avec K un simplexe $\hat{S} = \text{conv}\{O, \hat{z}^1, \dots, \hat{z}^n\}$ tel que $K \cap P \subseteq \hat{S} \subseteq B$, et soit $\hat{\gamma} (< f(O))$ sa borne simpliciale. Une condition suffisante pour que \hat{H} soit une solution optimale du problème (PMBIS) est

$$(CS1) \text{ il existe } J \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que}$$

$$\begin{cases} K \cap P \cap \text{conv}_{j \in J} \{\hat{z}^j\} \neq \emptyset \\ f(\hat{z}^j) = \hat{\gamma} \text{ ou } \hat{z}^j \in \delta B, \text{ pour tout } j \text{ de } J. \end{cases}$$

Cette condition est nécessaire si f est concave.

Preuve:

Soit $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ un hyperplan satisfaisant (CS1). On suppose sans perte de généralité que l'ensemble J est minimal. Supposons par contradiction qu'il existe un hyperplan $H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha'x = 1\}$ définissant avec K un simplexe S' vérifiant $K \cap P \subseteq S' \subseteq B$ et dont la borne simpliciale est $\hat{\gamma}' > \hat{\gamma}$. Soient z'^j les points d'intersection des génératrices de K avec H' . Pour tout j de J , ou bien $\hat{z}^j \in \delta B$, auquel cas $z'^j = \theta_j \hat{z}^j$ avec $\theta_j \leq 1$, ou bien $f(\hat{z}^j) = \hat{\gamma} < \hat{\gamma}' \leq f(z'^j)$ auquel cas $z'^j = \theta_j \hat{z}^j$ avec $\theta_j < 1$ par décroissance de f (voir Proposition 2.4). À noter que le premier cas ne peut pas se produire pour tous les j de J par définition de la boule B . Soit $\omega \in K \cap P \cap \text{conv}_{j \in J} \{\hat{z}^j\}$. Puisque J est minimal, il existe $\mu > 0$ vérifiant $\sum_{j \in J} \mu_j = 1$ tel que $\omega = \sum_{j \in J} \mu_j \hat{z}^j$. On en déduit $\omega = \sum_{j \in J} \frac{\mu_j}{\theta_j} z'^j$. En multipliant par α' , on obtient $\alpha'\omega > 1$, en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle $K \cap P \subseteq K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha'x \leq 1\}$.

Supposons que \hat{H} ne satisfait pas la condition (CS1): nous allons montrer que si f est concave, il existe une borne simpliciale strictement meilleure que $\hat{\gamma}$. Soit y^j la $\hat{\gamma}$ -extension inférieure de \hat{z}^j pour $j = 1, 2, \dots, n$: on a $y^j = \hat{z}^j$ si $\hat{z}^j \in \delta B$ ou $f(\hat{z}^j) = \hat{\gamma}$, et $\hat{\alpha}y^j > 1$ sinon. Montrons que $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe $\omega \in K \cap P$ tel que $\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j y^j$ avec $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ et $\lambda_j \geq 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. On a alors $\hat{\alpha}\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\alpha}y^j \geq 1$. Puisque \hat{H} s'appuie sur P , l'inégalité doit être une égalité, ce qui implique que $\lambda_j = 0$ pour tous les j tels que $\hat{\alpha}y^j > 1$. On en conclut que \hat{H} satisfait la condition (CS1) avec $J = \{j \mid \lambda_j > 0\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\text{conv}\{y^1, \dots, y^n\} \cap P = \emptyset$. D'après la Proposition 2.4, le programme linéaire $PLBIS1(Y)$ a une valeur optimale $\bar{\rho} < 1$. Une borne simpliciale au moins égale à $\hat{\gamma}$ est alors $\min\{f(O), f(\bar{\rho}y^1), \dots, f(\bar{\rho}y^n)\}$. Puisque f est concave, l'hypothèse $\hat{\gamma} < f(O)$ implique que $f(\bar{\rho}y^j) > f(y^j)$ pour tout j , donc la borne simpliciale $BIS1$ est strictement meilleure que $\hat{\gamma}$. En considérant le problème dual $PLBIS2(Y)$, on obtient un hyperplan \hat{H} de $\mathcal{H}(K, B)$ définissant une borne simpliciale $BIS2$ au moins aussi bonne, donc strictement meilleure que $\hat{\gamma}$. Si f est concave, la condition (CS1) est donc nécessaire. ■

Incidentement, on n'a pas supposé ici que H' s'appuyait sur P , ce qui montre d'une autre façon que la meilleure borne simpliciale telle que définie dans la Section 2.3.1 reste la meilleure si on élargit $\mathcal{H}(K, B)$ à l'ensemble des hyperplans s'appuyant sur $K \cap P$ et formant avec K un simplexe contenu dans B et contenant $K \cap P$.

Si f peut être constante par endroit, il est facile de voir qu'un hyperplan s'appuyant sur P peut donner la meilleure borne simpliciale sans vérifier la condition (CS1).

Dans la sous-section suivante, nous montrons que si la meilleure borne simpliciale est différente de $f(O)$, alors la condition (CS1) peut toujours être satisfaite.

2.3.4 Procédure itérative pour le calcul de la meilleure borne

Nous présentons deux variantes d'une procédure itérative pour le calcul de la meilleure borne simpliciale. Cette procédure est décrite dans la Figure 2.8. Dans la première variante, les points $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont calculés par la formule (2.14) à l'Étape 3. Puisque les problèmes $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$ sont duaux, $\hat{\rho}$ est aussi la valeur optimale du problème $PLBIS1(Y)$ et la procédure $MBIS$ consiste alors essentiellement en une boucle sur la borne simpliciale $BIS1$. La deuxième variante est obtenue en calculant les points $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ par la formule (2.15) et consiste en une boucle sur la borne simpliciale $BIS2$.

Procédure $MBIS$

Étape 1 (initialisation): partir d'une borne simpliciale γ (si une telle borne n'est pas disponible, calculer $BIS2(Y)$ avec $Y = (y^1, \dots, y^n)$ où $y^j, j = 1, \dots, n$ sont des points distincts d'intersection des génératrices de K avec δB). Soient $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ les points ayant servi à calculer cette borne.

Étape 2 (calcul des γ -extensions): calculer les γ -extensions inférieures y^j de z^j pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Étape 3 (calcul d'une nouvelle borne): résoudre $PLBIS2'(Y)$ avec $Y = (y^1, \dots, y^n)$. Soient $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ une solution optimale et $\hat{\rho}$ la valeur optimale. Calculer $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ par l'une ou l'autre des formules:

$$z^j = \hat{\rho} y^j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

$$z^j = \frac{\hat{\rho}}{1 + \hat{\nu}_j} y^j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

et calculer une nouvelle borne simpliciale $\gamma = \min\{f(O), f(z^1), \dots, f(z^n)\}$.

Étape 4 (tests d'arrêt): si $\gamma = f(O)$ ou $\hat{\rho} = 1$, stop: γ est la meilleure borne simpliciale. Sinon retourner à l'Étape 2.

Figure 2.8: Procédure de calcul de la meilleure borne inférieure simpliciale $MBIS$

Théorème 2.3 *Les deux variantes de la procédure MBIS convergent vers une solution optimale du problème (PMBIS). De plus, si la meilleure borne simpliciale n'est pas égale à $f(O)$, cette solution satisfait la condition (CS1).*

Preuve:

Notons par γ^k la valeur de γ au début de l'itération k , par $Y^k = (y^{1k}, \dots, y^{nk})$ l'ensemble des γ^k -extensions, par $\tilde{\lambda}^k$ une solution optimale de $PLBIS1(Y^k)$ et par $(\hat{\mu}^k, \hat{\nu}^k)$ une solution optimale du problème $PLBIS2'(Y^k)$. Soit ρ^k leur valeur optimale commune. Soient \hat{H}^k l'hyperplan d'équation $\hat{\alpha}^k x = 1$ avec $\hat{\alpha}^k = \frac{1}{\rho^k} \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i^k a^i$ et $\tilde{\omega}^k = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^k y^{jk}$.

Supposons que la procédure stoppe à la fin de l'Étape 4 avec $\rho^k = 1$. Soient $\hat{z}^{jk}, j = 1, 2, \dots, n$ les points d'intersection des génératrices de K avec \hat{H}^k et J^k l'ensemble des j tels que $\tilde{\lambda}_j^k > 0$. Quelle que soit la formule utilisée pour calculer les $z^{jk}, j = 1, 2, \dots, n$, on a $\hat{z}^{jk} = z^{jk} = y^{jk}$ pour tout j de J^k . Donc $\tilde{\omega}^k \in \text{conv}_{j \in J^k} \{\hat{z}^{jk}\}$ avec \hat{z}^{jk} vérifiant soit $f(\hat{z}^{jk}) = \gamma^k$, soit $\hat{z}^{jk} \in \delta B$ pour tout j de J^k : d'après le Théorème 2.2, \hat{H}^k est alors un hyperplan optimal.

Si la procédure stoppe à la fin de l'Étape 4 avec $\gamma^{k+1} = f(O)$, \hat{H}^k est optimal puisque la borne inférieure est atteinte en le point réalisable O .

Supposons maintenant que la procédure est infinie. La suite $\{\gamma^k\}$ est croissante et majorée par $f(O)$ donc admet une limite γ^* . D'autre part, soit θ_j^k le réel tel que $y^{jk} = \theta_j^k v^j$ où v^j est l'intersection de la génératrice j de K avec la frontière du polytope pour $j = 1, 2, \dots, n$: $\{\theta_j^k\}$ est décroissante et minorée par 1 (puisque $\gamma \leq f(v^j)$ et par définition des γ -extensions), donc tend vers une limite θ_j^* pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Il s'ensuit que y^{jk} tend vers une limite $y^{j*} = \theta_j^* v^j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Par continuité de f , on a soit $f(y^{j*}) = \gamma^*$, soit $y^{j*} \in \delta B$ pour tout j . D'après la Proposition 2.5, la décroissance des $\theta_j^k, j = 1, 2, \dots, n$ implique que $\{\rho^k\}$ est une suite croissante. Puisque cette suite est de plus majorée par 1 (car l'hyperplan \hat{H}^k sépare P des points $y^{j,k+1}, j = 1, 2, \dots, n$ par définition des γ -extensions: voir Proposition 2.4), elle tend vers une limite ρ^* .

Soit j_k un indice tel que $f(z^{j_k k}) = \gamma^{k+1}$: par définition des points y^{j_k} , on a $y^{j_k, k+1} = z^{j_k k}$. En passant à une sous-suite $\{k_h\}$ de $\{k\}$, on peut supposer que $j_{k_h} = \ell$ pour tout k_h . Puisque $\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^k = \rho^k \leq 1$ et $\tilde{\lambda}_j^k \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$, la suite $\{\tilde{\lambda}^{k_h}\}$ est bornée. De même, on peut montrer que $\{\hat{\mu}^{k_h}\}$ est bornée (voir preuve de la Proposition 2.3) ainsi que $\{\hat{\nu}^{k_h}\}$ (car $\hat{\nu}_j^k = \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i^k a^i y^{j_k} - 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ et tout k). En considérant une sous-suite de $\{k_h\}$ si nécessaire, on peut donc supposer que $\tilde{\lambda}^{k_h} \rightarrow \tilde{\lambda}, \hat{\mu}^{k_h} \rightarrow \hat{\mu}$ et $\hat{\nu}^{k_h} \rightarrow \hat{\nu}$. On a donc $\tilde{\omega}^{k_h} \rightarrow \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y^{j^*}$ et $\hat{\alpha}^{k_h} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i a^i$. On note par \hat{H} l'hyperplan d'équation $\hat{\alpha}x = 1$. Puisque $\tilde{\lambda}_j^k \hat{\nu}_j^k = 0$ pour tout k et tout $j = 1, 2, \dots, n$, on a $\tilde{\lambda}_j \hat{\nu}_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Nous allons maintenant montrer que $\rho^* = 1$. Considérons pour commencer la variante correspondant à la formule (2.14) pour le calcul des z^{j_k} . Puisque $z^{j_k} = \rho^k y^{j_k}$ pour tout k , z^{j_k} tend vers $z^{j^*} = \rho^* y^{j^*}$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Par définition de ℓ , on a $y^{\ell, k_h+1} = z^{\ell k_h}$ pour tout k_h . En passant à la limite, on a donc $y^{\ell^*} = z^{\ell^*} = \rho^* y^{\ell^*}$ qui montre que $\rho^* = 1$.

De même, si les z^{j_k} sont calculés par la formule (2.15), on a $z^{j_k k_h} = \frac{\rho^{k_h}}{1 + \hat{\nu}_j^{k_h}} y^{j_k k_h} \rightarrow \frac{\rho^*}{1 + \hat{\nu}_j} y^{j^*}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. En prenant $j = \ell$, on obtient $y^{\ell^*} = z^{\ell^*} = \frac{\rho^*}{1 + \hat{\nu}_\ell} y^{\ell^*}$ qui montre que $\frac{\rho^*}{1 + \hat{\nu}_\ell} = 1$. Puisque $\rho^* \leq 1$ et $\hat{\nu}_\ell \geq 0$, on en déduit $\rho^* = 1$ et $\hat{\nu}_\ell = 0$.

Soit J l'ensemble des j tels que $\tilde{\lambda}_j > 0$. On a alors $\hat{\nu}_j = 0$ pour tout j de J . Puisque $\rho^* = 1$, on a $z^{j^*} = y^{j^*}$ pour tout j de J et ce, quelle que soit la variante de la procédure. On a donc $\tilde{\omega} \in \text{conv}_{j \in J} \{y^{j^*}\}$ avec y^{j^*} sur \hat{H} et vérifiant soit $f(y^{j^*}) = \gamma^*$, soit $y^{j^*} \in \delta B$ pour tout j de J : d'après le Théorème 2.2, \hat{H} est donc une solution optimale du problème (PMBIS). ■

Le fait que la borne simpliciale *BIS2* domine la borne *BIS1* n'implique pas forcément que la variante de *MBIS* construite avec *BIS2* domine la première variante. En effet, à partir de la première itération où *BIS1* et *BIS2* donnent deux bornes

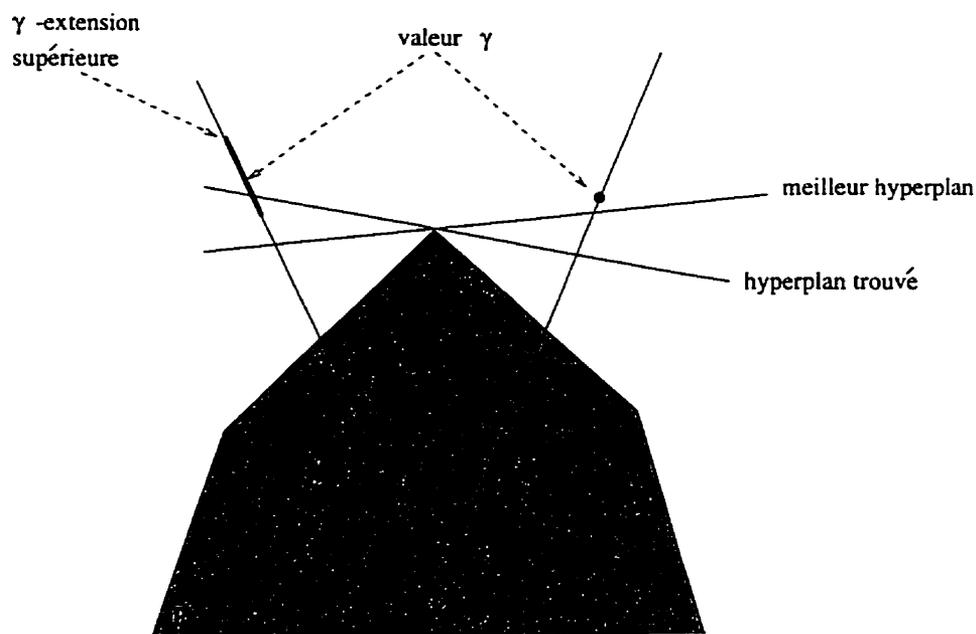


Figure 2.9: Non-convergence de la procédure *MBIS* avec γ -extension supérieure

simpliciales différentes, les suites $\{\gamma\}$ générées par les deux procédures diffèrent et il n'est alors plus possible de faire des comparaisons.

À noter que si on remplace les γ -extensions inférieures par des γ -extensions supérieures à l'Étape 2, la procédure *MBIS* peut ne pas converger vers la meilleure borne simpliciale comme il est montré sur la Figure 2.9.

Bien entendu, en pratique, on peut arrêter la procédure *MBIS* à n'importe quelle itération et la valeur γ est alors une borne simpliciale. On aura également intérêt à utiliser la reformulation $PLBIS2r(\theta)$ de $PLBIS2(Y)$ définie dans la Section 2.2.6 qui permet de réduire significativement les modifications du programme linéaire entre deux itérations.

Avant d'utiliser cette procédure, il peut être intéressant de vérifier que les génératrices du cône n'intersectent pas toutes le polytope en des points appartenant à une même facette. En effet si c'est le cas, la borne simpliciale définie par l'hyperplan contenant la facette est clairement la meilleure possible, puisque atteinte en un point de $K \cap P$. À noter que si des ω -partitions sont utilisées, une génératrice créée par

ce type de subdivision perce P en un point extrême ω de $K \cap P$ donc appartient généralement à plusieurs facettes de P , ce qui augmente d'autant les chances qu'une facette soit percée par les n génératrices d'un même cône. Si les génératrices sont définies par rapport à un point extrême comme ce sera le cas pour l'algorithme de recouvrement développé dans le Chapitre 5.4, chaque génératrice perce au moins n facettes (exactement n si le point extrême est non-dégénéré), donc ce test a encore plus de chance de donner immédiatement la meilleure borne simpliciale.

Finalement, notons que dans certains cas, la procédure *MBIS* donne la meilleure borne simpliciale après seulement une itération. C'est le cas par exemple s'il existe une fonction h telle que $f(\lambda u) = h(\lambda, f(u))$ pour tout u de \mathbb{R}^n et $\lambda \geq 0$. Supposons par exemple que le rayon R de la boule B est suffisamment grand, que les ensemble de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \gamma\}$ sont bornés pour tout γ et que la formule (2.14) est utilisée pour le calcul des z^j . Alors $f(y^j) = \gamma$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et donc $f(z^j) = f(\hat{\rho}y^j) = h(\hat{\rho}, \gamma)$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. La nouvelle borne simpliciale est $\gamma' = h(\hat{\rho}, \gamma)$ et les γ' -extensions inférieures sont les $z^j, j = 1, \dots, n$. La valeur optimale du problème *PLBIS2*(Y') est donc 1, ce qui entraîne l'arrêt de la procédure. Dans certains cas (voir par exemple le Chapitre 5.1.3 pour une démarche inverse), on peut trouver une telle fonction h en effectuant un changement de variable. Ceci suggère que l'origine des cônes pourraient être choisie de façon à faciliter la convergence pratique de la procédure *MBIS*.

2.3.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré que le calcul de la meilleure borne simpliciale pouvait se ramener à un problème de maximisation quasiconcave. Due à la structure particulière de sa fonction objectif, ce résultat est peut-être plus d'intérêt théorique - il jette un éclairage sur la complexité de cette classe de borne inférieure - que pratique. C'est pourquoi nous avons proposé une procédure itérative pour calculer cette meilleure borne, qui résout à chaque itération un programme linéaire et n recherches

non-linéaires dans un espace à 1 dimension. Cette procédure peut être arrêtée à n'importe quel moment, et elle donne alors une borne simpliciale.

Pour finir, notons que la méthode proposée par Tuy [62] (voir aussi Chapitre 1.4.1) pour tenter d'éliminer un cône peut se reformuler en termes de meilleure borne simpliciale. Cette méthode localise en effet la meilleure borne simpliciale par rapport à la valeur de la meilleure solution connue: si la valeur optimale du programme linéaire résolu est inférieure à 1, la meilleure borne est supérieure à la meilleure solution connue et on peut éliminer le cône, sinon elle est strictement inférieure et on ne peut alors pas éliminer. Noter que cela se fait sans calculer la valeur de cette meilleure borne simpliciale et au prix d'un programme linéaire à résoudre et de n recherches non-linéaires unidimensionnelles.

2.4 Variation de la borne simpliciale lorsque K varie

Un des avantages de définir une borne simpliciale avec un hyperplan s'appuyant sur P est que celui-ci définit une borne simpliciale pour quantité d'autres cônes. Dans la Section 2.4.1, on s'intéresse plus spécialement aux cônes pour lesquels la borne simpliciale est au moins aussi bonne que pour le cône courant. Dans la Section 2.4.2, nous établissons des relations entre différentes quantités liées à une borne simpliciale pour deux de ces cônes. Ces relations jouent un rôle clé dans les preuves de convergence des algorithmes $CS\omega$ et $CBB\omega$ présentés dans les Chapitres 5.2 et 5.3.

2.4.1 Variation de la borne simpliciale

Proposition 2.9 *Soient K un cône d'origine O , \hat{H} un hyperplan s'appuyant sur P et intersectant les génératrices de K en des points $\hat{z}^j, j = 1, 2, \dots, n$ (on a donc $K = \text{cône}\{O; \hat{z}^1, \dots, \hat{z}^n\}$) et $\hat{\gamma}$ la borne simpliciale associée à \hat{H} . Soient $z^j (j = 1, 2, \dots, n)$*

n points de \hat{H} vérifiant $f(z'^j) \geq \hat{\gamma}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Alors \hat{H} définit une borne simpliciale $BIS(K', \hat{H})$ pour $K' = \text{cône}\{O; z'^1, \dots, z'^n\}$ de valeur supérieure à $\hat{\gamma}$.

Preuve:

L'hyperplan $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ s'appuie sur P et intersecte les génératrices de K' donc définit un simplexe $\hat{S}' = K' \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x \leq 1\}$ contenant $K' \cap P$. La valeur de la borne simpliciale est par définition

$$BIS(K', \hat{H}) = \min\{f(O), f(z'^1), \dots, f(z'^n)\}.$$

Puisque $\hat{\gamma} \leq f(O)$ par définition de $\hat{\gamma}$ et $f(z'^j) \geq \hat{\gamma}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ par hypothèse, on a $BIS(K', \hat{H}) \geq \hat{\gamma}$. •

En particulier, en prenant pour \hat{H} l'hyperplan correspondant à la meilleure borne simpliciale pour K , on peut conclure que la meilleure borne simpliciale pour K' est supérieure à celle pour K .

Dans le contexte de la minimisation (quasi)concave, l'hypothèse $f(z'^j) \geq \hat{\gamma}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ peut être remplacée par $z'^j \in P$ pour $j = 1, 2, \dots, n$: en effet, s'il existe j tel que $f(z'^j) < \hat{\gamma}$, alors les bornes inférieures pour K et K' sont supérieures ou égales à la valeur d'un point de P , et ces cônes peuvent donc être éliminés. À noter que puisque \hat{H} s'appuie sur P , les points z'^j sont des points d'appui et appartiennent à la frontière de P .

À noter également que la Proposition 2.9 ne suppose rien sur la position de K' par rapport à K : on peut avoir $K' \subseteq K$, ou $K' \supseteq K$ ou encore un chevauchement des deux cônes. Par comparaison, si l'hyperplan s'appuie sur $K \cap P$ plutôt que sur P , le résultat n'est vrai que si $K' \subseteq K$:

Proposition 2.10 Soient K un cône d'origine O , H un hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$, ne passant pas par O et intersectant chacune des génératrices de K , et γ la borne simpliciale $BIS(K, H)$. Soit K' un cône d'origine O inclus dans K . Alors H définit pour K' une borne simpliciale $BIS(K', H) \geq \gamma$.

Preuve:

Soient z^j et z'^j respectivement les points d'intersection des génératrices de K et K' avec l'hyperplan H . Puisque $K' \subseteq K$, on a $z'^j \in \text{conv}\{z^1, \dots, z^n\}$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. Par quasiconcavité de f , on a donc $f(z'^j) \geq \min\{f(z^1), \dots, f(z^n)\}$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{BIS}(K', H) &= \min\{f(O), f(z'^1), \dots, f(z'^n)\} \\ &\geq \min\{f(O), f(z^1), \dots, f(z^n)\} = \text{BIS}(K, H). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Que la Proposition 2.9 ne reste pas vraie si K' n'est pas inclus dans K se comprend aisément: il n'y a aucune raison que l'hyperplan H forme avec K' un simplexe contenant $K' \cap P$. La Figure 2.10 en donne un exemple.

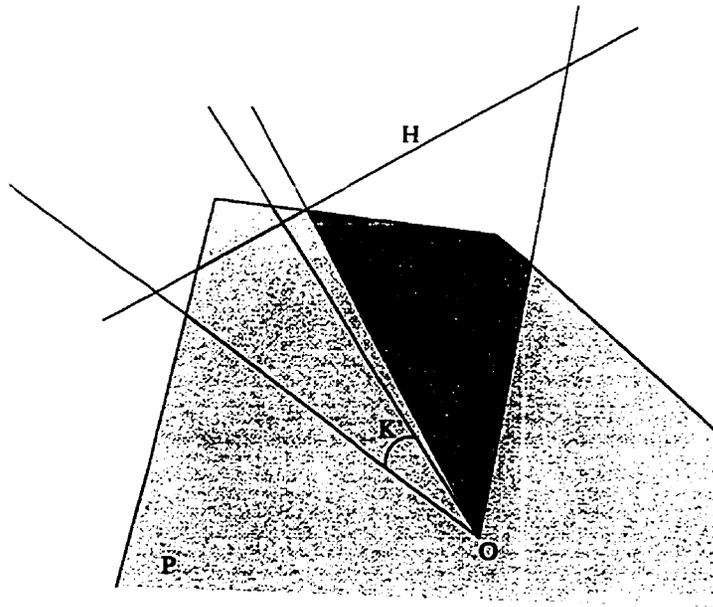


Figure 2.10: Contre-exemple pour la Proposition 2.9 avec un hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$

2.4.2 Relations entre $\hat{\alpha}$, $\tilde{\omega}$ et ρ

Les deux résultats suivants donnent une relation entre les quantités $\hat{\alpha}$, $\tilde{\omega}$ et ρ lorsqu'on passe d'un premier cône K à un deuxième cône K' inclus dans le premier. La Proposition 2.11 correspond au cas où les γ -extensions sont définies à partir d'une borne supérieure de la meilleure borne simpliciale (par exemple la valeur de la meilleure solution connue) tandis que la Proposition 2.12 correspond au cas où les γ -extensions sont définies à partir d'une borne inférieure.

Proposition 2.11 *Soient K un cône d'origine O , $\gamma \leq \min\{f(O), f(v^1), \dots, f(v^n)\}$ un réel où $v^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont les intersections des génératrices de K avec δP , $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ les γ -extensions supérieures le long des génératrices de K , $\tilde{\omega}$ le point de $K \cap P$ et $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ l'hyperplan s'appuyant sur P correspondant respectivement à une solution optimale des problèmes $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$, et finalement ρ la valeur optimale commune de ces deux problèmes.*

Soient K' , γ' , $Y' = (y'^1, \dots, y'^n)$, $\tilde{\omega}'$, $\hat{H}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}'x = 1\}$ et ρ' définis de façon analogue.

Si $K' \subseteq K$ et $\gamma' \leq \gamma$, alors

$$1 \geq \hat{\alpha}\tilde{\omega}' \geq \frac{\rho'}{\rho}.$$

Preuve:

Soient \hat{y}^j (respectivement \hat{y}'^j) les points d'intersection des génératrices de K (respectivement de K') ($j = 1, 2, \dots, n$) avec l'hyperplan $\hat{H}_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = \frac{1}{\rho}\}$. Puisque $\hat{\alpha}y^j \geq \frac{1}{\rho} = \hat{\alpha}\hat{y}^j$ par définition de $\hat{\alpha}$, ρ et des $\hat{y}^j, j = 1, 2, \dots, n$, on a $\hat{y}^j \in [Oy^j]$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. D'où $f(\hat{y}^j) \geq \min\{f(O), f(y^j)\} \geq \gamma$ par quasiconcavité de f , et $\hat{y}^j \in B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Par définition $\hat{y}'^j \in \hat{H}_y \cap K' \subseteq \hat{H}_y \cap K = \text{conv}\{\hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^n\}$, d'où $f(\hat{y}'^j) \geq \min_{x \in \hat{H}_y \cap K} f(x) \geq \gamma$ et $\hat{y}'^j \in B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Rappelons que y'^j est la γ' -extension supérieure le long de la $j^{\text{ième}}$ génératrice

de K' . On distingue deux cas suivant que $f(y'^j) = \gamma'$ ou non. Dans le premier cas, puisque $f(\hat{y}'^j) \geq \gamma \geq \gamma'$, il existe $\beta_j \geq 1$ tel que $y'^j = \beta_j \hat{y}'^j$. Dans le second cas, $y'^j \in \delta B$ et $\hat{y}'^j \in B$, donc à nouveau il existe $\beta_j \geq 1$ tel que $y'^j = \beta_j \hat{y}'^j$. Par définition de $\tilde{\omega}'$, on a

$$\tilde{\omega}' = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j y'^j, \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j = \rho', \quad \tilde{\lambda}'_j \geq 0$$

où $\tilde{\lambda}'$ est une solution optimale de $PLBIS1(Y')$. On en déduit

$$\tilde{\omega}' = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j \beta_j \hat{y}'^j \quad \text{avec } \beta_j \geq 1 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

Puisque $\hat{\alpha} \hat{y}'^j = \frac{1}{\rho}$ par définition pour tout j , il s'ensuit que

$$\hat{\alpha} \tilde{\omega}' = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j \beta_j \geq \frac{\rho'}{\rho}.$$

Finalement, puisque l'hyperplan $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ s'appuie sur P et que $\tilde{\omega}' \in P$, on a aussi $\hat{\alpha} \tilde{\omega}' \leq 1$. ■

Proposition 2.12 *Soient K un cône d'origine O , y^j un point de la $j^{\text{ème}}$ génératrice de K pour $j = 1, 2, \dots, n$, $\tilde{\omega}$ le point de $K \cap P$ et $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ l'hyperplan s'appuyant sur P correspondant respectivement à une solution optimale des problèmes $PLBIS1(Y)$ et $PLBIS2(Y)$, et finalement ρ la valeur optimale commune de ces deux problèmes.*

Soient K' , $Y' = (y'^1, \dots, y'^n)$, $\tilde{\omega}'$, $\hat{H}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}'x = 1\}$ et ρ' définis de façon analogue. Soient de plus $\hat{z}'^j, j = 1, 2, \dots, n$ les points d'intersection des génératrices de K' avec l'hyperplan \hat{H}' .

On suppose que \hat{H}' intersecte les génératrices de K en des points $\hat{z}^j, j = 1, 2, \dots, n$ appartenant à la boule B . Si $K' \subseteq K$ et que les $y'^j, j = 1, 2, \dots, n$ sont les γ' -

extensions inférieures des points \hat{z}'^j avec $\gamma' \leq BIS2(Y)$, alors

$$1 \geq \hat{\alpha}\tilde{\omega}' \geq \rho'.$$

Preuve:

Par définition $\hat{z}'^j \in \hat{H} \cap K' \subseteq \hat{H} \cap K = \text{conv}\{\hat{z}^1, \hat{z}^2, \dots, \hat{z}^n\}$. On en déduit $f(\hat{z}'^j) \geq \min_{x \in \hat{H} \cap K} f(x) \geq BIS2(Y) \geq \gamma'$ et $\hat{z}'^j \in B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Donc y'^j est au-delà de \hat{z}'^j sur la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K' , c.-à-d. $\hat{\alpha}y'^j \geq 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Par définition de $\tilde{\omega}'$, on a

$$\tilde{\omega}' = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j y'^j, \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j = \rho', \quad \tilde{\lambda}' \geq 0$$

où $\tilde{\lambda}'$ est une solution optimale de $PLBIS1(Y')$. On en déduit

$$\hat{\alpha}\tilde{\omega}' = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j \hat{\alpha}y'^j \geq \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}'_j = \rho'.$$

Finalement, puisque l'hyperplan $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ s'appuie sur P et que $\tilde{\omega}' \in P$, on a aussi $\hat{\alpha}\tilde{\omega}' \leq 1$. ■

CHAPITRE 3

Borne inférieure double-simpliciale

Dans ce chapitre, nous présentons une borne inférieure de f sur $K \cap P$ qui est obtenue en minimisant f sur l'union de deux simplexes contenant $K \cap P$. Contrairement à la borne simpliciale discutée dans le chapitre précédent, cette borne ne joue aucun rôle direct dans les preuves de convergence des algorithmes coniques. On supposera donc, pour simplifier, que K est un cône non-dégénéré. Dans la Section 3.1, nous définissons plus formellement cette borne double-simpliciale. Dans la Section 3.2, nous considérons le problème de la détermination de la meilleure borne de cette classe. Finalement dans la Section 3.3, nous discutons des liens de cette nouvelle borne avec la borne simpliciale.

3.1 Borne inférieure double-simpliciale

Dans cette section ainsi que dans la suivante, on suppose qu'on connaît un deuxième cône $K' = \text{cône}\{z'; u^1, u^2, \dots, u^n\}$ contenant $K \cap P$ (la Section 3.3 explique comment calculer un tel cône). Ce cône est appelé *cône extérieur* pour le différencier des cônes d'origine O tels que K qui définissent la partition du polytope.

Puisque $O \in K \cap P \subseteq K'$, on a $O \in K \cap K'$ donc $K \cap K' \neq \emptyset$. On suppose de plus que $K \cap K'$ est borné.

Clairement, puisque $K \cap P \subseteq K \cap K'$ et par quasiconcavité de f , $\min_{x \in \text{vert}(K \cap K')} f(x)$ est une borne inférieure de f sur $K \cap P$, où $\text{vert}(K \cap K')$ désigne l'ensemble des

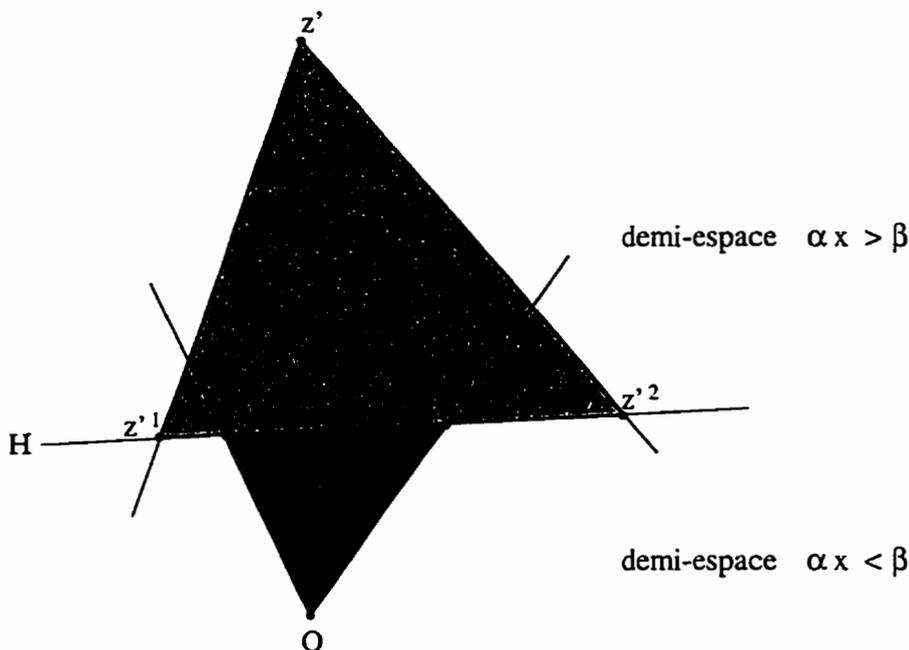


Figure 3.1: Borne inférieure double-simpliciale

points extrêmes de $K \cap K'$. Malheureusement cet ensemble peut contenir un nombre exponentiel de points comme on peut s'en convaincre en remarquant que les hypercubes de \mathbb{R}^n peuvent s'interpréter comme l'intersection de deux cônes K et K' . C'est pourquoi nous allons inscrire $K \cap K'$ dans un polytope contenant un nombre de points extrêmes plus raisonnables.

Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x = \beta\}$ un hyperplan définissant avec K et K' deux simplexes $S(H) = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \leq \beta\}$ et $S'(H) = K' \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \geq \beta\}$ tels que $K \cap K' \subseteq S(H) \cup S'(H)$ (voir Figure 3.1). On définit la borne inférieure double-simpliciale $BIDS(K, K', H)$ comme le minimum de f sur $S(H) \cup S'(H)$, c.-à-d. puisque f est quasiconcave, sur $vert(S(H)) \cup vert(S'(H))$.

Plus précisément, puisque $S(H) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j; \lambda_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n); \alpha x \leq \beta\}$ est défini par $n + 1$ inégalités, ses sommets ne peuvent être que

$$\begin{aligned} z^0 &= O \\ z^j &= \left(\frac{\beta}{\alpha u^j} \right) u^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour que ces points appartiennent effectivement à $S(H)$ et soient affinement indépendants, on doit avoir $\alpha O < \beta$, c.-à-d. $\beta > 0$ et $\frac{\beta}{\alpha u^j} > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, c.-à-d. $\alpha u^j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

De même, les sommets de $S'(H) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = z' + \sum_{j=1}^n \lambda'_j u'^j; \lambda'_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n); \alpha x \geq \beta\}$ ne peuvent être que

$$\begin{aligned} z'^0 &= z' \\ z'^j &= z' + \left(\frac{\beta - \alpha z'}{\alpha u'^j} \right) u'^j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.2)$$

d'où l'on déduit les conditions $\alpha z' > \beta$ et $\alpha u'^j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

De $\alpha z' > \beta$ et $\beta > 0$ on déduit $\alpha z' > 0$. En divisant α et β par $\alpha z'$, on obtient $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x = \tilde{\beta}\}$ avec $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ satisfaisant (3.3)-(3.6):

$$\alpha u^j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\alpha u'^j < 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$\alpha z' = 1 \quad (3.5)$$

$$0 < \beta < 1. \quad (3.6)$$

Réciproquement, il est facile de voir que si (α, β) satisfait (3.3)-(3.6), alors l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x = \beta\}$ définit deux simplexes $S(H)$ et $S'(H)$ tels que $K \cap K' \subseteq S(H) \cup S'(H)$.

Le résultat suivant montre qu'il existe toujours un hyperplan définissant une borne double-simpliciale si $K \cap K'$ est borné, et donne une façon d'en construire un.

Proposition 3.1 *Le système (3.3)-(3.6) admet une solution si et seulement si $K \cap K'$ est borné.*

Preuve:

Comme on vient de le voir, à toute solution du système (3.3)-(3.6) correspond un hyperplan H définissant deux simplexes $S(H)$ et $S'(H)$ tels que $K \cap K' \subseteq$

$S(H) \cup S'(H)$. On en déduit que $K \cap K'$ est borné.

Réciproquement, supposons que $K \cap K'$ est borné. Puisque $z' \neq O$, le problème linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \lambda'_j \\ \text{s.c.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j = z' + \sum_{j=1}^n \lambda'_j u'^j \\ \lambda, \lambda' \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a une solution optimale finie de valeur strictement positive (noter que les contraintes expriment que le point $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j = z' + \sum_{j=1}^n \lambda'_j u'^j$ appartient simultanément aux deux cônes), donc son dual

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha z' \\ \text{s.c.} & \begin{cases} -\alpha u^j \leq -1 & j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha u'^j \leq -1 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{array}$$

est réalisable et a une solution optimale $\tilde{\alpha}$ avec $\tilde{\alpha} z' > 0$. Alors $(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} z'}, \tilde{\beta})$ avec $0 < \tilde{\beta} < 1$ vérifie les conditions (3.3)-(3.6), ce qui prouve que l'hyperplan d'équation $\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} z'} x = \tilde{\beta}$ définit une borne double-simpliciale. ■

3.2 Détermination de la meilleure borne inférieure double-simpliciale

Dans cette section, on restreint l'hyperplan H à être tel que le simplexe $S(H)$ est inclus dans une boule B de centre O et de rayon R , et le simplexe $S'(H)$ dans une boule B' de centre z' et de rayon R' . On note par $\mathcal{H}'(K, K', B, B')$ l'ensemble des hyperplans satisfaisant cette condition. On suppose que R et R' sont suffisamment grands pour que $\mathcal{H}'(K, K', B, B')$ soit non-vidé (par exemple, on peut calculer un

hyperplan H par la méthode utilisée dans la preuve de la Proposition 3.1 et définir les rayons R et R' en conséquence). On considère le problème de trouver la meilleure borne double-simpliciale sous ces conditions, c.-à-d.

$$(PMBIDS) \quad \max_{H \in \mathcal{H}'(K, K', B, B')} BIDS(K, K', H).$$

3.2.1 Formulation en termes de problème de maximisation quasiconcave

Comme dans le cas de la meilleure borne simpliciale (voir Chapitre 2.3.2), ce problème peut se reformuler comme un problème de maximisation quasiconcave:

Théorème 3.1 *Le problème (PMBIDS) est équivalent au problème de maximisation quasiconcave*

$$(PMBIDS1) \quad \max \quad \inf \{F_1(\beta, \zeta), F_2(\beta, \zeta')\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha u^j - \zeta_j & = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.7) \\ \alpha u'^j + \zeta'_j & = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.8) \\ \alpha z' & = 1 \quad (3.9) \\ R\zeta_j - \beta \|u^j\| & \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.10) \\ R'\zeta'_j + \beta \|u'^j\| & \geq \|u'^j\| \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.11) \\ 0 < \beta < 1 & \quad (3.12) \end{array} \right. \quad \text{s.c.}$$

$$\text{avec } F_1(\beta, \zeta) = \inf \left\{ f(O), f\left(\frac{\beta}{\zeta_1} u^1\right), \dots, f\left(\frac{\beta}{\zeta_n} u^n\right) \right\}$$

$$\text{et } F_2(\beta, \zeta') = \inf \left\{ f(z'), f\left(z' + \left(\frac{1-\beta}{\zeta'_1}\right) u'^1\right), \dots, f\left(z' + \left(\frac{1-\beta}{\zeta'_n}\right) u'^n\right) \right\}.$$

Preuve:

Soit H un hyperplan de $\mathcal{H}'(K, K', B, B')$. On a vu dans la section précédente

que son équation pouvait s'écrire $\alpha x = \beta$ avec (α, β) satisfaisant

$$\begin{cases} \alpha u^j > 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha u'^j < 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha z' = 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

d'où les contraintes (3.9) et (3.12). L'hyperplan H défini avec K un simplexe $S(H) = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \leq \beta\}$ dont les sommets autres que O sont

$$z^j = \frac{\beta}{\alpha u^j} u^j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En posant $\zeta_j = \alpha u^j$, $j = 1, 2, \dots, n$, on obtient la contrainte (3.7). La contrainte (3.10) traduit que $z^j = \frac{\beta}{\zeta_j} u^j$ appartient à la boule B pour $j = 1, 2, \dots, n$. Le deuxième simplexe défini par K et H est $S'(H) = K' \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \geq \beta\}$. Ses sommets sont

$$z'^j = z' + \left(\frac{\beta - 1}{\alpha u'^j} \right) u'^j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En posant $\zeta'_j = -\alpha u'^j$ et en traduisant que z'^j appartient à la boule B' pour $j = 1, 2, \dots, n$, on obtient les contraintes (3.8) et (3.11). À noter que les contraintes (3.10), (3.11) et (3.12) assurent que $\zeta_j > 0$ et $\zeta'_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Réciproquement, soit $(\alpha, \beta, \zeta, \zeta')$ une solution de $(PMBIDS)$. Alors l'hyperplan d'équation $\alpha x = \beta$ appartient à $\mathcal{H}(K, K', B, B')$.

Il reste à montrer que la fonction objectif est quasiconcave. D'après la Proposition 1.6, les fonctions $(\beta, \zeta_j) \mapsto f\left(\frac{\beta}{\zeta_j} u^j\right)$ sont quasiconcaves sur $\{(\beta, \zeta_j) \mid \beta \geq 0, \zeta_j > 0\}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Puisque l'infimum de fonctions quasiconcaves est quasiconcave d'après la Proposition 1.4, on conclut que la fonction $F_1(\beta, \zeta)$ est quasiconcave. De même, les fonctions $(\beta, \zeta'_j) \mapsto f\left(z' + \left(\frac{1-\beta}{\zeta'_j}\right) u'^j\right)$ sont quasiconcaves sur $\{(\beta, \zeta'_j) \mid \beta \leq 1, \zeta'_j < 0\}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. En utilisant à nouveau

la Proposition 1.4, on montre que la fonction $F_2(\beta, \zeta')$ est quasiconcave. En invoquant une dernière fois cette Proposition, on en déduit la quasiconcavité de la fonction objectif $F(\beta, \zeta, \zeta') = \inf\{F_1(\beta, \zeta), F_2(\beta, \zeta')\}$. ■

À noter que si $\beta = 0$ dans (3.12), on a $K \cap P \subseteq K' \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x \geq 0\} = S'(H)$ puisque $K \cap P \subseteq K'$ et que $\alpha u^j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$ par (3.7) et (3.10), donc une borne inférieure de f sur $K \cap P$ est la borne simpliciale $F_2(\beta, \zeta') = \min_{x \in S'(H)} f(x)$. Puisque le point O appartient à $S'(H)$ et si on convient que la forme indéterminée $0/0$ vaut 0 , cette borne est aussi celle donnée par la fonction objectif de (*PMBIDS1*).

De même, si $\beta = 1$, on a $K \cap P \subseteq S(H)$, et une borne inférieure de f sur $K \cap P$ est la borne simpliciale $F_1(\beta, \zeta)$. En convenant à nouveau que $0/0$ représente 0 , cette borne correspond à celle donnée par la fonction objectif, à la valeur $f(z')$ près (en effet, on n'a pas supposé que z' appartenait au cône K , donc il n'appartient pas nécessairement au simplexe $S(H)$). Si la valeur optimale était $f(z')$, on pourrait soit accepter cette valeur (qui est une borne inférieure puisque $f(z')$ est inférieure à la borne simpliciale $F_1(\beta, \zeta)$ par hypothèse, soit vérifier que la meilleure borne simpliciale ne donne pas une valeur meilleure.

Il en résulte qu'en modifiant légèrement la définition de la borne double-simpliciale de façon à inclure les cas $\beta = 0$ et $\beta = 1$, on peut supposer que l'inégalité (3.12) est non-stricte. On note par $\overline{\mathcal{H}}(K, K', B, B')$ l'ensemble des hyperplans $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha x = \beta\}$ avec (α, β) satisfaisant les contraintes

$$\begin{cases} \alpha u^j & \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \alpha u^j & \leq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \alpha z' & = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \beta & \leq 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Tout comme pour la meilleure borne simpliciale (voir Chapitre 2.3.2), on peut relaxer le problème (*PMBIDS1*) sans altérer sa solution optimale en remplaçant le signe "=" par "≥" dans les contraintes (3.7), et le signe "=" par "≤" dans les

contraintes (3.8). En revanche, il n'est pas clair qu'il existe une reformulation de $(PMBIDS1)$ en termes de maximisation concave analogue à $(PMBIS3)$ si f est concave.

3.2.2 Condition d'optimalité

Les γ -extensions sont définies comme dans le Chapitre 2.1. La boule B est utilisée pour les γ -extensions calculées sur les génératrices de K et la boule B' est utilisée pour les γ -extensions calculées sur les génératrices de K' .

Proposition 3.2 *Soit γ^* la meilleure borne double-simpliciale donnée par $(PMBIDS1)$. Soient $\gamma \leq \min\{f(O), f(z')\}$ une valeur réelle, y^j ($j = 1, 2, \dots, n$) les γ -extensions supérieures le long des génératrices de K et $z' + y^j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) les γ -extensions supérieures le long des génératrices de K' .*

Alors $\gamma \leq \gamma^$ si et seulement si le système*

$$\alpha y^j \geq \beta, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

$$\alpha y'^j \leq \beta - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

$$\alpha z' = 1 \quad (3.19)$$

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (3.20)$$

est réalisable.

Preuve:

Soit $(\alpha^*, \beta^*, \zeta^*, \zeta'^*)$ une solution optimale du problème $(PMBIDS1)$ associée à γ^* . On a

$$\gamma^* \leq f(O)$$

$$\gamma^* \leq f(z')$$

$$\gamma^* \leq f\left(\frac{\beta^*}{\zeta_j^*} u^j\right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\gamma^* \leq f\left(z' + \left(\frac{1-\beta^*}{\zeta_j^*}\right)u^j\right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

par définition de γ^* , et $\frac{\beta^*}{\zeta_j^*}u^j \in B$, $j = 1, \dots, n$, $z' + \left(\frac{1-\beta^*}{\zeta_j^*}\right)u^j \in B'$, $j = 1, \dots, n$. Par définition des γ -extensions, on a alors que y^j est au-delà de $\frac{\beta^*}{\zeta_j^*}u^j$, c.-à-d. que $\alpha^*y^j \geq \beta^*$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ (rappelons que $\frac{\beta^*}{\zeta_j^*}u^j$ est le point d'intersection de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K avec l'hyperplan d'équation $\alpha^*x = \beta^*$), et que $z' + y^j$ est au-delà de $z' + \left(\frac{1-\beta^*}{\zeta_j^*}\right)u^j$, c.-à-d. que $\alpha^*(z' + y^j) \leq \beta^*$, soit encore $\alpha^*y^j \leq \beta^* - 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Donc (α^*, β^*) vérifie le système (3.17)-(3.20).

Réciproquement, soit (α, β) satisfaisant le système (3.17)-(3.20). Définissons $\zeta_j = \alpha u^j$, $j = 1, \dots, n$ et $\zeta_j' = -\alpha u^j$, $j = 1, \dots, n$. Alors on a $0 \geq \alpha \left(\frac{\beta}{\zeta_j}u^j\right) = \beta \leq \alpha y^j$ donc $\frac{\beta}{\zeta_j}u^j \in [O, y^j]$ pour $j = 1, \dots, n$. Puisque $y^j \in B$ et $f(y^j) \geq \gamma$ par définition, on a $\frac{\beta}{\zeta_j}u^j \in B$, c'est-à-dire que $\beta\|u^j\| \leq R\zeta_j$ pour $j = 1, \dots, n$ et $f\left(\frac{\beta}{\zeta_j}u^j\right) \geq \gamma$. On montre de même que ζ_j' vérifie les contraintes (3.11) et que $f\left(z' + \left(\frac{1-\beta}{\zeta_j'}\right)u^j\right) \geq \gamma$ pour $j = 1, \dots, n$. Donc $(\alpha, \beta, \zeta, \zeta')$ est une solution réalisable du problème (PMBIDS1) de valeur γ . ce qui montre que $\gamma^* \geq \gamma$. ■

Ce résultat peut être utilisé dans les algorithmes coniques pour tester si le cône K peut être éliminé: on calcule les γ -extensions avec γ égal à la valeur de la meilleure solution connue et on vérifie que le système (3.17)-(3.20) est réalisable. Cette vérification peut être faite par exemple en résolvant le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{PLMBIDS}(Y, Y') & \max \quad \xi \\ & \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha y^j \geq \beta + \xi \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha y^j \leq \beta - 1 - \xi \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha z' = 1 \\ 0 \leq \beta \leq 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Si la valeur optimale est positive, le système (3.17)-(3.20) est réalisable et la meilleure borne double-simpliciale est alors supérieure à la valeur de la meilleure solution connue, ce qui permet d'éliminer le cône.

Ce test requiert $2n$ recherches unidimensionnelles pour calculer les γ -extensions ainsi que la résolution d'un programme linéaire. À noter que la taille de ce programme linéaire ne dépend pas de m où m est le nombre de contraintes définissant le polytope P .

3.2.3 Procédure itérative pour le calcul de la meilleure borne

Dans cette section, nous considérons une procédure itérative pour calculer la meilleure borne double-simpliciale. Cette procédure résout à chaque itération un programme linéaire $PLMBIDS(Y, Y')$. Pour minimiser les modifications d'une itération à l'autre, nous reformulons ce dernier en posant $y^j = \theta_j u^j$ et $y'^j = \theta'_j u'^j$ pour $j = 1, \dots, n$, ce qui donne:

$$\begin{array}{ll}
 PLMBIDS_r(\theta, \theta') & \max \quad \xi \\
 \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{ll}
 \alpha u^j \geq \frac{\beta + \xi}{\theta_j} & j = 1, 2, \dots, n \\
 \alpha u'^j \leq \frac{\beta - 1 - \xi}{\theta'_j} & j = 1, 2, \dots, n \\
 \alpha z' = 1 \\
 0 \leq \beta \leq 1.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

La procédure $MBIDS$ de calcul de la meilleure borne double-simpliciale est décrite dans la Figure 3.2.

Procédure *MBIDS*

Étape 1 (initialisation): calculer une borne double-simpliciale préliminaire γ (par exemple, considérer un hyperplan \hat{H} appartenant à $\mathcal{H}(K, K', B, B')$ et prendre $\gamma = BIDS(K, K', \hat{H})$; un tel hyperplan peut être construit à partir d'une solution réalisable du système $\{\alpha u^j \geq 1 \ (j = 1, 2, \dots, n), \alpha u'^j \leq -1 \ (j = 1, 2, \dots, n)\}$ (voir la preuve de la Proposition 3.1)).

Soient $z^j, j = 1, 2, \dots, n$ les points de K et $z'^j, j = 1, 2, \dots, n$ les points de K' ayant servi à calculer cette borne.

Étape 2 (calcul des γ -extensions): calculer les γ -extensions inférieures $y^j = \theta_j u^j$ de z^j pour $j = 1, 2, \dots, n$ en utilisant la boule B , et les γ -extensions inférieures $z' + y'^j = z' + \theta'_j u'^j$ de z'^j pour $j = 1, 2, \dots, n$ en utilisant la boule B' .

Étape 3 (calcul d'une nouvelle borne): résoudre le problème $PLMBIDS_r(\theta, \theta')$. Soient $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ une solution optimale et $\hat{\xi}$ la valeur optimale. Soit \hat{H} l'hyperplan d'équation $\hat{\alpha}x = \hat{\beta}$. Calculer la nouvelle borne double-simpliciale $\gamma = BIDS(K, K', \hat{H})$, c'est-à-dire

$$\gamma = \min \left\{ f(O), f\left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}u^1}u^1\right), \dots, f\left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}u^n}u^n\right), f(z'), f\left(z' + \frac{\hat{\beta}-1}{\hat{\alpha}u'^1}u'^1\right), \dots, f\left(z' + \frac{\hat{\beta}-1}{\hat{\alpha}u'^n}u'^n\right) \right\}.$$

Étape 4 (tests d'arrêt): si $\gamma = \min\{f(O), f(z')\}$ ou $\hat{\xi} = 0$, stop: γ est la meilleure borne double-simpliciale. Sinon retourner à l'Étape 2.

Figure 3.2: Procédure de calcul de la meilleure borne inférieure double-simpliciale *MBIDS*

Théorème 3.2 *La procédure MBIDS converge vers une solution optimale du problème (PMBIDS).*

Preuve:

Notons par γ^k la valeur de γ à l'itération k , par $\theta_j^k u^j$ et $z' + \theta_j^k u^j$ les γ^k -extensions sur les génératrices de K et K' respectivement pour $j = 1, \dots, n$ et par $(\alpha^k, \beta^k, \xi^k)$ une solution optimale du problème $PLMBIDS_r(\theta^k, \theta'^k)$.

La suite γ^k est croissante et majorée par $\min\{f(O), f(z')\}$, donc converge vers une limite γ^* . Si $\gamma^* = \min\{f(O), f(z')\}$, la preuve est terminée. On suppose donc que $\gamma^* < \min\{f(O), f(z')\}$.

Pour tout k et tout j , on a $0 \leq \theta_j^{k+1} \leq \theta_j^k$ et $0 \leq \theta_j'^{k+1} \leq \theta_j'^k$, ce qui montre que les suites $\{\theta^k\}$ et $\{\theta'^k\}$ convergent respectivement vers une limite θ^* et θ'^* . On en déduit également que $(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \xi^{k+1})$ est une solution réalisable du problème $PLMBIDS_r(\theta^k, \theta'^k)$, ce qui implique $\xi^{k+1} \leq \xi^k$. Puisque ξ^k est positif (car γ^k est une borne double-simpliciale), il s'ensuit que la suite ξ^k converge vers une limite $\xi^* \geq 0$. Quitte à considérer une sous-suite $\{k_h\}$ de $\{k\}$, on peut supposer que γ^{k_h+1} est atteint en $z' + \left(\frac{\beta^{k_h} - 1}{\alpha^{k_h} u'^\ell}\right) u'^\ell$ pour un certain ℓ et que $(\alpha^{k_h}, \beta^{k_h})$ tend vers une limite $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. On a alors $\theta_\ell'^{k_h+1} = \frac{\beta^{k_h} - 1}{\alpha^{k_h} u'^\ell}$ par définition des γ -extensions. Puisque $\theta_j^{k_h+1} \leq \theta_j^{k_h+1}$ et $\theta_j'^{k_h+1} \leq \theta_j'^{k_h+1}$ pour $j = 1, \dots, n$, $(\alpha^{k_h+1}, \beta^{k_h+1}, \xi^{k_h+1})$ est une solution réalisable du problème $PLMBIDS_r(\theta^{k_h+1}, \theta'^{k_h+1})$, donc

$$\alpha^{k_h+1} u'^\ell \leq \frac{\beta^{k_h+1} - 1 - \xi^{k_h+1}}{\theta_\ell'^{k_h+1}} = \left(\frac{\beta^{k_h+1} - 1 - \xi^{k_h+1}}{\beta^{k_h} - 1} \right) \alpha^{k_h} u'^\ell.$$

En faisant tendre h vers l'infini, on en déduit

$$\bar{\alpha} u'^\ell \leq \frac{\bar{\beta} - 1 - \xi^*}{\theta_\ell'^*} = \left(\frac{\bar{\beta} - 1 - \xi^*}{\bar{\beta} - 1} \right) \bar{\alpha} u'^\ell.$$

On distingue deux cas suivant que $\bar{\alpha} u'^\ell$ est nul ou pas. Dans le premier cas, puisque $\theta_\ell'^* < \infty$, on a $\bar{\beta} - 1 - \xi^* \geq 0$ d'où $\xi^* \leq \bar{\beta} - 1 \leq 0$ qui montre que

$\xi^* = 0$. Dans le second cas, on a alors $\bar{\alpha}u'' < 0$, d'où $\frac{\bar{\beta} - 1 - \xi^*}{\bar{\beta} - 1} \geq 1$ qui montre également que $\xi^* \leq 0$, et donc que $\xi^* = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe une borne inférieure double-simpliciale $\tilde{\gamma} > \gamma^*$. Soit $\tilde{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x = \tilde{\beta}\}$ un hyperplan correspondant. Alors $\tilde{\alpha}(\theta_j^* u^j) > \tilde{\beta}$, $j = 1, \dots, n$ et $\alpha(z' + \theta_j'^* u^j) < \tilde{\beta}$, $j = 1, \dots, n$.

Soit $\tilde{\xi} = \min \left\{ \min_j \{\theta_j^* \tilde{\alpha} u^j - \tilde{\beta}\}, \min_j \{-\theta_j'^* \tilde{\alpha} u^j - 1 + \tilde{\beta}\} \right\}$. Alors $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\xi})$ est une solution réalisable du problème $PLMBIDSr(\theta^*, \theta'^*)$ avec $\tilde{\xi} > 0$, ce qui est une contradiction. Donc γ^* est la meilleure borne double-simpliciale. ■

Dans la prochaine section, nous expliquons comment la borne simpliciale définie dans le Chapitre 2.2 peut être utilisée pour construire un cône K' .

3.3 Lien avec la borne inférieure simpliciale

Dans les Sections 3.1 et 3.2, nous avons supposé qu'un cône K' était connu, qui contenait $K \cap P$ et qui était tel que $K \cap K'$ est borné. Dans cette section, nous expliquons comment construire un tel cône à partir de la borne simpliciale.

Soient $\tilde{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x = 1\}$ l'hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$ et ω le point de $K \cap P$ associés à la borne simpliciale classique BIS1 (rappelons que K est supposé non-dégénéré). Soit K' un cône d'origine $z' = \omega$, contenu dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x \leq 1\}$ et contenant $K \cap P$. Alors \tilde{H} appartient à $\overline{\mathcal{H}}(K, K', B, B')$ par définition de K' .

Si ω est un point extrême non-dégénéré de $K \cap P$, on peut simplement prendre pour K' le cône défini par les n génératrices de $K \cap P$ émanant de ω .

Si ω est dégénéré, on peut considérer le cône induit par les variables de base dans la solution du programme linéaire duquel ω a été obtenu.

Plus précisément, rappelons que $\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j y^j$ où λ est une solution optimale de base

de

$$PLBIS1(Y) \quad \max \quad e\lambda$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} AY\lambda \leq b \\ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

où e est le vecteur de \mathbb{R}^n composé uniquement de 1 et Y est la matrice $n \times n$ de colonnes y^j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Introduisons les variables d'écart s et notons $\lambda' = (\lambda, s)$. Soit B la sous-matrice de (AY, I) consistant en les colonnes correspondant aux variables de bases (notées λ'_B). Soit N la sous-matrice de (AY, I) correspondant aux variables λ'_N non présentes dans la base. Alors

$$B\lambda'_B + N\lambda'_N = b$$

$$\lambda'_B, \lambda'_N \geq 0,$$

d'où $\lambda'_B = B^{-1}b - B^{-1}N\lambda'_N$. En repassant aux variables λ , on conclut que $K \cap P$ est inclus dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = U\lambda\}$ avec

$$\lambda = \lambda^* + V\mu, \quad \mu \geq 0$$

où V est une certaine sous-matrice de dimension $n \times n$ de $(-B^{-1}N, I)$.

Soit $K' = \{x = U\lambda^* + YV\mu \mid \mu \geq 0\}$. Notons que $Y\lambda^* = \omega$ et que les colonnes de YV peuvent être identifiées aux vecteurs u^j , $j = 1, 2, \dots, n$. De la condition d'optimalité en programmation linéaire, on déduit $1_N - 1_B B^{-1}N \leq 0$, c.-à-d. $eV \leq 0$, donc $eY^{-1}(YV) \leq 0$. Puisque $e^T Y^{-1}$ est le vecteur normal de l'hyperplan s'appuyant sur $K \cap P$, les conditions (3.14) de la Proposition 3.1 sont satisfaites. Les conditions (3.13) sont satisfaites par définition de $PLBIS1(Y)$. Il s'ensuit qu'avec ce choix de K' , $\tilde{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \theta^T U^{-1}x = 1\}$ appartient à $\overline{\mathcal{H}}(K, K', B, B')$.

Puisque \tilde{H} appartient à $\overline{\mathcal{H}}(K, K', B, B')$, \tilde{H} est un hyperplan valide pour le calcul

d'une borne double-simpliciale et $BIDS(\tilde{H}) = BIS(K, \tilde{H})$. Cela est vrai en particulier si \tilde{H} est l'hyperplan correspondant à la meilleure borne simpliciale. On en déduit alors que la meilleure borne double-simpliciale est au moins aussi bonne que la meilleure borne simpliciale. Le prochain résultat donne une condition suffisante pour avoir une amélioration stricte lorsque f est concave.

Proposition 3.3 *Supposons que f est concave. Si $\tilde{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\alpha}x = 1\}$ s'appuie sur $K \cap P$ en un unique point z' , alors soit le minimum de f sur $K \cap P$ est atteint en z' , ou bien la borne simpliciale $BIS(K, \tilde{H})$ peut être strictement améliorée.*

Preuve:

Soit $\gamma = BIS(K, \tilde{H})$. Si $f(z') = \gamma$, alors γ est le minimum de f sur $K \cap P$ puisque z' est un point réalisable de $K \cap P$.

Supposons maintenant que $f(z') > \gamma$. Alors les γ -extensions $z' + \theta'_j u'^j, j = 1, \dots, n$ le long des génératrices de K' sont distinctes de z' . De plus, puisque \tilde{H} s'appuie sur $K \cap P$ en l'unique point z' , on a $\alpha u'^j < 0, j = 1, 2, \dots, n$. Finalement, $\tilde{\alpha}(\theta_j u'^j) \geq 1 \forall j = 1, 2, \dots, n$ par définition de γ . Il s'ensuit que le programme linéaire $PLMBIDSr(\theta, \theta')$ a une valeur optimale strictement positive, ce qui permet une amélioration stricte de la borne double-simpliciale puisque f est concave. ■

CHAPITRE 4

Subdivisions

Dans la Section 4.1, nous énonçons et prouvons un résultat sur les ω -partitions, qui joue un rôle primordial dans la preuve de convergence des algorithmes $CS\omega$, $CS\omega BBvar$ et $CBB\omega$ décrits respectivement dans les Chapitres 5.2, 5.2.3 et 5.3. Dans la Section 4.2, nous définissons un recouvrement de cônes, qui est à la base de l'algorithme $CBBcover$, présenté dans le Chapitre 5.4.

4.1 Résultat de base pour les ω -partitions

Le théorème suivant établit une relation entre des points d'accumulation des suites $\{y^{jh}\}, j = 1, \dots, n$, $\{\omega^h\}$, $\{\hat{\alpha}^h\}$ et $\{\rho^h\}$ où $y^{jh}, j = 1, 2, \dots, n$ sont des γ -extensions et ω^h , $\hat{\alpha}^h$ et ρ^h sont des quantités définies à partir des solutions optimales primale et duale du problème $PLBIS1(Y^h)$. Plus précisément, ρ^h est la valeur optimale commune des problèmes $PLBIS1(Y^h)$ et $PLBIS2(Y^h)$, $\omega^h = \sum_{j=1}^n \lambda_j^h y^{jh}$ où λ^h est une solution optimale du problème $PLBIS1(Y^h)$ et $\hat{\alpha}^h = \frac{1}{\rho^h} \sum_{i=1}^m \mu_i^h a^i$ où μ^h est une solution optimale du problème $PLBIS2(Y^h)$. Voir Chapitre 2.2 pour plus de précisions.

Théorème 4.1 *Soient $\{K^h\}$ une suite de cônes générée par le procédé de ω -partition, y^{jh} un point de la $j^{i\text{ème}}$ génératrice de K^h situé dans $B \setminus P$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, ω^h le point de $K^h \cap P$ et $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}^h x = 1\}$ l'hyperplan s'appuyant sur P associés aux solutions optimales primale et duale du problème linéaire $PLBIS1(Y^h)$ et ρ^h la valeur optimale de ce problème. On suppose que les suites correspondantes*

$\{y^{jh}\}, j = 1, 2, \dots, n, \{\omega^h\}, \{\hat{\alpha}^h\}$ et $\{\rho^h\}$ sont bornées.

Alors $O, \bar{\omega}^\ell$ et \bar{y}^ℓ sont colinéaires pour un certain ℓ et $\hat{\alpha}\bar{\rho}\bar{y}^\ell = 1$, où $\bar{\omega}^\ell$ et $(\bar{y}^\ell, \hat{\alpha}, \bar{\rho})$ sont respectivement un point d'accumulation des suites $\{\omega^h\}$ et $\{(y^{th}, \hat{\alpha}^h, \rho^h)\}$.

Preuve:

Par définition des ω -partitions, K^{h+1} se déduit de K^h en remplaçant une génératrice de K^h , disons la $j_h^{\text{ième}}$, par la demi-droite $O\omega^h$. Rappelons que $\omega^h = \sum_{j=1}^n \lambda_j^h y^{jh}$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j^h = \rho^h$, $\lambda_j^h \geq 0$ où λ^h est une solution optimale du problème $PLBIS1(Y^h)$. Clairement puisque $\{\rho^h\}$ est supposée bornée, il en est de même pour $\{\lambda^h\}$. Par définition de $\hat{\alpha}^h$, on a $\hat{\alpha}^h(\rho^h y^{jh}) \geq 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ avec égalité pour tout j tel que $\lambda_j^h > 0$. Notons que $\hat{\alpha}^h \rho^h y^{jh}$ peut aussi être égal à 1 pour des j tel que $\lambda_j^h = 0$. On définit l'ensemble $\hat{J}_h = \{j \mid \hat{\alpha}^h \rho^h y^{jh} = 1\}$. Puisque j_h est tel que $\lambda_{j_h}^h > 0$, on a $j_h \in \hat{J}_h$.

Puisqu'il existe un nombre fini de paires (j_h, \hat{J}_h) , il existe une sous-suite $\{h'\}$ de $\{h\}$ et une paire (j_0, \hat{J}_0) telle que $\hat{J}_{h'} = \hat{J}_0$ et $j_{h'} = j_0$ pour tout h' . Par compacité des suites $\{y^{jh'}\} (j = 1, 2, \dots, n)$, $\{\omega^{h'}\}$, $\{\lambda^{h'}\}$, $\{\hat{\alpha}^{h'}\}$ et $\{\rho^{h'}\}$, il existe une sous-suite $\{h_0\}$ de $\{h'\}$ telle que $y^{jh_0} \rightarrow \bar{y}^{j_0} (j = 1, 2, \dots, n)$, $\omega^{h_0} \rightarrow \bar{\omega}^0$, $\lambda^{h_0} \rightarrow \bar{\lambda}^0$, $\hat{\alpha}^{h_0} \rightarrow \hat{\alpha}^0$ et $\rho^{h_0} \rightarrow \bar{\rho}^0$. La suite $\{K^{h_0}\}$ converge alors vers le cône $\bar{K}^0 = \text{cône}\{O; \bar{y}^{10}, \dots, \bar{y}^{n0}\}$.

Supposons qu'on a déjà construit les suites $\{h_0\}, \{h_1\}, \dots, \{h_\ell\}$ et soit $(j_{\ell+1}, \hat{J}^{\ell+1})$ tel que $j_{h_{\ell+1}} = j_{\ell+1}$ et $\hat{J}^{h_{\ell+1}} = \hat{J}^{\ell+1}$ pour une infinité de h_ℓ . La sous-suite $\{h_{\ell+1}\}$ est alors définie comme étant une sous-suite infinie de $\{h_\ell + 1\}$ telle que

(i) $j_{h_{\ell+1}} = j_{\ell+1}$ et $\hat{J}^{h_{\ell+1}} = \hat{J}^{\ell+1}$ pour tout $h_{\ell+1}$;

(ii) les suites $\{y^{jh_{\ell+1}}\} (j = 1, 2, \dots, n)$, $\{\omega^{h_{\ell+1}}\}$, $\{\lambda^{h_{\ell+1}}\}$, $\{\hat{\alpha}^{h_{\ell+1}}\}$ et $\{\rho^{h_{\ell+1}}\}$ convergent.

On note par $\bar{y}^{j, \ell+1} (j = 1, 2, \dots, n)$, $\bar{\omega}^{\ell+1}$, $\bar{\lambda}^{\ell+1}$, $\hat{\alpha}^{\ell+1}$ et $\bar{\rho}^{\ell+1}$ les limites de ces suites. Le cône $K^{h_{\ell+1}}$ est obtenu de $K^{h_{\ell+1}-1}$ en remplaçant la génératrice $y^{j_\ell, h_{\ell+1}-1}$ par la demi-droite $O\omega^{h_{\ell+1}-1}$. Donc la suite $\{K^{h_{\ell+1}}\}$ converge vers le cône $\bar{K}^{\ell+1}$ qui est \bar{K}^ℓ dans lequel la génératrice \bar{y}^{j_ℓ} est remplacée par la

demi-droite passant par $\bar{\omega}^\ell$. En passant aux limites, on obtient $j_\ell \in \underline{J}^\ell = \{j \mid \hat{\alpha}^\ell \bar{\rho}^\ell \bar{y}^{j_\ell} = 1\}$.

À noter que les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \bar{K}^\ell\}$ sont identiques pour tout $\ell = 0, 1, \dots$. Cependant, puisque les cônes \bar{K}^ℓ pourraient être dégénérés, leurs génératrices pourraient ne pas coïncider.

Puisque $j_\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, après avoir considéré au plus n sous-suites, on a $j_p \in \underline{J}^q$ pour un certain q , $0 \leq p < q$. Supposons que q est le plus petit indice. Alors la demi-droite $O\bar{\omega}^p$ est la $j_p^{\text{ième}}$ génératrice de \bar{K}^q et on a $\hat{\alpha}^q \bar{\rho}^q \bar{y}^{j_p q} = 1$. ■

Le lemme suivant est également utilisé par les preuves de convergence des trois algorithmes $CS\omega$, $CS\omega BBvar$ et $CBB\omega$. C'est pourquoi nous le donnons ici.

Lemme 4.1 Soient $\{\alpha^h\}$ et $\{\beta^h\}$ deux suites bornées de \mathbb{R}^n vérifiant $g(\alpha^h, \beta^h) \leq 0$ pour tout $h \leq h'$ où g est une fonction continue.

Alors tout point d'accumulation $\bar{\alpha}$ de $\{\alpha^h\}$ et $\bar{\beta}$ de $\{\beta^h\}$ vérifient $g(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \leq 0$.

Preuve:

Par définition d'un point d'accumulation, il existe deux sous-suites $\{h_1\}$ de $\{h\}$ d'élément générique $h_{1,i}$ et $\{h_2\}$ d'élément générique $h_{2,i}$ telles que $\alpha^{h_1} \rightarrow \bar{\alpha}$ et $\beta^{h_2} \rightarrow \bar{\beta}$. Définissons une sous-suite $\{h'_1\}$ de $\{h_1\}$ et une sous-suite $\{h'_2\}$ de $\{h_2\}$ telles qu'entre n'importe quels éléments consécutifs de $\{h'_1\}$ il y a un élément de $\{h'_2\}$, et de même pour $\{h'_2\}$, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} h'_{1,1} &= h_{1,1} \\ h'_{2,i} &= \inf\{h_{2,j} \mid h_{2,j} > h'_{1,i}\}, \quad i = 1, 2, \dots \\ h'_{1,i+1} &= \inf\{h_{1,j} \mid h_{1,j} > h'_{2,i}\}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Clairement, $h'_{1,i+1} > h'_{2,i} > h'_{1,i}$ pour tout i . On a donc $g(\alpha^{h'_{1,i}}, \beta^{h'_{2,i}}) \leq 0$ pour tout i . En faisant tendre i vers l'infini et en invoquant la continuité de g , on en déduit $g(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \leq 0$. ■

4.2 Recouvrement de cône

Dans [15], Gallo et Ülkücü proposent un algorithme d'annexion polyédrale pour la résolution de problèmes bilinéaires, inspiré de l'algorithme TUY64 (voir Chapitre 1.5.5 pour une interprétation de cet algorithme en termes d'annexion polyédrale). La différence essentielle avec TUY64 est que moins de contraintes sont générées à une itération donnée pour remplacer la contrainte violée courante. Il se trouve que l'ensemble des contraintes générées à une itération donnée correspond à un recouvrement conique du cône associé à la contrainte remplacée, même si les auteurs ne raisonnent pas explicitement en termes de cônes. Dans la Section 4.2.1, nous définissons plus formellement ce recouvrement conique, qualifié de *radial* par analogie avec les partitions radiales vues dans le Chapitre 1.5.1. Dans la Section 4.2.2, nous associons à ce recouvrement une partition radiale telle que tout sous-cône de cette partition est l'intersection d'un sous-cône du recouvrement avec le cône subdivisé. Ce résultat est à notre connaissance nouveau.

Dans la Section 4.2.3, nous montrons qu'avec ce nouveau recouvrement, l'algorithme TUY64 résout correctement les problèmes de Zwart et de Bali. À notre connaissance, cela a déjà été fait par Gallo [14], au moins pour le problème de Zwart (voir Gallo et Ülkücü [15]). De plus, Vaish [73] a construit un autre contre-exemple pour l'algorithme adapté à la programmation bilinéaire (voir Vaish et Shetty [74]), ce qui suggère qu'il est possible de construire un nouveau contre-exemple pour l'algorithme TUY64 utilisant ce nouveau recouvrement. Les références [14] et [73] ne sont pas facilement accessibles (de fait, au moment où ces lignes sont écrites, nous ne les avons pas en notre possession); c'est pourquoi nous remontrons une partie de ces résultats. Finalement, dans la Section 4.2.4, nous définissons sans preuve le recouvrement radial de simplexe, que nous comparons avec le recouvrement proposé par Horst, Thoai et De Vries [23][24] (voir Chapitre 1.6.3).

4.2.1 Recouvrement radial

Par analogie avec la partition radiale d'un cône (voir Chapitre 1.5.1), nous définissons un recouvrement radial de cône de la façon suivante:

Soit $K = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^n\}$ un cône non-dégénéré. Soit v un point, non nécessairement dans K , tel que

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j$$

avec au moins un coefficient λ_j strictement positif. Soit $J_{>} = \{j \mid \lambda_j > 0\}$. Pour tout $j \in J_{>}$, soit K^j le cône défini par $K^j = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^{j-1}, v, u^{j+1}, \dots, u^n\}$.

Proposition 4.1 *L'ensemble des $K^j, j \in J_{>}$ forme un recouvrement minimal de K .*

Preuve:

Puisque u^1, \dots, u^n sont linéairement indépendants et que $\lambda_j > 0$, il est facile de vérifier que $u^1, \dots, u^{j-1}, v, u^{j+1}, \dots, u^n$ sont aussi linéairement indépendants, et donc que K^j est un cône non-dégénéré pour $j \in J_{>}$.

Considérons maintenant un point x de K : nous allons montrer qu'il existe au moins un indice j de $J_{>}$ tel que $x \in K^j$. Par l'indépendance linéaire des u^j , il existe un unique $\mu \geq 0$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \mu_j u^j$. Soit ℓ tel que $\frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} = \min_{j \in J_{>}} \left\{ \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right\}$. Alors

$$x = \sum_{j=1, j \neq \ell}^n \mu_j u^j + \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \left(v - \sum_{j=1, j \neq \ell}^n \lambda_j u^j \right) = \sum_{j=1, j \neq \ell}^n \left(\mu_j - \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \lambda_j \right) u^j + \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} v.$$

Par définition de ℓ , $\mu_j - \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \lambda_j \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, n, j \neq \ell$ et $\frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \geq 0$. On en conclut que $x \in K^\ell$, ce qui prouve l'inclusion $K \subseteq \bigcup_{j \in J_{>}} K^j$.

Inversement, fixons $\ell \in J_{>}$ et considérons le point $x = \lambda_\ell u^\ell + 2 \sum_{j \in J_{>}, j \neq \ell} \lambda_j u^j + \sum_{j \notin J_{>}} u^j$ de K . Il est facile de voir que $x = v + \sum_{j \in J_{>}, j \neq \ell} \lambda_j u^j + \sum_{j \notin J_{>}} (1 - \lambda_j) u^j \in \text{int}(K^\ell)$, d'où $K \cap K^\ell \neq \emptyset$. On a d'autre part $x = 2v - \lambda_\ell u^\ell + \sum_{j \notin J_{>}} (1 - 2\lambda_j) u^j$

qui montre que x n'appartient à aucun des $K^j, j \in J_>, j \neq \ell$. On en déduit que $K^\ell \not\subseteq \bigcup_{j \in J_>, j \neq \ell} K^j$. ■

À noter que si v appartient à K , on retrouve la partition radiale classique (voir Chapitre 1.5.1).

4.2.2 Partition induite

Le recouvrement défini plus haut induit une partition radiale comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.2 Soit $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j$ un point de \mathbb{R}^n tel que $\lambda_j > 0$ pour au moins un j . $J_> = \{j \mid \lambda_j > 0\}$ et $K^j, j \in J_>$ le recouvrement de K tel que défini dans la sous-section précédente. Alors $v' = \sum_{j \in J_>} \lambda_j u^j$ définit une partition radiale $K'^j, j \in J_>$ de K telle que $K'^j = K^j \cap K$ pour tout j de $J_>$.

Preuve:

Puisque les coefficients de u^j dans l'expression de v' sont tous positifs, on peut définir une partition $K'^j, j \in J_>$ de K avec $K'^j = \text{cône}\{O; u^1, \dots, u^{j-1}, v', u^{j+1}, \dots, u^n\}$ (voir Chapitre 1.5.1).

Notons que

$$v = v' + \sum_{j \notin J_>} \lambda_j u^j, \quad (4.1)$$

soit encore

$$v' = v + \sum_{j \notin J_>} |\lambda_j| u^j.$$

De cette expression, on déduit l'inclusion $K'^\ell \subseteq K^\ell$ pour tout ℓ de $J_>$, d'où $K'^\ell = K \cap K'^\ell \subseteq K \cap K^\ell$.

Il reste à montrer l'inclusion $K^\ell \cap K \subseteq K'^\ell$. Soit $x = \sum_{j=1}^n \mu_j u^j$ un point de

$K^\ell \cap K$. On a alors $\mu_j \geq 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} = \min_{j \in J_\ell} \left\{ \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right\}$ et

$$x = \sum_{j=1, j \neq \ell}^n \left(\mu_j - \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \lambda_j \right) u^j + \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} v.$$

En utilisant (4.1), il vient

$$x = \sum_{j \in J_\ell, j \neq \ell} \left(\mu_j - \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} \lambda_j \right) u^j + \sum_{j \notin J_\ell} \mu_j u^j + \frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} v'.$$

On en déduit que x appartient à K'^ℓ . D'où $K'^\ell = K^\ell \cap K$ pour tout ℓ de J_ℓ . ■

4.2.3 Application aux contre-exemples de l'algorithme de Tuy

Dans cette sous-section, nous montrons que l'algorithme TUY64 résout correctement les contre-exemples de Zwart et de Bali si le recouvrement minimal est utilisé.

4.2.3.1 Contre-exemple de Zwart

Le problème de minimisation concave suivant a été proposé par Zwart [75] pour montrer que l'algorithme TUY64 de Tuy [62] décrit au Chapitre 1.4.2 pouvait cycler.

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_3 - 1)^2 \\ & \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 - x_3 & \leq 0 & (4.2) \\ -x_1 + x_2 - x_3 & \leq 0 & (4.3) \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 & \leq 22.8 & (4.4) \\ 12x_1 + 12x_2 + 7x_3 & \leq 17.1 & (4.5) \\ -6x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1.9 & (4.6) \\ x_2 & \geq 0. & (4.7) \end{array} \right. \\ \text{s.c.} & \end{array}$$

L'origine des cônes est le point extrême $x^0 = (0, 0, 0)$ de valeur $f(x^0) = -1$. Les points extrêmes adjacents sont x^1 , x^2 et x^3 , et définissent le premier cône $K^1 = \text{cône}\{O; x^1, x^2, x^3\}$. La Figure 4.1 donne le graphe de recherche. À chaque cône est

associé un nœud, les noirs correspondant à des cônes qui peuvent être éliminés. Un arc relie le nœud A à A' si le cône K' associé à A' est un sous-cône du cône K correspondant à A . L'arc est en trait plein si K' est un sous-cône de K dans le recouvrement défini dans la Section 4.2.1, et en trait pointillé s'il l'est dans le recouvrement considéré par Tuy (le recouvrement de Tuy correspond donc aux arcs en trait plein et en pointillé). On constate immédiatement la présence d'un cycle $K^2 \rightarrow K^4 \rightarrow K^2$ lorsque le recouvrement de Tuy est utilisé alors que le même algorithme utilisant le recouvrement minimal se termine après un nombre fini d'itérations.

Le Tableau 4.2 donne la liste des cônes générés avec pour chacun d'eux la fonction objectif du programme linéaire à résoudre, la valeur optimale ρ^j de ce dernier et une solution optimale. Les solutions optimales correspondent à des points extrêmes du polytope. Les points extrêmes qui sont utilisés par l'algorithme sont listés dans le Tableau 4.1 avec pour chacun d'eux la liste de contraintes satisfaites à égalité, la valeur de f en ce point et la γ -extension correspondante avec $\gamma = -1$ (noter que dans cet exemple, le point extrême qui est utilisé comme origine des cônes est un minimum global donc toutes les γ -extensions sont calculées avec la même valeur de γ).

À noter que les cônes K^6 et K^8 auraient pu être éliminés sans résoudre de programme linéaire en remarquant que leurs génératrices intersectaient toutes le polytope en une même facette (celle correspondant à la contrainte (4.5) pour le cône K^6 et celle correspondant à la contrainte (4.6) pour K^8).

À noter également que dans l'arbre de recherche généré lorsque le recouvrement minimal est utilisé, la suite des ρ^j n'est pas monotone le long d'un chemin (considérer $K^1 \rightarrow K^3 \rightarrow K^4$).

Tableau 4.1: Points extrêmes du problème de Zwart

i	x^i	contraintes	$f(x^i)$	y^i
0	(0, 0, 0)	{4.2, 4.3, 4.7}	-1	
1	(0.9, 0, 0.9)	{4.2, 4.5, 4.7}	-0.82	(1,0,1)
2	(0, 0.9, 0.9)	{4.2, 4.3, 4.5}	-0.82	(0,1,1)
3	$(-\frac{1.9}{7}, 0, \frac{1.9}{7})$	{4.3, 4.6, 4.7}	$-\frac{29.62}{49}$	(-1, 0, 1)
4	(0, 0, 1.9)	{4.4, 4.6, 4.7}	-0.81	(0, 0, 2)
5	$(\frac{1}{30}, 0.4, 1.7)$	{4.4, 4.5, 4.6}	$-\frac{293}{450}$	$(\frac{51}{1373}, \frac{612}{1373}, \frac{2601}{1373})$
6	$(-\frac{1.9}{143}, \frac{129.2}{143}, \frac{131.1}{143})$	{4.3, 4.5, 4.6}		

Tableau 4.2: Cônes générés par l'algorithme de Tuy pour le problème de Zwart

j	K^j	objectif	ρ^j	solution optimale
1	(y^1, y^2, y^3)	x_3	1.9	$x^4 = 0.95y^1 + 0.95y^3$
2	(y^2, y^3, y^4)	$-0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3$	$\frac{31}{30}$	$x^5 = 0.4y^2 - \frac{1}{30}y^3 + \frac{2}{3}y^4$
3	(y^1, y^2, y^4)	$0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3$	$\frac{32}{30}$	$x^5 = \frac{1}{30}y^1 + 0.4y^2 + \frac{19}{30}y^4$
4	(y^2, y^4, y^5)	$-\frac{467}{102}x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3$	$\frac{492.1}{357}$	$x^3 = \frac{22.8}{7}y^2 + \frac{38}{7}y^4 - \frac{2608.7}{357}y^5$
5	(y^1, y^4, y^5)	$0.5x_1 + \frac{47}{612}x_2 + 0.5x_3$	0.95	x^4
6	(y^1, y^2, y^5)	$\frac{614}{969}x_1 + \frac{614}{969}x_2 + \frac{355}{969}x_3$	0.9	x^1
7	(y^2, y^3, y^5)	$-\frac{307}{510}x_1 + \frac{307}{510}x_2 + \frac{203}{510}x_3$	$\frac{131.1}{143}$	x^6
8	(y^3, y^4, y^5)	$-0.5x_1 + \frac{49}{306}x_2 + 0.5x_3$	0.95	x^4

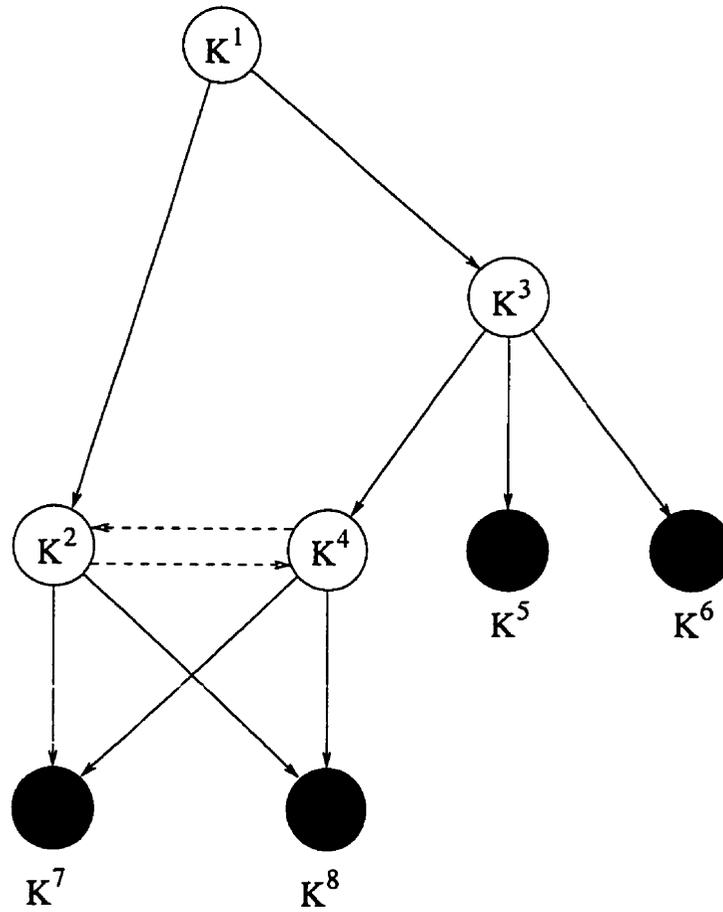


Figure 4.1: Graphe de recherche de l'algorithme de Tuy pour le problème de Zwart

4.2.3.2 Contre-exemple de Bali

Dans sa thèse, Bali [5, p.127] donne le contre-exemple suivant à l'algorithme de Tuy.

Le problème considéré est

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = - \left[\left(\frac{3}{8}x_1 - 1 \right)^2 + \left(\frac{9}{8}x_2 - 1 \right)^2 + (x_3 - 1)^2 \right] \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{69}{64}x_1 + \frac{9}{16}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \leq 1 & (4.8) \\ -\frac{3}{16}x_1 + \frac{9}{20}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1 & (4.9) \\ x_1 \geq 0 & (4.10) \\ x_2 \geq 0 & (4.11) \\ x_3 \geq 0. & (4.12) \end{cases} \end{aligned}$$

Le point extrême $x^0 = (0, 0, 0)$ est choisi comme origine des cônes. Les points extrêmes adjacents sont x^1 , x^2 et x^3 (voir Tableau 4.3). Ils définissent le premier cône $K^1 = \text{cône}\{O; x^1, x^2, x^3\}$. Le minimum de f parmi ces points est -3 , obtenu en x^0 , x^2 et x^3 . Les γ -extensions avec $\gamma = -3$ sont respectivement $y^1 = (\frac{16}{3}, 0, 0)$, $y^2 = (0, \frac{16}{9}, 0)$ et $y^3 = (0, 0, 2)$. L'équation de l'hyperplan passant par y^1 , y^2 et y^3 est $0.1875x_1 + 0.5625x_2 + 0.5x_3 = 1$, ce qui nous donne la fonction objectif du premier programme linéaire à résoudre. La valeur optimale est $\rho^1 = 1.25$ et sa solution optimale est $x^4 = 0.125y^1 + 1.125y^3$. La valeur de f en x^4 est $f(x^4) = -3 - \frac{1}{8}$ qui améliore donc la valeur de la meilleure solution connue. On en déduit le recouvrement de K^1 par $K^2 = \text{cône}\{O; x^4, x^2, x^3\}$ et $K^3 = \text{cône}\{O; x^1, x^2, x^4\}$. Le reste des calculs est résumé dans les Tableaux 4.3, 4.4 et dans la Figure 4.2. À noter que les γ -extensions données dans le Tableau 4.3 sont calculées avec $\gamma = -3 - \frac{1}{8}$. Pour abrégier quelque peu l'écriture, on pose $\alpha = \left(\frac{19 + \sqrt{\frac{3129}{8}}}{\frac{241}{8}} \right)$ et $\beta = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

À noter que les cônes K^3 et K^5 pourraient être éliminés en remarquant que toutes leurs génératrices intersectent le polytope en la facette correspondant à la contrainte (4.8). Dans ce cas, même en utilisant le recouvrement tel que défini par Tuy, il n'y a pas de cycle.

Tableau 4.3: Points extrêmes du problème de Bali

i	x^i	contraintes	$f(x^i)$	y^i
0	(0, 0, 0)	{4.10, 4.11, 4.12}	-3	
1	$(\frac{64}{69}, 0, 0)$	{4.8, 4.11, 4.12}	$-2 - (\frac{15}{23})^2$	$(\frac{8\beta}{3}, 0, 0)$
2	$(0, \frac{16}{9}, 0)$	{4.8, 4.10, 4.12}	-3	$(0, \frac{8\beta}{9}, 0)$
3	(0, 0, 2)	{4.9, 4.10, 4.11}	-3	$(0, 0, \beta)$
4	$(\frac{2}{3}, 0, \frac{9}{4})$	{4.8, 4.9, 4.11}	$-3 - \frac{1}{8}$	$(\frac{2}{3}, 0, \frac{9}{4})$
5	$(0, \frac{5}{3}, \frac{1}{2})$	{4.8, 4.9, 4.10}	$-2 - \frac{1}{64}$	$(0, \frac{5\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2})$

Tableau 4.4: Cônes générés par l'algorithme de Tuy pour le problème de Bali

J	K^J	objectif	ρ^J	solution optimale
2	(y^2, y^3, y^4)	$\frac{2}{3} (1 - \frac{\alpha}{4\beta}) x_1 + \frac{\alpha}{8\beta} x_2 + \frac{1}{\beta} x_3$	$\frac{1\alpha}{8\beta} \approx 1.1525$	$x^3 = \frac{1\alpha}{8\beta} y^2 + \frac{1}{2\beta} y^3$
3	(y^1, y^2, y^4)	$\frac{1}{8\beta} x_1 + \frac{\alpha}{8\beta} x_2 + \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{4\beta}) x_3$	$\frac{2}{9} + \frac{1\alpha}{72\beta} \approx 1.1051$	$x^5 = -\frac{1}{18\beta} y^1 + \frac{1\alpha}{8\beta} y^2 + \frac{2}{9} y^4$
4	(y^3, y^4, y^5)	$\frac{2}{3} (1 - \frac{\alpha}{4\beta}) x_1 + \frac{2}{3} (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\beta}) x_2 + \frac{1}{\beta} x_3$	1	x^4
5	(y^2, y^4, y^5)	$\frac{2}{3} [1 - \frac{\alpha}{2} (\frac{1}{\alpha} - \frac{1\alpha}{8\beta})] x_1 + \frac{\alpha}{8\beta} x_2 + 2 (\frac{1}{\alpha} - \frac{1\alpha}{8\beta}) x_3$	≈ 2.2241	$x^1 = \frac{27\alpha}{23\beta} y^2 + \frac{32}{23} y^4 - \frac{1\alpha}{23\alpha} y^5$
6	(y^1, y^4, y^5)	$\frac{1}{8\beta} x_1 + \frac{2}{3} [\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{4\beta})] x_2 + \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{4\beta}) x_3$	1	x^4
7	(y^1, y^2, y^5)	$\frac{1}{8\beta} x_1 + \frac{\alpha}{8\beta} x_2 + 2 (\frac{1}{\alpha} - \frac{1\alpha}{8\beta}) x_3$	$\frac{2}{\beta} \approx 0.9705$	x^2

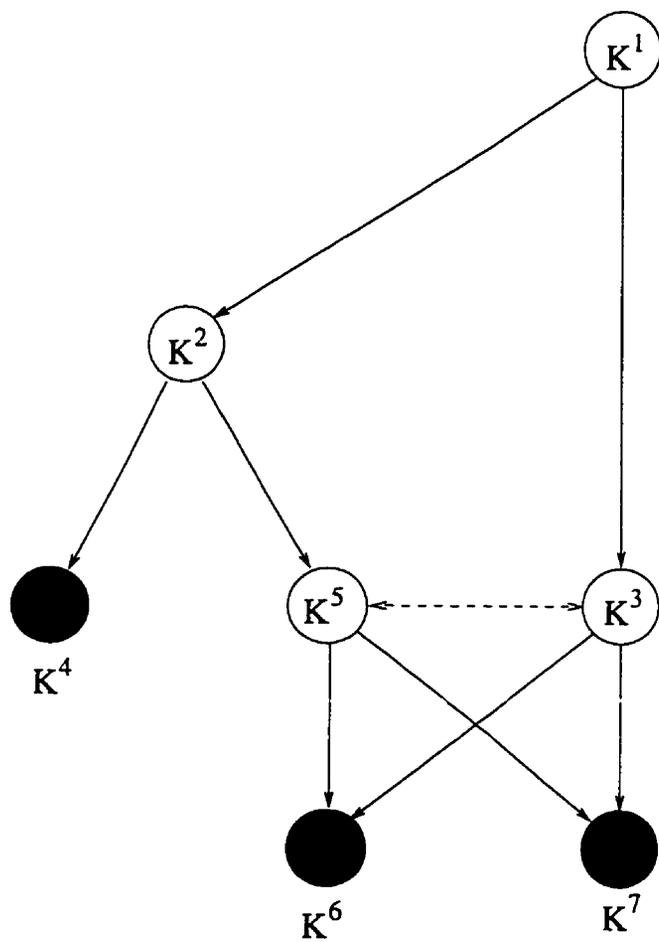


Figure 4.2: Graphe de recherche de l'algorithme de Tuy pour le problème de Bali

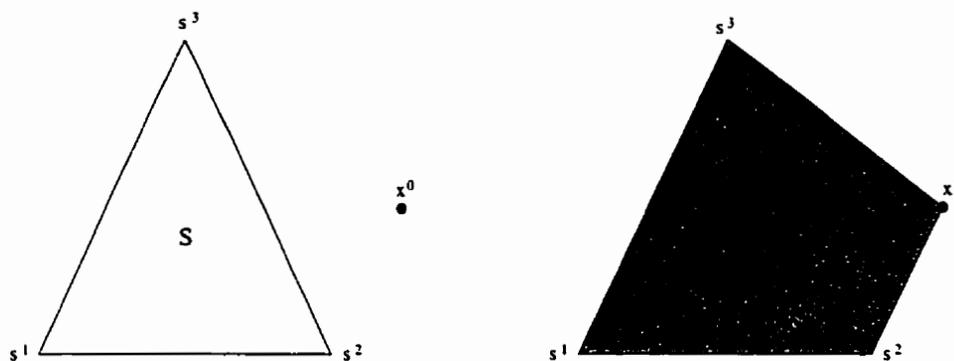


Figure 4.3: Recouvrement radial de simplexe en dimension 2

4.2.4 Recouvrement de simplexe

Au recouvrement radial de cône correspond un recouvrement radial de simplexe qui est donné ici sans preuve. Soit $S = \text{conv}\{s^1, \dots, s^{n+1}\}$ un simplexe de \mathbb{R}^n . Soit x^0 un point, non nécessairement dans S , tel que

$$x^0 = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j s^j, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1.$$

Soit $J_{>} = \{j \mid \lambda_j > 0\}$. Pour tout $j \in J_{>}$, soit S^j le simplexe défini par $S^j = \text{conv}\{s^1, \dots, s^{j-1}, x^0, s^{j+1}, \dots, s^{n+1}\}$.

Proposition 4.3 *L'ensemble des $S^j, j \in J_{>}$ forme un recouvrement minimal de S .*

La preuve est similaire à celle de la Proposition 4.1.

La Figure 4.3 illustre ce recouvrement en dimension 2.

À noter que ce recouvrement est bien différent de celui proposé par Horst, Thoai et De Vries [23] et [24] (voir aussi Chapitre 1.6.3). Les deux ont en commun d'être définis par rapport à un point x^0 mais le recouvrement de Horst *et al.* possède un plus grand degré de liberté correspondant au choix de μ . Pour que ce recouvrement soit défini, le point x^0 doit être à l'intérieur du simplexe S que l'on veut recouvrir et le nombre de sous-simplexes varie entre 1 et $n + 1$. Les points extrêmes des sous-simplexes sont obtenus en résolvant un système d'équations linéaires.

En revanche, notre recouvrement n'impose pas de restriction au point x^0 . Le nombre maximum de sous-simplexes, qui est n , est obtenu lorsque x^0 est un point intérieur du simplexe S , et dans ce cas le recouvrement est une partition radiale. Les points extrêmes des sous-simplexes sont soit x^0 , soit un point extrême du simplexe S .

CHAPITRE 5

Algorithmes coniques

Dans ce chapitre, nous présentons cinq algorithmes coniques pour la minimisation quasiconcave et concave sur un polytope. Rappelons que le problème de minimisation quasiconcave sur un polytope (PMQCP) consiste à minimiser une fonction f quasiconcave et continue sur un polytope $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et que le problème de minimisation concave sur un polytope (PMCP) est le cas particulier de (PMQCP) où f est concave.

- Le premier algorithme est CBBnorm. Cet algorithme utilise les partitions normales introduites par Tuy [64] pour assurer sa convergence, qui n'est cependant prouvée que dans le cas concave. Les γ -extensions sont calculées avec γ égal à la borne inférieure courante. Quelques résultats numériques sont présentés.
- Le second est CS ω . C'est le seul des 5 à ne pas être de type *branch-and-bound*. Il est très proche de l'algorithme BALI73 de Bali [5], n'utilise que des ω -partitions et les γ -extensions sont calculées avec γ égal à la valeur de la meilleure solution connue courante. Il est prouvé convergent dans le cas quasiconcave.
- Le troisième, CS ω BBvar, est la variante de type *branch-and-bound* du précédent. Comme CS ω , il est prouvé convergent dans le cas quasiconcave et les γ -extensions sont définies à partir de la valeur de la meilleure solution courante.

- Le quatrième, $CBB\omega$, est le pendant de $CS\omega$ avec les γ -extensions calculées à partir de la borne inférieure plutôt que de la meilleure solution connue. Il peut aussi être considéré comme un cas limite de l'algorithme $CBBnorm$ où le ratio ω -partitions sur bisections est infini. Sa convergence n'est prouvée que dans le cas où f est concave.
- Le dernier, $CBBcover$, se démarque des 4 autres en ce qu'il utilise des recouvrements de cônes plutôt que des partitions. Sa caractéristique principale est qu'il est fini au sens où il génère un nombre fini de cônes distincts. Dans le cas idéal où la meilleure borne inférieure simpliciale est calculée pour chaque cône et si f est concave, on peut de plus montrer que l'algorithme se termine après un nombre fini d'itérations. Dans le cas où une borne simpliciale qui n'est pas la meilleure possible est calculée, une convergence infinie peut être montrée. Les γ -extensions sont calculées à partir de la borne inférieure courante.

La borne double-simpliciale n'est mentionnée explicitement que dans l'algorithme $CBBnorm$. De façon évidente, cette borne peut être utilisée en pratique dans les trois autres algorithmes coniques de type *branch-and-bound*.

L'algorithme $CBBnorm$ est présenté dans la Section 5.1, $CS\omega$ et $CS\omega BBvar$ dans la Section 5.2, $CBB\omega$ dans la Section 5.3 et finalement $CBBcover$ dans la Section 5.4.

5.1 Algorithme conique de type *branch-and-bound* avec partition normale

Cet algorithme utilise de façon classique les partitions normales pour assurer sa convergence (voir la Section 5.3 pour une version n'utilisant que des ω -partitions). Il se différencie des algorithmes semblables de la littérature (voir Tuy [64], Horst et Tuy [27]) par le calcul d'une borne simpliciale plus précise au moyen de la procédure *MBIS* (voir Figure 2.8) et par l'utilisation de la borne double-simpliciale développée

dans le Chapitre 3. Il semble aussi que ce soit le premier algorithme à utiliser des γ -extensions avec γ égal à une borne inférieure plutôt qu'à la valeur de la meilleure solution courante. Sa convergence n'a pour l'instant été montrée que dans le cas où f est concave. Lorsque les rayons des boules B et B' sont infinis, cet algorithme correspond à celui donné dans Hansen, Jaumard, Meyer et Tuy [18].

Des résultats numériques préliminaires visant à mesurer l'efficacité des bornes simpliciales et double-simpliciales sont présentés dans la Section 5.1.3.

5.1.1 Algorithme

Cet algorithme calcule une solution ε -optimale du problème ($PMCP$) de minimisation concave sur un polytope.

Algorithme CBBnorm (algorithme conique de type *branch-and-bound* avec partitions normales)

Étape 1 (initialisation): construire une partition initiale \mathcal{P} de cônes d'origine O où O est soit un point intérieur de P (voir Chapitre 1.5.3), soit un point extrême non-dégénéré de P (voir Chapitre 1.4.1) et définir une règle de partition normale (voir Chapitre 1.5.1).

Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec le point O et les points d'intersection des génératrices de $K \in \mathcal{P}$ avec la frontière δP du polytope P . Pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer une borne inférieure simpliciale $\underline{f}(K)$ par la procédure *MBIS* (voir Figure 2.8), éventuellement affinée par le calcul d'une borne double-simpliciale, tel qu'expliqué dans les Chapitres 2.2 et 3.3. Soit $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associé à la borne simpliciale. Si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$, mettre à jour la meilleure solution connue: $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$ et $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$. Éliminer tout cône K de \mathcal{P} pour lequel $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$ et soit \mathcal{L} l'ensemble des cônes restants.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution ε -optimale du problème (PMCP). Sinon soit $\tilde{K} \in \arg \min\{\underline{f}(K) \mid K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (subdivision): bissecter \tilde{K} , ou le ω -partitionner via le point $\omega(\tilde{K})$ conformément à la règle de partition normale. Soit \mathcal{P} l'ensemble des sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (calcul de borne inférieure): pour chaque cône $K \in \mathcal{P}$, calculer une borne simpliciale $\underline{f}(K)$ à l'aide de la procédure MBIS (voir Figure 2.8) en partant de la borne simpliciale du cône \tilde{K} . Soit $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ correspondant. Facultativement, améliorer $\underline{f}(K)$ en calculant une borne double-simpliciale tel qu'expliqué dans le Chapitre 3. Finalement, faire $\underline{f}(K) \leftarrow \max\{\underline{f}(K), \underline{f}(\tilde{K})\}$.

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains cônes K de \mathcal{P} , $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$; $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$.

Étape 6 (élimination): éliminer tout cône $K \in \mathcal{L}$ pour lequel $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$. Retourner à l'Étape 2.

À noter qu'à la fin de l'Étape 4, on s'assure de façon quelque peu artificielle que la borne inférieure globale n'est pas dégradée. Ceci est dû au fait que contrairement à ce qui se passe pour les bornes simpliciales, on ne sait pas montrer que la borne double-simpliciale d'un sous-cône est toujours supérieure à celle du cône père. Si la borne double-simpliciale n'est pas utilisée, on peut supprimer la dernière instruction de l'Étape 4.

5.1.2 Convergence

Théorème 5.1 *L'algorithme CBBnorm termine après un nombre fini d'itérations avec une solution ε -optimale de (PMCP), ou est infini. Dans ce dernier cas, qui ne*

peut se produire que si $\varepsilon = 0$, tout point d'accumulation de la suite \bar{x} est une solution optimale du problème (PMCP).

Pour ne pas allonger inutilement la preuve, nous supposons que la règle de partition normale choisie est telle qu'il y ait une infinité de ω -partitions dans toute suite infinie de cônes générée par cette règle. Rappelons que les règles de partitions normales assurent que ces suites contiennent une infinité de bisections. Cette hypothèse est plutôt naturelle puisque le concept de partition normale a été introduit pour développer des algorithmes dont la convergence peut être prouvée et qui se rapprochent des algorithmes utilisant uniquement des ω -partitions, ayant de meilleures performances en pratique mais dont la convergence était problématique. Sur la règle de partition normale donnée en exemple dans le Chapitre 1.5.1, cette hypothèse revient à prendre $N > 1$.

Preuve du Théorème 5.1:

Soit \mathcal{D} l'ensemble des cônes éliminés à l'Étape 6 depuis le début de l'algorithme, et soit $\underline{f} = \underline{f}(\tilde{K})$ la borne inférieure du cône sélectionné (par définition du critère de sélection de l'Étape 2, \underline{f} est donc la plus petite borne inférieure). À chaque itération, $\mathcal{L} \cup \mathcal{D}$ définit une partition de P et on a $f(x) \geq \underline{f}$ pour tout $x \in K \cap P$ et pour tout $K \in \mathcal{L}$, et $f(x) \geq \bar{f} - \varepsilon$ pour tout $x \in K \cap P$ et pour tout $K \in \mathcal{D}$ (noter que la suite $\{\bar{f}\}$ est décroissante). Si l'algorithme s'arrête, on a $f(x) \geq \bar{f} - \varepsilon$ pour tout x de P , ce qui montre que \bar{x} est une solution ε -optimale du problème (PMCP).

À noter que tant que l'algorithme n'est pas fini, on $\underline{f} < \bar{f} - \varepsilon$, d'où $f(x) \geq \underline{f}$ pour tout x de P . Supposons que l'algorithme est infini. Alors il génère au moins une suite infinie de cônes $K^1 \subseteq K^2 \subseteq \dots \subseteq K^h \subseteq \dots$. Notons par $U^h = \text{conv}\{u^{1h}, \dots, u^{nh}\}$ la base de K^h , par \bar{f}^h la valeur de la meilleure solution connue à l'itération où K^h est sélectionné, par $\underline{f}^h = \underline{f}(K^h)$ la borne inférieure de f sur $K^h \cap P$ et par γ^h la borne simpliciale (si on ne calcule pas de borne double-simpliciale, $\underline{f}^h = \gamma^h$). On note par γ'^h la valeur de γ

à la dernière itération de la procédure *MBIS* (voir Chapitre 2.3.4) lors du calcul de la borne simpliciale de K^h , par $y^{jh}, j = 1, 2, \dots, n$ les γ^h -extensions le long des génératrices de K^h , par ρ^h la valeur optimale de $PLBIS2(Y^h)$, par $H^h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^h x = 1\}$ l'hyperplan associé à la borne simpliciale et par $z^{jh} = \frac{\rho^h}{1+\nu^h} y^{jh}, j = 1, 2, \dots, n$ les points d'intersection des génératrices de K^h avec H^h . Noter que $\rho^h \leq 1$ d'après la façon dont est initialisée la procédure *MBIS* et par la Proposition 2.12. Finalement, soit v^h et q^h les points en lesquels la génératrice définie par $\omega^h = \omega(K^h)$ intersecte le simplexe U^h et l'hyperplan $H_y^h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^h x = \frac{1}{\rho^h}\}$. Clairement $\omega^h = \rho^h q^h$. Comme \bar{f}^h est décroissante et minorée par $\min_{x \in P} f(x)$, \bar{f}^h tend vers une limite \bar{f}^∞ .

Puisque γ^h est utilisé comme valeur initiale de γ à l'Étape 1 de la procédure *MBIS* et que cette procédure produit une suite de valeurs croissante, on a $\gamma'^{h+1} \geq \gamma^h \geq \gamma^h$. Il en résulte que $\{\gamma'^h\}$ et $\{\gamma^h\}$ sont deux suites croissantes enchevêtrées et majorées par $\min_{x \in P} f(x)$, qui donc convergent vers la même limite $\bar{\gamma}$. Comme observé plus haut, on a $\gamma^h \leq \underline{f}^h \leq \min\{f(x) \mid x \in P\}$ et $\bar{f}^h - \varepsilon > \underline{f}^h \geq \gamma^h$. En passant à la limite, on a donc $\bar{\gamma} \leq \min\{f(x) \mid x \in P\}$ et $\bar{f}^\infty - \varepsilon \geq \bar{\gamma}$. Supposons d'abord que $\bar{\gamma} = f(O)$. Puisque $\bar{f}^\infty \leq f(O)$, cela n'est possible que si $\varepsilon = 0$ et $\bar{f}^\infty = f(O)$, auquel cas O est une solution optimale du problème (*PMCP*).

Supposons maintenant que $\bar{\gamma} < f(O)$. Soit $\Delta = \{h \mid K^h \text{ est } \omega\text{-partitionné}\}$. D'après la Proposition 1.8, il existe une sous-suite h_s de $\{1, 2, \dots\} \setminus \Delta$ telle que $\{v^{h_s}\}$ tend vers un sommet de $U^* = \bigcap_{h=1}^{\infty} U^h$, par exemple $v^{h_s} \rightarrow \bar{v} \in U^*$. Puisque toutes les suites considérées sont bornées, en passant à une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $u^{jh_s} \rightarrow \bar{u}^j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ (on a alors $U^* = \text{conv}\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$), $y^{jh_s} \rightarrow \bar{y}^j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, $z^{jh_s} \rightarrow \bar{z}^j$ et $\nu^{jh_s} \rightarrow \bar{\nu}^j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, $\rho^{h_s} \rightarrow \bar{\rho} \leq 1$ et $\omega^{h_s} \rightarrow \bar{\omega}$. Quitte à passer à une autre sous-suite, on peut de plus supposer que la borne simpliciale γ^{h_s} est atteinte en z^{ℓ, h_s} pour tout h_s et pour un certain ℓ . On a donc $f(\frac{\bar{\rho}}{1+\bar{\nu}^\ell} \bar{y}^\ell) =$

$f(\bar{z}^\ell) = \bar{\gamma} \leq f(\bar{y}^\ell)$. Puisque $\frac{\bar{p}}{1+\bar{v}_\ell} \leq 1$, que $\bar{\gamma} < f(O)$ et que f est strictement décroissante le long de la génératrice \bar{y}^ℓ à partir de la $f(O)$ -extension supérieure d'après la Proposition 2.2, on en déduit $\frac{\bar{p}}{1+\bar{v}_\ell} = 1$, c.-à-d. $\bar{v}_\ell = 0$ et $\bar{p} = 1$. Si la variante de la procédure *MBIS* correspondant à la borne simpliciale *BIS1* est utilisée, la seule différence dans la preuve est que $\bar{v}_j = 0$ pour $j = 1, \dots, n$ dès le départ.

Montrons maintenant que $f(\bar{\omega}) = \bar{\gamma}$. Puisqu'un sommet de U^* est nécessairement l'un des points $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n$, on a par exemple $\bar{v} = \bar{u}^1$. Clairement, $q^{h_s} \rightarrow \bar{q} \in \text{conv}_j\{\bar{y}^j\}$, $\bar{q} = \theta_0 \bar{v}$ pour un certain $\theta_0 > 0$ et $\bar{y}^j = \theta_j \bar{u}^j$ pour un certain $\theta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. D'où $\theta_0 \bar{u}^1 = \bar{q} = \sum_{j=1}^n \mu_j \theta_j \bar{u}^j$ avec $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$. Puisque les \bar{u}^j appartiennent à U^1 , on a $\theta_0 = \sum_{j=1}^n \mu_j \theta_j$. Le fait que \bar{u}^1 est un sommet de $U^* = \text{conv}\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ implique alors que pour $J = \{j \mid \bar{u}^j = \bar{u}^1\}$,

$$\begin{aligned} \theta_1 \sum_{j \in J} \mu_j &= \theta_0 \\ \mu_j &= 0 \quad \forall j \notin J. \end{aligned}$$

D'où $\sum_{j \in J} \mu_j = \sum_{j=1}^n \mu_j = 1$. On en déduit $\theta_0 = \theta_1$, c.-à-d. $\bar{q} = \theta_1 \bar{v} = \theta_1 \bar{u}^1 = \bar{y}^1$. On a donc soit $f(\bar{q}) = f(\bar{y}^1) = \bar{\gamma}$, soit $\bar{q} \in \delta B$. Puisque $\bar{\omega} = \bar{p} \bar{q}$ avec $\bar{p} = 1$, ce dernier cas est impossible par définition de la boule B donc $f(\bar{\omega}) = \bar{\gamma}$.

Mais $\bar{f}^h = f(\bar{x}^h) \leq f(\omega^h)$ pour tout $h = 1, 2, \dots$. En faisant tendre h vers l'infini, on obtient $\bar{f}^* = f(\bar{x}^*) \leq \bar{\gamma} \leq \min\{f(x) \mid x \in P\}$. Puisque $\bar{f}^* - \varepsilon \geq \bar{\gamma}$, cela n'est possible que si $\varepsilon = 0$, auquel cas \bar{x}^* est une solution optimale du problème (*PMCP*). ■

La conclusion du Théorème 5.1 reste valide si on utilise la valeur de la meilleure solution connue \bar{f} plutôt que la borne simpliciale calculée pour \tilde{K} , comme valeur initiale de γ dans la procédure *MBIS*, et si seulement une itération de cette procédure est effectuée. Puisque la preuve ressemble beaucoup à celle du Théorème 5.1, nous ne donnons que les différences. Soit p^h la \bar{f}^{h+1} -extension de ω^h . Puisque $\bar{f}^{h+1} \leq$

$\min\{\bar{f}^h, f(\omega^h)\}$ et que $\rho^h \geq 1$ (sinon K^h serait éliminé ce qui contredirait l'infinité de la suite), on a $\omega^h \in [p^h q^h]$. On montre alors que pour une certaine sous-suite, $p^h \rightarrow \bar{p}$ et $q^h \rightarrow \bar{q}$ avec $f(\bar{p}) = \bar{f}^* = f(\bar{q})$. Ceci implique $\bar{p} = \bar{q}$ et $\bar{\rho} = 1$. On en déduit que la limite $\tilde{\gamma}$ de la borne simpliciale γ^h est égale à \bar{f}^* .

5.1.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques destinés à illustrer l'efficacité des procédures de calcul des meilleures bornes simpliciale et double-simpliciale.

On considère des problèmes-tests de la forme suivante

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = -\sqrt{(x_1 + 2x_2 + \dots + 8x_8)^2 + 1} \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

où A est une matrice (100% dense) de taille 30×8 et b un vecteur de \mathbb{R}^{30} , tel que le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid Ax \leq b; x \geq 0\}$ est non-vide et borné. Ces problèmes sont similaires à ceux considérés dans Horst et Thoai [21] avec la fonction objectif de type 3.

À noter que puisque $f(\lambda u) = -\sqrt{\lambda^2 f^2(u) - \lambda^2 + 1}$ est une fonction de λ et $f(u)$, la meilleure borne simpliciale est toujours obtenue après une itération de la procédure *MBIS* si l'origine des cônes est le point O (voir Chapitre 2.3.4).

Afin d'éviter ce cas particulier, nous avons fixé l'origine des cônes en un point intérieur Ω du polytope. Ce point a été obtenu en maximisant une variable d'écart ajoutée à toutes les contraintes de P .

Pour la fonction objectif considérée, les γ -extensions peuvent être calculées analytiquement (rappelons que puisque f est concave, les deux notions de γ -extensions coïncident, excepté pour $\gamma = f(O)$). Les rayons des boules B et B' sont ici choisis égaux à l'infini.

Soit z un point et u un vecteur de \mathbb{R}^8 , et soit $\gamma \leq f(z)$. La γ -extension de z le long de u est alors $y = z + \bar{\lambda}(z, u, \gamma)u$ avec

$$\bar{\lambda}(z, u, \gamma) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} + Z}{|U|} & \text{si } U < 0 \\ +\infty & \text{si } U = 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} - Z}{|U|} & \text{si } U > 0 \end{cases}$$

où

$$U = \sum_{i=1}^8 i u_i$$

$$Z = \sum_{i=1}^8 i z_i.$$

Les problèmes linéaires intervenant dans le calcul des bornes simpliciales et double-simpliciales sont résolus par CPLEX [12]. Lorsque plusieurs itérations sont effectuées dans les procédures *MBIS* et *MBIDS*, on utilise la solution optimale du problème linéaire résolu à l'itération précédente comme point de départ pour le problème linéaire de l'itération courante. Finalement, pour accéder facilement à la fois aux cônes de plus petite borne inférieure (Étape 2 de l'algorithme CBBnorm) et de plus grande borne (Étape 6), on utilise un min-maximier (voir par exemple Atkinson *et al.* [2]). Le programme a été codé en C et testé sur un SUN-SPARC20/514MP (128 Mram). Nous avons comparé plusieurs versions de l'algorithme CBBnorm, qui diffèrent par la procédure de calcul de borne utilisée. Ces versions sont notées CBBnorm(LB) où *LB* prend les valeurs suivantes:

SI j : cette borne inférieure est obtenue en effectuant j itérations de la procédure de calcul de la meilleure borne Simpliciale *MBIS*, initialisée avec la borne simpliciale du cône père, c.-à-d. avec une borne Inférieure de la valeur optimale recherchée. La variante correspondant à la borne simpliciale classique est utilisée.

SI1DSj: cette borne est obtenue en effectuant 1 itération de la procédure *MBIS* suivie par j itérations de la procédure de calcul de la meilleure borne Double-Simpliciale *MBIDS*. À nouveau, la procédure *MBIS* est initialisée avec la borne simpliciale du cône père. Le cône K' est calculé comme indiqué dans le Chapitre 3.3.

SS1: il s'agit de la borne inférieure BIS1 avec les γ -extensions calculées à partir de la meilleure solution connue courante.

SS1DSj: cette borne est obtenue en effectuant j itérations de la procédure *MBIDS*, avec le cône K' déterminé à partir du calcul de SS1 comme indiqué dans le Chapitre 3.3.

La règle de partition normale a été définie tel qu'indiqué dans le Chapitre 1.5.1 avec un ratio de 1 bisection pour 100 partitions.

Nous avons d'abord fait tourner les différentes versions de l'algorithme CBBnorm sur 10 instances du problème-test considéré. Le Tableau 5.1 montre le temps de calcul moyen (*CPU*) en secondes, le nombre moyen d'itérations de l'algorithme CBBnorm (*iter*), la moyenne du nombre maximum de cônes présents dans le min-maximier (*maxc*) et la moyenne du nombre total de cônes (*cone*).

On observe qu'en termes de temps de calcul, il ne semble pas intéressant de calculer la meilleure borne simpliciale. Cela peut s'expliquer en partie par la remarque suivante. Soit K un cône. Pour $n - 1$ de ces génératrices, il n'y a aucune différence entre une deuxième itération dans la procédure *MBIS* et une première itération de cette procédure pour un sous-cône de K . L'observation sur le temps de calcul suggère donc qu'il est plus rentable d'intégrer tout de suite l'information sur $\omega(K)$ en partitionnant, quitte à augmenter le nombre de cônes. On observe également que les chiffres se stabilisent après une dizaine d'itérations dans la procédure *MBIS*, ce qui semble montrer que la meilleure borne simpliciale est à toute fin pratique atteinte.

Lorsque la borne double-simpliciale est calculée, le programme s'exécute 6 à 10

Tableau 5.1: Temps de calcul

CBBnorm(.)	CPU	iter	maxc	cones
SI1	1079	40337.2	13230.9	164828.7
SI2	1099	39814.7	11547.4	163175.2
SI5	1165	39464.0	11343.5	161861.2
SI10	1170	39464.0	11343.5	161861.2
SI1DS1	342	7629.2	1827.5	33956.1
SI1DS2	187	3525.6	735.0	16346.8
SI1DS5	115	1824.1	354.7	8622.8
SI1DS10	100	1541.2	282.9	7393.1
SI1DS20	102	1541.2	282.9	7393.1
SS1	1108	42575.4	12045.5	174214.5
SS1DS1	969	15358.8	2796.8	66480.2
SS1DS2	512	7384.4	1528.6	32728.8
SS1DS5	209	2408.0	513.4	11220.6
SS1DS10	172	1839.9	356.4	8656.9
SS1DS20	167	1806.5	331.6	8500.4

fois plus rapidement et résulte en une économie appréciable de l'espace mémoire nécessaire.

Nous avons ensuite reexécuté les algorithmes CBBnorm(SI10) et CBBnorm(SI1DS10) sur les mêmes 10 problèmes mais cette fois nous avons calculé à chaque itération les trois bornes inférieures SI10, SI1DS10, SS1 (plutôt que seulement SI10 ou SI1DS10 selon le cas) et mesuré pour chacune d'elles l'amélioration par rapport à SS1 (définie comme $100 \times \frac{|LB-SS1|}{|SS1|}$). Nous avons également noté si la borne permet ou non l'élimination du cône. (À noter que toutes les éliminations et sélections de cônes sont faites par rapport à SI10 et SI1DS10 respectivement.) Le Tableau 5.2 présente pour chaque borne l'amélioration moyenne ($\%impr$) et le pourcentage d'élimination de cônes ($\%elim$). On observe que SS1 et SI10 ont exactement le même pourcentage d'élimination: ceci résulte de la définition de SS1, qui essentiellement vérifie si la meilleure borne simpliciale permet ou non l'élimination du cône, sans calculer explicitement sa valeur. Cependant, comme on peut le noter dans le Tableau 5.1,

Tableau 5.2: Qualité des bornes

	CBBnorm(SI10)		CBBnorm(SI1DS10)	
	%impr	%elim	%impr	%elim
SS1	0.00	77.20	0.00	49.77
SI10	3.94	77.20	12.58	49.77
SI1DS10	7.80	96.38	16.81	79.83

une augmentation du nombre d'itérations dans la procédure *MBIS* se traduit par une diminution du nombre d'itérations de l'algorithme CBBnorm, soit parce que ces bornes améliorées permettent une meilleure détermination des régions prometteuses, ou puisque plus de cônes sont éliminés à l'Étape 6 après une amélioration de la meilleure solution connue. Le Tableau 5.2 montre également que la borne double-simpliciale obtenue après 10 itérations de la procédure *MBIDS* est environ 4% meilleure que la borne simpliciale obtenue après 10 itérations de la procédure *MBIS*, et que cette amélioration se traduit par un nombre significativement plus grand d'éliminations de cônes (à noter que le pourcentage d'élimination de cônes est grandement affecté par l'algorithme utilisé: CBBnorm(SI1DS10) élimine immédiatement les cônes qui peuvent être éliminés par la borne double-simpliciale tandis que dans CBBnorm(SI10) ces cônes sont partitionnés jusqu'à ce que la borne simpliciale permet leur élimination).

Ces résultats permettent essentiellement de se faire une idée du gain que l'on peut espérer en utilisant les meilleures bornes simpliciales et double-simpliciales. En ce sens, ils sont positifs, au moins pour la borne double-simpliciale.

Par contre, si on compare les temps de calcul obtenus avec ceux d'autres chercheurs, les résultats sont moins encourageants. Ainsi Horst et Thoai [21] résolvent des problèmes similaires ayant jusqu'à 50 variables en un temps de l'ordre de l'heure sur un IBM-PS2, Model 80. Les algorithmes utilisés sont i) la méthode d'annexion polyédrale et ii) la variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme BALI73 avec partition

normale, combinée avec des coupes de concavité. Ces deux méthodes obtiennent des résultats comparables. La méthode d'approximation extérieure qui était aussi testée est nettement dominée. Des explications possibles à ces contre-performances de l'algorithme CBBnorm sont le choix de l'origine des cônes, qui a pour effet de multiplier par $n + 1$ le nombre de cônes initiaux comparé à l'implantation de Horst et Thoai, et la non-utilisation des coupes de concavité. D'autres expériences numériques sont en cours pour mieux comprendre ce qui se passe.

5.2 Algorithme conique avec ω -partitions et γ -extensions calculées à partir de la borne supérieure

Dans cette section, nous proposons une nouvelle preuve de convergence pour les algorithmes coniques de type BALI73 n'utilisant que des ω -partitions et dont les γ -extensions sont calculées avec γ égal à la valeur de la meilleure solution connue (voir aussi Jaumard et Meyer [30]). Rappelons que la tentative de Bali et Jacobsen a été infructueuse. Cette nouvelle preuve est donnée dans la Sous-section 5.2.2. Elle est basée sur un nouvel hyperplan, s'appuyant sur tout le polytope P , et qui a été introduit dans le Chapitre 2.2. Auparavant, dans la Sous-section 5.2.1, nous présentons l'algorithme CS_ω pour lequel nous prouvons la convergence. Celui-ci diffère de BALI73 par des détails mineurs comme par exemple le calcul des γ -extensions et la règle de sélection du cône à partitionner (BALI73 sélectionne ce cône sur la base du "premier entré, premier sorti"). Il diffère des variantes de BALI73 (Thoai et Tuy [61] et Tuy [64]) en ce qu'il n'utilise aucune bisection. Rappelons que BALI73 est lui-même une modification de l'algorithme TUY64 proposé initialement par Tuy [62]. Finalement dans la Sous-section 5.2.3, nous prouvons la convergence de la variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme CS_ω (voir Thoai et Tuy [61] et Tuy [64] pour des versions de cette variante avec des procédés de partition basés sur des bisections).

5.2.1 Algorithme

Cet algorithme calcule une solution ε -optimale du problème (*PMQCP*).

Algorithme CS_ω (algorithme conique avec ω -partitions)

Étape 1 (initialisation): construire une partition initiale \mathcal{P} de cônes d'origine O où O est soit un point intérieur de P , soit un point extrême non-dégénéré de P (dans ce dernier cas, on suppose que les contraintes de P satisfaites par O ont été supprimées: voir remarque en début du Chapitre 2). Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec le point O et les points d'intersection des génératrices de $K \in \mathcal{P}$ avec la frontière δP de P . Pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer les $(\bar{f} - \varepsilon)$ -extensions supérieures y^1, \dots, y^n et résoudre $PLBIS1(Y)$. Soient $\rho(K)$ la valeur optimale, et $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associé à la solution optimale. Si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$, mettre à jour la meilleure solution connue: $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$ et $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$. Éliminer tout cône K de \mathcal{P} pour lequel $\rho(K) \leq 1$. Soit \mathcal{L} l'ensemble de cônes restants.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution ε -optimale du problème (*PMQCP*). Sinon soit $\tilde{K} \in \arg \max\{\rho(K) \mid K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (subdivision): partitionner \tilde{K} via le point $\omega(\tilde{K})$ tel qu'expliqué dans le Chapitre 1.5.1. Soit \mathcal{P} la liste des sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (élimination): pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer les $(\bar{f} - \varepsilon)$ -extensions supérieures y^1, \dots, y^n et résoudre $PLBIS1(Y)$. Soient $\rho(K)$ la valeur optimale, et $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associé à la solution optimale. Si $\rho(K) \leq 1$, éliminer K de la liste \mathcal{L} .

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$; $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$.
Retourner à l'Étape 2.

5.2.2 Convergence

Théorème 5.2 *L'algorithme CS ω est correct et ne peut être infini que si $\varepsilon = 0$. Dans ce dernier cas, tout point d'accumulation de la suite \bar{x} est une solution optimale du problème (PMQCP).*

Pour prouver la convergence de l'algorithme CS ω , notons par K^k le cône sélectionné à l'Étape 2 de l'itération k et posons $\rho^k = \rho(K^k)$ et $\omega^k = \omega(K^k)$. Soient de plus $\hat{H}^k = \hat{H}(K^k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}^k x = 1\}$ l'hyperplan s'appuyant sur P associé à K^k , γ^k la valeur de la meilleure solution connue utilisée pour calculer les γ -extensions $y^{jk}, j = 1, 2, \dots, n$ qui définissent le programme linéaire résolu pour le cône K^k , et $\bar{f}^k = f(\bar{x}^k)$ la valeur de la meilleure solution connue à l'itération k . Si l'algorithme s'arrête à l'itération N , \bar{x}^N est une solution ε -optimale du problème (PMQCP) car $f(x) \geq \bar{f}^N - \varepsilon$ pour tout x de P .

Supposons donc que l'algorithme est infini. Puisque $\omega^k \in P$, $y^{jk} \in B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et que $O \notin \text{int}P$, les suites $\{\omega^k\}$, $\{y^{jk}\}_{k,j = 1,2,\dots,n}$ et $\{\hat{\alpha}^k\}$ sont bornées (pour cette dernière, voir la Proposition 2.3). Puisque la suite $\{\bar{f}^k\}$ est décroissante et minorée par $\min_{x \in P} f(x)$, elle converge vers une limite \bar{f}^* . Par continuité de f , tout point d'accumulation \bar{x} de la suite $\{x^k\}$ vérifie $f(\bar{x}) = \bar{f}^*$. D'un autre côté, par la règle de sélection de l'Étape 2 et par la décroissance de ρ lorsqu'on passe d'un cône père à un cône fils (voir Proposition 2.11), la suite $\{\rho^k\}$ est décroissante. Puisqu'elle est de plus minorée par 1 (car les cônes vérifiant $\rho^k \leq 1$ sont éliminés à l'Étape 4), elle tend vers une limite $\rho^* \geq 1$.

La proposition suivante montre que cette limite est en fait 1 en considérant une sous-suite infinie $\{K^{k_h}\}$ de cônes générée par le processus de partition. Une telle suite existe puisque chaque cône a un nombre fini de sous-cônes et que l'algorithme est infini. Afin de ne pas alourdir inutilement la notation, nous renotons cette suite $\{K^h\}$.

Proposition 5.1 *Une suite de cônes $\{K^h\}$ générée par ω -partition ne peut être in-*

finie que si $\varepsilon = 0$, et dans ce cas $\rho^h \rightarrow 1$.

Preuve:

D'après le Théorème 4.1 et puisque ρ^k tend globalement vers $\rho^* \geq 1$, il existe deux sous-suites $\{h_s\}$ et $\{h_{s'}\}$ de $\{h\}$ et un indice ℓ tels que $\hat{\alpha}^{h_s} \rightarrow \hat{\alpha}$, $y^{jh_s} \rightarrow \bar{y}^j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\omega^{h_{s'}} \rightarrow \bar{\omega}'$ avec O , $\bar{\omega}'$ et $\rho^* \bar{y}^\ell$ colinéaires et $\hat{\alpha} \rho^* \bar{y}^\ell = 1$. En remarquant que les hypothèses de la Proposition 2.11 s'appliquent, on a $1 \geq \hat{\alpha}^{h_s} \omega^{h_{s'}} \geq \frac{\rho^{h_{s'}}}{\rho^{h_s}}$ pour tout $h_{s'} \geq h_s$. En invoquant le Lemme 4.1, on en déduit $\hat{\alpha} \bar{\omega}' = 1$. Puisque O , $\rho^* \bar{y}^\ell$ et $\bar{\omega}'$ sont colinéaires et que l'hyperplan d'équation $\hat{\alpha}x = 1$ ne passe pas par O mais passe par les deux derniers points, on conclut que $\bar{\omega}' = \rho^* \bar{y}^\ell$. Mais \bar{y}^ℓ est la limite d'une suite $\{y^{\ell h}\}$ de $(\bar{f}^h - \varepsilon)$ -extensions avec \bar{f}^h inférieur à la valeur de f en le point d'intersection de $Oy^{\ell h}$ avec la frontière du polytope, donc \bar{y}^ℓ est à l'extérieur de P . Puisque $\bar{\omega}'$ est sur la frontière, on en déduit que $\rho^* \leq 1$, et donc $\rho^* = 1$. Par définition de la boule B , $\bar{y}^\ell = \bar{\omega}'$ est strictement à l'intérieur de celle-ci. Puisque f est continue, on en déduit $f(\bar{y}^\ell) = \bar{f}^* - \varepsilon$. D'autre part, $f(\bar{\omega}') \geq \bar{f}^*$. Puisque $\varepsilon \geq 0$, ces deux relations impliquent $\varepsilon = 0$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 5.2.

Preuve du Théorème 5.2. Nous avons déjà vu que si l'algorithme est infini, au moins une suite infinie de cônes est générée par la procédure de partition et que cela n'est possible que si $\varepsilon = 0$. De plus la suite $\{\rho^k\}$ converge vers 1 et la suite $\{\bar{f}^k\}$ vers $\bar{f}^* = f(\bar{x})$. Il reste à montrer que \bar{f}^* est la valeur optimale du problème (PMQCP).

Supposons par contradiction qu'il existe $x' \in P$ tel que $f(x') < \bar{f}^*$. Soit $\{K^{k_h}\}$ une suite de cônes générée par la procédure de partition contenant x' (à noter qu'il peut y avoir plusieurs de ces suites si x' appartient à une face d'un cône). La suite $\{K^{k_h}\}$ est infinie. En effet, si elle était finie, soit K^{k_N} le dernier cône contenant x' . Il y a deux possibilités: soit K^{k_N} n'est jamais sélectionné pour

être partitionné, auquel cas $\rho^k \geq \rho^{k_N} > 1$ pour tout $k \geq k_N$, en contradiction avec le fait que ρ^k tend vers 1. Soit K^{k_N} est éliminé, ce qui implique que $f(x') \geq \min_{x \in K^{k_N} \cap P} f(x) \geq \bar{f}^{k_N} \geq \bar{f}^*$, en contradiction avec l'hypothèse $f(x') < \bar{f}^*$. Soient \hat{y}'^{k_h} l'intersection de Ox' avec l'hyperplan $\hat{H}_y^{k_h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}^{k_h} x = \frac{1}{\rho^{k_h}}\}$, et y'^* la \bar{f}^* -extension supérieure de x' (à noter que $y'^* \in [Ox'] \subset B$). Puisque $f(\hat{y}'^{k_h}) \geq \gamma^{k_h} \geq \bar{f}^* = f(y'^*) > f(x')$ et par quasiconcavité de f , on a $\|x'\| > \|y'^*\| \geq \|\hat{y}'^{k_h}\|$. De plus, puisque $x' \in K^{k_h} \cap P$, on a $\|x'\| \leq \rho^{k_h} \|\hat{y}'^{k_h}\|$. Donc

$$\rho^{k_h} \geq \frac{\|x'\|}{\|\hat{y}'^{k_h}\|} \geq \frac{\|x'\|}{\|y'^*\|} > 1.$$

Mais $\{\rho^{k_h}\}$ tend vers 1 en tant que sous-suite de $\{\rho^k\}$, d'où une contradiction. On en conclut qu'il ne peut pas exister $x' \in P$ tel que $f(x') < \bar{f}^*$, et donc que \bar{f}^* est une solution optimale du problème (PMQCP). ■

5.2.3 Variante de type *branch-and-bound*

L'algorithme CS ω peut être transformé en un algorithme de type *branch-and-bound* en calculant à l'Étape 4 une borne inférieure simpliciale (éventuellement suivie d'une borne double-simpliciale) tel qu'expliqué dans le Chapitre 2.2. Le cône sélectionné pour être partitionné est alors choisi parmi les cônes restants de plus petite borne. La description détaillée de l'algorithme suit.

Algorithme CS ω BBvar (variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme CS ω)

Étape 1 (initialisation): sélectionner une des deux procédures de calcul de borne inférieure *BIS1* ou *BIS2* décrites dans le Chapitre 2.2.4. Construire une partition initiale \mathcal{P} de cônes d'origine O où O est soit un point intérieur de P , soit un point extrême non-dégénéré de P (dans ce dernier cas, on suppose que les contraintes satisfaites en O ont été supprimées de la description de P : voir remarque en début du Chapitre 2). Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et

sa valeur \bar{f} avec le point O et les points d'intersection des génératrices de $K \in \mathcal{P}$ avec la frontière δP . Pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer les $(\bar{f} - \varepsilon)$ -extensions supérieures $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ le long des génératrices de K et en déduire la borne inférieure simpliciale $\underline{f}(K) = BIS^?(Y)$. Soit $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associé à cette borne. Si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$, mettre à jour la meilleure solution connue: $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$ et $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$. Éliminer tout cône K de \mathcal{P} pour lequel $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$. Soit \mathcal{L} l'ensemble des cônes restants.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution ε -optimale du problème $(PMQCP)$. Sinon soit $\tilde{K} \in \arg \min\{\underline{f}(K) \mid K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (subdivision): partitionner \tilde{K} via le point $\omega(\tilde{K})$ tel qu'expliqué dans le Chapitre 1.5.1. Soit \mathcal{P} la liste de sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (calcul de borne inférieure): pour chaque cône $K \in \mathcal{P}$, calculer les $(\bar{f} - \varepsilon)$ -extensions supérieures $y^j, j = 1, 2, \dots, n$ le long des génératrices de K et en déduire la borne inférieure simpliciale $\underline{f}(K) = BIS^?(Y)$. Soit $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associé à cette borne. Si $\underline{f}(\tilde{K}) > \underline{f}(K)$, prendre pour borne inférieure $\underline{f}(K) = \underline{f}(\tilde{K})$.

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K)); \bar{x} \leftarrow \omega(K)$.

Étape 6 (élimination): éliminer de \mathcal{L} tous les cônes K tels que $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$.
Retourner à l'Étape 2.

La variante de type *branch-and-bound* de l'algorithme conique a été initialement proposée par Thoai et Tuy [61], puis reconsidérée par Tuy [64]. Notre algorithme diffère de ceux-là par la nouvelle borne inférieure simpliciale et en ce qu'il n'utilise pas de bisections pour assurer la convergence.

À noter que les points $\omega(K)$ sont définis exactement de la même manière que dans l'algorithme $CS\omega$, et que les cônes K avec $\rho(K) \leq 1$ sont éliminés puisque leur borne

inférieure est supérieure à $\bar{f} - \varepsilon$. La seule différence avec l'algorithme $CS\omega$ est l'ordre dans lequel les cônes sont considérés et la possibilité que certains sous-problèmes de l'arbre de recherche peuvent être éliminés plus rapidement quand la meilleure solution est améliorée. Il s'ensuit que les Propositions 2.11 et 5.1 sont toujours valides. La convergence de l'algorithme $CS\omega BBvar$ en découle facilement.

Théorème 5.3 *L'algorithme $CS\omega BBvar$ ne peut être infini que si $\varepsilon = 0$, et dans ce cas tout point d'accumulation de la suite \bar{x} est une solution optimale du problème (PMQCP).*

Preuve:

Notons par \mathcal{L}_k la liste de cônes \mathcal{L} à la fin de l'itération k et par \mathcal{D}_k l'ensemble des cônes supprimés à l'Étape 6 depuis le début de l'algorithme. Soient K^k le cône sélectionné pour être partitionné à l'itération k , $\underline{f}^k = \underline{f}(K^k)$ sa borne inférieure, $\bar{f}^k = f(\bar{x}^k)$ la valeur de la meilleure solution connue, et ρ^k le ratio ρ . Pour tout k , $\bigcup_{K \in \mathcal{L}_k \cup \mathcal{D}_k} (K \cap P) = P$ et $f(x) \geq \bar{f}^k - \varepsilon$ pour tout $x \in K \cap P$ et tout $K \in \mathcal{D}_k$ (noter que $\{\bar{f}^k\}$ est décroissante). Si pour un certain $k = N$, $\mathcal{L}_k = \emptyset$, alors $f(x) \geq \bar{f}^N - \varepsilon = f(\bar{x}^N) - \varepsilon$ pour tout $x \in P$, ce qui montre que \bar{x}^N est une solution ε -optimale du problème (PMQCP). À noter que tant que l'algorithme n'est pas fini, on a $\underline{f}^k < \bar{f}^k - \varepsilon$ et donc $f(x) \geq \underline{f}^k$ pour tout x de P .

Supposons maintenant que l'algorithme est infini. Puisque la suite $\{\bar{f}^k\}$ est décroissante et minorée par $\min_{x \in P} f(x)$, elle converge vers une limite \bar{f}^* , et par continuité de f tout point d'accumulation \bar{x} de $\{\bar{x}^k\}$ satisfait $f(\bar{x}) = \bar{f}^*$. De plus, $\bar{x} \in \delta P$. D'un autre côté, par la règle de sélection de l'Étape 2 et par la définition de la borne inférieure à l'Étape 4, la suite $\{\underline{f}^k\}$ est croissante. Comme elle est de plus majorée par \bar{f}^* , elle tend vers une limite $\underline{f}^* \leq \bar{f}^*$.

Puisque chaque cône a au plus n sous-cônes, au moins une suite infinie $\{K^{k_h}\}$ de cônes est générée par la procédure de partition. Soit γ^{k_h} la valeur de la meilleure solution connue utilisée pour définir les γ -extensions $y^{j k_h}$, $j =$

$1, 2, \dots, n$ lors du calcul de la borne simpliciale pour le cône K^{k_h} , et soit $z^{jk_h} = \rho^{k_h} y^{jk_h}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Par définition de la borne inférieure, $\underline{f}^{k_h} \geq \min\{f(O), f(z^{1k_h}), \dots, f(z^{nk_h})\}$ pour tout k_h (utiliser le fait que $BIS2(Y^h) \geq BIS1(Y^h)$ d'après la Propriété 2.4). D'un autre côté, $\gamma^{k_h} = \min\{f(O), f(y^{1k_h}), \dots, f(y^{nk_h})\}$. La Proposition 5.1 implique que $\varepsilon = 0$ et $\rho^{k_h} \rightarrow \rho^* = 1$. En passant à une sous-suite si nécessaire, ceci implique que $\{y^{jk_h}\}$ et $\{z^{jk_h}\}$ convergent vers la même limite \bar{y}^j , pour $j = 1, 2, \dots, n$. De plus, γ^{k_h} tend vers \bar{f}^* . Puisque f est continue, on en déduit que $\underline{f}^* \geq \min\{f(O), f(\bar{y}^{1k_h}), \dots, f(\bar{y}^{nk_h})\} = \bar{f}^*$, d'où $\underline{f}^* = \bar{f}^*$.

Puisque à chaque itération $f(x) \geq \underline{f}^k$ pour tout x de P , on a $f(x) \geq \bar{f}^*$ pour tout x de P , ce qui montre que $\bar{f}^* = f(\bar{x})$ est une solution optimale du problème (PMQCP). ■

5.3 Algorithme conique de type *branch-and-bound* avec ω -partitions et γ -extensions calculées à partir de la borne inférieure

Cet algorithme est le pendant de $CS\omega$ mais avec des γ -extensions calculées avec γ égal à une borne inférieure plutôt qu'à une borne supérieure de la valeur recherchée. Il correspond aussi à la variante de CBBnorm présenté dans la Section 5.1 avec $N = \infty$ (rappelons que N définissait la procédure de partition normale: $\frac{1}{N-1}$ correspond au ratio de bisections sur ω -partitions). À noter que la preuve de convergence de l'algorithme CBBnorm n'est valable que pour N fini.

On suppose ici que f est concave.

5.3.1 Algorithme

Cet algorithme est destiné à calculer une solution ε -optimale du problème (PMCP).

Algorithme CBB_ω (algorithme conique de type *branch-and-bound* avec ω -partitions)

Étape 1 (initialisation): construire une partition initiale \mathcal{P} de cônes d'origine O où O est soit un point intérieur de P , soit un point extrême non-dégénéré de P (dans ce dernier cas, on suppose que les contraintes satisfaites en O ont été supprimées de la description de P : voir remarque en début du Chapitre 2). Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec le point O et les points d'intersection des génératrices de $K \in \mathcal{P}$ avec la frontière δP de P . Pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer une borne inférieure simpliciale $\underline{f}(K)$ par la procédure *MBIS* (voir Chapitre 2.3.4). Soient $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ et $\hat{H}(K)$ l'hyperplan s'appuyant sur P associés à cette borne. Si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$, mettre à jour la meilleure solution connue: $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$ et $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$. Éliminer tout cône K de \mathcal{P} pour lequel $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$. Soit \mathcal{L} l'ensemble des cônes restants.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution ε -optimale du problème (*PMCP*). Sinon soit $\hat{K} \in \arg \min \{ \underline{f}(K) \mid K \in \mathcal{L} \}$.

Étape 3 (subdivision): partitionner \hat{K} via le point $\omega(\hat{K})$ tel qu'expliqué dans le Chapitre 1.5.1. Soit \mathcal{P} la liste de sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{ \hat{K} \}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (calcul de borne inférieure): pour tout cône K de \mathcal{P} calculer une borne inférieure simpliciale $\underline{f}(K)$ par la procédure *MBIS* initialisée avec l'hyperplan $\hat{H}(\hat{K})$ (voir Chapitre 2.3.4). Soient $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ et $\hat{H}(K)$ l'hyperplan s'appuyant sur P associés à cette borne.

Étape 5 (mise à jour de la meilleure solution connue): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(\omega(K)) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(\omega(K))$; $\bar{x} \leftarrow \omega(K)$.

Étape 6 (élimination): éliminer de \mathcal{L} tous les cônes K tels que $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$.
Retourner à l'Étape 2.

Bien entendu, à l'Étape 4, il est possible d'améliorer la borne inférieure en calculant une borne double-simpliciale.

5.3.2 Convergence

Théorème 5.4 *L'algorithme CBB ω est correct et ne peut être infini que si $\varepsilon = 0$. Dans ce dernier cas, tout point d'accumulation de la suite \bar{x} est une solution optimale du problème (PMCP).*

Preuve:

Notons par K^k le cône sélectionné à l'Étape 2 et posons $\omega^k = \omega(K^k)$, $\hat{H}^k = \hat{H}(K^k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}^k x = 1\}$ et $\underline{f}^k = \underline{f}(K^k)$. Notons par $y^{jk}, j = 1, 2, \dots, n$ les γ -extensions utilisées pour calculer la borne simpliciale de K^k , ρ^k la valeur optimale du problème $PLBIS2(Y^k)$, $z^{jk} = \frac{\rho^k}{1+\nu_j^k} y^{jk}, j = 1, 2, \dots, n$ les points ayant servi à calculer la borne inférieure pour K^k et $\bar{f}^k = f(\bar{x}^k)$ la valeur de la meilleure solution connue à l'itération k . Si l'algorithme s'arrête à l'itération N , \bar{x}^N est une solution ε -optimale du problème (PMCP) car $f(x) \geq \underline{f}^N \geq \bar{f}^N - \varepsilon$ pour tout x de P .

Supposons que l'algorithme est infini. On a alors $\underline{f}^k < \bar{f}^k - \varepsilon$. Puisque $\omega^k \in P$, $y^{jk} \in B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $O \notin \text{int}P$, les suites $\{\omega^k\}$, $\{y^{jk}\}_k, j = 1, 2, \dots, n$ et $\{\hat{\alpha}^k\}$ sont bornées (pour cette dernière, voir la Proposition 2.3). De plus $\rho^k \leq 1$ d'après la façon dont est initialisée la procédure $MBIS$ et par la Proposition 2.12. Puisque la suite $\{\bar{f}^k\}$ est décroissante et minorée par $\min_{x \in P} f(x)$, elle converge vers une limite \bar{f}^* . Par continuité de f , tout point d'accumulation \bar{x} de la suite $\{x^k\}$ vérifie $f(\bar{x}) = \bar{f}^*$. D'un autre côté, par la règle de sélection de l'Étape 2 et puisque l'hyperplan \hat{H}^k définit pour les sous-cônes de K^k une borne simpliciale supérieure à \underline{f}^k , possiblement améliorée par la procédure $MBIS$, la suite $\{\underline{f}^k\}$ est croissante. Puisqu'elle est majorée (par exemple par $f(O)$), elle tend vers une limite \underline{f}^* vérifiant $\underline{f}^* \leq \bar{f}^* - \varepsilon$.

Nous allons montrer que $\underline{f}^* \geq \bar{f}^*$, ce qui au vu de l'inégalité précédente impli-

quera $\underline{f}^* = \overline{f}^*$ et $\varepsilon = 0$. Si $\underline{f}^* = f(O)$, on a clairement $\underline{f}^* \geq \overline{f}^*$. Supposons donc que $\underline{f}^* < f(O)$ et considérons une sous-suite infinie $\{K^{h_s}\}$ de cônes générée par le processus de partition. Une telle suite existe puisque chaque cône a un nombre fini de sous-cônes et que l'algorithme est infini. Afin de ne pas alourdir inutilement la notation, nous renotons cette suite $\{K^h\}$. Montrons d'abord que ρ^h tend vers 1, c.-à-d. que tout point d'accumulation $\bar{\rho}$ de $\{\rho^h\}$ est égal à 1. Soit $\{h_s\}$ une sous-suite de $\{h\}$ telle que $\rho^{h_s} \rightarrow \bar{\rho}$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $y^{j h_s} \rightarrow \bar{y}^j$ et $z^{j h_s} \rightarrow \bar{z}^j = \frac{\bar{\rho}}{1+\bar{\nu}_j} \bar{y}^j$, $j = 1, 2, \dots, n$. En passant encore à une autre sous-suite, on peut supposer que la borne inférieure \underline{f}^{h_s} est atteinte en $z^{\ell h_s}$ pour tout h_s et pour un certain ℓ . On a donc $f(\frac{\bar{\rho}}{1+\bar{\nu}_\ell} \bar{y}^\ell) = f(\bar{z}^\ell) = \underline{f}^* \leq f(\bar{y}^\ell)$. Puisque $\frac{\bar{\rho}}{1+\bar{\nu}_\ell} \leq 1$, que $\underline{f}^* < f(O)$ et que f est strictement décroissante le long de la génératrice \bar{y}^ℓ à partir de la $f(O)$ -extension supérieure d'après la Proposition 2.2, on en déduit $\frac{\bar{\rho}}{1+\bar{\nu}_\ell} = 1$, c.-à-d. $\bar{\nu}_\ell = 0$ et $\bar{\rho} = 1$. Si la variante de la procédure *MBIS* correspondant à la borne simpliciale *BIS1* est utilisée, la seule différence dans la preuve est que $\bar{\nu}_j = 0$ pour $j = 1, \dots, n$ dès le départ.

Puisque $\rho^h \rightarrow 1$, d'après le Théorème 4.1 il existe deux sous-suites $\{h_s\}$ et $\{h_{s'}\}$ de $\{h\}$ et un indice ℓ tels que $\hat{\alpha}^{h_s} \rightarrow \hat{\alpha}$, $y^{j h_s} \rightarrow \bar{y}^j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\rho^{h_{s'}} \rightarrow 1$ et $\omega^{h_{s'}} \rightarrow \bar{\omega}'$ avec O , $\bar{\omega}'$ et \bar{y}^ℓ colinéaires et $\hat{\alpha} \bar{y}^\ell = 1$. En remarquant que les hypothèses de la Proposition 2.12 s'appliquent, on a $1 \geq \hat{\alpha}^{h_{s'}} \omega^{h_{s'}} \geq \rho^{h_{s'}}$ pour tout $h_{s'} \geq h_s$. En invoquant le Lemme 4.1, on en déduit $\hat{\alpha} \bar{\omega}' = 1$. Puisque O , \bar{y}^ℓ et $\bar{\omega}'$ sont colinéaires et que l'hyperplan d'équation $\hat{\alpha} x = 1$ ne passe pas par O mais passe par les deux derniers points, on conclut que $\bar{\omega}' = \bar{y}^\ell$. Par définition de la boule B , \bar{y}^ℓ ne peut pas être sur la surface, donc $f(\bar{y}^\ell) = \underline{f}^* = f(\bar{\omega}')$. Puisque $f(\bar{\omega}') \geq \overline{f}^*$, on conclut que $\underline{f}^* \geq \overline{f}^*$.

Puisque $f(x) \geq \underline{f}^k$ pour tout k et tout x de P , on a $f(x) \geq \underline{f}^* = \overline{f}^* = f(\bar{x})$ pour tout x de P , qui montre que \bar{x} est une solution optimale du problème (PMCP). ■

5.4 Algorithme conique de type *branch-and-bound* avec recouvrement

Cet algorithme se différencie des autres algorithmes de ce chapitre par l'utilisation de recouvrements de cône plutôt que des partitions. Ses principales différences avec l'algorithme TUY64 sont l'utilisation de γ -extensions définies à partir d'une borne inférieure de la valeur optimale recherchée plutôt que supérieure, et la recherche d'un point de subdivision après le calcul de la borne et non simultanément (ce qui permet de ne rien sacrifier à la qualité de la borne). Dans la Section 5.4.1, nous présentons une version idéale de cet algorithme au sens que pour chaque cône la meilleure borne simpliciale est supposée calculée. Dans la Section 5.4.2, nous montrons comment modifier cet algorithme pour assurer qu'il ne comporte pas de cycle. Finalement dans la Section 5.4.3 nous discutons de l'algorithme obtenu en calculant pour chaque cône une borne simpliciale plutôt que la meilleure possible.

5.4.1 Algorithme

Cet algorithme calcule une solution ε -optimale du problème (PMQCP) de minimisation quasiconcave sur un polytope. Sa convergence est cependant surtout discutée dans le cas concave.

Algorithme CBBcover (algorithme conique de type *branch-and-bound* avec recouvrements).

Étape 1 (initialisation): construire une partition initiale \mathcal{P} de cônes d'origine O où O est soit un point extrême non-dégénéré de P (voir Chapitre 1.4.1), soit un point intérieur de P (voir Chapitre 1.5.3). Initialiser la meilleure solution connue \bar{x} et sa valeur \bar{f} avec le point O et les points d'intersection des génératrices de $K \in \mathcal{P}$ avec la frontière δP de P . Pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer la meilleure borne simpliciale $\underline{f}(K)$. Soient $\hat{H}(K)$ l'hyperplan et $\omega(K)$ le point de $K \cap P$

associés à cette borne. Éliminer tout cône K de \mathcal{P} pour lequel $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$ et soit \mathcal{L} l'ensemble des cônes restants.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si \mathcal{L} est vide, stop: \bar{x} est une solution ε -optimale de $(PMQCP)$. Sinon soit $\tilde{K} \in \arg \min\{\underline{f}(K) \mid K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (mise à jour de la meilleure solution connue): choisir un point extrême x^ℓ de P situé sur $\hat{H}(\tilde{K})$ et n'appartenant pas à une des génératrices de \tilde{K} . Si $f(x^\ell) < \bar{f}$ alors faire $\bar{f} \leftarrow f(x^\ell)$; $\bar{x} \leftarrow x^\ell$.

Étape 4 (subdivision): subdiviser \tilde{K} par rapport au point x^ℓ comme expliqué au Chapitre 4.2.1. Soit \mathcal{P} l'ensemble des sous-cônes. Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{\tilde{K}\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 5 (calcul de borne inférieure): pour chaque cône K de \mathcal{P} , calculer la meilleure borne simpliciale $\underline{f}(K)$. Soient $\hat{H}(K)$ l'hyperplan et $\omega(K)$ le point de $K \cap P$ associés à cette borne.

Étape 6 (élimination): éliminer de \mathcal{L} tous les cônes K tels que $\underline{f}(K) \geq \bar{f} - \varepsilon$.
Retourner à l'Étape 2.

Puisque le recouvrement se fait par rapport à un point extrême de P , et que ces points sont en nombre fini, l'algorithme génère un nombre fini de cônes distincts et non-dégénérés. De plus, d'après la Proposition 2.9 et la règle de sélection de l'Étape 2, $\underline{f}(\tilde{K})$ croît au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme, assurant qu'un cône de valeur strictement inférieure à la meilleure borne simpliciale courante ne soit pas (re)généralisé. Puisque cette croissance n'est pas nécessairement stricte, il pourrait cependant y avoir une boucle sur des cônes ayant la même meilleure borne simpliciale. Ce problème est traité dans la Section 5.4.2.

Dans le reste de cette section, nous précisons le choix de x^ℓ à l'Étape 3. Soit K le cône sélectionné pour être subdivisé. On note par $\hat{\gamma} = \underline{f}(K)$ sa meilleure borne simpliciale et par $\hat{H} = \hat{H}(K)$ et $\hat{\omega} = \omega(K)$ l'hyperplan s'appuyant sur P et le point de $K \cap P$ associés. Soient $z^j, j = 1, \dots, n$ les points d'intersection des génératrices de K

avec \hat{H} , et $y^j, j = 1, \dots, n$ les $\hat{\gamma}$ -extensions inférieures de ces points. On suppose sans perte de généralité que la valeur optimale $\hat{\rho}$ du problème $PLBIS2(Y)$ est 1 (noter en effet que si $\hat{\gamma} < f(O)$, un tel hyperplan est obtenu en calculant la meilleure borne simpliciale par la procédure $MBIS$; voir Chapitre 2.3.4). On suppose également que les génératrices de K sont numérotées de telle sorte que $\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^p \tilde{\lambda}_j z^j$ avec $\sum_{j=1}^p \tilde{\lambda}_j = 1$ et $\tilde{\lambda}_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, p$ avec $p \leq n$ (c.-à-d. que $\tilde{\omega}$ est combinaison convexe des p premiers z^j).

Remarquons d'abord que dans la recherche d'un point extrême de P situé sur \hat{H} et n'appartenant pas aux génératrices de K , on n'a pas à se préoccuper des p premières. En effet, supposons qu'un point extrême x^ℓ situé sur \hat{H} appartienne à la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K , $j \leq p$. Puisque \hat{H} ne passe pas par O , on a $x^\ell = z^j$. Mais par définition de $\tilde{\omega}$ et des propriétés de la meilleure borne simpliciale, on a soit $f(z^j) = \hat{\gamma}$, soit $z^j \in \delta B$ (voir Chapitre 2.2.5). Cette dernière possibilité est exclue puisque B contient strictement le polytope, donc $f(x^\ell) = f(z^j) = \hat{\gamma}$. Comme le point d'intersection de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K avec la frontière de P a été utilisé pour mettre à jour la meilleure solution connue \bar{f} (voir Étapes 1 et 3), on a $\hat{\gamma} \geq \bar{f} \geq \bar{f} - \varepsilon$ et le cône K a donc été éliminé à l'Étape 6, d'où contradiction. Ce raisonnement montre en particulier que $p < n$.

Puisque $\hat{\rho} = 1$, on a $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i a^i$ avec $\sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i b_i = 1$ et $\hat{\mu}_i \geq 0$. Il est facile de voir qu'un point de P est sur $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ si et seulement si il vérifie à égalité les contraintes $a^i x \leq b_i$ de P pour i tel que $\hat{\mu}_i > 0$. Considérons le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=p+1}^n \lambda_j \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x = \sum_{j=1}^n \lambda_j z^j \\ a^i x \leq b_i & \text{pour } i \text{ tel que } \hat{\mu}_i = 0 \\ a^i x = b_i & \text{pour } i \text{ tel que } \hat{\mu}_i > 0. \end{cases} \end{array}$$

En remarquant que $\tilde{\lambda}$ est une solution réalisable de ce problème de valeur 0, on conclut que la valeur optimale de ce dernier est inférieure à 0. Soit $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ une solution optimale de base. Alors \hat{x} est un point extrême de P situé sur \hat{H} qui n'appartient à aucune des $n - p$ dernières génératrices. En effet une telle solution correspondrait à toutes les composantes de $\hat{\lambda}$ nulles, sauf une égale à 1, c'est-à-dire à une valeur optimale strictement positive.

À noter que puisqu'on utilise des recouvrements, on ne peut pas éliminer les contraintes de P satisfaites à égalité par O à l'Étape 1 comme cela était fait dans les algorithmes $CS\omega$, $CS\omega BBvar$ et $CBB\omega$ (voir Chapitres 5.2 et 5.3). Rappelons que cette opération visait à assurer que la borne simpliciale est définie pour tous les cônes, y compris les cônes-limites possiblement dégénérés. Comme l'algorithme $CBBcover$ génère un nombre fini de cônes non-dégénérés, ce problème de dégénérescence ne se pose pas ici et l'impossibilité d'éliminer ces contraintes ne présente donc aucune difficulté.

Si la partition initiale est composée de $n + 1$ cônes, c'est-à-dire si O est un point intérieur du polytope, il est préférable de décomposer le polytope en $n + 1$ polytopes obtenus en ajoutant à la description de P les contraintes définissant le cône correspondant. Cette façon de faire assure que les γ -extensions soient définies correctement.

5.4.2 Procédure anti-cyclage

Le problème majeur des algorithmes de recouvrement tels que $CBBcover$ et $TUY64$ est la possible existence de cycles, c'est-à-dire qu'un cône soit son propre ancêtre. Le fait d'associer à toute suite de cônes générée par le processus de subdivision une fonction croissante (en l'occurrence ici la valeur de la meilleure borne simpliciale) est un plus par rapport, par exemple, à l'algorithme de Tuy. Cependant, cela n'exclut pas les cycles où tous les cônes ont la même valeur par cette fonction.

Un problème analogue se retrouve en programmation linéaire et a été résolu de plusieurs façons: procédure lexicographique, règle de sélection du pivot de Bland

(voir par exemple Minoux [48]). Il est important de noter que les partitions et recouvrements radials ne correspondent finalement à rien d'autre qu'à un pivotage de l'algorithme du simplexe. Mais contrairement à l'algorithme du simplexe où un seul problème correspondant à la sortie d'une variable présente dans la base est considéré, l'algorithme CBBcover considère simultanément plusieurs problèmes, chacun correspondant à la sortie (c.-à-d. au remplacement) d'une génératrice du cône. Dit autrement, l'algorithme du simplexe génère un chemin alors que CBBcover génère un arbre. L'application des méthodes anti-cyclage de la programmation linéaire préviendrait donc un cyclage sur une branche de l'arbre de recherche, mais n'empêcherait rien sur les autres.

De fait, nous ne sommes pas en mesure de donner une règle spécifiant comment choisir le point x^ℓ à l'Étape 3 et qui éliminerait tout risque de cyclage. À la place, nous définissons un nouveau recouvrement (qui n'est plus radial) construit à partir d'un ensemble E de points extrêmes de P situés sur $\hat{H}(K)$, de cardinalité inférieure à n . Pour simplifier, nous supposons ici que f est concave.

On adopte les mêmes notations que dans la sous-section précédente, à savoir que K désigne le cône que l'on veut subdiviser, $\hat{\gamma}$ sa meilleure borne simpliciale. $\hat{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \hat{\alpha}x = 1\}$ et $\tilde{\omega}$ respectivement l'hyperplan s'appuyant sur P et le point de $K \cap P$ associés. On note par $z^j, j = 1, \dots, n$ les points d'intersection des génératrices de K avec \hat{H} , et $y^j, j = 1, \dots, n$ leurs $\hat{\gamma}$ -extensions inférieures. On suppose que la valeur optimale du problème $PLBIS2(Y)$ est 1 et que $\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^p \lambda_j z^j$ avec $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ et $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, p$. D'après les propriétés de la meilleure borne simpliciale, on a alors soit $f(z^j) = \hat{\gamma}$, soit $z^j \in \delta B$ pour $j = 1, 2, \dots, p$. Soit $E = \{x^\ell, \ell = 1, 2, \dots, r\}$ un ensemble de points extrêmes de P situés sur \hat{H} tel que

$$\tilde{\omega} = \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell x^\ell, \quad \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell = 1, \quad \eta_\ell > 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, r).$$

D'après le Théorème de Carathéodory (voir par exemple Rockafellar [55]), il est toujours possible de trouver un tel ensemble E de cardinalité au plus égale à la dimension

de $P \cap \hat{H}$ plus 1, c'est-à-dire inférieure à n .

Soit Z l'ensemble des points $z^j, j = 1, 2, \dots, n$. Soit Z' un ensemble de n éléments linéairement indépendants de $Z \cup E$ tel que $\{z^1, \dots, z^p\} \not\subseteq Z'$ (c.-à-d. tel que au moins un des points $z^j, j = 1, \dots, p$ ne fasse pas partie de Z'). Soit K' le cône induit par Z' . On note par $\mathcal{K}(K)$ l'ensemble des cônes K' non-dégénérés définis de cette façon.

Proposition 5.2 $\mathcal{K}(K)$ définit un recouvrement de K , c'est-à-dire que

$$K \subseteq \bigcup_{K' \in \mathcal{K}(K)} K'.$$

Preuve:

Soit x un point de K : x s'écrit $x = \sum_{j=1}^n \nu_j z^j$ avec $\nu_j \geq 0$. Soit k un indice compris entre 1 et p tel que

$$\frac{\nu_k}{\lambda_k} = \min_{j=1,2,\dots,p} \left\{ \frac{\nu_j}{\lambda_j} \right\}.$$

De l'égalité $\sum_{j=1}^p \lambda_j z^j = \tilde{\omega} = \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell x^\ell$, on déduit

$$z^k = \frac{1}{\lambda_k} \left(\sum_{\ell=1}^r \eta_\ell x^\ell - \sum_{j=1, j \neq k}^p \lambda_j z^j \right).$$

D'où

$$x = \sum_{j=1, j \neq k}^p \left(\nu_j - \frac{\nu_k}{\lambda_k} \lambda_j \right) z^j + \sum_{j=p+1}^n \nu_j z^j + \frac{\nu_k}{\lambda_k} \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell x^\ell. \quad (5.1)$$

Par choix de k , tous les coefficients sont positifs. On commence par regrouper les éventuels points $z^j, j = p+1, \dots, n$ et $x^\ell, \ell = 1, \dots, r$ identiques. Tant que x est combinaison positive de q points, $q > n$, il existe une relation qui lie ces points et qu'on peut soustraire de (5.1) de telle façon que x soit une combinaison positive d'au plus $q-1$ de ces points. En fin de compte, x s'exprime donc comme combinaison positive de $q \leq n$ points linéairement indépendants

choisis parmi les $z^j, j = 1, \dots, n, j \neq k$ et les $x^\ell, \ell = 1, \dots, r$. En reprenant si nécessaire certains points éliminés avec un coefficient nul, on peut se ramener au cas $q = n$. Soit K' le cône défini par ces n points: il contient x et appartient à $\mathcal{K}(K)$ puisque x^k ne fait pas partie de ses génératrices. ■

Notons par $L(Y')$ le sous-ensemble des $y^j \in Y$ tels qu'il existe une solution optimale $\tilde{\lambda}$ de $PLBIS1(Y)$ vérifiant $\tilde{\lambda}_j > 0$. D'après la Propriété 2.3 du Chapitre 2.2.5, on a $\hat{\alpha}y^j = 1$ pour tout y^j de $L(Y)$ (rappelons que la valeur optimale du problème $PLBIS2(Y)$, qui est également celle du problème $PLBIS1(Y)$, est supposée égale à 1).

Théorème 5.5 *Soit K' un cône de $\mathcal{K}(K)$. On note par y'^j la $\hat{\gamma}$ -extension inférieure du point d'intersection z'^j de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K' avec \hat{H} , pour $j = 1, \dots, n$. Soit $Y' = (y'^1, \dots, y'^n)$.*

Alors ou bien la valeur optimale ρ' du problème $PLBIS1(Y')$ est strictement inférieure à 1, ou bien on a l'inclusion stricte $L(Y') \subset L(Y)$.

Preuve:

Puisque \hat{H} définit une borne simpliciale pour K' , on a $\rho' \leq 1$. Supposons que $\rho' = 1$. Par définition de $L(Y')$, il existe λ' tel que $\lambda'_j > 0, j \in L(Y')$.

$\sum_{j \in L(Y')} \lambda'_j = 1$ et $\omega' = \sum_{j \in L(Y')} \lambda'_j y'^j$. Par définition des y'^j , on a $\hat{\alpha}y'^j \geq 1$ pour $j = 1, \dots, n$ avec inégalité stricte pour les nouvelles génératrices, c'est-à-dire celles qui ne font pas partie des génératrices de K . Si un point y'^j correspondant à une nouvelle génératrice fait partie de $L(Y')$, on en conclut donc que $\hat{\alpha}\omega' > 1$, ce qui est impossible puisque $\omega' \in P$ et que \hat{H} s'appuie sur P . Donc les génératrices de K' qui ne sont pas dans K ne peuvent pas faire partie de $L(Y')$.

Puisque toutes les génératrices y'^j de $L(Y')$ sont des génératrices de K , on a l'inclusion $L(Y') \subseteq L(Y)$. Cette inclusion est stricte puisque par définition de K' au moins une génératrice de $L(Y)$ est absente de K' , et donc de $L(Y')$. ■

Après au plus n générations, on a donc $\rho' < 1$ pour tous les descendants du cône K , ce qui implique une amélioration stricte de la borne simpliciale puisque f est supposée concave. Le cône K ne peut alors plus faire partie d'un cycle et peut donc être définitivement éliminé.

Le cas où f est quasiconcave et peut être constant par endroit sur les génératrices de K est plus délicat puisque $\rho' < 1$ n'implique alors plus nécessairement une amélioration stricte de la borne. On peut espérer au moins la convergence infinie en définissant une fonction auxiliaire supplémentaire basée sur la position des γ -extensions sur les génératrices mais nous n'entrerons pas dans les détails.

En pratique, un ensemble E correspondant au Théorème de Carathéodory peut être construit de la façon suivante:

Étape 1 (initialisation): soit I l'ensemble des indices des contraintes de P satisfaites à égalité par ω . On définit le programme linéaire

$$PL(I) \quad \max \quad cx$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} a^i x \leq b_i & i \notin I \\ a^i x = b_i & i \in I \end{cases}$$

où c est un vecteur non nul quelconque. Posons $I^1 = I$, $\omega^1 = \omega$ et $k = 1$.

Étape 2 (calcul d'un point extrême): résoudre $PL(I^k)$. Soit x^k une solution optimale de base.

Étape 3 (mise à jour): calculer ω^{k+1} , intersection de la demi-droite $[x^k \omega^k]$ avec la frontière du polytope. Si ω^{k+1} est un point extrême de P , stop: ω est combinaison convexe des points extrêmes $x^1, \dots, x^k, \omega^{k+1}$.

Sinon soit I^{k+1} l'ensemble des indices des contraintes de P satisfaites à égalité par ω^{k+1} . Incrémenter k et retourner à l'Étape 2.

Le calcul de E nécessite donc la résolution d'un maximum de n programmes linéaires. Ces calculs peuvent être facilités en notant que la solution optimale du problème

linéaire à une itération donnée est duale-réalisable pour le problème de l'itération suivante.

Terminons par une remarque sur $\mathcal{K}(K)$: on peut se demander si ce recouvrement ne pourrait pas être obtenu par une suite de recouvrements radiaux. La réponse est oui si on considère le recouvrement non minimal utilisé par Tuy dans son algorithme TUY64. Rappelons que si $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u^j$ est le point par rapport auquel se fait la subdivision ($u^j, j = 1, \dots, n$ désignant les vecteurs directeurs des génératrices de K), le recouvrement de Tuy définit un sous-cône K^j pour tout j de J_{\neq} avec $J_{\neq} = \{j \mid \lambda_j \neq 0\}$ (voir Chapitre 1.4.1). Supposons pour simplifier que pour toutes les subdivisions considérées $J_{\neq} = \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que chaque cône est subdivisé en exactement n sous-cônes. $\mathcal{K}(K)$ s'obtient alors de la façon suivante: on subdivise le cône K par rapport à x^1 , puis les sous-cônes obtenus par rapport à x^2 , puis les sous-cônes de ces sous-cônes par x^3 , etc, jusqu'à x^r . Notons par \mathcal{R} le recouvrement de K ainsi obtenu. Clairement \mathcal{R} contient tous les cônes de $\mathcal{K}(K)$. Par exemple si $p = 3$ et $n = 5$, le cône de $\mathcal{K}(K)$ défini par $K' = \text{cône}\{O; z^1, z^2, x^3, z^4, x^1\}$ est obtenu de la façon suivante (les flèches indiquent par rapport à quel point se fait le recouvrement): $K = \text{cône}\{O; z^1, z^2, z^3, z^4, z^5\} \xrightarrow{x^1} \text{cône}\{O; z^1, z^2, z^3, z^4, x^1\} \xrightarrow{x^2} \text{cône}\{O; z^1, z^2, x^2, z^4, x^1\} \xrightarrow{x^3} \text{cône}\{O; z^1, z^2, x^3, z^4, x^1\} = K'$.

Le recouvrement \mathcal{R} contient également de nombreux autres cônes, comme par exemple $K'' = \text{cône}\{O; z^1, z^2, z^3, z^4, x^3\}$ obtenu à partir de K en remplaçant la dernière génératrice par x^1 , puis la dernière génératrice du dernier sous-cône obtenu par x^2 , etc.... D'après le Théorème 5.5, ces cônes ne sont pas nécessaires pour définir un recouvrement de K et peuvent donc être éliminés. À noter que si on continuait de subdiviser ces cônes superflus, on obtiendrait des cycles. Par exemple, en considérant la séquence de sous-cônes de K'' correspondant au remplacement de la dernière génératrice, on finirait par épuiser les points extrêmes disponibles et à retrouver un cône déjà rencontré. Le Théorème 5.5 et sa réinterprétation en termes de subdivision radiale

suggèrent donc qu'on peut définir la façon de choisir x' à l'Étape 3 de l'algorithme CBBcover de manière à pouvoir éliminer tout cône faisant partie d'un cycle, tout au moins si le recouvrement non minimal de Tuy est utilisé. Ce résultat reste-t-il vrai si on utilise le recouvrement minimal? Peut-on définir une règle de choix du point x' à l'Étape 3 qui nécessite la détermination d'un seul point extrême plutôt que d'une liste E tout en permettant l'élimination des cônes impliqués dans un cycle? La règle définie dans la Section 5.4.1 possède-t-elle cette propriété? Et celle utilisée par l'algorithme TUY64 de Tuy?

5.4.3 Discussion

Clairement il n'est pas réaliste de vouloir calculer la meilleure borne simpliciale pour chaque cône. À la place, on peut considérer la borne simpliciale (pas nécessairement la meilleure) obtenue en effectuant un nombre d'itérations fini de la procédure *MBIS*. Dans ce cas, un même cône peut être généré plusieurs fois (possiblement un nombre infini de fois) mais avec une borne simpliciale croissante. On peut montrer que pour un cône donné, les bornes simpliciales obtenues par les appels successifs de la procédure *MBIS* convergent vers la meilleure borne simpliciale pour ce cône. En appliquant le même raisonnement que pour l'algorithme idéal, on peut alors montrer la convergence (infinie) de l'algorithme réaliste. Bien entendu, une preuve plus formelle sera nécessaire.

Que peut-on attendre d'un tel algorithme en pratique? L'une des opérations coûteuses de cet algorithme est le calcul des γ -extensions qui requièrent chacune une recherche unidimensionnelle non-linéaire. Puisque ces calculs sont concentrés sur un nombre fini de génératrices, on peut espérer exploiter largement l'information accumulée. Le nombre de programmes linéaires à résoudre par itération en supposant que l'on effectue une seule itération de la procédure *MBIS* est 2, ce qui semble raisonnable (noter que s'il est nécessaire d'utiliser la procédure anti-cyclage de la Section 5.4.2, on a à résoudre jusqu'à n programmes linéaires, mais les points obtenus servent lors des

subdivisions suivantes). Noter aussi que puisque les génératrices des cônes correspondent à des points extrêmes de P , on peut espérer que de nombreux cônes pourront être éliminés sans calcul en constatant que leurs génératrices intersectent une même facette du polytope.

Cet algorithme se situe en quelque sorte à mi-chemin entre les algorithmes finis tels que les méthodes d'annexion polyédrale (voir Chapitre 1.5.5) et de subdivisions simpliciales de Benson et Sayin (voir Chapitre 1.6.3), et les algorithmes a priori infinis tels que CBB_{norm} , CS_{ω} , $CS_{\omega}BB_{\text{var}}$ et CBB_{ω} (voir Sections 5.1, 5.2 et 5.3), dans la mesure où il n'est pas assuré de terminer après un nombre fini d'itérations mais génère un nombre fini de cônes. À noter que les résultats numériques pour l'algorithme CBB_{norm} suggèrent que la meilleure borne simpliciale pourrait être approchée de façon assez précise après 5 à 10 itérations de la procédure *MBIS*, ce qui signifie que notre algorithme pourrait être assez proche en pratique d'un algorithme fini.

Le fait que cette méthode utilise des recouvrements plutôt que des partitions pourrait faire craindre une dispersion de la recherche, ce qui la pénaliserait par rapport aux algorithmes CBB_{norm} , CS_{ω} , $CS_{\omega}BB_{\text{var}}$ et CBB_{ω} utilisant des partitions. Rappelons cependant que ces recouvrements sont définis de façon à ne pas diminuer la borne inférieure: il n'y a donc aucune raison que les sous-cônes obtenus soient pires que le cône dont ils sont issus. Comme de plus la recherche est concentrée sur les points extrêmes du polytope contrairement à ce qui se passe pour CBB_{norm} , CS_{ω} , $CS_{\omega}BB_{\text{var}}$ et CBB_{ω} , on peut penser que CBB_{cover} pourrait être meilleur que ces algorithmes.

Par rapport aux algorithmes finis, l'un des grands avantages de CBB_{cover} est de pas être affecté par la présence de points extrêmes dégénérés dans le polytope: la méthode d'annexion polyédrale fait en effet appel à une procédure d'énumération dynamique de points extrêmes alors que l'algorithme de Benson et Sayin nécessite de lister les points extrêmes voisins de ceux rencontrés, deux opérations qui sont compliquées par la présence de points dégénérés.

La compétitivité de CBBcover par rapport à la méthode d'annexion polyédrale dépendra probablement beaucoup de la comparaison entre la résolution d'un programme linéaire et une itération de l'énumération dynamique de points extrêmes: cette dernière nécessite d'énumérer tous les nouveaux points extrêmes et de remettre à jour les chaînages entre points extrêmes alors que la résolution d'un programme linéaire revient essentiellement à pivoter de sommets en sommets. À noter cependant que CBBcover demande plus de calculs de γ -extensions.

Par rapport à l'algorithme de Benson et Sayin, CBBcover présente plusieurs avantages: d'abord le programme linéaire donnant la borne inférieure est résolu sur la portion de polytope courant plutôt que sur le polytope entier, ce qui permet d'espérer une borne plus fine. Ensuite les sous-cônes générés par le processus de recouvrement ont une borne simpliciale au moins aussi bonne que celle du cône père, alors qu'une telle relation n'existe pas entre simplexe et sous-simplexes dans l'algorithme de Benson et Sayin. Cet algorithme nécessite également de trouver à quel simplexe appartient un point donné alors que CBBcover n'a aucune recherche de ce genre à effectuer. Finalement, notons que la méthode de borne inférieure basée sur les enveloppes convexes et utilisée par Benson et Sayin ne se généralise pas au cas quasiconcave.

CHAPITRE 6

Minimisation de la somme d'un produit de fonctions convexes et d'une fonction convexe additionnelle sur un ensemble convexe

Dans ce chapitre, on considère le problème de minimiser la somme d'un produit de fonctions convexes positives et d'une fonction convexe sur un ensemble convexe. Ce problème est ramené à un problème de minimisation quasiconcave sur un ensemble convexe non polyédral et non borné (plus précisément l'espace contenu dans l'orthant positif et délimité par une hyperbole) dans un espace de dimension petite. Ce problème est résolu par un algorithme conique dont une particularité est que l'origine commune des cônes est à l'extérieur du domaine. Le contenu de ce chapitre doit paraître prochainement dans *Journal of Global Optimization* [31].

6.1 Définition du problème

On considère l'optimisation de problème de Programmation Convexe Multiplicative Généralisée de la forme

$$(GMP) \quad \min_{x \in G} \left(f(x) = f_0(x) + \prod_{i=1}^k f_i(x) \right)$$

où $k \geq 2$, les fonctions f_i sont convexes sur \mathbb{R}^n ($i = 0, 1, \dots, k$), et G est un sous-ensemble non-vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n tel que:

$$\forall x \in G \quad f_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.1)$$

Ce problème a de nombreuses applications, par exemple, en micro-économie [19], en conception de circuits intégrés [46], en gestion de portefeuille boursier [33] et en programmation multicritère [16].

Il est bien connu (voir par exemple Konno et Kuno [35]) que le produit de fonctions convexes n'est pas nécessairement (quasi)convexe donc la fonction objectif f du problème (GMP) peut avoir des minima locaux. De plus, sauf dans le cas où la fonction f_0 est constante et que les fonctions f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sont linéaires, la fonction objectif n'est généralement pas non plus quasiconcave.

Plusieurs cas particuliers du problème (GMP) ont été considérés, spécialement pour $k = 2$. Le problème de Programmation Linéaire Multiplicative (c.-à-d. f_0 constante et f_1, f_2 linéaires) a été étudié par Konno et Kuno [35] qui ont proposé une méthode paramétrique du simplexe pour le résoudre. Une méthode légèrement plus générale, exploitant le faible degré de non-linéarité de la fonction objectif a été suggérée par Tuy et Tam [70]. L'approche de la méthode paramétrique du simplexe a ensuite été généralisée par Konno, Yajima et Matsui [39] pour résoudre un cas particulier du problème de Programmation Linéaire Multiplicative Généralisée (c.-à-d. f_0 quadratique et f_1, f_2 linéaires). Récemment, Schaible et Sadini [56] ont utilisé cette même approche (mais avec des conditions d'optimalité différentes) pour le cas f_0, f_1, f_2 linéaires et G non borné. Deux méthodes ont été proposées pour le cas où f_0

est convexe et f_1 et f_2 sont linéaires: (i) une méthode d'approximation discrète par Konno et Kuno [34]; (ii) un algorithme d'énumération implicite (*branch-and-bound*) par Muu et Tam [52] où le branchement se fait dans un intervalle de \mathbb{R} et le calcul de borne inférieure correspond à la résolution d'une relaxation. De plus, Kuno et Konno [40] ont construit une méthode de type *branch-and-bound* utilisant une fonction minorante pour le problème (GCMP) avec $k = 2$ (qui peut être facilement généralisée à $k = 3$). Plus récemment, Konno, Kuno et Yajima [37] ont considéré le problème de minimiser la somme de p produits de deux fonctions convexes, qui inclut le problème (GCMP) avec $k = 2$ comme cas particulier. Ils proposent une réduction à un problème de minimisation concave à $2p$ variables, qui est résolu par une méthode d'approximations extérieures.

Des problèmes avec jusqu'à 350 contraintes linéaires et 300 variables ont été résolus lorsque f_0, f_1, f_2 sont linéaires par Konno, Yajima et Matsui [39], et avec jusqu'à 130 contraintes linéaires et 100 variables lorsque f_0 est une fonction quadratique convexe et que f_1, f_2 sont linéaires par Konno et Kuno [40].

Pour k supérieur à 3, seul le problème de Programmation Convexe Multiplicative ($f_0 = 0$) a été considéré. Thoai [59] propose une réduction à un problème de minimisation d'une fonction quasiconcave de k variables, qui est résolu par une méthode d'approximations extérieures. Kuno *et al.* [42] proposent une autre réduction à un problème de minimisation concave à k variables, avec une fonction objectif déterminée par la résolution d'un problème de minimisation convexe. Leurs expériences numériques montrent que cet algorithme est raisonnablement efficace pour $k \leq 4$.

Des problèmes voisins tels que la minimisation de fonctions fractionnaires ou la minimisation avec une contrainte multiplicative peuvent être trouvés dans [34, 38, 39, 41, 43, 51, 54, 58, 60, 71]. Pour une revue récente de la programmation multiplicative, voir Konno et Kuno [36].

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 6.2, on réduit (*GCMP*) à un problème de minimisation quasiconcave dans un espace de dimension k . Des bornes inférieures et les branchements sont discutés dans la Section 6.3. Dans la Section 6.4, un algorithme conique de type *branch-and-bound* utilisant ces techniques est développé pour résoudre des problèmes de minimisation quasiconcave de petite dimension. Des résultats numériques sont présentés dans la Section 6.5.

6.2 Reformulation en problème de minimisation quasiconcave

Dans cette section, nous montrons comment réduire le problème de programmation convexe multiplicative généralisée (*GCMP*) en un problème de minimisation quasiconcave sous l'hypothèse que les fonctions f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sont positives. Dans le cas particulier où f_0 est constante, cette réduction est similaire à celle proposée par Kuno, Yajima et Konno [42].

Par la suite, nous supposons sans perte de généralité que si f_0 est une fonction constante, il s'agit de la fonction nulle, c.-à-d. que $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in G$.

Nous faisons également l'hypothèse

$$\forall x \in G \quad f_i(x) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.2)$$

Cette condition n'est pas restrictive si on s'intéresse à des solutions ε -optimales (c.-à-d. à des points de G dont la valeur diffère de la valeur optimale par moins que $\varepsilon > 0$) du problème (*GCMP*). En effet, soit \tilde{f} le minimum global de $f(x)$ sur G sous la contrainte additionnelle que $\prod_{i=1}^k f_i(x) = 0$. On peut alors montrer que soit \tilde{f} est une valeur ε -optimale du problème (*GCMP*), ou bien toutes les solutions optimales du problème (*GCMP*) appartiennent à l'ensemble convexe $G' = G \cap \{x : f_0(x) \leq \tilde{f} - \varepsilon\}$. De plus, on a $\prod_{i=1}^k f_i(x) > 0$ pour tout $x \in G'$.

Notons d'abord que la valeur \tilde{f} peut être obtenue en résolvant k problèmes convexes:

$$(P_i) \quad \tilde{f}_i = \min\{f_0(x) : f_i(x) \leq 0 \text{ et } x \in G\}$$

pour $i = 1, 2, \dots, k$, c.-à-d. $\tilde{f} = \min_{i=1,2,\dots,k} \tilde{f}_i$.

Soit x^* une solution optimale du problème (GCMP) de valeur f^* . Si \tilde{f} n'est pas une valeur ε -optimale du problème (GCMP) on a $\tilde{f} - f^* > \varepsilon$. Puisque $f_0(x^*) \leq f^*$, il s'ensuit que $f_0(x^*) < \tilde{f} - \varepsilon$, et donc $x^* \in G'$. Soit maintenant x' un point de G' et supposons qu'il existe un indice j tel que $f_j(x') = 0$. Alors x' est une solution réalisable du problème (P_j) , donc $f_0(x') \geq \tilde{f}_j \geq \tilde{f}$. Le point x' ne satisfait donc pas la contrainte $f_0(x) \leq \tilde{f} - \varepsilon$ de G' , ce qui est une contradiction. De façon évidente, G' est toujours un ensemble compact et convexe.

Par conséquent, une solution ε -optimale du problème (GCMP) avec des fonctions positives peut être facilement obtenue en comparant \tilde{f} avec la solution optimale (ou ε -optimale) du problème (GCMP) avec des fonctions strictement positives.

Notons par $\mathcal{H} = \{t \in \mathbb{R}_+^k \mid \prod_{i=1}^k t_i = 1\}$ la portion d'hyperbole d'équation $\prod_{i=1}^k t_i = 1$ contenue dans l'orthant positif et par $T = \{t \in \mathbb{R}_+^k \mid \prod_{i=1}^k t_i \geq 1\}$ l'ensemble (convexe) délimité par \mathcal{H} .

Lemme 6.1 *Pour tous nombres strictement positifs f_1, f_2, \dots, f_k on a:*

$$\min_{t \in \mathcal{H}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f_i t_i \right)^k = \prod_{i=1}^k f_i, \quad (6.3)$$

et le point minimum t^* de (6.3) satisfait

$$t_1^* f_1 = t_2^* f_2 = \dots = t_k^* f_k = \left(\prod_{i=1}^k f_i \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (6.4)$$

Preuve:

S'obtient facilement à partir des conditions de Kuhn-Tucker (voir par exemple Luenberger [45]). ■

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^k$, on définit la fonction φ par:

$$\varphi(t) = \min_{x \in G} \left\{ f_0(x) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \right)^k \right\}. \quad (6.5)$$

Puisque les fonctions f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sont convexes, la combinaison linéaire positive $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i$ est aussi convexe. Puisque la fonction $y \mapsto y^k$ est croissante et convexe sur $[0, +\infty[$ et que f_0 est aussi convexe, il s'ensuit que $f_0 + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i \right)^k$ est convexe. La valeur de $\varphi(t)$ peut donc être déterminée en résolvant un programme convexe.

D'autres propriétés de φ sont données ci-dessous.

Lemme 6.2 *La fonction φ est quasiconcave, continue, strictement croissante et, si f_0 est la fonction nulle, homogène de degré k , sur tout ensemble compact D de \mathbb{R}_+^k .*

Preuve:

Pour tout $x \in G$ fixé, $t \mapsto \sum_{i=1}^k t_i f_i(x)$ est une fonction affine. D'un autre côté,

la fonction $y \mapsto y^k$ est croissante pour $y \in [0, +\infty[$, donc $\left(\sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \right)^k$ est une fonction quasiconcave de t (voir, par exemple, Avriel *et al.* [4, p.57 Proposition 3.2]). Il s'ensuit que, pour tout $x \in G$ fixé et tout $\gamma \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$C_x(\gamma) = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^k \mid \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \right)^k \geq \gamma - f_0(x) \right\}$$

est convexe. On en déduit que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}_+^k \mid \varphi(t) \geq \gamma\} = \bigcap_{x \in G} C_x(\gamma)$ est convexe, ce qui prouve la quasiconcavité de $\varphi(t)$.

Soit $\psi(t, x) = f_0(x) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \right)^k$. Puisque les fonctions f_i , $i = 0, 1, \dots, k$ sont continues et que G est compact, ψ est uniformément continue sur $D \times G$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|(t', x') - (t'', x'')\| \leq \delta \Rightarrow \|\psi(t', x') - \psi(t'', x'')\| \leq \varepsilon.$$

Soient t' et t'' tels que $\|t' - t''\| \leq \delta$. Soient $x' \in \arg \min \varphi(t')$ et $x'' \in \arg \min \varphi(t'')$ (ces points existent puisque G est un ensemble compact non-vidé).

D'un côté,

$$\varphi(t') - \varphi(t'') = \min_{x \in G} \psi(t', x) - \min_{x \in G} \psi(t'', x) \leq \psi(t', x'') - \psi(t'', x'') \leq \varepsilon$$

(la dernière inégalité s'obtient en notant que $\|(t', x'') - (t'', x'')\| = \|t' - t''\| \leq \delta$).

De l'autre,

$$\varphi(t') - \varphi(t'') \geq \psi(t', x') - \psi(t'', x') \geq -\varepsilon.$$

Donc $|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \varepsilon$ ce qui prouve la continuité de φ .

Soit maintenant x_t^* la solution optimale du problème convexe associé à $\varphi(t)$.

Pour tout $t \geq t' \geq 0$, $t \neq t'$ on a

$$\varphi(t) = f_0(x_t^*) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x_t^*) \right)^k > f_0(x_{t'}^*) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t'_i f_i(x_{t'}^*) \right)^k \geq \varphi(t').$$

ce qui montre que $\varphi(t)$ est strictement croissante.

La propriété d'homogénéité est triviale si $f_0 = 0$. ■

Théorème 6.1 *Sous l'hypothèse (6.2), le problème (GCM) est équivalent au problème de minimisation quasiconcave*

$$(QCM) \quad \min_{t \in T} \varphi(t)$$

au sens suivant: si t^* est une solution optimale du problème (QCM) et si x^* est un point correspondant de G par (6.5), alors x^* est une solution optimale du problème (GCMP). De plus, on a les relations suivantes:

$$t_i^* = \frac{\left(\prod_{j=1}^k f_j(x^*)\right)^{\frac{1}{k}}}{f_i(x^*)}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6.6)$$

$$f(x^*) = \varphi(t^*). \quad (6.7)$$

Réciproquement, si x^* est une solution optimale du problème (GCMP), la valeur t^* calculée à partir de (6.6) est une solution optimale du problème (QCM) et la relation (6.7) est vérifiée.

Preuve:

Soient x^* et f^* respectivement une solution et la valeur optimale du problème (GCMP), et soient t^* et φ^* une solution et la valeur optimale du problème (QCM).

Soit x_{t^*} un point de G tel que $\varphi(t^*) = f_0(x_{t^*}) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i^* f_i(x_{t^*})\right)^k$ (un tel point existe par définition de φ). Alors, en utilisant le Lemme 6.1,

$$\begin{aligned} \varphi^* = \varphi(t^*) &= f_0(x_{t^*}) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i^* f_i(x_{t^*})\right)^k \\ &\geq f_0(x_{t^*}) + \min_{t \in \mathcal{H}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x_{t^*})\right)^k = f(x_{t^*}) \geq f^*. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Soit maintenant t_{x^*} le point obtenu de x^* par (6.6). Alors

$$\varphi^* \leq \varphi(t_{x^*}) = \min_{x \in G} \left\{ f_0(x) + \left(\prod_{i=1}^k f_i(x^*)\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{f_i(x)}{f_i(x^*)}\right)^k \right\} \leq f(x^*) = f^* \quad (6.9)$$

la dernière inégalité étant obtenue en considérant le point $x = x^*$.

De (6.8) et (6.9), on déduit $f^* = \varphi^*$. D'où $f_0(x_{t^*}) + \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i^* f_i(x_{t^*})\right)^k = f(x_{t^*}) = f^*$, ce qui montre que x_{t^*} est une solution optimale du problème

(*GCMP*) et que (t^*, x_{t^*}) satisfait (6.6) (en utilisant de nouveau le Lemme 6.1).
 Similairement, $\varphi(t_{x^*}) = \varphi^*$ ce qui montre que t_{x^*} est une solution optimale du
 problème (*QCM*).

On en déduit que minimiser f sur G est équivalent à minimiser φ sur \mathcal{H} .

De la stricte croissance de φ (Lemme 6.2), on déduit que le minimum de φ sur
 T est sur sa frontière \mathcal{H} . Puisque T est un ensemble convexe, (*GCMP*) est
 donc équivalent au problème de minimisation quasiconcave $\min_{t \in T} \varphi(t)$. ■

Corollaire 1 Soient $\underline{f}_i > 0$ et \bar{f}_i respectivement une borne inférieure et supérieure
 de la fonction f_i sur G pour $i = 1, 2, \dots, k$. Soit t^* une solution optimale du problème
 (*QCM*). On a

$$\underline{t}_i \leq t_i^* \leq \bar{t}_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6.10)$$

$$\text{avec } \underline{t}_i = \frac{\left(\prod_{j \neq i} \underline{f}_j\right)^{\frac{1}{k}}}{(\underline{f}_i)^{1-\frac{1}{k}}} \quad \text{et } \bar{t}_i = \frac{\left(\prod_{j \neq i} \bar{f}_j\right)^{\frac{1}{k}}}{(\bar{f}_i)^{1-\frac{1}{k}}} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Notons que si $\underline{t}_i = \bar{t}_i$ pour un certain i et que $k \geq 2$, les fonctions f_j ($j = 1, 2, \dots, k$)
 sont constantes sur G , et le problème (*GCMP*) peut alors être réduit au programme
 convexe $\min_{x \in G} f_0(x)$.

En effet.

$$\frac{\underline{t}_i}{\bar{t}_i} = \left(\frac{\left(\prod_{j \neq i} \underline{f}_j\right)^{\frac{1}{k}}}{(\underline{f}_i)^{1-\frac{1}{k}}} \right) \left(\frac{(\bar{f}_i)^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\prod_{j \neq i} \bar{f}_j\right)^{\frac{1}{k}}} \right) = \left(\frac{\underline{f}_i}{\bar{f}_i}\right)^{1-\frac{2}{k}} \prod_{j=1}^k \left(\frac{\underline{f}_j}{\bar{f}_j}\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1$$

avec égalité si et seulement si chaque terme du produit est égal à 1, c.-à-d. si $\underline{f}_j = \bar{f}_j$
 pour $j = 1, 2, \dots, k$.

À partir de maintenant, nous supposons que $0 < \underline{t}_i < \bar{t}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

6.3 Opérations de base

Dans le but de développer un algorithme conique de type *branch-and-bound* pour résoudre le problème (QCM), c.-à-d. $\min_{x \in T} \varphi(t)$, on considère dans cette section ses différentes composantes: l'initialisation qui inclut la définition d'un cône contenant au moins une solution optimale (Section 6.3.1); les règles de subdivision (Section 6.3.2); le calcul de bornes inférieures (Section 6.3.3) et supérieures (Section 6.3.4).

6.3.1 Construction d'un cône initial

Les solutions optimales t^* de (QCM) sont contenues dans l'hyperrectangle

$$R^0 = \{t \in \mathbb{R}^k \mid \underline{t} \leq t \leq \bar{t}\} \quad (6.11)$$

avec $\underline{t} = (\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_k)$ et $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k)$ définies dans le Corollaire 1.

Soit K^0 un premier cône d'origine \underline{t} et dont les génératrices sont définies par les k points extrêmes voisins de \underline{t} dans R^0 . Soit \hat{t}^j le point d'intersection de la $j^{\text{ième}}$ génératrice de K^0 avec l'hyperbole \mathcal{H} pour $j = 1, 2, \dots, k$. Ces points existent puisque d'un côté $\underline{t}_i > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et de l'autre $\prod_{i=1}^k \underline{t}_i = \prod_{i=1}^k (\underline{f}_i / \bar{f}_i)^{1 - \frac{1}{k}} < 1$ pour $k \geq 2$.

Nous considérons maintenant K^0 , le cône d'origine O et de génératrices $(O\hat{t}^j)$, $j = 1, 2, \dots, k$; voir Figure 6.1 pour une illustration lorsque $k = 2$.

À noter que pour $k \geq 3$, l'hyperrectangle R^0 n'est pas toujours inclus dans le cône K^0 . En effet, considérons l'exemple suivant pour $k = 3$. Supposons que $\underline{f}_i = \sqrt{2}^3$ ($i = 1, 2, 3$) et que $\bar{f}_i = \sqrt{3}^3$ ($i = 1, 2, 3$). Alors $\underline{t}_i = \frac{2}{3}$ et $\bar{t}_i = \frac{3}{2}$ pour $i = 1, 2, 3$, et $1 / \prod_{i=1}^k \underline{t}_i = \frac{27}{8}$. On en déduit

$$\hat{t}^1 = \left(\frac{9}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \hat{t}^2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{9}{4}, \frac{2}{3}\right), \quad \hat{t}^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{9}{4}\right).$$

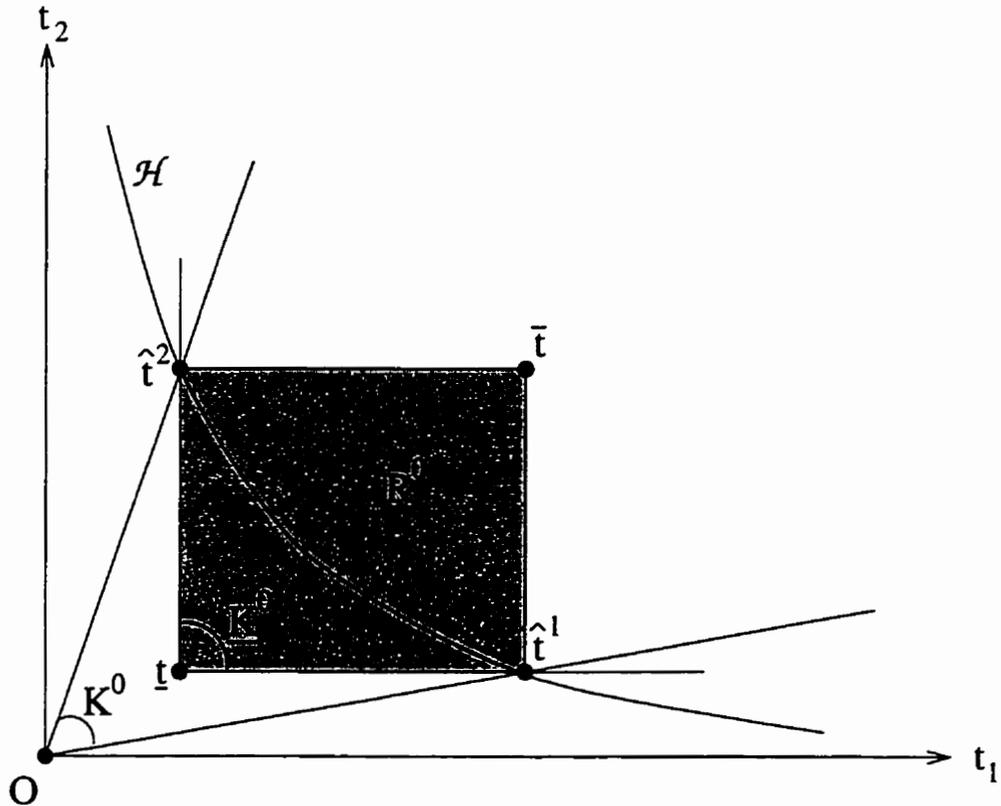


Figure 6.1: Construction d'un cône initial ($k = 2$)

Considérons maintenant le sommet $t' = (\underline{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ de R^0 . Il est facile de vérifier que

$$t' = \frac{2}{817} (-4\tilde{t}^1 + 211\tilde{t}^2 + 211\tilde{t}^3)$$

ce qui montre que t' est en dehors de K^0 .

Proposition 6.1 *Le cône K^0 contient l'ensemble des solutions optimales du problème (QCM).*

Preuve:

Nous montrons d'abord que \underline{t} appartient à K^0 . Par définition, les points \hat{t}^j sont d'une part sur la $j^{\text{ième}}$ génératrice de \underline{K}^0 , c.-à-d. peuvent être écrits

$$\hat{t}^j = \underline{t} + \lambda_j e^j \tag{6.12}$$

où e^j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur unitaire et $\lambda_j \geq 0$, et d'autre part sont sur l'hyperbole \mathcal{H} , c.-à-d. satisfont

$$\prod_{i=1}^k \hat{t}_i^j = \frac{\underline{t}_j + \lambda_j}{\underline{t}_j} \prod_{i=1}^k \underline{t}_i = 1.$$

En posant $\tau = \prod_{i=1}^k \underline{t}_i = \prod_{i=1}^k (f_i/\bar{f}_i)^{1-\frac{1}{k}}$, on obtient

$$\lambda_j = \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\underline{t}_j \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.13)$$

En combinant les équations (6.12) et (6.13), on déduit:

$$\underline{t} = \frac{1}{k + \frac{1}{\tau} - 1} \sum_{j=1}^k \hat{t}^j \quad (6.14)$$

c.-à-d. que \underline{t} est dans le cône K^0 (puisque $\tau < 1$).

Comme K^0 est convexe et contient les points $\hat{t}^1, \hat{t}^2, \dots, \hat{t}^k$ (par définition) et \underline{t} , il contient aussi le simplexe \underline{S} défini par ces points.

D'après le Corollaire 1, toutes les solutions optimales du problème (QCM) sont sur $\underline{K}^0 \cap \mathcal{H}$. Il reste donc à montrer que $\underline{K}^0 \cap \mathcal{H} \subseteq \underline{S}$.

Soit $t \in \underline{K}^0 \cap \mathcal{H}$. Il satisfait le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^k t_i = 1 \\ t = \underline{t} + \sum_{j=1}^k \alpha_j (\hat{t}^j - \underline{t}) \end{cases}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \geq 0$.

En utilisant (6.12) et (6.13), il vient

$$t = \sum_{j=1}^k \left(1 + \alpha_j \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\right) \underline{t}_j e^j.$$

Puisque t est sur l'hyperbole \mathcal{H} , on a donc

$$1 = \prod_{i=1}^k t_i = \tau \prod_{j=1}^k \left(1 + \alpha_j \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\right) \geq \tau \left(1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\right)$$

qui montre que $\sum_{j=1}^k \alpha_j \leq 1$ (puisque $\frac{1}{\tau} - 1 > 0$).

Donc $t = (1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j) \underline{t} + \sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{t}^j$, c.-à-d. peut être exprimé comme une combinaison convexe de \underline{t} et des \hat{t}^j ($j = 1, 2, \dots, k$). Ceci complète la preuve. ■

La construction de K^0 requiert la connaissance de \underline{t} . Cependant, pour être en mesure de calculer \underline{t} , il nous faut des bornes inférieure et supérieure de chaque fonction du produit dans f .

Des bornes inférieures strictement positives \underline{f}_i peuvent être facilement obtenues en résolvant les problèmes convexes suivants

$$\min_{x \in G} f_i(x)$$

pour $i = 1, 2, \dots, k$.

Le calcul d'une borne supérieure demande plus d'effort. Si la fonction f_i est linéaire, une borne supérieure \bar{f}_i peut être obtenue en résolvant le problème convexe

$$\max_{x \in G} f_i(x).$$

Si la fonction f_i n'est pas linéaire, soit Σ un simplexe contenant G . Sans perte de généralité, on peut supposer que G est contenu dans l'orthant positif. Un simplexe contenant G peut alors être défini par $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq \bar{b}; x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ où \bar{b} est la valeur optimale du programme convexe

$$\max_{x \in G} \sum_{i=1}^k x_i.$$

On peut alors en déduire une borne supérieure \bar{f}_i en résolvant le problème de maximisation convexe

$$\max_{x \in \Sigma} f_i(x).$$

Puisque Σ est un polytope dont les sommets peuvent être facilement calculés, ce dernier problème peut être facilement résolu.

6.3.2 Subdivisions

Nous proposons de considérer des bisections. On rappelle brièvement le principe de telles subdivisions. Le lecteur est renvoyé à Horst et Tuy [27] ou Tuy [66] pour plus de détails (voir aussi Chapitre 1.5.1).

Soit H^0 un hyperplan intersectant chaque génératrice de K^0 , par exemple l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Soit $K \subseteq K^0$ un cône d'origine O et défini par k génératrices linéairement indépendantes. Soit $U = K \cap H^0 = \text{conv}\{u^1, u^2, \dots, u^k\}$ la section de K par l'hyperplan H^0 : U est appelé la *base* de K . Soit w un point arbitraire de U tel que

$$w = \sum_{i=1}^k \lambda_i u^i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.15)$$

Soit $I = \{i : \lambda_i > 0\}$. Pour chaque $i \in I$, on définit U_i comme étant le simplexe de sommets $u^1, \dots, u^{i-1}, w, u^{i+1}, \dots, u^k$. Il est facile de vérifier que l'ensemble de simplexes $\{U_i : i \in I\}$ forme une partition du simplexe U . On parle de *partition simpliciale*.

Soit $\delta(U)$ le diamètre du simplexe U , c.-à-d. la longueur de sa plus longue arête.

Si w appartient à une plus longue arête de U , c.-à-d. si $w = \alpha u^p + (1 - \alpha)u^q$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\|u^p - u^q\| = \delta(U)$, alors la partition est appelée une *bisection* de ratio α .

Définition 6.1 (voir Horst et Tuy [27, p.140]).

Un processus de partition simpliciale est dit exhaustif si toute suite infinie de sim-

plexes U^h générés par le processus satisfait $\lim_{h \rightarrow +\infty} \delta(U^h) = 0$.

Théorème 6.2 (voir par exemple Tuy [66, p.21]).

Un processus de partition consistant exclusivement en bisections de ratio $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, pour un certain α fixé, est exhaustif.

De façon évidente, toute partition de U induit une partition de K . Si le simplexe U est bissecté, on dit que le cône K est bissecté. Si la partition de U est exhaustive, on dit que la partition de K est exhaustive.

6.3.3 Bornes inférieures

Nous proposons deux façons de calculer des bornes inférieures: la première s'applique au cas général et requiert k évaluations de φ , c.-à-d. la solution de k programmes convexes dans \mathbb{R}^n ; la seconde méthode requiert seulement une évaluation de φ mais ne s'applique pas pour $k \geq 3$.

6.3.3.1 Méthode du plan de coupe

Le calcul de la première borne inférieure est basé sur le résultat suivant:

Proposition 6.2 Soit $K \subset \mathbb{R}_+^k$ un cône d'origine O . Soit H un hyperplan séparant O de $K \cap T$ et soient s^j ($j = 1, 2, \dots, k$) les points d'intersection des génératrices de K avec H . Alors

$$\min\{\varphi(s^1), \varphi(s^2), \dots, \varphi(s^k)\}$$

est une borne inférieure de φ sur $K \cap T$.

Preuve:

Soit Q le polyèdre défini par l'intersection de K avec le demi-espace délimité par H et ne contenant pas O . Clairement Q contient $K \cap T$. Puisque φ est strictement croissante, son minimum sur Q est atteint en $\text{conv}\{s^1, s^2, \dots, s^k\}$. De la

quasiconcavité de φ , on déduit que ce minimum est égal à $\min\{\varphi(s^1), \varphi(s^2), \dots, \varphi(s^k)\}$. ■

Soit \hat{t} un point de \mathcal{H} . On note par $H_{\hat{t}}$ l'hyperplan tangent à l'hyperbole \mathcal{H} au point \hat{t} . On peut facilement vérifier que

$$H_{\hat{t}} = \left\{ t \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{\hat{t}_i} = k \right\}.$$

Clairement, $H_{\hat{t}}$ sépare O de $K \cap T$, donc définit une borne inférieure d'après la Proposition 6.2.

Par souci de simplicité, posons $a = (\frac{1}{\hat{t}_1}, \frac{1}{\hat{t}_2}, \dots, \frac{1}{\hat{t}_k})$. Alors $H_{\hat{t}} = \{t \in \mathbb{R}^k \mid at = k\}$. Puisque le minimum de φ sur T est atteint en un point de \mathcal{H} , un bon critère de sélection de l'hyperplan $H_{\hat{t}}$ pourrait être de minimiser le volume de l'ensemble $S = K \cap \{t \in \mathbb{R}^k \mid at \geq k, \prod_{i=1}^k t_i \leq 1\}$.

Proposition 6.3 Une condition nécessaire pour que l'hyperplan $H = \{t \in \mathbb{R}^k \mid at = k\}$ minimise le volume de S est

$$a_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^k \frac{\hat{t}_i^j}{a \hat{t}^j}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.16)$$

Preuve:

Notons par $\hat{H} = \{t \in \mathbb{R}^k \mid \hat{a}t = 1\}$ l'hyperplan passant par les points $\hat{t}^j, j = 1, 2, \dots, k$. Alors $S = S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)$ avec

$$S_1 = K \cap \{t \in \mathbb{R}^k \mid \hat{a}t \leq 1\},$$

$$S_2 = K \cap \{t \in \mathbb{R}^k \mid at \leq k\},$$

$$S_3 = K \cap \{t \in \mathbb{R}^k \mid \hat{a}t \leq 1, \prod_{i=1}^k t_i \geq 1\}.$$

Puisque seul l'ensemble S_2 dépend de l'hyperplan H , minimiser le volume de S est équivalent à maximiser le volume de S_2 . Les sommets de ce simplexe sont

O et $s^j = \lambda_j \hat{t}^j$ avec $\lambda_j = \frac{k}{a_j \hat{t}^j}$ pour $j = 1, 2, \dots, k$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{S}_2) &= \nu_k \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \hat{t}^1 & \lambda_2 \hat{t}^2 & \dots & \lambda_k \hat{t}^k \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \nu_k \left| \det \begin{pmatrix} \lambda_1 \hat{t}^1 & \lambda_2 \hat{t}^2 & \dots & \lambda_k \hat{t}^k \end{pmatrix} \right| \\ &= \nu_k \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i \right) \left| \det(\hat{t}^1 \hat{t}^2 \dots \hat{t}^k) \right| \end{aligned}$$

où ν_k est constant pour k fixé.

Puisque $\left| \det(\hat{t}^1, \hat{t}^2, \dots, \hat{t}^k) \right|$ ne dépend pas de a , l'hyperplan H minimisant le volume de \mathcal{S} est obtenu en résolvant le problème suivant

$$\min v(a) = \prod_{j=1}^k (a \hat{t}^j)$$

(VP)

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \prod_{i=1}^k a_i = 1 \\ a \geq 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

$$(6.17)$$

En notant qu'aucun a_i ne peut être nul, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker impliquent

$$\sum_{j=1}^k \hat{t}_\ell^j \left(\frac{v(a)}{a \hat{t}^j} \right) - \mu \left(\frac{\prod_{i=1}^k a_i}{a_\ell} \right) = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, k \quad (6.19)$$

$$\mu \left(\prod_{i=1}^k a_i - 1 \right) = 0. \quad (6.20)$$

En utilisant (6.16), la relation (6.19) donne

$$\frac{\mu}{v(a)} = a_\ell \sum_{j=1}^k \frac{\hat{t}_\ell^j}{a \hat{t}^j}, \quad \ell = 1, 2, \dots, k.$$

Après avoir sommé ces égalités, on obtient $\frac{\mu}{v(a)} = 1$, ce qui conclut la preuve. ■

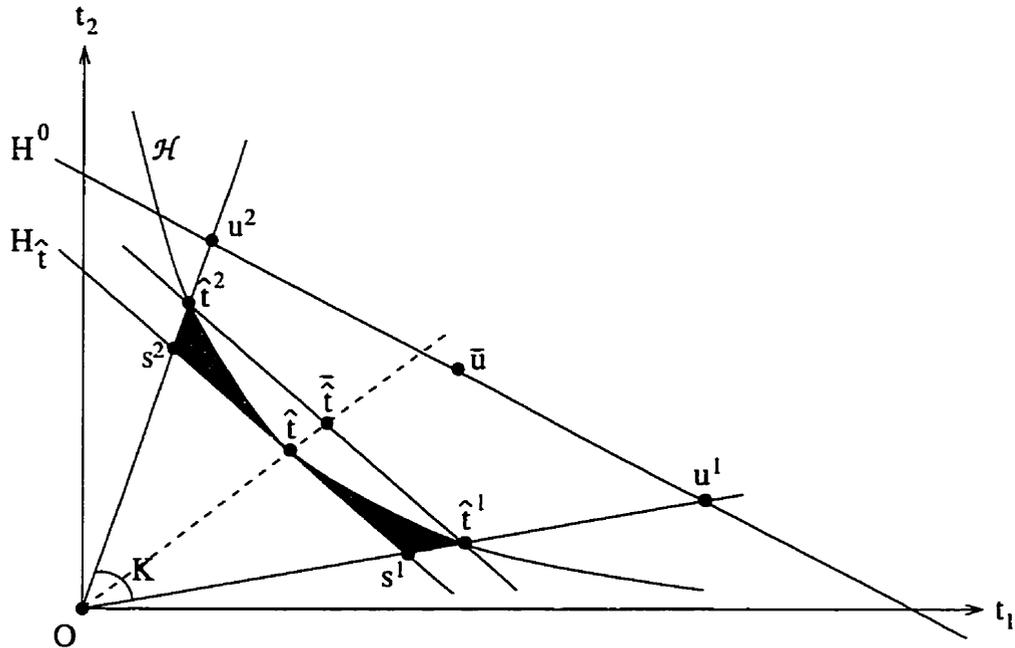


Figure 6.2: Calcul de la borne inférieure par plan de coupe

À noter que l'hyperplan qui minimise le volume de \mathcal{S} est tangent à \mathcal{H} en un point de K . En effet, la relation (6.16) peut être écrite

$$\hat{t} = \sum_{j=1}^k \frac{\hat{t}^j}{a\hat{t}^j}$$

où les $a\hat{t}^j$, $j = 1, 2, \dots, k$ sont strictement positifs puisque les composantes de a et \hat{t}^j sont strictement positives.

Pour $k = 2$, un tel hyperplan peut être caractérisé de façon plus précise (voir la Figure 6.2 pour une illustration).

Corollaire 2 Pour $k = 2$, l'hyperplan qui minimise le volume de \mathcal{S} est l'hyperplan tangent à \mathcal{H} en le point $\hat{t} = \left(\sqrt{\hat{t}_1^1 \hat{t}_1^2}, \sqrt{\hat{t}_2^1 \hat{t}_2^2} \right)$.

De plus, si \bar{t} dénote le barycentre de \hat{t}^1 et \hat{t}^2 , alors \hat{t} est l'intersection de $O\bar{t}$ avec \mathcal{H} .

Preuve:

En utilisant la relation (6.16) de la Proposition 6.3, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \frac{\hat{t}_1^1}{a_1 \hat{t}_1^1 + a_2 \hat{t}_2^1} + \frac{\hat{t}_1^2}{a_1 \hat{t}_1^2 + a_2 \hat{t}_2^2} \\ &= \frac{\hat{t}_1^1(a_1 \hat{t}_1^2 + a_2 \hat{t}_2^2) + \hat{t}_1^2(a_1 \hat{t}_1^1 + a_2 \hat{t}_2^1)}{(a_1 \hat{t}_1^1 + a_2 \hat{t}_2^1)(a_1 \hat{t}_1^2 + a_2 \hat{t}_2^2)}. \end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient $(\hat{t}_1^1 \hat{t}_1^2) a_1^2 = (\hat{t}_2^1 \hat{t}_2^2) a_2^2$, c.-à-d. $(\hat{t}_1^1 \hat{t}_1^2) \hat{t}_2^2 = (\hat{t}_2^1 \hat{t}_2^2) \hat{t}_1^2$.

Puisque $\hat{t}_1 \hat{t}_2 = 1 = \hat{t}_1^1 \hat{t}_2^1 = \hat{t}_1^2 \hat{t}_2^2$, on en déduit que l'unique solution positive est $\hat{t}_1 = \sqrt{\hat{t}_1^1 \hat{t}_1^2}$ et $\hat{t}_2 = \sqrt{\hat{t}_2^1 \hat{t}_2^2}$.

En utilisant les égalités $\hat{t}_1^1 \hat{t}_2^1 = 1 = \hat{t}_1^2 \hat{t}_2^2$, il est alors facile de vérifier que $\hat{t} = \left(\frac{2\sqrt{\hat{t}_1^1 \hat{t}_2^1}}{\hat{t}_1^1 + \hat{t}_1^2} \right) \bar{t}$. ■

En considérant ce dernier résultat, on définit trois variantes pour le calcul de la borne inférieure, qui diffèrent par le choix de \hat{t} :

a) \hat{t} est défini par

$$\hat{t}_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^k \hat{t}_i^j}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

b) \hat{t} est le point d'intersection avec \mathcal{H} de $O\bar{\hat{t}}$, où $\bar{\hat{t}}$ est le barycentre $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{t}^j$ des points \hat{t}^j .

c) \hat{t} est l'intersection avec \mathcal{H} de $O\bar{u}$, où \bar{u} est le barycentre des points u^j , intersection de $O\hat{t}^j$ avec l'hyperplan H^0 défini dans la Section 6.3.2.

À noter que pour $k \geq 3$, les hyperplans correspondant ne minimisent plus le volume de \mathcal{S} puisque $a = (\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \dots, \frac{1}{t_k})$ ne satisfait pas (6.16).

6.3.3.2 Méthode simpliciale

Le calcul de la deuxième borne inférieure n'est valide que pour $k = 2$. Il exploite un simplexe particulier (voir Figure 6.3).

Proposition 6.4 *Soit $K \subset \mathbb{R}_+^2$ un cône d'origine O . Supposons que ses génératrices intersectent l'hyperbole \mathcal{H} en \hat{t}^1 et \hat{t}^2 respectivement, et soient $H_{\hat{t}^1}$ et $H_{\hat{t}^2}$ les hyperplans tangents à \mathcal{H} en ces deux points. Alors ces hyperplans s'intersectent en un unique point $s^0 \in K$, et une borne inférieure de φ sur $K \cap \mathcal{H}$ est*

$$\min\{\varphi(\hat{t}^1), \varphi(\hat{t}^2), \varphi(s^0)\}.$$

Preuve:

Soit \hat{H} l'hyperplan passant par \hat{t}^1 et \hat{t}^2 . Par convexité de T , le demi-espace délimité par H et contenant O contient $K \cap \mathcal{H}$. Puisque $H_{\hat{t}^1}$ et $H_{\hat{t}^2}$ sont des hyperplans d'appui, $K \cap \mathcal{H}$ est donc inclus dans le simplexe S défini par les hyperplans H , $H_{\hat{t}^1}$ et $H_{\hat{t}^2}$. Il s'ensuit qu'une borne inférieure de φ sur $K \cap \mathcal{H}$ est $\min_{t \in S} \varphi(t)$. Puisque φ est quasiconcave, cette borne est égale au minimum de φ en les points extrêmes de S . Ces points extrêmes sont \hat{t}^1 , \hat{t}^2 et le point d'intersection s^0 des hyperplans $H_{\hat{t}^1}$ et $H_{\hat{t}^2}$. Si $\hat{t}^1 = (\alpha, \frac{1}{\alpha})$ et $\hat{t}^2 = (\beta, \frac{1}{\beta})$, les équations des hyperplans $H_{\hat{t}^1}$ et $H_{\hat{t}^2}$ sont:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{\alpha} + \alpha s_2 &= 2 \\ \frac{s_1}{\beta} + \beta s_2 &= 2. \end{aligned}$$

Ce système a une unique solution

$$s^0 = \left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \frac{2}{\alpha + \beta} \right) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} (\hat{t}^1 + \hat{t}^2)$$

qui appartient de façon évidente à K . ■

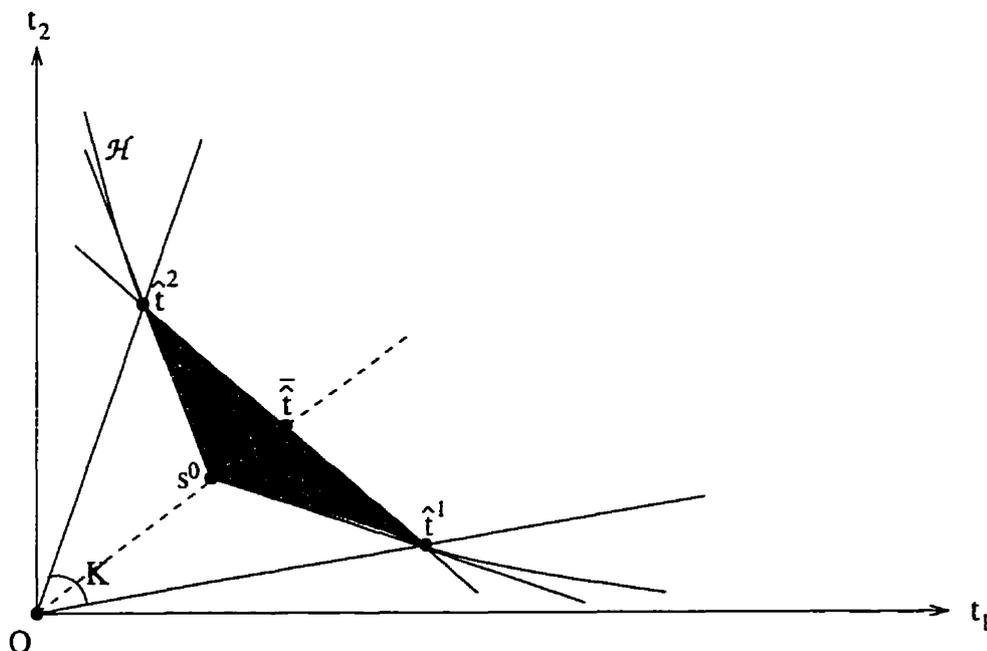


Figure 6.3: Calcul de la borne inférieure simpliciale

Remarque 1 Soit \hat{t}^0 le point d'intersection de Os^0 avec l'hyperbole \mathcal{H} . Alors $s^0 = \left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta}\right) \hat{t}^0$. D'un autre côté, avec la notation ci-dessus et avec l'hyperplan du Corollaire 2, on peut vérifier que les points s^j de la Proposition 6.2 satisfont $s^j = \left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta}\right) \hat{t}^j$ pour $j = 1, 2$. Par conséquent, pour $k = 2$, la méthode de borne inférieure par plan de coupe (décrite dans la Section 6.3.3.1) et la méthode décrite dans cette section évaluent φ en des points qui sont dans la même proportion par rapport à l'hyperbole. Puisque la première borne inférieure est définie par la plus mauvaise valeur de deux de ces points tandis que la seconde ne considère qu'un seul point, on peut s'attendre à ce que pour $k = 2$ cette dernière méthode domine la première en pratique.

Remarque 2 Telle que décrite jusqu'à présent la seconde borne inférieure requiert $k + 1$ évaluations de φ . Cependant, l'algorithme peut être adapté de telle sorte que les calculs de $\varphi(\hat{t}^1)$ et $\varphi(\hat{t}^2)$ soient faits lors du calcul de la borne supérieure (voir Sections 6.3.4 et 6.4.2).

Malheureusement, le calcul de cette borne inférieure ne se généralise pas facilement à de plus grandes valeurs de k . Une généralisation naturelle serait de considérer le simplexe défini par les hyperplans tangents à \mathcal{H} aux points $\hat{t}^j, j = 1, 2, \dots, k$ et par l'hyperplan passant par ces points. Cependant, comme illustré par l'exemple suivant, certains points extrêmes de ce simplexe peuvent être en dehors de l'orthant positif. c.-à-d. dans une région où la fonction objectif φ n'est pas définie.

Exemple 6.1 *Supposons que $k > 2$ et soient a et b deux réels strictement positifs satisfaisant*

$$a < \sqrt[k]{\frac{k-2}{k-1}} \quad (6.21)$$

$$b = \frac{1}{a^{k-1}}. \quad (6.22)$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^k$ le cône défini par $\hat{t}^j, j = 1, 2, \dots, k$ avec

$$\hat{t}_i^j = \begin{cases} a & \text{si } i \neq j \\ b & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Noter que les conditions (6.21) et (6.22) impliquent que $a \neq b$ (en fait on a $a < b$) ce qui montre que K est non-dégénéré.

L'équation de l'hyperplan passant par les \hat{t}^j est

$$\sum_{i=1}^k t_i = (k-1)a + b, \quad (6.23)$$

tandis que l'équation de l'hyperplan tangent à \mathcal{H} au point \hat{t}^j est

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k \frac{t_i}{a} + \frac{t_j}{b} = k. \quad (6.24)$$

Le point extrême s^p correspondant au système (6.23) et (6.24, $j \neq p$) est alors défini par

$$s_i^p = \begin{cases} b & \text{si } i \neq p \\ (k-1)a - (k-2)b & \text{si } i = p. \end{cases}$$

Puisque $(k-1)a - (k-2)b = \frac{(k-1)a^k - (k-2)}{a^{k-1}}$, il découle de l'hypothèse (6.21) que $s_p^p < 0$, donc les k points extrêmes $s^p, p = 1, 2, \dots, k$ ne sont pas dans l'orthant positif.

Cet exemple montre que l'on doit ajouter des contraintes additionnelles pour garder les points extrêmes de l'approximation extérieure à l'intérieur de l'orthant positif. De façon à avoir une approximation précise, on peut par exemple ajouter les contraintes définissant le cône K . La suite de l'Exemple 6.1 montre qu'alors, le polytope obtenu peut avoir un nombre exponentiel de points extrêmes (on aurait obtenu un résultat similaire en ajoutant les contraintes de positivité plutôt que les contraintes définissant K).

EXEMPLE 6.1 (SUITE)

Rappelons que les contraintes définissant notre simplexe sont

$$\sum_{i=1}^k t_i + \left(\frac{a}{b} - 1\right) t_j \geq ka, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (6.25)$$

$$\sum_{i=1}^k t_i \leq (k-1)a + b. \quad (6.26)$$

Complétons-le avec les contraintes définissant K . Il est facile de vérifier que ces contraintes sont

$$a \sum_{i=1}^k t_i - ((k-1)a + b) t_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.27)$$

Soit J_1, J_2 une partition de $\{1, 2, \dots, k\}$ avec $J_1 \neq \emptyset$. Nous prétendons que le point $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ avec

$$t_j = \begin{cases} \frac{kab(|J_1|a + b - a)}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} & \text{si } j \in J_1 \\ \frac{ka^2b|J_1|}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)}, & \text{si } j \in J_2 \end{cases} \quad (6.28)$$

est un point extrême du polytope défini par les contraintes (6.25), (6.26) et (6.27).

En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k t_j &= \frac{kab|J_1|(|J_1|a + b - a + (k - |J_1|)a)}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} \\ &= \frac{kab|J_1|((k - 1)a + b)}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Clairement puisque $|J_1| \geq 1$, $\frac{kab|J_1|}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} \leq 1$, ce qui montre que la contrainte (6.26) est satisfaite.

Pour $j \in J_1$, le membre de gauche de (6.25) est

$$\frac{kab|J_1|(ka + b - a) + ka(a - b)(|J_1|a + b - a)}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} = ka$$

donc la contrainte est satisfaite à égalité.

Pour $j \in J_2$, le membre de gauche de (6.25) est

$$\frac{kab|J_1|(ka + b - a) + ka^2|J_1|(a - b)}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} = \frac{ka[kab|J_1| + (b - a)^2|J_1|]}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} > ka.$$

Pour $j \in J_1$, le membre de gauche de (6.27) est

$$\frac{kab[ka + b - a][a|J_1| - (|J_1|a + b - a)]}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} = \frac{kab(a - b)[ka + b - a]}{kab|J_1| + (b - a)^2(|J_1| - 1)} < 0$$

puisque $a < b$. Finalement, il est clair que pour $j \in J_2$, (6.27) est satisfaite à égalité.

Puisqu'il y a $2^k - 1$ sous-ensembles non-vides et distincts de $\{1, 2, \dots, k\}$, le polytope défini par (6.25)-(6.27) a au moins $2^k - 1$ points extrêmes.

Cet exemple montre que la généralisation de la borne simpliciale à $k \geq 3$ implique l'énumération d'un nombre de points extrêmes qui peut croître exponentiellement avec k . Puisque pour chacun de ces points, on a à résoudre un programme convexe dans \mathbb{R}^n , il paraît peu probable que cette méthode puisse se révéler efficace pour $k \geq 3$.

6.3.4 Bornes supérieures

Une borne supérieure de φ sur $K \cap \mathcal{H}$ est obtenue en évaluant φ en le point w , qui est un sous-produit du calcul de la borne inférieure. Si la borne inférieure par plan de coupe est utilisée, le point w est l'intersection de $O\hat{t}$ avec l'hyperbole \mathcal{H} où \hat{t} est tel que défini dans la Section 6.3.3.1. Si la borne inférieure simpliciale est utilisée, le point w est défini comme l'intersection de Os^0 avec \mathcal{H} .

6.4 Algorithme

6.4.1 Cas général

Nous donnons ci-dessous un algorithme conique, appelé SOLQCM, qui produit une solution ε -optimale pour tout paramètre $\varepsilon \geq 0$. Si $\varepsilon = 0$, une solution optimale pour le problème (GCMP) peut être facilement déduite en utilisant le Théorème 6.1. Sinon, une modification mineure, discutée à la fin de cette section, doit être faite de façon à être en mesure de déduire une solution ε -optimale pour (GCMP) à partir

d'une solution ε -optimale pour (QCM).

Algorithme SOLQCM

Étape 1 (initialisation): sélectionner une des deux procédures de calcul de borne inférieure décrites dans la Section 6.3.3.

Fixer $\bar{\varphi}$ à \bar{f} où \bar{f} est le minimum des valeurs optimales f_i^* des problèmes (P_i) , $i = 1, 2, \dots, k$ définis dans la Section 6.2.

Construire un cône initial K^0 tel que décrit dans la Section 6.3.1.

Calculer la borne inférieure $\underline{\varphi}(K^0)$.

Initialiser la liste \mathcal{L} de sous-problèmes à $\{K^0\}$.

Étape 2 (test d'optimalité et sélection): si $\mathcal{L} = \emptyset$ alors stop: $\bar{\varphi}$ est une solution ε -optimale de (QCM); sinon soit $K^* \in \arg \min\{\underline{\varphi}(K) : K \in \mathcal{L}\}$.

Étape 3 (subdivision): effectuer une bisection de K^* . Soit \mathcal{P} la bipartition de K^* . Faire $\mathcal{L} \leftarrow (\mathcal{L} \setminus \{K^*\}) \cup \mathcal{P}$.

Étape 4 (calcul de borne inférieure): pour chaque cône $K \in \mathcal{P}$, calculer la borne inférieure $\underline{\varphi}(K)$. Soit $w(K)$ le point défini dans la Section 6.3.4.

Étape 5 (calcul de borne supérieure): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $\varphi(w(K)) < \bar{\varphi}$ alors faire $\bar{\varphi} \leftarrow \varphi(w(K))$ et $\bar{f} \leftarrow w(K)$.

Étape 6 (élimination): éliminer tout cône $K \in \mathcal{L}$ pour lequel $\underline{\varphi}(K) \geq \bar{\varphi} - \varepsilon$.

Retourner à l'Étape 2.

Théorème 6.3 *L'algorithme SOLQCM est correct et ne peut être infini que si $\varepsilon = 0$. Dans un tel cas, tout point d'accumulation de la suite \bar{f} est une solution optimale du problème (QCM).*

Preuve:

Notons par \mathcal{L}' l'ensemble des cônes qui sont soit dans \mathcal{L} ou ont été éliminés à

une certaine itération à l'Étape 6. Clairement \mathcal{L}' forme une partition du cône K^0 d'où $\min\{\varphi(K) : K \in \mathcal{L}'\} \leq \min\{\varphi(t) : t \in \mathcal{H}\} = \varphi^*$. Si à une certaine itération $\mathcal{L} = \emptyset$ alors $\bar{\varphi} - \varepsilon \leq \min\{\varphi(K) : K \in \mathcal{L}'\} \leq \varphi^*$ ce qui prouve que \bar{t} est une solution ε -optimale du problème (QCM).

Supposons maintenant que l'algorithme est infini. Puisque à chaque itération un cône est partitionné en un nombre fini de sous-cônes, au moins une suite infinie de cônes K^h est générée par la procédure de partition.

Soient \bar{t}^h et $\bar{\varphi}^h$ respectivement la meilleure solution connue et sa valeur à l'itération h . Puisque la suite $\{\bar{\varphi}^h\}$ est décroissante et minorée par $\min_{t \in \mathcal{H}} \varphi(t)$, elle converge vers une limite $\bar{\varphi}$, et puisque $K^0 \cap \mathcal{H}$ est un ensemble compact, $\{\bar{t}^h\}$ admet un point d'accumulation \bar{t} .

Soient $\hat{t}^{hj}, j = 1, 2, \dots, k$ les points d'intersection des génératrices de K^h avec l'hyperbole \mathcal{H} . Puisque le processus de partition n'implique que des bisections, il est exhaustif d'après le Théorème 6.2. Donc les suites $\{\hat{t}^{hj}\}_h$ convergent vers une limite commune \hat{t}^* .

Si la méthode de plan de coupe est utilisée pour calculer les bornes inférieures $\varphi^h = \varphi(K^h)$, soient \hat{t}^h le point \hat{t} à l'itération h , H^h l'hyperplan $H_{\hat{t}^h}$ et $s^{hj}, j = 1, 2, \dots, k$ les points d'intersection des génératrices de K^h avec H^h . Clairement $H^h \rightarrow H^*$ qui est l'hyperplan tangent à \mathcal{H} en \hat{t}^* et, pour tout j , $s^{hj} \rightarrow \hat{t}^*$. De plus $w^h \rightarrow \hat{t}^*$. Par continuité de φ , on a

$$\begin{aligned} \min\{\varphi(t) : t \in \mathcal{H}\} &\geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi^h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \min\{\varphi(s^{h1}), \varphi(s^{h2}), \dots, \varphi(s^{hk})\} \\ &= \varphi(\hat{t}^*) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(w^h) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(\bar{t}^h) = \varphi(\bar{t}), \end{aligned}$$

donc \bar{t} est une solution optimale du problème (QCM).

De façon analogue, si la borne simpliciale est utilisée, soit s^{h0} le point s^0 à l'itération h . Puisque $\hat{t}^{hj} \rightarrow \hat{t}^*$ pour tout j , on a $H_{\hat{t}^{hj}} \rightarrow H^*$ pour tout j où H^* est l'hyperplan tangent à \mathcal{H} au point \hat{t}^* . Puisque s^{h0} est sur les hyperplans

$H_{\hat{t}^h_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$ et dans le cône K^h dont la limite est la demi-droite $\{O\hat{t}^*\}$, on a $s^{h0} \rightarrow \hat{t}^*$ et $w^h \rightarrow \hat{t}^*$. Par continuité de φ , on a alors

$$\begin{aligned} \min\{\varphi(t) : t \in \mathcal{H}\} &\geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \underline{\varphi}^h &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(s^{h0}) = \varphi(\hat{t}^*) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(w^h) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(\bar{t}^h) = \varphi(\bar{t}) \end{aligned}$$

qui montre à nouveau que \bar{t} est une solution optimale du problème (QCM).

Puisque à l'Étape 6, les cônes satisfaisant $\underline{\varphi}(K^h) \geq \bar{\varphi}^h - \varepsilon$ sont éliminés, on ne peut pas avoir $\lim_{h \rightarrow +\infty} \underline{\varphi}(K^h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}^h$ pour $\varepsilon > 0$. Donc l'algorithme ne peut pas être infini si $\varepsilon > 0$. ■

Si \bar{t} est une solution optimale du problème (QCM), alors par le Théorème 6.1 le point $x_{\bar{t}}$ de G associé à \bar{t} dans l'évaluation de $\varphi(\bar{t})$ est une solution optimale du problème (GCM). Cependant, si \bar{t} est une solution ε -optimale du problème (QCM), $\varphi(\bar{t})$ est toujours une valeur ε -optimale du problème (GCM) mais $x_{\bar{t}}$ n'est plus nécessairement un point ε -optimal. Pour produire une solution ε -optimale du problème (GCM), l'algorithme SOLQCM doit être modifié de la façon suivante: l'Étape 5 doit être remplacée par:

Étape 5' (calcul de la borne supérieure): si pour certains $K \in \mathcal{P}$, $f(x_{w(K)}) < \bar{\varphi}$ alors faire $\bar{\varphi} \leftarrow f(x_{w(K)})$ et $\bar{x} \leftarrow x_{w(K)}$ où $x_{w(K)}$ est le point de G solution du problème convexe correspondant à l'évaluation de $\varphi(w(K))$.

Pour prouver la convergence de cet algorithme modifié, noter que dans la preuve du Théorème 6.3, $w^h \rightarrow \hat{t}^*$ qui est une solution optimale du problème (QCM). Soit x_{w^h} le point de G associé à w^h dans l'évaluation de $\varphi(w^h)$: $x_{w^h} \rightarrow x_{\hat{t}^*}$. D'où $\varphi(\hat{t}^*) = f(x_{\hat{t}^*}) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_{w^h}) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} f(\bar{x}^h) = f(\bar{x})$. Le reste de la preuve est similaire à celle du Théorème 6.3.

À noter qu'une borne inférieure définie à partir de γ -extensions (voir Chapitre 2)

ne serait probablement d'aucune utilité ici, due à la difficulté d'évaluer φ .

Un autre choix possible pour l'origine des cônes aurait été de prendre un sommet de l'hyperrectangle R^0 . Mais on aurait perdu la propriété d'homogénéité lorsque $f_0 = 0$ (voir Lemme 6.2), particulièrement utile en pratique pour économiser du temps de calcul comme on le verra dans la prochaine section.

6.4.2 Cas particuliers

Si f_0 est constante, ou sans perte de généralité si $f_0 = 0$, certaines simplifications peuvent être faites.

Notons d'abord que le programme convexe

$$\min_{x \in G} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \right]^k$$

utilisé pour évaluer φ au point t est équivalent à

$$\min_{x \in G} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x) \tag{6.30}$$

puisque la fonction $y \mapsto y^k$ est croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, si les fonctions f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ sont linéaires et si G est un polytope, alors le problème (6.30) se réduit à un programme linéaire. C'est pourquoi il peut être commode de remplacer φ par sa forme réduite:

$$\varphi'(t) = \min_{x \in G} \sum_{i=1}^k t_i f_i(x). \tag{6.31}$$

Rappelons que d'après le Lemme 6.2, φ est homogène de degré k lorsque f_0 est la fonction nulle. Par conséquent la valeur de φ sur toute une génératrice peut être facilement déduite de la connaissance de la valeur en un point particulier de cette génératrice. Cela est particulièrement utile lorsque la borne inférieure par plan de

coupe est utilisée puisque les points à évaluer sont sur des génératrices qui habituellement appartiennent à plus d'un cône.

Si $k = 2$, on peut aussi partitionner le cône K via le point $w(K)$: en dimension 2, cela correspond à une bisection, par conséquent la preuve du Théorème 6.3 reste valide. Cette méthode de partition est particulièrement intéressante lorsque la borne inférieure simpliciale est utilisée: dans ce cas, toutes les génératrices, sauf celles définissant le cône initial, intersectent l'hyperbole \mathcal{H} en un point de la forme $w(K)$, dont la valeur a été évaluée à l'Étape 5 pour tenter de mettre à jour la meilleure solution connue. Lors du calcul de la borne simpliciale, le seul point restant à évaluer est donc s^0 .

6.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats d'expériences numériques pour deux versions de l'algorithme SOLQCM: SOLQCM1 dans lequel la première borne inférieure est utilisée et SOLQCM2 dans lequel la seconde borne inférieure est utilisée. On considère des problèmes-tests similaires à ceux de la littérature. Ils sont de cinq types, décrits dans le Tableau 6.1.

Les problèmes de type I sont similaires à ceux considérés par Thoai [59] pour $k = 2$. Les problèmes de type II sont similaires à ceux considérés par Kuno, Yajima et Konno [42]. Les paramètres sont définis de la façon suivante:

- $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^k$ sont des vecteurs générés aléatoirement avec toutes leurs composantes dans $[0, 1]$.
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est une matrice générée aléatoirement avec ses coefficients dans $[-1, 1]$.
- $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ avec $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} + 2b_{i0}$ où b_{i0} est un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

- $D^i \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont des matrices diagonales avec les éléments de la diagonale générés aléatoirement dans $[0, 1]$.

Tableau 6.1: Problèmes-tests

<p>Type I:</p> $\min \prod_{i=1}^k (\alpha^i x)$ <p>sous les contraintes:</p> $Ax \leq b$ $x \geq 0.$	<p>Type IO:</p> $\min \alpha^0 x + \prod_{i=1}^k (\alpha^i x)$ <p>sous les contraintes:</p> $Ax \leq b$ $x \geq 0.$
<p>Type II:</p> $\min (\alpha^1 x) \prod_{i=2}^k (\alpha^i x + x^t D^i x)$ <p>sous les contraintes:</p> $Ax \leq b$ $x \geq 0.$	<p>Type II0:</p> $\min \alpha^0 x + (\alpha^1 x) \prod_{i=2}^k (\alpha^i x + x^t D^i x)$ <p>sous les contraintes:</p> $Ax \leq b$ $x \geq 0.$
<p>Type III0:</p> $\min (\alpha^0 x + x^t D^0 x) + \prod_{i=1}^k (\alpha^i x + x^t D^i x)$ <p>sous les contraintes:</p> $\left x_1 + \sum_{j=2}^k \frac{j-1}{j} x_j \right ^{1.5} \leq 1000$ $\left(-2 + \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{j} \right)^2 \leq 100$ $Ax \leq b$ $x \geq 0.$	

Les deux programmes ont été codés en C et testés sur un SUN-SPARC10/51 station (135.5 Mips, 27.3 Mflops, 64 Mram). On utilise les logiciels CPLEX [12] pour résoudre les programmes linéaires et MINOS [50] (codé en FORTRAN) pour les programmes convexes. La plupart du temps, la solution optimale du sous-problème précédemment résolu (linéaire ou convexe) est utilisé comme point de départ pour le sous-problème

courant (seulement 1 sur 1000 sous-problèmes est résolu à partir de rien).

La précision ε a été fixée à 10^{-6} . Cependant, comme suggéré dans la Section 6.4.2, si f_0 est la fonction nulle (c.-à-d. pour des problèmes de type I et II), la précision est évaluée par rapport à la forme réduite φ' définie par (6.31).

Aussi, si $k = 2$, nous avons partitionné les cônes K via les points $w(K)$ plutôt que d'utiliser des bisections de ratio $\frac{1}{2}$.

Finalement, pour accéder facilement à la fois au cône de plus petite borne inférieure (Étape 2 de l'algorithme) et de plus grande borne inférieure (Étape 6), nous utilisons un min-maximier (voir Atkinson *et al.* [2]) pour stocker les cônes.

Pour chaque ensemble (= série) de paramètres k, m, n , nous avons résolu 10 problèmes.

Le Tableau 6.2 compare le nombre d'itérations de l'algorithme SOLQCM pour les trois variantes de la première borne inférieure (voir Section 6.3.3).

Tableau 6.2: Nombre d'itérations (*nb_iter*) pour la borne inférieure par plan de coupe

série	2,120,120	3,120,120	4,120,120
SOLQCM1a	23.2	270.8	8066.0
SOLQCM1b	23.2	250.9	4001.7
SOLQCM1c	22.9	233.4	2726.2

Les 10 problèmes considérés sont de type I. On observe que les meilleurs résultats sont obtenus pour SOLQCM1c. D'autres expériences ont montré que les résultats ne sont pas meilleurs si l'hyperplan est choisi de façon à minimiser le volume de l'ensemble \mathcal{S} (voir [31]). Par la suite, on ne considère que cette variante c) de la première méthode de calcul de la borne inférieure.

Les Tableaux 6.3 à 6.7 montrent les résultats pour les problèmes de type I, II, I0, II0 et III0 respectivement.

Tableau 6.3: Résultats numériques pour les problèmes de type I

	série (k,m,n)	nb_iter		max_c		nb_conv		cpu_tot	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
S O L Q C M 1 c	2,80,100	23.0	1.56	3.3	0.48	76.0	4.69	5.20	0.21
	2,100,100	22.6	1.07	3.4	0.52	74.8	3.22	7.32	0.63
	2,100,120	22.4	2.12	3.1	0.32	74.2	6.36	9.32	0.56
	2,120,120	22.9	2.13	3.4	0.84	75.7	6.39	13.43	1.53
	3,80,100	249.4	19.96	22.0	2.58	758.2	59.87	25.74	4.78
	3,100,100	247.0	21.56	21.0	2.91	751.0	64.68	34.72	3.76
	3,100,120	258.6	26.95	21.9	2.85	785.8	80.85	44.39	8.59
	3,120,120	233.4	16.79	19.6	2.37	710.2	50.38	56.33	10.51
	3,120,140	256.6	27.60	22.0	2.67	779.8	82.81	74.39	13.90
	3,150,140	225.6	11.35	18.3	2.06	686.8	34.06	98.19	13.67
3,150,160	237.3	18.28	20.1	3.03	721.9	54.83	125.07	20.91	
3,200,180	230.7	13.27	18.0	1.56	702.1	39.80	241.94	19.23	
4,80,100	3046.4	364.64	218.6	42.54	9152.2	1093.93	250.90	37.56	
4,100,100	2780.7	252.34	194.7	18.11	8355.1	757.01	338.29	62.56	
4,100,120	2953.1	373.04	216.1	19.99	8872.3	1119.12	456.20	59.17	
4,120,120	2726.2	307.25	180.1	19.01	8191.6	921.77	516.68	67.53	
5,80,100	124633.6	15190.68	9352.2	1369.42	373916.8	45572.03	11628.49	3015.24	
SOL QCM 2	2,80,100	13.8	1.62	1.7	0.48	32.6	3.24	3.91	0.32
	2,100,100	13.0	1.25	1.6	0.52	31.0	2.49	5.96	1.57
	2,100,120	13.3	1.34	1.8	0.42	31.6	2.67	7.52	0.83
	2,120,120	13.4	2.07	1.7	0.67	31.8	4.13	10.10	0.81

Tableau 6.4: Résultats numériques pour les problèmes de type II

	série (k,m,n)	nb_iter		max_c		nb_conv		cpu_tot	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
S O L Q C M 1 c	2,80,100	26.3	1.06	3.6	0.52	85.9	3.18	42.63	6.77
	2,100,100	26.0	1.49	3.8	0.42	85.0	4.47	54.65	8.70
	2,100,120	26.8	1.32	3.9	0.57	87.4	3.95	79.80	6.83
	2,120,120	25.7	1.77	3.2	0.42	84.1	5.30	101.17	11.51
	3,80,100	294.4	23.05	22.4	1.65	892.2	69.14	348.03	80.76
	3,100,100	292.3	18.90	21.6	1.43	885.9	56.69	496.15	96.56
	3,100,120	307.9	26.71	22.6	2.63	932.7	80.13	732.03	151.27
	3,120,120	302.8	26.08	22.3	1.83	917.4	78.25	775.07	76.97
	4,30,20	3304.7	457.81	247.8	50.25	9925.1	1373.43	227.78	46.94
	4,50,40	3342.7	399.81	230.6	47.73	10039.1	1199.44	854.99	195.13
4,50,60	3574.9	346.85	255.0	46.94	10735.7	1040.55	1430.05	267.59	
4,60,80	3975.8	616.42	291.8	66.51	11938.4	1849.27	3200.88	1011.47	
SOL QCM 2	2,80,100	16.4	1.78	2.1	0.32	37.8	3.55	23.94	2.60
	2,100,100	15.2	0.92	2.0	0.00	35.4	1.84	32.28	4.50
	2,100,120	16.8	1.55	2.1	0.32	38.6	3.10	47.96	4.26
	2,120,120	15.3	0.82	2.0	0.00	35.6	1.65	61.36	6.60

Tableau 6.5: Résultats numériques pour les problèmes de type IO

	série (k,m,n)	nb_iter		max_c		nb_conv		cpu_tot	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
S	2,80,100	26.6	1.65	3.2	0.42	166.6	9.88	38.32	7.82
O	2,100,100	26.8	1.32	3.3	0.48	167.8	7.90	55.82	6.18
L	2,100,120	27.3	1.70	3.6	0.70	170.8	10.22	78.81	12.67
Q	2,120,120	27.8	2.15	3.7	0.82	173.8	12.90	107.13	19.06
C	3,80,100	331.9	30.67	23.2	3.36	2665.2	245.35	480.26	52.49
M	3,100,100	311.8	23.65	20.0	1.94	2504.4	189.23	628.58	72.17
l	3,100,120	346.1	46.69	23.2	4.16	2778.8	373.53	887.67	184.92
c	3,120,120	318.1	24.01	20.2	1.75	2554.8	192.05	1124.14	143.25
SOL	2,80,100	15.1	1.97	1.5	0.53	66.4	7.88	17.87	4.60
QCM	2,100,100	14.7	1.42	1.4	0.52	64.8	5.67	24.58	3.51
2	2,100,120	16.1	2.13	2.1	0.32	70.4	8.53	39.36	6.29
	2,120,120	16.7	2.00	2.0	0.67	72.8	8.01	49.00	7.53

Tableau 6.6: Résultats numériques pour les problèmes de type II0

	série (k,m,n)	nb_iter		max_c		nb_conv		cpu_tot	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
S	2,80,100	31.4	1.65	4.2	0.63	195.4	9.88	81.12	13.06
O	2,100,100	29.9	1.10	3.6	0.52	186.4	6.60	104.75	15.47
L	2,100,120	31.4	1.43	3.6	0.52	195.4	8.58	145.92	26.19
Q	2,120,120	31.3	1.70	3.7	0.48	194.8	10.22	189.97	29.36
C	3,80,100	427.8	33.92	23.0	1.89	3431.4	271.39	1378.39	304.81
M	3,100,100	414.6	19.68	22.8	1.32	3325.8	157.41	1675.58	233.25
l	3,100,120	438.1	35.10	22.9	1.10	3513.8	280.78	2359.82	420.98
c	3,120,120	407.0	19.17	22.0	1.56	3265.0	153.33	2762.34	341.22
SOL	2,80,100	19.4	2.50	2.0	0.00	83.6	10.01	33.84	5.05
QCM	2,100,100	17.5	0.71	2.0	0.00	76.0	2.83	43.83	5.15
2	2,100,120	18.8	1.87	2.0	0.00	81.2	7.49	61.62	10.72
	2,120,120	18.4	1.58	2.0	0.00	79.6	6.31	79.18	7.28

On observe que pour $k = 2$, SOLQCM2 surpasse SOLQCM1c par rapport à tous les indicateurs et pour chaque taille et type de problèmes. En particulier, le nombre de sous-problèmes convexes à résoudre (nb_conv) est partout plus que la moitié inférieur pour SOLQCM2 que pour SOLQCM1c. Également pour les problèmes de type I0, II0 et III0 (Tableaux 6.5, 6.6 et 6.7), le temps de calcul cpu_tot est divisé par un facteur 2.

Comme noté par d'autres chercheurs, les résultats sont très sensibles à la taille k du problème réduit de minimisation quasiconcave. Pour k fixé, le nombre d'itérations nb_iter , le nombre maximum de cônes dans le min-maximier max_c (c.-à-d. le nombre maximum de sous-problèmes gardés en mémoire à une itération) et le nombre de sous-problèmes convexes nb_conv n'augmentent pas significativement avec la taille $m \times n$, donc le temps de calcul cpu_tot est essentiellement proportionnel au temps nécessaire pour résoudre un problème convexe de même taille. On utilise μ pour noter les moyennes, et σ pour les écart-types.

Lorsqu'on compare par exemple les Tableaux 6.3 et 6.5, on observe que le nombre d'itérations nb_iter reste à peu près le même mais que le nombre de sous-problèmes convexes nb_conv et le temps de calcul cpu_tot augmentent plus dramatiquement. L'accroissement du nombre de sous-problèmes convexes peut être essentiellement expliqué par le fait que la propriété d'homogénéité ne peut plus être utilisée pour les problèmes de type I0. Cela implique une augmentation du temps de calcul, qui peut aussi être expliquée par le fait que pour les problèmes de type I l'évaluation de φ fait appel à un programme linéaire résolu par CPLEX tandis que pour les problèmes de type I0, cette évaluation implique un programme non-linéaire convexe résolu par MINOS.

Les résultats obtenus dans le Tableau 6.7 montrent que l'addition de deux contraintes convexes dans un ensemble de contraintes linéaires couplée avec l'introduction d'une fonction convexe f_0 augmente déjà le temps de calcul par un facteur d'environ 6 pour l'algorithme SOLQCM1c et d'environ 7 pour l'algorithme SOLQCM2.

Tableau 6.7: Résultats numériques pour les problèmes de type III0

	série (k,m,n)	nb_iter		max_c		nb_conv		cpu_tot	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
S	2,80,100	29.9	1.66	3.4	0.52	185.4	9.98	533.75	66.11
	2,100,100	30.3	1.16	3.3	0.48	187.8	6.96	646.79	67.89
O	2,100,120	31.2	2.04	3.7	0.48	193.2	12.26	1016.63	100.68
	2,120,120	31.3	1.06	3.4	0.70	193.8	6.36	1122.39	132.61
Q	3,80,100	351.2	13.70	19.6	2.22	2817.6	109.61	7013.92	894.30
	3,100,100	349.9	12.79	20.6	2.72	2807.2	102.34	7856.17	990.56
C	3,100,120	358.4	16.41	20.2	1.93	2875.2	131.25	12704.01	1366.17
	3,120,120	371.1	18.44	20.7	1.16	2976.8	147.49	13816.79	1532.32
M	4,30,20	3505.3	217.33	182.4	18.81	35063.0	2173.35	3589.84	714.44
	4,50,40	3651.2	202.22	185.1	6.56	36522.0	2022.17	14382.77	2059.55
SOL	2,80,100	19.3	1.64	1.8	0.42	82.2	6.55	258.60	35.18
QCM	2,100,100	18.7	1.83	1.8	0.42	79.8	7.32	312.41	28.25
	2,100,120	19.0	1.70	1.9	0.32	81.0	6.80	449.98	50.03
2	2,120,120	19.6	2.17	1.9	0.32	83.4	8.68	541.06	49.03

Il n'est pas facile de comparer ces résultats avec ceux de la littérature puisque les expériences ont été faites sur différents problèmes et sur différentes machines, par exemple Thoai [59] a résolu des instances particulières de problèmes de type I avec $(k, m, n) = (2, 70, 120)$ en environ 1950 secondes sur un IBM-PS2 (Modell 88, avec programme écrit en FORTRAN): Kuno, Yajima et Konno [42] ont résolu des problèmes similaires à ceux de type II avec $(k, m, n) = (3, 200, 180)$ en environ 914 secondes en moyenne sur un SUN4/75 (avec programme écrit en C).

CONCLUSION

Cette thèse laisse de nombreuses questions ouvertes.

La première partie de cette thèse a été consacrée à la minimisation d'une fonction (quasi)concave sur un polytope. Dans le Chapitre 2, nous avons proposé une nouvelle borne simpliciale qui est toujours au moins aussi bonne que la borne actuelle, et parfois strictement meilleure. L'hyperplan qui lui est associé est utilisé pour montrer la convergence infinie de trois algorithmes dans le Chapitre 5. Sur le plan théorique, il serait intéressant de voir si un tel hyperplan ne pourrait pas permettre de prouver la convergence d'autres algorithmes, coniques ou non, ou tout au moins suggérer de nouvelles idées. Sur le plan pratique, il reste à évaluer les performances de cette nouvelle borne: a-t-on souvent une amélioration stricte par rapport à la borne actuelle? Quelle est l'ampleur de cette amélioration? Quels gains peut-on espérer en utilisant cette borne dans les algorithmes coniques?

Dans le Chapitre 3, nous avons défini une nouvelle borne inférieure, appelée double-simpliciale, qui consiste à inscrire la portion de polytope contenue dans le cône courant dans l'union de deux simplexes. Les premières expériences numériques présentées dans le Chapitre 5.1.3 montrent que cette nouvelle borne réduit significativement le temps de calcul nécessaire pour trouver une solution ε -optimale du problème de minimisation concave. Cette borne n'a pas été aussi développée que la borne simpliciale, en particulier elle ne joue aucun rôle direct dans les preuves de convergence des algorithmes coniques qui l'utilisent. Peut-on définir un point ω' , analogue au point ω associé à la borne simpliciale, qui pourrait être utilisé pour la subdivision et qui aurait une interprétation naturelle par rapport au calcul de la borne? Si oui, peut-on prouver la convergence d'algorithmes coniques utilisant ex-

clusivement de telles subdivisions? Pour obtenir de tels résultats, il sera peut-être nécessaire de choisir différemment le cône extérieur K' qui, avec K , définit la borne double-simpliciale. Sur un plan pratique, choisir différemment le cône extérieur pourrait également se révéler payant: on pourrait par exemple considérer le cône dont l'origine serait la meilleure solution connue et/ou conserver les cônes qui donnent une bonne borne.

Pour ces deux classes de bornes inférieures, simpliciales et double-simpliciales, nous avons introduit le concept de *meilleure borne*. Dans les deux cas, cette meilleure borne peut être calculée en résolvant un problème de maximisation quasiconcave, qui est considéré plus facile que le problème de minimisation (quasi)concave. Il serait intéressant d'étendre ce concept de meilleure borne à d'autres classes de bornes inférieures. Peut-on par exemple définir une classe de borne inférieure telle que: (i) une borne de cette classe est facilement calculable, (ii) le calcul de la meilleure borne est NP-difficile? On exclut les classes trop générales: par exemple la classe des bornes inférieures obtenues en minimisant la fonction sur une approximation extérieure satisfierait les conditions (i) et (ii) mais n'aurait qu'un intérêt limité puisque le calcul de la meilleure borne reviendrait à la résolution du problème initial.

Dans les Chapitres 5.2 et 5.3, nous avons montré la convergence infinie pour trois algorithmes CS_ω , $CS_\omega BBvar$ et CBB_ω utilisant une stratégie de subdivisions basée uniquement sur des ω -partitions (pour l'algorithme CBB_ω , seulement dans le cas concave). Cela ne signifie pas que ces algorithmes sont infinis mais plutôt que s'ils le sont, alors ils sont convergents, c'est-à-dire que la meilleure solution courante tend vers une solution optimale (au moins en termes de sous-suite) du problème considéré. Ces algorithmes peuvent-ils effectivement être infinis? Ou bien ne sont-ils pas toujours finis, avec un nombre d'itérations possiblement très grand qui dépendrait éventuellement de la fonction objectif?

Dans cette thèse, nous avons défini des algorithmes ($CBBnorm$, CBB_ω et $CBBcover$) qui utilisent des γ -extensions avec γ correspondant à une borne inférieure plutôt

que supérieure de la valeur optimale. Leur convergence a été montrée dans le cas où la fonction objectif est concave. Peut-on étendre ces résultats au cas quasiconcave?

Deux des algorithmes de type *branch-and-bound*, $CS\omega BBvar$ et $CBB\omega$, diffèrent par le calcul des γ -extensions: pour le premier, γ est égal à la valeur de la meilleure solution connue; pour le deuxième, γ est égal à la borne inférieure du cône père. Si γ est choisi dans l'intervalle défini par ces deux valeurs (par exemple, γ pourrait correspondre à une estimation de la meilleure borne inférieure simpliciale), a-t-on encore un algorithme convergent?

L'algorithme $CBBcover$ a été trouvé à la toute fin de cette thèse: il est donc normal que beaucoup de questions à son propos restent en suspens. Par exemple, l'algorithme peut-il cycliser avec le choix du point de subdivision tel que défini dans le Chapitre 5.4.1? Si oui, existe-t-il une autre façon de choisir ce point qui assure que l'algorithme ne cycle pas? S'il faut définir un recouvrement non radial pour éviter le cyclage tel que cela a été proposé dans le Chapitre 5.4.2, peut-on réduire le nombre de sous-cônes? Les derniers résultats suggèrent que le problème du cyclage pourrait être en fait un faux problème, dans la mesure où les cônes impliqués dans un cycle pourraient être éliminés. Peut-on construire une règle de subdivision simple qui satisfait cette propriété? Et plus intrigant encore, l'algorithme de Tuy de 1964 est-il finalement correct? À toutes ces questions et à bien d'autres, toutes aussi passionnantes, nous tenterons de répondre en priorité dans les semaines qui viennent.

Finalement, dans le Chapitre 6, nous avons montré que les algorithmes coniques pouvaient aussi être utilisés pour résoudre un problème de minimisation dont la fonction objectif n'est pas quasiconcave. C'est là une autre tâche importante: généraliser les résultats obtenus dans la première partie de cette thèse, d'abord à la minimisation quasiconcave sur un ensemble convexe quelconque, possiblement non borné, puis à la minimisation d.c.. Pour le cas particulier considéré dans ce chapitre, l'évaluation de la fonction objectif du problème réduit est coûteuse puisqu'elle implique la résolution d'un programme convexe. Il serait donc intéressant de continuer le développement

d'une borne inférieure dont le calcul nécessiterait peu d'évaluations de la fonction. D'autre part, l'algorithme conique utilisé pour résoudre ce problème recouvre le domaine de cônes dont l'origine commune est à l'extérieur. Ce choix permettait d'exploiter une propriété de la fonction objectif, et ainsi d'espérer réduire les temps de calcul. Rappelons aussi que dans certains cas particuliers, on peut choisir l'origine des cônes de façon à ce que la meilleure borne simpliciale soit toujours obtenue après une seule itération de la procédure de calcul de la meilleure borne. Le choix de l'origine des cônes semble donc être une piste de recherche intéressante, qui a été peu explorée jusqu'à présent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKGÜL, M. (1984). *Topics in Relaxation and Ellipsoidal Methods*, vol. 97 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman Publishing Limited.
- [2] ATKINSON, M. D., SACK, J.-R., SANTORO, N., AND STROTHOTTE, T. (1986). Min-max heaps and generalized priority queues. *Communications of the ACM*, 29 (10), 996–1000.
- [3] AVIS, D., AND FUKUDA, K. (1996). Reverse search for enumeration. *Discrete Applied Mathematics*, 65 (1-3), 21–46.
- [4] AVRIEL, M., DIEWERT, W. E., SCHAIBLE, S., AND ZANG, I. (1988). *Generalized Concavity*. Plenum Press, New-York.
- [5] BALI, S. G. (1973). *Minimization of a Concave Function on a Bounded Convex Polyhedron*. PhD thesis, University of California at Los Angeles.
- [6] BENSON, H. P. (1985). A finite algorithm for concave minimization over a polyhedron. *Naval Research Logistics Quarterly*, 32 (1), 165–177.
- [7] BENSON, H. P. (1996). Concave minimization: Theory, applications and algorithms. In *Handbook of Global Optimization*, R. Horst and P. M. Pardalos. Eds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 43–148.
- [8] BENSON, H. P., AND SAYIN, S. (1994). A finite concave minimization algorithm using branch and bound and neighbor generation. *Journal of Global Optimization*, 5 (1), 1–14.

- [9] BOYER, M., BRASSARD, G., HØYER, P., AND TAPP, A. (1996). Tight bounds on quantum searching. Soumis à PhysComp96 (Fourth Workshop on Physics and Computation, Boston, 22-24 novembre 1996), accessible par internet sur <http://xxx.lanl.gov/archive/quant-ph>.
- [10] CHEN, P.-C., HANSEN, P., AND JAUMARD, B. (1991). On-line and off-line vertex enumeration by adjacency lists. *Operations Research Letters*, 10, 403-409.
- [11] CHEN, P.-C., HANSEN, P., JAUMARD, B., AND TUY, H. (1992). Solution of the multifacility Weber and conditional Weber problems by d.-c. programming. Les Cahiers du GERAD G-92-35, GERAD, Montréal, Canada.
- [12] CPLEX OPTIMIZATION, INC. (1993). *Using the CPLEXTM Callable Library and CPLEXTM Mixed Integer Library (Version 2.1)*.
- [13] DÜRR, C., AND HØYER, P. (1996). A quantum algorithm for finding the minimum. Accessible par internet à l'adresse <http://xxx.lanl.gov/archive/quant-ph>.
- [14] GALLO, G. (1975). On Hoang Tui's concave programming algorithm. Nota scientifica S-76-1, Istituto di Scienze dell'Informazione, University of Pisa. Italie.
- [15] GALLO, G., AND ÜLKÜCÜ, A. (1977). Bilinear programming: an exact algorithm. *Mathematical Programming*, 12, 173-194.
- [16] GEOFFRION, A. M. (1967). Solving bicriterion mathematical programs. *Operations Research*, 15, 39-54.
- [17] GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1996), pp. 212-219. Accessible par internet sur <http://xxx.lanl.gov/archive/quant-ph>.

- [18] HANSEN, P., JAUMARD, B., MEYER, C., AND TUY, H. (1996). Best simplicial and double-simplicial bounds for concave minimization. Les Cahiers du GERAD G-96-17, GERAD, Montréal, Canada.
- [19] HENDERSON, J. M., AND QUANDT, R. E. (1971). *Microeconomic Theory*. McGraw-Hill, New York.
- [20] HORST, R. (1976). An algorithm for nonconvex programming problems. *Mathematical Programming*, 10, 312–321.
- [21] HORST, R., AND THOAI, N. V. (1989). Modification, implementation and comparison of three algorithms for globally solving linearly constrained concave minimization problems. *Computing*, 42, 271–289.
- [22] HORST, R., THOAI, N. V., AND BENSON, H. P. (1991). Concave minimization via conical partitions and polyhedral outer approximation. *Mathematical Programming*, 50, 259–274.
- [23] HORST, R., THOAI, N. V., AND DE VRIES, J. (1992). A new simplicial cover technique in constrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, 2, 1–19.
- [24] HORST, R., THOAI, N. V., AND DE VRIES, J. (1992). On geometry and convergence of a class of simplicial covers. *Optimization*, 25, 53–64.
- [25] HORST, R., THOAI, N. V., AND TUY, H. (1987). Outer approximation by polyhedral convex sets. *Operations Research Spektrum*, 9, 153–159.
- [26] HORST, R., THOAI, N. V., AND TUY, H. (1989). On an outer approximation concept in global optimization. *Optimization*, 20, 255–264.
- [27] HORST, R., AND TUY, H. (1996). *Global Optimization. Deterministic Approaches*, third, revised and enlarged edition. Springer-Verlag, Berlin.

- [28] ISTOMIN, L. A. (1977). A modification of Tuy's method for minimizing a concave function over a polytope. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 17, 1582–1592. (En Russe).
- [29] JACOBSEN, S. E. (1981). Convergence of a Tuy-type algorithm for concave minimization subject to linear inequality constraints. *Applied Mathematics and Optimization*, 7, 1–9.
- [30] JAUMARD, B., AND MEYER, C. (1996). On the convergence of cone splitting algorithms with ω -subdivisions. Les Cahiers du GERAD G-96-36, GERAD.
- [31] JAUMARD, B., MEYER, C., AND TUY, H. (1996). Generalized convex multiplicative programming via quasiconcave minimization. Les Cahiers du GERAD G-95-22, GERAD, Montréal, Canada. A paraître dans *Journal of Global Optimization*.
- [32] KALANTARI, B., AND BAGCHI, A. (1990). An algorithm for quadratic zero-one programs. *Naval Research Logistics*, 37, 527–538.
- [33] KONNO, H., AND INORI, M. (1989). Bond portfolio optimization by bilinear fractional programming. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 32, 143–158.
- [34] KONNO, H., AND KUNO, T. (1990). Generalized linear multiplicative and fractional programming. *Annals of Operations Research*, 25, 147–162.
- [35] KONNO, H., AND KUNO, T. (1992). Linear multiplicative programming. *Mathematical Programming*, 56, 51–64.
- [36] KONNO, H., AND KUNO, T. (1995). Multiplicative programming problems. In *Handbook of Global Optimization*, R. Horst and P. M. Pardalos, Eds. Kluwer, Dordrecht, pp. 369–405.

- [37] KONNO, H., KUNO, T., AND YAJIMA, Y. (1994). Global minimization of a generalized convex multiplicative function. *Journal of Global Optimization*, 4, 47-62.
- [38] KONNO, H., AND YAJIMA, Y. (1991). Minimizing and maximizing the product of linear fractional functions. In *Recent Advances in Global Optimization*. C. Floudas and P. Pardalos, Eds. Princeton University Press, pp. 259-273.
- [39] KONNO, H., YAJIMA, Y., AND MATSUI, T. (1991). Parametric simplex algorithms for solving a special class of nonconvex minimization problems. *Journal of Global Optimization*, 1, 65-81.
- [40] KUNO, T., AND KONNO, H. (1991). A parametric successive underestimation method for convex multiplicative programming problems. *Journal of Global Optimization*, 1, 267-285.
- [41] KUNO, T., KONNO, H., AND YAMAMOTO, Y. (1992). A parametric successive underestimation method for convex programming problems with an additional convex multiplicative constraint. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 35 (3), 290-299.
- [42] KUNO, T., YAJIMA, Y., AND KONNO, H. (1993). An outer approximation method for minimizing the product of several convex functions on a convex set. *Journal of Global Optimization*, 3, 325-335.
- [43] KUNO, T., YAJIMA, Y., YAMAMOTO, Y., AND KONNO, H. (1994). Convex programs with an additional constraint on the product of several convex functions. *European Journal of Operational Research*, 77, 314-324.
- [44] LANDIS, E. M. (1951). On functions representable as the difference of two convex functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 80, 9-11.

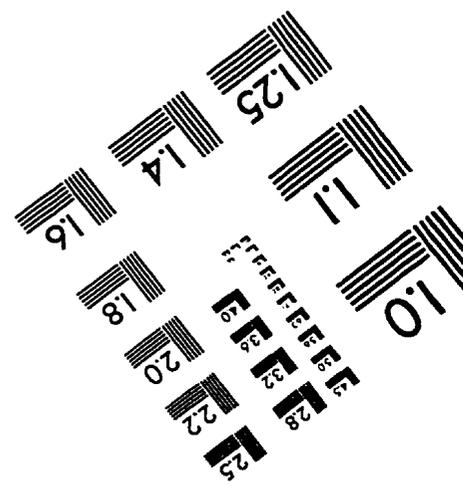
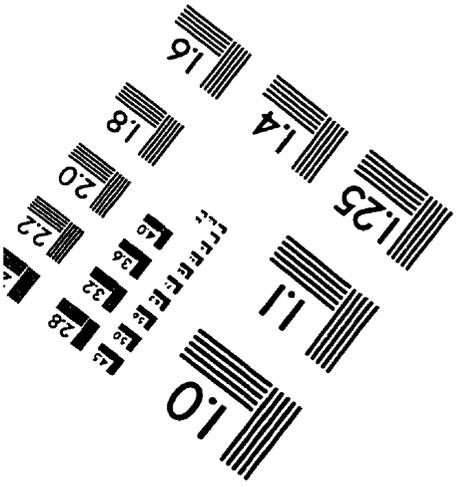
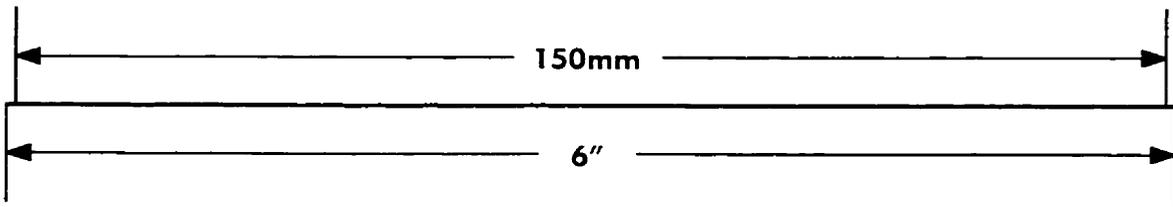
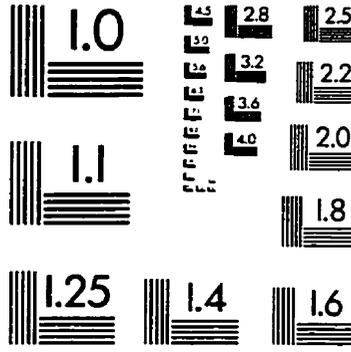
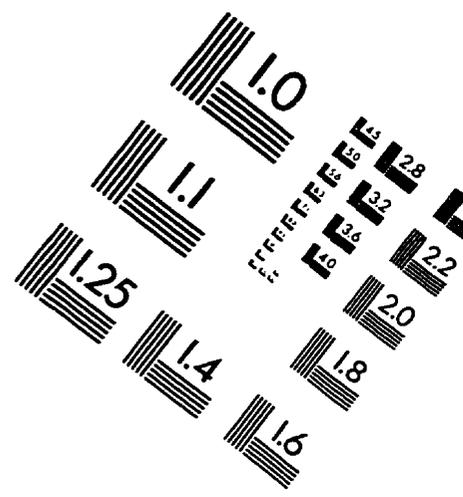
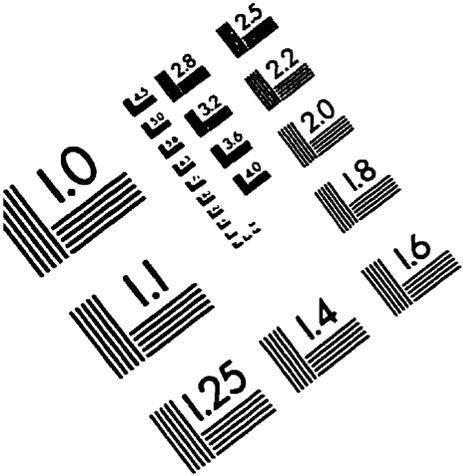
- [45] LUENBERGER, D. G. (1989). *Linear and Nonlinear Programming*, second edition. Addison-Wesley Publishing Company.
- [46] MALING, K., MUELLER, S. H., AND HELLER, W. R. On finding most optimal rectangular package plans. In *Proceedings of the 19th Design Automation Conference* (1982), pp. 663–670.
- [47] MAWHIN, J. L. (1992). *Analyse: fondements, techniques, évolution*. De Boeck University, Bruxelles.
- [48] MINOUX, M. (1983). *Programmation mathématique, théorie et algorithmes, tome 1*. Dunod.
- [49] MUKHAMEDIEV, B. M. (1982). Approximate methods for solving concave programming problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 22, 238–245. (En Russe).
- [50] MURTAGH, B. A., AND SAUNDERS, M. A. (1993). Minos 5.4 user's guide. Tech. Rep. SOL 83-20R, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University.
- [51] MUU, L. D. (1993). An algorithm for solving convex programs with an additional convex-concave constraint. *Mathematical Programming*, 61, 75–87.
- [52] MUU, L. D., AND TAM, B. T. (1992). Minimizing the sum of a convex function and the product of two affine functions over a convex set. *Optimization*, 24, 57–62.
- [53] NESTEROV, Y., AND NEMIROVSKII, A. (1994). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, vol. 13 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. SIAM.
- [54] PFERSCHY, U., AND TUY, H. (1994). Linear programs with an additional rank two reverse convex constraint. *Journal of Global Optimization*, 4, 441–454.

- [55] ROCKAFELLAR, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [56] SCHAIBLE, S., AND SODINI, C. (1995). Finite algorithm for generalized linear multiplicative programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 87 (2), 441–455.
- [57] SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In *Proceedings of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (1994), pp. 124–134. Accessible par internet à l'adresse: <http://feynman.stanford.edu/qcomp/artlist.html>.
- [58] THACH, P. T., BURKARD, R. E., AND OETTLI, W. (1991). Mathematical programs with a two dimensional reverse convex constraint. *Journal of Global Optimization*, 1, 145–154.
- [59] THOAI, N. V. (1991). A global optimization approach for solving the convex multiplicative programming problem. *Journal of Global Optimization*, 1, 341–357.
- [60] THOAI, N. V. (1993). Canonical d.c. programming techniques for solving a convex program with an additional constraint of multiplicative type. *Computing*, 50, 241–253.
- [61] THOAI, N. V., AND TUY, H. (1980). Convergent algorithms for minimizing a concave function. *Mathematics of Operations Research*, 5, 556–566.
- [62] TUY, H. (1964). Concave programming under linear constraints. *Soviet Mathematics*, 5, 1437–1440.
- [63] TUY, H. (1990). On polyhedral annexation method for concave minimization. In *Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics*, L. J. Leifman, Ed. Oxford University Press, pp. 248–260.

- [64] TUY, H. (1991). Normal conical algorithm for concave minimization over polytopes. *Mathematical Programming*, 51, 229–245.
- [65] TUY, H. (1991). Polyhedral annexation, dualization and dimension reduction technique in global optimization. *Journal of Global Optimization*, 1, 229–244.
- [66] TUY, H. (1994). Introduction to global optimization. Les Cahiers du GERAD G-94-04, GERAD, Montréal, Canada.
- [67] TUY, H. (1996). D.c. optimization: Theory, methods and algorithms. In *Handbook of Global Optimization*, R. Horst and P. M. Pardalos, Eds. Kluwer Academic Publishers, pp. 149–216.
- [68] TUY, H., GHANNADAN, S., MIGDALAS, A., AND VÄRBRAND, P. (1996). A strongly polynomial algorithm for a concave production-transportation problem with a fixed number of nonlinear variables. *Mathematical Programming*, 72 (3), 229–258.
- [69] TUY, H., KHATCHATUROV, V., AND UTKIN, S. (1987). A class of exhaustive cone splitting procedures in conical algorithms for concave minimization. *Optimization*, 18 (6), 791–807.
- [70] TUY, H., AND TAM, B. T. (1992). An efficient solution method for rank two quasiconcave minimization problems. *Optimization*, 24, 43–56.
- [71] TUY, H., TAM, B. T., AND DAN, N. D. (1994). Minimizing the sum of a convex function and a specially structured nonconvex function. *Optimization*, 28, 237–248.
- [72] TUY, H., THIEU, T. V., AND THAI, N. Q. (1985). A conical algorithm for globally minimizing a concave function over a closed convex set. *Mathematics of Operations Research*, 10, 498–514.

- [73] VAISH, H. (1974). *Nonconvex Programming with Applications to Production and Location Problems*. PhD thesis, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.
- [74] VAISH, H., AND SHETTY, C. M. (1976). The bilinear programming problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 23, 303-309.
- [75] ZWART, P. B. (1973). Nonlinear programming: Counterexamples to two global optimization algorithms. *Operations Research*, 21, 1260-1266.
- [76] ZWART, P. B. (1974). Global maximization of a convex function with linear inequality constraints. *Operations Research*, 22, 602-609.

TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved