



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVES  
POUR LES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

FLORIN ILINCA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
MARS 1996



©Florin Ilinca, 1996.



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26422-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVES  
POUR LES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

présentée par : ILINCA Florin

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

M. MERCADIER Yves, Ph.D., membre

À mon épouse, Luminița,  
À ma fille, Monica,  
À mes parents.

## Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon directeur de recherche, M. Dominique Pelletier, pour son support scientifique, moral et matériel pendant toute la durée du travail de doctorat.

J'adresse mes remerciements à M. André Garon et M. Yves Mercadier qui ont accepté de juger ce travail ainsi qu'à M. Ricardo Camarero de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie tous les membres du groupe MIAO qui ont permis l'avancement rapide de cette recherche. Je veux souligner particulièrement les conseils judicieux d'André Garon et Jean-Yves Trépanier qui ont permis de compléter avec succès ce travail.

Enfin, je voudrais remercier mon épouse Luminița qui n'a pas cessé de me soutenir et de m'encourager tout au long de ces années d'études supérieures.

## Résumé

Cette thèse est consacrée au développement d'une méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des écoulements turbulents. Une méthodologie précédemment élaborée pour les écoulements laminaires est généralisée afin de simuler les écoulements turbulents à l'aide d'un modèle à deux-équations  $k-\epsilon$ .

La méthodologie adaptative utilisée est composée d'une étape de résolution, d'estimation d'erreur et de remaillage adaptatif. La résolution est effectuée à l'aide d'une méthode d'éléments finis sur des maillages non-structurés. La solution obtenue est analysée afin d'évaluer sa précision et de détecter les régions entachées d'erreur. Cette distribution d'erreur est ensuite utilisée pour engendrer un nouveau maillage qui permettra d'obtenir une solution améliorée.

Les écoulements turbulents sont difficile à simuler même à l'aide des hypothèses simplificatrices introduites par les modèles de turbulence. La nature des équations et leur fort couplage font en sorte que le système d'équations est difficile à résoudre numériquement. La solution présente des variations très rapides, de grandes régions où le niveau de turbulence est très faible et même des quasi-singularités dues à la géométrie. De plus, les variables de turbulence doivent demeurer strictement positives sinon il devient impossible d'obtenir la solution numérique. Dans ce contexte on fait souvent appel à des techniques de stabilisation numérique. Les méthodes de différentiation amont et les procédures de '*clipping*' qui ont pour rôle de diminuer les oscillations et de préserver la positivité de la solution, en sont des exemples.

Dans la littérature on retrouve une grande variabilité dans les prédictions numériques. Assez souvent des calculs réalisés avec les mêmes modèles et techniques numériques conduisent à des résultats présentant des différences non négligeables. On se pose alors tout naturellement la question à savoir si le modèle de turbulence employé est vraiment responsable des résultats décevants ou bien si c'est plutôt le calcul numérique lui même qui en est responsable.

L'objectif principal de cette recherche a été de développer une procédure permettant d'obtenir de solutions numériques précises aux équations différentielles qui régissent les écoulement turbulents. Dans ce sens on a développé une formulation de résolution, une méthodologie adaptative et des techniques d'estimation d'erreur afin de contrôler et diminuer l'incertitude numérique.

L'estimation d'erreur est basée sur des techniques de projection au sens des moindres carrés des dérivées. On explore ici les différentes versions qui font appel à des projections globales ou locales. L'approche retenue fonctionne bien pour une vaste gamme d'écoulements de la mécanique des fluides, qu'ils soient laminares, avec transfert de chaleur ou bien turbulents. L'estimateur d'erreur analyse la solution en regardant comment se comportent les dérivées des différentes variables. On s'attend donc à ce qu'il réagisse non seulement aux régions où la physique du problème fait en sorte que les variations des variables sont rapides, mais en général aux endroits où le résolveur éprouve de la difficulté à bien décrire la solution. Une mauvaise solution du point de vue de l'estimation d'erreur peut être due à une discrétisation inappropriée des équations ou bien à l'utilisation de procédure de '*clipping*'. On peut alors se trouver dans une situation où la procédure adaptative concentre les points du maillage dans les régions où le résolveur manifeste de faiblesses, plutôt que là où le problème le nécessite vraiment.

Pour assurer la robustesse de la méthode de résolution et de l'algorithme

adaptatif on propose une nouvelle approche qui garantit la positivité de la solution pour les écoulements turbulents. La méthode est basée sur un changement de variables dépendantes, qui respecte la physique de l'écoulement. Les équations de transport pour les variables de turbulence n'ont plus  $k$  et  $\epsilon$  comme inconnues mais plutôt leurs logarithmes naturels,  $K=\ln(k)$  et  $E=\ln(\epsilon)$ . On notera que le modèle de turbulence et la formulation du problème demeurent inchangés. La procédure garantie que les variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$  sont strictement positives car elles sont calculées en prenant l'exponentielle des variables de calcul ( $K$  et  $E$ ). Cette approche améliore grandement la solution et cela surtout dans les régions de forts gradients et dans celles où le niveau de turbulence est faible (zones d'eau morte). La solution devient plus régulière. Cela permet d'utiliser des maillages plus grossiers et de tirer pleinement profit de l'algorithme adaptatif. L'approche est générale et est aussi applicable à d'autres méthodes de calcul numérique, comme les différences finies ou les volumes finis. Elle conduit à des économies appréciables de temps de calcul et pourrait donc devenir très utile lors de la simulation d'écoulements tridimensionnels.

Une autre source d'erreur peut résider dans l'utilisation de techniques de différentiation amont. Ces méthodes présentent l'avantage de diminuer les oscillations de la solution, mais elles peuvent fausser la solution car les formes variationnelles utilisées peuvent ne pas être consistantes. On compare ici la méthode de différentiation amont basée sur le concept de viscosité artificielle à des méthodes de stabilisation résiduelles pour lesquelles la solution exacte est solution du problème variationnel.

La méthode de résolution en variables logarithmiques et la méthodologie adaptative sont validées en résolvant des problèmes possédant une solution analytique. Ceci permet d'analyser les différentes méthodes de résolution en comparant leur solution à la solution exacte. Ceci permet aussi de comparer l'estimateur d'erreur à l'erreur exacte et d'étudier les distributions de l'erreur et de son estimation.

Finally the methodology is applied to practical problems and the numerical predictions are compared with experimental measurements and other calculations. We treat here free flows such as shear layers and jets, the classical flow over a downward step, as well as the flow around a NACA 0012 airfoil. The proposed procedure is shown to be robust and reliable, allowing the resolution of difficult problems in a precise and economical way.

## Abstract

This thesis presents an adaptive finite element method for solving complex turbulent flows. A method previously developed for two-dimensional laminar flows has been generalized to turbulent flows modeled by a  $k-\epsilon$  model of turbulence.

The adaptive scheme is composed of the solver, the error estimation module and the remeshing procedure. Solutions are obtained in primitive variables using a mixed finite element method on unstructured grids. The solution is analyzed to determine where the error is important and then a new mesh is generated to improve the solution.

The complex nature of turbulent flows makes them difficult to simulate even when turbulence models are used. The solution is complex and described by a large number of dependent variables. The strong coupling of equations makes the system difficult to solve numerically. Solutions are characterized by strong gradients, large regions of low level of turbulence and even quasi-singularities due to the geometry. Furthermore, for two-equations turbulence models it is of critical importance that the turbulence variables always remain positive throughout the computational domain. So, to solve such problems, numerical stabilisation methods such as upwind techniques or clipping are usually invoked. This reduces oscillations in the solution and preserves positivity of turbulence variables.

Numerical solution presented in the literature are characterized by a large level of uncertainty and variability. For instance two numerical computations using the same

hypotheses and numerical algorithm may yield sensibly different results. This gives rise to the following question: *What is the cause for such possibly bad results in turbulent flow computations? It is the turbulence model its self or it is the solution procedure?*

In this research the main objective was to construct an adaptive solution procedure capable to producing accurate solutions to the differential equations governing turbulent flows. In this sense we have incorporated a  $k-\epsilon$  turbulence model in our finite element code and used adaptive remeshing in order to control the numerical accuracy.

The error is estimated by using a least-squares projection of derivatives in the space of the finite element interpolation functions. Both global and local projection approaches are investigated here. The local projection method, which is retained in the end, is a general one and works for laminar flows, for heat transfer cases and for turbulent flows. In this approach continuity of the gradients of the solution is the key factor which determines the adaptive process. The mesh will be refined everywhere the solution is not sufficiently accurate. This may be due in part to the physics of the problem, but also to the use of numerical stabilization techniques such as upwinding and clipping which locally affect the solution. In the last case the adaptive procedure may be driven by the inability of the solver to produce a smooth solution rather than by the flow physics.

A key difficulty in turbulent flow computations is preserving the positivity of turbulence variables. One way of achieving this, without changing the solution, consists in solving for their logarithms. This can be viewed as a change of dependent variables,  $K=\ln(k)$ ,  $E=\ln(\epsilon)$ . This approach is consistent with the behavior of turbulence variables and requires no changes in turbulence model. Moreover, it may be applied to any two-equations turbulence model, and solved for using any numerical scheme, be it a finite difference, a finite volume or a finite element method. The eddy viscosity,

$k$  and  $\epsilon$  are now obtained as the exponential of the computational dependent variables and will always be positive. This approach result in improved accuracy in regions of rapid variation of turbulence fields as well as in regions of low turbulence level. The solution becomes smooth and so it can fully benefit from the adaptive procedure.

Upwinding is frequently used to achieve an oscillation free solution. Such methods may also be a source of error because they may give rise to inconsistent variational problems. In this work, classical upwinding techniques based on the concept of artificial viscosity will be compared with residual stabilisation methods.

The solution algorithm which makes use of logarithmic variables and the adaptive methodology is validated on a shear layer flow for which an analytical solution is available. This provides a framework for rigorous comparison and validation of the various possibilities. This also permits comparison between the estimated error and the true error and validation of the error estimation technique.

The methodology is then used to solve turbulent flows of practical interest for which experimental measurements are available: turbulent free shear layers, turbulent jets, flow over a backward facing step and flow over a NACA0012 airfoil. The proposed procedure is robust and provides accurate solutions to turbulent flows.

# Table de matières

<b>Dédicace</b> . . . . .	iv
<b>Remerciements</b> . . . . .	v
<b>Résumé</b> . . . . .	vi
<b>Abstract</b> . . . . .	x
<b>Table de matières</b> . . . . .	xiii
<b>Liste des tableaux</b> . . . . .	xvi
<b>Liste des figures</b> . . . . .	xviii
<b>Liste des notations et des symboles</b> . . . . .	xxiv
<b>Liste des annexes</b> . . . . .	xxix

<b>Introduction</b> . . . . .	1
<b>Chapitre 1: Étude bibliographique critique</b> . . . . .	5
1.1 La méthode des éléments finis en mécanique des fluides . . . . .	5
1.2 Modélisation de la turbulence . . . . .	8
1.2.1 Considérations générales . . . . .	8
1.2.2 Modèles de turbulence . . . . .	10
1.2.3 Le modèle $k-\epsilon$ . . . . .	13
1.2.4 Loi de paroi . . . . .	14
1.3 Méthodes adaptatives pour les écoulements visqueux . . . . .	16
1.3.1 Considérations générales . . . . .	16
1.3.2 Techniques d'estimation d'erreur . . . . .	17
1.3.3 Estimation d'erreur par projection moindres carrés . . . . .	19
<b>Chapitre 2: Modélisation du problème</b> . . . . .	23
2.1 Équations différentielles . . . . .	23
2.2 Conditions aux frontières . . . . .	24
<b>Chapitre 3: Formulation et techniques de résolution</b> . . . . .	27
3.1 Les équations modifiées . . . . .	27
3.2 Formulation variationnelle . . . . .	29
3.3 Les enjeux numériques . . . . .	30
3.3.1 Méthodes d'éléments finis stabilisées . . . . .	30
3.3.2 Implantation des conditions aux frontières . . . . .	36
3.3.3 Limiteurs pour $k$ et $\epsilon$ . . . . .	43
3.4 Résolution en variables logarithmiques . . . . .	46
3.4.1 Équations différentielles de transport . . . . .	48
3.4.2 Formulation variationnelle . . . . .	50

<b>Chapitre 4: Remaillage adaptatif</b> . . . . .	54
4.1 Estimation <i>a posteriori</i> de l'erreur . . . . .	54
4.2 Les variables logarithmiques et l'erreur de la solution . . . . .	59
4.3 Opérateur de transition . . . . .	61
<b>Chapitre 5: Validation</b> . . . . .	64
5.1 Couche cisailée 2-D avec une variation linéaire de la viscosité turbulente . . . . .	64
5.2 Couche cisailée 2-D avec une distribution gaussienne de la viscosité turbulente . . . . .	102
<b>Chapitre 6: Applications</b> . . . . .	112
6.1. Couche cisailée avec un rapport de vitesses $U_2/U_1=0.3$ . . . . .	112
6.2. Marche descendante de Kim . . . . .	145
6.3. Écoulement autour d'un profil NACA0012 . . . . .	176
6.3.1. Écoulement à angle d'incidence nul . . . . .	176
6.3.2. Écoulement avec incidence . . . . .	183
<b>Conclusion</b> . . . . .	203
<b>Références</b> . . . . .	207
<b>Annexes</b> . . . . .	221

## Liste des tableaux

Tableau 5.1	Trajectoire des erreurs pour un raffinement uniforme . . . . .	66
Tableau 5.2	Taux de convergence de l'élément . . . . .	67
Tableau 5.3	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en vitesse . . . . .	68
Tableau 5.4	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $k$ . . . . .	69
Tableau 5.5	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ . . . . .	69
Tableau 5.6	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ . . . . .	70
Tableau 5.7	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en vitesse . . . . .	73
Tableau 5.8	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $k$ . . . . .	74
Tableau 5.9	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ . . . . .	74
Tableau 5.10	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ . . . . .	75
Tableau 5.11	Les erreurs pour différentes formulations éléments finis sur le maillage 1 . . . . .	76
Tableau 5.12	Statistique des temps de calcul . . . . .	77
Tableau 5.13	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en vitesse . . . . .	103
Tableau 5.14	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $k$ . . .	104
Tableau 5.15	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ . . .	104
Tableau 5.16	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ . .	105

Tableau 6.1	Longueur de la zone de recirculation . . . . .	148
Tableau 6.2	Longueur de la zone de recirculation - calcul Prob2 . . . . .	151
Tableau 6.3	Conditions en entrée pour les variables turbulentes . . . . .	186

## Liste des figures

Figure 2.1	Configuration de calcul avec loi de paroi . . . . .	25
Figure 2.2	La loi de paroi de Launder et Spalding . . . . .	26
Figure 3.1	Définition de la normale équivalente au noeud . . . . .	40
Figure 3.2	Dépendance de la normale équivalente au noeud du maillage . . . . .	41
Figure 4.1	Groupe d'éléments pour la projection locale . . . . .	57
Figure 4.2	Points de collocation pour la projection locale discrète . . . . .	58
Figure 5.1	Trajectoire des erreurs pour un raffinement uniforme . . . . .	79
Figure 5.2	Trajectoire de l'erreur en fonction de la taille des éléments . . . . .	79
Figure 5.3	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en vitesse . . . . .	80
Figure 5.4	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $k$ .	80
Figure 5.5	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ .	81
Figure 5.6	Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ .	81
Figure 5.7	Histogramme de l'erreur en vitesse estimée par projection locale . . .	82
Figure 5.8	Histogramme de l'erreur exacte en vitesse . . . . .	82
Figure 5.9	Histogramme de l'erreur en $k$ estimée par projection locale . . . . .	83
Figure 5.10	Histogramme de l'erreur exacte en $k$ . . . . .	83
Figure 5.11	Histogramme de l'erreur en $\epsilon$ estimée par projection locale . . . . .	84
Figure 5.12	Histogramme de l'erreur exacte en $\epsilon$ . . . . .	84
Figure 5.13	Histogramme de l'erreur en $\mu_T$ estimée par projection locale . . . . .	85
Figure 5.14	Histogramme de l'erreur exacte en $\mu_T$ . . . . .	85
Figure 5.15	Maillages engendrés par la stratégie adaptative . . . . .	86

Figure 5.16	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse $u$ , vitesse $v$ et viscosité turbulente . . . . .	87
Figure 5.17	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: $k$ , $\epsilon$ , $\ln(k)$ et $\ln(\epsilon)$ . . . . .	88
Figure 5.18	Distribution de l'erreur évaluée dans la norme énergie sur le maillage initial . . . . .	89
Figure 5.19	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\ln(k)$ sur le maillage initial . . . . .	90
Figure 5.20	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\ln(\epsilon)$ sur le maillage initial . . . . .	91
Figure 5.21	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\mu_T$ sur le maillage initial . . . . .	92
Figure 5.22	Distribution de l'erreur évaluée dans la norme énergie sur le premier maillage adapté . . . . .	93
Figure 5.23	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\ln(k)$ sur le premier maillage adapté . . . . .	94
Figure 6.24	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\ln(\epsilon)$ sur le premier maillage adapté . . . . .	95
Figure 5.25	Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme $H^1$ pour $\mu_T$ sur le premier maillage adapté . . . . .	96
Figure 5.26	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en vitesse . . . . .	97
Figure 5.27	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $k$ . . . . .	97
Figure 5.28	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ . . . . .	98
Figure 5.29	Résolution en $k$ et $\epsilon$ - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ . . . . .	98
Figure 5.30	Trajectoire de l'erreur exacte en $\mu_T$ . . . . .	99
Figure 5.31	Distribution de la viscosité turbulente: résolution en $(k, \epsilon)$ et résolution en variables logarithmiques . . . . .	100
Figure 5.32	Distribution de la viscosité turbulente pour différentes formulations sur le maillage 1 . . . . .	101

Figure 5.33	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en vitesse .	107
Figure 5.34	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $k$ . . . .	107
Figure 5.35	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $\epsilon$ . . . .	108
Figure 5.36	Couche cisailée $\mu_T$ gaussienne - Trajectoire de l'erreur en $\mu_T$ . . .	108
Figure 5.37	Maillages engendrés par la stratégie adaptative . . . . .	109
Figure 5.38	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse $u$ , vitesse $v$ et viscosité turbulente . . . . .	110
Figure 5.39	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: $k$ , $\epsilon$ , $\ln(k)$ et $\ln(\epsilon)$ . . . . .	111
Figure 6.1	Couche cisailée de Spencer: Domaine de calcul et conditions limites . . . . .	113
Figure 6.2	Couche cisailée - Maillages engendrés par la stratégie adaptative . .	122
Figure 6.3	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse $u$ , vitesse $v$ et viscosité turbulente . . . . .	123
Figure 6.4	Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: $\ln(k)$ , $k$ , $\ln(\epsilon)$ , $\epsilon$ . . . . .	124
Figure 6.5	Maillage initial, estimation de l'erreur et premier maillage adapté . .	125
Figure 6.6	Maillage 1, estimation de l'erreur et deuxième maillage adapté . . .	126
Figure 6.7	Maillage 2, estimation de l'erreur et maillage final . . . . .	127
Figure 6.8	Profils de vitesses obtenus à différents stations de contrôle . . . . .	128
Figure 6.9	Distribution de $k$ à différents stations de contrôle . . . . .	129
Figure 6.10	Distribution des contraintes turbulentes à différents stations de contrôle . . . . .	130
Figure 6.11	Profils de vitesses sur le premier et le dernier maillage . . . . .	131
Figure 6.12	Profils de $k$ sur le premier et le dernier maillage . . . . .	132
Figure 6.13	Profils des contraintes turbulentes sur le premier et le dernier maillage . . . . .	133
Figure 6.14	Solutions en formulation Galerkin et GLS: vitesse $u$ , vitesse $v$ et viscosité turbulente . . . . .	134

Figure 6.15 Solutions en formulation Galerkin et GLS: $\ln(k)$ , $k$ , $\ln(\epsilon)$ , $\epsilon$ . . . . .	135
Figure 6.16 Couche cisailée, calcul Prob2 - Maillages adaptés . . . . .	136
Figure 6.17 Calcul Prob2; Solution sur le maillage 1 et sur le maillage final: vitesse $u$ , vitesse $v$ et viscosité turbulente . . . . .	137
Figure 6.18 Calcul Prob2; Solution sur le maillage 1 et sur le maillage final: $\ln(k)$ , $k$ , $\ln(\epsilon)$ , $\epsilon$ . . . . .	138
Figure 6.19 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en vitesse	139
Figure 6.20 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en $k$ . . . . .	140
Figure 6.21 Influence des conditions limite à l'entrée sur les contraintes turbulentes . . . . .	141
Figure 6.22 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude de la solution en vitesse . . . . .	142
Figure 6.23 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude de la solution en $k$ . . . . .	143
Figure 6.24 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude des valeurs des contraintes turbulentes . . . . .	144
Figure 6.25 Marche descendante de Kim: Domaine de calcul et conditions aux limites . . . . .	145
Figure 6.26 Marche descendante de Kim - Maillages adaptés . . . . .	153
Figure 6.27 Marche descendante de Kim - Solution sur le maillage initial . . . . .	154
Figure 6.28 Marche descendante de Kim - Solution sur le maillage final . . . . .	155
Figure 6.29 Estimation de l'erreur sur le maillage initial . . . . .	156
Figure 6.30 Estimation de l'erreur sur le premier maillage adapté . . . . .	157
Figure 6.31 Profils de vitesse longitudinale à $x/HT=-4$ et à $x/HT=-1$ . . . . .	158
Figure 6.32 Profils de vitesse longitudinale à $x/HT=0$ et à $x/HT=4/3$ . . . . .	159
Figure 6.33 Profils de vitesse longitudinale à $x/HT=8/3$ et à $x/HT=16/3$ . . . . .	160
Figure 6.34 Profils de vitesse longitudinale à $x/HT=24/3$ et à $x/HT=48/3$ . . . . .	161
Figure 6.35 Profils de $k$ à $x/HT=1.0$ et à $x/HT=2.3$ . . . . .	162
Figure 6.36 Profils de $k$ à $x/HT=4.1$ et à $x/HT=5.8$ . . . . .	163

Figure 6.37	Profils de $k$ à $x/HT=6.7$ et à $x/HT=7.6$ . . . . .	164
Figure 6.38	Profils de $k$ à $x/HT=8.5$ et à $x/HT=10.3$ . . . . .	165
Figure 6.39	Profils de $k$ à $x/HT=13.0$ et à $x/HT=15.6$ . . . . .	166
Figure 6.40	Profils du cisaillement turbulent à $x/HT=1.0$ et à $x/HT=2.3$ . . .	167
Figure 6.41	Profils du cisaillement turbulent à $x/HT=4.1$ et à $x/HT=5.8$ . . .	168
Figure 6.42	Profils du cisaillement turbulent à $x/HT=6.7$ et à $x/HT=7.6$ . . .	169
Figure 6.43	Profils du cisaillement turbulent à $x/HT=8.5$ et à $x/HT=10.3$ . . .	170
Figure 6.44	Profils du cisaillement turbulent à $x/HT=13.0$ et à $x/HT=15.6$ . .	171
Figure 6.45	Marche descendante de Kim - Solution Prob2 . . . . .	172
Figure 6.46	Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à $x/HT=0$ et à $x/HT=4/3$ . . . . .	173
Figure 6.47	Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à $x/HT=8/3$ et à $x/HT=16/3$ . . . . .	173
Figure 6.48	Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à $x/HT=24/3$ et à $x/HT=48/3$ . . . . .	173
Figure 6.49	Solutions Prob1 et Prob2: Profils de $k$ à $x/HT=1.0$ et à $x/HT=4.1$ . . . . .	174
Figure 6.50	Solutions Prob1 et Prob2: Profils de $k$ à $x/HT=6.7$ et à $x/HT=7.6$ . . . . .	174
Figure 6.51	Solutions Prob1 et Prob2: cisaillement turbulent à $x/HT=1.0$ et à $x/HT=4.1$ . . . . .	175
Figure 6.52	Solutions Prob1 et Prob2: cisaillement turbulent à $x/HT=6.7$ et à $x/HT=7.6$ . . . . .	175
Figure 6.53	Profil NACA0012, $\alpha=0^{\circ}$ : Maillages engendrés par la stratégie adaptative . . . . .	179
Figure 6.54	Profil NACA0012, $\alpha=0^{\circ}$ : Maillage initial et maillage final . . . . .	180
Figure 6.55	Solution sur le maillage final . . . . .	181
Figure 6.56	Profil NACA0012, $\alpha=0^{\circ}$ : Distribution du coefficient de pression .	182
Figure 6.57	Profil NACA0012 à $\alpha=3.59^{\circ}$ - Maillages adaptés . . . . .	188

Figure 6.58	Distribution de la vitesse $u$ . . . . .	189
Figure 6.59	Distribution de la vitesse $v$ . . . . .	190
Figure 6.60	Distribution de la pression . . . . .	191
Figure 6.61	Distribution de la viscosité turbulente . . . . .	192
Figure 6.62	Distribution de $k$ et de $\ln(k)$ . . . . .	193
Figure 6.63	Distribution d' $\epsilon$ et de $\ln(\epsilon)$ . . . . .	194
Figure 6.64	Distribution du coefficient de pression . . . . .	195
Figure 6.65	Distribution du coefficient de pression sur le maillage 3 . . . . .	196
Figure 6.66	Détail de la distribution du coefficient de pression sur le maillage 3 . . . . .	196
Figure 6.67	Maillages adaptés - Prob2 . . . . .	197
Figure 6.68	Profil NACA0012, $\alpha=3.59^\circ$ : Maillage final (Prob2) . . . . .	198
Figure 6.69	Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en $\ln(k)$ . .	199
Figure 6.70	Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en $\ln(\epsilon)$ . .	200
Figure 6.71	Influence des conditions limite à l'entrée sur la viscosité turbulente	201
Figure 6.72	Influence des conditions limite à l'entrée sur la distribution du coefficient de pression . . . . .	202
Figure B.1	Calcul de la taille de l'élément en direction de l'écoulement . . . . .	225

# Liste des notations et des symboles

## Notations

$a_i$	coefficients du développement polynomial pour la projection locale
$A$	matrice d'éléments finis
$b$	membre de droite du système éléments finis
$C_\mu, C_1, C_2$	constantes du modèle $k-\epsilon$
$c_p$	chaleur spécifique à pression constante
$C_p$	coefficient de pression
$d$	distance à la paroi
$d_k, d_\epsilon, d_\mu$	constantes de 'clipping'
$e, er$	erreur
$e$	épaisseur relative
$E$	paramètre de rugosité, logarithme naturel d' $\epsilon$
$f$	termes de forces
$f$	multiplicateur de Lagrange pour la condition de débit nul
$H^l$	espace de Sobolev
$I, J$	fonctionnelles
$k$	énergie cinétique de turbulence, taux de convergence de l'élément
$K$	élément de triangulation, constante de Kármán, logarithme naturel de $k$
$l$	échelle de longueur de la turbulence
$L$	longueur de référence

$M$	logarithme naturel de la viscosité turbulente, nombre de Mach
$\hat{n}, n$	vecteur unitaire normal
$N_i, N_j$	fonctions d'interpolation
$N_p$	nombre de points du maillage
$p$	pression
$P$	terme de production
$Pe$	nombre de Péclet
$Pr$	nombre de Prandtl, $Pr = \mu c_p / \lambda$
$q_w$	flux thermique imposé sur $\Gamma_q$
$q_s$	source thermique
$q$	fonction test pour l'équation de continuité
$q$	flux thermique
$q_T$	flux thermique du à la dissipation turbulente
$R$	résidu
$R_{ij}$	tenseur de Reynolds
$Re$	nombre de Reynolds, $Re = (\rho UL) / \mu$
$t$	temps
$\hat{i}$	vecteur unitaire tangent à la paroi
$T$	température
$u$	vecteur vitesse
$\bar{u}$	valeur moyenne de la vitesse
$u'$	fluctuation de la vitesse
$u_\tau$	vitesse de frottement
$u_*$	échelle de vitesse reliée à la turbulence
$x, y$	coordonnées cartésiennes
$y$	distance à la paroi
$v$	fonction test pour l'équation de mouvement
$w$	fonction test pour les équations scalaires
$W_i$	fonctions test

## Lettres calligraphiques

$\mathcal{L}$  opérateur différentiel

## Lettre grecques

$\alpha$	diffusivité, angle d'incidence
$\alpha_0$	coefficient de diffusivité artificielle
$\beta$	paramètre de pondération
$\delta$	opérateur de variation, fonction de taille
$\epsilon$	taux de dissipation d'énergie cinétique de la turbulence
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
$\Gamma_q$	portion de $\partial\Omega$ où des conditions naturelles sont imposées sur l'équation d'énergie
$\Gamma_t$	portion de $\partial\Omega$ où des conditions naturelles sont imposées sur les équations de quantité de mouvement, frontière sur laquelle on impose la condition de tangence
$\lambda$	conductivité thermique
$\lambda_T$	conductivité turbulente
$\mu$	viscosité dynamique
$\mu_T$	viscosité turbulente
$\nu$	viscosité cinématique
$\Pi$	symbole de produit répété
$\omega$	taux de dissipation spécifique d'énergie turbulente
$\rho$	masse volumique
$\xi$	taux de réduction de l'erreur
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes du modèle $k-\epsilon$

$\Sigma$	symbole de sommation
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses, temps caractéristique de la turbulence, coefficient de stabilisation
$\tau_w$	cisaillement à la paroi
$\tau^*$	construction polynomiale locale de $\tau$
$\phi$	fonctions d'interpolation
$\Omega$	domaine de calcul
$\Omega^e$	intérieure de l'élément $e$
$\Omega_s$	sous-domaine pour la projection locale
$\partial\Omega$	frontière du domaine $\Omega$

## Indices

<i>ex</i>	valeur exacte
<i>h</i>	solution par éléments finis
<i>u</i>	champ de vitesse
<i>k</i>	champ d'énergie cinétique de turbulence
$\epsilon$	champ du taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence
$\mu_T$	champ de viscosité turbulente
<i>moy</i>	valeur moyenne
<i>n</i>	valeur en direction normale
<i>p</i>	champ de pression
<i>PG</i>	valeurs aux points de Gauss
<i>T</i>	champ de température, transposée
<i>t</i>	valeur en direction tangentielle
<i>tot</i>	valeur sur le domaine complet
<i>w, p</i>	valeur à la paroi
~	solution projetée dans un espace continu

- valeur nodale d'une solution projetée dans un espace continu,  
valeur moyenne
- + valeur adimensionnelle dans la loi de paroi

## Symboles

$\nabla \cdot$	divergence
$\nabla$	gradient
$\  \cdot \ _{0,\Omega}$	norme associée à l'espace $L^2(\Omega)$
$\  \cdot \ _{E,\Omega}$	norme énergie
$(\cdot, \cdot)_{\Omega}$	produit scalaire dans $L^2(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$	intégrale de bord sur $\Gamma$

## Liste des annexes

Annexe A. Évaluation des matrices élémentaires par différentiation numérique . . . . .	221
Annexe B. Calcul du paramètre de stabilisation $\tau$ et de la taille de l'élément . .	224
Annexe C. La méthode de Lagrangien augmenté pour satisfaire la contrainte d'incompressibilité et la condition de tangence . . . . .	226
Annexe D. Les formulations éléments finis stabilisées dans le cas des équations de transport des variables turbulentes . . . . .	228

# Introduction

Les fondements physiques des phénomènes naturels tels que l'écoulement des fluides, le transfert de chaleur, la déformation des structures et la formulation mathématique qui permet leur modélisation datent de plusieurs dizaines ou même centaines d'années. Les équations qui régissent l'écoulement des fluides visqueux newtoniens ont été déduites sous différentes formes par Navier (1827), Poisson (1831), Saint-Venant (1843) et Stokes (1845) [1]. Bernoulli (1730) a même donné bien auparavant une forme globale des équations de mouvement pour les fluides non-visqueux. Plus tard, Boussinesq (1872) [2] a expliqué le mouvement chaotique des particules qui se déplacent à grande vitesse en présence des faibles forces de friction.

L'écoulement turbulent est un phénomène complexe, non-stationnaire et entièrement tridimensionnel. En 1883 Reynolds [3] étudia expérimentalement les écoulements turbulents à l'intérieur des conduites et proposa de décomposer le mouvement dans une partie moyenne qui est décrite par les valeurs moyennes en temps des variables et une partie fluctuante qui caractérise les fluctuations par rapport à l'écoulement moyen. Les équations qui décrivent le mouvement moyen des particules, qu'on appelle équations de Reynolds [2,4,5], font apparaître des corrélations entre les fluctuations turbulentes. Le système d'équations devient alors non-déterminé car il contient plus d'inconnues que d'équations et des hypothèses supplémentaires doivent être invoquées afin de fermer le système d'équations. Plusieurs techniques de fermeture ont été formulées, telles les modèles de turbulence algébriques, les modèles avec équations de transport ou les modèles de fermeture au second ordre. En ce moment il n'existe pas

un modèle complet, capable donc de prédire les caractéristiques de l'écoulement pour n'importe quelle configuration rencontrée en pratique. Tous les modèles se réduisent à la résolution d'un système d'équations différentielles et éventuellement algébriques et le défi est donc d'obtenir une solution numérique des plus précises à ces équations.

Les questions qui se posent toujours lorsqu'on obtient une solution numérique sont: *La solution numérique est-elle correcte?* Si oui: *Quelle est sa précision?* ou encore *Quel-est l'écart entre la solution numérique et la solution exacte des équations?* Ce sont des questions aux-quelles les numériciens ont dû répondre et qui sont à l'origine de l'apparition des techniques d'estimation d'erreur. Lorsqu'on se propose d'obtenir une solution numérique précise ou encore la plus précise possible pour une ressource informatique donnée, on arrive à la nécessité d'adapter la discrétisation numérique au problème à résoudre. L'ensemble formé par l'estimation d'erreur et la technique de rediscrétisation est appelé méthode adaptative. Le but d'une telle méthode est d'obtenir une solution numérique de précision préétablie. Parmi les premiers travaux sur les méthodes adaptatives on peut noter ceux de Babuska et Rheinboldt [6] et de Zienkiewicz et Zhu [7] qui traitent des problèmes elliptiques.

Dans ce travail on se propose de résoudre dans un contexte adaptatif des écoulements turbulents complexes. La solution du problème est décrite par plusieurs variables telles que la vitesse, la pression ou la température, auxquelles peuvent s'ajouter les variables reliées à la modélisation de la turbulence. L'estimation de l'erreur doit donc refléter le rôle que joue chacune de ces variables sur la précision globale de la solution, afin de piloter correctement le processus adaptatif. Les étapes de résolution, d'estimation d'erreur et d'adaptation seront analysées pour assurer la robustesse et la fiabilité de l'algorithme adaptatif.

La résolution est développée pour une méthode d'éléments finis sur des maillages non-structurés initialement utilisée pour les écoulements laminaires incompressibles

[8,9]. La turbulence est modélisée à l'aide d'un modèle  $k-\epsilon$  à deux équations de transport proposé par Launder et Spalding [10], couplée avec une loi de paroi pour représenter les régions près de parois solides. Pour cette classe de problèmes la méthode de Galerkin classique peut conduire à des solutions entachées d'oscillations. Par conséquent nous ferons appel à des techniques de stabilisation de type SU (Streamline Upwind), SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) et GLS (Galerkin Least Squares) pour contrôler les oscillations.

L'estimation d'erreur est réalisée à l'aide d'une méthode de projection utilisée avec succès pour des écoulements incompressibles avec transfert de chaleur. L'approche, initialement proposée par Zhu et Zienkiewicz [7], utilise un post-traitement des dérivées de la solution par éléments finis pour évaluer les erreurs d'interpolation. Essentiellement, la méthode consiste à approximer les dérivées de la solution exacte à l'aide d'une projection des dérivées éléments finis sur l'espace des fonctions d'interpolation utilisées pour les variables primaires. Une technique de projection globale, déjà utilisée avec succès pour les écoulements laminaires incompressibles, sera employée dans le cas des écoulements turbulents. D'autres méthodes, basées sur des projections locales, seront aussi analysées dans le cas des écoulements d'intérêt. L'erreur calculée par l'estimateur d'erreur est ensuite utilisée pour prédire la distribution de taille du prochain maillage qui devrait produire une solution plus précise. Le nouveau maillage est construit dans le but d'être optimal, c'est à dire qu'il devra minimiser l'erreur globale de la solution pour un nombre de degrés de liberté fixe. On y parvient en imposant que l'erreur soit uniformément distribuée dans tout le domaine et en tenant compte du taux de convergence *a priori* de l'élément.

L'analyse de l'erreur nous permet de poursuivre le processus adaptatif. Elle nous permet aussi de porter un jugement critique tant sur la qualité de la solution que celle du résolveur. Il est évident que pour tirer le meilleur parti de l'algorithme adaptatif il faut non seulement ajuster constamment la discrétisation à la solution, mais il faut en

plus s'assurer que chaque module (résolveur, estimation d'erreur et remaillage) fonctionne à sa pleine capacité. Dans ce sens on va proposer une nouvelle approche de résolution qui fait appel à un changement de variables dépendantes pour les équations modélisant la turbulence. Cette méthode qu'on appelle '**résolution en variables logarithmiques**' apporte des améliorations considérables à la qualité de la solution et confère une robustesse accrue au résolveur et à l'algorithme adaptatif.

La méthodologie est validée sur des problèmes artificiels possédant une solution analytique. De cette façon, la solution numérique et l'estimation d'erreur pourront être comparées à la solution et à l'erreur exactes. Cela nous permet d'évaluer d'une part les performances du résolveur et d'autre part de quantifier la fidélité de l'estimation d'erreur et l'amélioration de la solution due à l'adaptativité. Finalement, l'algorithme adaptatif est appliqué à la résolution de problèmes d'intérêt pratique pour lesquels les prédictions numériques sont comparées à des mesures expérimentales.

# Chapitre 1

## Étude bibliographique critique

### 1.1 La méthode des éléments finis en mécanique des fluides

La méthode des éléments finis est une technique numérique maintenant largement utilisée pour la résolution de problèmes d'élasticité, de mécanique des fluides, d'aérodynamique et d'électricité. Les concepts initiaux de la méthode ont été introduits en 1956 par Turner et al. [13] pour des problèmes de structures. La méthode a été reformulée en 1965 par Zienkiewicz et Holister [14], comme une méthode de résidus pondérés. Depuis 1967 plusieurs livres sur la méthode des éléments finis ont été publiés, on mentionne en particulier ceux de Zienkiewicz [15] et de Oden et Reddy [16]. Pendant les années '70 la méthode a été repensée comme une méthode générale pour résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Son domaine d'applicabilité s'est élargi pour englober aussi les problèmes de la mécanique des fluides, de l'aérodynamique et de la thermodynamique. Les premières applications aux équations de Navier-Stokes sont celles de Oden [17], Baker [18], Taylor et Hood [19].

La première étape dans l'application de la méthode des éléments finis est constituée, comme pour toute autre méthode de résolution numérique, par la

discrétisation du domaine. Le domaine est décomposé en éléments à l'intérieur desquels les variables sont représentées à l'aide des fonctions d'interpolation ou de forme. De cette façon la solution en tout point est déterminée par les valeurs nodales et les fonctions de forme. La méthode des éléments finis considère ensuite la forme intégrale des équations, que l'on obtient en multipliant les équations différentielles par des fonctions test et en intégrant sur le domaine de calcul. Les équations sont construites pour chaque élément et assemblées dans le système global.

Pour illustrer l'application de la méthode considérons l'équation suivante:

$$\mathcal{L}(u) = f \quad (1.1)$$

où  $u$  est la variable à déterminer,  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel et  $f$  une fonction donnée, qui dépend de la position à l'intérieur du domaine.

Le problème discret considère  $u$  comme étant représentée par:

$$u = \sum_{j=1}^{N_p} u_j N_j \quad (1.2)$$

où  $N_p$  est le nombre de points utilisés dans la discrétisation,  $u_j$  sont les valeurs de  $u$  à ces points, et  $N_j$  les fonctions d'interpolation associées aux noeuds. On voit que la solution est entièrement définie par ses valeurs nodales et par les fonctions d'interpolation. Pourtant le choix de la décomposition du domaine en éléments et des fonctions de forme est arbitraire. Par conséquent la solution numérique n'est pas unique, contrairement à la solution exacte de l'équation qui elle est unique. L'équation différentielle (1.1) s'écrit maintenant sous la forme suivante:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{N_p} u_j N_j\right) = f \quad (1.3)$$

et elle a comme inconnues les valeurs nodales  $u_j$  de la variable  $u$  à déterminer.

Un point qui différencie la méthode des éléments finis des autres techniques de résolution numérique réside dans la façon dont on impose que l'équation (1.3) soit

satisfaite. Premièrement on peut noter, en général, que l'équation ne peut pas être vérifiée en tout point car on dispose d'un nombre fini d'inconnues. On choisit alors de multiplier l'équation par des fonctions test  $W_i$  et de les intégrer sur le domaine de calcul. Pour que le problème soit bien posé il faut que le nombre de fonctions test soit égal au nombre d'inconnues. On choisit alors une fonction test pour chaque noeud et on obtient le système algébrique suivant:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left( \sum_{j=1}^{N_p} u_j N_j \right) W_i d\Omega = \int_{\Omega} f W_i d\Omega \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N_p \quad (1.4)$$

Le choix des fonctions test conduit à la méthode de Galerkin (ou Bubnov-Galerkin) lorsqu'elles sont identiques aux fonctions de forme, ou à celle de Petrov-Galerkin si elles diffèrent de celles-ci.

Pour simplifier cette illustration considérons que l'opérateur  $\mathcal{L}$  est linéaire. L'équation (1.4) peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\sum_{j=1}^{N_p} \left[ \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j) W_i d\Omega \right] u_j = \int_{\Omega} f W_i d\Omega \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N_p \quad (1.5)$$

Sous forme matricielle cela revient au système

$$A_{ij} u_j = b_i \quad (1.6)$$

où les coefficients  $A_{ij}$  et  $b_i$  sont donnés par:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \mathcal{L}(N_j) W_i d\Omega \quad (1.7)$$

$$b_i = \int_{\Omega} f W_i d\Omega$$

Les intégrales sont ensuite écrites comme une somme d'intégrales sur tous les éléments. Une fois les intégrales élémentaires calculées, les termes obtenus sont assemblés dans le système global. La résolution du système permettra ensuite de déterminer les inconnues nodales  $u_j$ .

À ce point-ci regardons brièvement quelles sont les sources d'erreur propres à

cette méthode de calcul. Premièrement, on remarque que la solution exacte possède un nombre infini de degrés de liberté, tandis que la solution discrète n'est représentée que par un nombre fini de degrés de liberté. Une première approximation est donc introduite par la représentation discrète de la solution. C'est l'erreur de discrétisation. Elle dépend de la décomposition du domaine en éléments et aussi du choix des fonctions d'interpolation. *A priori* plus le nombre de points (ou d'éléments) est grand et plus les fonctions de forme sont riches, plus la solution est précise. De plus, certaines discrétisations conduisent à des solutions plus précises que d'autres car elles peuvent être mieux adaptées aux particularités du problème à résoudre. D'autre part, l'équation discrète (1.3) n'est pas vérifiée en tout point par la solution numérique, elle est plutôt satisfaite dans un sens moyen ou pondéré dépendant du choix des fonctions test.

## 1.2 Modélisation de la turbulence

### 1.2.1 Considérations générales

Dans la plupart des applications industrielles d'intérêt, l'écoulement des fluides est turbulent. Même les phénomènes physiques les plus simples, comme le vent ou l'écoulement de l'eau dans une rivière, sont des écoulements turbulents.

À ce point-ci, il est universellement accepté que les équations de Navier-Stokes 3-D en régime transitoire modélisent correctement l'écoulement laminaire et turbulent des fluides. Cependant, pour les écoulements turbulents, l'échelle de longueur qui caractérise les phénomènes de création et de dissipation turbulente est plusieurs ordres de grandeur plus petite que la dimension caractéristique du problème. Par conséquent, un maillage suffisamment fin, pour représenter les petites échelles des écoulements turbulents aurait un nombre prohibitif de points même pour les applications les plus simples. En pratique, pour décrire de tels écoulements, au lieu d'utiliser les variables

instantanées, on utilise les variables moyennes [2,4]. Dans ce sens, une approche statistique est utilisée pour décomposer la vitesse, la pression et toute variable scalaire dans une partie moyenne et une partie fluctuante [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $\bar{x}$  dénote une valeur moyenne et  $x'$  dénote la fluctuation par rapport à la valeur moyenne. Ceci conduit aux équations moyennes de Reynolds modélisant l'écoulement moyen:

Équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1.9)$$

Équation de mouvement

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \tau_{ij} + \nabla \cdot R_{ij} \quad (1.10)$$

Équation d'énergie

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c_p (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{T} = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{p} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{q}_T + \dot{q}_s \quad (1.11)$$

Ici  $\tau_{ij}$  représente le tenseur de contraintes

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.12)$$

$R_{ij}$  est le tenseur de Reynolds, donné par

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (1.13)$$

$\mathbf{q}$  est le flux de chaleur  $\mathbf{q} = k \nabla T$ , et  $\mathbf{q}_T$  est un flux de chaleur dû à la dissipation turbulente  $\mathbf{q}_T = -\rho c_p \overline{u'_i T'}$ .

On voit que dans ces équations, à part les valeurs moyennes, on a aussi comme

inconnues des corrélations entre les fluctuations turbulentes  $\overline{u_i' u_j'}$  et  $\overline{u_i' T'}$ . Écrire les équations de transport pour ces variables additionnelles, engendre l'apparition de nouvelles inconnues de plus en plus difficiles à interpréter. On est en présence d'un problème de fermeture car on a plus d'inconnues que d'équations. Les modèles de turbulence se proposent de décrire le tenseur de Reynolds afin de fermer le système d'équations.

## 1.2.2 Modèles de turbulence

Une première approche date de 1877 et est due à Boussinesq [2] qui a proposé pour le tenseur de Reynolds la même forme que celle du tenseur de contraintes:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_T (\nabla u + \nabla u^T) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (1.14)$$

Il suppose donc que les contraintes turbulentes sont proportionnelles aux vitesses de déformation et introduit la notion de viscosité turbulente,  $\mu_T$ , et d'énergie cinétique de la turbulence  $k$ . L'énergie cinétique de la turbulence est définie comme la moitié de la trace du tenseur de corrélations turbulentes,  $\overline{u_i' u_j'}$ :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (1.15)$$

La viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais plutôt une variable qui dépend de l'écoulement, du niveau de turbulence et qui varie à l'intérieur de l'écoulement. La plupart des modèles de turbulence sont construits avec l'hypothèse de Boussinesq comme point de départ et se proposent de modéliser la viscosité turbulente.

En général les modèles de turbulence sont classifiés d'après le nombre d'équations différentielles à résoudre en plus des équations de l'écoulement moyen. On retrouve alors des modèles algébriques ou à zéro-équation, à une équation, deux-équations et des modèles du second ordre. Les trois premières classes de modèles se

basent souvent sur l'hypothèse de Boussinesq pour modéliser le tenseur de Reynolds.

Les modèles à zéro-équation n'utilisent aucune équation différentielle additionnelle pour représenter les effets reliés à la turbulence. Ils utilisent plutôt des relations algébriques pour définir le tenseur de Reynolds. Un premier modèle de ce type a été proposé en 1925 par Prandtl [21] qui introduisit la notion de longueur de mélange. Initialement la longueur de mélange était une grandeur fixée. Elle était déterminée pour différentes classes de problèmes à partir de données expérimentales. Van Driest [22] construisit des fonctions d'amortissement pour ajuster la longueur de mélange près de parois solides afin de mieux approcher le comportement asymptotique des variables dans ces régions. Parmi les modèles à zéro-équation plus récents on peut noter celui de Cebeci et Smith [23] pour la couche limite turbulente et de Baldwin et Lomax [24] pour les équations de Navier-Stokes.

La plupart des modèles à une équation utilisent l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence comme équation différentielle additionnelle, couplée avec une hypothèse supplémentaire pour déterminer l'échelle de longueur de la turbulence. Un premier modèle à une équation, proposé par Prandtl [25] en 1945 suppose que la longueur de mélange est déterminée a priori. On peut noter aussi dans cette classe les modèles de Bradshaw, Ferris et Atwell [26], de Baldwin et Barth [27] et de Spalart et Allmaras [28]. Ces deux derniers utilisent la viscosité turbulente comme variable dépendante en développant des équations de transport pour le nombre de Reynolds associé à la viscosité turbulente.

Les modèles à deux équations utilisent, pour évaluer la viscosité turbulente, l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ , et une deuxième équation de transport qui sert à déterminer l'échelle de longueur de la turbulence. Kolmogorov [29] proposa en 1942 un premier modèle de ce type qui utilise les équations pour  $k$  et  $\omega$ , où  $\omega$  est le taux de dissipation spécifique d'énergie turbulente:

$$\omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k} \quad (1.16)$$

où  $C_\mu$  est une constante et  $\epsilon$  est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence défini par:

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \quad (1.17)$$

Alors la viscosité turbulente est donnée par

$$\mu_T = \rho \frac{k}{\omega} \quad (1.18)$$

et l'échelle de longueur par

$$l \sim \frac{k^{1/2}}{\omega} \quad (1.19)$$

On peut remarquer que  $\omega$  a les unités d'une fréquence et on l'appelle aussi fréquence turbulente. Le modèle  $k-\omega$  a été ensuite développé par Saffman [30] et Wilcox [31].

Chou [32] a utilisé pour la première fois l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence. Le modèle  $k-\epsilon$  a été ensuite développé et modifié par Harlow et Nakayama [33] et par Launder et Spalding [34]. L'échelle de longueur dans ce cas est définie par

$$l \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (1.20)$$

et la viscosité turbulente dépend de  $k$  et  $\epsilon$  par:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1.21)$$

Un autre modèle à deux équations, qui utilise cette fois l'équation de transport pour le temps caractéristique de la turbulence  $\tau$ , a été introduit par Zeierman et Wolfshtein [35] et modifié par Speziale et al. [36]. On définit  $\tau$  par:

$$\tau = \frac{k}{\epsilon} = \frac{1}{C_\mu \omega} \quad (1.22)$$

et alors on a :

$$\mu_T = \rho k \tau \quad (1.23)$$

$$l \sim k^{1/2} \tau \quad (1.24)$$

Les modèles de turbulence du second ordre utilisent des équations de transport additionnelles pour évaluer les composantes du tenseur de Reynolds. Parmi ces modèles on peut noter ceux de Rotta [37], de Launder et al. [38], Speziale [39], et Reynolds [40]. Le développement des équations de transport pour les composantes du tenseur de Reynolds permet d'incorporer certains effets, comme ceux dus à la courbure des lignes de courant ou ceux causés par les forces d'Archimède, qui sont difficiles à incorporer dans les modèles plus simples. Une revue des modèles de turbulence au second ordre et de leurs applications est présentée par Launder [41].

### 1.2.3 Le modèle $k$ - $\epsilon$

Les modèles à deux équations se différencient par le choix de la variable utilisée pour définir l'échelle de longueur et par la présence des certains termes sources spécifiques. On présente ici le modèle  $k$ - $\epsilon$ , tel que décrit par Launder et Spalding [10], qui est le plus utilisé.

La viscosité turbulente est définie en fonction de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ , et de son taux de dissipation  $\epsilon$ , par :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1.25)$$

Les équations de transport pour  $k$  et  $\epsilon$  sont :

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)k = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \quad (1.26)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\epsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_T P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1.27)$$

où  $P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ .

Les constantes proposées par Launder et Spalding [10] sont données dans le tableau suivant:

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Dans ce modèle, le comportement du taux de dissipation  $\epsilon$  n'est pas valide près d'une paroi. Le modèle est souvent appelé modèle  $k-\epsilon$  pour les grands nombres de Reynolds, car il ne représente pas correctement l'écoulement à proximité d'une paroi solide. Plusieurs corrections ont été proposées pour corriger ce défaut et consistent à introduire des fonctions additionnelles d'amortissement dont le rôle est de produire le bon comportement près de la paroi. Les différentes versions du modèle  $k-\epsilon$  à bas nombre de Reynolds sont passées en revue et évaluées par Patel et al.[42] et par Miner et al.[43].

## 1.2.4 Loi de paroi

Pour palier aux inconvénients générés par le fait que le modèle  $k-\epsilon$  standard n'est pas valide pour les écoulements à bas nombre de Reynolds, on utilise près des parois des fonctions qui représentent correctement le comportement des variables dans ces régions.

Launder et Spalding [10] ont proposé une loi de paroi qui comporte deux régions définies comme suit:

$$\begin{cases} u^* = y^* & \text{si } y^* < y_c^* \\ u^* = \frac{1}{K} \ln(Ey^*) & \text{si } y^* \geq y_c^* \end{cases} \quad (1.28)$$

Dans la première région, appelée sous-couche visqueuse, la viscosité turbulente est négligeable par rapport à celle du fluide. La deuxième région est appelée zone logarithmique et est caractérisée par un cisaillement constant. Ici  $K$  est la constante de Kármán ( $K=0.42$ ),  $E$  est un paramètre de rugosité et  $y_c^*$  est une valeur déterminée de façon à assurer la continuité du profil de vitesse défini par les deux expressions (1.28). Elle est donc déterminée par l'équation:

$$y_c^* = \frac{1}{K} \ln(Ey_c^*) \quad (1.29)$$

Les variables adimensionnelles  $y^*$  et  $u^*$  sont définies par:

$$y^* = \frac{y \rho u_\tau}{\mu}, \quad u^* = \frac{u}{u_\tau} \quad (1.30)$$

où la vitesse de frottement  $u_\tau$  dépend du cisaillement à la paroi  $\tau_w$ , par:

$$u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad (1.31)$$

L'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation sont reliés à la vitesse de frottement par:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{Ky} \quad (1.32)$$

Speziale propose une loi de paroi à trois couches donnée par:

$$\begin{cases} u^* = y^* & \text{si } y^* \leq 5 \\ u^* = -3.05 + 5 \ln y^* & \text{si } 5 < y^* < 30 \\ u^* = 5.5 + 2.5 \ln y^* & \text{si } 30 \leq y^* \end{cases} \quad (1.33)$$

où les constantes sont calibrées pour une paroi lisse.

Reichardt propose une loi de paroi constituée par une seule fonction qui décrit le comportement dans la sous-couche visqueuse et dans la zone logarithmique:

$$u^* = 2.5 \ln(1 + 0.4y^*) + 7.8 \left[ 1 - e^{-y^*/11} - \frac{y^*}{11} e^{-0.33y^*} \right] \quad (1.34)$$

Cette loi de paroi est utilisée dans les logiciels FIDAP [44] et N3S [45].

D'autres approches utilisent l'équation de transport pour  $k$  couplée à un modèle de longueur de mélange pour déterminer la viscosité turbulente près de paroi [46].

## 1.3 Méthodes adaptatives pour les écoulements visqueux

### 1.3.1 Considérations générales

Au cours des dernières années l'application des méthodes adaptatives a montré leur efficacité et utilité sur des problèmes des plus divers et complexes. La résolution numérique des équations différentielles nécessite leur discrétisation sur un maillage représentant le domaine de calcul. Il est évident que la distribution des points du maillage déterminera la précision de la solution numérique. Le maillage devrait être plus fin là où la solution comporte des variations rapides. Par contre, de gros éléments peuvent être utilisés dans les régions où la solution varie peu. Dans la plus part des applications il est très difficile de déterminer à l'avance les zones où les éléments doivent être concentrés et il est pratiquement impossible d'engendrer directement un maillage qui soit optimal. Les méthodes adaptatives permettent d'atteindre cet objectif, c'est à dire de produire un maillage sur lequel l'erreur est quasi-uniformément distribuée. Un algorithme adaptatif cherche aussi à produire la meilleure solution pour une capacité de calcul donnée. Finalement, l'estimation de l'erreur permet d'évaluer en tout temps la qualité de la solution obtenue. À ces avantages on peut ajouter que, lors

du processus adaptatif, la discrétisation du domaine se fait automatiquement, l'effort de l'utilisateur s'en trouve donc réduit d'autant.

Les principales étapes qui composent l'algorithme d'une méthode adaptative sont la génération du maillage, la résolution, l'estimation de l'erreur et l'étape d'optimisation du maillage. On s'attend à ce que l'estimateur d'erreur soit aussi général que le résolveur. Il doit être précis et capable de fournir toutes les informations dont le module d'adaptativité a besoin. L'erreur estimée doit être une bonne indication de l'erreur exacte sur des maillages grossiers et elle doit converger vers celle-ci avec le raffinement du maillage.

L'optimisation du maillage consiste dans la prédiction des caractéristiques de la discrétisation optimale basée sur l'estimation de l'erreur. Dans cette étape la discrétisation est améliorée en ajustant les valeurs des certains paramètres, comme la taille  $h$  du maillage, ou le degré  $p$  des fonctions d'interpolation. On distingue alors des méthodes adaptatives de type  $h$ , qui sont basées sur des techniques de raffinement ou de remaillage [47], des méthodes  $r$  qui procèdent à une relocalisation des noeuds du maillage existant [48], et des méthodes  $p$  basées sur l'enrichissement de l'espace des fonctions de base [49]. Enfin on peut avoir des méthodes combinées dans lesquelles les techniques précédentes sont utilisées ensemble.

### 1.3.2 Techniques d'estimation d'erreur

L'estimation d'erreur est une étape indispensable dans un algorithme adaptatif car c'est elle qui détermine les caractéristiques du nouveau maillage qui devrait améliorer la précision des calculs. Les techniques d'estimation d'erreur sont en général basées sur une reconstruction de la solution ou de ses dérivées, qu'on dénotent par  $U$ . En suivant les suggestions de Babuska et Rodriguez [50] on sépare les différentes méthodes de

construction de  $U$ , dans les classes suivantes:

- techniques de construction globale;
- techniques de construction locale;
- techniques de construction semi-locale.

D'autre part on distingue des constructions générales de  $U$  basées seulement sur les informations fournies par la solution, et des constructions de  $U$  qui utilisent en plus des informations tirées de l'équation différentielle à résoudre.

Hétu [8] a passé en revue plusieurs techniques d'estimation de l'erreur *a posteriori*: les méthodes d'interpolation, de post-traitement par projection, de résolution de problèmes locaux, de résidus élémentaires et d'approximation interne-externe. Les méthodes d'interpolation sont basées sur l'évaluation des termes d'ordre supérieur qui ont été négligés par les fonctions de base. On note ici les formules d'extraction développées par Babuska [51] qui permettent le calcul des dérivées secondes. La méthode de projection a été introduite par Zienkiewicz et Zhu [7] et consiste dans une projection au sens de moindres carrés des composantes du tenseur des contraintes. La différence entre la solution projetée et la solution par éléments finis est alors utilisée pour évaluer les erreurs. Dans les méthodes de résolution de problèmes locaux la solution exacte est écrite comme la somme de la solution éléments finis et de son erreur. Cela permet d'obtenir un problème variationnel sur chaque élément, dont les inconnues sont les erreurs d'approximation [11,12]. La méthode a donné de bons résultats dans le cas des écoulements laminaires incompressibles, et a été validée sur des problèmes possédant une solution analytique [52-56]. Pourtant, son comportement a été décevant dans le cas des écoulements dominés par la convection [57]. Les méthodes de résidus élémentaires sont une classe d'estimateurs apparue dans le développement des bornes pour l'estimateur par résolution de problèmes locaux. Ces estimateurs cherchent à évaluer l'erreur en calculant une borne supérieure du résidu dans chaque élément [11].

Pour plus de détails voir la référence [8].

À la lumière des conclusions tirées dans [8] et [57], seulement les méthodes de projection aux sens de moindres carrés ont retenu notre attention.

### 1.3.3 Estimation d'erreur par projection moindres carrés

Cette méthode consiste en un post-traitement des composantes du tenseur des contraintes visqueuses. La solution éléments finis est caractérisée par un champ continu de vitesse, mais par un champ discontinu des dérivées. Les composantes du tenseur de contraintes visqueuses seront donc discontinues aux interfaces entre les éléments. Toutefois, la solution exacte, étant une solution du problème fort, sera caractérisée par des valeurs continues des contraintes visqueuses. Une possibilité pour évaluer l'erreur est de comparer le champ de flux discontinu avec un champ continu qui approxime le flux exact.

Zienkiewicz et Zhu [7] ont initialement proposé d'obtenir les flux continus à l'aide d'une projection globale, au sens des moindres carrés, des flux brut dans l'espace d'éléments finis employé pour calculer la solution:

$$\bar{\tau} = \sum_{n=1}^{N_p} \phi_n \{\bar{\tau}\}_n \quad (1.35)$$

où  $N_p$  est le nombre de degrés de liberté par élément,  $\phi_n$  sont les fonctions de base,  $\bar{\tau}$  dénote une solution continue et  $\{\bar{\tau}\}_n$  dénote les valeurs nodales de la projection par moindres carrés. La méthode revient à minimiser l'intégrale

$$\int_{\Omega} (\tau_h - \bar{\tau})^2 d\Omega \quad (1.36)$$

pour chaque composante du tenseur de contraintes. On obtient alors le problème variationnel suivant

$$\sum_{K \in T} \left\{ \int_K \phi_m (\tau_h - \bar{\tau}) d\Omega \right\} = 0 \quad (1.37)$$

qui conduit aux système d'équations

$$\left[ \sum_{K \in T} \int_K \phi_m \phi_n d\Omega \right] \{\bar{\tau}\}_n = \left\{ \sum_{K \in T} \int_K \phi_m \tau_h d\Omega \right\} \quad (1.38)$$

Des analyses de l'estimateur par projection globale (ZZ-global) sont dues à Ainsworth et al. [58], et à Zienkiewicz et al. [59]. La méthode a été appliquée aux écoulements incompressibles et validée sur des problèmes qui possèdent des solutions analytiques par le groupe de Polytechnique [52-56]. Les résultats obtenus ont montré que même si l'estimateur n'est pas rigoureux, il produit des bonnes estimations de l'erreur. Strouboulis et Haque [60] ont fait remarquer le comportement décevant de la méthode pour des solutions particulières de l'équation de Poisson et des fonctions de base de degré pair.

Des méthodes améliorées pour la récupération des dérivées, basées sur des projections locales sur des sous-domaines ou groupes d'éléments, ont été proposées par Zienkiewicz et Zhu [61, 62]. Dans ce cas, les valeurs nodales des champs continus sont déterminées à l'aide de constructions polynomiales sur les éléments entourant chaque noeud:

$$\tau^* = P a \quad (1.39)$$

Pour des polynômes de degré deux on a:

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (1.40)$$

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \quad (1.41)$$

Pour la méthode de projection locale [61], qu'on dénote ZZ-local, les coefficients  $a_i$  sont obtenus pour chaque composante du tenseur de contraintes en minimisant l'intégrale suivante définie sur le groupe des éléments connectés au noeud:

$$\int_{\Omega_s} (\tau_h - \tau^*)^2 d\Omega_s \quad (1.42)$$

On obtient alors le système suivant:

$$\left[ \int_{\Omega_s} P^T P d\Omega_s \right] \{a\} = \left[ \int_{\Omega_s} P^T \tau_h d\Omega_s \right] \quad (1.43)$$

Ici  $\Omega_s$  représente le groupe d'éléments défini comme l'ensemble des éléments qui contiennent le noeud considéré. Une fois déterminées les valeurs nodales des contraintes,  $\{\bar{\tau}\}_n$ , les champs continus sont construits comme pour la projection globale, c'est à dire en interpolant  $\{\bar{\tau}\}_n$  sur chaque élément en utilisant les fonctions d'interpolation du champs de vitesses.

Une autre méthode de projection locale est la méthode de récupération locale superconvergente. Zienkiewicz et Zhu [61,62] ont suggéré d'utiliser la propriété de superconvergence des dérivées évaluées en certains points, appelés points optimaux, pour améliorer l'estimation d'erreur. Cette méthode, qu'on dénote ZZ-SPR (ZZ - Superconvergent Patch Recovery method) revient à une méthode de projection locale, comme celle décrite précédemment, dans laquelle l'intégrale à minimiser est remplacée par une forme discrète, utilisant uniquement les valeurs des dérivées aux points optimaux. Le choix de points optimaux reste une question ouverte, car leur existence est démontrée seulement pour certains éléments et des maillages bien particuliers [61,63]. Pour les éléments quadratiques, Zienkiewicz et Zhu ont trouvé que les points situés au milieu des côtés semblent optimaux. Pour une équation de Poisson, des essais numériques ont montré que les valeurs récupérées pour les dérivées nodales sont superconvergentes dans le cas des éléments linéaires et cubiques et qu'elles ont une convergence de l'ordre  $O(h^4)$  (ultraconvergence) pour les éléments quadratiques [61].

La minimisation de

$$\sum_{i=1}^{N_s} [\tau_h(x_i, y_i) - \tau^*(x_i, y_i)]^2 \quad (1.44)$$

où  $N_s$  est le nombre des points optimaux dans un groupe d'éléments, conduit au système

suivant

$$\left[ \sum_{i=1}^{N_s} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \right] \{a\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} P^T(x_i, y_i) \tau_h \right\} \quad (1.45)$$

En résolvant ce système on obtient les coefficients  $a_i$  du développement polynomial de  $\tau^*$ . Finalement, les contraintes continues sont construites comme pour l'estimateur par projection locale.

Des modifications à la méthode de récupération locale des dérivées ont été proposées par Wiberg et Abdulwahab [64] qui ont suggéré d'introduire dans la projection moindres carrés des termes provenant de la minimisation du carré du résidu de l'équation différentielle que l'on cherche à résoudre. Dans ce cas les coefficients  $a_i$  seront déterminés par moindre carré de la somme du résidu des flux et du résidu de l'équation différentielle. La fonctionnelle à minimiser est donc

$$\Pi(a) = R^T R + \int_{\Omega_s} \beta R_{eq}^T R_{eq} d\Omega_s \quad (1.46)$$

où  $R = \tau_h - \tau^*$  est le résidu des flux,  $R_{eq}$  est le résidu de l'équation différentielle et  $\beta$  un paramètre de pondération. La méthode donne de très bons résultats, qui s'améliorent lorsque des polynômes de degré supérieur sont utilisés dans la construction locale de  $\tau^*$ . Pourtant, dans la littérature on retrouve peu d'applications des techniques d'estimation d'erreur par projection locale dans le cas équations de Navier-Stokes, et encore moins pour les équations de transport avec propriétés variables et termes sources.

## Chapitre 2

### Modélisation du problème

Dans ce travail on se propose d'employer une méthode d'éléments finis adaptative pour résoudre les écoulements turbulents. La turbulence est modélisée à l'aide du modèle  $k-\epsilon$  pour grands nombres de Reynolds avec une loi de paroi à deux zones. Dans ce chapitre on présente brièvement les équations du modèle  $k-\epsilon$  ainsi que la loi de paroi utilisée.

#### 2.1 Équations différentielles

Les équations moyennes de Reynolds, qui modélisent les écoulements stationnaires de fluides visqueux incompressibles en régime turbulent avec l'hypothèse de Boussinesq, s'écrivent

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_T)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)] + \rho\mathbf{f} \\ \rho c_p(\mathbf{u} \cdot \nabla)T &= \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_T)\nabla T] + \rho q_s \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $p$  est la pression,  $T$  est la température,  $\mathbf{f}$  représente une force volumique et  $q_s$  une source de chaleur. La viscosité turbulente,  $\mu_T$ , et la conductivité turbulente,  $\lambda_T$ , sont calculées à l'aide du modèle  $k-\epsilon$  proposé par Launder et Spalding [10]:

$$\begin{aligned}\mu_T &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \\ \lambda_T &= \frac{C_p \mu_T}{Pr_T}\end{aligned}\quad (2.2)$$

où  $Pr_T$  est le nombre de Prandtl turbulent (pour la plupart des applications  $Pr_T=1$ ). Le système est complété par les équations de transport de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ , et de son taux de dissipation  $\epsilon$  [10]:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)k = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \quad (2.3)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\epsilon = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_T P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.4)$$

où  $P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ .

Les constantes utilisées sont celles suggérées par Launder et Spalding [10] (voir le chapitre 1.2.3).

## 2.2 Conditions aux frontières

Le modèle  $k-\epsilon$  à grands nombres de Reynolds tel qu'on utilise ici n'est pas valide dans les régions près de parois solides, là où les effets dues à la viscosité du fluide sont importantes. Même si des corrections ont été apportées au modèle afin d'améliorer son comportement dans ces régions, l'intégration des équations différentielles jusqu'à la paroi nécessite un très grand nombre de points. D'autre part il est bien connu que, dans de nombreux cas, la loi logarithmique représente une bonne approximation du profil de vitesses près de paroi. On peut donc en tirer profit en utilisant une loi de paroi plutôt que de faire appel à une résolution très couteuse sur le domaine complet. L'approche consiste à considérer une frontière fictive déplacée à une

distance  $d$  par rapport à la paroi solide, comme illustré dans la figure 2.1. La région contenue entre la frontière fictive et la paroi solide n'est pas discrétisée, la solution dans cette région étant donnée par la loi de paroi.

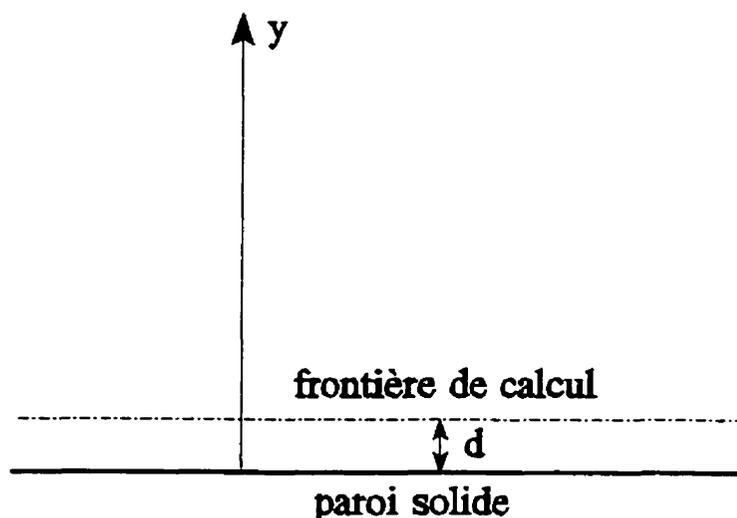


Figure 2.1 Configuration de calcul avec loi de paroi

On se propose d'utiliser la loi de paroi à deux couches de Launder et Spalding [10]:

$$\begin{cases} u^* = y^* & \text{si } y^* < y_c^* \\ u^* = \frac{1}{K} \ln(Ey^*) & \text{si } y^* \geq y_c^* \end{cases} \quad (2.5)$$

Ici  $K$  est la constante de Kármán ( $K=0.42$ ),  $E$  est un paramètre de rugosité ( $E=9$  pour une paroi lisse), et  $y^*$ ,  $u^*$  sont des variables adimensionnelles définies par:

$$y^* = \frac{y\rho u_\tau}{\mu}, \quad u^* = \frac{u}{u_\tau} \quad (2.6)$$

avec  $y$  la distance par rapport à la paroi et  $u_\tau$  la vitesse de frottement  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ .

Pour que le profil de vitesses soit continu la valeur  $y_c^*$  doit satisfaire la relation:

$$y_c^+ = \frac{1}{K} \ln(Ey_c^+) \quad (2.7)$$

La loi de Launder et Spalding est illustrée dans la figure 2.2.

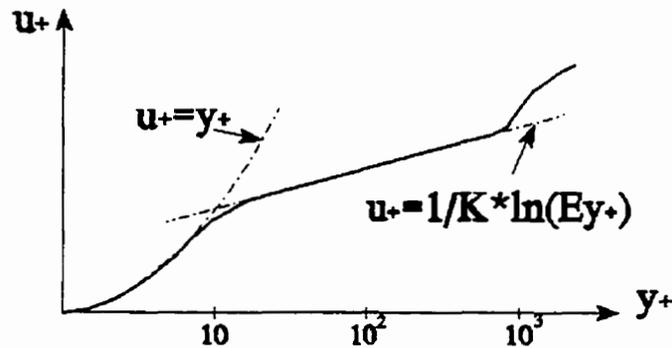


Figure 2.2 La loi de paroi de Launder et Spalding

Du point de vue pratique, la loi de paroi fournit une relation entre la vitesse tangentielle à une distance  $y$  de la paroi et le cisaillement  $\tau_w$  au même endroit. On utilise alors cette relation pour imposer le cisaillement  $\tau_w$  sur la frontière fictive, ce qui revient à une condition de Neumann non-linéaire. De plus, comme le domaine de calcul ne va pas jusqu'à la paroi solide et que la vitesse n'est pas nulle sur ces frontières, on doit s'assurer que sa direction reste tangente à la frontière.

Finalement, l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation sont reliés à la vitesse de frottement par:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad , \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{Ky} \quad (2.8)$$

## Chapitre 3

# Formulation et techniques de résolution

### 3.1 Les équations modifiées

Le système à résoudre est composé des équations de mouvement et de continuité, des équations de transport de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et de son taux de dissipation  $\epsilon$ , de la loi de comportement de la viscosité turbulente et possiblement de l'équation d'énergie. La viscosité turbulente dépend de  $k$  et  $\epsilon$  et elle intervient dans toutes les équations. Les équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$  comportent plusieurs termes source qui dépendent de la vitesse  $u$ , de la viscosité turbulente  $\mu_T$ , de même que de  $k$  et  $\epsilon$ . Une résolution directe et couplée de toutes ces équations nécessiterait alors beaucoup de ressources de calcul. De plus, les équations sont très non-linéaires et une résolution directe devient d'autant plus difficile.

On va chercher donc à construire un algorithme itératif de calcul qui résout successivement les équations différentielles du problème. Pour cela on procède à la réécriture de certains termes des équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$ . En utilisant la définition de la viscosité turbulente, le terme  $-\rho\epsilon$  de (2.3) se réécrit:

$$-\rho\epsilon = \rho^2 \frac{C_\mu}{\mu} k^2 \quad (3.1)$$

Le terme de production de l'équation d'  $\epsilon$  devient:

$$C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_T P(\mathbf{u}) = \rho C_1 C_\mu k^2 P(\mathbf{u}) \quad (3.2)$$

On obtient alors une structure bloc triangulaire inférieur pour le système d'équations:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)k = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \quad (3.3)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\epsilon = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.4)$$

L'algorithme itératif utilisé résout séparément les équations (2.1), (3.3) et (3.4) comme suit:

1. donner des conditions initiales  $u_o$ ,  $T_o$ ,  $k_o$  et  $\epsilon_o$ .
2. évaluer  $\mu_T$  et  $\lambda_T$  en fonction de  $k$  et  $\epsilon$
3. pour  $\mu_T$  et  $\lambda_T$  données:
  - 3.1. résoudre les équations de mouvement, de continuité et d'énergie
  - 3.2. résoudre l'équation de  $k$
  - 3.3. résoudre l'équation d'  $\epsilon$
  - 3.4. mise à jour de  $\mu_T$  et de  $\lambda_T$  et aller à 3.

De plus, la convergence globale de l'algorithme est grandement accélérée par l'introduction d'une boucle de sous-itération sur les variables de turbulence. Cela revient à répéter les étapes 3.2 à 3.4 un certain nombre de fois ( $\sim 3$ ) avant de revenir à l'étape 3.1.

Dans cette approche l'étape 3.1 revient à résoudre les équations de Navier-Stokes à propriétés variables. La conservation de la masse est imposée par un algorithme de Lagrangien augmenté [65] ou bien par une méthode mixte vitesse-pression. Les matrices élémentaires sont construites par différentiation numérique, telle que décrite dans l'annexe A.

## 3.2 Formulation variationnelle

La forme variationnelle des équations est obtenue en multipliant les équations différentielles par des fonctions test et en les intégrant sur le domaine de calcul. La forme faible de Galerkin correspondante est la suivante:

- équations de mouvement, d'énergie et de continuité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} f \mathbf{v} d\Omega + \langle t^*, \mathbf{v} \rangle \\ \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T w d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_T) \nabla T \cdot \nabla w d\Omega &= \langle q_w, w \rangle \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \\ \langle t^*, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_t} [2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - p \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\partial\Omega \cap \Gamma_t} \tau_w \cdot \mathbf{v} d\Gamma \\ \langle q_w, w \rangle &= \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_q} (\lambda + \lambda_T) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} w d\Gamma + \int_{\partial\Omega \cap \Gamma_q} q_w w d\Gamma \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ici  $\mathbf{v}$ ,  $q$  et  $w$  représentent les fonctions test des équations de mouvement, de continuité et d'énergie,  $\partial\Omega \setminus \Gamma_t$ ,  $\partial\Omega \setminus \Gamma_q$  dénotent une frontière libre ou une sortie et  $\partial\Omega \cap \Gamma_t$ ,  $\partial\Omega \cap \Gamma_q$  représentent la portion de la frontière où la loi de paroi est imposée.

- énergie cinétique de la turbulence (étape 3.2)

$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} w] d\Omega = \int_{\Omega} \mu_T P(\mathbf{u}) w d\Omega \quad (3.7)$$

- dissipation turbulente (étape 3.3)

$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w] d\Omega = \int_{\Omega} \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) w d\Omega \quad (3.8)$$

Les équations sont résolues en variables primitives. La discrétisation est réalisée à l'aide de l'élément de Crouzeix-Raviart  $P_2^* - P_1$ . Les vitesses sont représentées par un polynôme quadratique enrichi d'une bulle, alors que la pression est linéaire par élément et discontinue au travers des faces d'un élément. Les variables scalaires ( $T$ ,  $k$  et  $\epsilon$ ) sont discrétisées par des fonctions quadratiques. La viscosité et la conductivité turbulentes sont évaluées en tout point à partir de  $k$  et  $\epsilon$  et de l'équation (2.2).

### 3.3 Les enjeux numériques

Cette section sera réservée à des techniques numériques nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme de résolution. On présente dans ce sens les modalités d'imposer les conditions aux frontières sur les parois solides, les méthodes de stabilisation numérique, ainsi que les techniques employées pour préserver la positivité des variables de turbulence.

#### 3.3.1 Méthodes d'éléments finis stabilisées

Pour les problèmes dans lesquels le terme de convection est dominant, les formulations de Galerkin, (qui utilisent des fonctions test identiques à celles d'interpolation), conduisent à des solutions présentant des oscillations. Pour ce type de problèmes les méthodes utilisant une différentiation amont dans le sens de l'écoulement ont donné de très bons résultats. Une première approche dans ce sens a été présentée par Raithby [66] dans le contexte des différences finies. L'idée a été reprise par Hughes

et Brooks [67] et mise en forme pour les méthodes d'éléments finis. La méthode proposée consiste dans l'introduction d'une diffusivité artificielle qui agit seulement dans le sens de l'écoulement. Pour un écoulement multidimensionnel celle-ci prend la forme d'un tenseur donné par:

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_0}{|V|^2} u_i u_j \quad (3.9)$$

où

$$\alpha_0 = \frac{\delta |V| h}{2} \quad (3.10)$$

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (3.11)$$

Ici  $|V|$  est la vitesse du fluide,  $h$  est la taille de l'élément (voir l'annexe B),  $Pe$  est le nombre de Péclet de l'élément défini par

$$Pe = \frac{\rho h |V|}{2\lambda} \quad (3.12)$$

et  $\lambda$  est le coefficient de diffusion de l'équation de transport. La méthode, connue sous le nom de SU (Streamline Upwind), a été formulée pour les équations scalaires de convection-diffusion et pour les équations de Navier-Stokes incompressibles [67,68]. Une méthode similaire a été présentée par Kelly et al. [69].

Sous cette première forme, la méthode produit parfois des résultats incorrects, (en présence de terme source), car la formulation n'est pas résiduelle. Il est très utile ici d'observer que la diffusivité artificielle peut être transférée du terme de diffusion au terme de convection. Cela consiste à modifier la fonction test pour le terme de convection comme suit:

$$W_i^{SU} = N_i^{Gal} + \frac{\alpha_0}{|V|^2} u_j \frac{\partial N_i^{Gal}}{\partial x_j} \quad (3.13)$$

On se retrouve donc à avoir des fonctions test différentes pour le terme de convection et pour les autres termes de l'équation (terme source et de diffusion).

Hughes et Brooks [70] ont proposé alors de modifier les fonctions test pour tous les termes de l'équation. La méthode est devenue une méthode de type Petrov-Galerkin et le nom sous lequel est connue est SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin). Une analyse mathématique de la méthode pour différents problèmes a été faite par Johnson et al. [71,72]. La méthode SUPG se révèle être une méthode résiduelle, conforme et qui nécessite uniquement des interpolations continues [73].

Pour une équation différentielle du type

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad (3.14)$$

la méthode SUPG ajoute à la forme faible Galerkin le terme suivant, constitué de la somme des intégrales sur les éléments du maillage:

$$\sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} (W'_i, \mathcal{L}(u)) \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} W'_i &= W_i^{SUPG} - N_i^{Gal} \\ W'_i &= \frac{\alpha_0}{|V|^2} u_j \frac{\partial N_i^{Gal}}{\partial x_j} = \tau u \cdot \nabla N_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ici  $\mathcal{L}(u)$  représente le résidu fort de l'équation à résoudre,  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation,  $\alpha_0$  est un coefficient de diffusion artificielle et  $\tau$  est un paramètre de stabilisation,  $\tau = \delta h / (2|V|)$ , qui a des unités de temps. Des détails de calcul de la fonction  $\tau$  sont donnés dans l'annexe B. Une généralisation aux systèmes multidimensionnels de convection-diffusion est présenté dans [74].

La forme SUPG pour les équations de Navier-Stokes est:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho u \cdot \nabla u \, v \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(u) : \dot{\gamma}(v) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v \, d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \{ \rho u \cdot \nabla u + \nabla p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_T) \nabla u + \nabla u^T] - \rho f \} \tau u \cdot \nabla v \, d\Omega^e \quad (3.17) \\ & = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \langle t^*, v \rangle \end{aligned}$$

Une nouvelle classe des méthodes d'éléments finis stables pour les équations dominées par la convection est celle des méthodes dites de Galerkin moindres carrés (Galerkin Least-Squares) [75,76]. La méthode consiste à ajouter à la forme de Galerkin classique un terme additionnel qui a la forme d'un moindre carré du résidu fort de l'équation différentielle que l'on veut résoudre. Ce terme a l'effet d'augmenter la stabilité de la discrétisation numérique sans trop altérer la précision de la solution.

Encore une fois considérons l'équation type (3.14). La méthode GLS ajoute donc à la forme faible les termes issus de la première variation de la fonctionnelle:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega^e} \tau \mathcal{L}(u)^2 d\Omega^e \quad (3.18)$$

c'est à dire

$$\delta J = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega^e} \mathcal{L}(u) \tau \delta \mathcal{L}(u) d\Omega^e \quad (3.19)$$

Cela revient à minimiser le résidu fort de l'équation à résoudre à l'intérieur d'un élément. En résumé les formes faibles Galerkin, SUPG et GLS sont les suivantes:

$$\text{Galerkin:} \quad \int_{\Omega} \mathcal{L}(u) w d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{SUPG:} \quad \int_{\Omega} \mathcal{L}(u) w d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega^e} \mathcal{L}(u) \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^e = 0 \quad (3.21)$$

$$\text{GLS:} \quad \int_{\Omega} \mathcal{L}(u) w d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega^e} \mathcal{L}(u) \tau \delta \mathcal{L}(u) d\Omega^e = 0 \quad (3.22)$$

Dans le cas des équations de Navier-Stokes on doit résoudre un système formé par les équations de mouvement et de continuité. Écrivons le sous la forme suivante:

$$R_u = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \rho \mathbf{f} = 0 \quad (3.23)$$

$$R_p = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.24)$$

où  $R_u$  et  $R_p$  sont respectivement le résidu de l'équation de mouvement et le résidu de l'équation de continuité. Alors la méthode GLS revient à résoudre le problème variationnel suivant:

$$\int_{\Omega} R_u \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} R_p \delta p \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Gamma^e} [R_u \tau_u \delta R_u + R_p \tau_p \delta R_p] \, d\Omega^e = 0 \quad (3.25)$$

où  $\delta u$ ,  $\delta p$ ,  $\delta R_u$  et  $\delta R_p$  sont respectivement les variations de la solution et des résidus forts. On peut exprimer alors  $\delta R_u$  et  $\delta R_p$  en fonction des variations des variables primaires  $\delta u$ ,  $\delta p$  comme suit:

$$\delta R_u = \frac{\partial R_u}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R_u}{\partial p} \delta p \quad (3.26)$$

$$\delta R_p = \frac{\partial R_p}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R_p}{\partial p} \delta p \quad (3.27)$$

où plus spécifiquement:

$$\delta R_u = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_T)(\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T)] \quad (3.28)$$

$$\delta R_p = \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \quad (3.29)$$

Ici nous avons considéré la forme linéarisée de l'équation de mouvement et par conséquent le terme  $\rho \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  n'apparaît pas dans l'équation (3.28). On obtient alors:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})) - \rho \mathbf{f}] \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega + \\ & \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Gamma^e} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})) - \rho \mathbf{f}] \cdot \\ & \quad \tau_u \cdot [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta p - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}))] \, d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Gamma^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \tau_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les variations de la solution ont la forme suivante:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N \delta u_i v_i \\ \delta p &= \sum_{i=1}^N \delta p_i q_i\end{aligned}\tag{3.31}$$

où  $\delta u_i, \delta p_i$  sont les variations nodales des inconnues et  $v_i, q_i$  sont les fonctions d'interpolation pour la vitesse et la pression respectivement. Comme l'équation (3.30) doit être satisfaite pour tout  $\delta u_i, \delta p_i$  on obtient la forme faible GLS suivante pour les équations de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})) - \rho \mathbf{f}] \cdot \\ \tau_u \cdot [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{v}))] \, d\Omega^e \\ - \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \tau_p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega^e = 0\end{aligned}\tag{3.32}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2(\mu + \mu_T) \dot{\gamma}(\mathbf{u})) - \rho \mathbf{f}] \tau_u \nabla q \, d\Omega^e = 0$$

On remarque que si on considère dans la partie moindre carré seulement le terme provenant de la variation du terme de convection on récupère la méthode SUPG telle que décrite précédemment. Il est à noter que la méthode GLS contient des ingrédients de stabilisation additionnels par rapport à SUPG, notamment le terme de type laplacien de la pression dans l'équation de continuité. Il est aussi à noter que les méthodes Galerkin moindres carrés et SUPG sont des méthodes résiduelles.

### 3.3.2 Implantation des conditions aux frontières

L'utilisation de la loi de paroi sur les parois solides revient à l'imposition dans l'équation de mouvement d'un cisaillement  $\tau_w$ . La loi de Launder et Spalding prévoit que le cisaillement à la paroi est donné par la relation:

$$\tau_w = -\rho u_\tau^2 \text{sign}(u \cdot \hat{t}) \hat{t} \quad (3.33)$$

où  $u_\tau$  représente la vitesse de frottement et  $\hat{t}$  est le vecteur unitaire tangent à la paroi. Le cisaillement est donc orienté au long de la paroi et dans le sens opposé à la vitesse.

La vitesse de frottement se calcule à l'aide des relations (2.5) et (2.6). On obtient donc:

$$\begin{cases} u_\tau = \left[ \frac{\mu U}{\rho y} \right]^{1/2} & \text{si } y^* < y_c^* \\ KU = u_\tau \ln \left( E \frac{\rho y}{\mu} u_\tau \right) & \text{si } y^* \geq y_c^* \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $U$  est la vitesse tangentielle. Comme la densité  $\rho$ , la viscosité  $\mu$  et la distance à la paroi  $y$  sont données, ainsi que les constantes  $K$  et  $E$ , la vitesse de frottement est donc fonction de la vitesse  $U$ :

$$u_\tau = u_\tau(U) \quad (3.35)$$

Le terme de bord de l'équation de mouvement s'écrit alors sous la forme suivante:

$$T = \int_{\Gamma_r} \tau_w \nu d\Gamma = - \int_{\Gamma_r} \rho u_\tau^2 \text{sign}(u \cdot \hat{t}) \hat{t} \nu d\Gamma \quad (3.36)$$

et comme  $u_\tau$  est une fonction nonlinéaire de la vitesse  $U$ , on est en présence d'un terme de bord nonlinéaire. Pour accélérer la vitesse de convergence on le linéarise alors à l'aide de la méthode de Newton comme suit:

$$T(U) = T(U_0) + \frac{\partial T}{\partial U} \delta U = T(U_0) + \frac{\partial T}{\partial u_\tau} \frac{\partial u_\tau}{\partial U} \delta U \quad (3.37)$$

où  $U_0$  est la vitesse à l'itération précédente et  $\delta U$  est la correction à l'itération courante. En plus, comme toutes ces relations font intervenir le module du vecteur vitesse  $U = (u^2 + v^2)^{1/2}$  on a en plus que:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial u} \delta u + \frac{\partial U}{\partial v} \delta v = \frac{u \delta u + v \delta v}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \quad (3.38)$$

Le terme de bord s'écrit finalement sous la forme:

$$T(U) = T(U_0) + \frac{\partial T}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial U} \frac{u \delta u + v \delta v}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \quad (3.39)$$

Une fois déterminé le champ de vitesses, on évalue les valeurs de  $k$  et  $d' \epsilon$  sur la frontière à l'aide des relations:

$$k_p = \frac{u_r^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad , \quad \epsilon_p = \frac{u_r^3}{Ky} \quad (3.40)$$

Cette loi de paroi représente une bonne approximation lorsque l'écoulement est proche de l'équilibre, c'est à dire pour un écoulement développé et en présence de faibles gradients de pression. Des questions se posent au niveau de sa validité quand il s'agit de régions affectées par de forts gradients comme on peut en trouver dans les zones de recirculation. Regardons par exemple ce qui arrive proche du point de recollement dans un écoulement avec recirculation. La loi de Launder et Spalding prédit une énergie cinétique de turbulence nulle au point de recollement, là où la vitesse est nulle et par conséquent le cisaillement est nul lui aussi. Pourtant les expériences indiquent exactement le contraire car dans cette région on retrouve un niveau maximal de turbulence. Cette situation est moins importante lorsqu'on s'intéresse seulement au champ moyen de vitesses, mais elle devient critique pour les problèmes de transfert de chaleur lorsqu'on veut évaluer le taux de transfert de chaleur sur la paroi.

Un modèle de loi de paroi qui représente mieux le comportement de la solution

dans ces régions fait appel à l'énergie cinétique de la turbulence pour déterminer une deuxième échelle de vitesse [10,77,78]. Pour cela on va considérer sur les frontières où la loi de paroi est utilisée que le gradient normal de  $k$  est nul:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (3.41)$$

De cette façon on peut résoudre l'équation pour  $k$  et utiliser les valeurs sur la frontière pour déterminer une échelle de vitesse reliée à la turbulence:

$$u_* = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \quad (3.42)$$

Dans ce qui suit on va faire référence à ce modèle en l'appelant loi de paroi à deux échelles de vitesse. Notons que la première échelle de vitesse demeure toujours la vitesse de frottement, puisqu'elle est reliée à la dynamique de l'écoulement moyen, tandis que la vitesse  $u_*$  est l'échelle de vitesse de la turbulence.

La loi de paroi est alors définie comme suit:

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{si } y^+ < y_c^+ \\ u^+ = \frac{1}{K} \ln(Ey^+) & \text{si } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (3.43)$$

où  $y^+ = \frac{\rho y u_*}{\mu}$  et  $u_* = \frac{U}{u_r}$ .

Dans cette forme la relation entre la vitesse de frottement  $u_r$  et le module de la vitesse  $U$  devient linéaire car la vitesse adimensionnelle  $u^+$  est entièrement déterminée une fois calculé le niveau de turbulence. L'algorithme de calcul devient alors le suivant:

- . résoudre l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence
- . évaluer la vitesse  $u_*$  à l'aide de (3.42).
- . évaluer  $y^+$ .
- . déterminer  $u^+$  en fonction de  $y^+$  en utilisant les relations (3.43).
- . évaluer la vitesse de frottement  $u_r$ .

Finalement le cisaillement à la paroi est donné par:

$$\tau_w = \rho u_\tau u_* = \rho \frac{U}{u_*} u_* \quad (3.44)$$

ce qui représente une relation linéaire entre le cisaillement à la paroi et la vitesse sur la frontière. Le taux de dissipation de la turbulence dans ce cas est donné par:

$$\epsilon_p = \frac{u_*^3}{Ky} \quad (3.45)$$

On peut remarquer cette fois, qu'au point de recollement la vitesse est nulle mais pas l'énergie cinétique de la turbulence. La vitesse  $u_*$  est non-nulle et elle est une mesure de la vitesse des échanges dues à la turbulence. En ce point la vitesse de frottement  $u_\tau$  et le cisaillement à la paroi  $\tau_w$  seront toujours nulles. Cette deuxième loi de paroi décrit mieux la région du point de recollement dans un écoulement avec transfert de chaleur sur une marche descendante [78,79,80]. La prédiction de l'énergie cinétique de la turbulence et du transfert de chaleur à la paroi est beaucoup améliorée par l'introduction de la deuxième échelle de vitesse.

L'utilisation d'une loi de paroi revient donc à imposer un cisaillement  $\tau_w$  dans la direction tangente à la paroi et orienté en sens opposé à la vitesse. Cela correspond à une condition aux frontières naturelle dans l'équation de mouvement pour la vitesse tangentielle. La vitesse normale, elle sera nulle sur les parois solides. Ces conditions aux frontières sont facile à imposer sur les frontières horizontales et verticales, là où les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse sont orientées le long de la paroi ou selon la normale à celle-ci. L'opération devient par contre assez difficile lorsque la paroi solide est oblique et encore plus lorsqu'elle est courbe.

Dans ce qui suit on va présenter deux façons d'imposer la condition de tangence. Tout d'abord remarquons que la vitesse est stockée à chaque noeud. Une première possibilité d'imposer que la vitesse soit tangente à la paroi sera donc d'identifier en chaque noeud une direction normale et de contraindre la vitesse à être nulle dans cette

direction. Un sommet sur la frontière appartient à deux arrêtes, elles aussi sur la frontière sur laquelle la condition de tangence doit être imposée. Pour une arrête on peut identifier une direction normale unique; cela n'est pas aussi simple dans le cas d'un noeud. Pour une frontière droite toutes les arrêtes ont la même direction et par conséquent la normale à chaque noeud est unique. Elle sera la normale à la frontière.

Regardons maintenant ce qui arrive lorsque les arrêtes adjacentes n'ont pas la même direction, situation illustrée dans la figure 3.1.

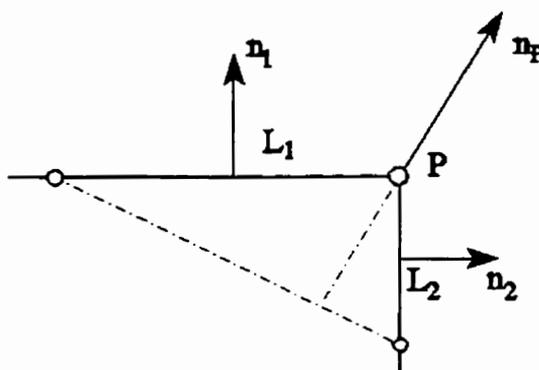


Figure 3.1 Définition de la normale équivalente au noeud

Dans ce cas il est évident qu'on ne peut pas déterminer une normale unique au noeud P. Engelman et al [81] proposent d'évaluer la direction normale au noeud P de façon à ce que le débit global à travers de deux arrêtes soit nul. Cela conduit à la relation suivante:

$$n_P = \frac{n_1 L_1 + n_2 L_2}{L_1 + L_2} \quad (3.46)$$

où  $n_1$ ,  $L_1$  et  $n_2$ ,  $L_2$  sont respectivement les directions normales et les longueurs des deux arrêtes. Imposer que la vitesse soit nulle en cette direction normale au noeud P revient à permettre un flux non-nul au travers des arrêtes tel que le total des flux sur deux arrêtes adjacentes soit nul. Cette définition de la normale nodale est en accord dans un certain sens avec la loi de conservation de la masse. On remarque tout de même que la normale nodale dépend directement du maillage. Regardons par exemple ce qui

arrive à un noeud qui correspond à un changement fort de la direction pour la frontière. La figure 3.2 illustre deux situations où, pour une même géométrie, la normale au noeud P a des directions bien différentes dépendant du rapport entre les longueurs des arrêtes. On se trouve donc dans une situation où la direction normale dépend plus du maillage que de la physique et de la géométrie du problème.

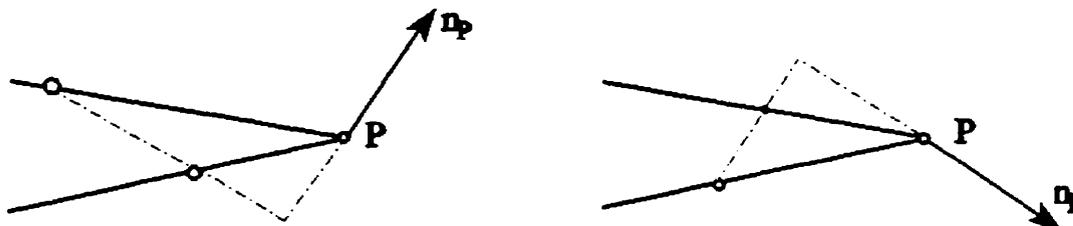


Figure 3.2 Dépendance de la normale équivalente au noeud du maillage

Une fois déterminée la direction normale a chaque noeud il faut imposer que la vitesse normale soit nulle. Le système à résoudre sera donc le suivant:

$$\begin{aligned} u_n &= 0 \\ R_t(u_t, u_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

où  $u_n$ ,  $u_t$  sont respectivement la vitesse normale et tangentielle, tandis que  $R_t$  représente le résidu de l'équation de mouvement dans la direction tangentielle. Pourtant, nous ne disposons pas des équations de mouvement dans les directions normale et tangentielle et les variables sont les composantes de la vitesse en direction  $x$  et  $y$ , soit  $u$  et  $v$ .

Soit maintenant  $R_x(u, v) = 0$  et  $R_y(u, v) = 0$ , les équations de mouvement en direction des axes  $x$  et  $y$ . L'équation de mouvement peut alors être écrite sous forme vectorielle comme suit:

$$R(u, v) = R_x(u, v)\hat{i} + R_y(u, v)\hat{j} = 0 \quad (3.48)$$

où  $\hat{i}, \hat{j}$  sont les vecteurs unitaires au long des axes de coordonnées. On peut obtenir l'équation de mouvement en direction tangentielle tout simplement en multipliant l'équation vectorielle (3.48) par la tangente nodale  $\hat{t} = t_x\hat{i} + t_y\hat{j}$ :

$$R_t(u, v) = \mathbf{R}(u, v) \cdot \hat{t} = R_x(u, v)t_x + R_y(u, v)t_y = 0 \quad (3.49)$$

De plus, cette équation a comme inconnues les variables primaires  $u$  et  $v$  et aucun changement de coordonnées n'est nécessaire. Comme on peut le constater cette condition de tangence impose d'une manière forte que la vitesse soit nulle dans la direction normale au chaque noeud.

On présente maintenant une deuxième possibilité pour satisfaire la condition de tangence, cette fois dans un sens faible. Pour cela considérons que les équations de mouvement sont le résultat de la minimisation d'une fonctionnelle qu'on dénote  $I_0(u, v)$ .

Alors on a:

$$R(u, v) = \delta I_0(u, v, \delta u, \delta v) = \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial u} \delta u + \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial v} \delta v \quad (3.50)$$

et donc

$$R_x(u, v) = \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial u} \delta u \quad (3.51)$$

$$R_y(u, v) = \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial v} \delta v \quad (3.52)$$

Pour satisfaire en plus la condition de tangence on va chercher à minimiser une fonctionnelle modifiée:

$$I(u, v, f) = I_0(u, v) + \int_{\Gamma_t} f(u n_x + v n_y) ds \quad (3.53)$$

où  $f$  est le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de débit nul et  $\Gamma_t$  est la frontière sur laquelle on impose la condition de tangence. La variation de la fonctionnelle  $I$  sera:

$$\delta I(u, v, f, \delta u, \delta v, \delta f) = \delta I_0 + \int_{\Gamma_t} (f n_x \delta u + f n_y \delta v) ds + \int_{\Gamma_t} \delta f (u n_x + v n_y) ds \quad (3.54)$$

Minimiser la fonctionnelle  $I$  revient à résoudre les équations suivantes:

$$R_x(u, v) = \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial u} \delta u + \int_{\Gamma_t} f n_x \delta u ds = 0 \quad (3.55)$$

$$R_y(u, v) = \frac{\partial I_0(u, v)}{\partial v} \delta v + \int_{\Gamma} f n_y \delta v ds \quad (3.56)$$

$$\int_{\Gamma} \delta f (u n_x + v n_y) ds = 0 \quad (3.57)$$

Le débit au travers de la frontière est donc nul dans un sens faible. On remarque aussi que le fait d'imposer une certaine direction à la vitesse résulte aussi dans une modification de l'équation de mouvement par la présence de termes de bord supplémentaires. On peut identifier ces termes comme déterminés par une force qui n'est rien d'autre que la réaction sur la frontière. Le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de non-pénétration se retrouve donc à être la réaction sur la paroi. Dans notre approche le multiplicateur de Lagrange sera discrétisé par des fonctions discontinues. Notons que la fonction unitaire sera toujours une des fonctions test et par conséquent la procédure impose que le débit soit nul en moyenne sur chaque arête. La contrainte (3.57) est imposée par une technique de Lagrangien augmenté, telle que décrite dans l'annexe C.

### 3.3.3 Limiteurs pour $k$ et $\epsilon$

Les modèles de turbulence à deux équations ont été et sont toujours largement employés dans le calcul des écoulements turbulents. Comme on l'a déjà vu, deux équations de transport permettent d'évaluer des variables de turbulence pour ensuite calculer le niveau de la viscosité turbulente. Par définition, les variables de turbulence sont toujours positives, qu'il s'agisse de l'énergie cinétique de la turbulence,  $k$ , de son taux de dissipation,  $\epsilon$ , de la dissipation spécifique,  $\omega$ , ou bien du temps caractéristique,  $\tau$ . Bien que les équations de transport qui modélisent leur comportement admettent des solutions strictement positives, rien ne garantit pas que les solutions numériques le seront aussi. En pratique, la solution est caractérisée par des variations extrêmement rapides, des quasi-singularités déterminées par la géométrie et souvent par de grandes

régions de très bas niveau de turbulence. Celles-ci représentent autant de possibilités pour que la solution numérique prenne des valeurs négatives ou nulles. Une telle situation conduit rapidement à la divergence des calculs car comme on le peut constater les équations de transport des variables de turbulence, de même que l'équation constitutive pour la viscosité turbulente, comportent de divisions à ces variables. Plusieurs approches ont été utilisées afin de contourner ce problème. On mentionne ici l'utilisation des opérateurs de '*clipping*' [44,82] et la construction de schémas de discrétisation qui aident à préserver la positivité des variables [83,84]. Les méthodes de stabilisation de type *upwind* ont donné d'assez bons résultats surtout pour les schémas de volumes finis. Pourtant ces techniques ne garantissent pas que les variables de turbulence demeureront positives.

Ici on présente une technique de clipping permettant de conserver de variables turbulents strictement positives tout en minimisant l'impact sur la solution. On donne aussi des détails de l'implantation telle que nécessaire pour assurer la robustesse de l'algorithme de résolution de même que du module adaptatif. Même si cette méthode permet d'obtenir de bons résultats, elle reste quand même limitée, dans le sens qu'elle nécessite une intervention directe sur la solution, qui est localement reconstruite.

Cela peut avoir de répercussions à deux niveaux. Premièrement la convergence de l'algorithme est ralentie, car elle est affectée par le fait que la correction des variables inacceptables détruit en même temps le résidu des équations. Deuxièmement, les modifications apportées à la solution déterminent des oscillations et des gradients extrêmement forts. L'effet sur la viscosité est amplifié d'autant car elle est une variable secondaire évaluée à partir de  $k$  et de  $\epsilon$ . Toutes les régions où la solution sera reconstruite pour assurer que les variables demeurent positives seront autant des endroits où le module adaptatif sentira des erreurs et par conséquent va commander le raffinement du maillage. On se retrouve alors dans une situation où la procédure adaptative concentre les points du maillage dans les régions où le résolveur manifeste

de faiblesses, plutôt que là où le problème le nécessite vraiment.

Pour assurer la robustesse de l'algorithme de résolution, lorsque  $k$  et  $\epsilon$  sont utilisées comme variables primaires, on doit s'assurer que la solution demeure positive. Des valeurs négatives ou nulles sont inacceptables car certains termes contiennent des divisions par  $k$  ou  $\epsilon$  et de plus une viscosité négative peut être catastrophique pour le calcul numérique. Une approche très utile, inspirée de celle employée par FIDAP [44], est de limiter par le bas  $k$  et  $\epsilon$  en les empêchant de prendre de valeurs non-physiques. En pratique, si l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  prend une valeur trop petite celle-ci est remplacée par

$$k = \frac{k_{\max}}{d_k} \quad , \quad \text{lorsque } k < \frac{k_{\max}}{d_k} \quad (3.58)$$

où  $k_{\max}$  est la valeur maximale pour  $k$  dans la solution et  $d_k$  une constante qui dépend du problème à résoudre. D'une manière similaire, si  $\epsilon$  est trop petite et détermine une valeur excessivement grande pour la viscosité turbulente, on la remplace par:

$$\epsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{d_\mu \mu_l} \quad , \quad \text{lorsque } \epsilon < \frac{\epsilon_{\max}}{d_\epsilon} \quad \text{et} \quad \epsilon < \rho C_\mu \frac{k^2}{5 d_\mu \mu_l} \quad (3.59)$$

où  $d_\epsilon$  et  $d_\mu$  sont toujours des constantes et  $\mu_l$  représente la viscosité du fluide. Cette approche limite  $k$  et  $\epsilon$  par le bas et en même temps contrôle la valeur de la viscosité turbulente aux endroits où la procédure est appliquée.

Une difficulté supplémentaire s'ajoute à ce moment-ci par le fait que les variables de turbulence, soit  $k$  et  $\epsilon$ , sont interpolées par de fonctions quadratiques. On peut facilement imaginer qu'une situation possible et même probable est celle où  $k$  et  $\epsilon$  sont positives à toutes les noeuds, mais négatives en certains points d'intégration à l'intérieur des éléments. Comme on fait appel à ces valeurs lors de la construction des matrices élémentaires, il est très important qu'elles soient aussi strictement positives aux points de Gauss. On peut aussi observer qu'en général les valeurs extrêmes au niveau d'un élément sont obtenus aux sommets, à l'exception de quelques régions où on retrouve les

extremums de la solution. Une procédure qui conduit à des valeurs positives aux points d'intégration (points de Gauss) consiste à imposer qu'à l'intérieur de l'élément la solution soit plus grande que la valeur minimale aux sommets. On s'assure donc que

$$k_{PG} \geq \min_{i=1, n_{\text{som}}} (k_i) \quad (3.60)$$

$$\epsilon_{PG} \geq \min_{i=1, n_{\text{som}}} (\epsilon_i) \quad (3.61)$$

De plus, chaque fois qu'une des variables est ajustée à un point d'intégration on corrige aussi la deuxième variable afin de respecter une bonne représentation de la viscosité turbulente.

Même si cette procédure est assez robuste on doit souligner encore une fois qu'elle conduit à une solution entachée d'oscillations locales qui sont très dommageables pour l'estimation d'erreur. Le résultat net, dans un tel cas, est que l'adaptativité est pilotée plutôt par les faiblesses du résolveur que par la physique du problème. Cela conduit à l'emploi souvent inutile d'un très grand nombre de points afin de minimiser l'influence de régions où les limiteurs sont appliqués [85,86,87].

Une autre observation tirée d'essais numériques est que la faiblesse du résolveur demande souvent de maillages initiaux assez fins qui réduisent encore le bénéfice de la méthode adaptative. Une telle situation est d'autant plus critique lorsqu'on envisage des simulations tridimensionnelles.

### 3.4 Résolution en variables logarithmiques

Étant donné les inconvénients inhérents à une technique de clipping, il serait bénéfique d'imaginer une méthode qui garantisse par construction que les variables de turbulence soient strictement positives. Cela permettrait de tirer pleinement l'avantage de la méthode adaptative, car la solution resterait lisse et serait déterminée entièrement

à partir des équations différentielles du modèle (aucune pollution due aux limiteurs).

Une telle approche est possible à l'aide d'un changement de variables, en considérant au lieu de  $k$  et  $\epsilon$ , plutôt leur logarithme naturel  $K = \ln(k)$  et  $E = \ln(\epsilon)$  comme variables dépendantes. De cette façon on garantit que  $k$ ,  $\epsilon$  et la viscosité turbulente seront strictement positives, car elles sont obtenues en évaluant l'exponentielle des variables de calcul. Le bénéfice à tirer de ce choix est direct au niveau de la positivité de la solution, mais en plus on peut tirer plusieurs autres avantages tant du point de vue du résolveur que du module adaptatif. L'accélération de la convergence et une robustesse accrue de l'estimation d'erreur et de l'adaptativité en sont seulement des exemples.

Le point de départ est constitué par l'idée que si les variables de turbulence, comme c'est le cas pour  $k$  et  $\epsilon$ , sont strictement positives, elles peuvent être représentées par de fonctions exponentielles. Par exemple:

$$\begin{aligned} k &= e^K \\ \epsilon &= e^E \end{aligned} \tag{3.62}$$

Le grand avantage réside dans le fait que la réciproque est toujours valable. Cela veut dire que *si  $k$  et  $\epsilon$  sont représentées par des fonctions exponentielles elles sont toujours positives*. Par conséquent la viscosité turbulente, sera elle aussi positive et aucun traitement supplémentaire de clipping ne sera nécessaire.

Cette approche ne change en rien le modèle de turbulence ou l'équation constitutive ou encore les équations de transport. Le problème résolu reste le même. Du point de vue pratique, les variables de turbulence seront cette fois strictement positives partout dans le domaine de calcul et cela sans ajuster aucune valeur de quelque façon que ce soit. De plus, la procédure résulte dans une amélioration accrue de la précision et cela surtout dans les régions de forts gradients ainsi que là où les variables de turbulence prennent des valeurs extrêmement basses. Dans ce qui suit, on va appeler

cette procédure 'résolution en variables logarithmiques'.

### 3.4.1 Équations différentielles de transport

Considérons maintenant les équations différentielles de transport de  $k$  et  $\epsilon$  dans la forme utilisée par l'algorithme itératif de calcul:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \quad (3.63)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.64)$$

et l'équation constitutive du modèle  $k-\epsilon$ :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.65)$$

On veut donc passer de  $k$  et  $\epsilon$ , comme variables dépendantes, à  $K = \ln(k)$  et  $E = \ln(\epsilon)$ . Pour cela on divise l'équation de transport de  $k$  par  $k$  et l'équation de transport d' $\epsilon$  par  $\epsilon$  pour obtenir:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla k}{k} = \frac{1}{k} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] + \frac{\mu_T}{k} P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k}{\mu_T} \quad (3.66)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu \frac{k}{\epsilon} P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon}{k} \quad (3.67)$$

Les termes de diffusion sont décomposés comme suit:

$$\frac{1}{k} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \frac{\nabla k}{k} \right] - \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \cdot \nabla \left( \frac{1}{k} \right) \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right] - \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \cdot \nabla \left[ \frac{1}{\epsilon} \right] \quad (3.69)$$

or comme  $\nabla \left[ \frac{1}{k} \right] = -\frac{\nabla k}{k^2}$  et  $\nabla \left[ \frac{1}{\epsilon} \right] = -\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon^2}$ , on obtient:

$$\frac{1}{k} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \frac{\nabla k}{k} \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \left[ \frac{\nabla k}{k} \right]^2 \quad (3.70)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \left[ \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right]^2 \quad (3.71)$$

Le passage aux variables logarithmiques est maintenant facile à compléter car il suffit de remplacer  $k$  par  $e^K$ ,  $\epsilon$  par  $e^E$  et d'utiliser les identités suivantes:

$$\frac{\nabla k}{k} = \nabla K \quad (3.72)$$

$$\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = \nabla E \quad (3.73)$$

On obtient alors les équations de transport pour les variables logarithmiques sous la forme:

$$\rho u \cdot \nabla K = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla K \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] (\nabla K)^2 + \mu_T e^{-K} P(u) - \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \quad (3.74)$$

$$\rho u \cdot \nabla E = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla E \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] (\nabla E)^2 + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) - C_2 \rho e^{E-K} \quad (3.75)$$

On remarque ici la présence d'un terme supplémentaire, en gradient au carré,

issu du terme de diffusion. Ce terme peut être incorporé au terme de convection ce qui détermine une modification de la vitesse de convection qui sera alors  $[u - 1/\rho(\mu + \mu_T/\sigma_k)\nabla K]$  pour l'équation de  $K$  et  $[u - 1/\rho(\mu + \mu_T/\sigma_\epsilon)\nabla E]$  pour l'équation de  $E$ . On peut alors obtenir différentes formes variationnelles stabilisées, dépendent de la façon dont ce terme est traité. Cette question est discutée en détail dans l'annexe D. Notons aussi la nouvelle écriture pour les termes sources qui incorporent cette fois des fonctions exponentielles. On s'attend donc que les non-linéarités des équations soient plus importantes. La situation est moins critique qu'il n'y paraît, car les exponentielles sont facilement linéarisables pour l'intervalle couvert par les variables de turbulence. De plus, les termes de linéarisation obtenus à partir de ces termes sources sont tous positifs, ce qui contribue à la stabilisation du système numérique.

Lorsque la résolution est faite en variables logarithmiques la viscosité turbulente est évaluée directement à partir de  $K$  et  $E$  par la relation:

$$\mu_T = \rho C_\mu e^{2K-E} \quad (3.76)$$

ce qui montre que  $\mu_T$  sera strictement positive.

### 3.4.2 Formulation variationnelle

La forme variationnelle des équations (3.74) et (3.75) est obtenue en multipliant ces équations par des fonctions test et en les intégrant sur le domaine de calcul. On donne ici la forme de Galerkin classique des équations. Les formes variationnelles de type SUPG et Galerkin Moindres Carrés sont présentées dans l'annexe D.

Après l'intégration par parties des termes de diffusion on obtient les formes faibles suivantes:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \frac{\partial K}{\partial n} w d\Gamma \quad (3.77)$$

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_{\mu} e^{K-E} P(u) + C_{2\rho} e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}}) \frac{\partial E}{\partial n} w d\Gamma \quad (3.78)$$

Les étapes de l'algorithme de résolution restent inchangées. L'algorithme sera donc le suivant:

1. donner des valeurs initiales  $u_0$ ,  $k_0$  et  $\epsilon_0$ .
2. passer aux variables logarithmiques pour les inconnues de même que pour les conditions de Dirichlet:  $K = \ln(k)$ ,  $E = \ln(\epsilon)$ .
3. évaluer la viscosité turbulente  $\mu_T$  en fonction de  $K$  et  $E$ .
4. pour  $\mu_T$  donné
  - 4.1. résoudre les équations de mouvement et de continuité.
  - 4.2. résoudre l'équation pour  $K$ .
  - 4.3. résoudre l'équation pour  $E$ .
  - 4.4. réévaluer la viscosité turbulente et aller à 4.

Les observations faites dans le cas d'une résolution en  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes, telle que l'accélération de la convergence globale à l'aide des sous-itérations sur les variables de turbulence, sont toujours applicables.

Regardons maintenant quel est l'impact du passage aux variables logarithmiques sur la discrétisation de la solution. Rappelons que les variables scalaires, telles que  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  sont discrétisées par de fonctions quadratiques. Lorsque la résolution est faite avec  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes, on a donc que:

$$k = \sum_{i=1}^N k_i N_i(x, y) \quad (3.79)$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N \epsilon_i N_i(x, y) \quad (3.80)$$

où  $k_i$ ,  $\epsilon_i$  sont les valeurs nodales de  $k$  et  $\epsilon$  respectivement, et les  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation quadratiques.

Dans une résolution en variables logarithmiques on discrétise le logarithme naturel des variables de turbulence. On a donc que:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i N_i(x, y) \quad (3.81)$$

$$E = \sum_{i=1}^N E_i N_i(x, y) \quad (3.82)$$

Si on recalcule maintenant  $k$  et  $\epsilon$  en fonction des variables logarithmiques on obtient:

$$k = e^K = e^{\sum_{i=1}^N K_i N_i(x, y)} \quad (3.83)$$

$$\epsilon = e^E = e^{\sum_{i=1}^N E_i N_i(x, y)} \quad (3.84)$$

ou bien

$$k = \prod_{i=1}^N k_i^{N_i(x, y)} \quad (3.85)$$

$$\epsilon = \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{N_i(x, y)} \quad (3.86)$$

Notons que dans ce cas, si on utilise pour la viscosité turbulente la même discrétisation que pour  $k$  et  $\epsilon$ , alors la loi de comportement pour la viscosité turbulente est vérifiée en tout point. En effet, soit  $M$  le logarithme naturel de la viscosité turbulente, qui satisfait la relation suivante:

$$\mu_T = \rho C_\mu e^M \quad (3.87)$$

On a alors

$$M = 2K - E \quad (3.88)$$

La variable  $M$  est approximée par de polynômes de degré deux tout comme  $K$  et  $E$ .  
Finalement, la viscosité turbulente est approximée par:

$$\mu_T = \rho C_\mu e^M = \rho C_\mu \prod_{i=1}^N \mu_{T_i}^{N_i(x,y)} \quad (3.89)$$

c'est à dire sur la même base que celle sur laquelle on discrétise  $k$  et  $\epsilon$ .

Le passage aux variables logarithmiques fait donc en sorte que toutes les variables de turbulence, soit l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , le taux de dissipation de l'énergie cinétique  $\epsilon$  et la viscosité turbulente  $\mu_T$ , sont discrétisées de la même façon.

## Chapitre 4

### Remaillage adaptatif

#### 4.1 Estimation *a posteriori* de l'erreur

Pour estimer l'erreur de la solution obtenue par la méthode des éléments finis on utilise des estimateurs par projection moindres carrés de dérivées. La méthode de projection estime l'erreur en comparant les flux bruts de la solution par éléments finis à leur projection, au sens de moindre carré, dans l'espace d'éléments finis employé pour calculer la solution:

$$\tilde{\gamma} = \sum_{n=1}^6 \phi_n \{\bar{\gamma}\}_n \quad (4.1)$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^6 \phi_n \{\bar{p}\}_n \quad (4.2)$$

$$\bar{q}_k = \sum_{n=1}^6 \phi_n \{\bar{q}_k\}_n \quad (4.3)$$

$$\bar{q}_\epsilon = \sum_{n=1}^6 \phi_n \{\bar{q}_\epsilon\}_n \quad (4.4)$$

$$\bar{q}_{\mu_T} = \sum_{n=1}^6 \phi_n \{\bar{q}_{\mu_T}\}_n \quad (4.5)$$

où  $\gamma = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2$  est le tenseur des taux de déformation,  $q_k = \nabla k$ ,  $q_\epsilon = \nabla \epsilon$ ,  $q_{\mu_T} = \nabla \mu_T$

dénotent les gradients de  $k$ ,  $\epsilon$  et respectif  $\mu_\tau$ ,  $\phi_n$  sont les fonctions de base  $P_2$ ,  $\bar{\cdot}$  dénote l'approximation continue et  $\{\bar{\cdot}\}_n$  dénote les valeurs nodales de la projection par moindres carrés.

Les valeurs nodales  $\{\bar{\gamma}\}_n$ ,  $\{\bar{p}\}_n$ ,  $\{\bar{q}_k\}_n$ ,  $\{\bar{q}_\epsilon\}_n$  et  $\{\bar{q}_{\mu_\tau}\}_n$  seront calculées par projection globale, par projection locale et par récupération locale superconvergente des dérivées telles que proposées par Zienkiewicz et Zhu [7,61,62].

L'estimateur d'erreur par projection globale est décrit en détail dans les références [8,9]. On cherche à trouver le champs continu  $\bar{\gamma}$  qui est le plus proche des dérivées de la solution éléments finis au sens des moindres carrés global:

$$\sum_{K \in T} \left\{ \int_K \phi_m (\gamma_h - \bar{\gamma}) dx \right\} = 0 \quad (4.6)$$

ce qui conduit au système d'équations:

$$\left[ \sum_{K \in T} \int_K \phi_m \phi_n dx \right] \{\bar{\gamma}\}_n = \left\{ \sum_{K \in T} \int_K \phi_m \gamma_h dx \right\} \quad (4.7)$$

La taille du système est égale à  $N$ , le nombre de noeuds du maillage. On doit résoudre un tel système pour chaque composante de  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{q}_k$ ,  $\bar{q}_\epsilon$ ,  $\bar{q}_{\mu_\tau}$  ainsi que pour la pression. Tous ces systèmes ne diffèrent que par leur membre de droite, la matrice étant la même pour toutes les projections.

La solution éléments finis pour la vitesse et les variables de turbulence se trouve dans l'espace  $H^1(\Omega)$  des fonctions dont les dérivées sont de carré sommable. La discrétisation de la pression se trouve dans l'espace  $L^2(\Omega)$  de fonctions de carré sommable. Les normes utilisées pour évaluer les erreurs sont alors la semi-norme  $H'$  pour la vitesse et les variables de turbulence et la norme  $L^2$  pour la pression (voir les références [8,9]). La norme en vitesse est définie à l'aide du tenseur de déformations  $\gamma$ . Une fois les valeurs de  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{q}_k$ ,  $\bar{q}_\epsilon$ ,  $\bar{q}_{\mu_\tau}$  calculées, les normes de l'erreur seront donc évaluées à l'aide des expressions suivantes:

$$\text{- vitesse: } \|e^u\|_{E,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} e^\gamma : e^\gamma d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} 4(\tilde{\gamma} - \gamma_h) : (\tilde{\gamma} - \gamma_h) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

$$\text{- pression: } \|e^p\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |e^p|^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} (\bar{p} - p_h)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

$$\text{- } k: \|e^k\|_{E,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} e^{q_k} : e^{q_k} d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} (\bar{q}_k - q_{k,h}) : (\bar{q}_k - q_{k,h}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

$$\text{- } \epsilon: \|e^\epsilon\|_{E,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} e^{q_\epsilon} : e^{q_\epsilon} d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} (\bar{q}_\epsilon - q_{\epsilon,h}) : (\bar{q}_\epsilon - q_{\epsilon,h}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

$$\text{- } \mu_\tau: \|e^{\mu_\tau}\|_{E,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} e^{q_{\mu_\tau}} : e^{q_{\mu_\tau}} d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{\Omega} (\bar{q}_{\mu_\tau} - q_{\mu_\tau,h}) : (\bar{q}_{\mu_\tau} - q_{\mu_\tau,h}) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

où  $e^x$  dénote l'erreur dans le champ de l'inconnue  $x$ .

Cette méthode a été intensivement employée par le groupe de Polytechnique pour des problèmes de transfert de chaleur en écoulement laminaire [54,88-90], des écoulements à propriétés variables [55] et des écoulements turbulents modélisés par des modèles à zéro-équation [56] et à deux-équations [79,85-87]. Comme observation générale on peut noter que l'estimateur à projection globale est robuste et dirige correctement le processus adaptatif, mais il sous-estime constamment l'erreur réelle.

D'autres techniques améliorant la récupération des dérivées utilisent des projections locales sur des sous-domaines ou groupes d'éléments [61,62]. Dans ce cas, les valeurs nodales des champs continus sont déterminées à l'aide de constructions polynomiales sur les éléments entourant chaque sommet, comme illustré dans la figure 4.1.

Pour chaque sommet et chaque variables à projeter on construit donc une forme polynomiale:

$$\gamma^* = P a \quad (4.13)$$

où  $P$  représente la base des polynômes de degré deux et  $a_i$  sont les coefficients à

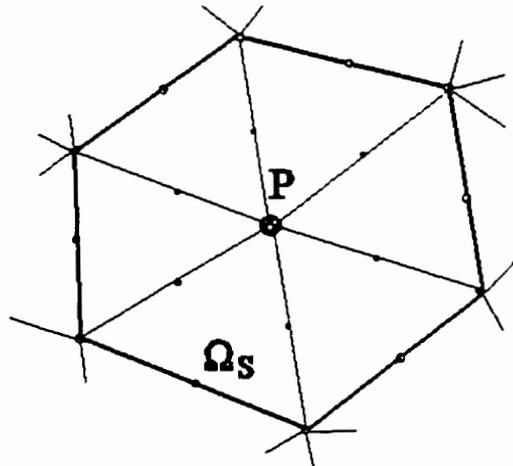


Figure 4.1 Groupe d'éléments pour la projection locale

déterminer:

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (4.14)$$

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \quad (4.15)$$

Dans la méthode de projection locale dans  $L_2$  les coefficients  $a_i$  sont obtenus pour chaque composante du tenseur de déformations en minimisant l'intégrale suivante définie sur le groupe d'éléments connectés au sommet:

$$\int_{\Omega_S} (\gamma_h - \gamma^*)^2 d\Omega_S \quad (4.16)$$

On obtient alors le système suivant:

$$\left[ \int_{\Omega_S} P^T P d\Omega_S \right] \{a\} = \left[ \int_{\Omega_S} P^T \gamma_h d\Omega_S \right] \quad (4.17)$$

Ici  $\Omega_S$  représente l'ensemble d'éléments qui contiennent le sommet considéré (voir la figure 4.1). Les noeuds qui se trouvent sur les cotés seront contenus dans deux groupes d'éléments, chacun associé à un noeud à l'extrémité de l'arrête. La valeur nodale du champ continu aux milieux de coté sera évaluée comme la moyenne des valeurs obtenues en ce point par les deux constructions polynomiales associées aux extrémités de l'arrête. Une fois déterminées les valeurs nodales des déformations,  $\{\bar{\gamma}\}_n$ , les champs continus

sont construits avec les mêmes interpolants que ceux utilisés pour la projection globale.

Une autre façon d'obtenir une projection locale est la méthode de récupération locale superconvergente. Dans ce cas le problème de moindres carrés continu (4.16) est remplacé par une forme discrète, utilisant uniquement les valeurs des dérivées évaluées en certains points, appelés points optimaux. Zienkiewicz et Zhu [62], ont trouvé que les points situés au milieu des côtés sont optimaux. La figure 4.2 illustre la position des points de collocation dans le groupe d'éléments qui entourent un sommet.

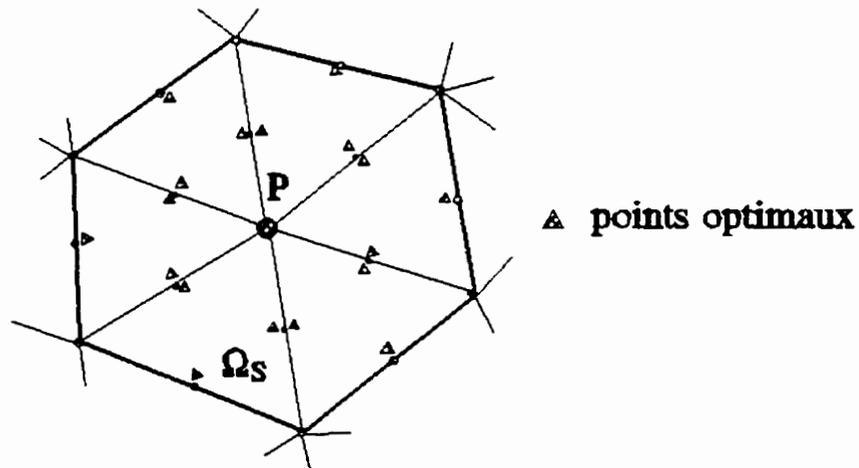


Figure 4.2 Points de collocation pour la projection locale discrète

La minimisation de la forme quadratique suivante

$$\sum_{i=1}^{N_s} [\gamma_h(x_i, y_i) - \gamma^*(x_i, y_i)]^2 \quad (4.18)$$

où  $N_s$  est le nombre des points optimaux dans un groupe d'éléments, conduit au système suivant

$$\left[ \sum_{i=1}^{N_s} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \right] \{a\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} P^T(x_i, y_i) \gamma_h \right\} \quad (4.19)$$

En résolvant ce système on obtient les coefficients  $a_i$  du développement polynomial de  $\gamma^*$ . Finalement, les déformations continues sont construites comme pour l'estimateur par projection locale décrit précédemment.

Les estimateurs à projection locale se réduisent à la résolution des systèmes algébriques de petite taille, (6x6), pour chaque sommet, à la place des systèmes globaux de la projection globale. On notera aussi que la matrice de projection reste la même lorsqu'on projette plusieurs variables; seulement le membre de droite change.

## 4.2 Les variables logarithmiques et l'erreur de la solution

L'estimation d'erreur est faite en  $k$  et  $\epsilon$  lorsque ces variables sont utilisées comme variables dépendantes et en  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  dans le cas d'une résolution en variables logarithmiques. Dans ce deuxième cas on raffine donc le maillage selon les gradients de  $K=\ln(k)$  et  $E=\ln(\epsilon)$ . Regardons quel est le lien entre les erreurs en  $k$  et  $\epsilon$  d'une part et les erreurs dans leur logarithme naturel d'autre part. Rappelons que:

$$k = e^K \quad (4.20)$$

$$\epsilon = e^E \quad (4.21)$$

On peut écrire la solution exacte comme la somme de la solution éléments finis et de l'erreur:

$$\begin{aligned} k_\alpha &= k + er_k \\ \epsilon_\alpha &= \epsilon + er_\epsilon \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} K_\alpha &= K + er_K \\ E_\alpha &= E + er_E \end{aligned} \quad (4.23)$$

où l'indice  $h$  dénote la solution éléments finis,  $er_k$  et  $er_\epsilon$  dénotent les erreurs en  $k$  et  $\epsilon$  et  $er_K$  et  $er_E$  celles dans leur logarithme naturel. Comme les relations (4.20), (4.21) sont vérifiées tant par la solution exacte que par la solution éléments finis, on obtient que:

$$\begin{aligned} k + er_k &= e^{K+er_K} \\ \epsilon + er_\epsilon &= e^{E+er_E} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ou encore

$$\begin{aligned} k + er_k &= k e^{er_k} \\ \epsilon + er_\epsilon &= \epsilon e^{er_\epsilon} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les exponentielles peuvent être développées en série de Taylor, ce qui nous permet d'écrire qu'au premier ordre on a :

$$1 + \frac{er_k}{k} = 1 + er_K + O(er_K^2) \quad (4.26)$$

$$1 + \frac{er_\epsilon}{\epsilon} = 1 + er_E + O(er_E^2) \quad (4.27)$$

Si on néglige maintenant les termes d'ordre supérieur  $O(er_K^2)$  et  $O(er_E^2)$  on obtient que les erreurs en variables logarithmiques correspondent aux erreurs relatives en  $k$  et  $\epsilon$  :

$$er_K = \frac{er_k}{k} \quad , \quad er_E = \frac{er_\epsilon}{\epsilon} \quad (4.28)$$

Quel sera alors l'effet du changement de variables dépendantes sur la précision de la viscosité turbulente? Pour répondre à cette question considérons que la solution exacte pour la viscosité turbulente est donnée par la somme entre la solution éléments finis  $\mu_T$  et son erreur  $er_{\mu_T}$ . Encore une fois, tant la solution exacte que la solution éléments finis satisfont l'équation (2.2) pour la viscosité turbulente. On a alors que :

$$\mu_T + er_{\mu_T} = \rho C_\mu \frac{(k + er_k)^2}{\epsilon + er_\epsilon} = \mu_T \frac{(1 + \frac{er_k}{k})^2}{1 + \frac{er_\epsilon}{\epsilon}} \quad (4.29)$$

Après le développement en série de la fonction rationnelle et en négligeant les termes d'ordre supérieure en  $\frac{er_k}{k}$  et  $\frac{er_\epsilon}{\epsilon}$  on obtient que :

$$er_{\mu_T} = \mu_T \left( 2 \frac{er_k}{k} - \frac{er_\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (4.30)$$

$$er_{\mu_T} = \mu_T (2 er_K - er_E)$$

Ceci implique que l'erreur en viscosité turbulente dépend des erreurs relatives en  $k$  et  $\epsilon$ , ou bien des erreurs dans les variables logarithmiques. Notons que pour la plupart des écoulements on retrouve des régions où  $k$  et  $\epsilon$  prennent des valeurs extrêmement

basses, mais conduisent à des valeurs importantes de la viscosité turbulente. Typiquement les différences entre les maxima et minima dans la solution sont d'environ 4-6 ordres de grandeurs dans le cas de l'énergie cinétique de la turbulence, de 8-10 ordres de grandeur pour  $\epsilon$  et de seulement 2-3 ordres de grandeur pour la viscosité turbulente. On peut donc rencontrer des situations où les valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  sont comparables, ou même plus petites que leurs erreurs. Cela détermine des erreurs extrêmement grandes pour la viscosité turbulente car la relation (4.30) comporte des divisions par  $k$  et  $\epsilon$ . Cette tendance est entièrement éliminée par le passage aux variables logarithmiques. En effet, l'erreur en  $\mu_T$  dépend uniquement et linéairement des erreurs en variables logarithmiques par le biais d'une relation qui ne comporte pas de divisions par de petites valeurs. C'est un argument de plus qui justifie le fait que la résolution en variables logarithmiques est nettement supérieure à celle en  $k$  et  $\epsilon$ .

### 4.3 Opérateur de transition

Le module adaptatif exploite ensuite la connaissance de la distribution d'erreur dans le domaine pour concevoir un meilleur maillage. La stratégie retenue procède par remaillage adaptatif telle que proposée initialement par Peraire et al. [47]. L'algorithme procède comme suit:

1. générer un maillage initial
2. calculer une solution par éléments finis
3. calculer l'estimation d'erreur
4. if (erreur globale < tolérance) alors
  - stopelse
  - calculer la fonction de maille  $\delta(x, y)$  à partir de l'estimation d'erreur
  - générer un maillage amélioré à l'aide de  $\delta$

- interpoler la solution sur le nouveau maillage  
 - goto 2  
 end if

L'erreur globale s'obtient de la norme de l'erreur sur chaque élément à l'aide de:

$$\|e_{tot}\|^2 = \sum \|e_K\|^2 \quad (4.31)$$

Supposons maintenant que l'on veuille réduire l'erreur d'un facteur  $\xi$  à chaque étape adaptative. On cherche alors à obtenir une solution ayant une erreur  $\xi \|e_{tot}\|$ .

Il ne reste qu'à déterminer la taille  $\delta(x,y)$  des éléments du prochain maillage. La fonction de maille  $\delta$  doit être telle que les éléments seront plus petits dans les zones entachées d'une erreur importante et plus grands là où la solution est déjà suffisamment précise. Pour ce faire, on utilise le principe d'équidistribution de l'erreur qui veut que chaque élément soit entaché d'une même erreur moyenne  $\|e_{moy}\|$ .

Sachant que l'on cherche à obtenir une diminution de l'erreur par un facteur  $\xi$ :

$$\|e_{moy}\| = \frac{\xi \|e_{tot}\|}{\sqrt{N_c}} \quad (4.32)$$

où  $N_c$  est le nombre d'éléments du maillage courant. On obtient l'expression de  $\delta$  en utilisant le taux de convergence asymptotique qui relie l'erreur à une puissance  $k$  de la taille  $h$  de l'élément:

$$\|e\| = ch^k \quad (4.33)$$

On a donc aussi:

$$\|e_{moy}\| = c\delta^k \quad (4.34)$$

d'où l'on tire:

$$\delta = \left\{ \frac{\xi \|e_{tot}\|}{\|e\| \sqrt{N_c}} \right\}^{1/k} h \quad (4.35)$$

Pour l'élément de Crouzeix-Raviart et un interpolant  $P_2$  de  $k$  et  $\epsilon$  on utilise une valeur de  $k$  égale à 2.

Finalement, on se sert de la distribution de taille  $\delta$  pour produire le nouveau maillage, grâce à un algorithme de maillage frontal tel que décrit dans [47].

Comme on peut le voir la génération du maillage adapté est basée sur la connaissance de la distribution de l'erreur. Pour les problèmes qui nous intéressent la solution est décrite par plusieurs variables et on évalue pour chacune sa propre erreur. Il est donc ensuite plus compliqué de compléter le raffinement du maillage de tel sorte que la précision sur chaque variable soit améliorée par le facteur imposée  $\xi$ . Une première approche, utilisée avec succès pour les écoulements turbulents [85-87], consiste à évaluer une erreur totale définie de façon à incorporer les erreurs déterminées pour toutes les variables d'intérêt. On emploie dans ce cas la formule suivante:

$$\| (e^u, e^p, e^k, e^\epsilon, e^{u'}) \|_\Omega = \left\{ \| e^u \|^2_{E,\Omega} + \| e^p \|^2_{L_1,\Omega} + \| e^k \|^2_{E,\Omega} + \| e^\epsilon \|^2_{E,\Omega} + \| e^{u'} \|^2_{E,\Omega} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

Dans cette expression les normes des erreurs sont équilibrées en les normalisant par les valeurs maximales des variables. Les résultats donnés par cette méthode dans le cas d'une résolution en  $k$  et  $\epsilon$  sont encourageants. Pourtant son utilisation dans le cas des variables logarithmiques soulève des questions quant à la bonne mise à l'échelle des erreurs pour les différentes variables.

Une deuxième approche possible consiste à déterminer une distribution de taille pour chaque variable d'intérêt et de choisir ensuite en chaque point la taille la plus petite.

## Chapitre 5

### Validation

On évalue premièrement la performance de l'algorithme de résolution, des estimateurs d'erreur et de la stratégie d'adaptativité en solutionnant des problèmes pour lesquels il existe une solution analytique. Ceci permet de comparer l'estimateur à l'erreur exacte et d'étudier les distributions d'erreur et d'estimateur. Ceci permet aussi d'apprécier la qualité de la solution obtenue à l'aide de différentes formulations par éléments finis et de vérifier la convergence globale du processus adaptatif. Les équations de Navier-Stokes, de  $k$  et de  $\epsilon$  (respectivement  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$ ) sont résolues dans leur forme adimensionnelle. La description des géométries et des conditions limites utilisées est donc donnée sous forme adimensionnelle.

#### 5.1 Couche cisailée 2-D avec une variation linéaire de la viscosité turbulente

L'énoncé de ce problème est inspiré de la solution analytique tirée de Schlichting [91]. La solution est donnée par:

$$\begin{aligned}
u &= U_1 \left\{ \left[ \frac{1+r}{2} \right] + \left[ \frac{1-r}{2} \right] \operatorname{erf} \left[ \frac{\sigma y}{x} \right] \right\} \\
v &= U_1 \left[ \frac{1-r}{2} \right] \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \\
p &= 0 \\
k &= k_0 \left[ c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \right] \\
\epsilon &= \frac{\epsilon_0}{x} \left[ c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \right]^2 \\
\mu_T &= \mu_{T_0} x
\end{aligned} \tag{5.1}$$

On utilise les valeurs suivantes des paramètres

$$\begin{aligned}
U_1 &= 1.0 \\
r &= 0.0 \\
\sigma &= 13.5 \\
k_0 &= \frac{343}{75,000} U_1^2 (1-r) \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \\
\epsilon_0 &= \frac{343}{22,500} C_\mu U_1^3 (1-r)^2 \frac{\sigma^2}{\pi} \\
\mu_{T_0} &= \frac{343}{250,000} \rho U_1 \\
Re_l &= \frac{\rho U_1 L}{\mu_l} = 10^4
\end{aligned} \tag{5.2}$$

En substituant les expressions dans les équations différentielles (2.1), (3.4) et (3.4) on détermine les termes source à incorporer aux équations de mouvement, de  $k$  et d' $\epsilon$  de façon à s'assurer que la solution soit bien donnée par les relations ci-dessus.

Le problème est résolu sur le rectangle adimensionnel  $100 \leq x \leq 300$ ,  $-75 \leq y \leq 75$ . On applique des conditions de Dirichlet à toutes les variables ( $u, v, k, \epsilon$ ),

sur toutes les frontières. La seule exception est constituée par la frontière basse (à basse vitesse aussi) qui a une condition libre dans la composante  $v$  de la vitesse afin de fixer le niveau de la pression à zéro.

Tout d'abord on résout le problème sur des maillages uniformes afin de déterminer le taux de convergence de l'élément pour les différentes variables. On utilise une formulation Galerkin moindres carrés et les équations en variables logarithmiques. Pour chaque solution on évalue l'erreur exacte en vitesse,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$ . Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 5.1. Les figures 5.1 et 5.2 présentent les trajectoires des erreurs en fonction du nombre de points du maillage et en fonction de la taille des éléments. Sur les deux figures les valeurs sont représentées sous échelle logarithmique. Remarquons que les quatre courbes ont pratiquement la même pente ce qui indique que le taux de convergence de l'élément est le même pour les quatre variables. Dans le tableau 5.2 on présente le taux de convergence évalué entre les maillages 1 et 2 et respectif entre les maillages 2 et 3. Pour toutes les variables il est approximativement 2, l'écart par rapport à cette valeur se situant en-dessous de 6%. Cette constatation nous permet d'utiliser cette valeur pour le taux 'a priori' de l'élément dans le processus adaptatif.

Tableau 5.1 Trajectoire des erreurs pour un raffinement uniforme

Maillage	taille des éléments	# de points	Erreur en vitesse	Erreur en $\ln(k)$	Erreur en $\ln(\epsilon)$	Erreur en $\mu_T$
1	6.25	3705	$8.041 \times 10^{-2}$	$2.848 \times 10^{-1}$	$5.894 \times 10^{-1}$	$1.455 \times 10^{-2}$
2	4.167	8153	$3.681 \times 10^{-2}$	$1.284 \times 10^{-1}$	$2.682 \times 10^{-1}$	$6.725 \times 10^{-3}$
3	2.778	18349	$1.621 \times 10^{-2}$	$5.536 \times 10^{-2}$	$1.156 \times 10^{-1}$	$2.828 \times 10^{-3}$

Tableau 5.2 Taux de convergence de l'élément

Raffinement	vitesse	$\ln(k)$	$\ln(\epsilon)$	$\mu_T$
1-2	1.93	1.96	1.94	1.90
2-3	2.02	2.07	2.07	2.13

Il faut préciser que le taux de convergence de l'élément diminue lorsque l'écoulement devient moins visqueux ou bien en présence des singularités. Dans ce deuxième cas, même si l'erreur est bornée, il est possible qu'elle ne diminue pas localement autour de la singularité lorsque le maillage est raffiné. Le fait d'utiliser dans certaines régions de l'écoulement une valeur pour le taux de convergence qui est supérieure à la valeur réelle entraîne un raffinement local sous-optimal. Pourtant il est difficile de connaître *a priori* la valeur du taux de convergence de l'élément, car il dépend des caractéristiques de l'écoulement et peut varier avec le raffinement du maillage. Dans nos calculs le processus adaptatif est itératif. Donc, lorsqu'on obtient une solution, l'estimation d'erreur indique les endroits où le maillage doit être raffiné. Même si le maillage adapté n'est pas optimal, le processus adaptatif sera dirigé correctement. De plus, comme la solution change elle même avec le raffinement du maillage, cette procédure nous permet d'obtenir l'équilibre entre les caractéristiques du maillage et celles de la solution.

Une première série de calculs adaptatifs, qui sera considérée comme calcul de référence pour ce cas de validation, est réalisée en variables logarithmiques, à l'aide d'une formulation Galerkin moindres carrés (GLS). Afin de valider le comportement de la méthode proposée, les calculs ont été effectués en utilisant les estimateurs d'erreur par projection locale. Pour évaluer aussi les autres techniques d'estimation d'erreur, on a calculé les estimations de l'erreur par projection globale et par projection locale discrète. Chaque estimé de l'erreur est comparé à l'erreur exacte. Ceci permet de

vérifier à la fois si les estimateurs sont fiables et si le module d'adaptativité se comporte comme prévu. Dans tous les cas, les calculs commencent sur un maillage grossier. Le module d'adaptativité conçoit le maillage suivant afin de réduire l'erreur par un facteur de 2 pour toutes les variables considérées, soit le champs de vitesse,  $k$ ,  $\epsilon$  (ou leur logarithme naturel) et  $\mu_T$ . On interpole la solution obtenue sur le maillage courant sur le nouveau maillage. On notera que lorsque le calcul est fait en  $k$  et  $\epsilon$ , l'erreur est évaluée pour ces variables, tandis que l'erreur est évaluée pour  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  lorsque la résolution est faite en variables logarithmiques.

Les tableaux 5.3 à 5.6 résument les résultats obtenus. On présente l'évolution de l'erreur en vitesse et dans les variables de turbulence. Dans chaque tableau on retrouve la norme de l'erreur exacte ainsi que celle des trois estimateurs. On peut remarquer que les deux estimateurs d'erreurs par projection locale se comportent de façon similaire. L'estimateur à projection globale présente un écart de comportement dans le sens qu'il sous-estime l'erreur réelle. Outre ce fait, l'erreur exacte et les estimateurs diminuent au même rythme pour toutes les variables.

Tableau 5.3 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en vitesse

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$1.116 \times 10^{-1}$	$1.061 \times 10^{-1}$	$1.047 \times 10^{-1}$	$8.937 \times 10^{-2}$
1	3049	1496	$3.572 \times 10^{-2}$	$3.208 \times 10^{-2}$	$3.187 \times 10^{-2}$	$2.453 \times 10^{-2}$
2	6890	3409	$1.347 \times 10^{-2}$	$1.175 \times 10^{-2}$	$1.157 \times 10^{-2}$	$8.055 \times 10^{-3}$
3	16700	8299	$5.255 \times 10^{-3}$	$4.592 \times 10^{-3}$	$4.558 \times 10^{-3}$	$2.825 \times 10^{-3}$

Tableau 5.4 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $k$ 

Maillage	# de points	# d' éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$3.756 \times 10^{-1}$	$4.221 \times 10^{-1}$	$4.169 \times 10^{-1}$	$2.610 \times 10^{-1}$
1	3049	1496	$1.509 \times 10^{-1}$	$1.615 \times 10^{-1}$	$1.548 \times 10^{-1}$	$9.589 \times 10^{-2}$
2	6890	3409	$5.572 \times 10^{-2}$	$5.942 \times 10^{-2}$	$5.767 \times 10^{-2}$	$3.108 \times 10^{-2}$
3	16700	8299	$2.143 \times 10^{-2}$	$2.228 \times 10^{-2}$	$2.185 \times 10^{-2}$	$1.126 \times 10^{-2}$

Tableau 5.5 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$ 

Maillage	# de points	# d' éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$7.778 \times 10^{-1}$	$8.769 \times 10^{-1}$	$8.690 \times 10^{-1}$	$5.715 \times 10^{-1}$
1	3049	1496	$3.047 \times 10^{-1}$	$3.259 \times 10^{-1}$	$3.129 \times 10^{-1}$	$1.973 \times 10^{-1}$
2	6890	3409	$1.133 \times 10^{-1}$	$1.187 \times 10^{-1}$	$1.153 \times 10^{-1}$	$6.237 \times 10^{-2}$
3	16700	8299	$4.261 \times 10^{-2}$	$4.432 \times 10^{-2}$	$4.357 \times 10^{-2}$	$2.207 \times 10^{-2}$

Remarquons que l'erreur diminue à chaque cycle adaptatif par un facteur plus grand que 2, la cible imposée, résultat normal étant donné qu'on adapte selon plusieurs variables en même temps. Les figures 5.3 à 5.6 présentent ces trajectoires de façon graphique. L'estimateur à projection globale semble sous-estimer l'erreur alors que les méthodes de projection locale sont très proches de l'erreur exacte.

Tableau 5.6 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$ 

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$3.204 \times 10^{-2}$	$2.430 \times 10^{-2}$	$2.417 \times 10^{-2}$	$2.005 \times 10^{-2}$
1	3049	1496	$6.060 \times 10^{-3}$	$5.269 \times 10^{-3}$	$5.284 \times 10^{-3}$	$4.540 \times 10^{-3}$
2	6890	3409	$1.991 \times 10^{-3}$	$1.826 \times 10^{-3}$	$1.830 \times 10^{-3}$	$1.643 \times 10^{-3}$
3	16700	8299	$5.928 \times 10^{-4}$	$5.506 \times 10^{-4}$	$1.034 \times 10^{-3}$	$4.914 \times 10^{-4}$

Les figures 5.7 à 5.14 présentent les histogrammes de l'erreur exacte et de l'estimé par projection locale. L'abscisse est la norme de l'erreur sur un élément et l'ordonnée le nombre d'éléments ayant cette erreur. On notera que l'échelle horizontale est logarithmique. Un maillage optimal ne présentera qu'un pic puisque tous les éléments porteront la même erreur. On constate dans les deux cas (erreur exacte et estimation de l'erreur) que la médiane de l'erreur diminue à chaque cycle et que la précision s'améliore partout dans le domaine d'un cycle à l'autre. Dans le cas de l'erreur en vitesse on constate qu'aux cycles 2 et 3 la grande majorité des éléments sont entachés d'une erreur quasi constante car l'histogramme se resserre autour de la valeur moyenne (une grande fraction des éléments ont une erreur proche de la moyenne). La présence des éléments avec une erreur plus petite que la moyenne s'explique par le fait que, dans certaines régions, on raffine selon une des variables même si les autres sont calculées avec une bonne précision. Le résultat net est que l'erreur dans ces variables diminue d'avantage, effet qui est remarqué sur les histogrammes. On remarque aussi que l'histogramme pour l'erreur estimée se compare très bien à celui obtenu pour l'erreur exacte et cela pour toutes les variables considérées.

La figure 5.15 présente la séquence de maillages générés par la stratégie

d'adaptativité. Les maillages générés sont bien concentrés là où les variables varient beaucoup. On remarque sur le dernier maillage une concentration marquée en deux bandes correspondantes aux régions de variations rapides en vitesse, en  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et en  $\mu_T$ .

Les figures 5.16 et 5.17 présentent la solution pour les vitesses  $u$  et  $v$ , la viscosité turbulente  $\mu_T$ , l'énergie cinétique turbulente  $k$ , son taux de dissipation  $\epsilon$  ainsi que leur logarithme naturel. La colonne de gauche correspond à la solution obtenue sur le maillage initial tandis que celle de droite présente la solution obtenue sur le maillage final. La solution sur le maillage adapté est de meilleure qualité pour toutes les variables. La solution analytique (5.1) indique que les iso-lignes de viscosité turbulente devraient être verticales car  $\mu_T$  ne dépend que de  $x$ . On peut donc mesurer l'amélioration des prédictions en comparant les distributions obtenues pour la viscosité turbulente. On constate une nette amélioration. A toute fin utile, les iso-lignes de viscosité turbulente sur le dernier maillage sont verticales.

Les figures 5.18 à 5.25 présentent une comparaison d'iso-erreur exacte et estimée sur le maillage initial et sur le maillage 1. Sur chaque figure on retrouve les iso-lignes de l'erreur exacte en haut et à gauche, de même que les iso-lignes de l'erreur estimée par projection locale, par projection locale discrète et par projection globale. On présente à la fois l'erreur en vitesse évaluée dans la norme énergie, l'erreur en  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et l'erreur en viscosité turbulente. L'interprétation de ces figures doit être faite avec prudence. En effet, bien que le nombre de contours soit le même pour tous les graphiques, les maximums et minimums varient d'une variable à l'autre et ne sont pas les mêmes pour l'erreur exacte et les estimateurs. De plus, on se rappellera que les trajectoires indiquent clairement que l'erreur et les estimateurs par projection locale ont des niveaux d'erreur globale tout à fait comparables tandis que la projection globale sous-estime l'erreur (figures 5.3 à 5.6). Une comparaison des iso-lignes d'erreur ne peut donc se faire qu'en cherchant à déterminer si les estimateurs capturent bien la

topologie de la surface de l'erreur (pics, vallées, falaises, plateaux, etc). On remarquera que dans tous les cas les estimateurs à projection locale se comportent de la même façon, en produisant une très bonne estimation de l'erreur exacte.

On notera aussi le fait que l'estimateur à projection locale discrète est parfois moins robuste que celui à base de projections continues, ce qu'on peut remarquer à la figure 5.6 pour l'erreur en viscosité turbulente sur le dernier maillage. En effet, lorsqu'on traite un noeud qui se trouve à l'intérieur du domaine et qui est connecté à seulement trois éléments, la construction des dérivées par projection discrète dispose de seulement 6 points de relèvement pour déterminer les 6 coefficients du polynôme quadratique local. Il se peut alors que le système obtenu soit indéterminé ou alors mal conditionné, ce qui conduit à une mauvaise évaluation de l'erreur sur ces éléments.

D'autre part, remarquons que l'estimateur par projection globale génère une estimation de l'erreur en quelque sorte plus diffuse. Les régions entachées d'erreur sont plus grandes et aplaties. La cause réside probablement dans le fait que, dans la reconstruction globale des dérivées, une perturbation locale se propage sur plusieurs éléments qui réagissent tous comme des ressorts couplés. A ce point-ci on peut apprécier que l'estimateur par projection locale est efficace et en même temps robuste.

Notons aussi que l'erreur en vitesse, en  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  est concentrée là où ces variables présentent les variations les plus rapides. La solution exacte du problème est symétrique dans ses gradients (au signe près). On s'attend donc à ce que l'erreur soit elle aussi symétrique par rapport à l'axe des  $x$ . C'est le cas de l'erreur en vitesse et dans les variables logarithmiques, mais pas celui de la viscosité turbulente sur le premier maillage. Ce résultat semble étonnant d'autant plus que l'erreur en viscosité turbulente est entièrement déterminée par les erreurs dans les deux variables logarithmiques par:

$$er_{\mu_t} = \mu_T (2er_K - er_E) \quad (5.3)$$

Lorsqu'on prend la valeur absolue de l'erreur, on obtient:

$$|er_{\mu_T}| = \mu_T(2|er_K| \pm |er_E|) \quad (5.4)$$

Donc les contributions des erreurs en  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  peuvent soit s'additionner ou bien s'annuler réciproquement. C'est exactement ce qui se passe sur le premier maillage où dans la partie inférieure les erreurs en  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  se retrouvent cumulées dans l'erreur en  $\mu_T$ , tandis que dans la partie supérieure l'effet est contraire et par conséquent l'erreur en  $\mu_T$  est beaucoup plus petite. Voici donc un exemple qui illustre la nécessité de considérer dans le processus adaptatif les erreurs dans toutes les variables, incluant l'erreur pour la viscosité turbulente. Notons aussi que les contours de  $\mu_T$  de la figure 5.16 présentent des irrégularités exactement là où l'estimateur d'erreur en  $\mu_T$  présente ses maxima.

Une deuxième série de calculs a été ensuite réalisée sur les mêmes maillages en retenant toujours une formulation de type Galerkin moindres carrés, mais cette fois en utilisant  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes. Les trajectoires des erreurs en vitesse,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\mu_T$  sont présentées dans les tableaux 5.7 à 5.10 et sous forme graphique dans les figures 5.26 à 5.29.

Tableau 5.7 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en vitesse

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$1.169 \times 10^{-1}$	$1.080 \times 10^{-1}$	$1.047 \times 10^{-1}$	$9.065 \times 10^{-2}$
1	3049	1496	$3.607 \times 10^{-2}$	$3.197 \times 10^{-2}$	$3.174 \times 10^{-2}$	$2.432 \times 10^{-2}$
2	6890	3409	$1.355 \times 10^{-2}$	$1.173 \times 10^{-2}$	$1.156 \times 10^{-2}$	$8.011 \times 10^{-3}$
3	16700	8299	$5.284 \times 10^{-3}$	$4.597 \times 10^{-3}$	$4.564 \times 10^{-3}$	$2.831 \times 10^{-3}$

Tableau 5.8 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $k$ 

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$7.636 \times 10^{-3}$	$7.318 \times 10^{-3}$	$7.109 \times 10^{-3}$	$5.159 \times 10^{-3}$
1	3049	1496	$2.546 \times 10^{-3}$	$2.534 \times 10^{-3}$	$2.535 \times 10^{-3}$	$1.556 \times 10^{-3}$
2	6890	3409	$1.266 \times 10^{-3}$	$1.260 \times 10^{-3}$	$1.283 \times 10^{-3}$	$6.987 \times 10^{-4}$
3	16700	8299	$6.079 \times 10^{-4}$	$6.107 \times 10^{-4}$	$6.159 \times 10^{-4}$	$3.250 \times 10^{-4}$

Tableau 5.9 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$ 

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$2.647 \times 10^{-4}$	$3.350 \times 10^{-4}$	$3.246 \times 10^{-4}$	$2.249 \times 10^{-4}$
1	3049	1496	$7.357 \times 10^{-5}$	$7.639 \times 10^{-5}$	$7.461 \times 10^{-5}$	$5.158 \times 10^{-5}$
2	6890	3409	$4.045 \times 10^{-5}$	$4.158 \times 10^{-5}$	$4.128 \times 10^{-5}$	$2.479 \times 10^{-5}$
3	16700	8299	$1.714 \times 10^{-5}$	$1.746 \times 10^{-5}$	$1.738 \times 10^{-5}$	$9.749 \times 10^{-6}$

On remarquera que le comportement des estimateurs n'est pas affecté par le changement de variables. On retrouve les mêmes indices d'efficacité (rapport entre l'erreur estimée et l'erreur exacte) très bons dans les cas des techniques à projection locale. La projection globale sous-estime encore l'erreur.

Tableau 5.10 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$ 

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	1.088	1.173	1.191	$8.585 \times 10^{-1}$
1	3049	1496	$4.335 \times 10^{-1}$	$4.956 \times 10^{-1}$	$5.057 \times 10^{-1}$	$3.549 \times 10^{-1}$
2	6890	3409	$1.052 \times 10^{-1}$	$1.096 \times 10^{-1}$	$1.094 \times 10^{-1}$	$6.805 \times 10^{-2}$
3	16700	8299	$4.566 \times 10^{-2}$	$4.677 \times 10^{-2}$	$4.690 \times 10^{-2}$	$2.592 \times 10^{-2}$

Comparons maintenant la résolution des équations écrites en  $k$  et  $\epsilon$  à la résolution en variables logarithmiques. N'oublions pas que le but du passage en variables logarithmiques a été d'augmenter la robustesse de l'algorithme, d'assurer la positivité des variables de turbulence, mais aussi d'obtenir des solutions plus précises. Dans un cas le calcul est réalisé avec  $k$  et  $\epsilon$  comme variables primaires, tandis que dans l'autre les inconnues sont  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$ . On peut difficilement comparer ces variables. Pourtant leur précision est quantifiée dans la précision de la viscosité turbulente qui est une variable dérivée, et la seule variable de turbulence qui intervient dans l'équation d'énergie. L'erreur pour  $\mu_T$  est calculée de la même façon dans les deux cas et la comparaison est rigoureusement correcte. La figure 5.30 illustre les erreurs pour les deux séries de calculs. La ligne continue correspond à la résolution en variables logarithmiques et celle discontinue à la résolution en variables  $k$  et  $\epsilon$ . On note une remarquable amélioration de la précision lorsque les variables logarithmiques sont utilisées. En effet, les différences entre les deux courbes sont de deux ordres de grandeur. L'effet de l'utilisation des variables logarithmiques est si marqué, que la solution dans ce cas sur le premier maillage est plus précise en  $\mu_T$  que la solution en  $(k, \epsilon)$  sur le maillage le plus fin. La figure 5.31 présente les iso-lignes de viscosité turbulente dans les deux cas. Rappelons que celles-ci doivent être verticales. A gauche

on retrouve la solution obtenue avec  $k$  et  $\epsilon$  comme variables primitives, tandis qu'à droite se trouve la solution obtenue à l'aide des variables logarithmiques. L'amélioration de la solution dans ce dernier cas est clairement illustrée.

Une autre question à étudier est l'effet de la formulation utilisée pour stabiliser les équations (type d'upwinding). Rappelons ici que nous avons programmé cinq formulations différentes, soit: Galerkin, SU (upwind sur la convection), SUPG incomplet (upwind sur la convection et les termes source), SUPG (upwind sur tous les termes) et Galerkin moindres carrés (notée GLS - Galerkin Least Squares). La solution sur le premier maillage adapté a été successivement obtenue à l'aide de ces 5 formulations. La figure 5.32 compare les iso-lignes de la viscosité turbulente: en haut on retrouve la solution Galerkin, suivie par les solutions SU, SUPG incomplet, SUPG et GLS. On remarque que les méthodes SU et SUPG incomplet, qui ne sont pas résiduelles, introduisent des erreurs de formulation qui se manifestent sous la forme d'irrégularité dans les contours de  $\mu_T$ . Les trois autres méthodes, qui sont résiduelles, donnent de très bons résultats. Dans ce problème, la viscosité turbulente est élevée partout dans le domaine de calcul, ce qui fait que la méthode de Galerkin classique se comporte tout aussi bien que les méthodes stabilisées SUPG et GLS.

Tableau 5.11 Les erreurs pour différentes formulations éléments finis sur le maillage 1

Formulation	Erreur en vitesse	Erreur en $\ln(k)$	Erreur en $\ln(\epsilon)$	Erreur en $\mu_T$
Galerkin	$3.195 \times 10^{-2}$	$1.658 \times 10^{-1}$	$3.473 \times 10^{-1}$	$9.137 \times 10^{-3}$
SU	$4.025 \times 10^{-2}$	$2.812 \times 10^{-1}$	$6.042 \times 10^{-1}$	$8.341 \times 10^{-2}$
SUPG-incomplet	$6.171 \times 10^{-2}$	$1.855 \times 10^{-1}$	$4.352 \times 10^{-1}$	$3.013 \times 10^{-2}$
SUPG	$3.740 \times 10^{-2}$	$1.509 \times 10^{-1}$	$3.044 \times 10^{-1}$	$5.782 \times 10^{-3}$
GLS	$3.572 \times 10^{-2}$	$1.509 \times 10^{-1}$	$3.047 \times 10^{-1}$	$6.060 \times 10^{-3}$

Dans le tableau 5.11 on présente l'erreur exacte en vitesse,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$  pour les différentes formulations. Au niveau de l'erreur en vitesse, la méthode de Galerkin donne la meilleure réponse, tandis que pour la viscosité turbulente les plus performantes s'avèrent être les méthodes stabilisées SUPG et GLS.

La méthodologie adaptative proposée permet non seulement d'obtenir de solutions numériques précises, mais elle représente aussi une approche rapide et économique pour résoudre les écoulements turbulents. Le tableau 5.12 présente les temps de calcul enregistrés pour la série de calculs considérée comme référence (formulation GLS, réduction par un facteur 2 de l'erreur estimée par projection locale).

Tableau 5.12 Statistique des temps de calcul

Maillage	Génération du maillage (sec)	Résolution (sec)	Estimation de l'erreur (sec)	Temps total (sec)
Cycle - 0	2	272	6	280
Cycle - 1	6	1006	15	1027
Cycle - 2	11	2678	39	2728
Cycle - 3	24	5455	100	5579
<b>Total (adaptatif)</b>	<b>43</b>	<b>9411</b>	<b>160</b>	<b>9614</b>
<b>Maillage final sans solution initiale</b>	<b>16</b>	<b>21901</b>	<b>100</b>	<b>22017</b>

Les données couvrent toutes les étapes de calcul, soit la génération du maillage (avec interpolation de la solution, là où une solution a été obtenue sur un maillage précédent), la résolution et l'estimation de l'erreur. Rappelons que sur les maillages adaptés le

calcul utilise comme solution initiale la solution obtenue précédemment, interpolée sur le nouveau maillage. Le tableau contient aussi sur la dernière ligne le temps de calcul enregistré lorsque le calcul a été réalisé directement sur le maillage le plus fin mais sans disposer d'une solution initiale. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur IBM R6000 modèle 590.

On remarque que le temps passé dans la génération du maillage et l'interpolation de la solution représente moins de 0.5% du temps total de calcul. Cela signifie que la technique de remaillage employée est peu coûteuse tout en conférant une souplesse remarquable à l'algorithme adaptatif. L'estimation de l'erreur quand à elle représente moins de 2% du coût total du calcul adaptatif. La résolution complète du problème nécessite 9614 secondes. La résolution du même problème directement sur le maillage le plus fin, mais cette fois sans disposer d'une solution initiale obtenue par interpolation, coûte 22017 secondes. L'algorithme adaptatif réalise donc une économie de plus de 50% du temps de calcul. Il faut aussi noter que sans l'adaptativité il aurait été pratiquement impossible de concevoir un maillage conduisant à une solution tout aussi précise que celle obtenue par l'adaptativité. En effet, on a déjà remarqué qu'un maillage uniforme avec un nombre comparable de points conduit à une solution dont l'erreur est 3-4 fois plus élevée (figures 5.3 à 5.6). Le résultat net est que le calcul non-adaptatif permettant d'atteindre le même niveau d'erreur que celui enregistré sur le maillage final adapté nécessiterait beaucoup plus de points et coûterait beaucoup plus cher que le calcul adaptatif.

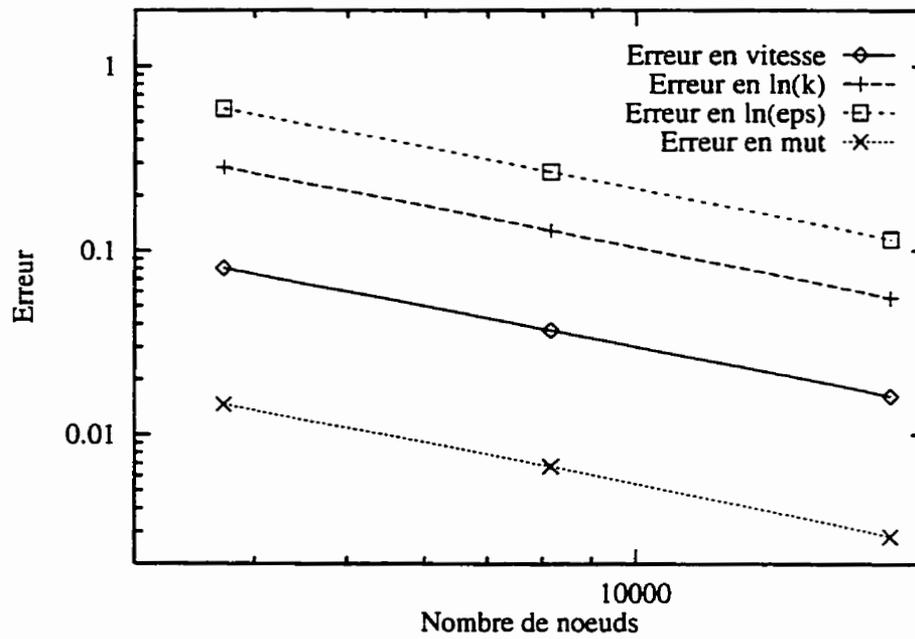


Figure 5.1 Trajectoire des erreurs pour un raffinement uniforme

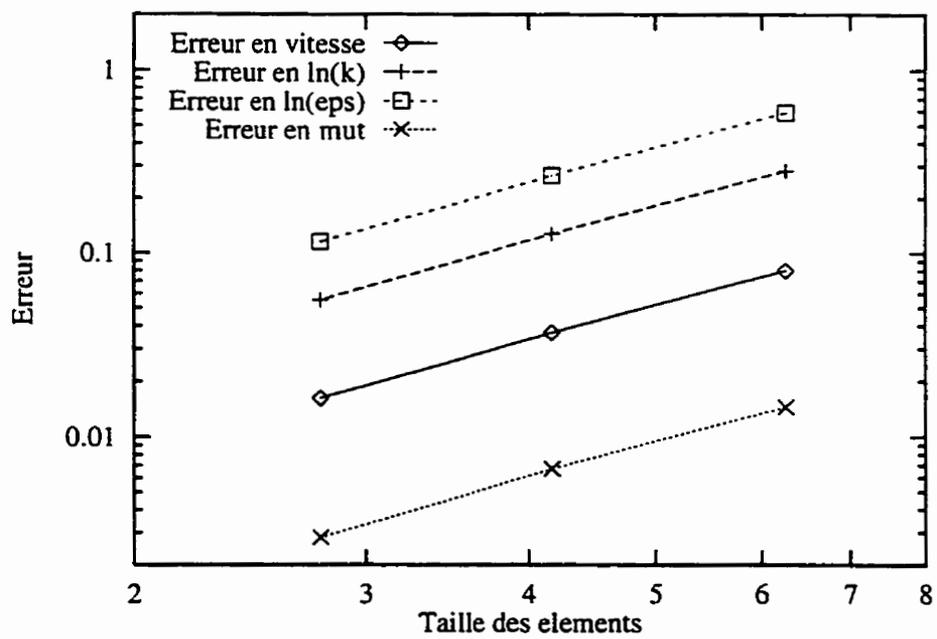


Figure 5.2 Trajectoire de l'erreur en fonction de la taille des éléments

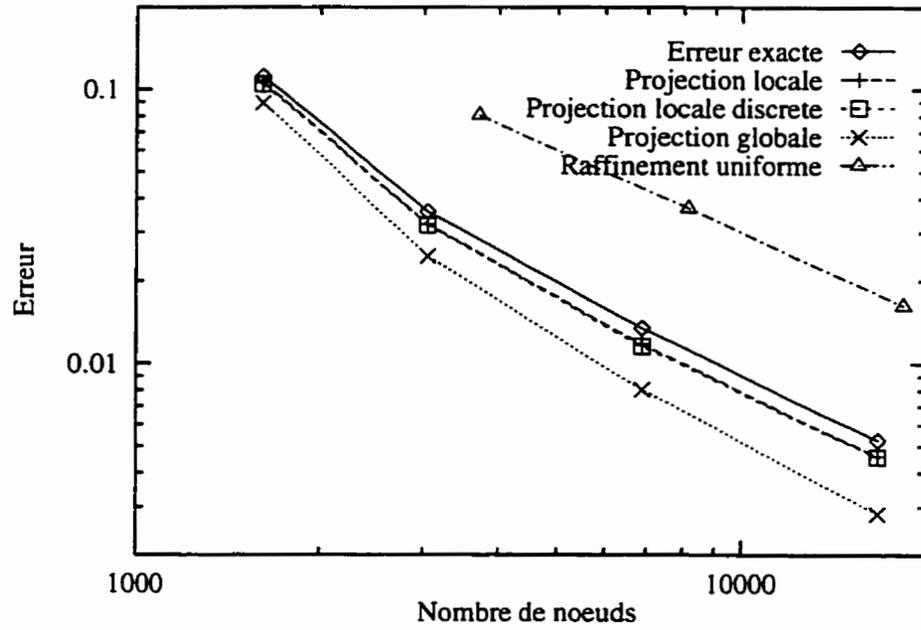


Figure 5.3 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en vitesse

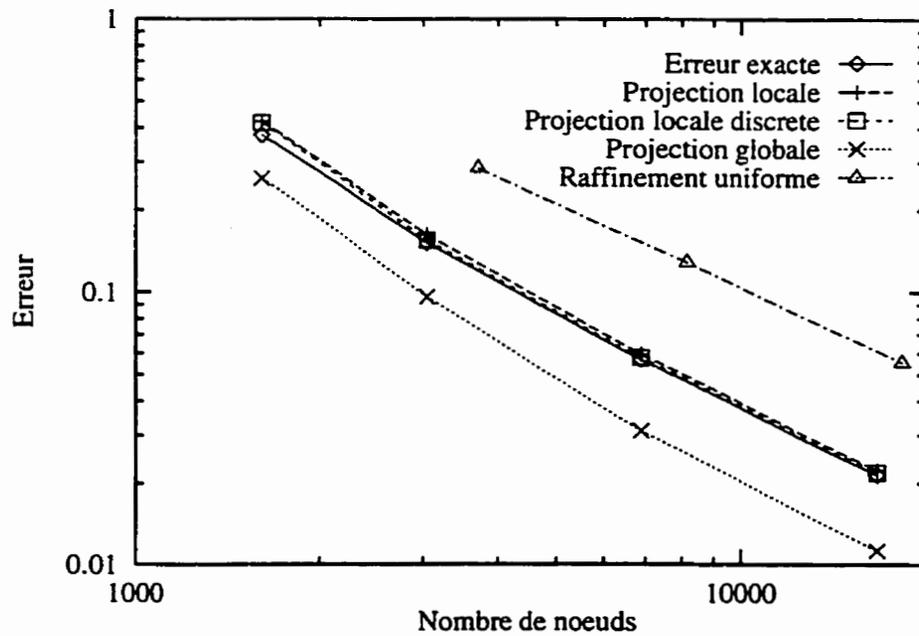


Figure 5.4 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $k$

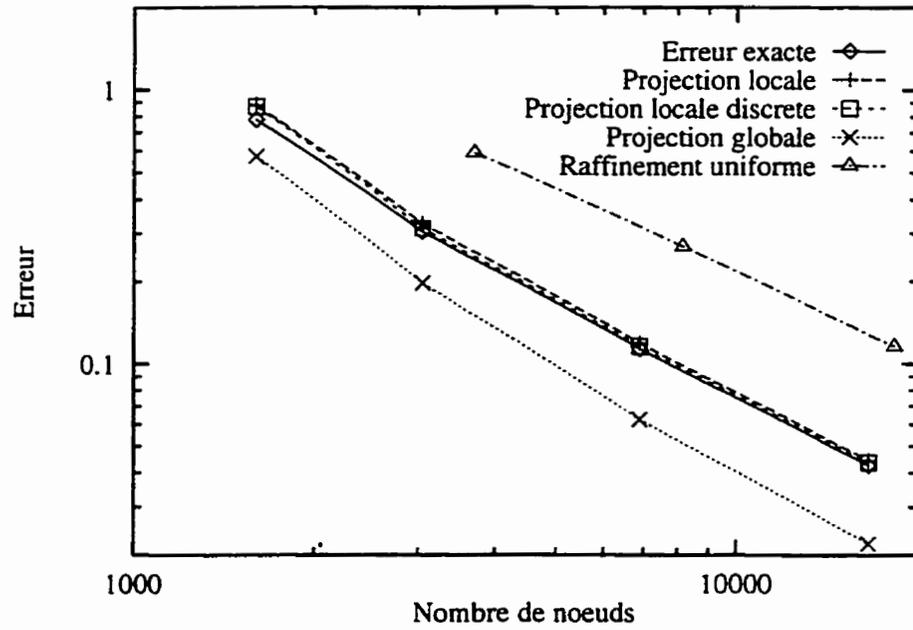


Figure 5.5 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$

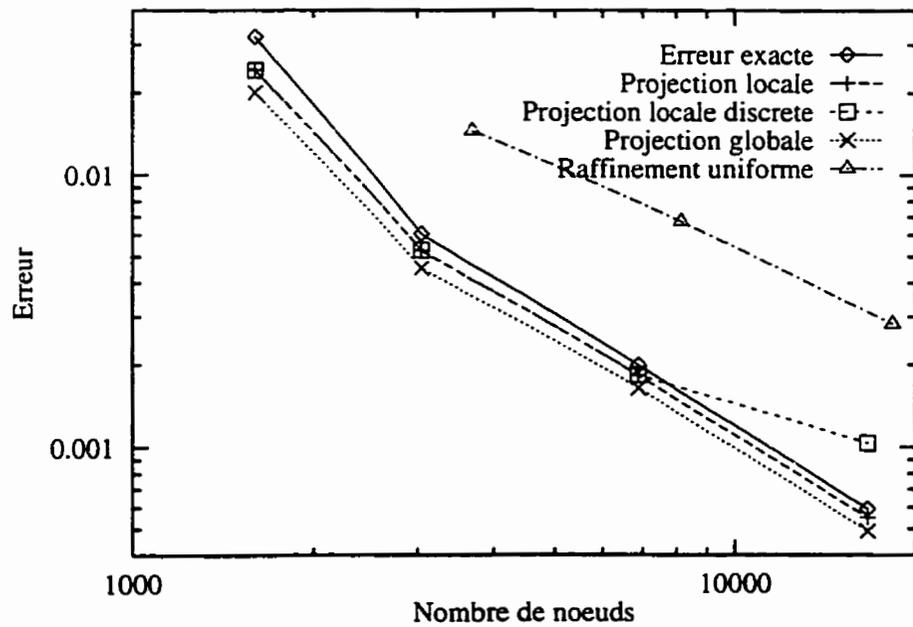


Figure 5.6 Résolution en variables logarithmiques - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$

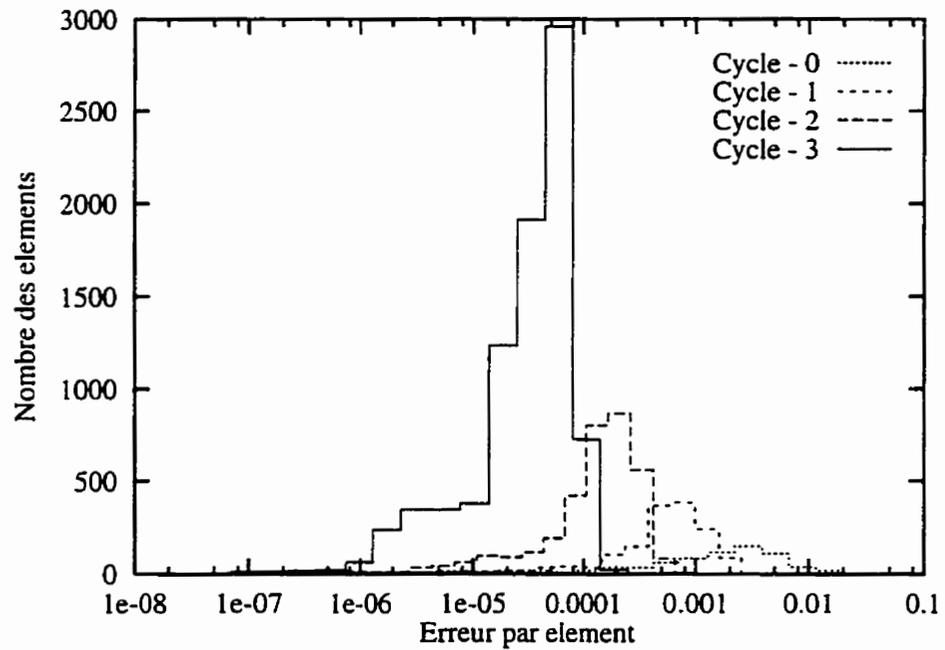


Figure 5.7 Histogramme de l'erreur en vitesse estimée par projection locale

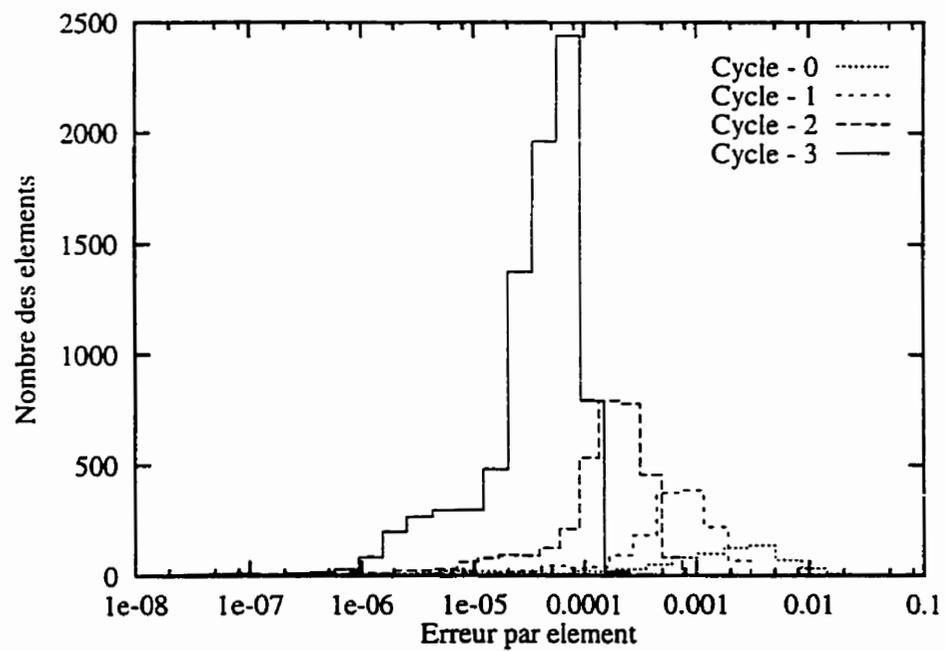


Figure 5.8 Histogramme de l'erreur exacte en vitesse

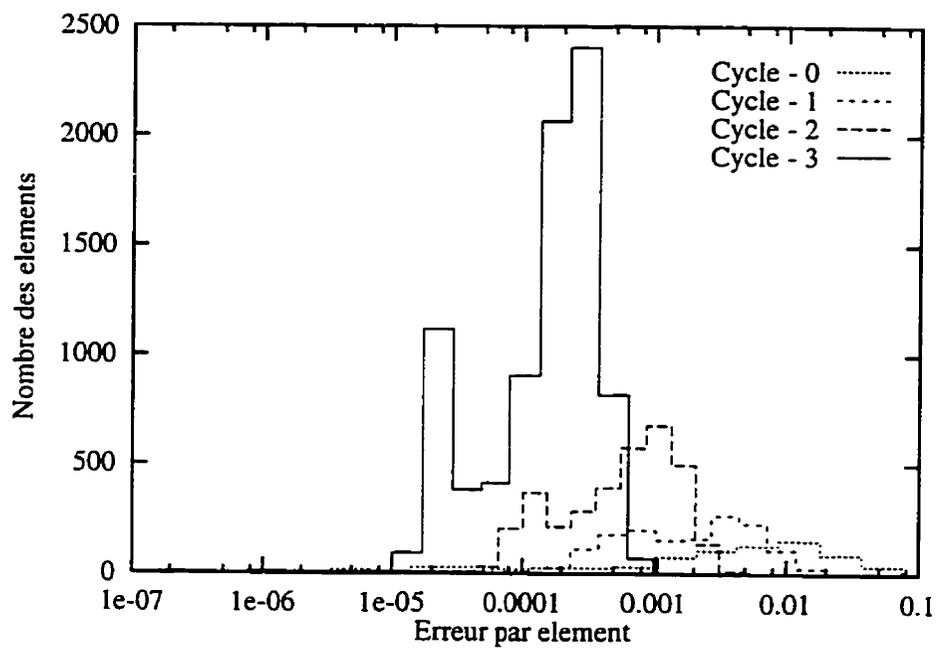


Figure 5.9 Histogramme de l'erreur en  $k$  estimée par projection locale

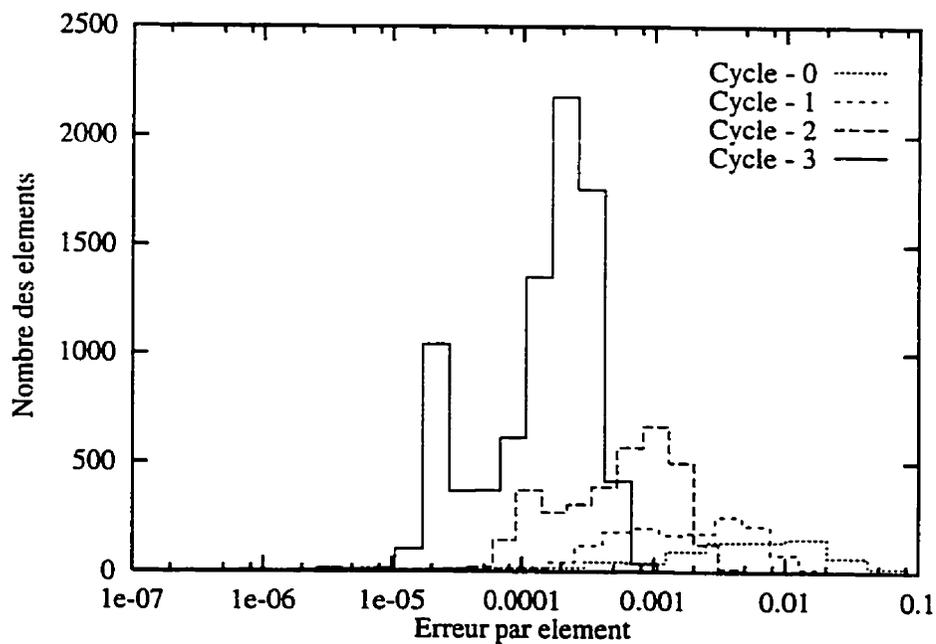


Figure 5.10 Histogramme de l'erreur exacte en  $k$

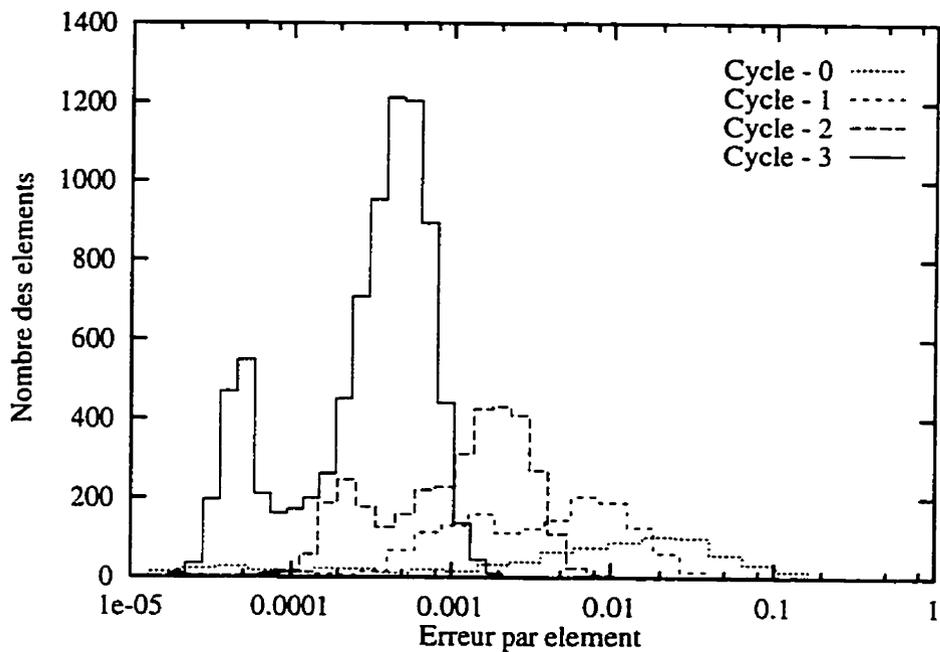


Figure 5.11 Histogramme de l'erreur en  $\epsilon$  estimée par projection locale

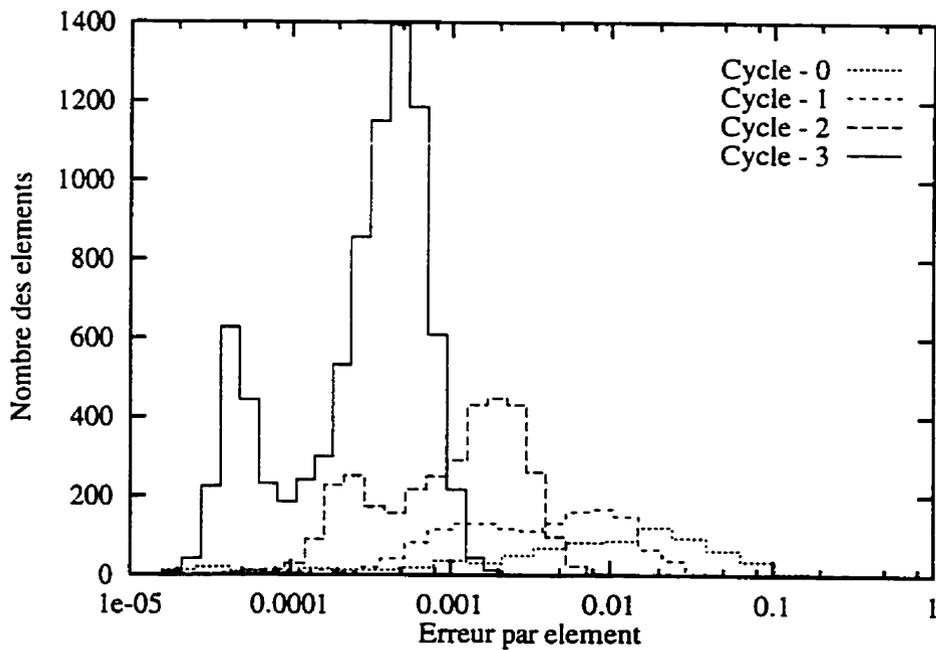


Figure 5.12 Histogramme de l'erreur exacte en  $\epsilon$

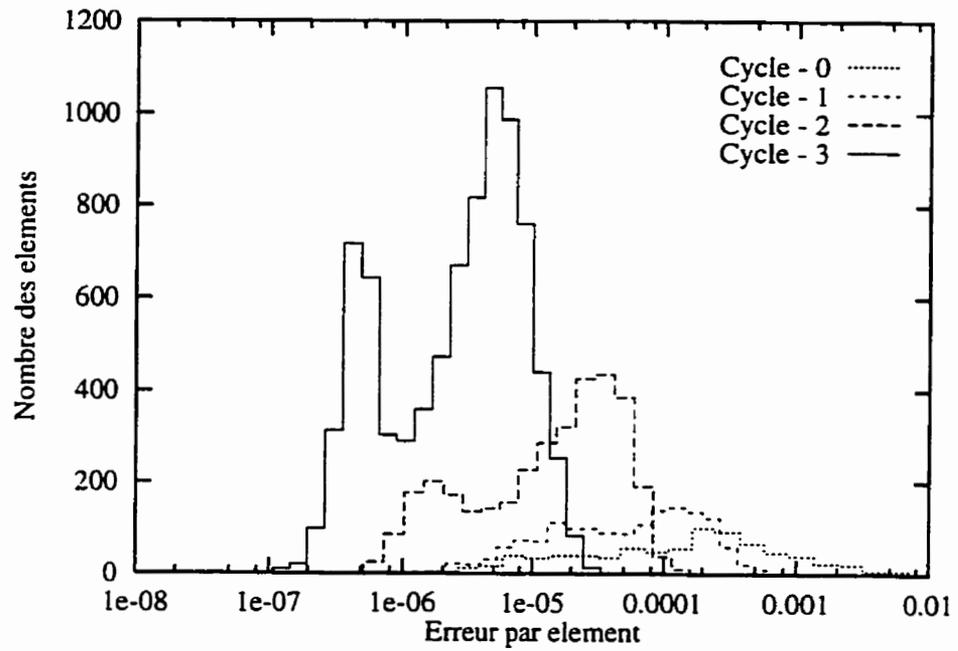


Figure 5.13 Histogramme de l'erreur en  $\mu_T$  estimée par projection locale

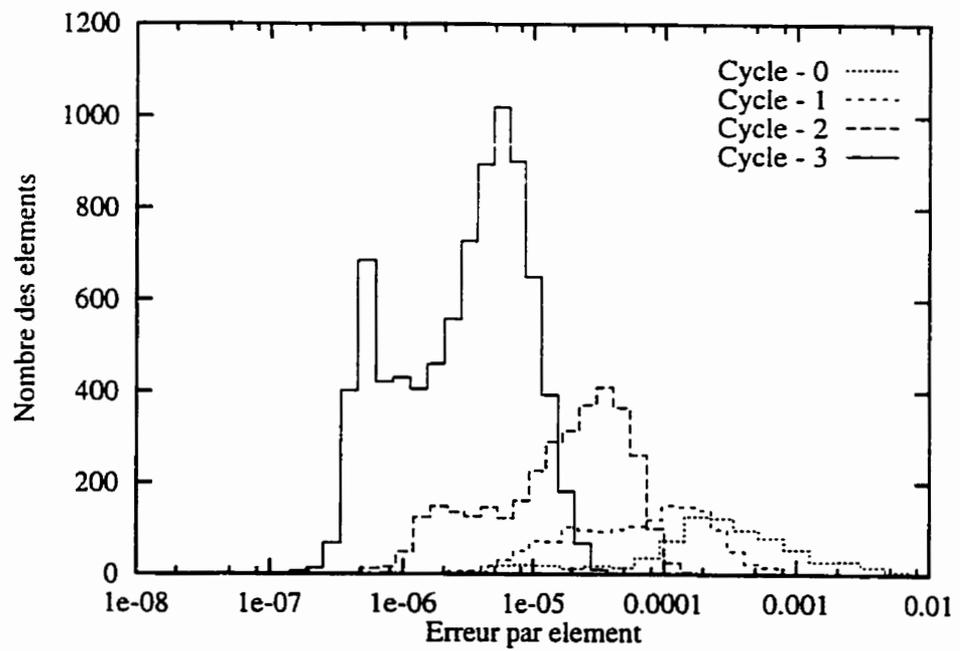


Figure 5.14 Histogramme de l'erreur exacte en  $\mu_T$

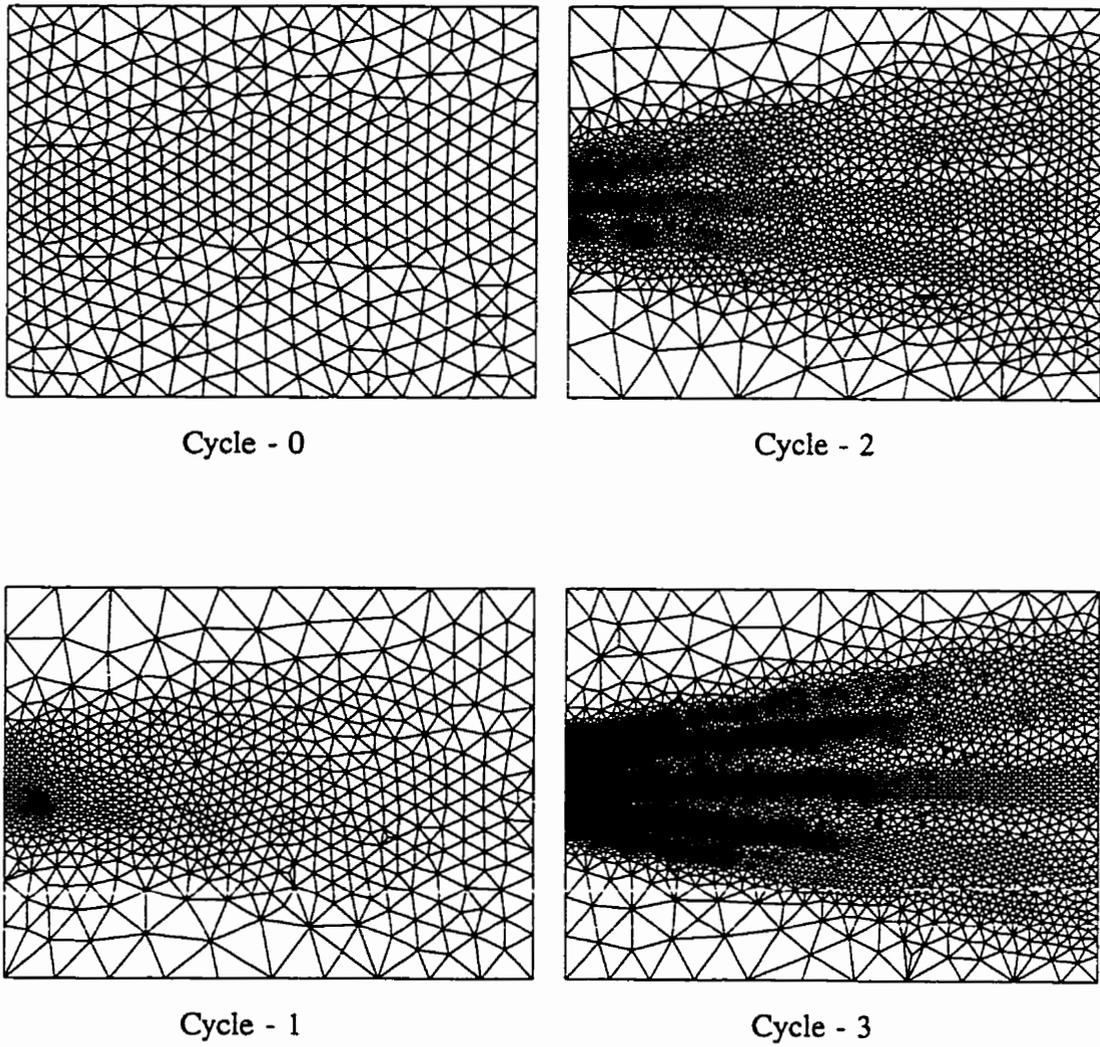


Figure 5.15 Maillages engendrés par la stratégie adaptative

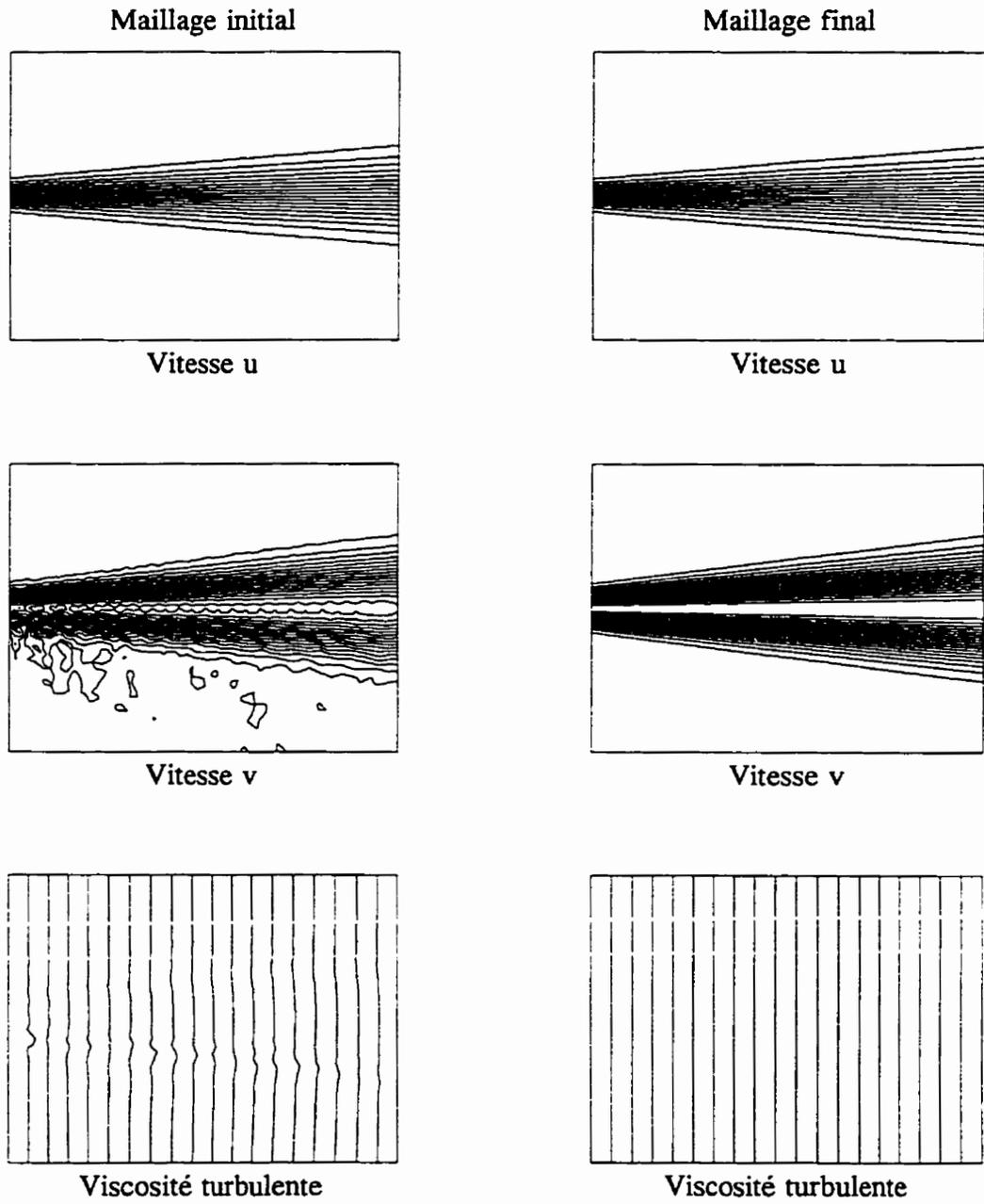


Figure 5.16 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse u, vitesse v et viscosité turbulente

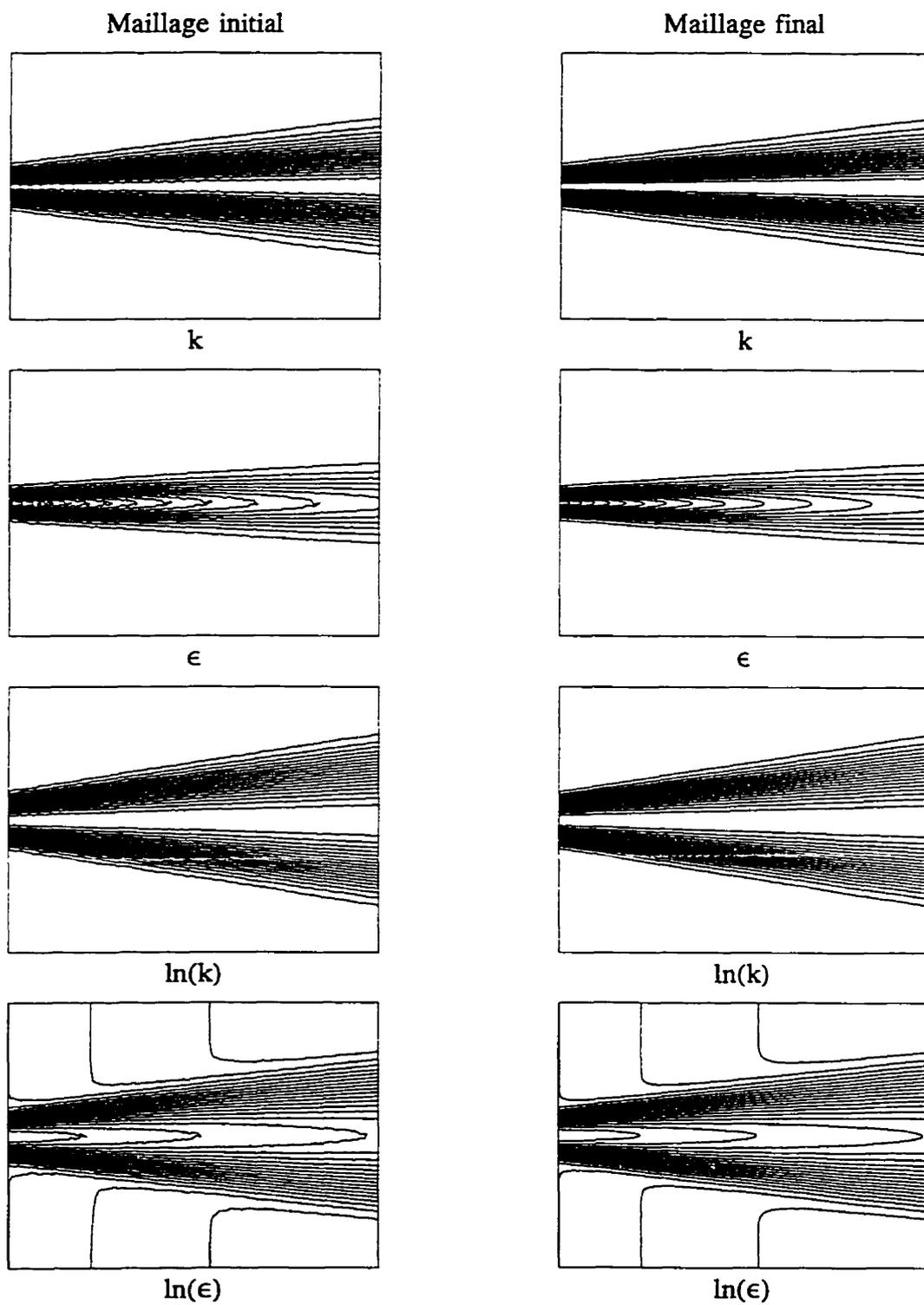


Figure 5.17 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final:  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$

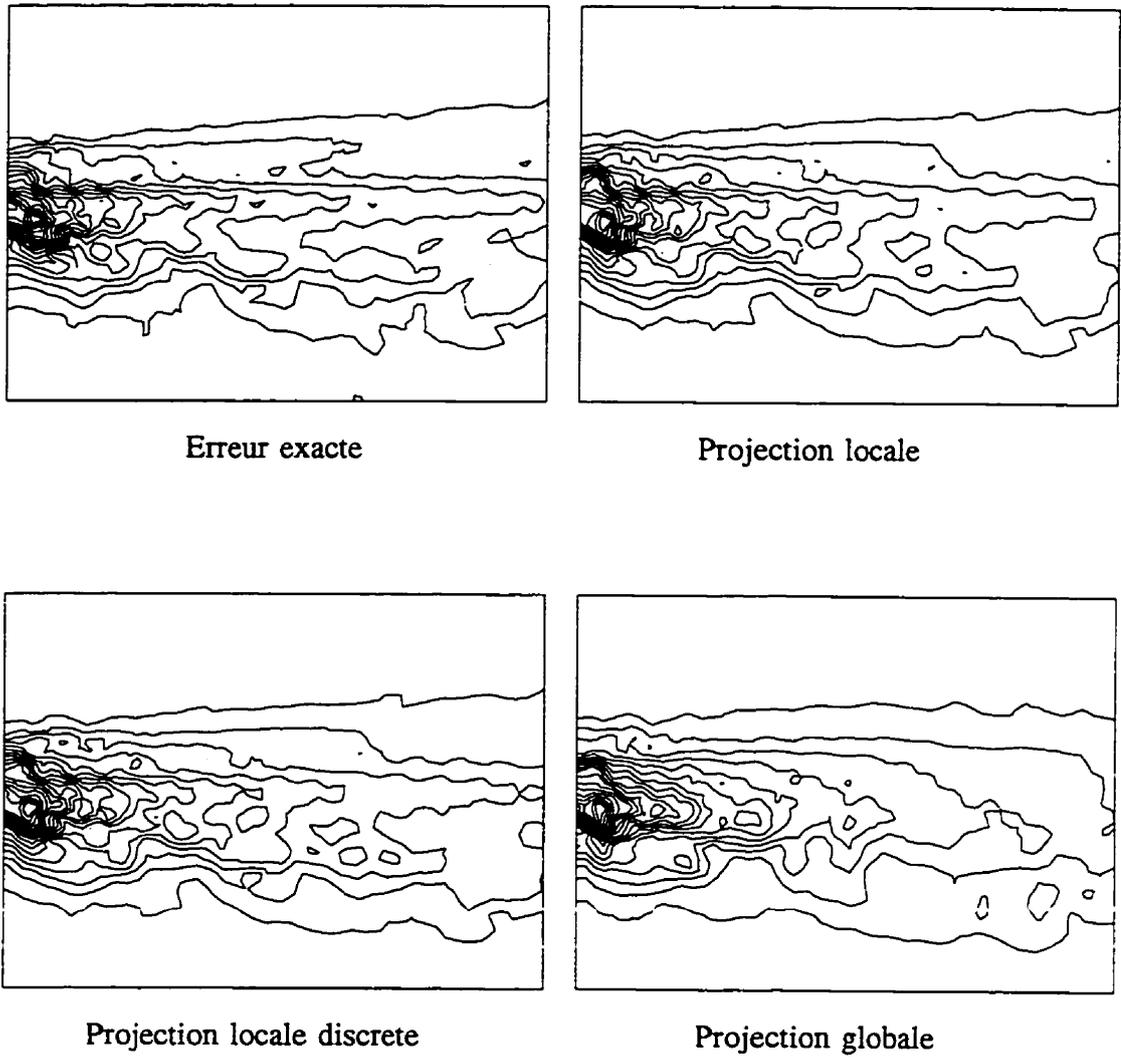


Figure 5.18 Distribution de l'erreur évaluée dans la norme énergie sur le maillage initial

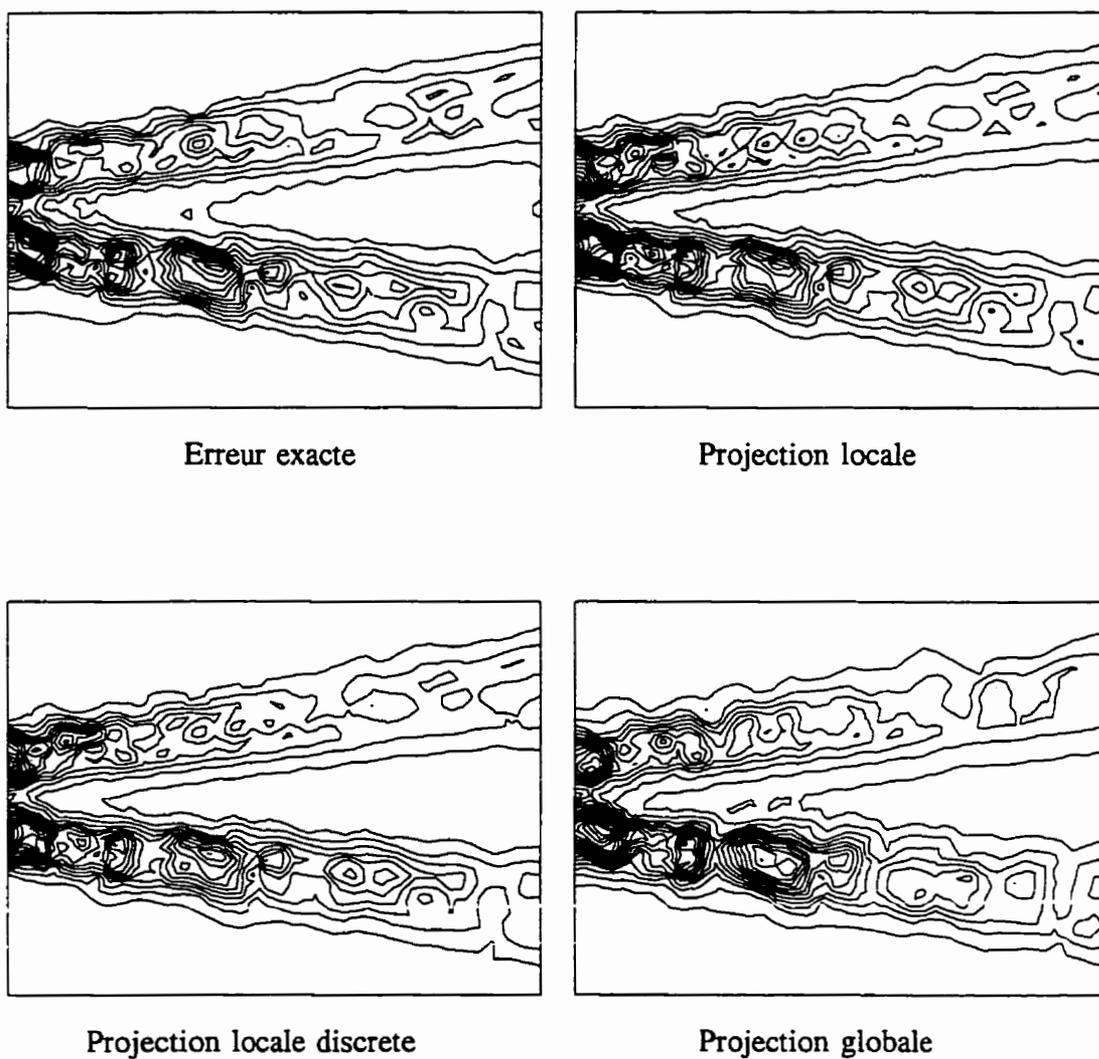


Figure 5.19 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\ln(k)$  sur le maillage initial

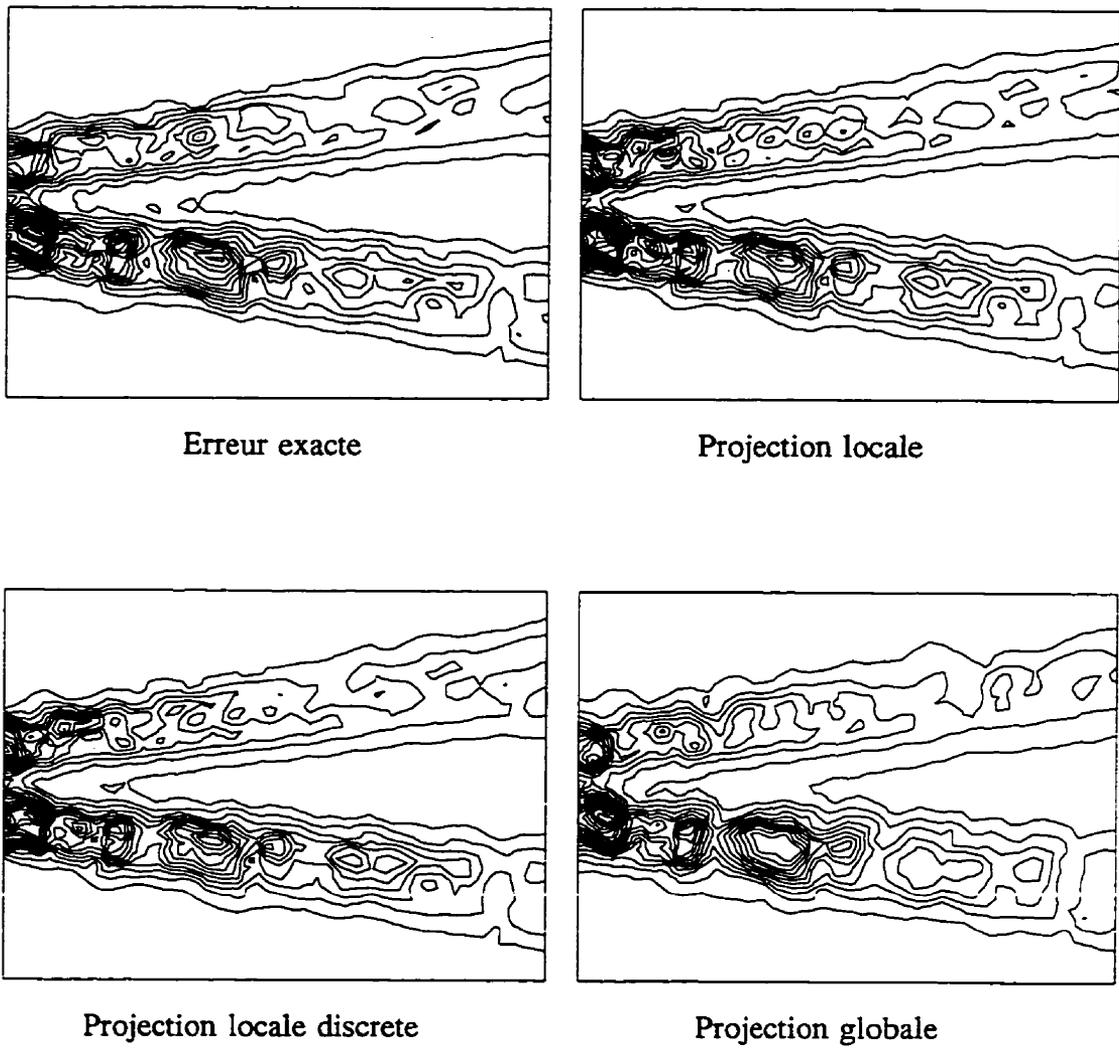


Figure 5.20 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\ln(\epsilon)$  sur le maillage initial

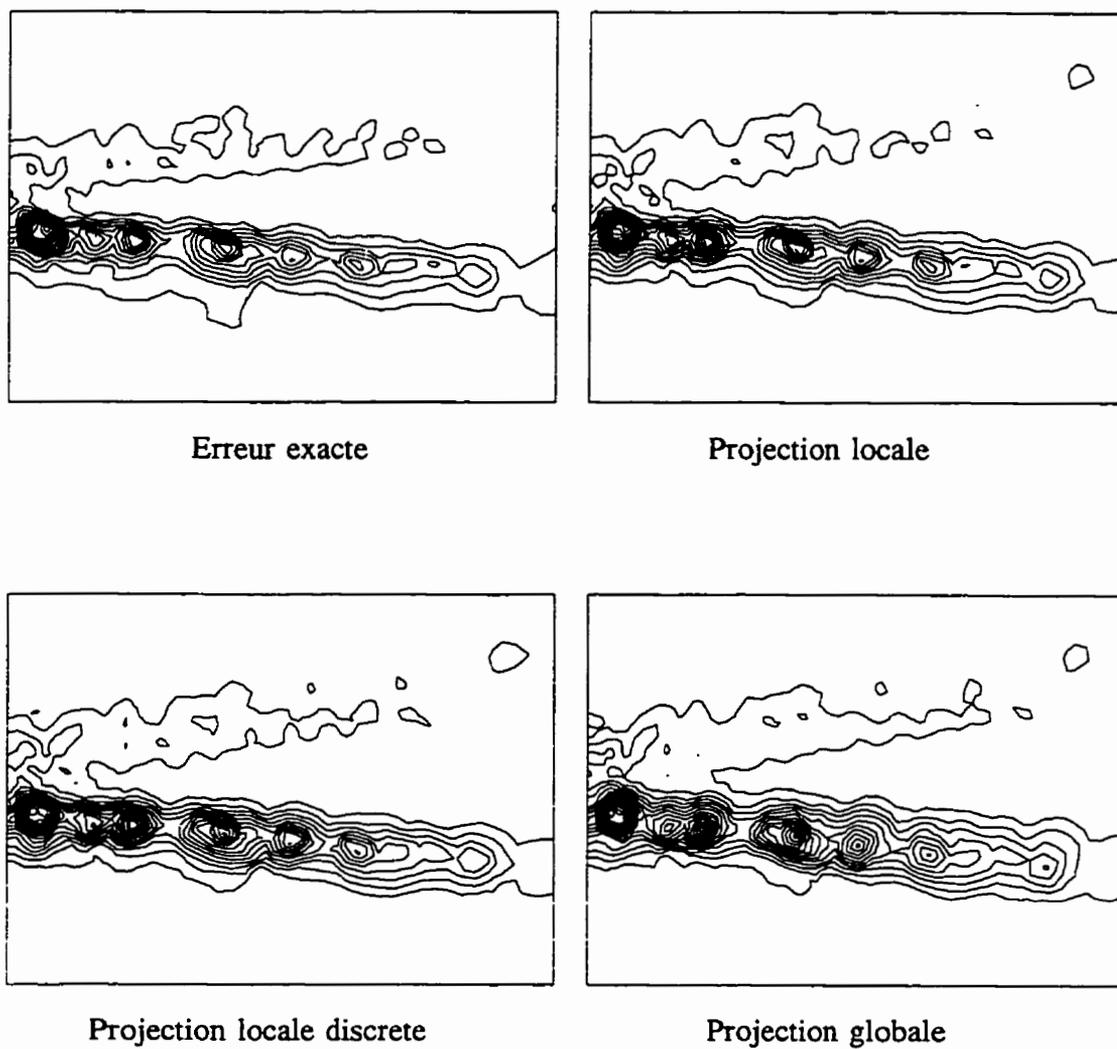


Figure 5.21 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\mu_T$  sur le maillage initial

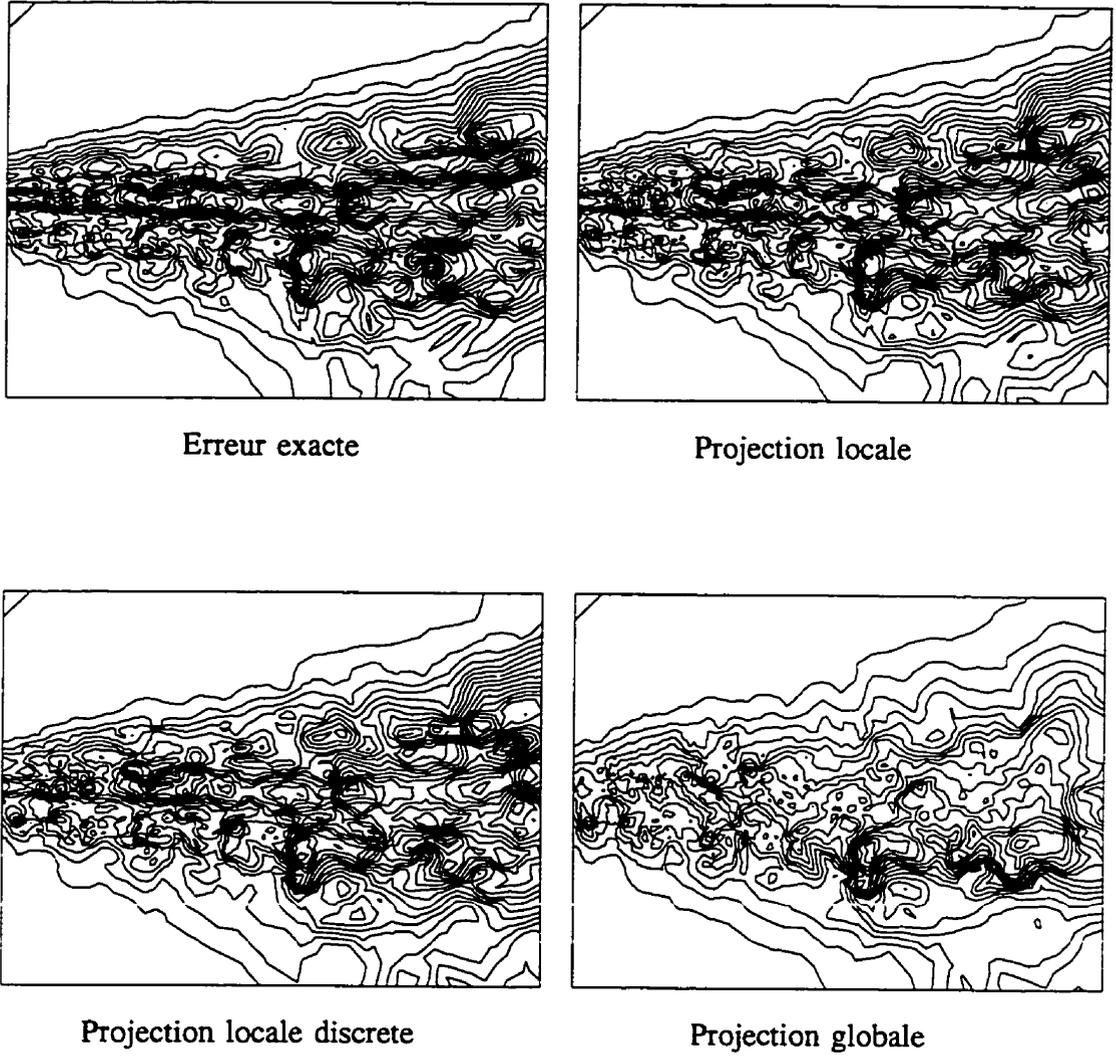


Figure 5.22 Distribution de l'erreur évaluée dans la norme énergie sur le premier maillage adapté

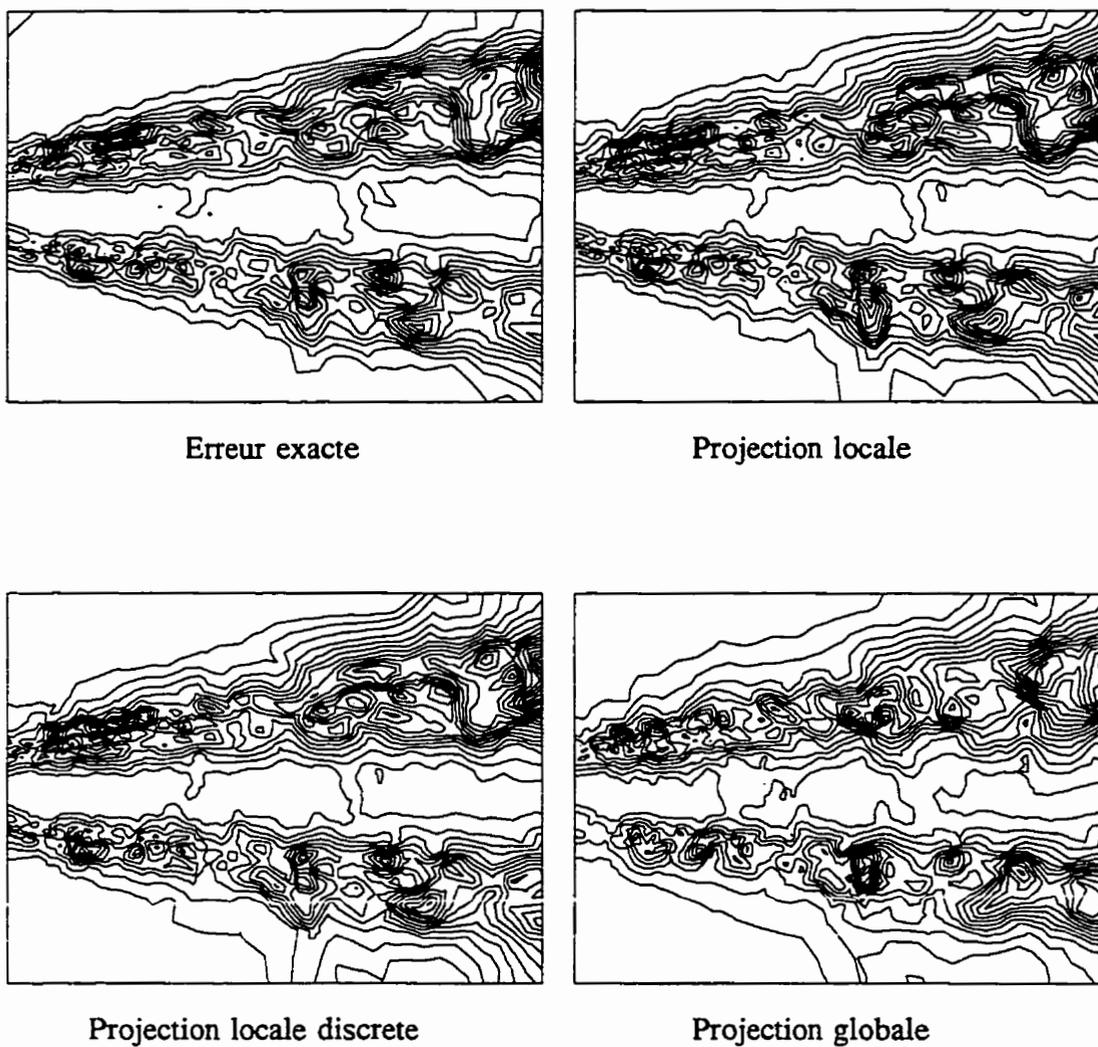


Figure 5.23 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\ln(k)$  sur le premier maillage adapté

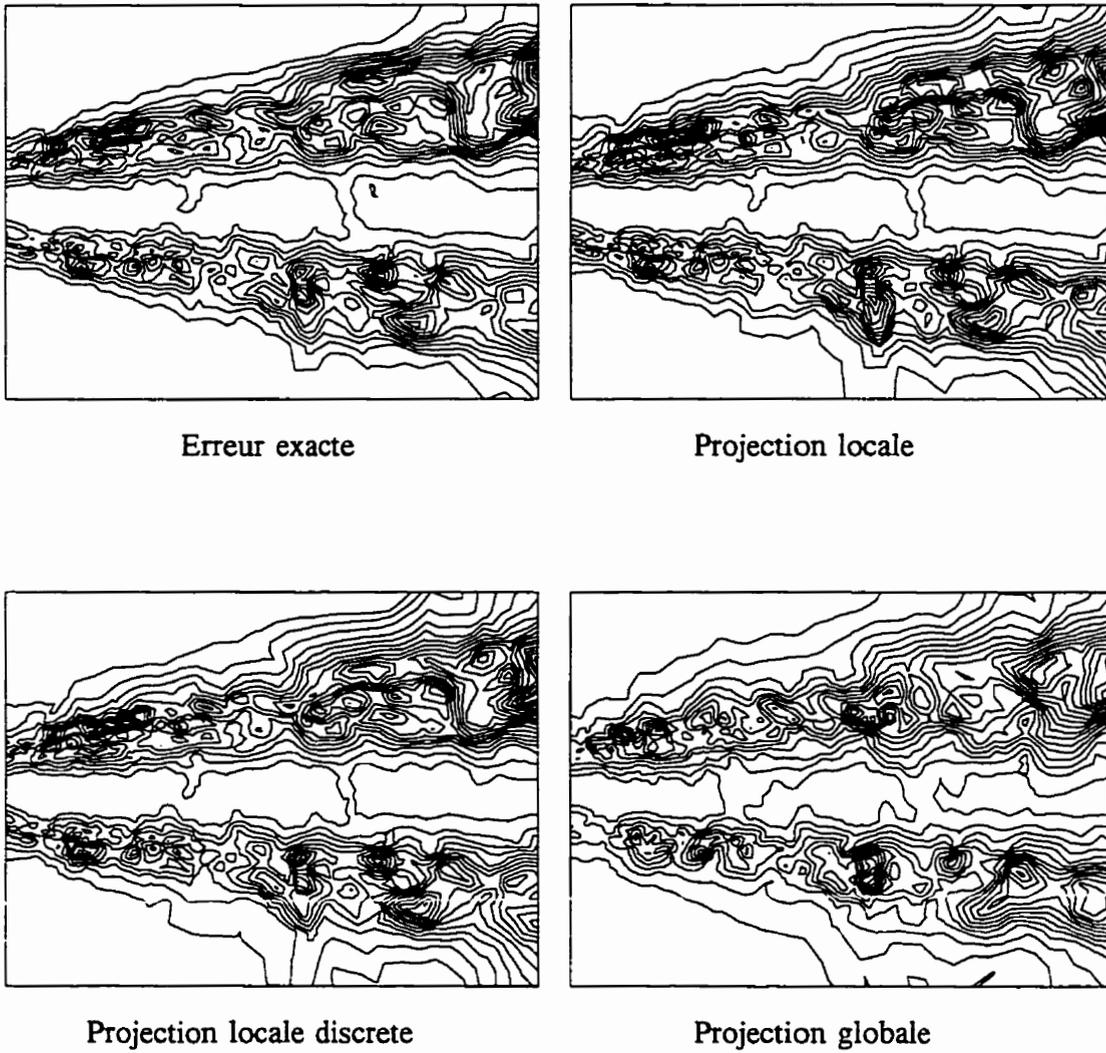


Figure 6.24 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\ln(\epsilon)$  sur le premier maillage adapté

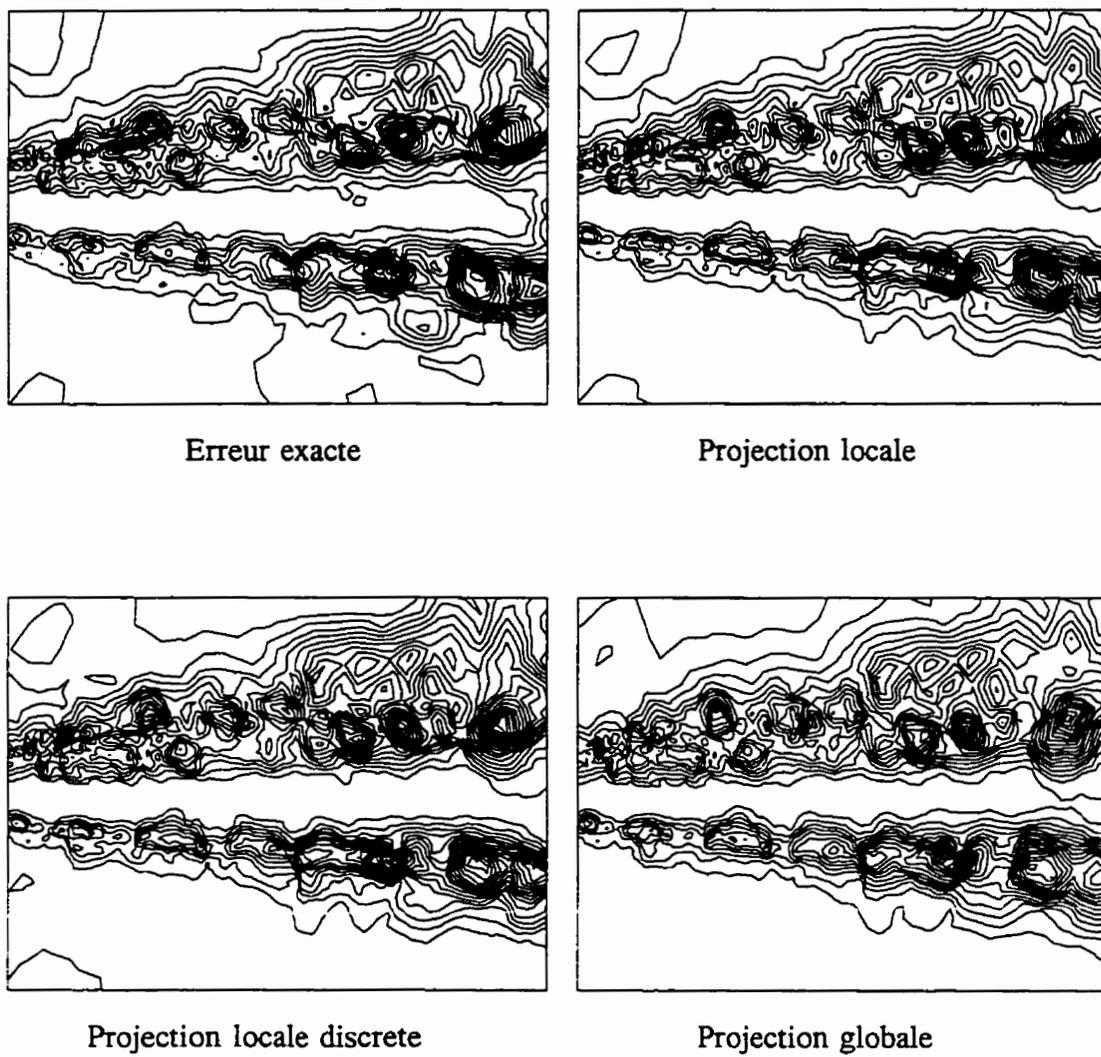


Figure 5.25 Distribution de l'erreur évaluée dans la semi-norme  $H^1$  pour  $\mu_T$  sur le premier maillage adapté

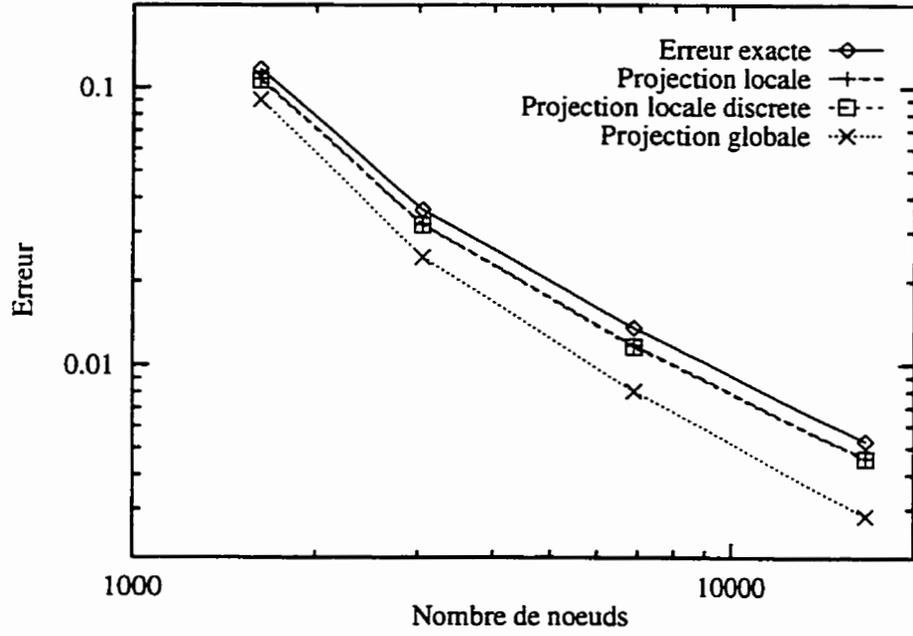


Figure 5.26 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en vitesse

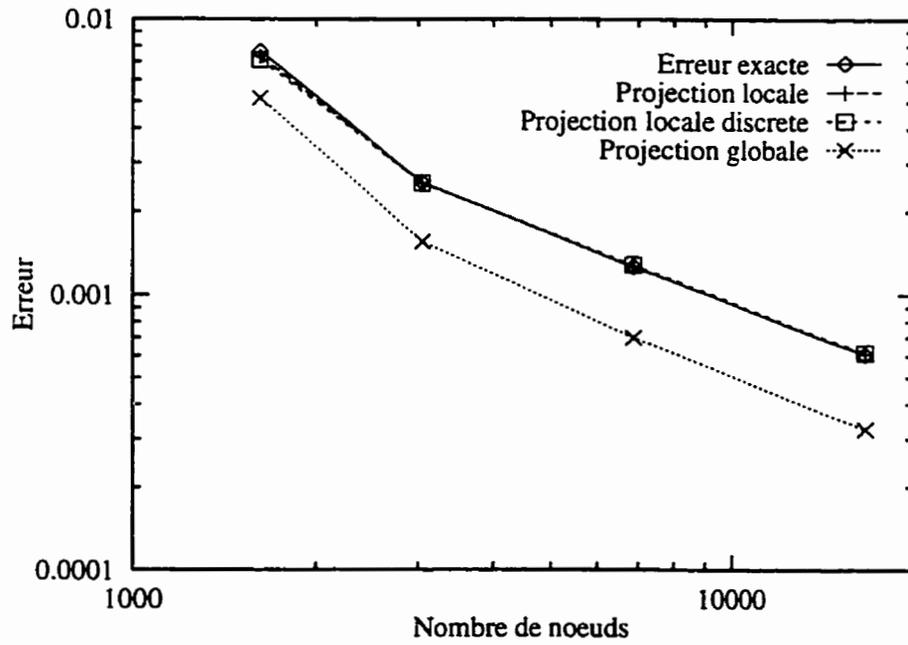


Figure 5.27 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $k$

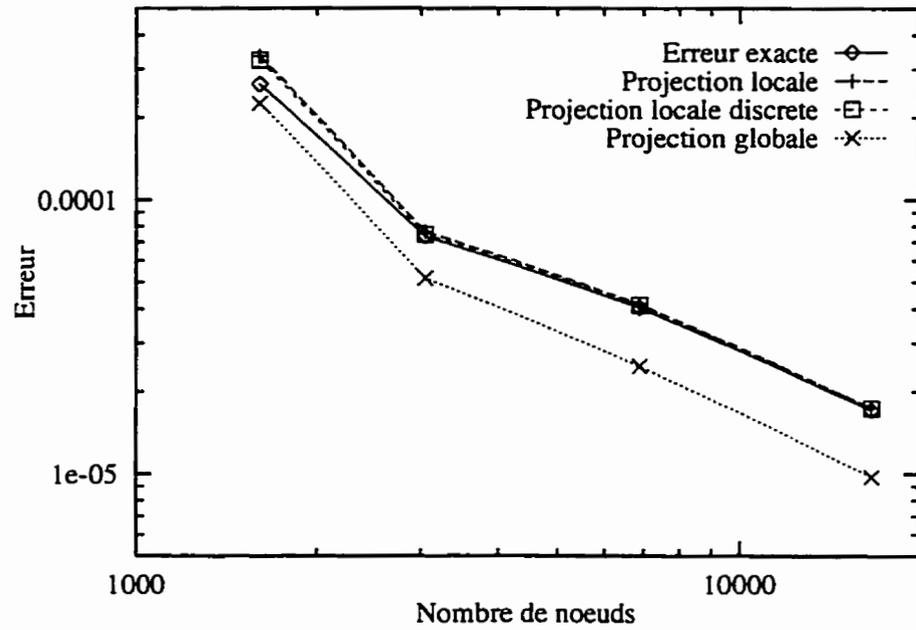


Figure 5.28 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$

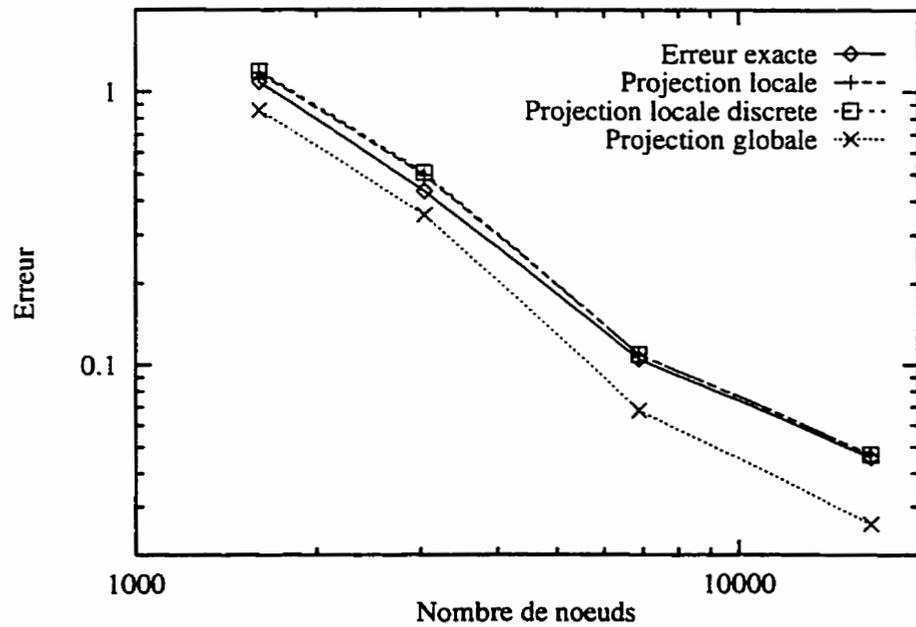


Figure 5.29 Résolution en  $k$  et  $\epsilon$  - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$

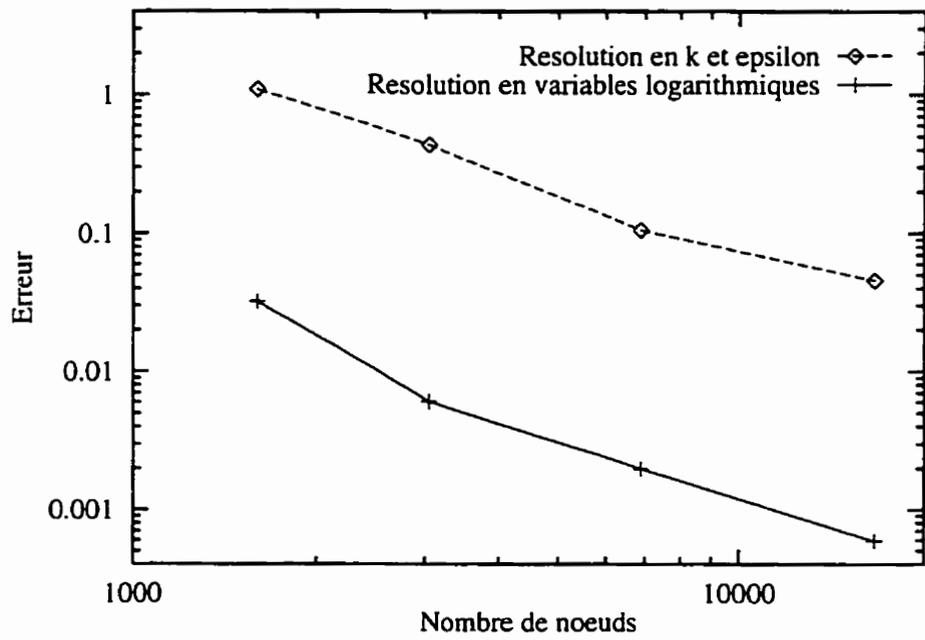


Figure 5.30 Trajectoire de l'erreur exacte en  $\mu_T$

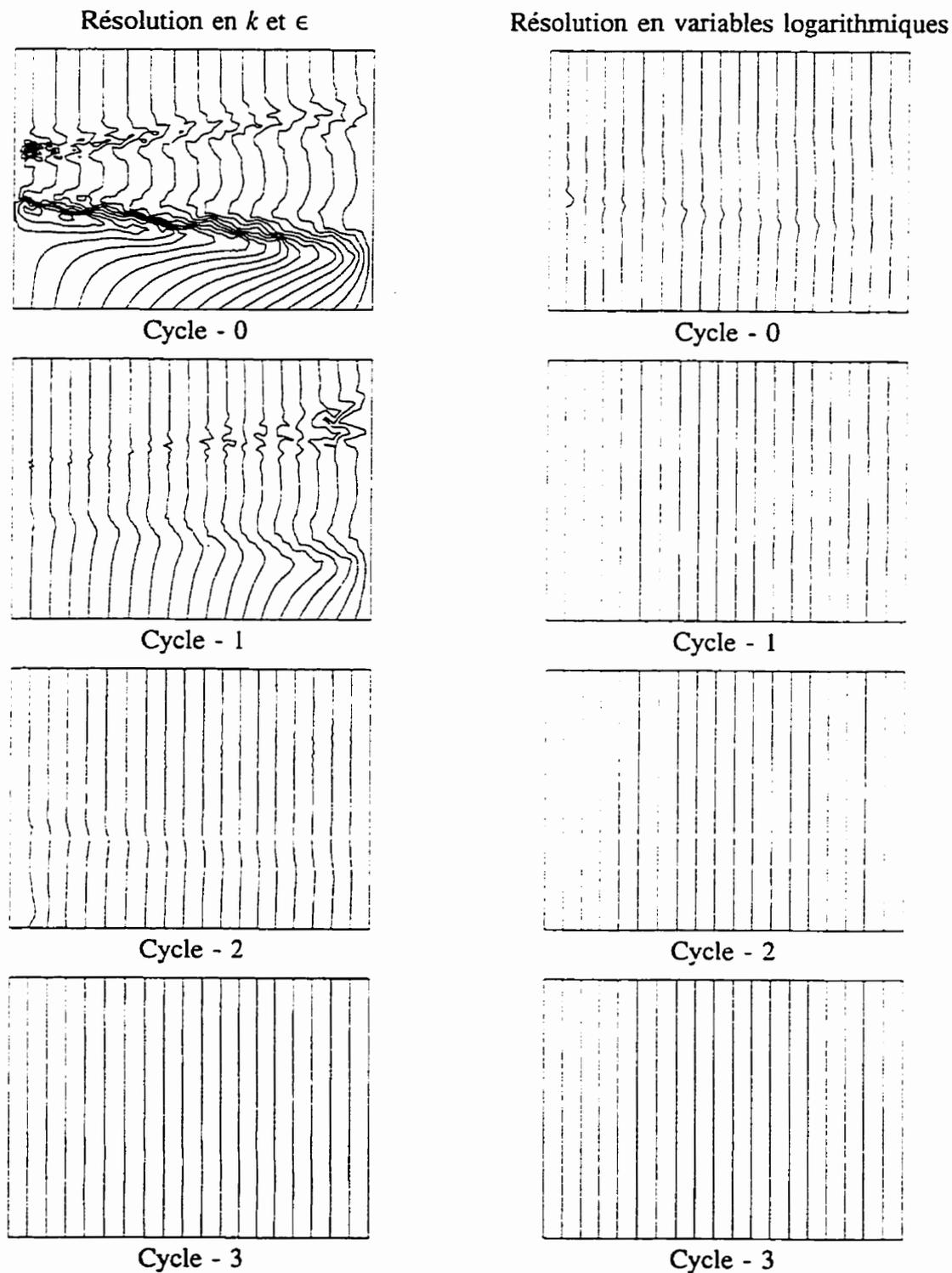
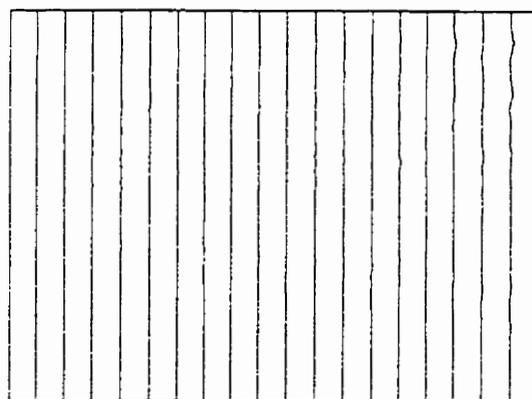
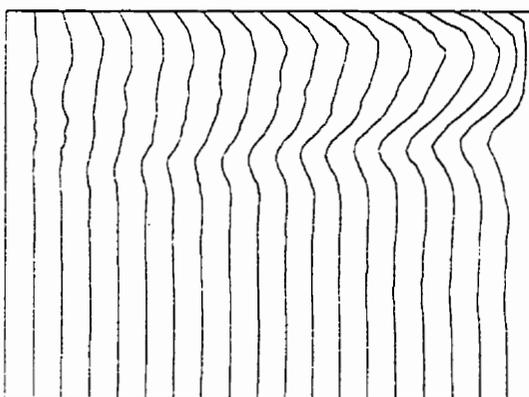


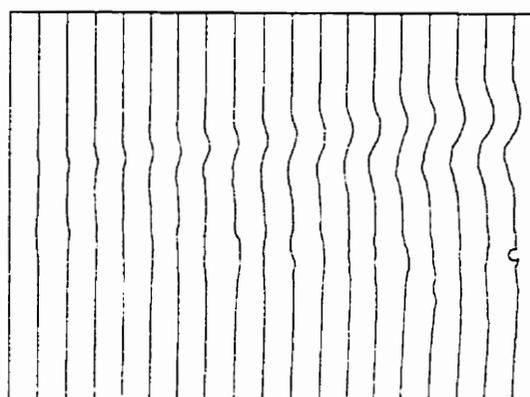
Figure 5.31 Distribution de la viscosité turbulente: résolution en  $(k, \epsilon)$  et résolution en variables logarithmiques



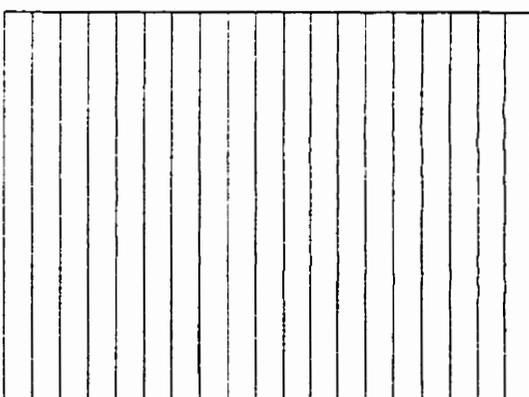
Galerkin



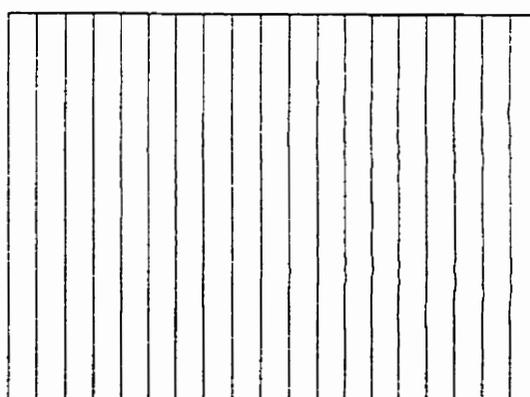
SU



SUPG incomplet



SUPG



Galerkin moindres carrés

Figure 5.32 Distribution de la viscosité turbulente pour différentes formulations sur le maillage 1

## 5.2 Couche cisailée 2-D avec une distribution gaussienne de la viscosité turbulente

La solution de ce problème a été construite pour s'approcher le plus possible de la solution d'une couche cisailée réelle que l'on retrouve en aval du coin d'une marche descendante ou encore dans des zones de mélange. Ce cas inclut des variations de la viscosité turbulente dans la direction  $y$  que l'on avait négligé dans la couche cisailée précédente.

La solution est donnée par:

$$\begin{aligned}
 u &= U_1 \left\{ \left[ \frac{1+r}{2} \right] + \left[ \frac{1-r}{2} \right] \operatorname{erf} \left[ \frac{\sigma y}{x} \right] \right\} \\
 v &= U_1 \left[ \frac{1-r}{2} \right] \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \\
 p &= 0 \\
 k &= k_0 \left[ c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \right] \\
 \epsilon &= \frac{\epsilon_0}{x} \left[ c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \right] \\
 \mu_T &= \mu_{T_0} x \left[ c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Les paramètres prennent les valeurs données par (5.2) sauf le ratio de vitesses  $r$  qui est maintenant fixé à 0.3. Le domaine de calcul couvre toujours le rectangle  $[100, 300] \times [-75, 75]$ . Les conditions aux frontières sont du même type que celles utilisées pour le cas de validation précédent.

Ce cas de validation est complété pour s'assurer que la méthode de résolution,

le module adaptatif et les techniques d'estimation d'erreur par projection locale se comportent bien. On a effectué les calculs en pilotant l'adaptativité par l'estimateur à projection locale. À chaque cycle on calcule néanmoins les deux autres estimateurs. On cherche toujours à diminuer à chaque cycle l'erreur estimée en vitesse et en variables de turbulence par un facteur de 2.

Les tableaux 5.13 à 5.17 résument les résultats obtenus pour l'erreur exacte et les estimations d'erreur. Les mêmes résultats sont présentés sous forme graphique dans les figures 5.33 à 5.36. On remarque le même comportement que dans les cas de validation précédent. Les estimateurs à projection locale donnent une très bonne évaluation de l'erreur globale. L'estimateur à projection globale sous-estime encore l'erreur exacte. On notera aussi que l'erreur et ses estimés diminuent à chaque cycle par un facteur plus grand que 2 et cela pour toutes les variables considérées dans le module adaptatif.

Tableau 5.13 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en vitesse

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$6.894 \times 10^{-2}$	$6.619 \times 10^{-2}$	$6.515 \times 10^{-2}$	$5.442 \times 10^{-2}$
1	3056	1499	$2.694 \times 10^{-2}$	$2.443 \times 10^{-2}$	$2.448 \times 10^{-2}$	$1.867 \times 10^{-2}$
2	6380	3155	$1.132 \times 10^{-2}$	$1.015 \times 10^{-2}$	$1.003 \times 10^{-2}$	$7.016 \times 10^{-3}$
3	15021	7462	$4.662 \times 10^{-3}$	$4.133 \times 10^{-3}$	$4.104 \times 10^{-3}$	$2.532 \times 10^{-3}$

Tableau 5.14 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $k$ 

Maillage	# de points	# d'éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	1.041	1.091	1.066	$7.767 \times 10^{-1}$
1	3056	1499	$4.363 \times 10^{-1}$	$4.705 \times 10^{-1}$	$4.523 \times 10^{-1}$	$3.270 \times 10^{-1}$
2	6380	3155	$1.663 \times 10^{-1}$	$1.648 \times 10^{-1}$	$1.601 \times 10^{-1}$	$1.115 \times 10^{-1}$
3	15021	7462	$6.127 \times 10^{-2}$	$5.998 \times 10^{-2}$	$5.861 \times 10^{-2}$	$3.814 \times 10^{-2}$

Tableau 5.15 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$ 

Maillage	# de points	# des éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	1.052	1.101	1.077	$7.861 \times 10^{-1}$
1	3056	1499	$4.389 \times 10^{-1}$	$4.730 \times 10^{-1}$	$4.551 \times 10^{-1}$	$3.307 \times 10^{-1}$
2	6380	3155	$1.677 \times 10^{-1}$	$1.659 \times 10^{-1}$	$1.613 \times 10^{-1}$	$1.131 \times 10^{-1}$
3	15021	7462	$6.184 \times 10^{-2}$	$6.048 \times 10^{-2}$	$5.912 \times 10^{-2}$	$3.883 \times 10^{-2}$

Tableau 5.16 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$ 

Maillage	# de points	# des éléments	Erreur exacte	Projection locale	Projection discrète	Projection globale
0	1611	774	$5.157 \times 10^{-1}$	$5.445 \times 10^{-1}$	$5.317 \times 10^{-1}$	$3.909 \times 10^{-1}$
1	3056	1499	$2.127 \times 10^{-1}$	$2.303 \times 10^{-1}$	$2.206 \times 10^{-1}$	$1.608 \times 10^{-1}$
2	6380	3155	$8.209 \times 10^{-2}$	$8.166 \times 10^{-2}$	$7.881 \times 10^{-2}$	$5.533 \times 10^{-2}$
3	15021	7462	$3.029 \times 10^{-2}$	$2.956 \times 10^{-2}$	$2.878 \times 10^{-2}$	$1.885 \times 10^{-2}$

La figure 5.37 présente les maillages engendrés par la stratégie adaptative. La solution obtenue sur le maillage initial et sur le maillage final est illustrée aux figures 5.38 et 5.39. Les maillages sont raffinés dans les régions de forts gradients dans la solution, au centre du domaine et dans deux régions de part et d'autre de l'axe des  $x$ . Encore une fois les gradients de la solution sont symétriques en valeur absolue par rapport à l'axe des  $x$  ce qui explique la symétrie des maillages adaptés. Finalement, on remarque que la solution sur le maillage final est de très bonne qualité.

En résumé, ces cas de validation permettent de tirer les conclusions suivantes:

- les estimateurs à projection donnent une représentation fidèle de l'erreur. Les valeurs globales et locale de l'erreur et de son estimation sont comparables;
- l'estimateur par projection globale sous-estime l'erreur plus que les estimateurs locaux. Les estimateurs locaux se comportent de la même façon et l'utilisation de points optimaux pour le relèvement des dérivées n'a pas vraiment amélioré l'estimation d'erreur. L'estimateur par projection locale est plus robuste que celui par projection discrète;

- la méthodologie adaptative fonctionne bien et les erreurs diminuent à chaque cycle comme prévu;
- l'algorithme de résolution est robuste et fonctionne pour toutes les formulations éléments finis employées. Les formulations résiduelles de Galerkin, SUPG et GLS permettent d'obtenir de très bonnes solutions, qui convergent vers la solution exacte avec le raffinement du maillage;
- l'utilisation des variables logarithmiques dans la résolution des équations de turbulence augmente la robustesse du résolveur et améliore grandement la précision de la solution surtout pour la viscosité turbulente.

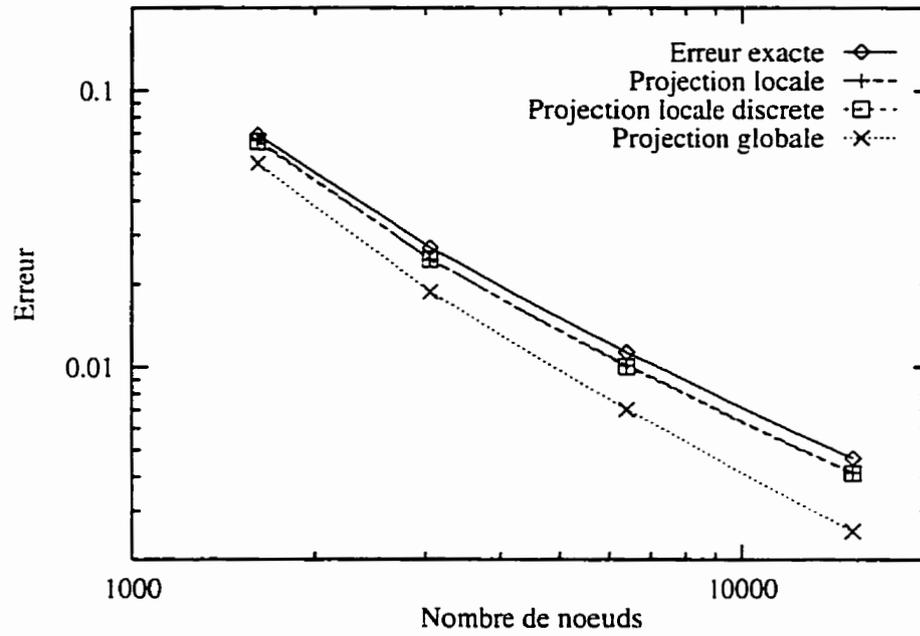


Figure 5.33 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en vitesse

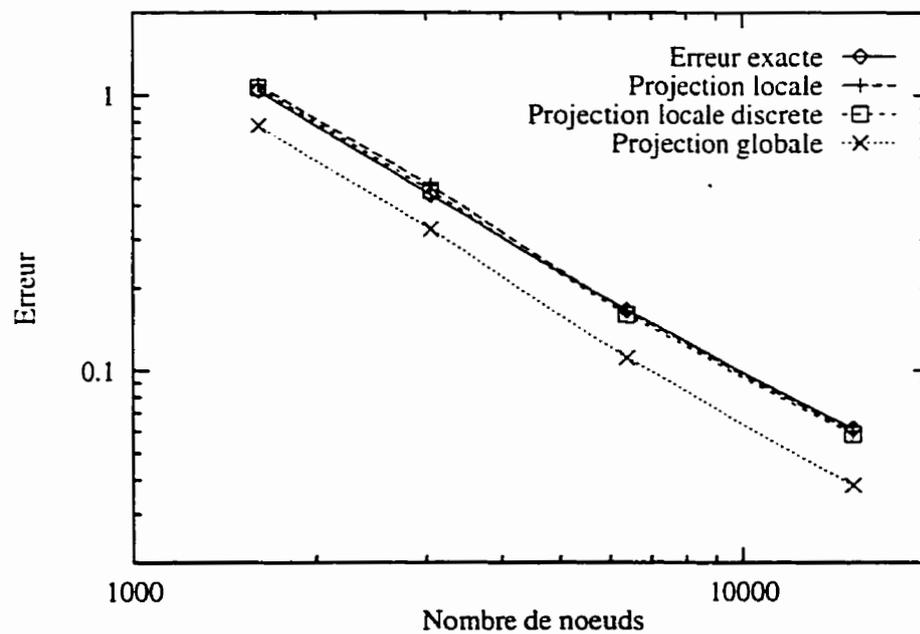


Figure 5.34 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $k$

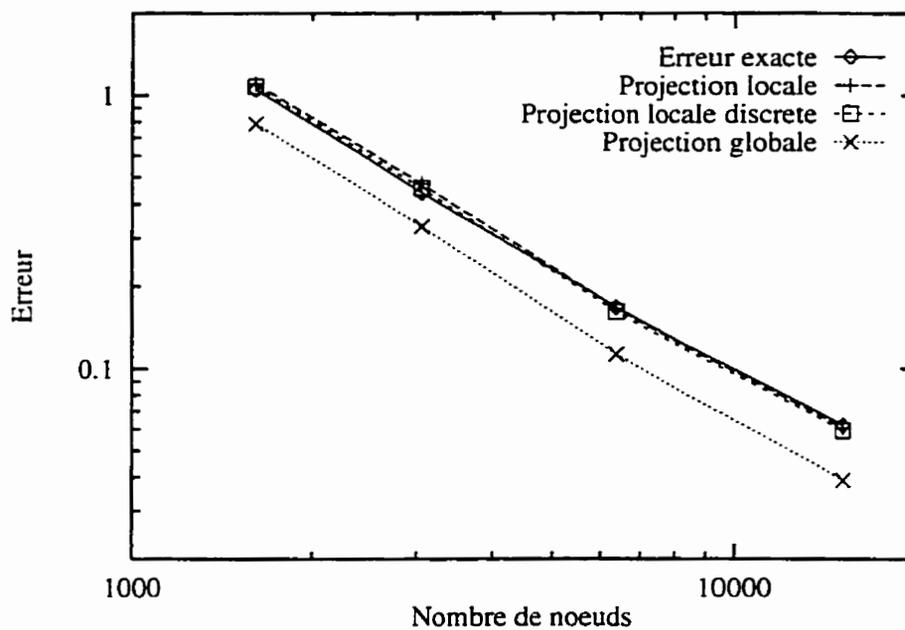


Figure 5.35 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $\epsilon$

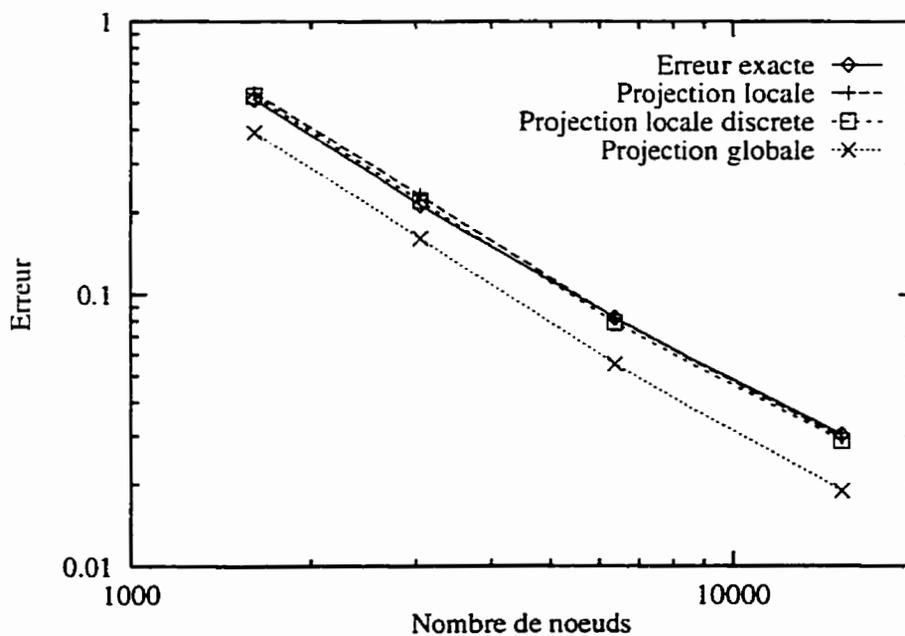


Figure 5.36 Couche cisailée  $\mu_T$  gaussienne - Trajectoire de l'erreur en  $\mu_T$

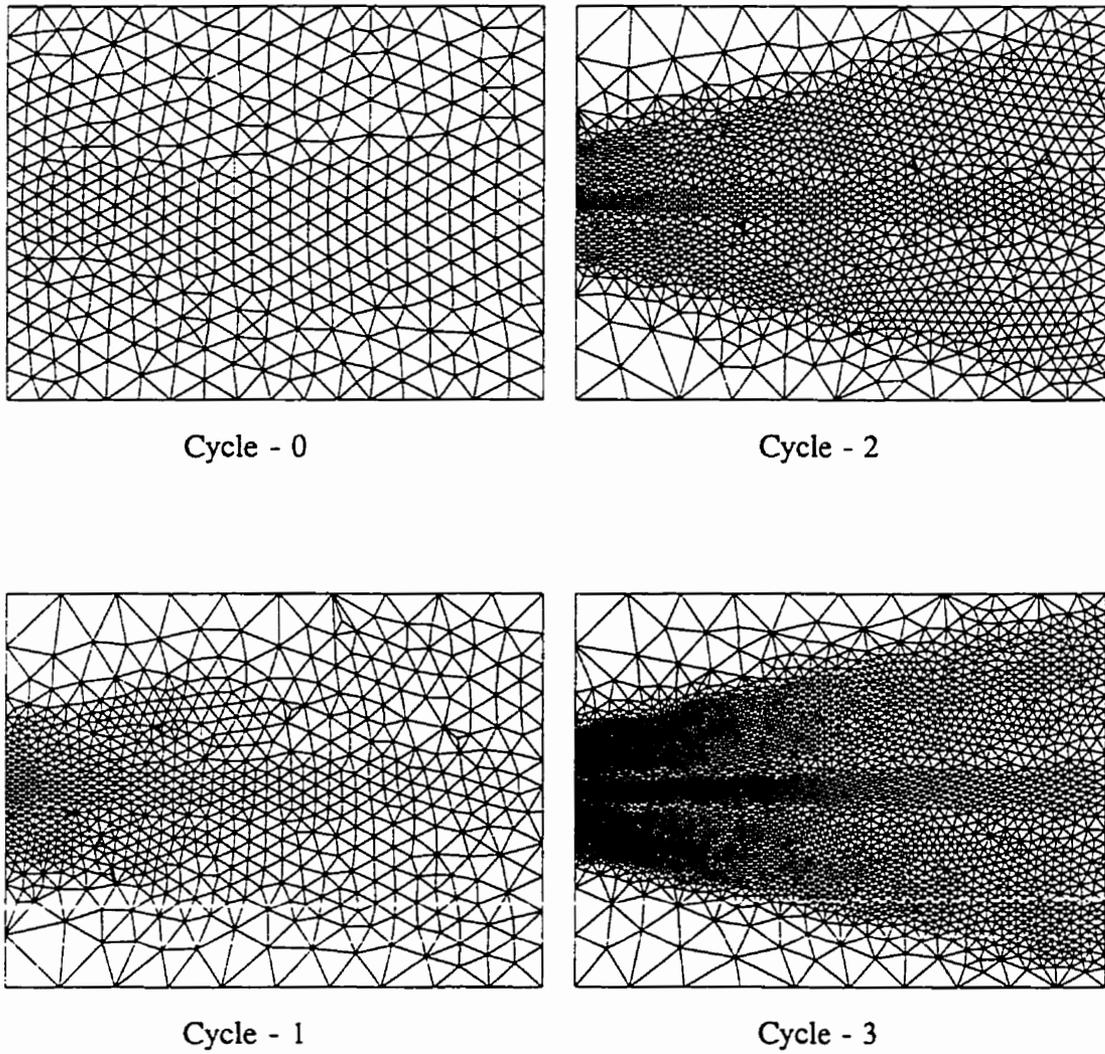


Figure 5.37 Maillages engendrés par la stratégie adaptative

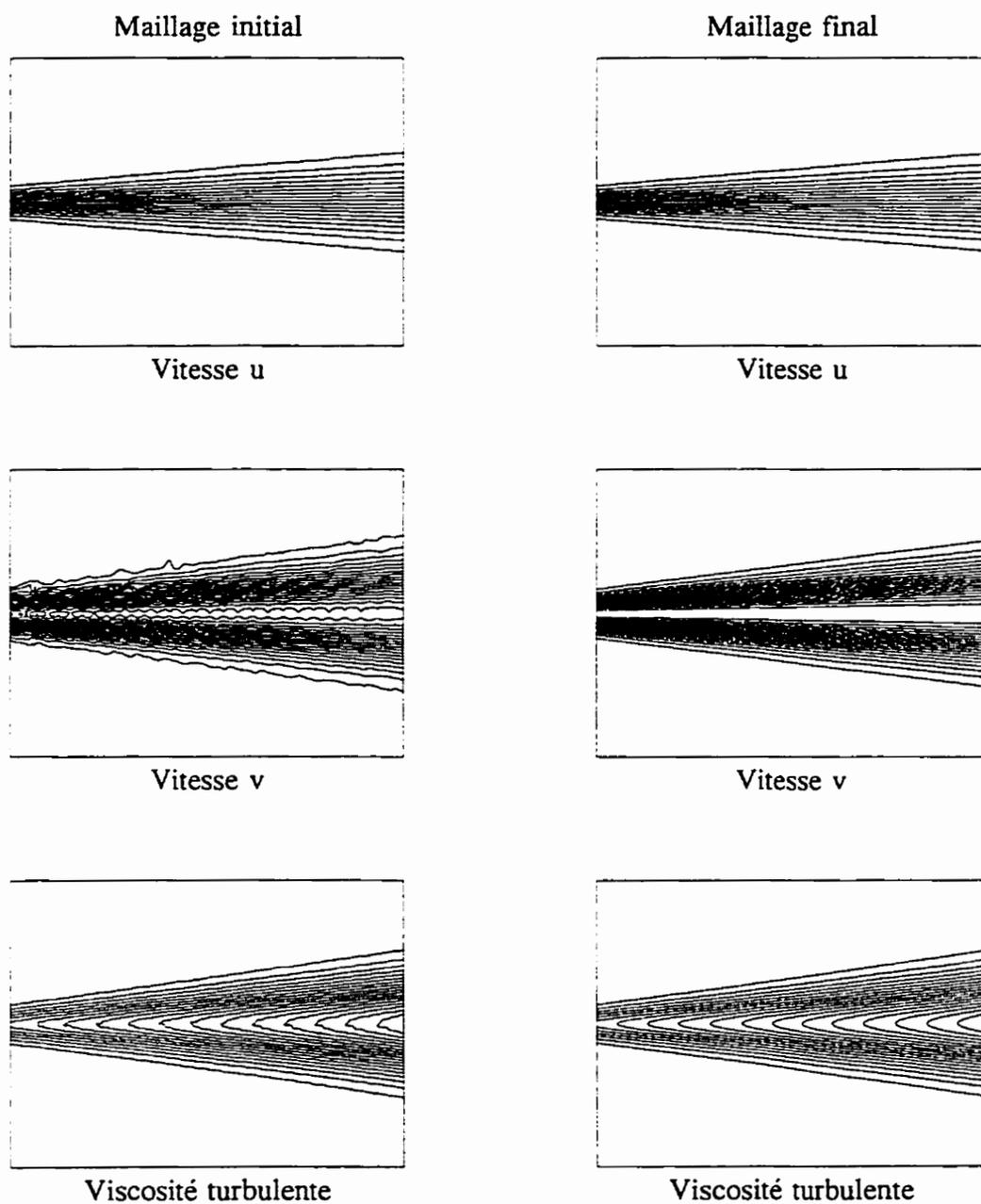


Figure 5.38 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse u, vitesse v et viscosité turbulente

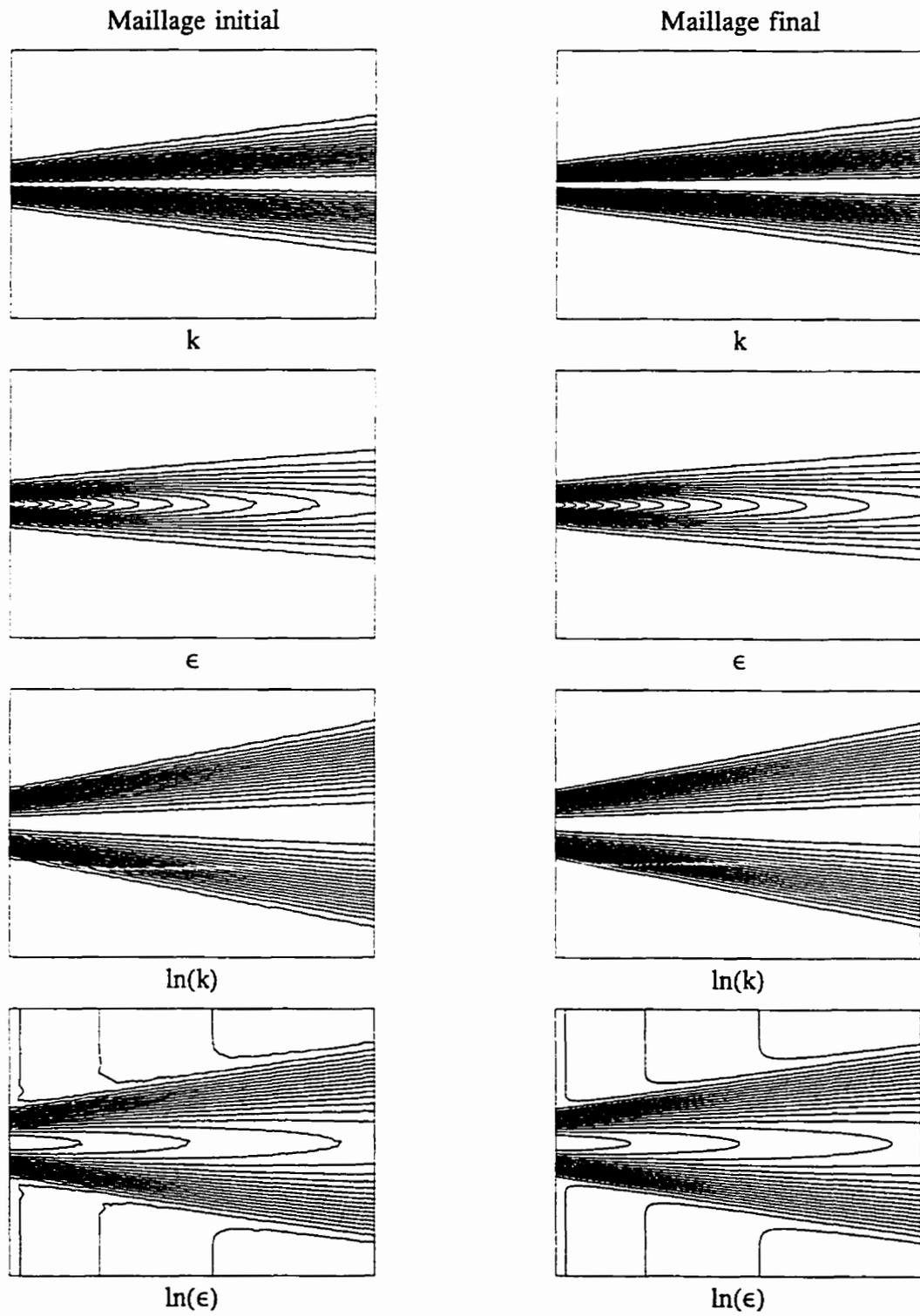


Figure 5.39 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final:  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$

## Chapitre 6

### Applications

Cette section présente des applications de la stratégie adaptative à des écoulements turbulents pour lesquels on dispose de données expérimentales: couche cisailée, écoulement sur une marche descendante, écoulement autour d'un profil NACA0012. Pour chaque problème on analyse le comportement de la méthode de résolution, de l'estimateur d'erreur et du remaillage adaptatif. L'algorithme adaptatif est piloté dans tous les cas par l'estimateur à projection locale.

#### 6.1. Couche cisailée avec un rapport de vitesses $U_2/U_1=0.3$

Ce problème a fait l'objet d'une étude expérimentale détaillée par Spencer et Jones [92] et d'essais numériques de plusieurs variantes du modèle  $k-\epsilon$  par Duncan et al [93]. Ce problème représente le comportement d'un écoulement de fluide près du bord de fuite d'un profil ou encore d'une zone de mélange entre deux couches d'un même fluide s'écoulant parallèlement mais à des vitesses différentes. La figure 6.1 illustre le domaine de calcul, les conditions limites et les distances à la paroi,  $d$ , utilisées pour reproduire le montage expérimental de Spencer et Jones [92].

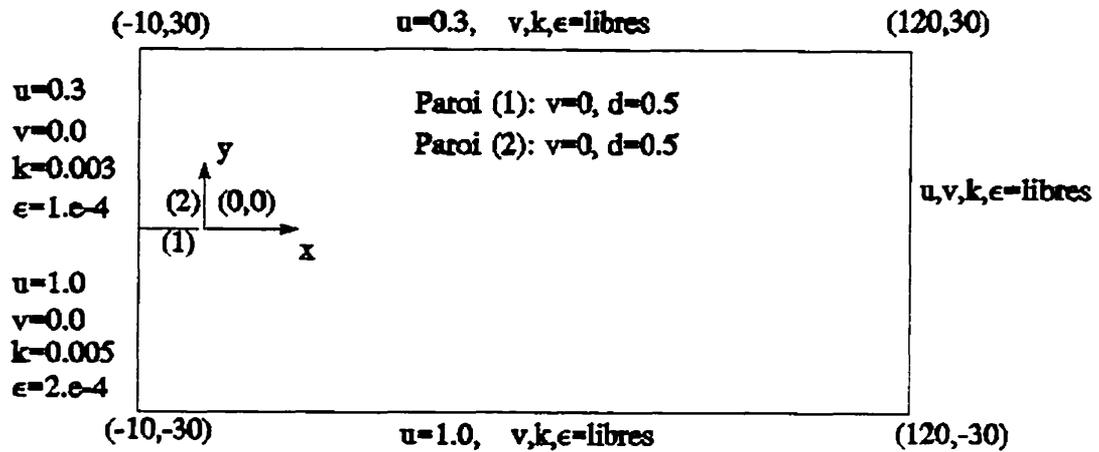


Figure 6.1 Couche cisillée de Spencer: Domaine de calcul et conditions limites

Les équations sont résolues sous leur forme adimensionnelle et les valeurs des conditions Dirichlet sur la figure 6.1 correspondent à des variables sans dimensions. La vitesse de référence est la vitesse de la couche rapide  $U$ , et la longueur de référence est  $L=1\text{cm}$ . Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de la couche rapide est  $Re = U_1/\nu = 18000/\text{cm}$ . Une plaque très mince, dont on considère l'épaisseur négligeable, sépare les deux couches de fluide à l'entrée du domaine. Le rapport des vitesses des deux couches de fluide est de 0.3. Il reste à déterminer les valeurs à imposer pour  $k$  et  $\epsilon$  à l'entrée. Pour ceci nous avons suivie les recommandations faites dans FIDAP [44]. La valeur caractéristique de  $k$  est obtenue à l'aide de la relation suivante:

$$k = aU^2 \quad (6.1)$$

où  $U$  est la vitesse et  $a$  est un coefficient qui dépende du type d'écoulement. Les valeurs suggérées pour  $a$  sont entre 0 et 0.001 pour les écoulements sans frottement et autour de 0.1 pour les écoulements cisillés (couches cisillées, jets, sillages). Une valeur caractéristique pour  $\epsilon$  est donnée par la relation suivante:

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L_m} \sim \frac{k^{3/2}}{0.1L} \quad (6.2)$$

où  $L_m$  représente la longueur de mélange et  $L$  est une longueur caractéristique. Notons que ces valeurs doivent être regardées plutôt à titre indicatif. Les conditions imposées en entrée pour les variables de turbulence doivent aussi être consistantes avec le modèle de turbulence et la nature du problème à résoudre, dans le sens qu'elles doivent subir de variations minimales dans les régions non-perturbées de l'écoulement. Dans ce premier calcul, noté Probl, nous avons considéré un niveau de turbulence de 0.5% ( $a=0.005$ ) pour la couche à haut vitesse et de 3% ( $a=0.03$ ) pour la partie à basse vitesse. Pour déterminer les valeurs d' $\epsilon$  en entrée il faut préciser la longueur caractéristique  $L$ . Dans ce cas nous avons considéré  $L \sim 10$ . Le nombre de Reynolds basé sur la viscosité turbulente aura alors dans l'écoulement non-perturbé des valeurs autour de 100, ce qui fait qu'on pourra même utiliser la méthode de Galerkin pour résoudre ce problème.

Une première série de calculs, qu'on considère comme solution de référence, a été réalisée en variables logarithmiques, à l'aide d'une formulation de Galerkin classique. L'erreur de la solution est estimée par projection locale et les maillages sont construits de façon à réduire l'erreur en vitesse,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$  par un facteur 2 d'un cycle d'adaptation à l'autre.

La figure 6.2 présente les maillages générés par la stratégie adaptative. Les solutions obtenues sur le maillage initial et sur le maillage final sont représentées sur les figures 6.3 et 6.4. On y remarque que les maillages adaptés ont une très forte concentration en aval du bord de fuite ainsi qu'une forte concentration en deux bandes obliques étroites correspondant aux fronts de  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$ . On remarque aussi une nette amélioration de la solution entre les maillages initial et final, notamment près du bord de fuite. Les différentes variables sont représentées avec précision et les variations de la solution, même si elles sont par endroit très rapides, sont très bien capturées. À noter l'amincissement de la solution près du bord de fuite de la plaque où les gradients de la solution sont extrêmement forts. Cela explique aussi la nécessité d'un fort

raffinement du maillage dans cette région. La solution en  $k$  sur le maillage final présente un maximum plus constant sur la ligne de centre, ce qui est caractéristique d'un écoulement turbulent similaire. Finalement, la viscosité turbulente présente bien une variation linéaire sur la ligne de centre tel que prédit par la théorie simplifiée de la couche limite [91].

Les figures 6.5, 6.6 et 6.7 illustrent le fonctionnement de la méthodologie adaptative. Tout d'abord on résout sur un maillage grossier, noté maillage - 0. La solution obtenue est analysée et son erreur est évalué par la méthode de projection locale. La figure 6.5 présente les iso-lignes des estimations d'erreur de la vitesse, des variables logarithmiques et de la viscosité turbulente sur le maillage initial. L'estimation d'erreur est ensuite utilisée pour prédire les caractéristiques du prochain maillage adapté afin de réduire l'erreur par un facteur 2 pour chaque variable (vitesse,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$ ). Finalement, on résout à nouveau sur le maillage adapté en utilisant l'interpolation de la solution précédente sur le maillage courant comme solution initiale. Ce processus est ensuite répété jusqu'à ce que la solution obtenue soit suffisamment précise.

La figure 6.6 présente le premier maillage adapté, les iso-estimation d'erreur pour la solution obtenue sur ce maillage et aussi le prochain maillage adapté (maillage-2). La même succession d'images, dans ce cas pour le maillage 2, (les erreurs qui conduisent au maillage final), sont représentées dans la figure 6.7. L'erreur en vitesse est le principal responsable du raffinement important observé près du bord de fuite, tandis que les variables de turbulence déterminent la concentration des points en deux bandes obliques en aval de la plaque. Le ratio d'aire du plus grand au plus petit triangle du maillage final est de  $1.4 \times 10^8$ , ce qui illustre la capacité du remaillage adaptatif d'ajuster la discrétisation du domaine à la solution.

On notera pour ce problème la ressemblance remarquable des distributions d'erreur pour  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$ . Cela indique que le passage au variable logarithmiques fait

en sorte que les nouvelles variables dépendantes qui modélisent la turbulence ont le même comportement et leurs variations sont localisées au même endroit. Cet effet n'est pas étonnant étant donné que les variables logarithmiques sont reliées par une simple opération de soustraction dans l'expression de la viscosité turbulente et non par une division comme c'est le cas lorsque l'on utilise  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes.

La figure 6.8 illustre l'effet du maillage sur la précision des prédictions en vitesse. On présente les profils de vitesse axiale aux stations  $x=25$ , 50 et 100cm, et les résultats obtenus expérimentalement par Spencer [92]. Un tel écoulement en couche cisillée présente la particularité d'avoir une solution dite de similitude. C'est à dire que la solution est la même pour toutes les valeurs de  $x$  à une dilatation de l'axe des  $y$  près. Dans la figure 6.8 l'abscisse est donnée par la variable adimensionnelle de similitude  $\eta = (y - y_s)/x$ . Dans cette formule  $x$  et  $y$  sont les coordonnées et  $y_s$  l'ordonnée du point où  $U=(U_1+U_2)/2$ . L'ordonnée des graphes est la vitesse adimensionnelle. La figure 6.8 montre clairement l'amélioration des prédictions résultant de l'adaptativité. L'effet est plus marqué à la première station, ( $x=25$ cm), où la solution est plus influencée par ce qui se passe au voisinage du bord de fuite.

La figure 6.9 présente une comparaison des prédictions et des mesures de l'énergie cinétique de turbulence  $k$ . Cette figure montre clairement que l'effet de l'adaptativité est plus prononcé sur  $k$  que sur  $u$ . Les prédictions numériques s'approchent plus des valeurs expérimentales à la dernière station ( $x=100$ ) où l'écoulement est entièrement développé. On remarque aussi que les solutions sur les deux derniers maillages présentent peu de différences, ce qui nous permet de dire que la solution finale est à tout fin utile indépendante du maillage.

La figure 6.10 mène aux mêmes conclusions en ce qui concerne les profils du tenseur de Reynolds  $\bar{u}\bar{v}$ . La contrainte turbulente est calculée à l'aide de la formule suivante:

$$-\rho \bar{u}\bar{v} = \mu_T \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (6.3)$$

C'est une quantité obtenue par différentiation numérique du champs de vitesse. Sa prédiction sera donc beaucoup plus sensible au maillage que celle de  $u$ . La prédiction est meilleure en  $x=100$ , là où l'écoulement est similaire. Encore une fois on remarque que la solution finale ne dépend plus vraiment du maillage et que les résultats numériques s'approchent bien des valeurs expérimentales. Le léger décalage transversal du maximum dans le profil du cisaillement a été déjà observé pour le modèle  $k-\epsilon$  et ses variantes à échelles de temps multiples [93].

Les figures 6.11 à 6.13 permettent d'apprécier l'effet de l'adaptativité sur la tendance de la solution de devenir similaire. On présente pour le maillage initial et le maillage final les profils de vitesse, de  $k$  et de  $\bar{u}\bar{v}$  aux trois stations. Pour une solution similaire les courbes à différents endroits doivent se superposer. On voit que de ce point de vue la solution est nettement améliorée par l'adaptativité. Pourtant, même la solution obtenue sur le maillage le plus fin n'est pas parfaitement similaire. Les différences minimales entre les solutions obtenues sur les deux derniers maillages nous permettent cependant de constater que la solution finale est pratiquement indépendante du maillage.

Cet écoulement a été précédemment résolu par l'auteur à l'aide d'une formulation en variables  $k$  et  $\epsilon$  [86]. Le passage aux variables logarithmiques permet de démarrer les calculs sur des maillages sensiblement plus grossiers, le bénéfice de l'adaptativité en étant d'autant augmenté. De plus, les solutions obtenues en variables logarithmiques sont nettement plus précises que celles basées sur une résolution en  $k$  et  $\epsilon$ . La robustesse accrue de l'algorithme de résolution et la diminution du temps de calcul sont d'autres avantages issus du passage aux variables logarithmiques, qui méritent d'être mentionnés.

Comme on a pu le constater sur les figures 6.3 et 6.4, la solution sur le maillage initial est entachée d'oscillations surtout en vitesse. Rappelons que cette solution a été obtenue par une méthode de Galerkin, donc sans termes de stabilisation. Nous avons aussi résolu le problème sur le maillage initial à l'aide d'une formulation Galerkin-moindre carré (GLS) afin de mettre en évidence l'effet des termes de stabilisation et d'upwinding. La solution obtenue est comparée à la solution Galerkin dans les figures 6.14 et 6.15. La méthode GLS conduit à une solution plus propre et cela surtout sur les maillages grossiers comme c'est le cas du maillage initial utilisé pour ce problème. On se pose alors la question: cela a-t-il du sens de faire encore appel à une méthode de Galerkin lorsqu'on sait que les termes de stabilisation GLS réduisent les oscillations tout en conservant une formulation résiduelle? Pour être vraiment en mesure de répondre à cette question il faut analyser d'avantage le comportement des deux méthodes.

Notons d'abord que la solution du problème à résoudre contient une singularité au bord de fuite de la plaque qui sépare les deux couches de fluide. Les vitesses des deux cotés de la plaque sont différentes et les gradients de vitesse sont de plus en plus forts lorsque la taille des éléments diminue au voisinage du bord de fuite. Cela détermine aussi une augmentation accrue du terme de production dans les équations de transport pour les variables de turbulence. Comme effet, on remarque une augmentation du maximum de  $k$  et  $\epsilon$  avec le raffinement du maillage. De plus, le maximum est atteint dans le premier élément en aval du bord de fuite, ce qui détermine des gradients extrêmement élevés pour les variables de turbulence. Si  $h$  est la taille du premier élément après le bord de fuite, alors les gradients de  $k$  et  $\epsilon$  varient en ce point comme  $1/h$ , et leur dérivée seconde comme  $1/h^2$ . Dans le processus adaptatif, l'estimateur d'erreur détecte une erreur très importante dans cette région et commande une diminution de la taille des éléments. Les gradients des variables de turbulence deviennent alors encore plus élevés. On constate alors que l'erreur estimée dans cette région ne diminue pas avec le raffinement du maillage, même si la solution est de mieux en mieux représentée. D'autre part la présence de la singularité affecte beaucoup le

comportement des méthodes stabilisées telles SUPG et GLS. Rappelons que ces méthodes font appel au résidu fort des équations qui fait apparaître les dérivées secondes. Celles-ci varient comme  $1/h^2$  au voisinage de la singularité et prennent alors des valeurs extrêmement élevées. L'effet net est que lorsque la taille du maillage diminue trop au voisinage du point singulier, les méthodes SUPG et GLS empêchent l'algorithme itératif de converger.

En conclusion, on peut dire que les méthodes stabilisées sont nettement supérieures sur les maillages grossiers. Pourtant, lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé, les différences entre les solutions SUPG, GLS d'une part et la solution Galerkin de l'autre diminuent considérablement avec le raffinement du maillage. Finalement, comme on a déjà mentionné, les méthodes stabilisées sont incapables de converger sur des maillages très raffinés au voisinage d'une singularité.

Une autre série de calculs a été complétée afin d'évaluer l'influence des conditions limite à l'entrée sur le comportement de l'algorithme adaptatif et sur la nature de la solution. Pour ce problème, qu'on appelle Prob2, le niveau de l'énergie cinétique de turbulence en entrée a été fixé à 0.2% ( $\alpha=0.002$ ) pour la couche rapide et respectif à 0.33% ( $\alpha=0.0033$ ) pour la couche à basse vitesse. Dans la partie non-perturbée de l'écoulement le nombre de Reynolds est alors autour de 1000 dans la partie à haut vitesse et autour de 2500 du côté basse vitesse. Ces conditions représentent une meilleure approche vis-à-vis les expériences, qui comportent un niveau de turbulence en entrée situé entre 0.1 et 0.5%.

Ce problème est plus difficile à résoudre et seulement les méthodes stabilisées ont pu le traiter. Les calculs ont été complétés à l'aide d'une formulation GLS pour les équations de Navier-Stokes. Les équations de transport des variables logarithmiques ont été résolues par une formulation SUPG incomplète, qui ne fait donc pas appel aux dérivées secondes des variables. Même si cette méthode n'est pas résiduelle, elle

demeure une bonne approximation de la méthode SUPG car l'écoulement est très peu visqueux. Une première solution a été obtenue sur le maillage 1. Les maillages suivants ont été régénérés afin de mieux s'adapter au nouveau problème à résoudre. La succession de maillages obtenus est présentée dans la figure 6.16. On remarque cette fois une concentration asymétrique des points dans les deux bandes obliques correspondantes aux fronts dans les variables de turbulence. Cela reflète le fait que la nature de la solution a changé.

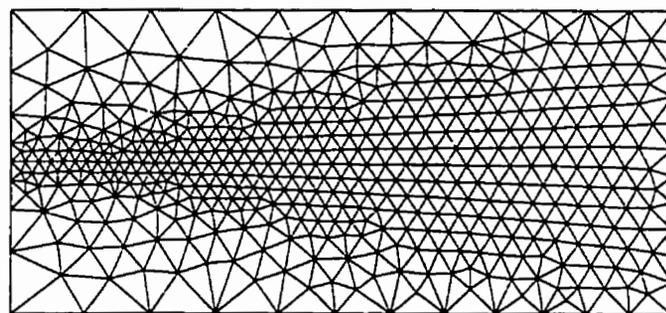
Les solutions obtenues sur le maillage 1 et sur le maillage final adapté sont présentées dans les figures 6.17 et 6.18. Rappelons que cette fois les solutions sont obtenues par des méthodes stabilisées. Notons d'abord une nette amélioration de la solution entre les deux maillages. La solution finale est extrêmement propre grâce à une concentration optimale des points dans les régions où la solution varie le plus. On remarque aussi que dans les deux couches obliques les gradients des variables logarithmiques sont plus forts qu'ils ne l'étaient pour le problème Prob1.

Les solutions finales des deux calculs, Prob1 et respectif Prob2, sont comparées dans les figures 6.19 à 6.24. La figure 6.19 présente les profils de la vitesse longitudinale aux trois stations de contrôle, soit à  $x=25$ ,  $x=50$  et  $x=100$ . Les valeurs sont représentées en fonctions des variables de similitude comme décrit précédemment. On remarque que la solution Prob2 approche mieux les valeurs expérimentales et ça surtout aux deux premières stations. Les figures 6.20 et 6.21 comparent les deux solutions pour l'énergie cinétique de la turbulence et les contraintes turbulentes. On remarque une nette amélioration de la prédiction en  $k$  à  $x=50$  et à  $x=100$ . En ce qui concerne les contraintes turbulentes on remarque que l'écart par rapport aux valeurs expérimentales a diminué. Le maximum est sous-estimé, mais c'est aussi le cas pour la solution Prob1 à la station  $x=100$ .

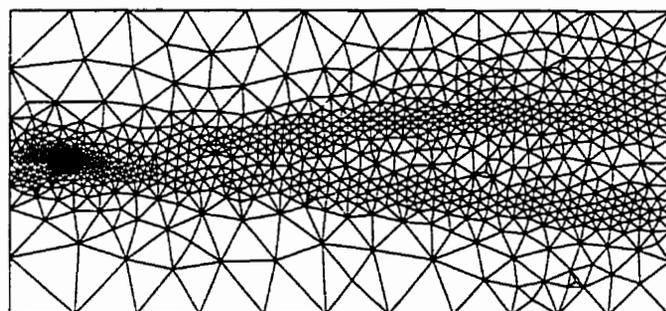
Finalement les figures 6.22 à 6.24 nous permettent d'apprécier si les deux

solutions s'approchent d'une solution similaire. Les différences sont moins marquées aux niveau de la vitesse (figure 6.22). Pourtant  $k$  et le cisaillement turbulent s'approchent plus de la similitude dans le cas du problème Prob2. L'amélioration des prédictions de la solution Prob2 par rapport à Prob1 est plus marquée sur ces figures. Notons aussi l'asymétrie du profil de cisaillement turbulent, telle que remarquée aussi dans le cas des valeurs expérimentales. Duncan [93] affirmait que le modèle  $k-\epsilon$  est incapable de reproduire cette asymétrie. Des conditions limites appropriées semblent permettre au modèle  $k-\epsilon$  de reproduire ce comportement.

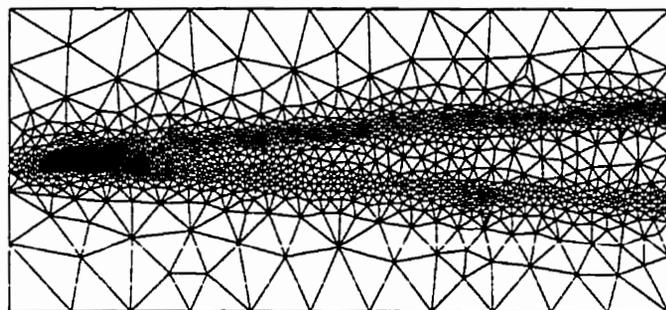
On remarque donc que les conditions en entrée pour les variables de turbulence sont déterminantes pour la nature de la solution. Le changement de ces conditions a un effet direct sur la solution qui dépend surtout du niveau de la viscosité turbulente en entrée.



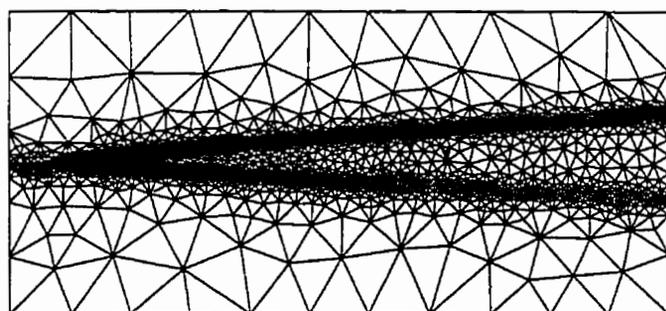
Cycle - 0



Cycle - 1



Cycle - 2

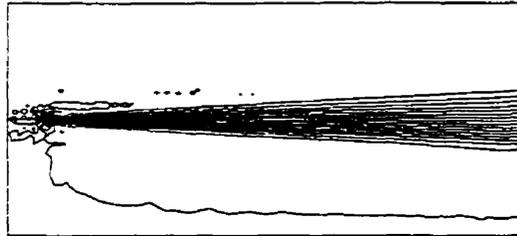
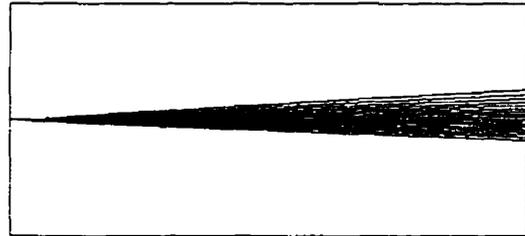
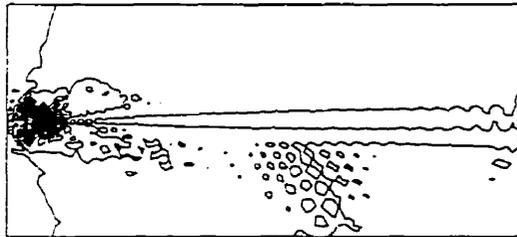
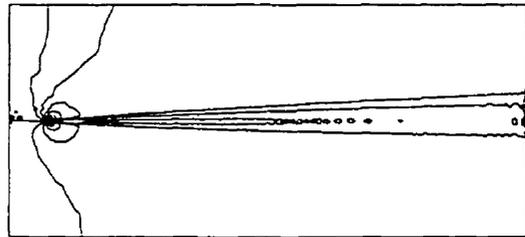
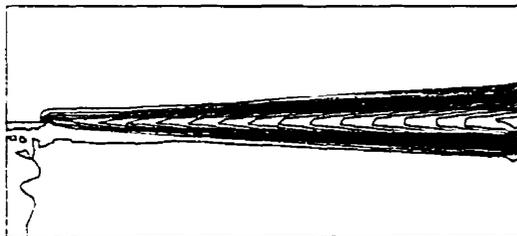


Cycle - 3

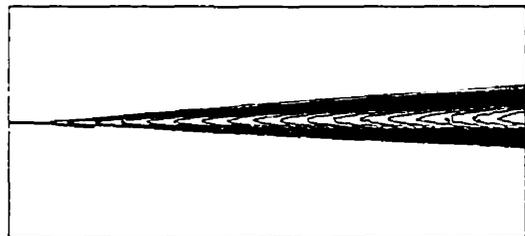
Figure 6.2 Couche cisillée - Maillages engendrés par la stratégie adaptative

Solution obtenue sur le maillage initial

Solution obtenue sur le maillage final

Vitesse  $u$ Vitesse  $u$ Vitesse  $v$ Vitesse  $v$ 

Viscosité turbulente

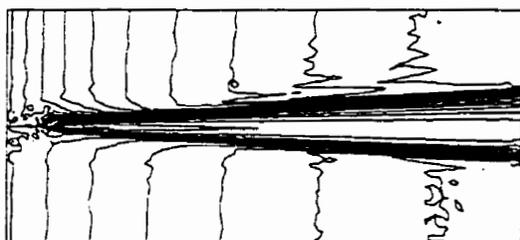
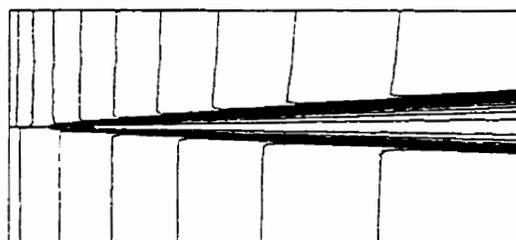
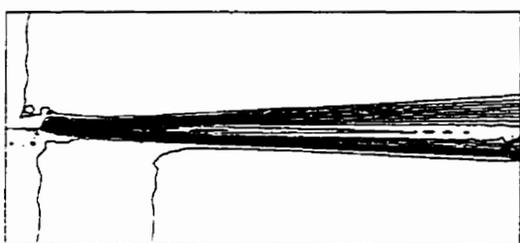
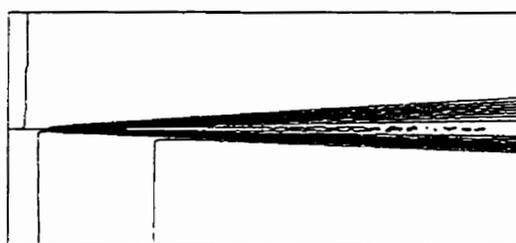
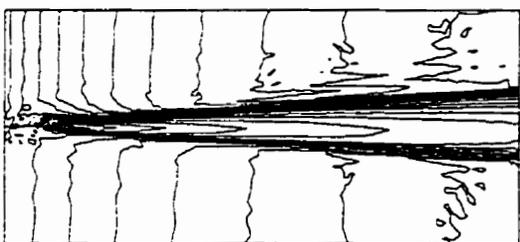
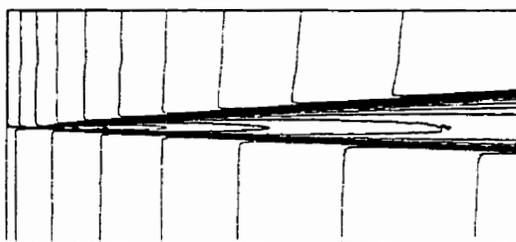
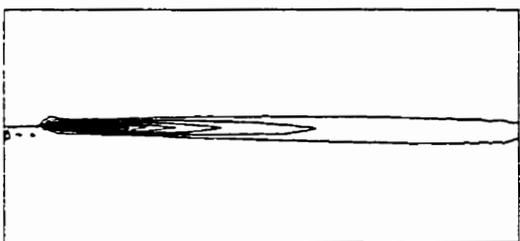
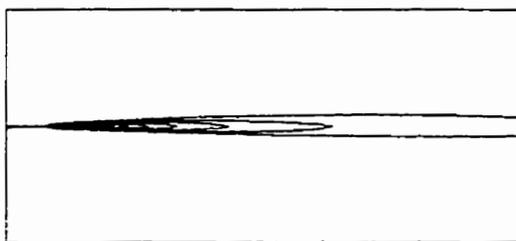


Viscosité turbulente

Figure 6.3 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final: vitesse  $u$ , vitesse  $v$  et viscosité turbulente

Solution obtenue sur le maillage initial

Solution obtenue sur le maillage final

 $\ln(k)$  $\ln(k)$  $k$  $k$  $\ln(\epsilon)$  $\ln(\epsilon)$  $\epsilon$  $\epsilon$ Figure 6.4 Solution sur le maillage initial et sur le maillage final:  $\ln(k)$ ,  $k$ ,  $\ln(\epsilon)$ ,  $\epsilon$

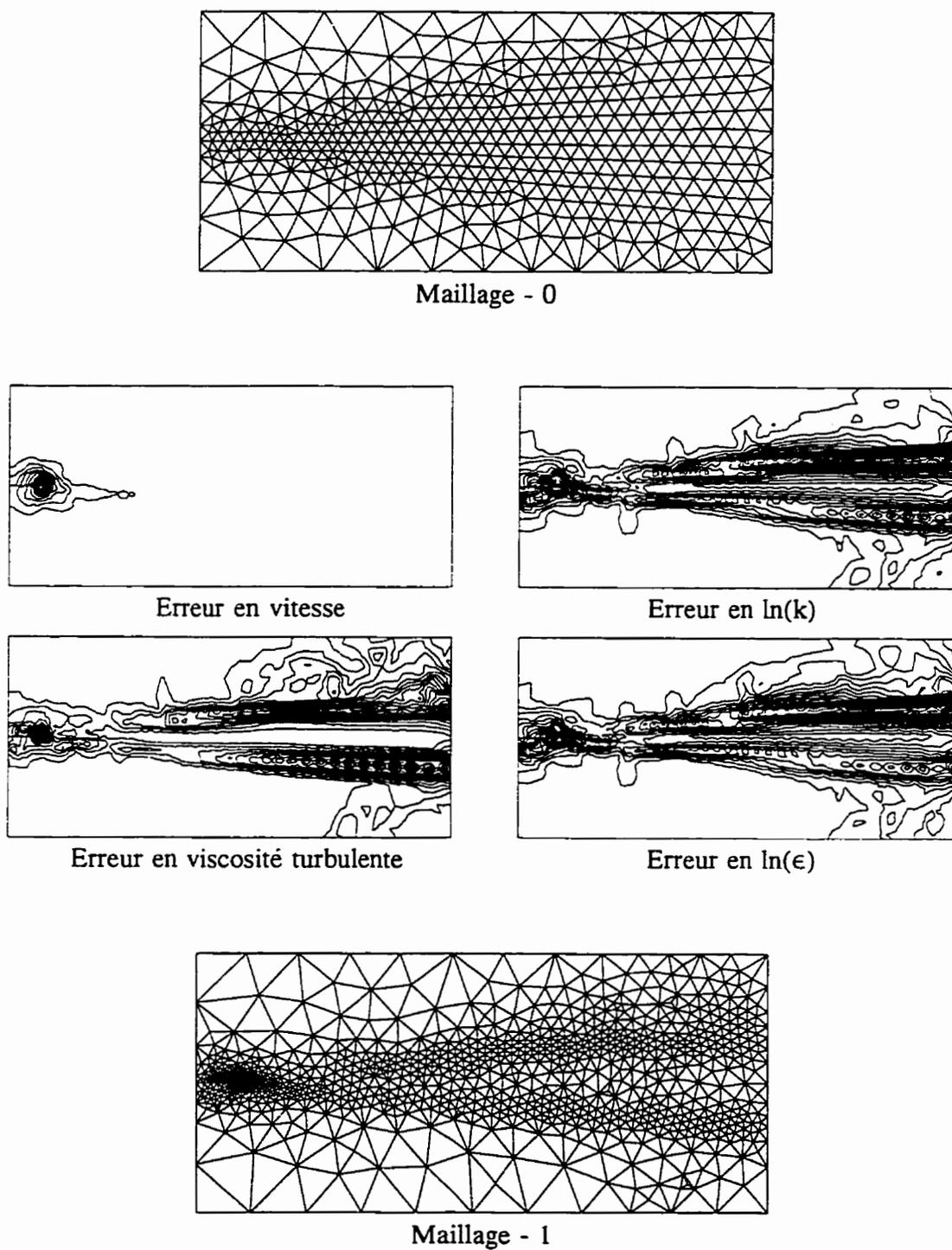
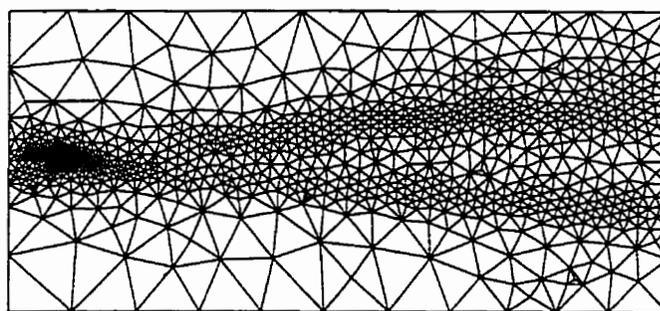
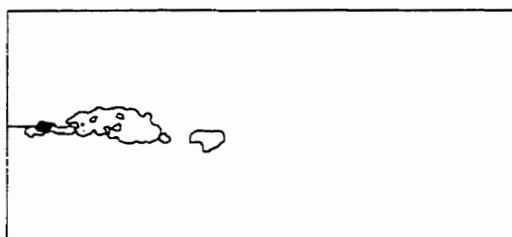


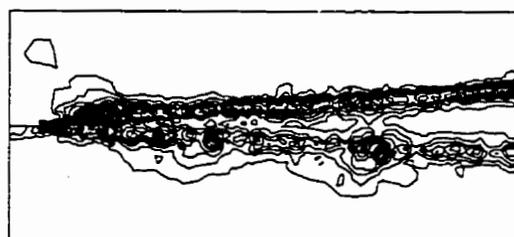
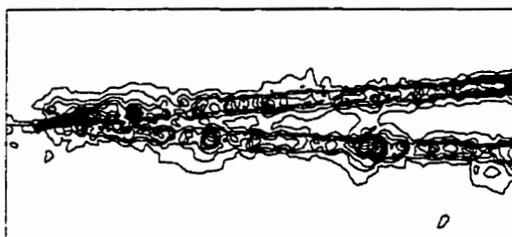
Figure 6.5 Maillage initial, estimation de l'erreur et premier maillage adapté



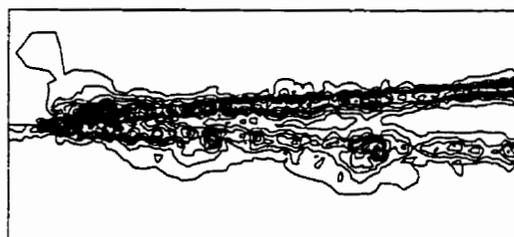
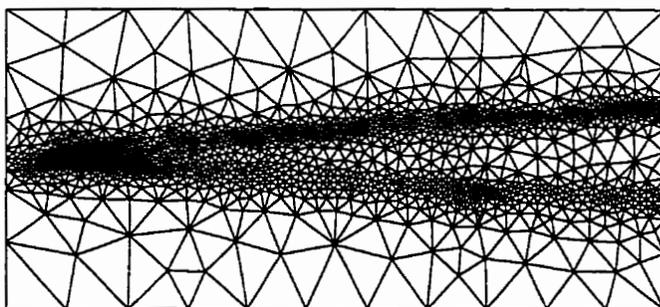
Maillage - 1



Erreur en vitesse

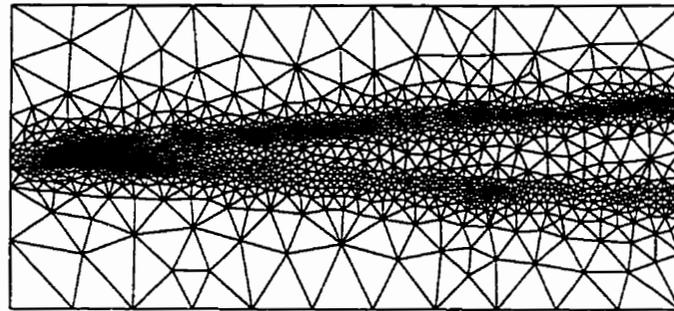
Erreur en  $\ln(k)$ 

Erreur en viscosité turbulente

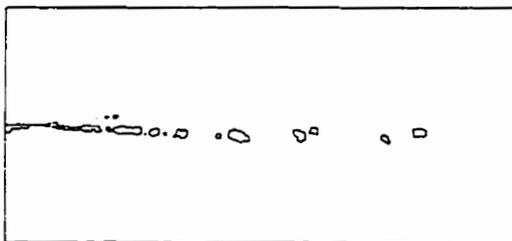
Erreur en  $\ln(\epsilon)$ 

Maillage - 2

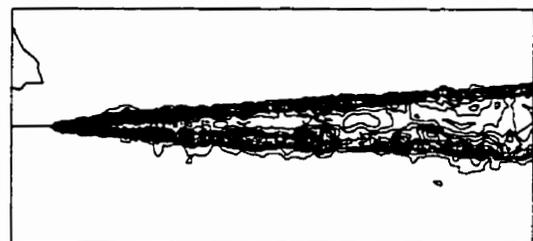
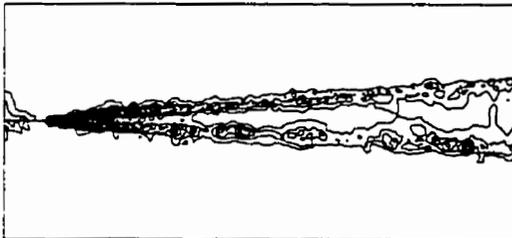
Figure 6.6 Maillage 1, estimation de l'erreur et deuxième maillage adapté



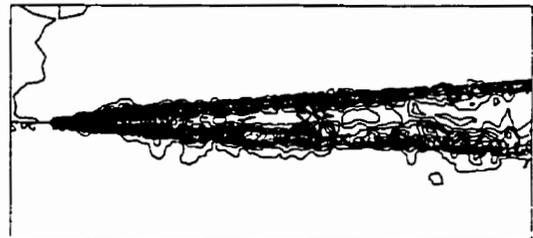
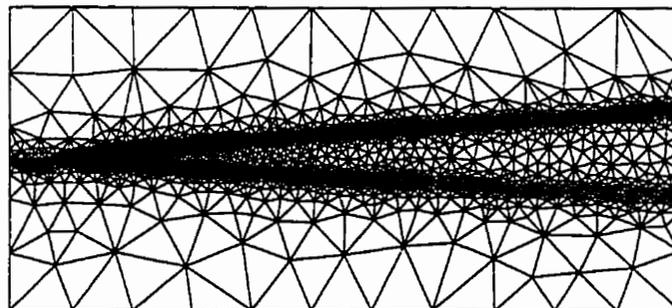
Maillage - 2



Erreur en vitesse

Erreur en  $\ln(k)$ 

Erreur en viscosité turbulente

Erreur en  $\ln(\epsilon)$ 

Maillage - 3

Figure 6.7 Maillage 2, estimation de l'erreur et maillage final

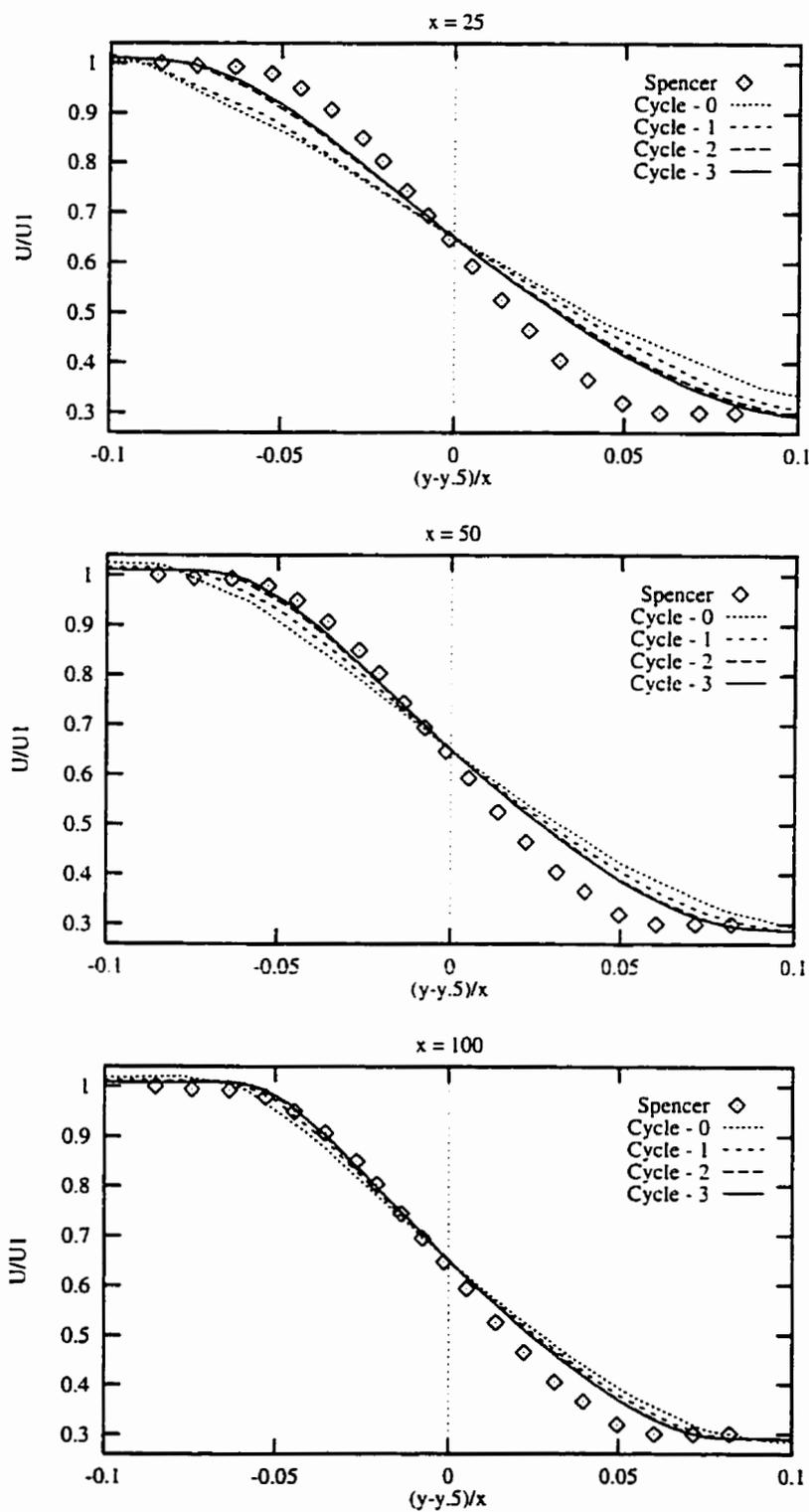
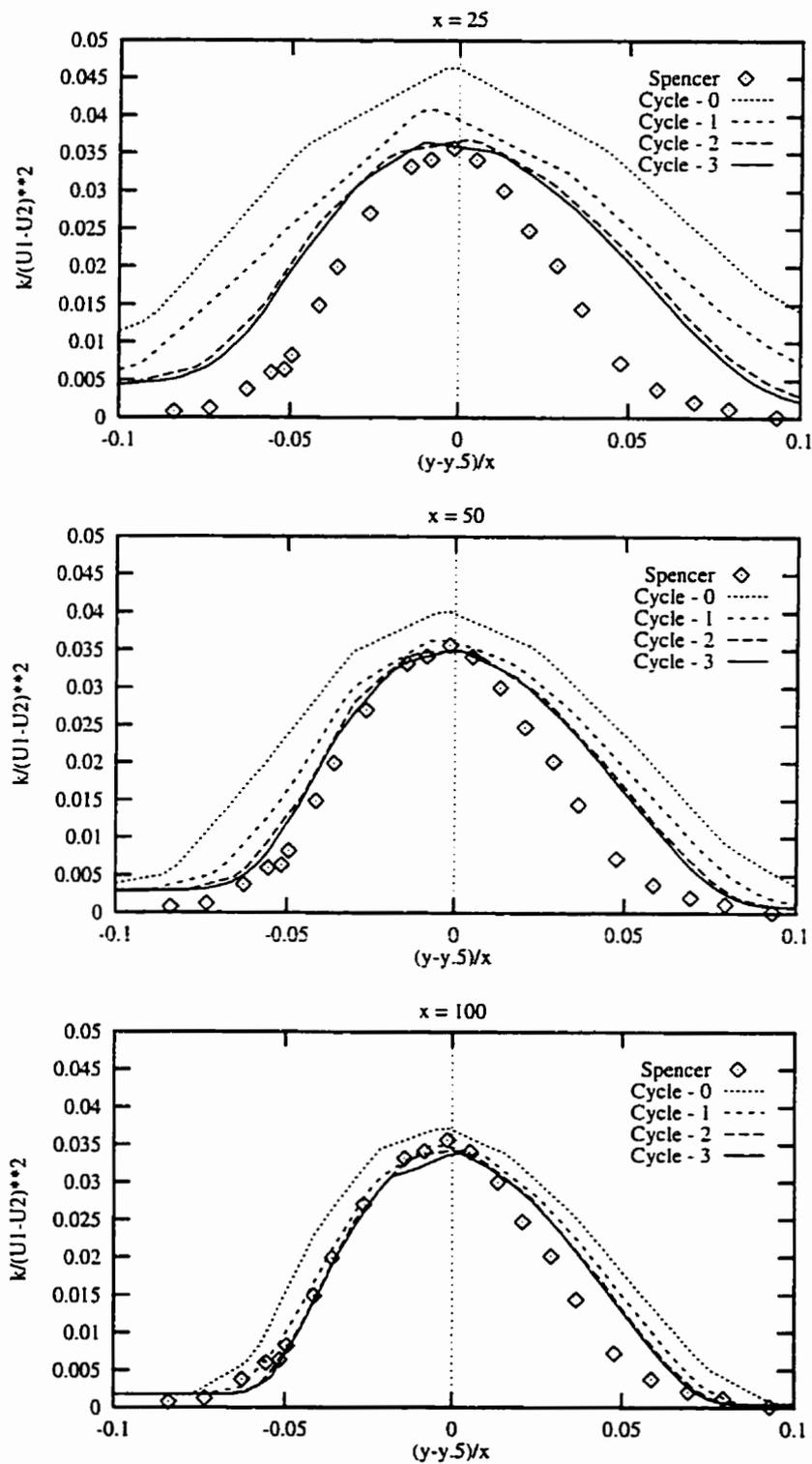


Figure 6.8 Profils de vitesses obtenus à différents stations de contrôle

Figure 6.9 Distribution de  $k$  à différents stations de contrôle

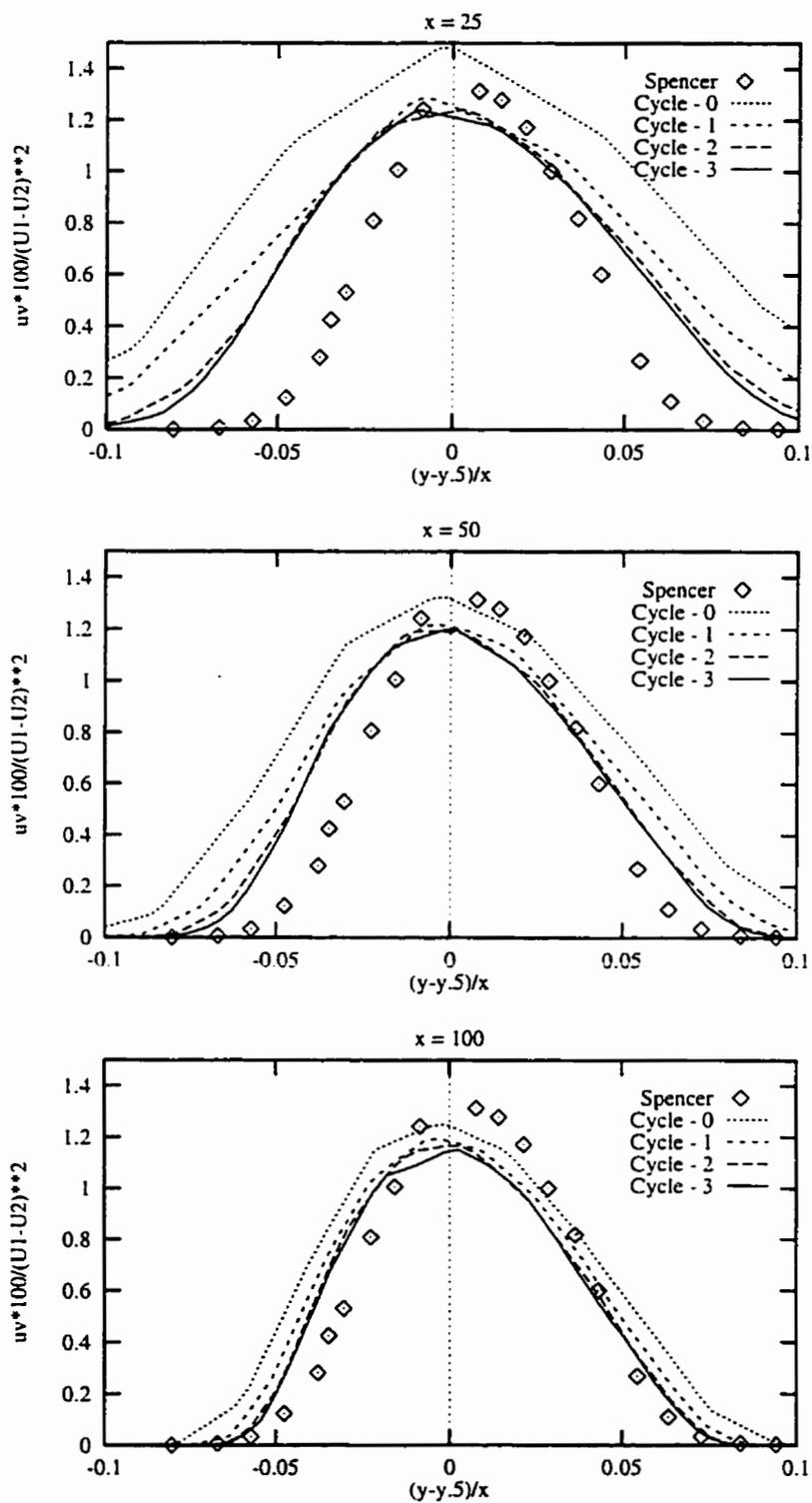


Figure 6.10 Distribution des contraintes turbulentes à différents stations de contrôle

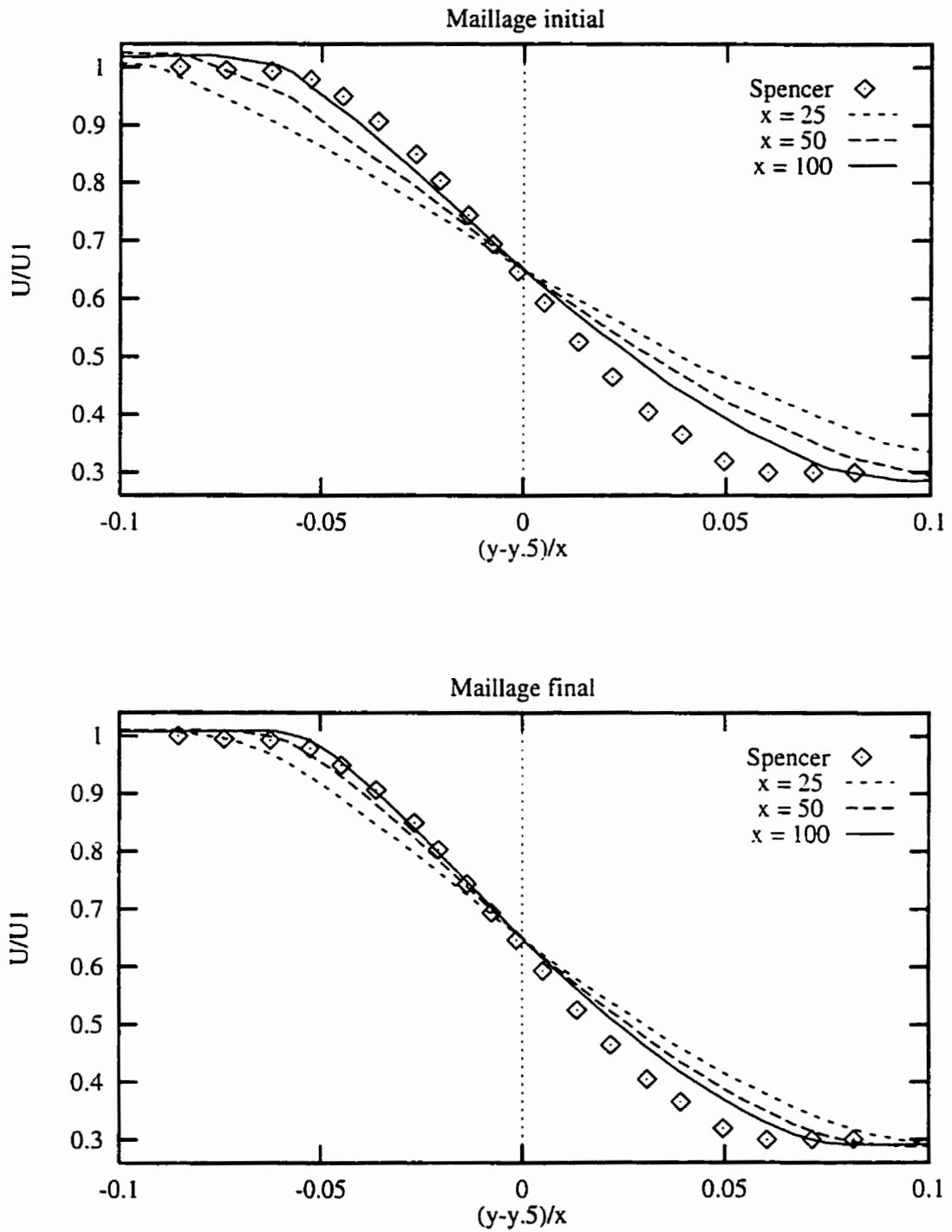
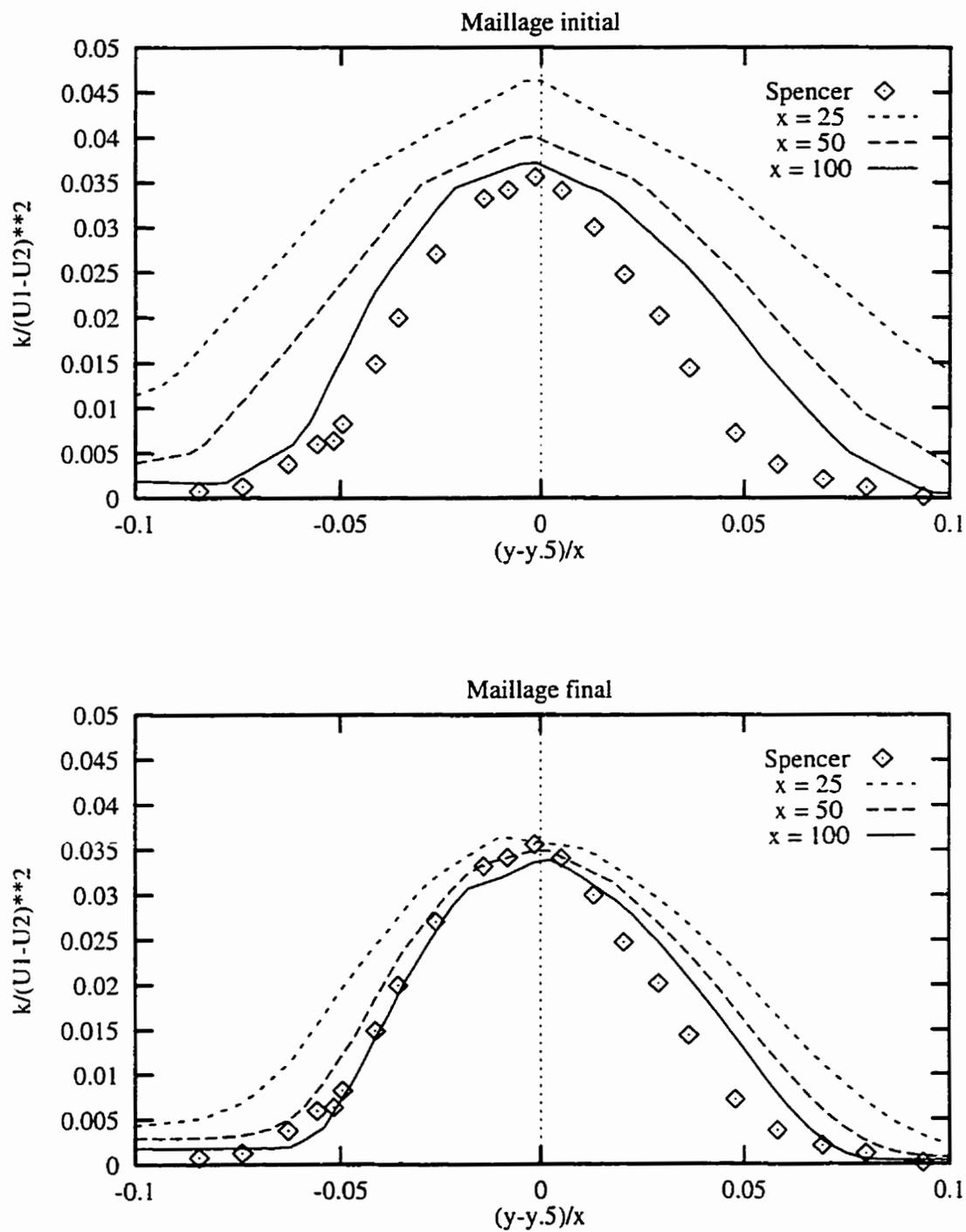


Figure 6.11 Profils de vitesses sur le premier et le dernier maillage

Figure 6.12 Profils de  $k$  sur le premier et le dernier maillage

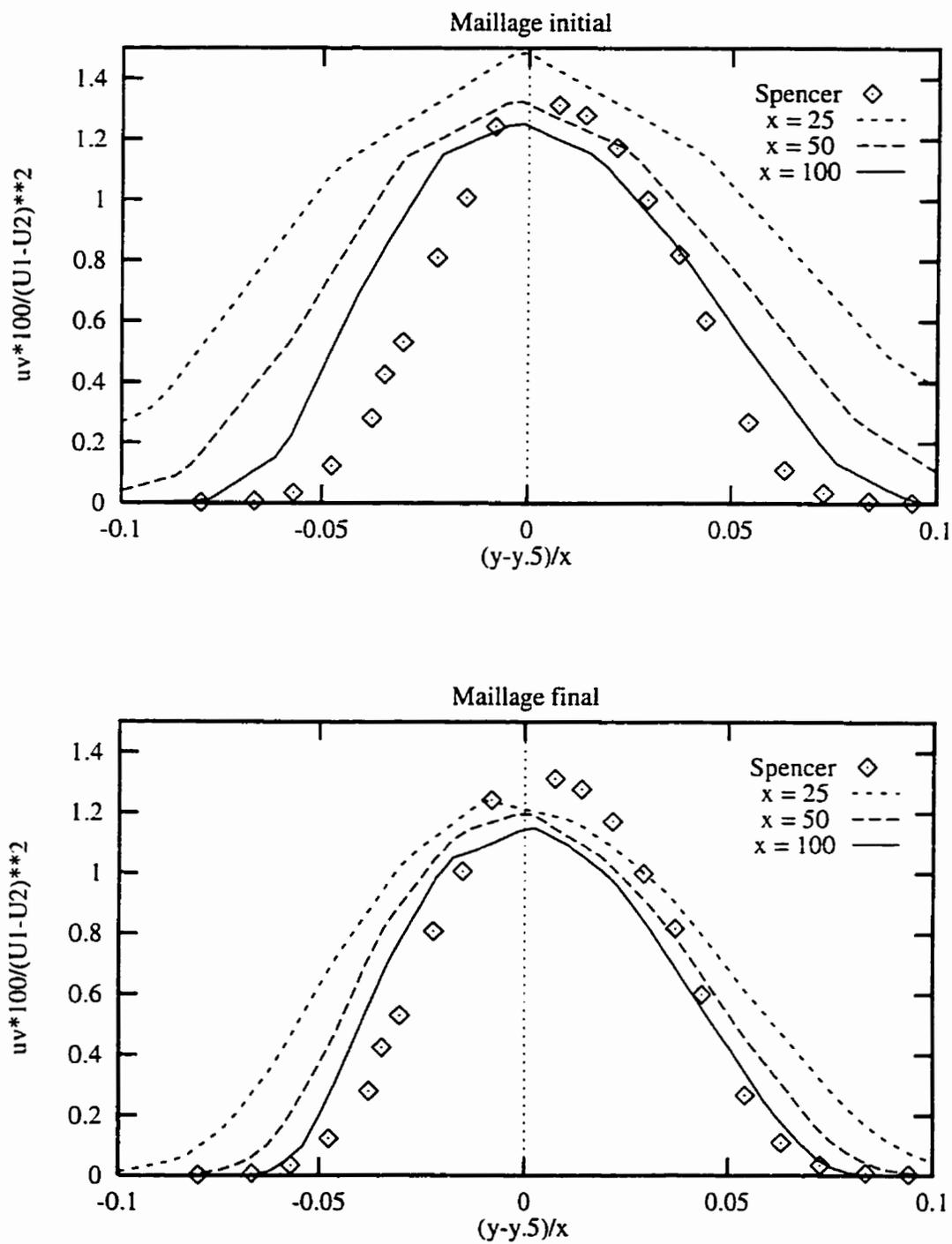


Figure 6.13 Profils des contraintes turbulentes sur le premier et le dernier maillage

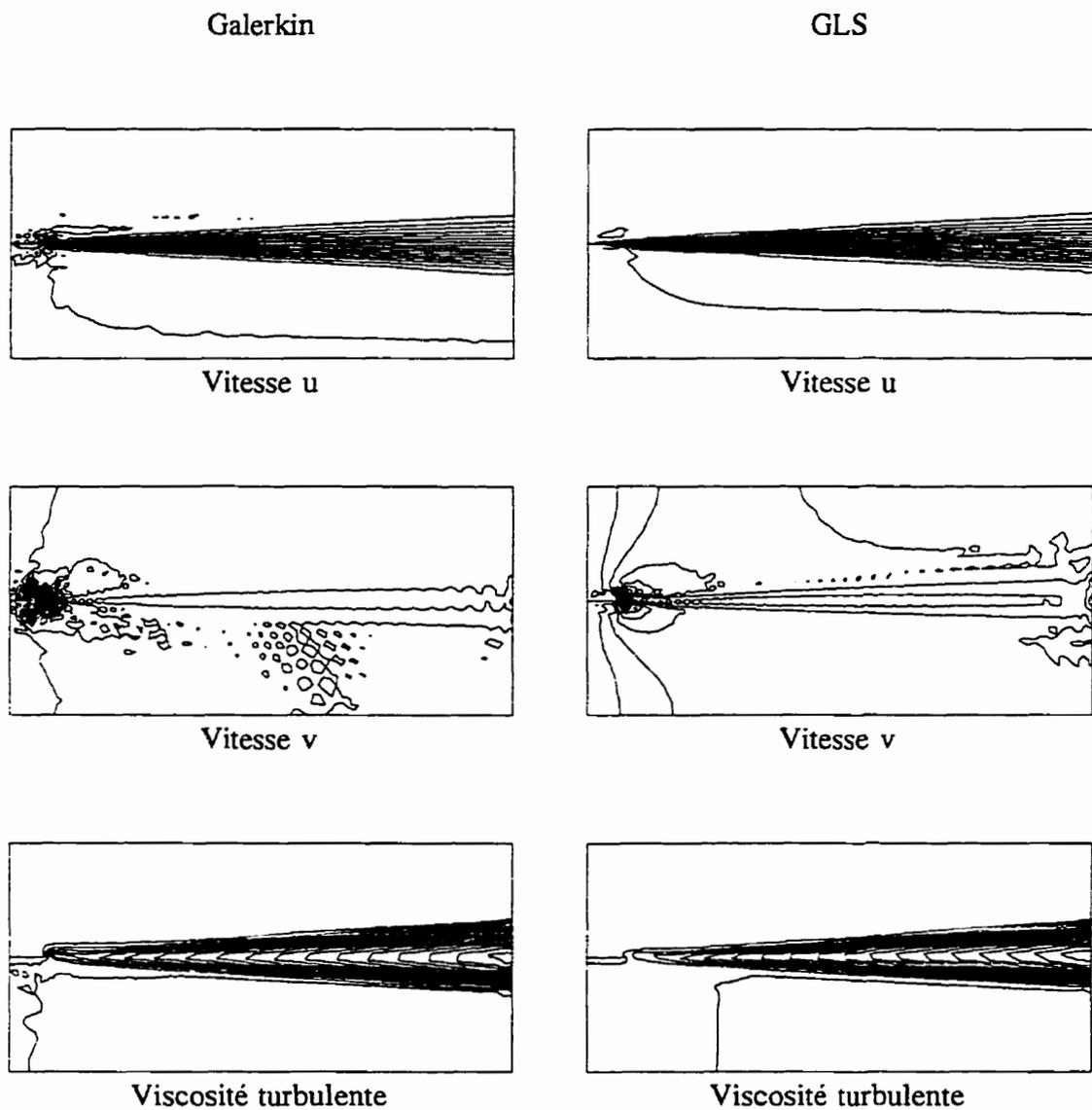


Figure 6.14 Solutions en formulation Galerkin et GLS: vitesse  $u$ , vitesse  $v$  et viscosité turbulente

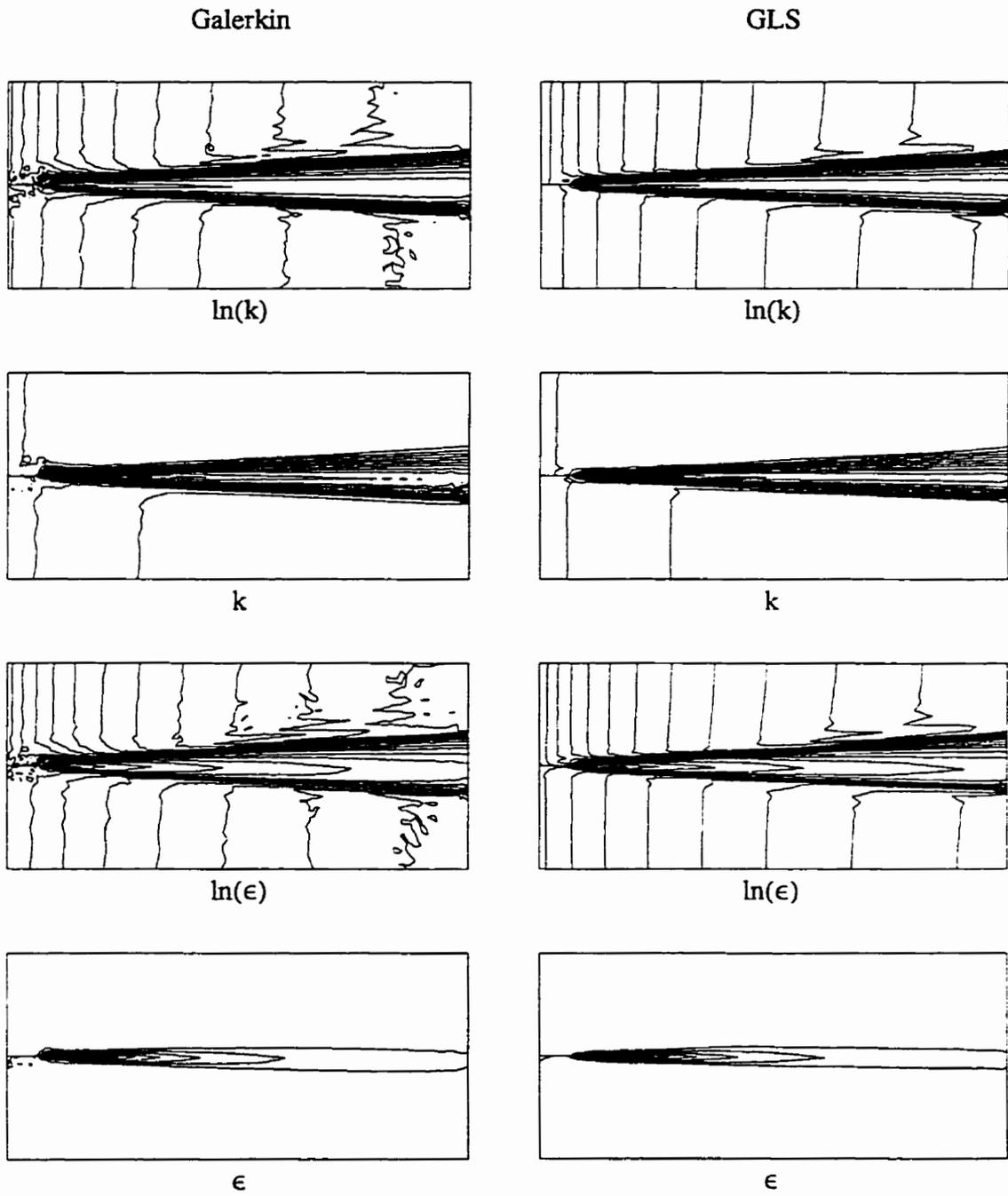
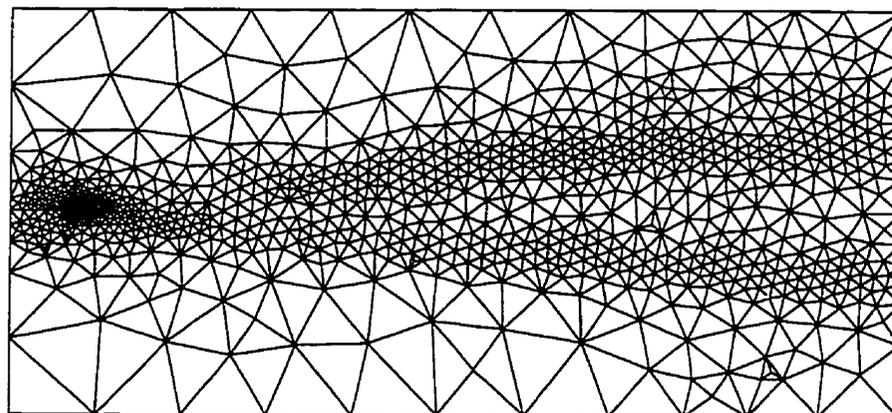
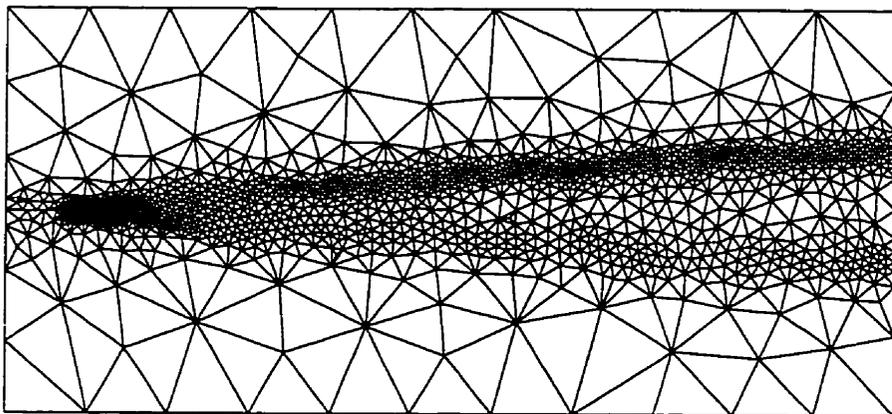


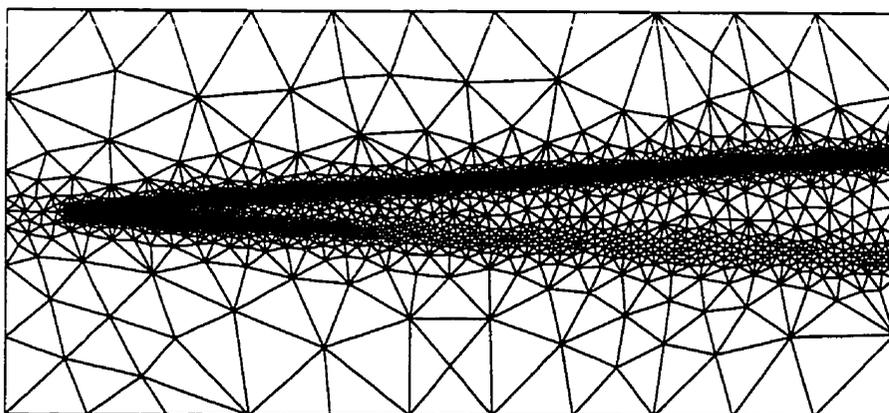
Figure 6.15 Solutions en formulation Galerkin et GLS:  $\ln(k)$ ,  $k$ ,  $\ln(\epsilon)$ ,  $\epsilon$



Cycle - 1



Cycle - 2



Cycle - 3

Figure 6.16 Couche cisailée, calcul Prob2 - Maillages adaptés

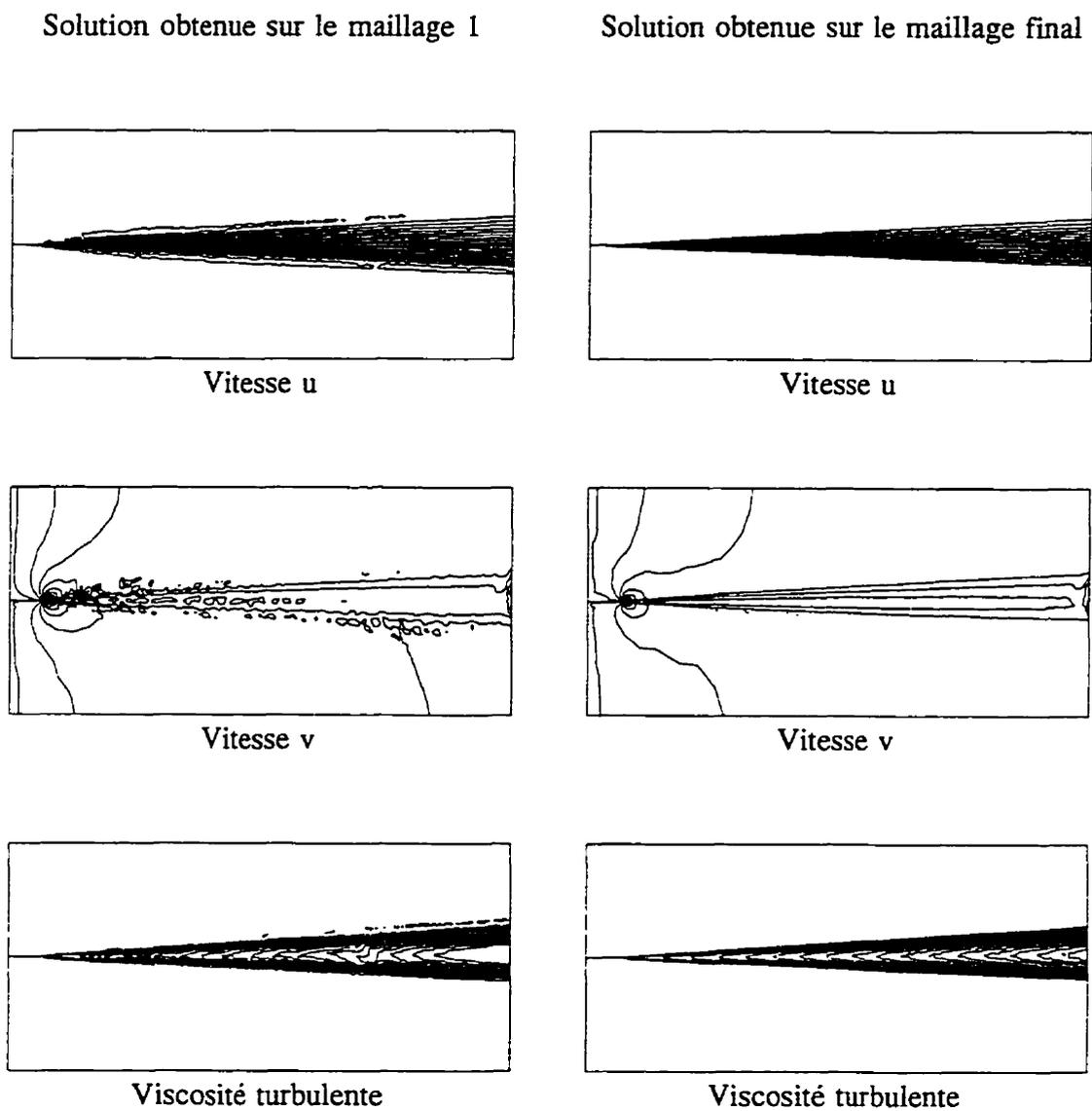


Figure 6.17 Calcul Prob2; Solution sur le maillage 1 et sur le maillage final: vitesse  $u$ , vitesse  $v$  et viscosité turbulente

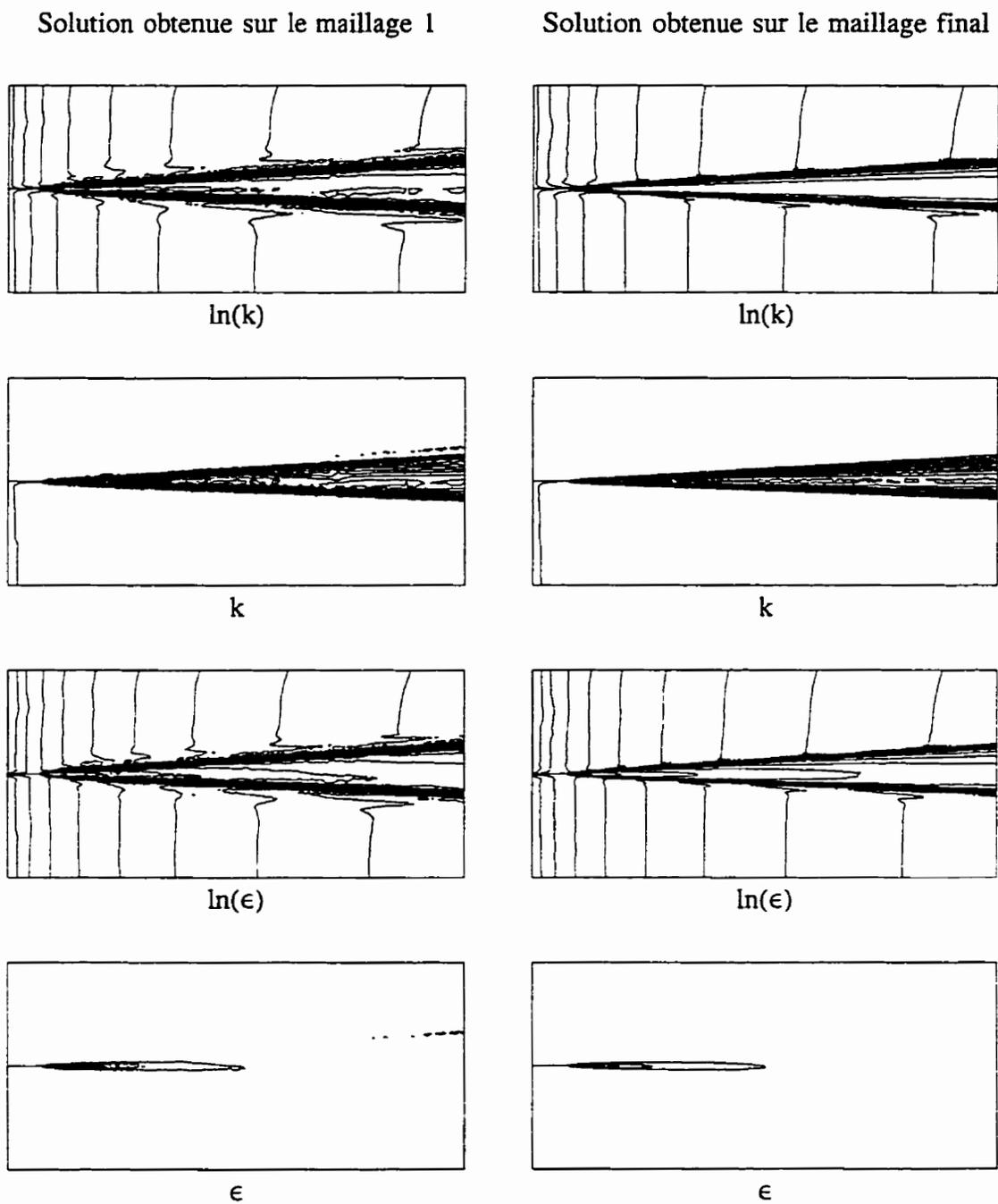


Figure 6.18 Calcul Prob2; Solution sur le maillage 1 et sur le maillage final:  $\ln(k)$ ,  $k$ ,  $\ln(\epsilon)$ ,  $\epsilon$

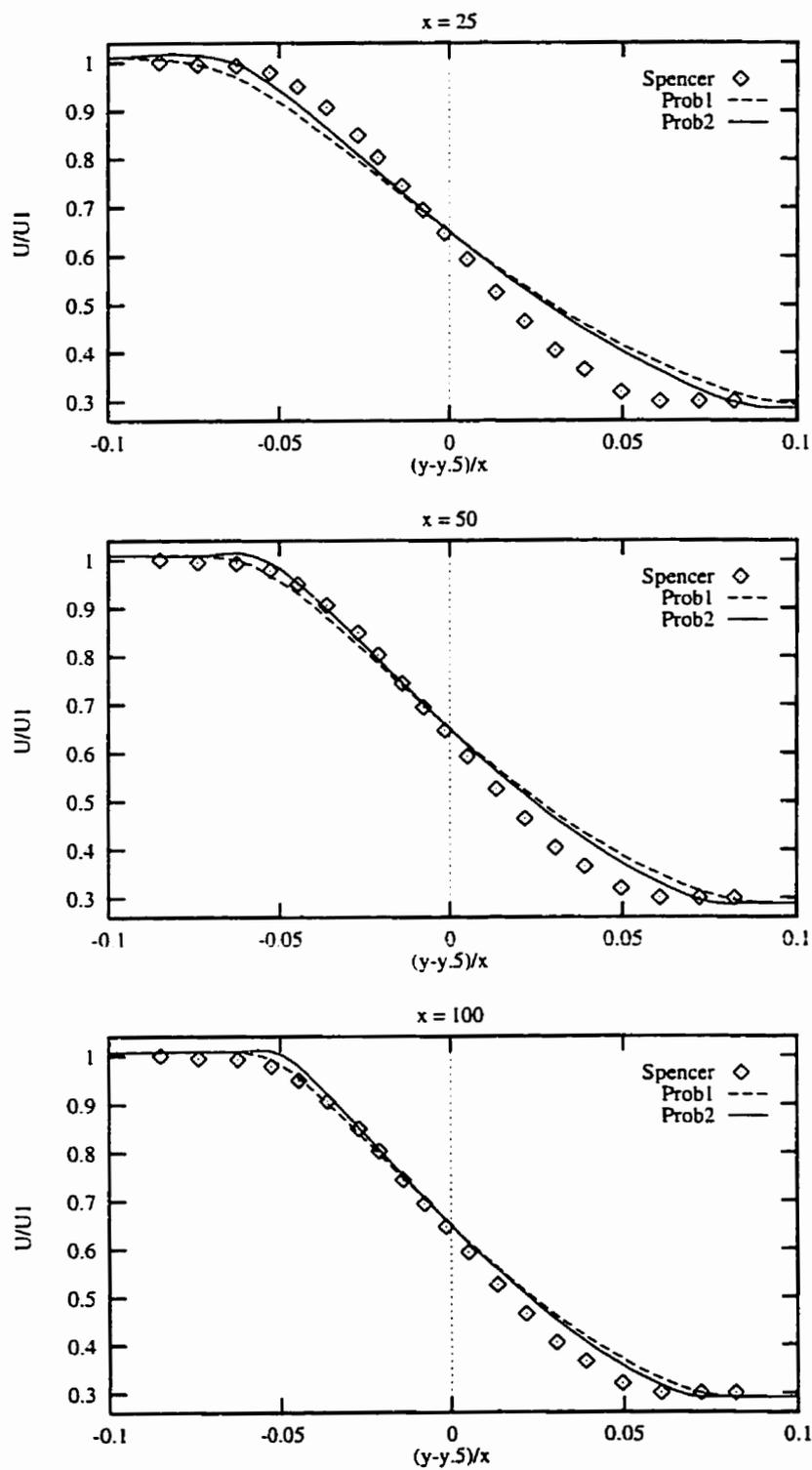


Figure 6.19 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en vitesse

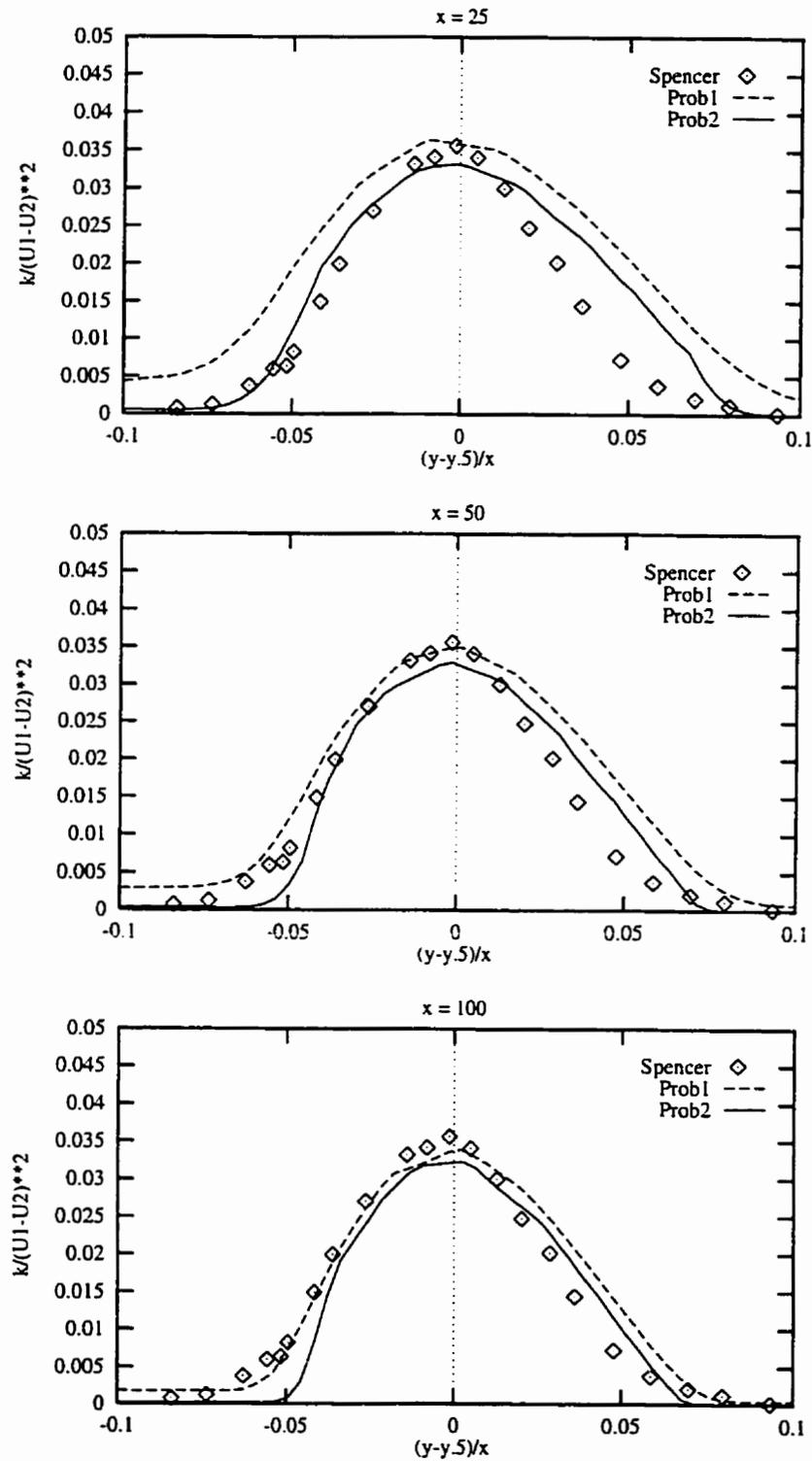


Figure 6.20 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en  $k$

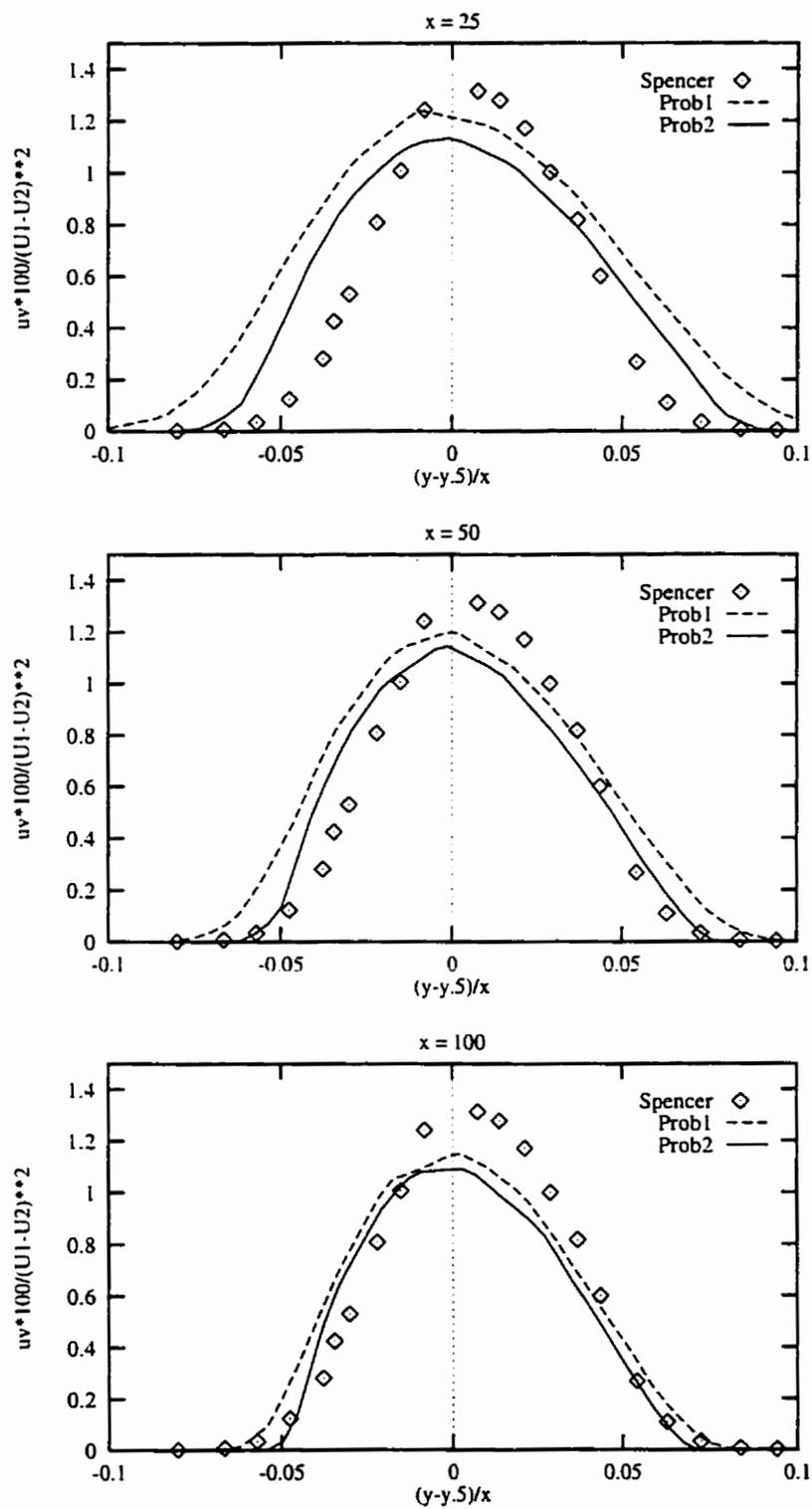


Figure 6.21 Influence des conditions limite à l'entrée sur les contraintes turbulentes

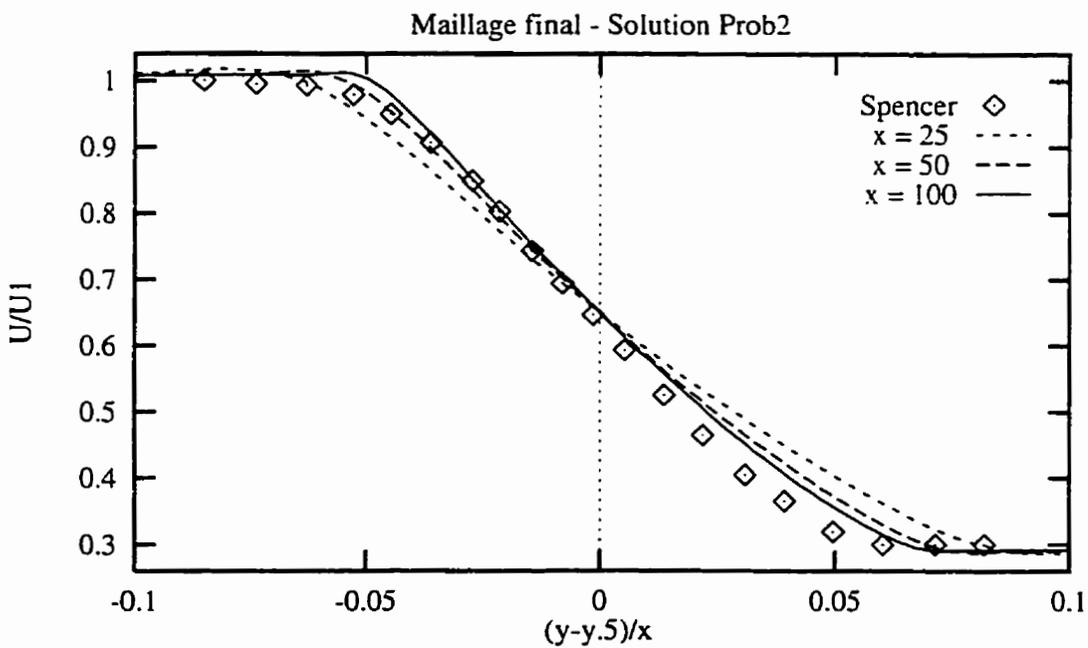
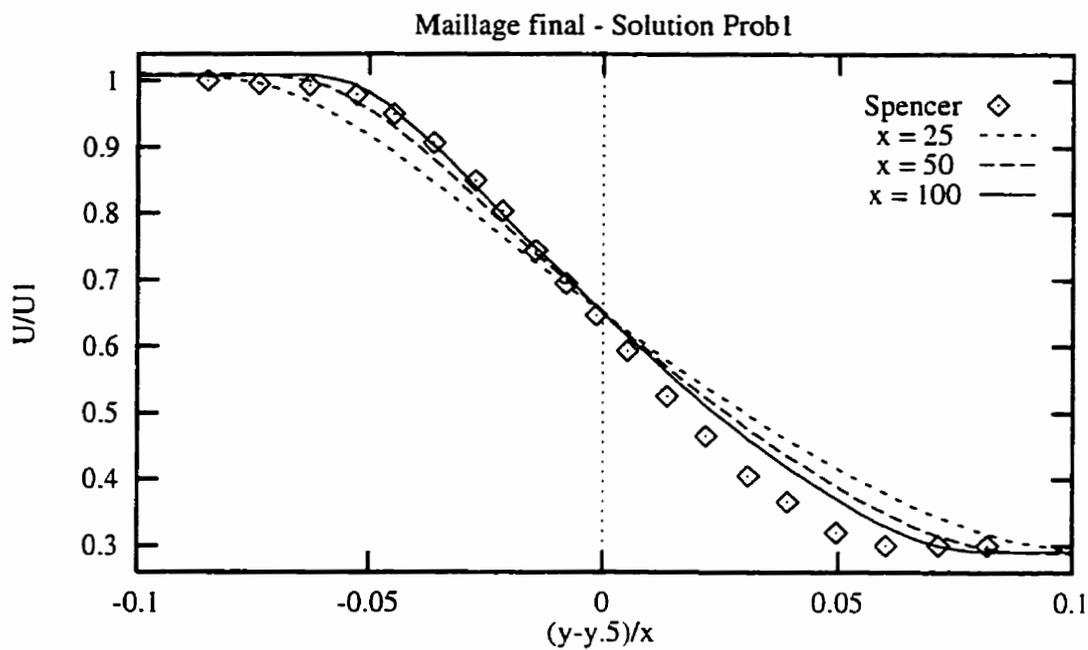


Figure 6.22 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude de la solution en vitesse

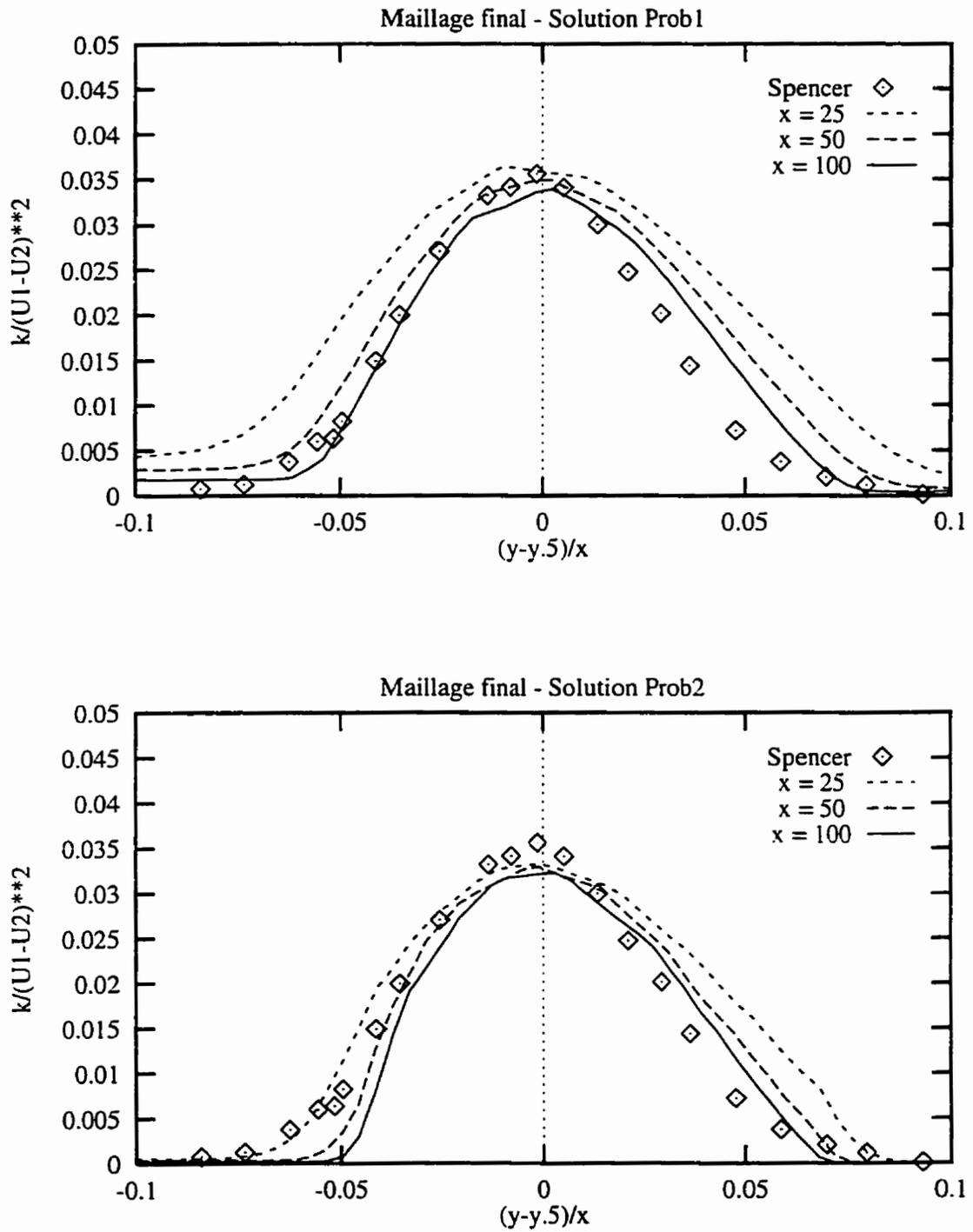


Figure 6.23 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude de la solution en  $k$

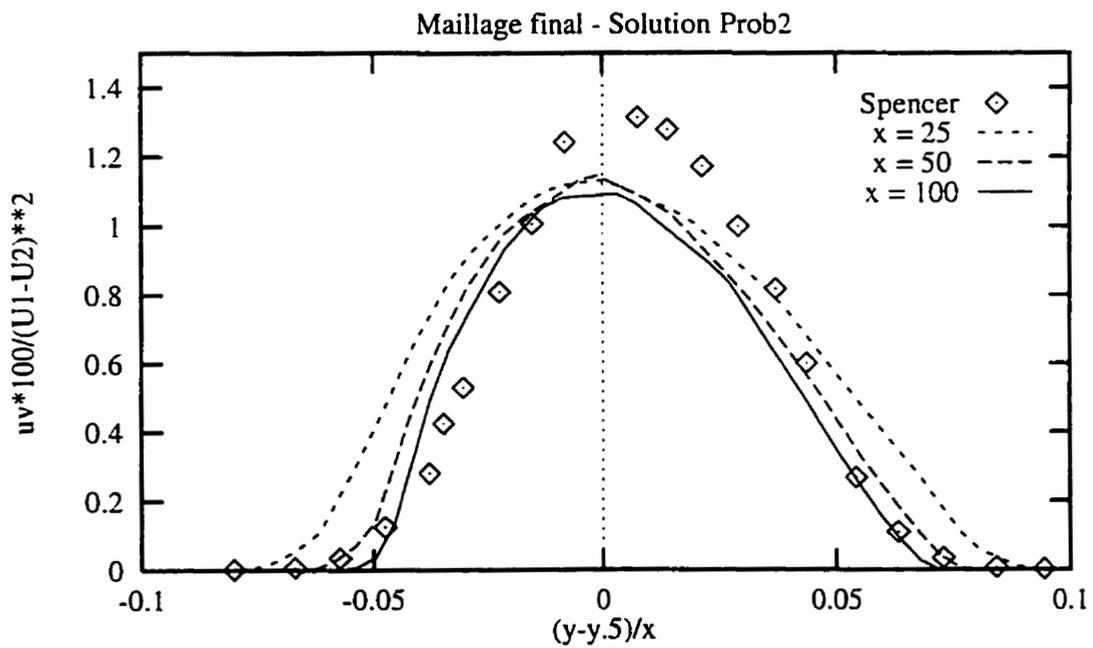
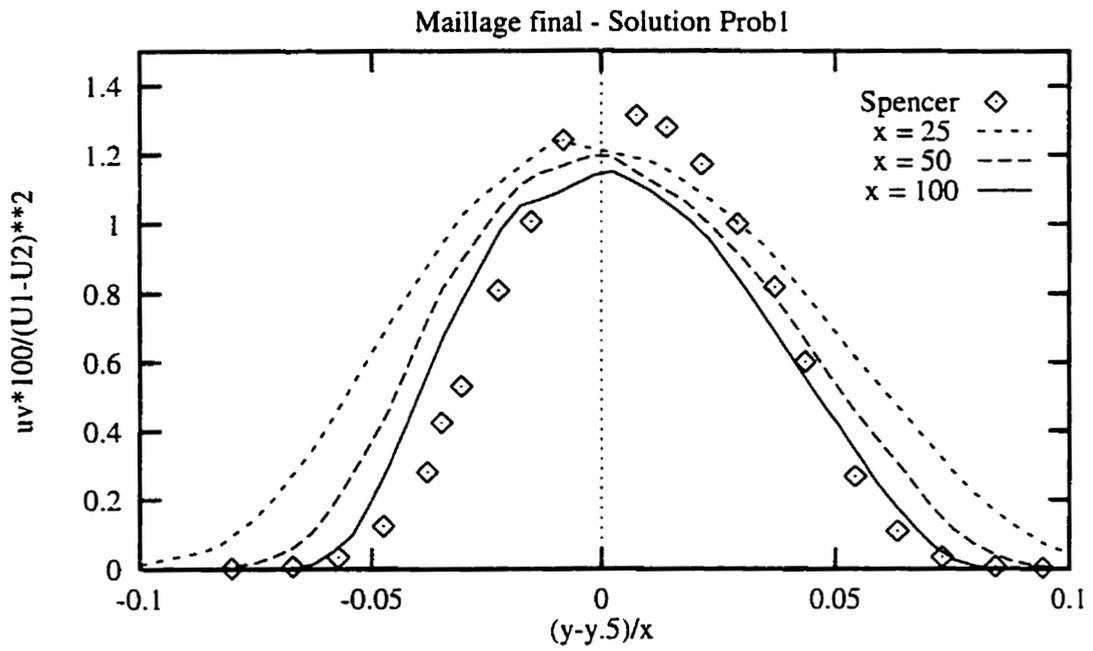


Figure 6.24 Influence des conditions limite à l'entrée sur la similitude des valeurs des contraintes turbulentes

## 6.2. Marche descendante de Kim

Ce problème a fait l'objet d'une étude expérimentale par Kim [94]. Il s'agit d'un écoulement turbulent sur une marche descendante. La figure 6.16 illustre la géométrie du domaine de calcul, les conditions limites et les distances utilisées dans la loi de paroi.

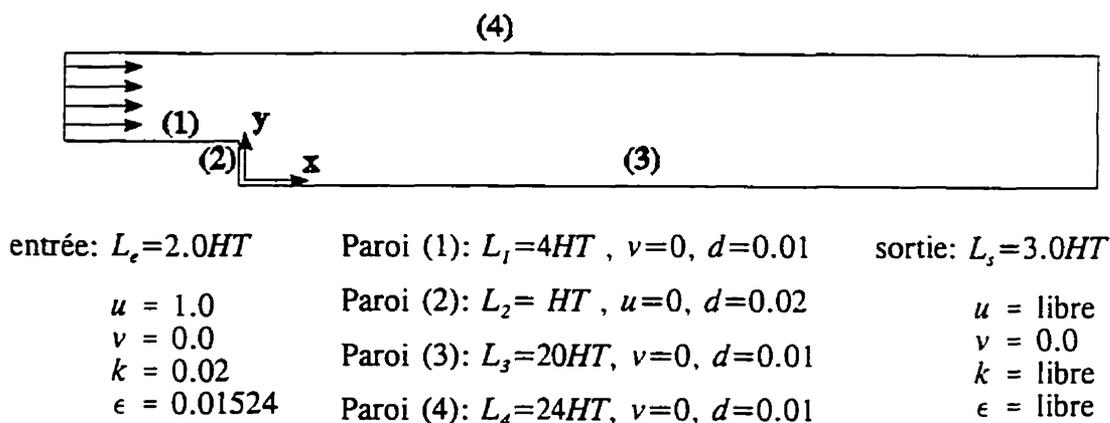


Figure 6.25 Marche descendante de Kim: Domaine de calcul et conditions aux limites

De nombreux résultats numériques obtenus à l'aide du modèle  $k-\epsilon$  ont été présentés à la Conférence de Stanford sur les écoulements turbulents [95-98]. Une revue des différents essais numériques et une analyse des modèles de turbulence utilisés est faite par Nallasamy [99].

La présence du coin de la marche engendre une forte couche cisailée dont le comportement ressemble beaucoup à la couche cisailée étudiée par Patel [100], les principales différences étant que l'écoulement est confiné et qu'une zone de recirculation importante existe en aval de la marche. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne en entrée et sur l'hauteur de la marche est  $Re = (U \cdot HT) / \nu = 47,625$ . La distance à la paroi est telle que la valeur de la coordonnées adimensionnelle  $y^+$  est comprise entre 30 et 60, donc dans le domaine de validité de la loi logarithmique. Les

parois sont toutes horizontales ou verticales et donc on impose soit la vitesse  $u$ , soit la vitesse  $v$  égale à zéro. Sur le coin de la marche on impose que la vitesse verticale  $v$  soit nulle et on calcule seulement la composante axiale de la vitesse. Le niveau de turbulence à l'entrée est fixé à 2% et la valeur de la condition de Dirichlet pour  $\epsilon$  est déterminée à l'aide de la relation (6.2). À noter que la solution du modèle  $k-\epsilon$  est à nouveau singulière, cette fois au voisinage du coin de la marche. Par conséquent on s'attend à ce que les méthodes stabilisées acceptent mal un raffinement très important autour du point singulier.

Les calculs ont été effectués par la méthode de Galerkin. Les équations de turbulence sont résolues en variables logarithmiques. L'erreur est estimée par projection locale et on cherche à diminuer à chaque cycle adaptatif l'erreur en vitesse,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$  par un facteur 2.

La figure 6.26 présente les maillages engendrés par la stratégie adaptative. Le maillage initial est extrêmement grossier, avec une distribution de taille uniforme. Il comporte 4 éléments en entrée et seulement 2 (!) sur la hauteur de la marche. L'utilisation des variables logarithmiques est entièrement responsable du fait que l'obtention d'une solution convergée est devenue possible même sur des maillages si grossiers. La figure 6.27 présente la solution obtenue sur le maillage initial: les deux composantes de vitesse, les variables logarithmiques,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\mu_T$ . Même si cette solution n'est pas de très bonne qualité, elle est très utile pour le processus adaptatif et indique les régions qui nécessitent un raffinement du maillage. La solution sur le maillage final est représentée sur la figure 6.28. On notera la qualité exceptionnelle de la solution. Les iso-lignes sont nettes et lisses, ce qui est d'autant plus remarquable étant donné que cette solution est obtenue par une méthode de Galerkin. On remarque aussi le fait que les maillages adaptés suivent de près le comportement de la solution. Les points sont concentrés surtout autour du coin de la marche là où la solution présente des très forts gradients, dans la couche cisailée développée en aval du coin, de même que dans la

couche limite le long des parois solides.

La figure 6.29 présente les erreurs estimées pour la solution obtenue sur le maillage initial et aussi le premier maillage adapté, résultant de l'adaptation tentant de réduire ces erreurs par un facteur 2. La figure 6.30 présente la même chose, mais cette fois pour la solution obtenue sur le maillage 1. On remarque que l'erreur en vitesse est entièrement concentrée au voisinage du coin de la marche. Un module adaptatif qui aurait tenu compte uniquement de l'erreur en vitesse aurait conduit à des maillages raffinés seulement autour du point singulier. Cependant, on remarque que l'estimation d'erreur pour les variables logarithmiques est plus sensible dans la couche cisailée développée après le coin. L'estimation d'erreur en  $\mu_T$  est sensible elle aussi à la couche cisailée et elle est aussi responsable du raffinement observé dans la couche limite.

Les figures 6.31 à 6.34 présentent une comparaison des prédictions de la vitesse axiale  $u$  obtenues sur les différents maillages adaptés avec les mesures expérimentales. Les profils de vitesse sont représentés à 8 stations de contrôle où les données expérimentales sont disponibles. Sur l'abscisse on représente la vitesse  $u$  normalisée par sa valeur maximale à la section courante et en ordonnée on trouve la coordonnée  $y$  adimensionalisée par la hauteur de la marche. On notera que nos courbes n'atteignent pas les parois inférieure ( $y/HT=0$ ) et supérieure ( $y/HT=2$ , respectivement 3 en aval du coin de la marche). Ceci est dû au fait que le maillage se termine à une distance  $d$  de la paroi solide, à cause de l'usage de la loi de paroi.

À la première station ( $x/HT=-4$ ) on constate que l'accord avec les valeurs expérimentales n'est pas très bon. Cela est en grande partie dû au fait que cette section est tout près de l'entrée, localisée à  $x/HT=-5$ , où toutes les conditions limite pour les variables prennent des valeurs constantes (profil plat de vitesse,  $k$  et  $\epsilon$ ). L'accord avec l'expérience s'améliore à  $x/HT=-1$  et est encore meilleur à  $x/HT=0$ , au fur à mesure que le profil de vitesse se développe dans le canal.

Les coupes aux sections  $x/HT=4/3$ ,  $8/3$ , et  $16/3$  se trouvent dans la zone de recirculation. En  $x/HT=4/3$  les prédictions sont très bonnes sauf dans la zone de recirculation où les calculs reproduisent mal la position du maximum de la vitesse à contre-courant. On note une excellente représentation du genou du profil de vitesse. L'effet de l'adaptativité est bien visible et on peut constater que la solution sur le dernier maillage ne dépend plus de la discrétisation.

La figure 6.34 représente les profils de vitesse obtenues aux 2 dernières stations. À  $x/HT=24/3$  l'accord avec l'expérience est bon. La section  $x/HT=48/3$  se trouve tout près de la sortie du domaine où nous sommes forcés d'imposer de conditions aux limites ( $v=0$ , Neumann homogènes en  $u$ ,  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$ ). Il n'est donc pas surprenant que les prédictions ne concordent pas très bien avec les mesures. La longueur de la zone de recirculation pour les différents maillages est résumé dans le tableau 6.1.

Tableau 6.1 Longueur de la zone de recirculation

Calcul/Expérience	Longueur	% d'erreur
Expérience	$7.0 \pm 1.0$	-
Mansour et Morel [95]	5.2	26
Pollard [96]	5.88	16
Rodi et al [97]	5.8	17
Spalding et al [98]	6.0	14
Maillage - 0	5.2	26
Maillage - 1	5.42	22.5
Maillage - 2	5.92	15.4
Maillage - 3	6.12	12.5
Maillage - 4	6.2	11.4
Maillage - 5	6.19	11.5

Les résultats présents doivent être considérés comme bons étant donnée l'extrême variation rapportée par différents auteurs utilisant le modèle  $k-\epsilon$  pour ce type d'écoulement [99]. On remarque encore une fois que les différences sont minimales entre les derniers maillages et que l'adaptativité améliore constamment les résultats.

Les figures 6.35 à 6.39 présentent une comparaison des prédictions de l'énergie cinétique de turbulence  $k$  avec les mesures expérimentales. Kim ne rapporte des mesures que pour  $\bar{u}'^2$  et  $\bar{v}'^2$ . La détermination de la valeur exacte de  $k$  est donc incertaine. Nous avons adopté  $k = \frac{1}{2}(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2)$  et normalisé les profils de  $k$  par la valeur maximale relevée en chaque section. On notera l'effet très marqué de l'adaptativité aux sections  $x/HT=1.0$  et  $2.3$  (figure 6.35) qui se trouvent dans la région initiale de la couche cisailée. On constate une amélioration de la prédiction de la position du maximum de  $k$  ainsi que de l'épaisseur de la couche cisailée. Ceci est particulièrement évident à la section  $x/HT=1.0$  où le pic de  $k$  est nettement plus mince sur le maillage final que sur le maillage initial. Dans cette région la couche cisailée est très mince. Le terme de production de  $k$  est donc très important mais décroît très rapidement dès que l'on s'éloigne de la couche cisailée. Ceci correspond parfaitement à l'amincissement des couches cisailées en  $u$  et  $v$  observées à la figure 6.28.

Plus en aval, aux sections  $x/HT=4.1$  et  $5.8$  de la figure 6.36, l'effet de l'adaptativité est plus faible. On note que la position du maximum de  $k$  est légèrement décalée par rapport aux mesures expérimentales, le front prédit entre  $y/HT=1$  et  $y/HT=2$  est moins étalé que celui mesuré. Ces sections se trouvent au voisinage du point de recollement qui est reconnu comme étant très difficile à prédire. La situation est la même en  $x/HT=6.7$  (figure 6.37). En aval du point de recollement, aux sections  $x/HT=7.6$ ,  $8.5$  et  $10.3$ , la position du maximum de  $k$  est bonne. Ici encore le front prédit numériquement est moins étalé que celui mesuré. Cette prédiction numérique d'un niveau réduit de diffusion de  $k$  a déjà été observée dans le cas de la couche cisailée de Patel tant avec notre méthode d'éléments finis adaptative [86], qu'avec une méthode

de différences finis sur un maillage très fin [93]. Cette observation sur la diffusion réduite de  $k$  tient aussi pour plusieurs variantes du modèle  $k-\epsilon$  [93].

La qualité des prédictions de  $k$  en  $x/HT=13.0$  et  $15.6$  doit être considérée comme moyenne. Nos résultats concordent raisonnablement bien avec ceux de Thangham et Hur [101] et Speziale et Tuan [102].

Les figures 6.40 à 6.44 présentent une comparaison des prédictions de la composante  $\bar{u}\bar{v}$  du tenseur de Reynolds avec les mesures expérimentales. La composante dominante du cisaillement turbulent,  $\bar{u}\bar{v} = \mu_T \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$ , est obtenue par différentiation du champ de vitesse. Elle est donc plus sensible au maillage que la vitesse  $u$ . L'effet de l'adaptativité du maillage est particulièrement évident aux figures 6.40-6.43. Il est d'autant plus marqué qu'on est proche du coin; c'est à dire dans la région initiale de la couche cisailée très mince émanant du coin. Les sections  $x/HT=1$  et  $2.3$  à la figure 6.40 montrent le très fort amincissement de la couche cisailée due à l'adaptativité.

D'une façon générale on prédit une valeur du pic de  $\rho\bar{u}\bar{v}$  plus grande que celle mesurée pour les sections en amont du point de recollement (sections  $x/HT=1, 2.3, 4.1$  et  $6.7$  aux figures 6.40, 6.41 et 6.42). La valeur des pics aux sections en aval du point de recollement est inférieure à la valeur mesurée. L'étonnant accord entre prédictions et mesures en  $x/HT=7.6$  est probablement une coïncidence étant donné le comportement observé en amont et en aval. On peut néanmoins dire que les prédictions de  $\bar{u}\bar{v}$  sont qualitativement correctes et en accord avec la revue bibliographique de diverses prédictions rapportée par Nallasamy [99].

Afin d'évaluer l'influence des conditions limite en entrée pour les variables de turbulence nous avons complété une deuxième série de calculs, noté Prob2 (le calcul précédent portera le nom Prob1). Dans ce cas le niveau de turbulence en entrée est fixé

à 0.2% et le nombre de Reynolds basé sur la viscosité turbulente en entrée est de 5000. La résolution est faite cette fois par une méthode GLS appliquée aux équations de Navier-Stokes et une formulation SUPG-incomplet pour les équations des variables de turbulence. Les calculs sont réalisés sur les maillages engendrés précédemment dans le calcul Prob1. Les valeurs obtenues cette fois pour la longueur de la zone de recirculation sont présentées dans le tableau 6.2. Notons une dépendance du maillage moins marquée que dans le cas précédent. La valeur finale de 6.46 est encore plus proche de 7 qui est la valeur obtenue dans l'expérience de Kim. Cela ne signifie nécessairement que la solution Prob2 est meilleure que la solution Prob1, mais plutôt met en évidence l'effet des conditions imposées en entrée aux variables turbulentes sur la solution.

Tableau 6.2 Longueur de la zone de recirculation - calcul Prob2

Calcul/Expérience	Longueur	% d'erreur
Expérience	$7.0 \pm 1.0$	-
Maillage - 2	6.43	8.1
Maillage - 3	6.43	8.1
Maillage - 4	6.47	7.6
Maillage - 5	6.46	7.7

La solution finale est présentée dans la figure 6.45. On remarque que les gradients sont plus forts dans la couche limite proche des parois et aussi dans la couche cisailée comme résultat de la diminution de la viscosité turbulente dans le canal qui précède la marche. Pourtant la solution se compare bien à la solution du problème Prob1 et la nature de l'écoulement dans la zone de recirculation ne semble pas être affectée par le changement dans les conditions en entrée.

Les figures 6.46 à 6.48 comparent les profils de vitesse obtenus dans les deux cas. On remarque que la principale différence consiste dans la courbure différente au niveau du genou, à la limite de la couche cisillée. Le fait que la solution Probl approche mieux les valeurs expérimentales à cet endroit laisse penser que ces conditions en entrée sont plus proche de conditions rencontrées dans l'expérience.

Les figures 6.49 et 6.50 présentent une comparaison entre les profils de l'énergie cinétique de turbulence obtenus dans les deux cas. Les différences sont minimales sauf dans la région non-perturbée de l'écoulement, ( $x/HT$  entre 1.5 et 2.5), où les valeurs sont déterminées en grande partie par le niveau de turbulence imposé en entrée. Les figures 6.51 et 6.52 comparent cette fois les distributions du cisaillement turbulent. Encore une fois les différences sont minimales. Le cisaillement turbulent est toujours surestimé dans la zone de recirculation.

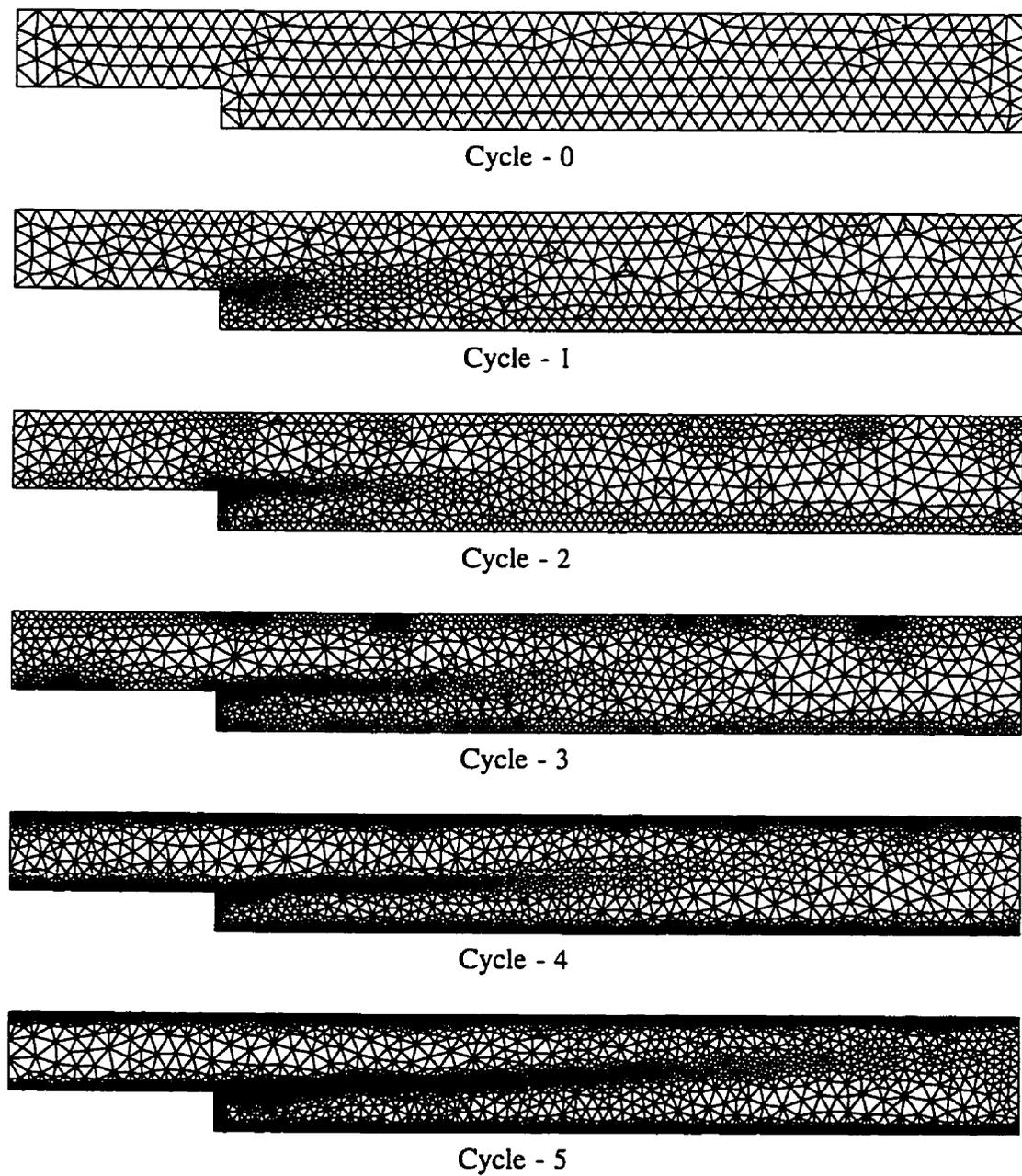


Figure 6.26 Marche descendante de Kim - Maillages adaptés

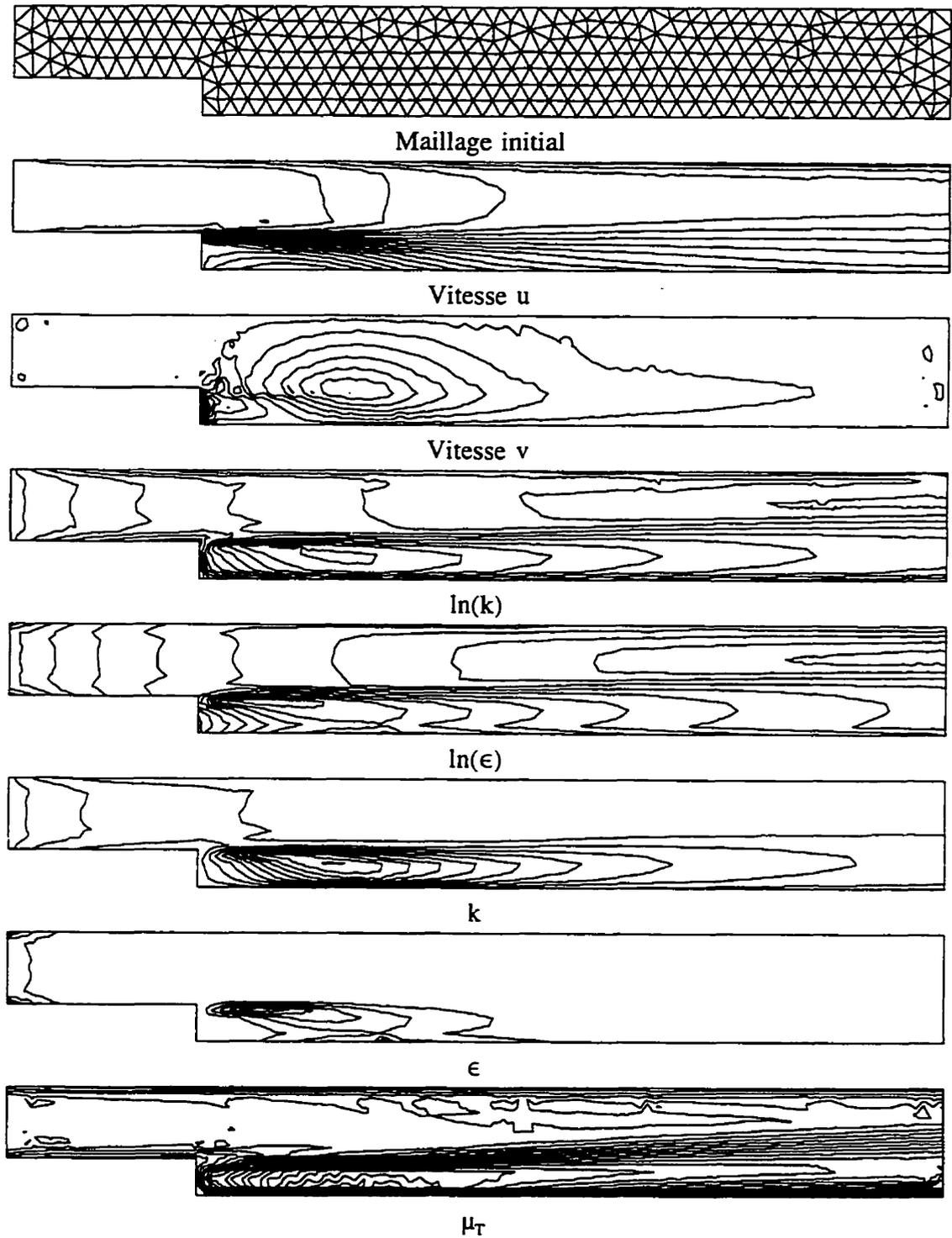


Figure 6.27 Marche descendante de Kim - Solution sur le maillage initial

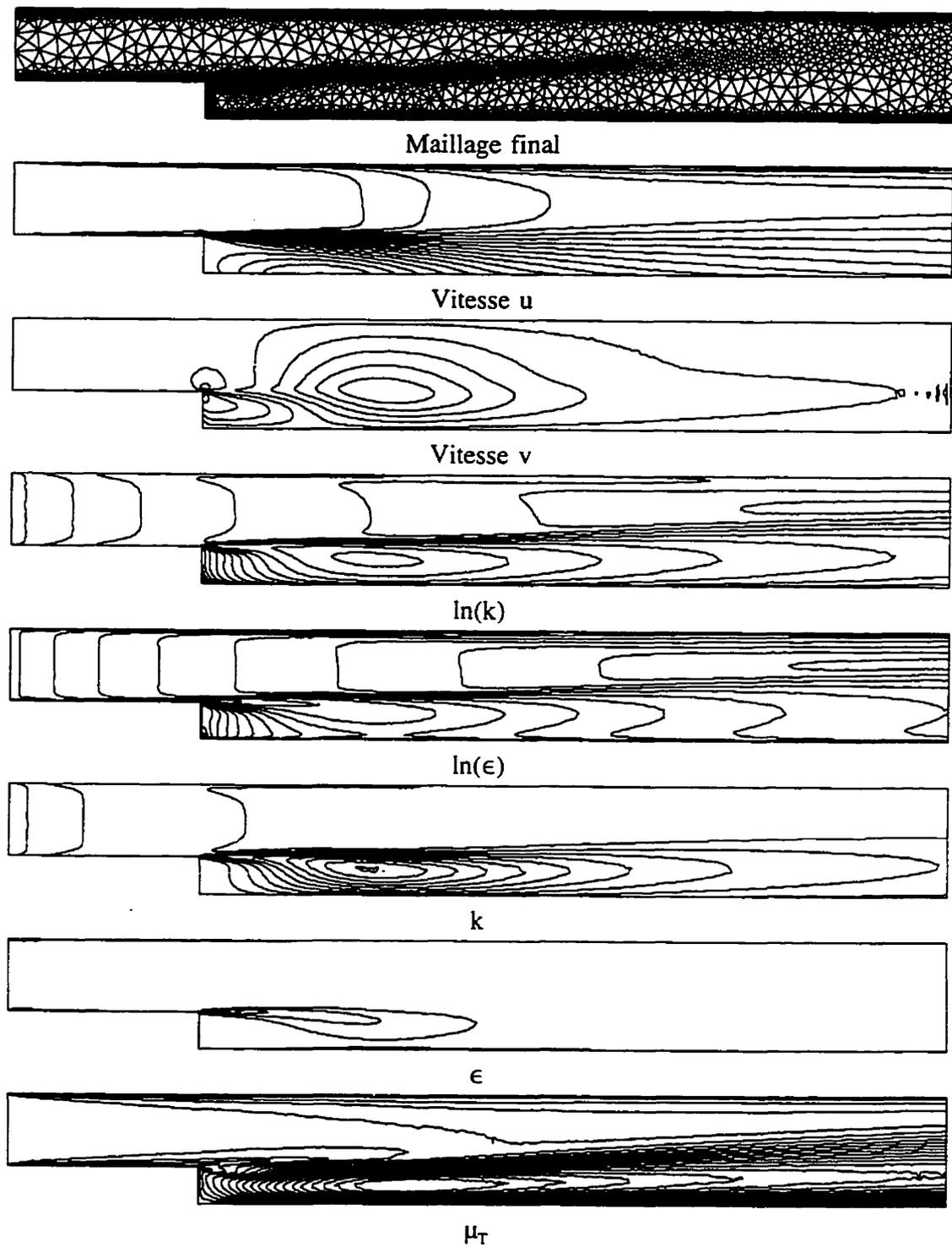


Figure 6.28 Marche descendante de Kim - Solution sur le maillage final

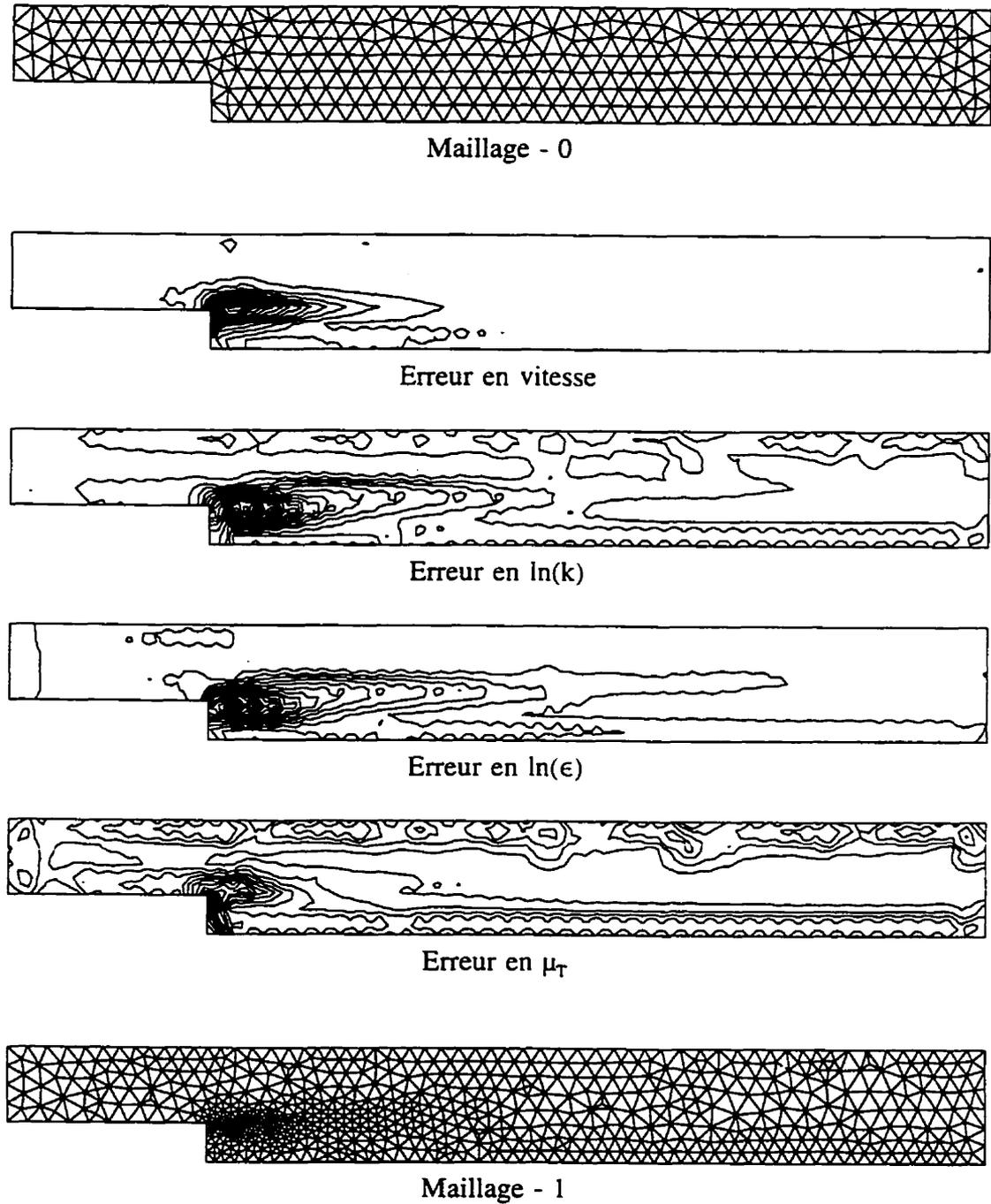


Figure 6.29 Estimation de l'erreur sur le maillage initial

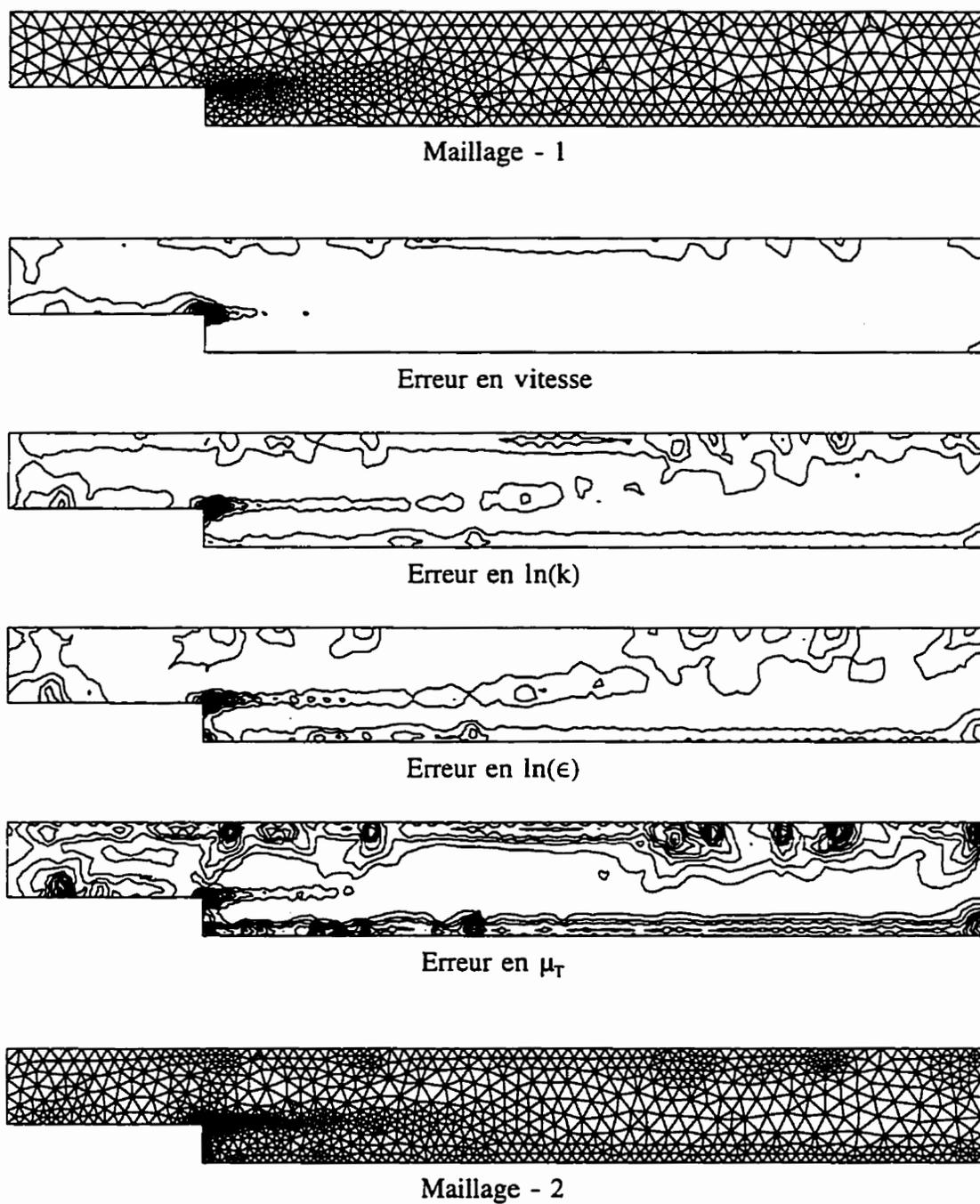


Figure 6.30 Estimation de l'erreur sur le premier maillage adapté

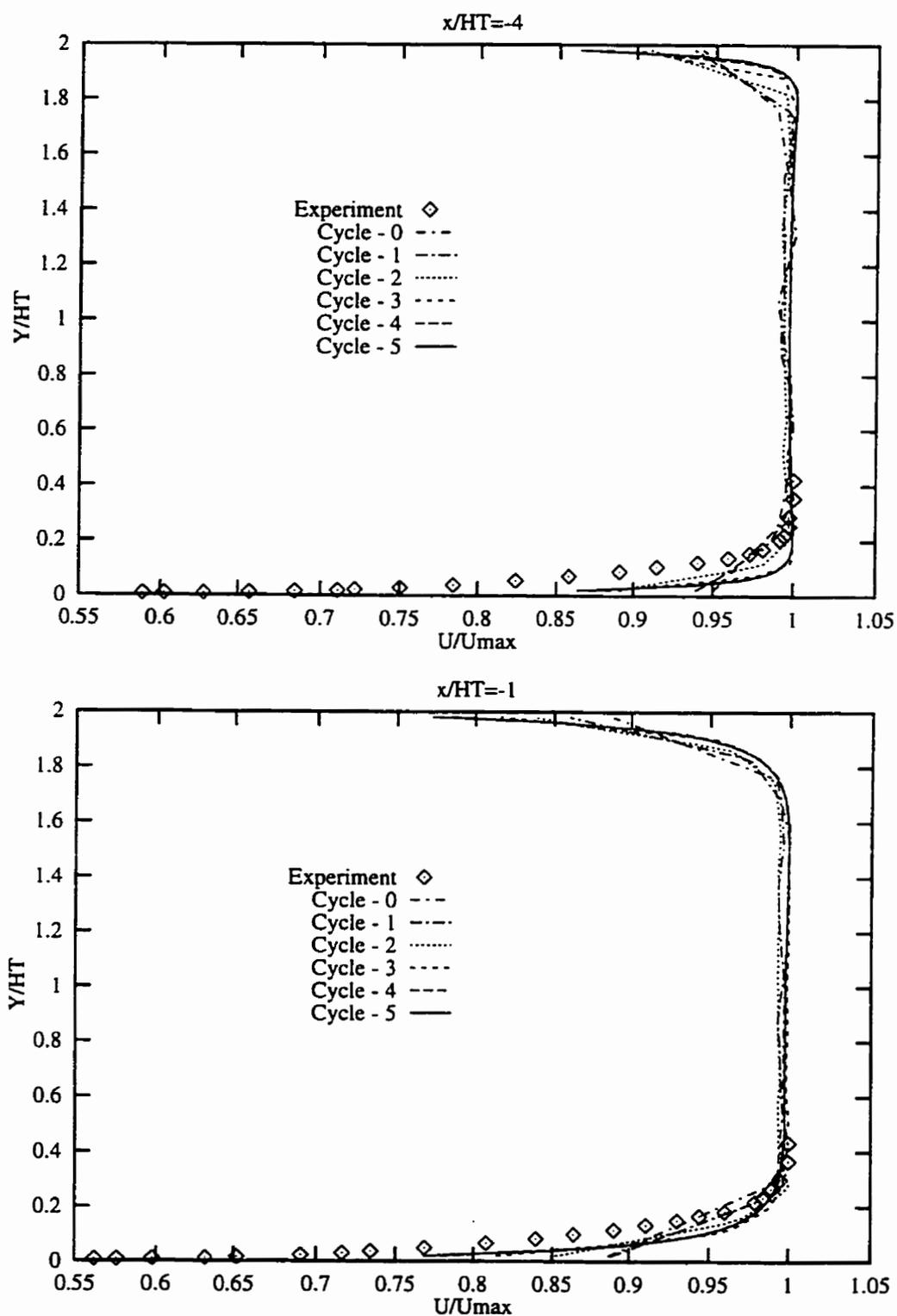


Figure 6.31 Profils de vitesse longitudinale à  $x/HT = -4$  et à  $x/HT = -1$

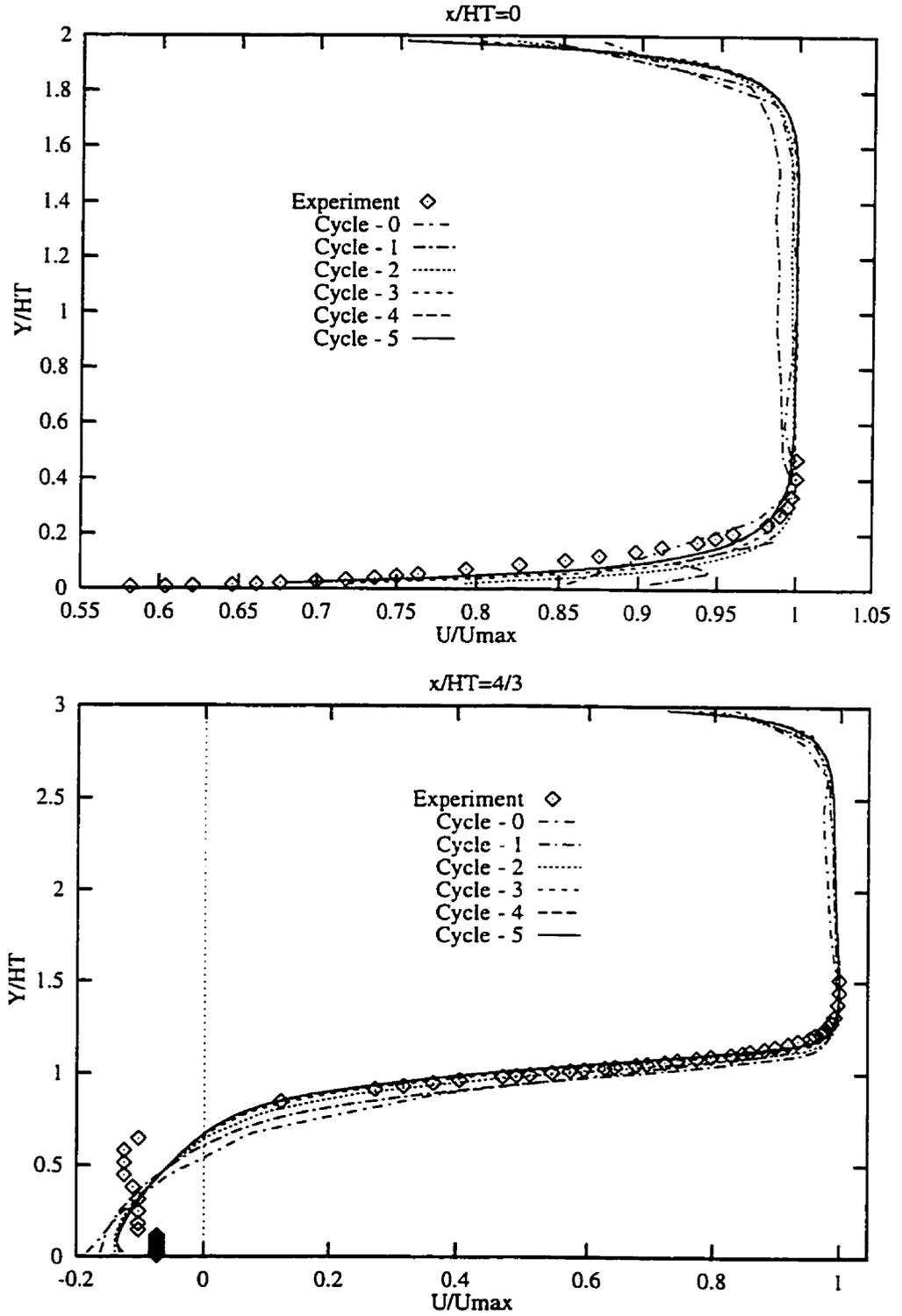


Figure 6.32 Profils de vitesse longitudinale à  $x/HT=0$  et à  $x/HT=4/3$

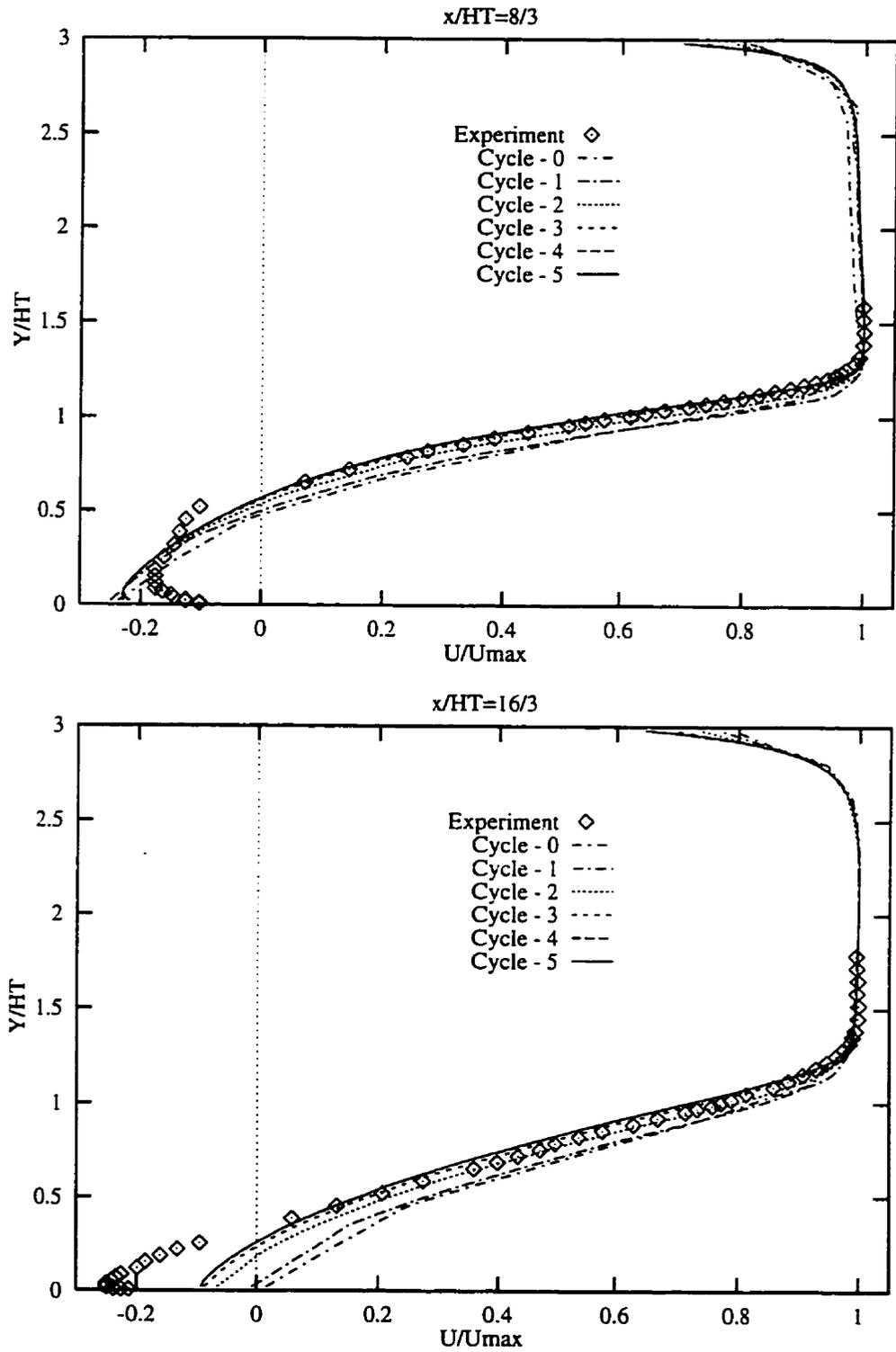
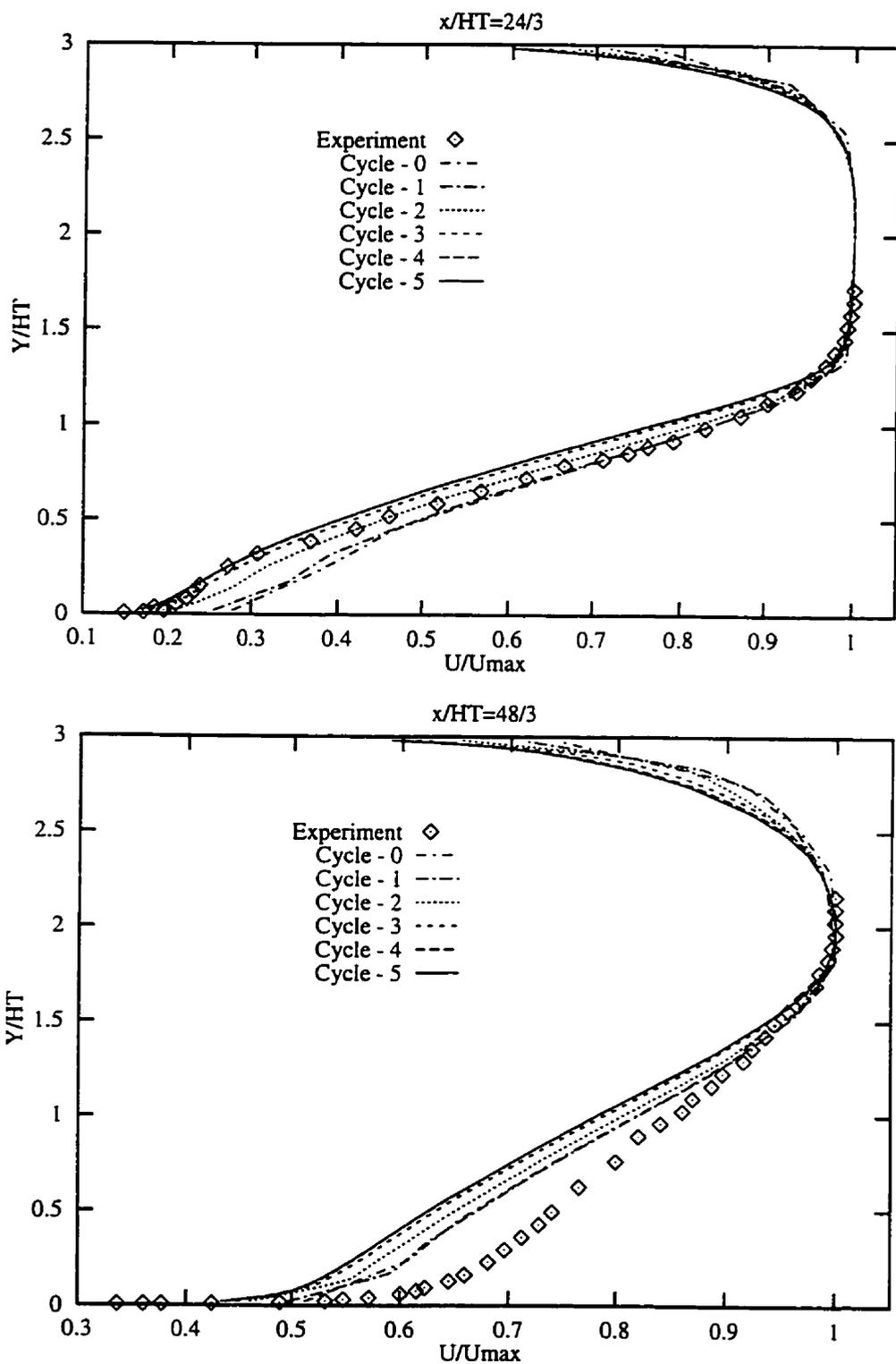
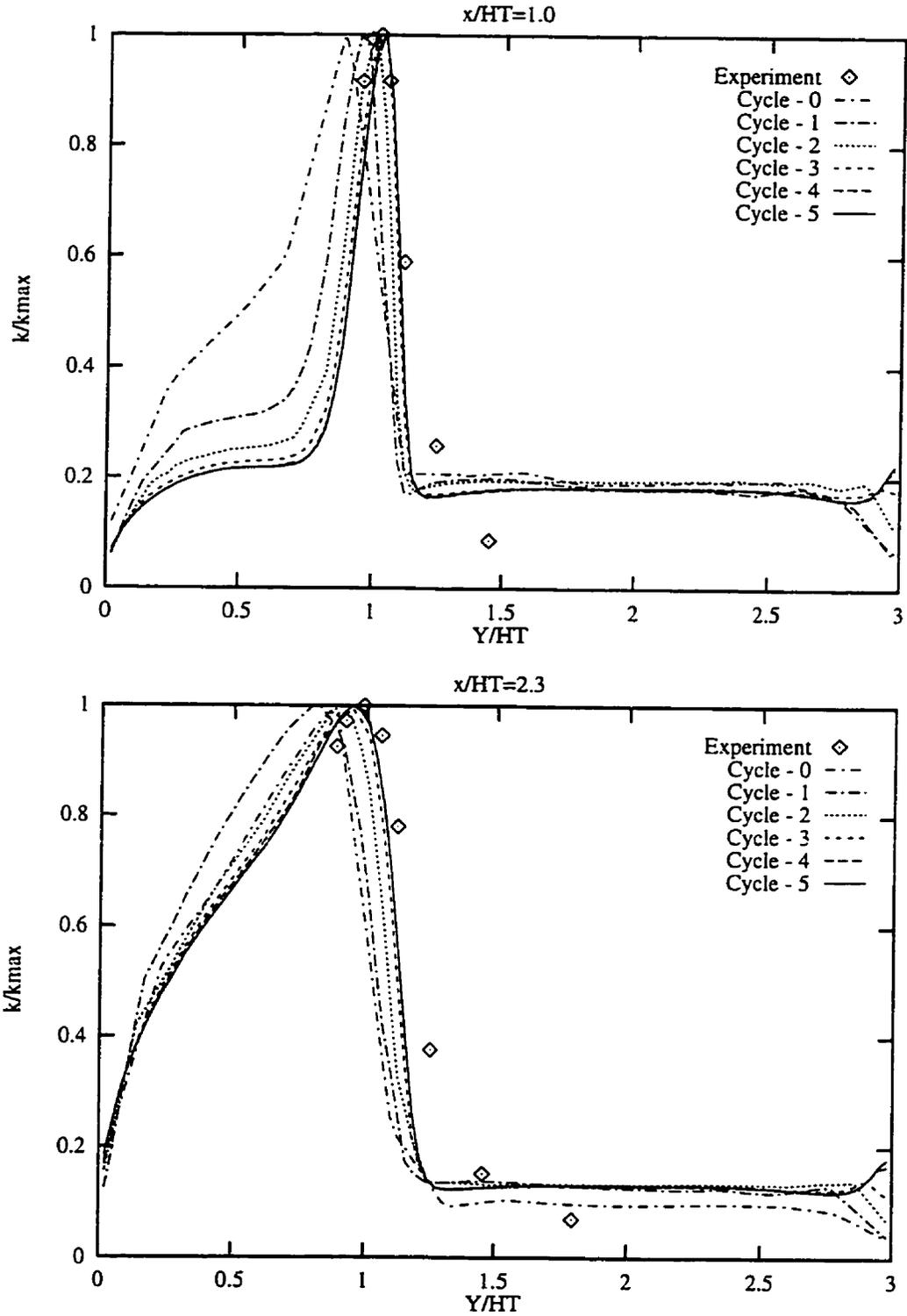
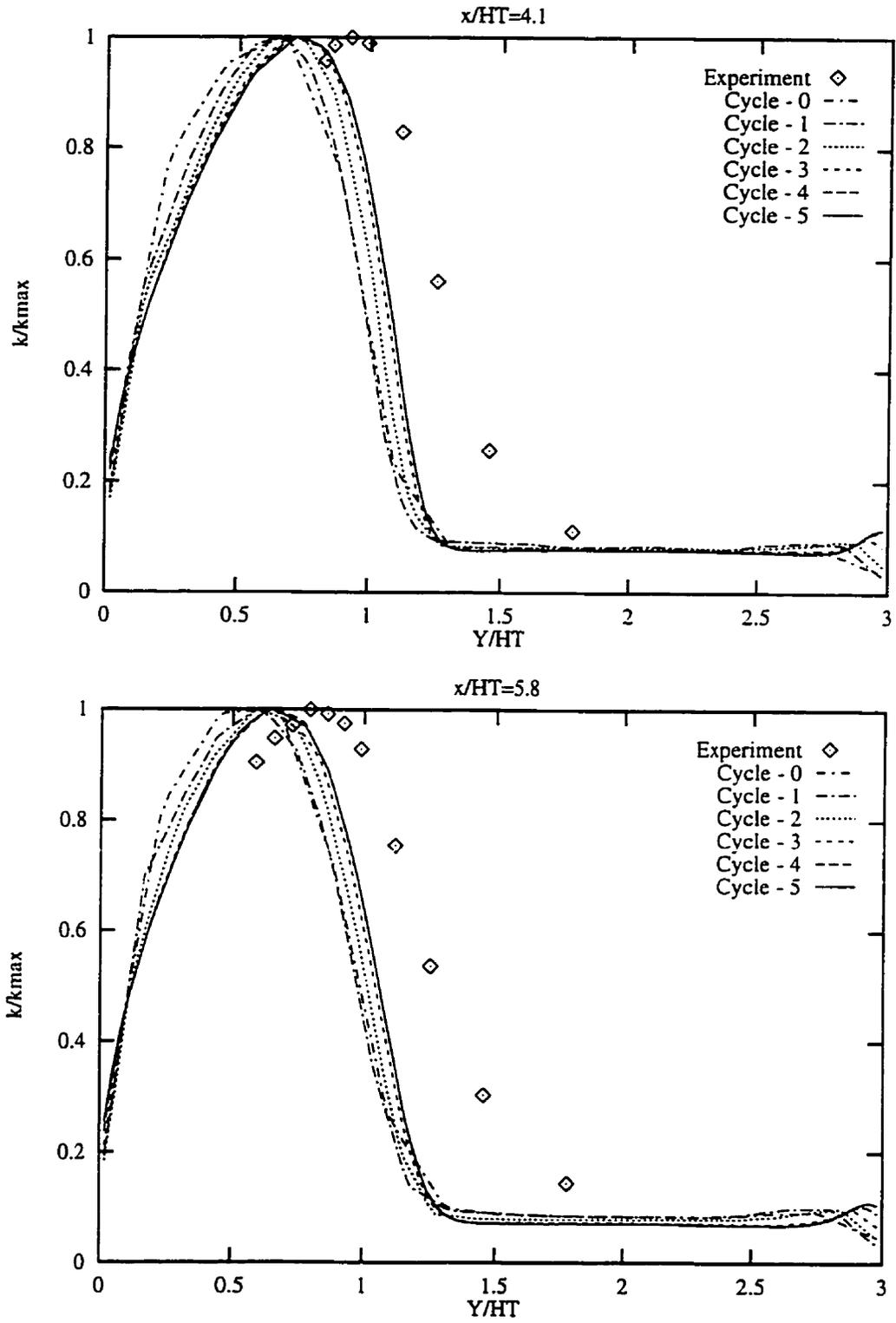


Figure 6.33 Profils de vitesse longitudinale à  $x/HT=8/3$  et à  $x/HT=16/3$

Figure 6.34 Profils de vitesse longitudinale à  $x/HT=24/3$  et à  $x/HT=48/3$

Figure 6.35 Profils de  $k$  à  $x/HT=1.0$  et à  $x/HT=2.3$

Figure 6.36 Profils de  $k$  à  $x/HT=4.1$  et à  $x/HT=5.8$

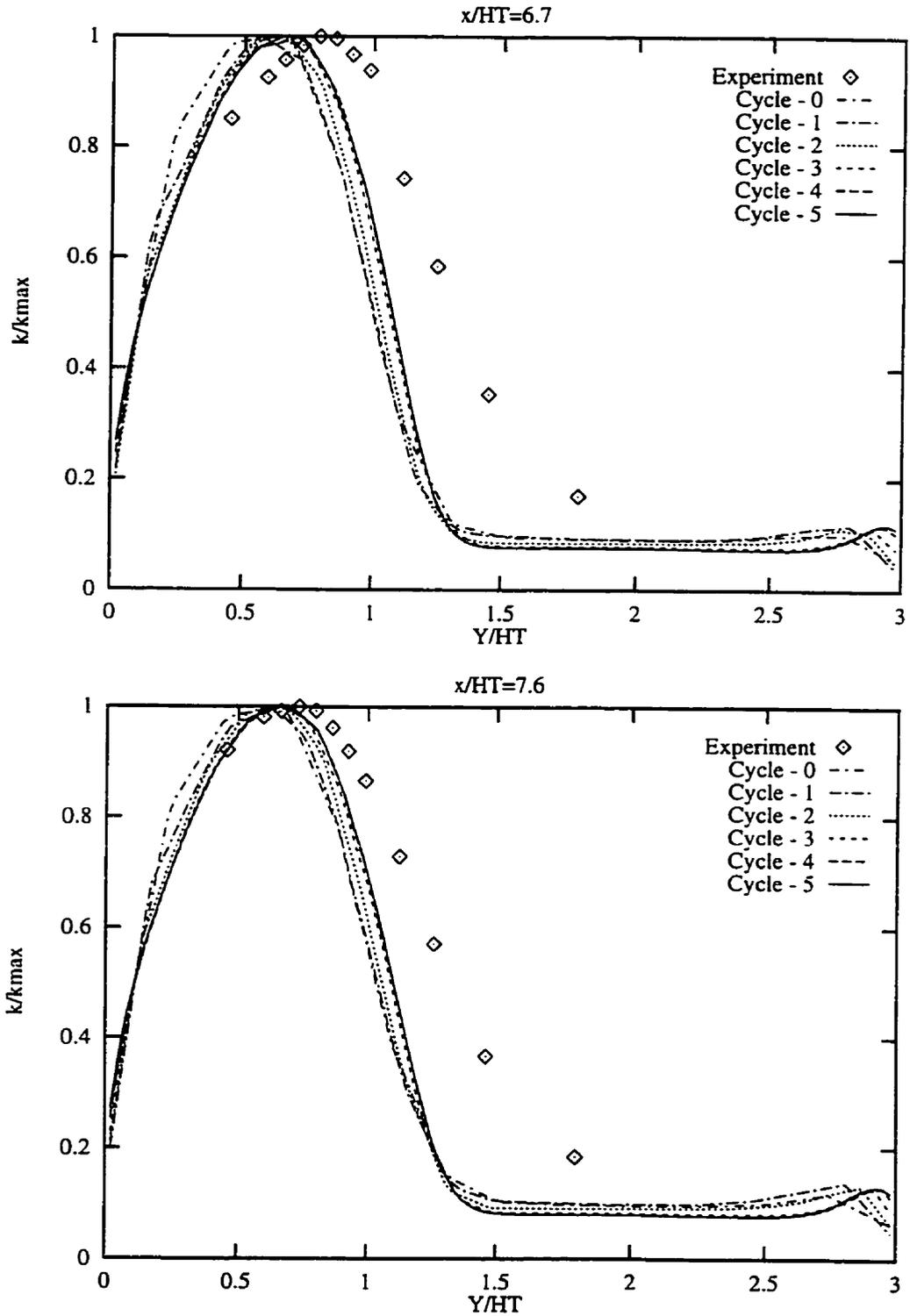
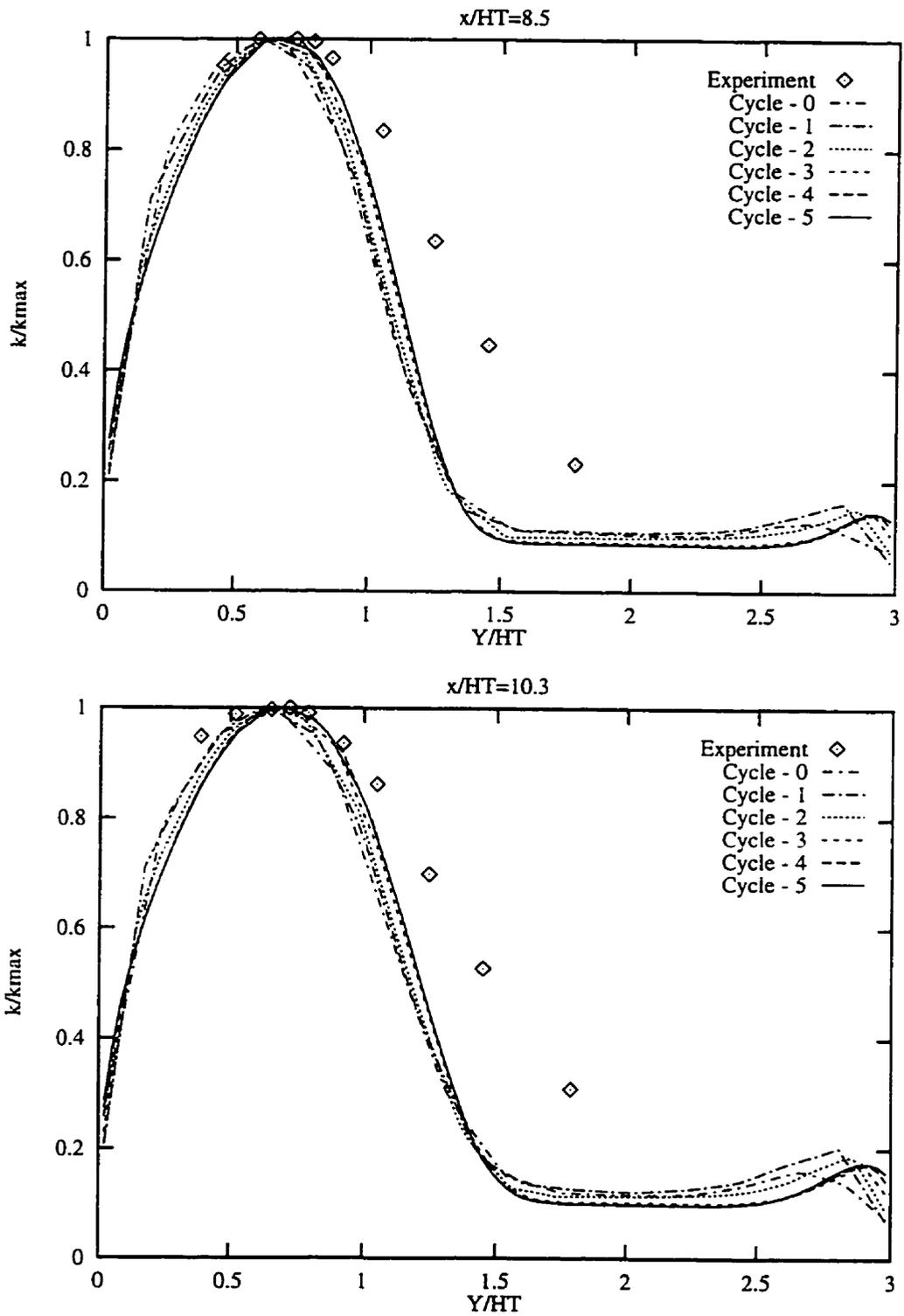
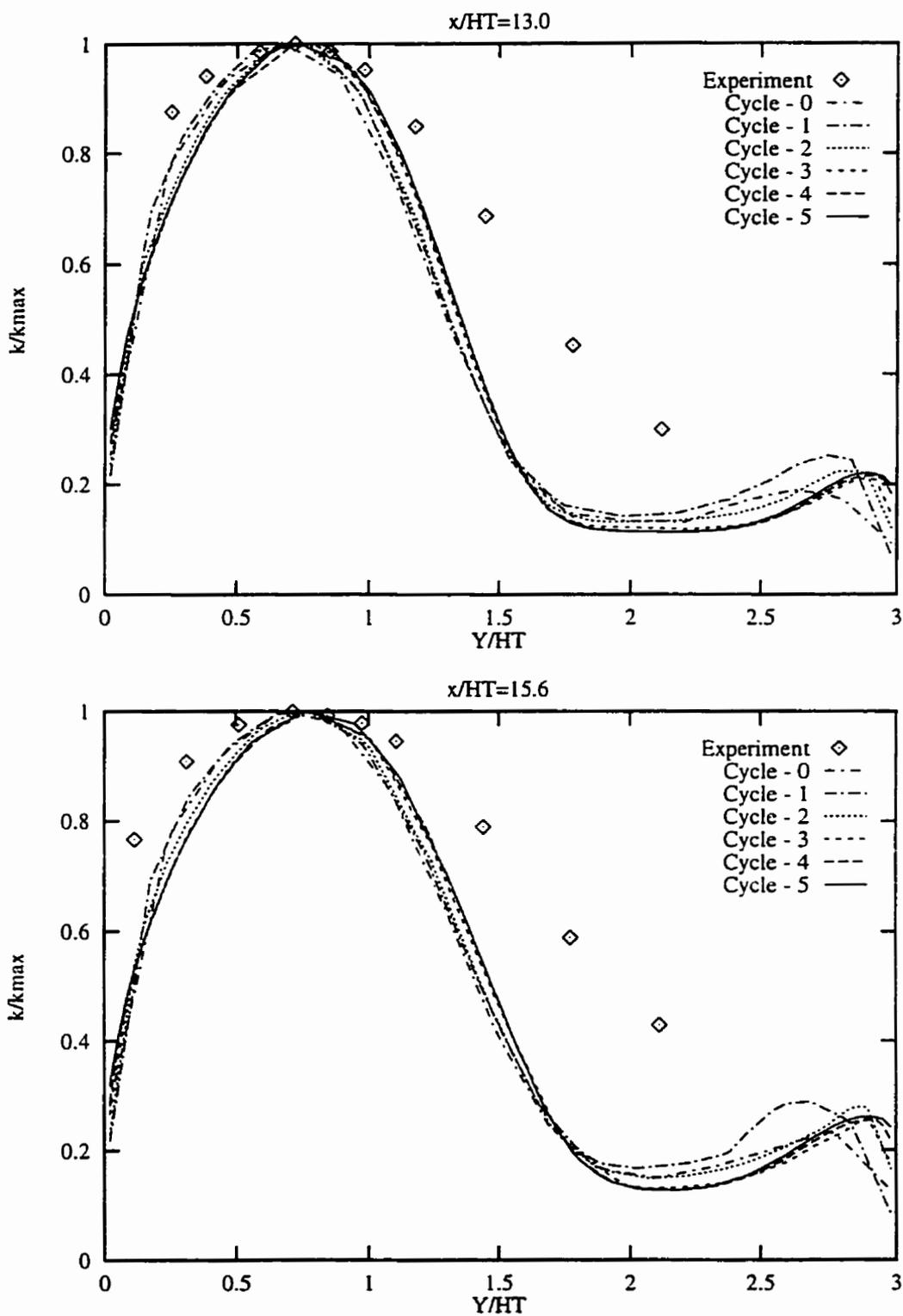


Figure 6.37 Profils de  $k$  à  $x/HT=6.7$  et à  $x/HT=7.6$

Figure 6.38 Profils de  $k$  à  $x/HT=8.5$  et à  $x/HT=10.3$

Figure 6.39 Profils de  $k$  à  $x/HT=13.0$  et à  $x/HT=15.6$

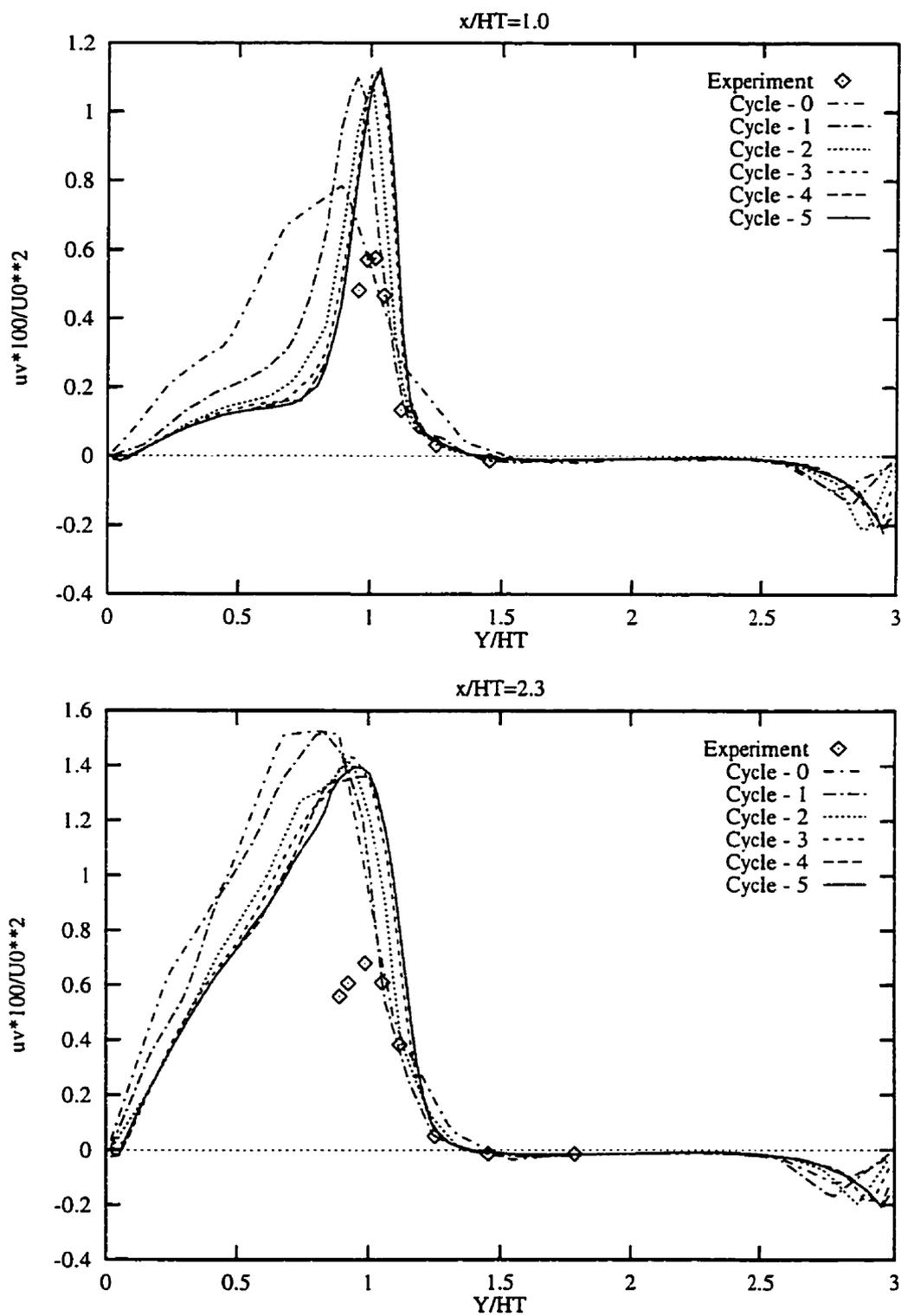


Figure 6.40 Profils du cisaillement turbulent à  $x/HT=1.0$  et à  $x/HT=2.3$

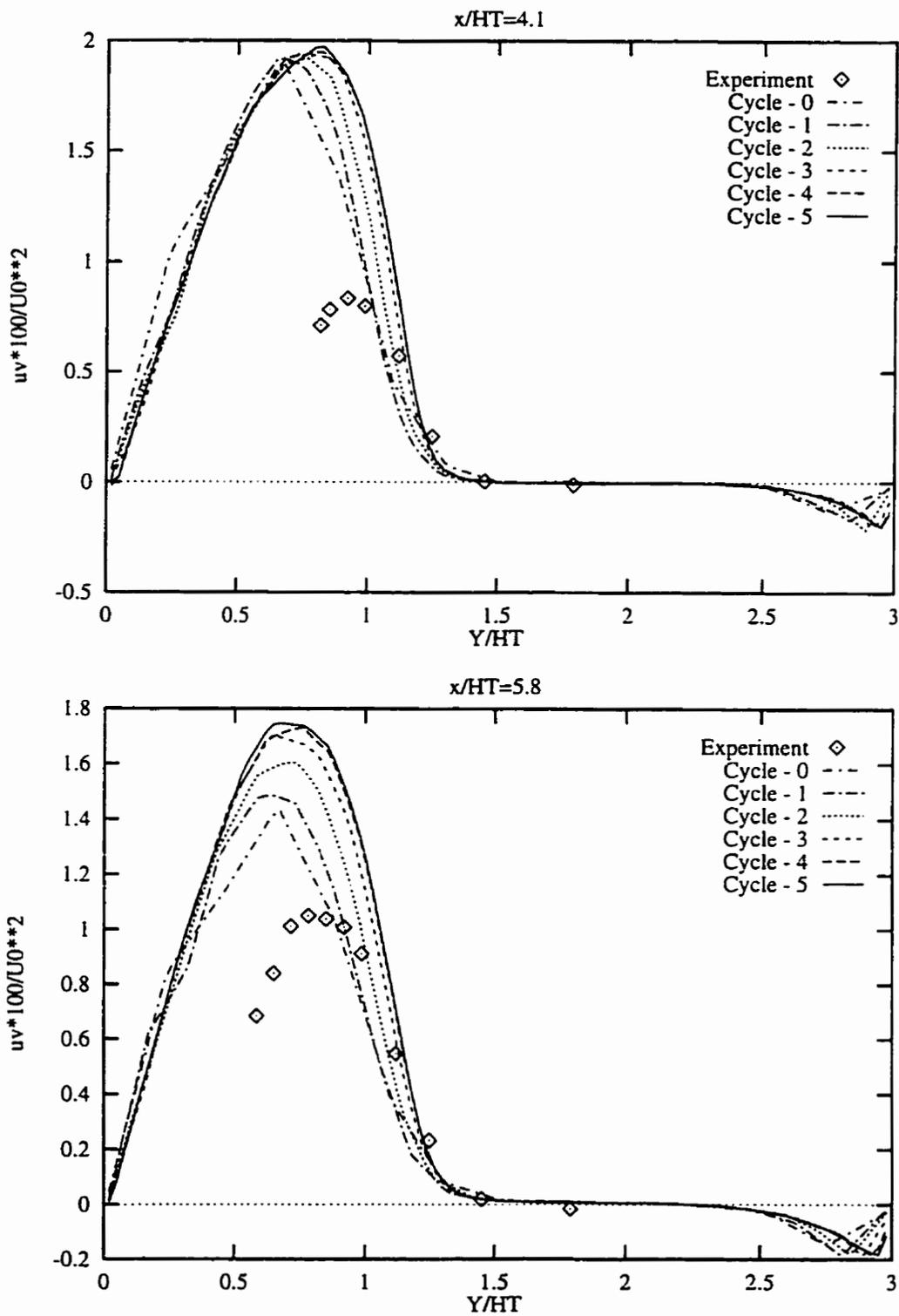


Figure 6.41 Profils du cisailment turbulent à  $x/HT=4.1$  et à  $x/HT=5.8$

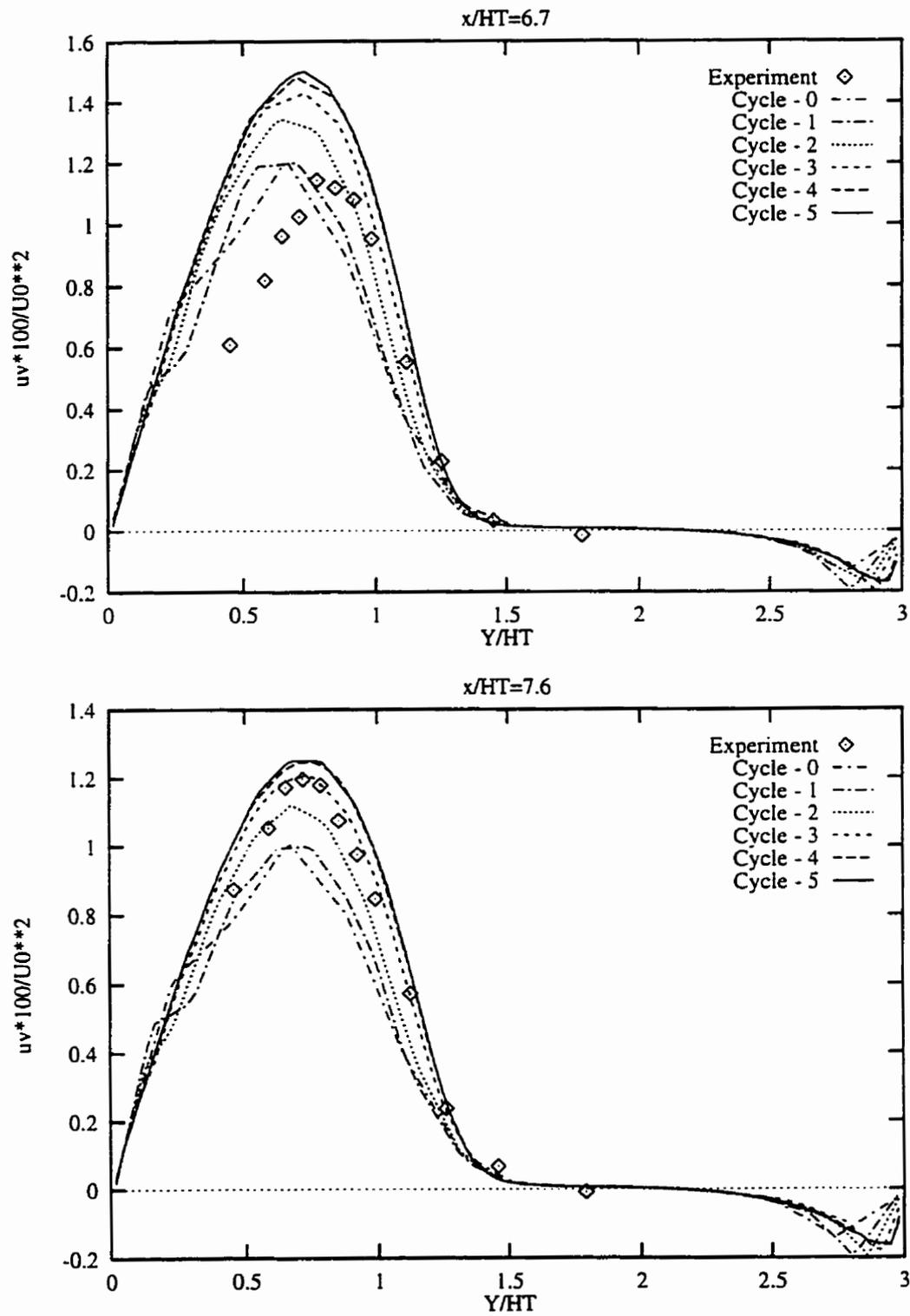


Figure 6.42 Profils du cisaillement turbulent à  $x/HT=6.7$  et à  $x/HT=7.6$

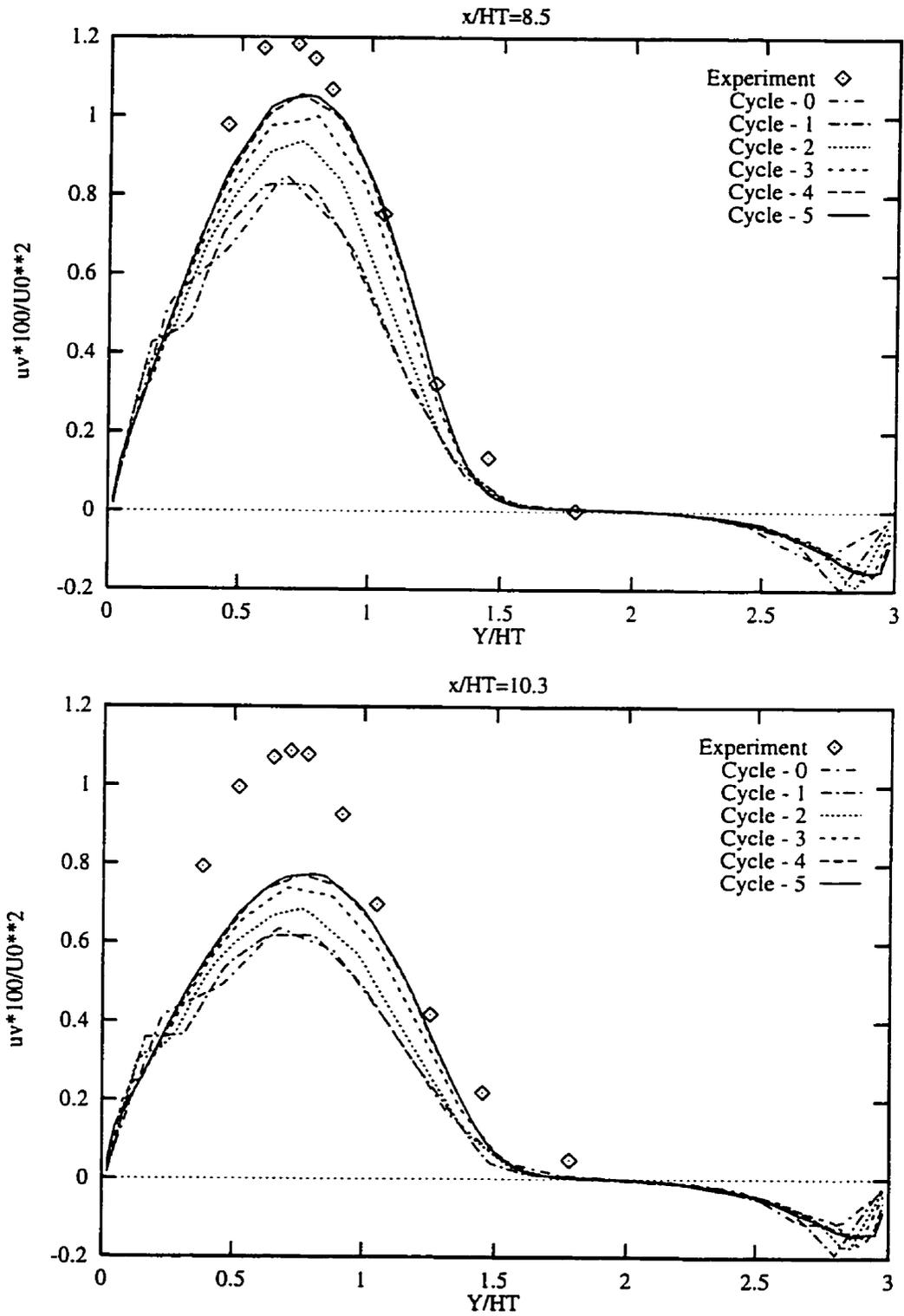


Figure 6.43 Profils du cisaillement turbulent à  $x/HT=8.5$  et à  $x/HT=10.3$

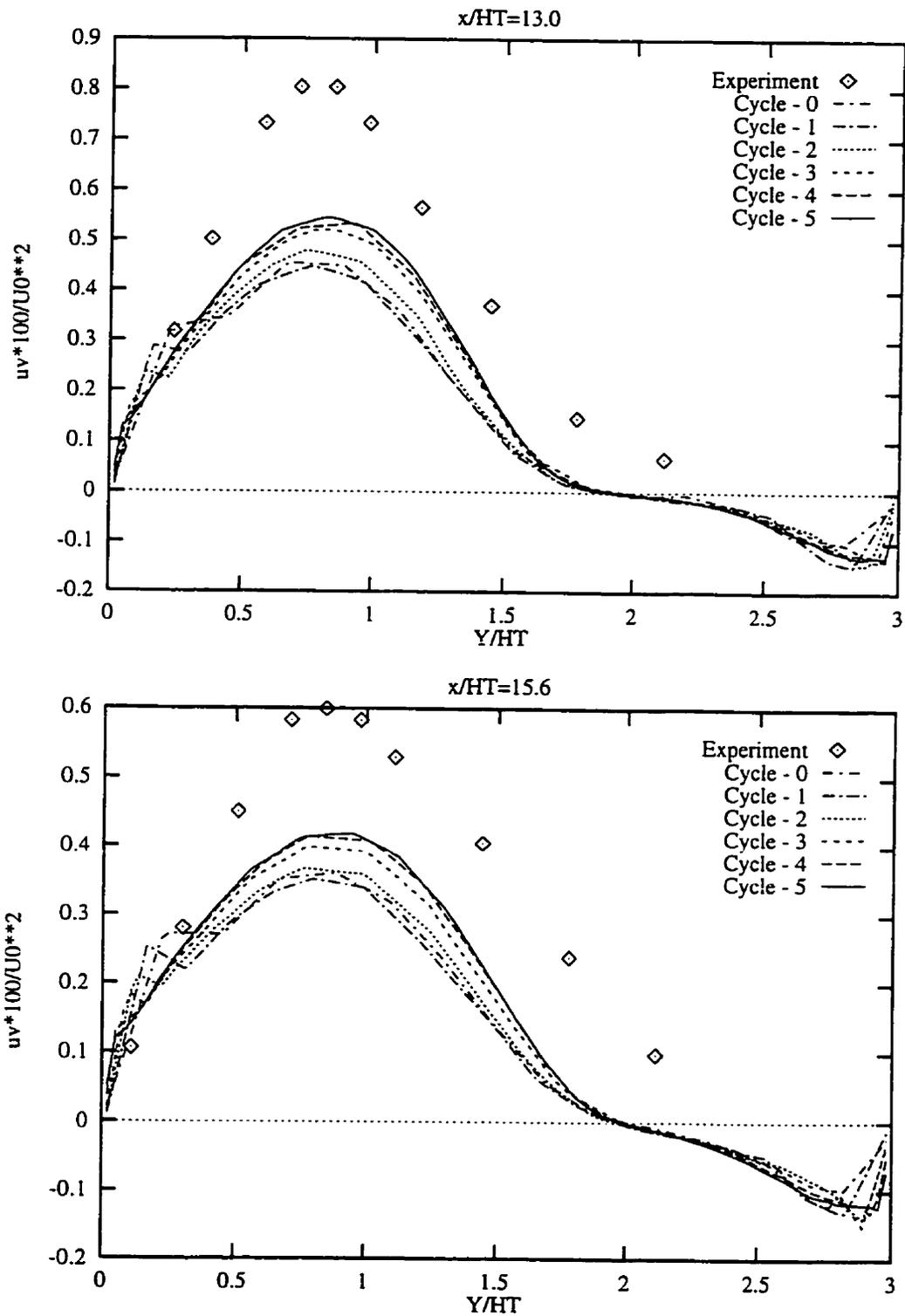


Figure 6.44 Profils du cisaillement turbulent à  $x/HT=13.0$  et à  $x/HT=15.6$

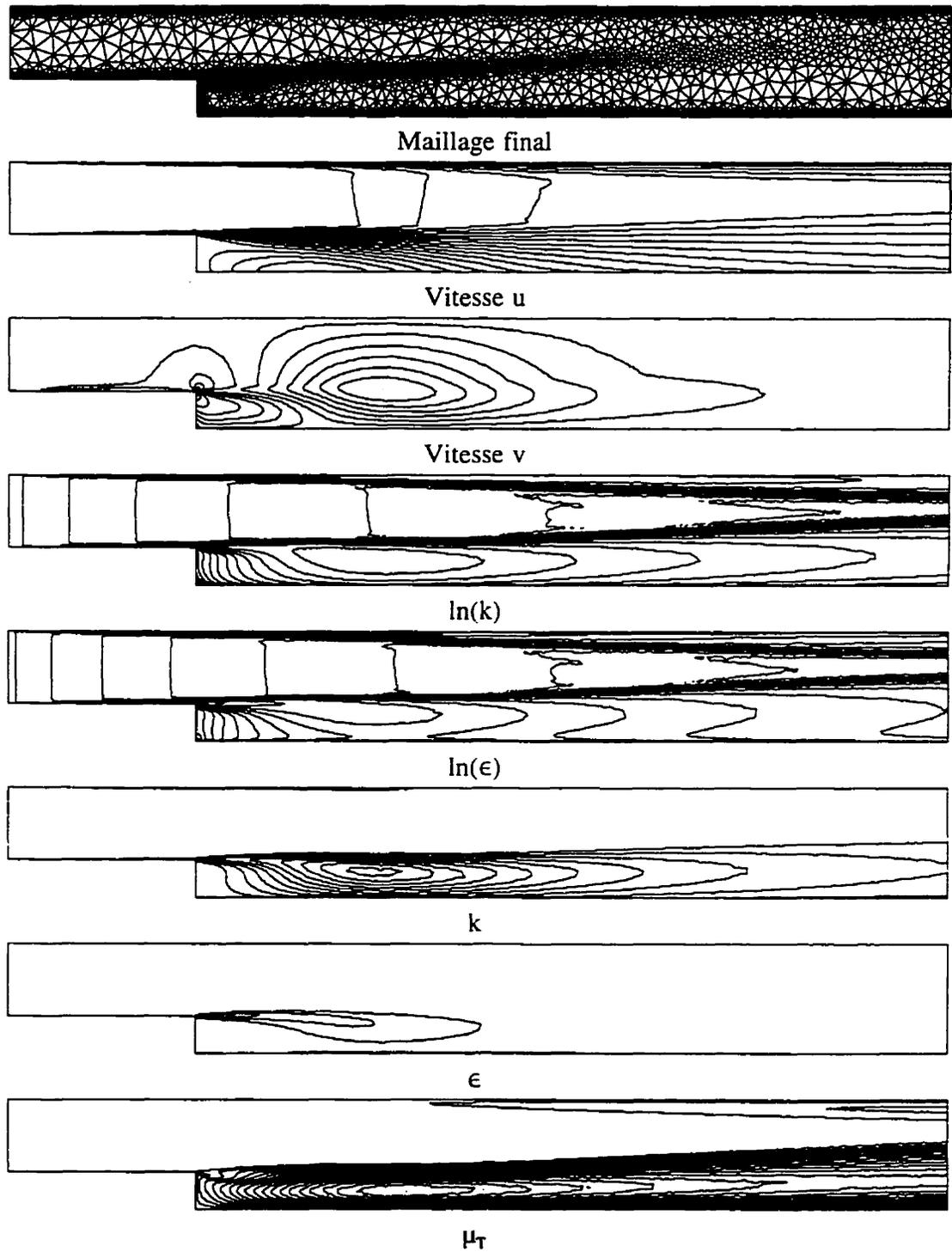


Figure 6.45 Marche descendante de Kim - Solution Prob2

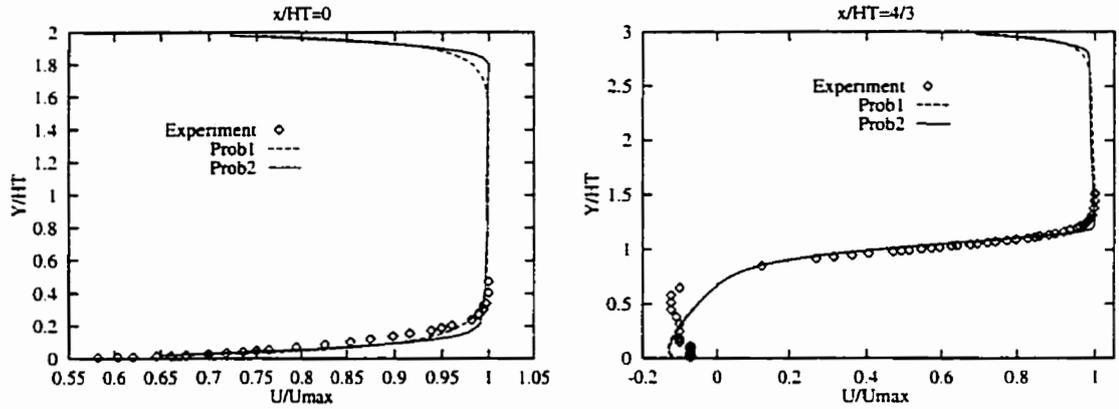


Figure 6.46 Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à  $x/HT=0$  et à  $x/HT=4/3$

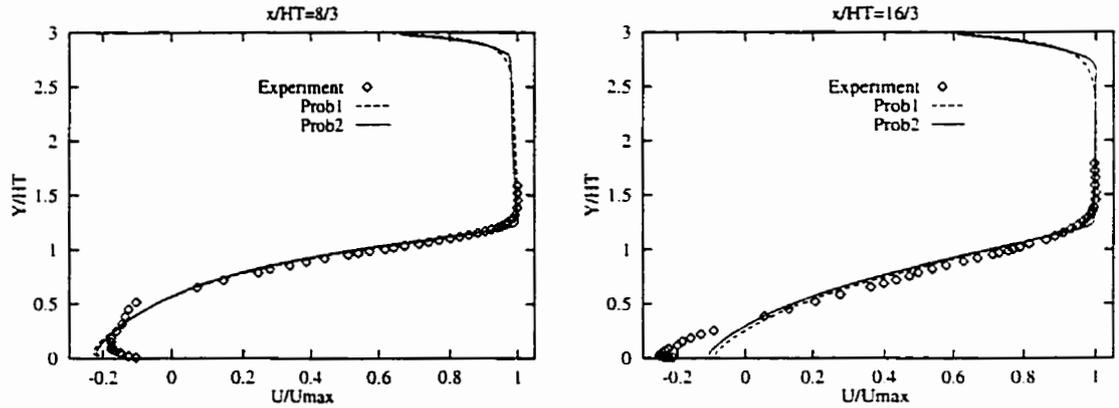


Figure 6.47 Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à  $x/HT=8/3$  et à  $x/HT=16/3$

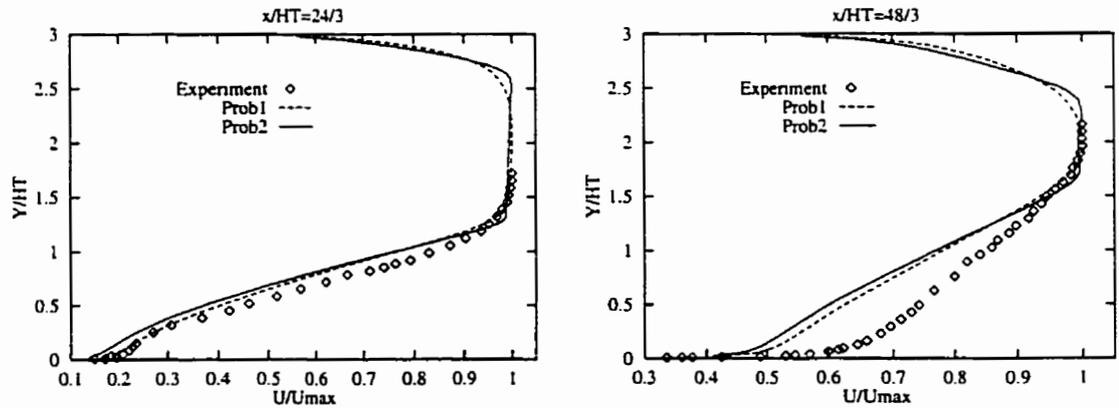


Figure 6.48 Solutions Prob1 et Prob2: Profils de vitesse à  $x/HT=24/3$  et à  $x/HT=48/3$

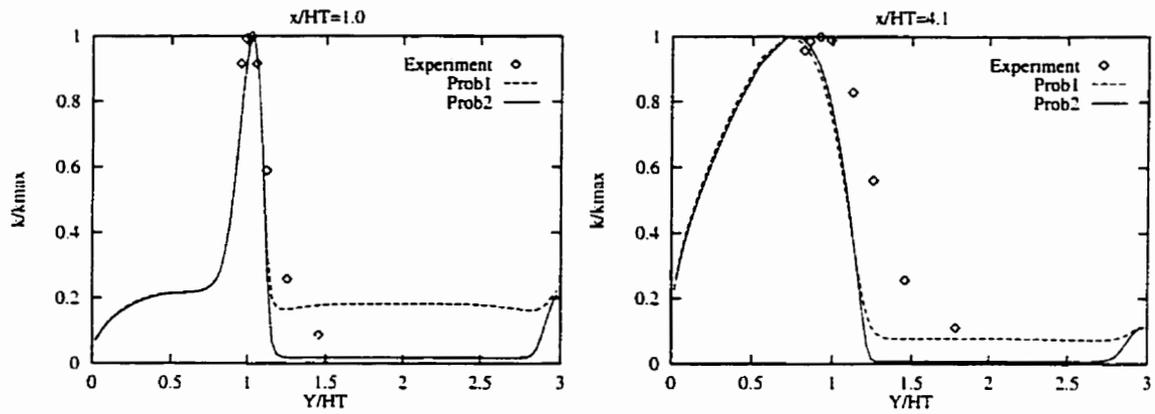


Figure 6.49 Solutions Prob1 et Prob2: Profils de  $k$  à  $x/HT=1.0$  et à  $x/HT=4.1$

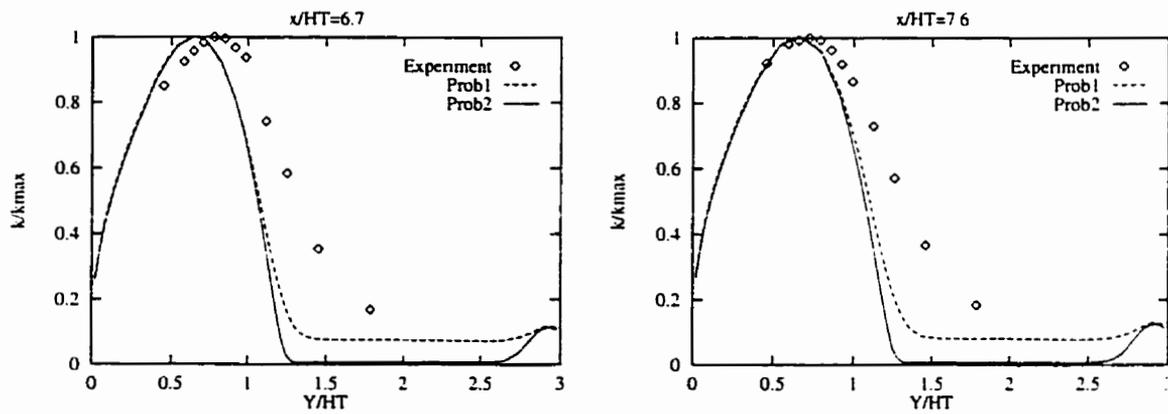


Figure 6.50 Solutions Prob1 et Prob2: Profils de  $k$  à  $x/HT=6.7$  et à  $x/HT=7.6$

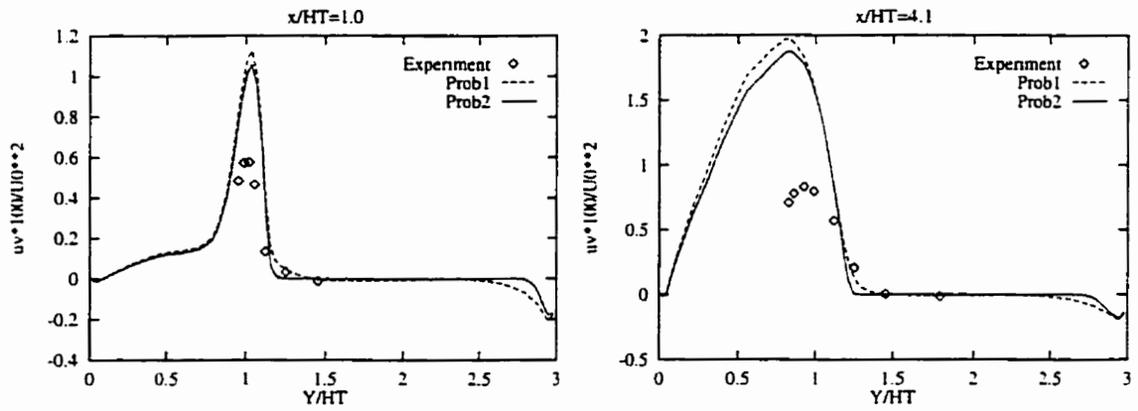


Figure 6.51 Solutions Prob1 et Prob2: cisaillement turbulent à  $x/HT=1.0$  et à  $x/HT=4.1$

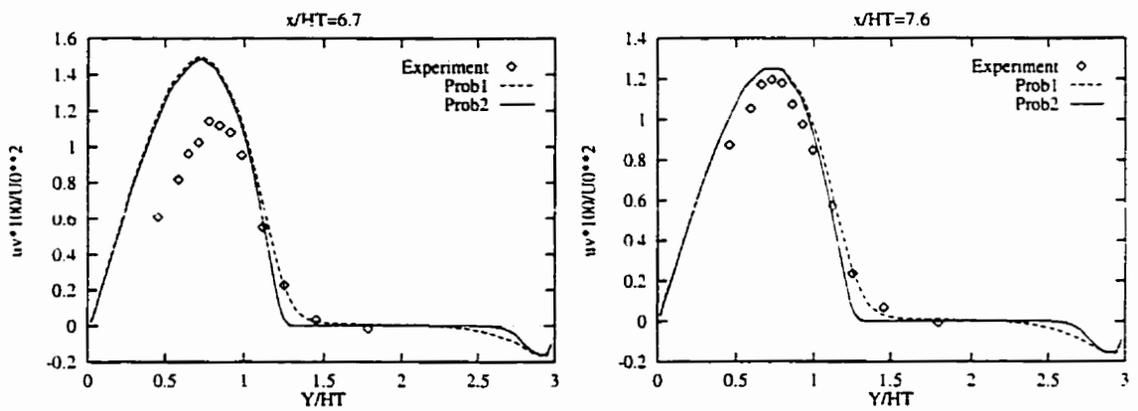


Figure 6.52 Solutions Prob1 et Prob2: cisaillement turbulent à  $x/HT=6.7$  et à  $x/HT=7.6$

### 6.3. Écoulement autour d'un profil NACA0012

L'écoulement autour du profil NACA0012 est un cas test amplement rencontré en aérodynamique. La géométrie du profil est déterminée par l'expression analytique suivante:

$$y = 5e(0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3537x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (6.4)$$

où  $x, y$  sont les coordonnées adimensionalisées par rapport à la corde du profil  $c$ , et  $e$  représente l'épaisseur relative du profil  $e=0.12$ . Des mesures expérimentales du coefficient de pression sont disponibles dans la référence [103]. Les données expérimentales correspondent à des écoulements compressibles à des nombres de Mach qui varient entre  $M=0.3$  et  $M=0.83$ . Comme nos calculs sont effectués pour un écoulement incompressible, nous avons considéré comme référence les mesures expérimentales à  $M=0.3$  où les effets de compressibilité sont réduits. Nous avons compléter deux séries de calculs: la première correspond à un angle d'incidence nul,  $\alpha=0^\circ$ , et la deuxième correspond à  $\alpha=3.59^\circ$ .

#### 6.3.1. Écoulement à angle d'incidence nul

Pour ce cas le nombre de Reynolds basé sur la vitesse à l'infini et la corde du profil est  $Re=1.85 \times 10^6$ . La géométrie est adimensionalisée par rapport à la corde du profil. L'entrée du domaine de calcul se situe à 10 cordes en amont du profil, la sortie se trouve à 10 cordes en aval du profil. Finalement, les limites supérieure et inférieure du domaine sont placées à 8 cordes par rapport au profil.

Dans nos calculs toutes les variables sont adimensionalisées. Les valeurs de référence sont  $U_\infty$  pour la vitesse,  $U_\infty^2$  pour l'énergie cinétique de la turbulence et  $U_\infty^3/c$  pour  $\epsilon$ . On impose les différentes valeurs des variables en entrée, soit  $u=1, v=0,$

$k=1.6 \times 10^{-3}$ ,  $\epsilon=6 \times 10^{-5}$ . Toutes les autres frontières ont des conditions libres pour toutes les variables. Sur le profil on utilise une loi de paroi avec une distance à la paroi de  $d=0.001$ . La condition de tangence est imposée en sens faible, donc on impose que le débit soit nul sur chaque face des éléments situés sur le profil. On notera que le problème à résoudre est symétrique et qu'à aucun moment le maillage n'est contraint à être symétrique. Le domaine de calcul est discrétisé au complet et le maillage est engendré uniquement à partir de la distribution de taille prescrite.

La résolution est faite en variables logarithmiques à l'aide d'une formulation Galerkin moindre carré. Le calcul démarre sur un maillage très grossier, qui à seulement 17 éléments de chaque coté du profil. À chaque étape adaptative on cherche à diminuer les erreurs en vitesse, pression,  $\ln(k)$ ,  $\ln(\epsilon)$  et  $\mu_T$  par un facteur 2.

Dans la figure 6.53 on présente les maillages engendrés par la stratégie adaptative dans une région autour du profil. L'effet de l'adaptativité est remarquable. Les points du maillage sont initialement concentrés autour du bord d'attaque et du bord de fuite du profil. Ce raffinement est en grande mesure déterminé par l'erreur en vitesse. Le maillage est ensuite raffiné dans la couche limite près du profil pour capturer les variations très rapides en vitesse, dans les variables logarithmiques et dans la viscosité turbulente.

La figure 6.54 présente une vue d'ensemble des maillages initial et final. Le maillage final est considérablement raffiné autour du profil, mais aussi dans son sillage en aval. On remarque aussi qu'en amont du profil la transition dans la taille des éléments est progressive. Ceci est déterminé par l'erreur en pression qui est plus exigeante dans les régions éloignées du profil, cette variable étant discrétisée par des fonctions linéaires.

La solution obtenue sur le maillage final est représentée dans la figure 6.55. On

présente les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse, la pression, la viscosité turbulente et les variables logarithmiques. La solution du problème devrait être symétrique par rapport à l'axe des  $x$ . On remarque que, même si le maillage n'est pas symétrique, la solution numérique l'est à tout fin utile. Rappelons que la pression est discrétisée par des fonctions discontinues. On peut donc mesurer la qualité de la solution en regardant les isobares qui sont presque continues. Une analyse plus détaillée de l'influence de la formulation élément finis et de l'avantage apporté par l'utilisation des variables logarithmiques sera présentée pour l'écoulement avec incidence.

La figure 6.56 présente les courbes de coefficient de pression sur l'extrados du profil, qui sont comparées aux mesures expérimentales. Rappelons que l'expérience est réalisée à  $M=0.3$ . La théorie des petites perturbations indique que le coefficient de pression incompressible est donné par:

$$C_{p_i} = C_p \sqrt{1 - M^2} \quad (6.5)$$

où  $C_p$  est le coefficient de pression dans l'écoulement compressible et  $M$  est le nombre de Mach local. Dans ce cas la correction de compressibilité représente environ 5% de la valeur du coefficient de pression, ce qui explique les différences entre la solution numérique et les valeurs expérimentales. Outre ce fait, on peut remarquer que la solution s'améliore à chaque cycle d'adaptativité. Les différences entre les deux derniers maillages adaptés sont invisibles sur cette figure.

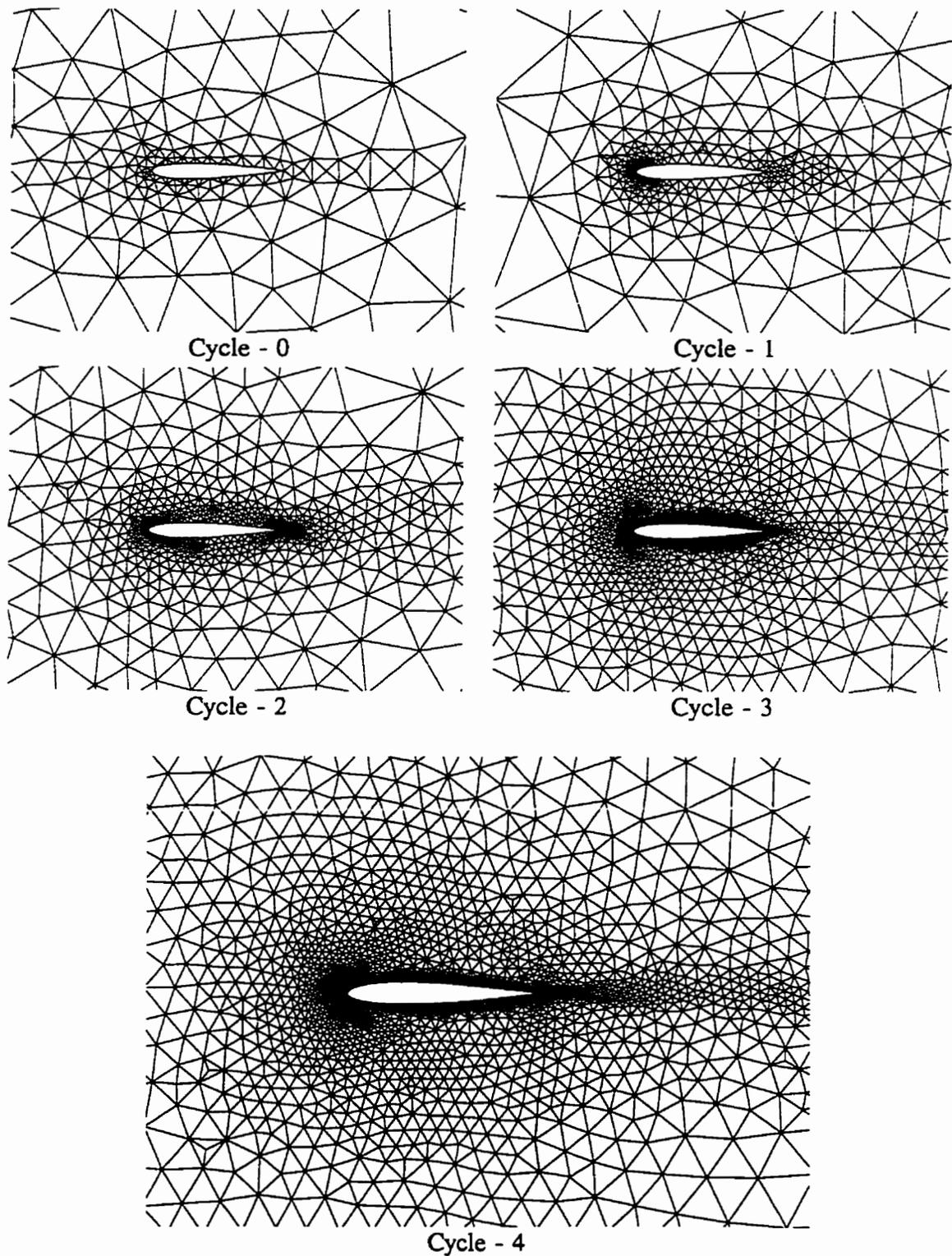
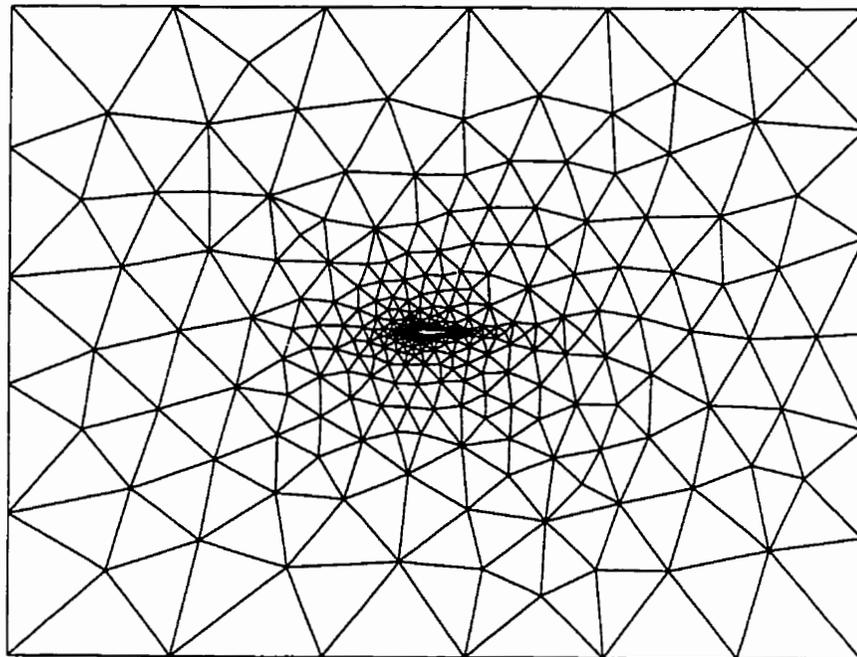
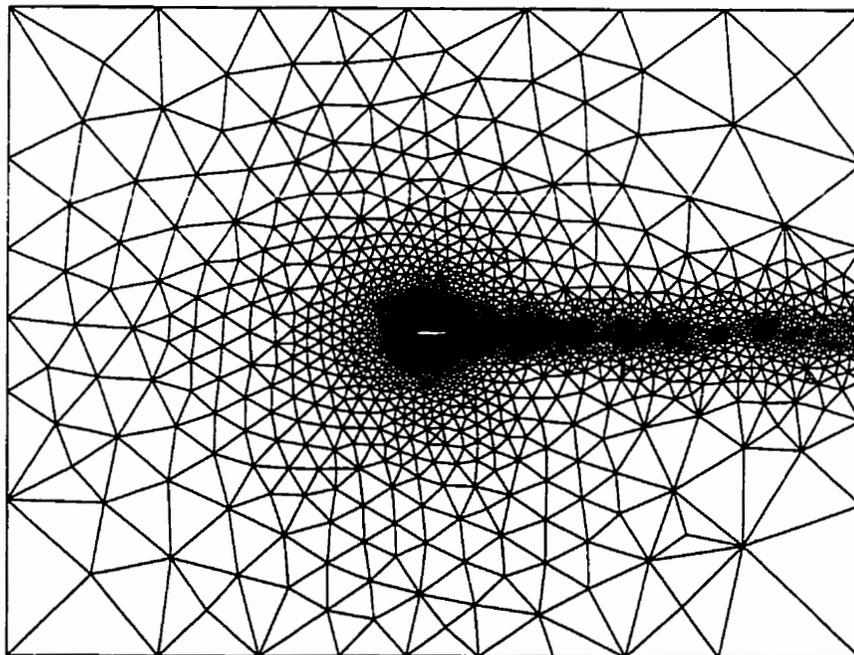


Figure 6.53 Profil NACA0012,  $\alpha = 0^\circ$ : Maillages engendrés par la stratégie adaptative



Maillage initial



Maillage final

Figure 6.54 Profil NACA0012,  $\alpha=0^\circ$ : Maillage initial et maillage final

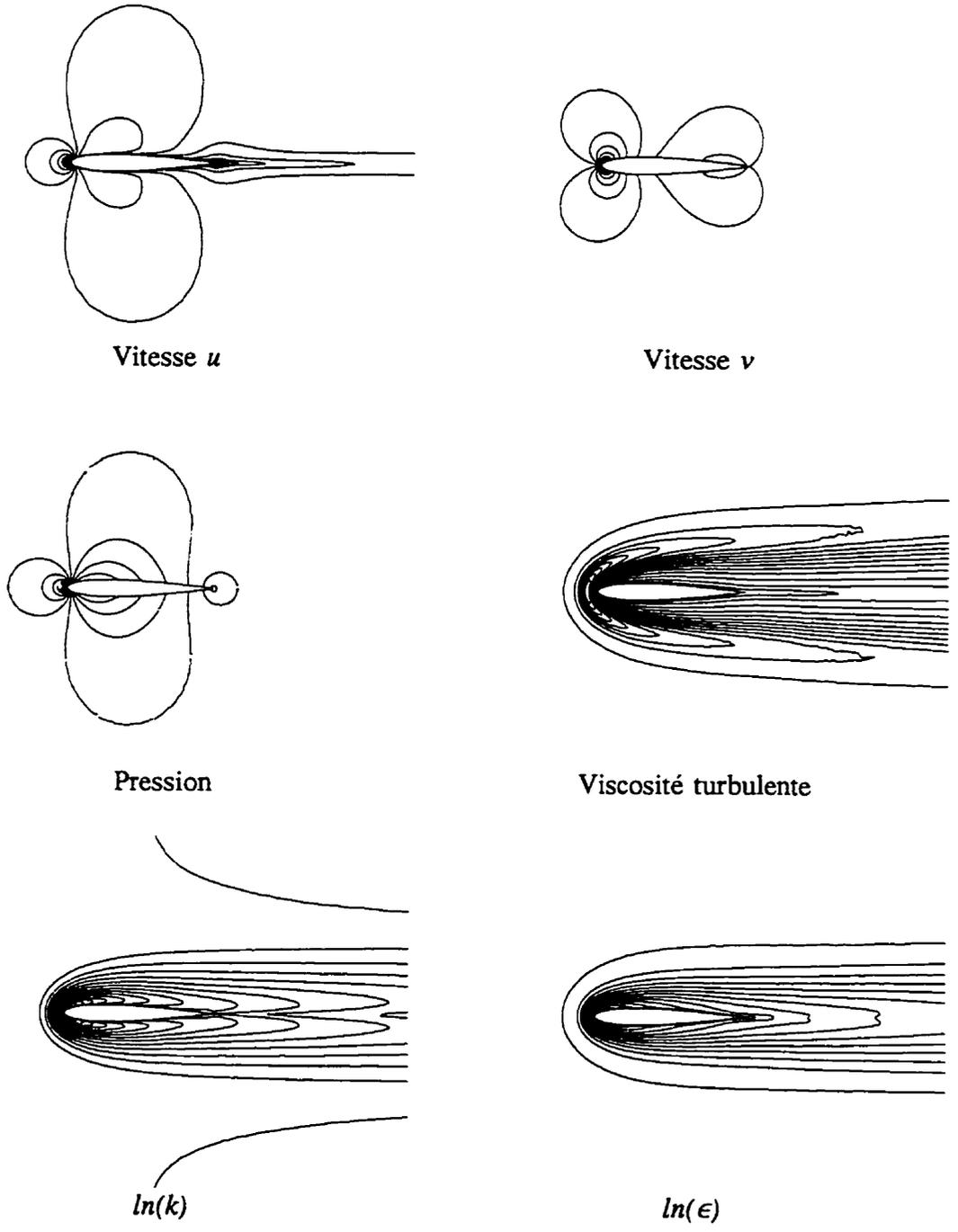


Figure 6.55 Solution sur le maillage final

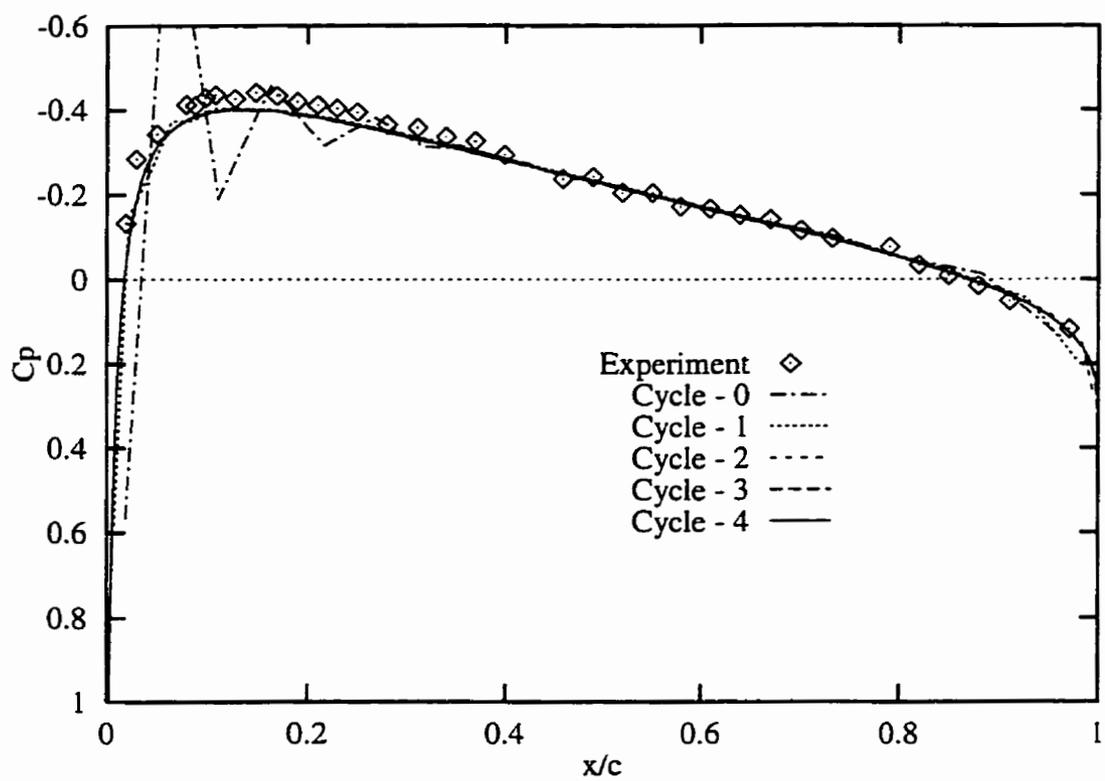


Figure 6.56 Profil NACA0012,  $\alpha=0^\circ$ : Distribution du coefficient de pression

### 6.3.2. Écoulement avec incidence

Le nombre de Reynolds pour ce problème est  $Re=1.86 \times 10^6$ . Le domaine de calcul est le même que celui utilisé dans le cas précédent. On impose toujours des conditions de Dirichlet à l'entrée, les composantes de vitesse étant calculées cette fois pour que l'écoulement fasse un angle de  $3.59^\circ$  degrés avec l'axe du profil (l'axe des  $x$ ). Sur toutes les autres frontières les conditions aux limites sont de type Neumann nulles. Les variables turbulentes en entrée sont  $k=1.6 \times 10^{-3}$ ,  $\epsilon=6 \times 10^{-5}$ , ce qui fait en sorte que l'écoulement est assez visqueux ( $Re_\tau=260$ ). De cette façon on pourra utiliser et comparer toutes les formulations éléments finis stabilisées de même que la méthode de Galerkin. La distances à la paroi pour la loi de paroi est  $d=0.001$ . Notons que ce calcul reproduit les conditions de l'expérience réalisée à  $\alpha=4^\circ$ , la différence entre les deux angles d'incidence étant déterminée par la correction de paroi due à la soufflerie.

Dans la figure 6.57 on présente les maillages engendrés par l'adaptativité au voisinage du profil. Comme dans le cas précédent, le maillage est raffiné d'abord autour des bords d'attaque et de fuite, et ensuite dans la couche limite au long du profil et finalement dans le sillage. La qualité des maillages adaptés et le raffinement dans la couche limite sont remarquables. Notons que l'introduction de l'erreur en pression dans la stratégie adaptative est responsable de la transition progressive dans la taille des éléments en amont du profil. Le raffinement dans la couche limite et dans le sillage est du aux variables logarithmiques et à la viscosité turbulente.

Les solutions obtenues sur les différentes maillages sont représentées dans les figures 6.58 à 6.63. Les figures 6.58 et 6.59 présentent les deux composantes de vitesse. L'amélioration de la solution due à l'adaptativité est très nette. Sur le maillage final on capture très bien les variations rapides dans la solution autour du bord d'attaque du profil, près du bord de fuite et dans la couche limite. La figure 6.60 présente la

distribution de pression sur les différents maillages. Encore une fois l'adaptativité améliore remarquablement les prédictions numériques, les lignes isobares étant presque continues sur le maillage final. La même succession d'images, cette fois pour la viscosité turbulente, est présentée dans la figure 6.61. On remarque que même si le premier maillage est très grossier, la solution obtenue sur ce maillage indique correctement les principales zones de variation dans la solution autour du profil. L'utilisation des variables logarithmiques est encore une fois déterminante dans le succès du résolveur sur un maillage si grossier. Non seulement on obtient une solution sur un tel maillage, mais en plus cette solution est suffisamment lisse pour permettre de démarrer correctement le processus adaptatif. Cependant, on remarquera que les variations dans la couche limite ne sont bien reproduites que sur les deux derniers maillages. On notera aussi que pour ce problème le nombre de Reynolds très élevé cause un amincissement considérable de la couche limite. La résolution devient alors d'autant plus difficile à cause du fait que dans la couche limite les variations des variables sont extrêmement rapides.

Sur les figures 6.62 et 6.63 on présente les distributions des variables de turbulence. À gauche on présente  $k$  et  $\epsilon$  respectivement, tandis qu'à droite on retrouve leurs logarithmes naturels. Les solutions correspondent au maillage initial, au deuxième maillage adapté et au maillage final. Les solutions sur le dernier maillage sont de très bonne qualité autant pour  $\ln(k)$ , que pour  $\ln(\epsilon)$ . Outre ce fait, on remarque une nette différence entre les variations de  $k$  et d' $\epsilon$  d'une part et celles de  $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$  de l'autre. On peut voir dans la figure 6.63 que le logarithme d' $\epsilon$  a une variation qui s'étale sur une région assez vaste autour du profil, tandis qu' $\epsilon$  varie très rapidement dans une mince couche d'éléments autour du bord d'attaque. Une résolution en  $(k, \epsilon)$  comme variables dépendantes doit composer avec ces variations de  $k$  et d' $\epsilon$  autour du bord d'attaque qui rendent la résolution extrêmement difficile. À vrai dire lorsque la résolution a été faite en  $k$  et  $\epsilon$  notre code a souvent été incapable d'obtenir des solutions pour certains problèmes. C'est le cas des maillages grossiers, mais aussi de certains

problèmes où  $\epsilon$  varie extrêmement rapidement comme c'est le cas ici. On peut donc en conclure que l'utilisation des variables logarithmiques a un effet bénéfique au niveau de l'ensemble de l'algorithme adaptatif. Elle peut même être essentielle au succès des calculs sur certaines configurations.

La figure 6.64 présente les distributions du coefficient de pression au long du profil, pour les différents maillages. Les prédictions sont rapidement améliorées par l'adaptativité et on remarque des différences minimales entre les solutions obtenues sur les derniers maillages. Encore une fois les différences par rapport aux mesures expérimentales sont expliquées dans une certaine mesure par les effets de compressibilité.

Finalement, afin d'évaluer les performances des différentes formulations éléments finis, nous avons résolu ce problème sur le troisième maillage par toutes les formulations implantées, soit Galerkin, SU, SUPG incomplet, SUPG et GLS. Les courbes de  $C_p$  obtenues sont tracées dans la figure 6.65 et un détail de la région de vitesse maximale est présenté dans la figure 6.66. On remarque d'abord que de toutes ces courbes, celle qui correspond à GLS est la plus lisse. Ceci résulte du fait que dans cette formulation toutes les équations, y compris l'équation de continuité, sont stabilisées par moindres carrés. Outre ce fait, la solution Galerkin est la plus proche de la solution GLS; elle est suivie par la méthode SUPG. Ces trois formulations sont d'ailleurs résiduelles et leurs solutions convergent vers la solution exacte avec le raffinement du maillage. La solution SUPG-incomplet est assez proche de la solution SUPG. Même si elle n'est pas résiduelle, elle a l'avantage de ne pas inclure les dérivées secondes dans le résidu fort et par conséquent elle est plus robuste en présence de singularités. La solution SU est loin des autres et on voit clairement que cette technique fausse les résultats par l'inclusion d'une viscosité artificielle.

Afin d'apprécier l'influence de conditions en entrée sur la solution nous avons

complété trois autres séries de calcul, Prob2, Prob3, Prob4, (le calcul précédent est appelé Prob1), en variant le niveau de turbulence et de la viscosité turbulente en entrée. Les valeurs utilisées sont présentées dans le tableau 6.3.

Tableau 6.3 Conditions en entrée pour les variables turbulentes

Calcul	$k_{entrée}$	$\mu_{T_{entrée}}$
Prob1	$1.6 \times 10^{-3}$	0.00384
Prob2	$1.0 \times 10^{-4}$	$0.9 \times 10^{-4}$
Prob3	$1.0 \times 10^{-5}$	$0.9 \times 10^{-5}$
Prob4	$1.0 \times 10^{-6}$	$0.9 \times 10^{-6}$

Les maillages ont été régénérés à partir du cycle 2 pour les conditions de la solution du problème Prob2. Les maillages obtenus sont présentés dans la figure 6.67. On remarque à nouveau un très forte concentration dans la couche limite de même que dans le sillage développé en aval du profil. Une vue d'ensemble du maillage final est présentée dans la figure 6.68. L'effet de l'adaptativité est remarquable; la concentration de points est une illustration des régions de forts gradients dans la solution. Notons que le rapport entre l'aire du plus gros et du plus petit triangle est de  $1.6 \times 10^7$ .

Les figure 6.69 à 6.71 illustrent l'évolution de la solution dans les variables de turbulence lorsque les conditions en entrée sont modifiées. On remarque l'amincissement de la région de forts gradients autour du profil. Notons aussi la ressemblance entre les distribution des variables logarithmiques ( $\ln(k)$  et  $\ln(\epsilon)$ ) ce qui augmente l'efficacité du processus adaptatif, leurs erreurs étant concentrées aux mêmes endroits. Quant à la viscosité turbulente, on remarque une diminution du maximum dans la solution lorsque le niveau de turbulence baisse en amont du profil. La viscosité

turbulente maximale diminue entre les solutions Prob2 et Prob4 par un facteur 6 pour une diminution des valeurs en entrée par un facteur de 100. Notons aussi le fait que la solution du problème Prob4 correspond à un écoulement pratiquement non-visqueux sauf dans la couche limite et dans le sillage.

Finalement, la figure 6.72 présente l'influence du niveau de turbulence en entrée sur la distribution du coefficient de pression. Les prédictions numériques s'approchent de plus en plus des valeurs expérimentales lorsque le niveau de turbulence baisse en amont du profil. La solution du problème Prob4 est excellente, les différences par rapport aux mesures étant attribuables entièrement aux effets de compressibilité.

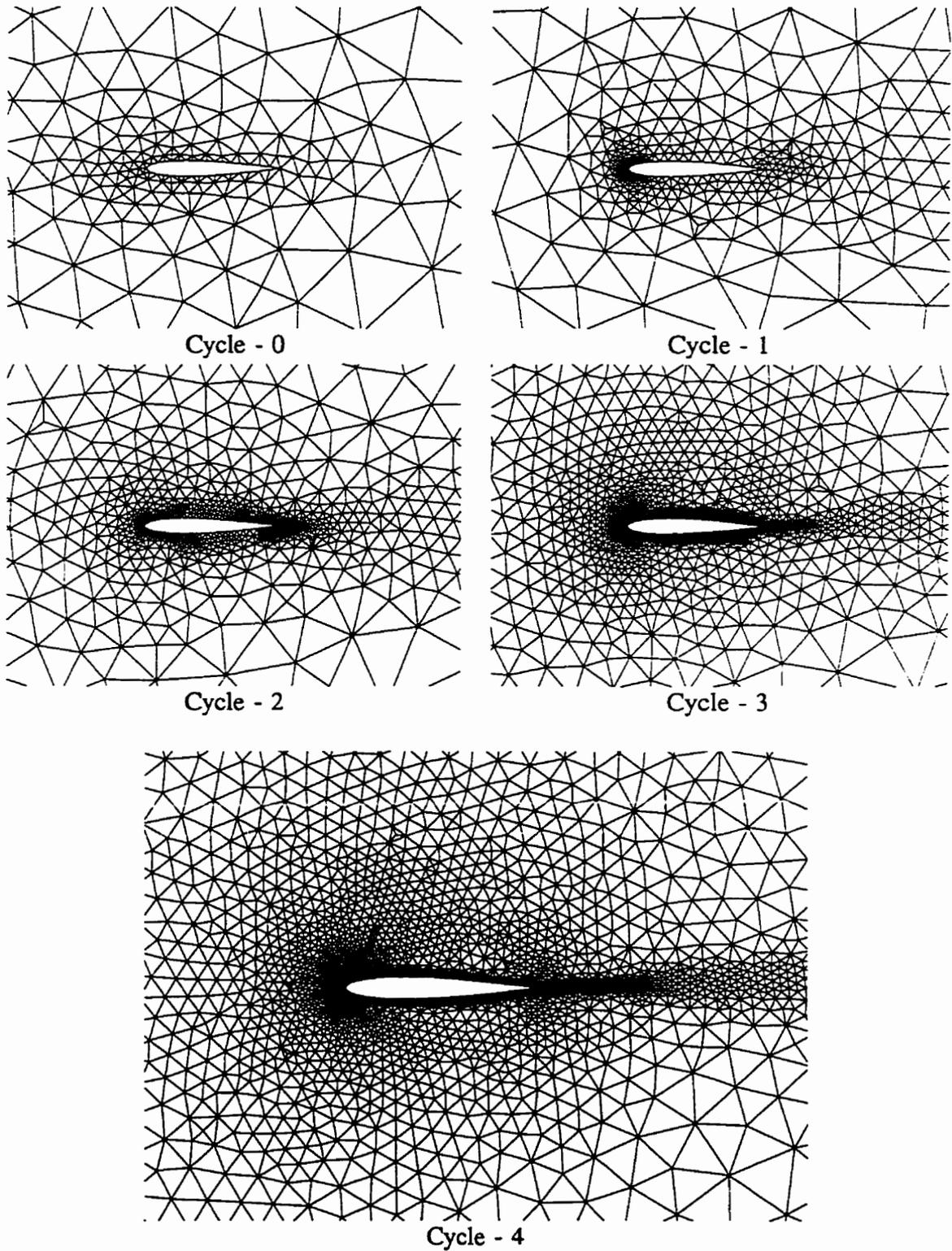
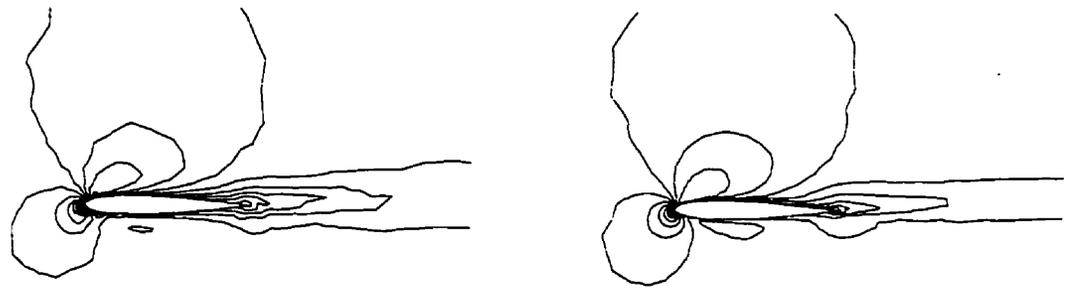
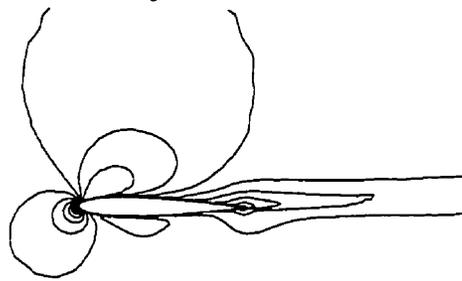


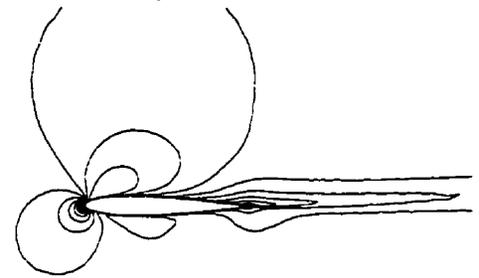
Figure 6.57 Profil NACA0012 à  $\alpha=3.59^\circ$  - Maillages adaptés



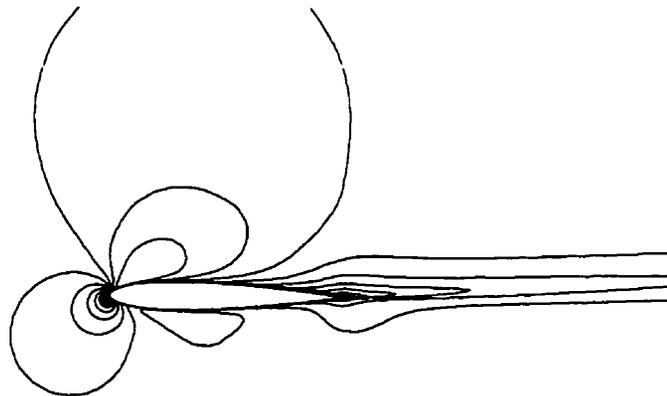
Cycle - 0



Cycle - 1



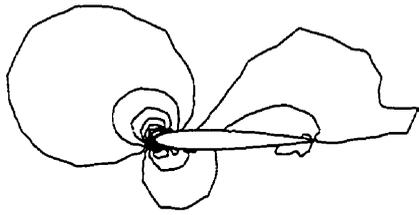
Cycle - 2



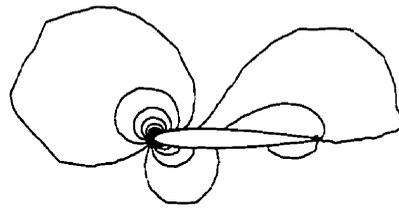
Cycle - 3

Cycle - 4

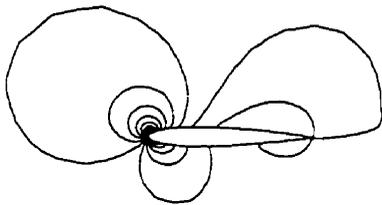
Figure 6.58 Distribution de la vitesse  $u$



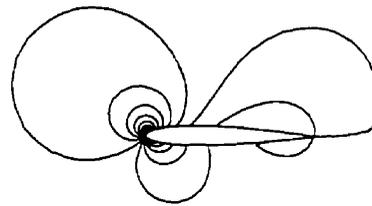
Cycle - 0



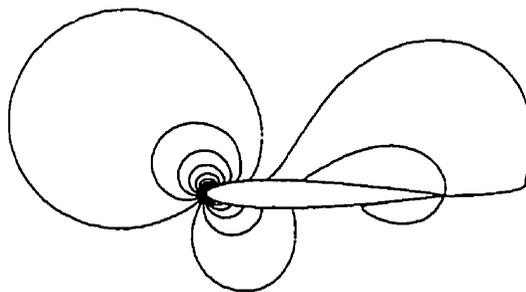
Cycle - 1



Cycle - 2

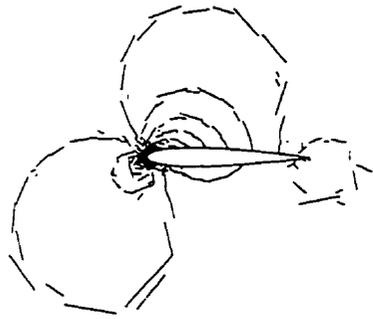


Cycle - 3

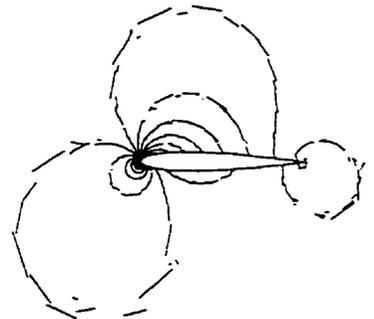


Cycle - 4

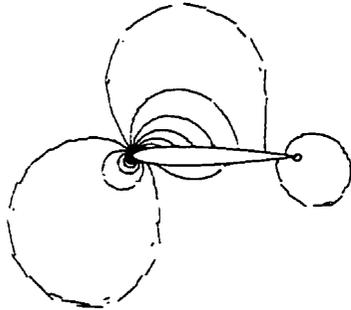
Figure 6.59 Distribution de la vitesse  $v$



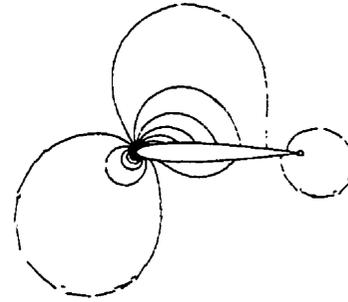
Cycle - 0



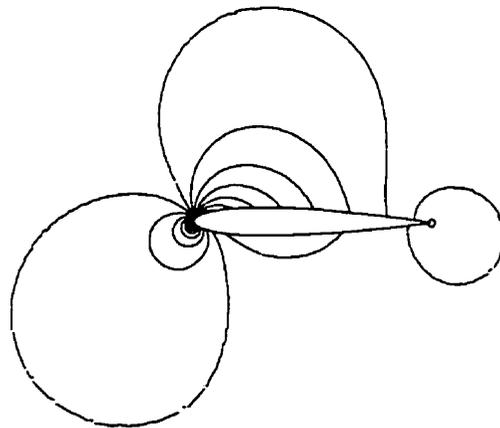
Cycle - 1



Cycle - 2

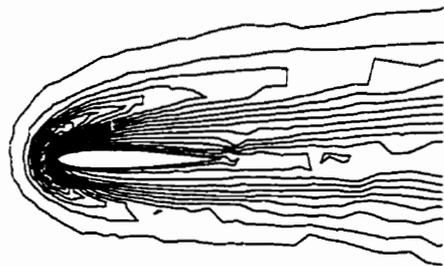


Cycle - 3

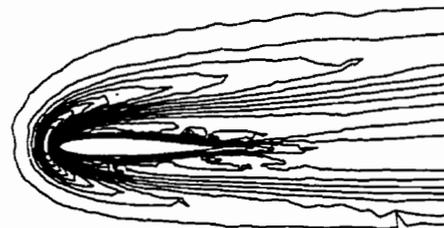


Cycle - 4

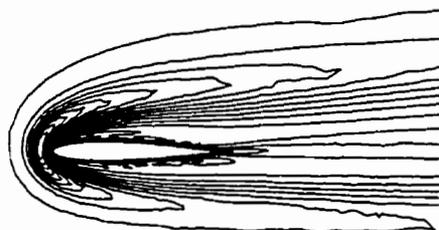
Figure 6.60 Distribution de la pression



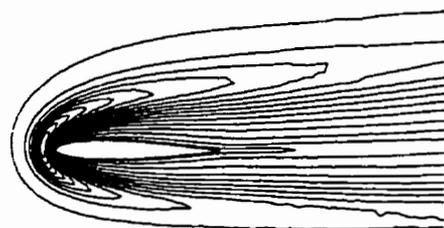
Cycle - 0



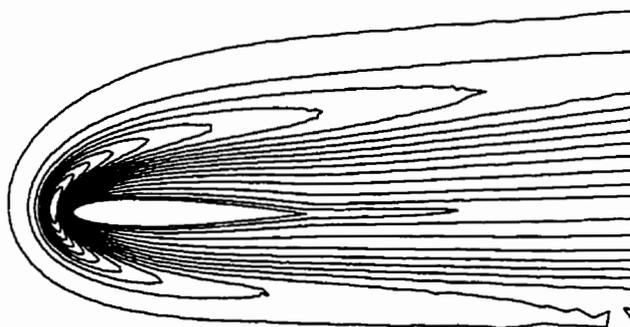
Cycle - 1



Cycle - 2

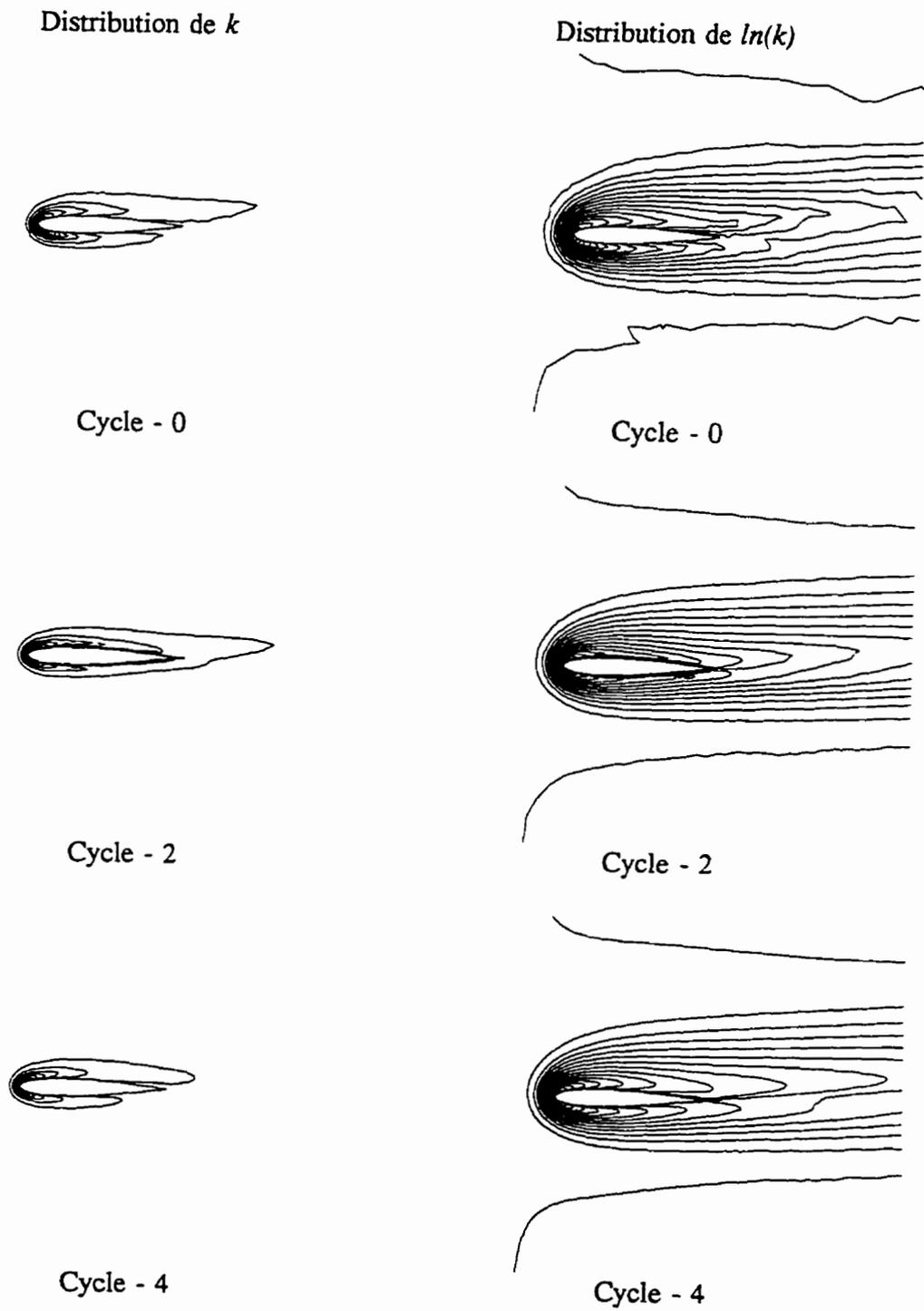


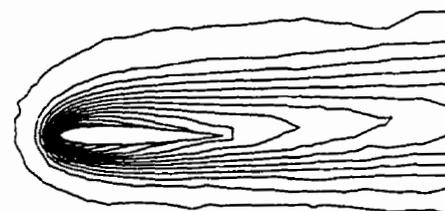
Cycle - 3



Cycle - 4

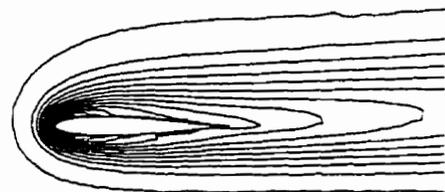
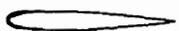
Figure 6.61 Distribution de la viscosité turbulente

Figure 6.62 Distribution de  $k$  et de  $\ln(k)$

Distribution d' $\epsilon$ Distribution de  $\ln(\epsilon)$ 

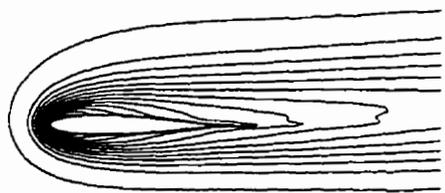
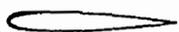
Cycle - 0

Cycle - 0



Cycle - 2

Cycle - 2



Cycle - 4

Cycle - 4

Figure 6.63 Distribution d' $\epsilon$  et de  $\ln(\epsilon)$

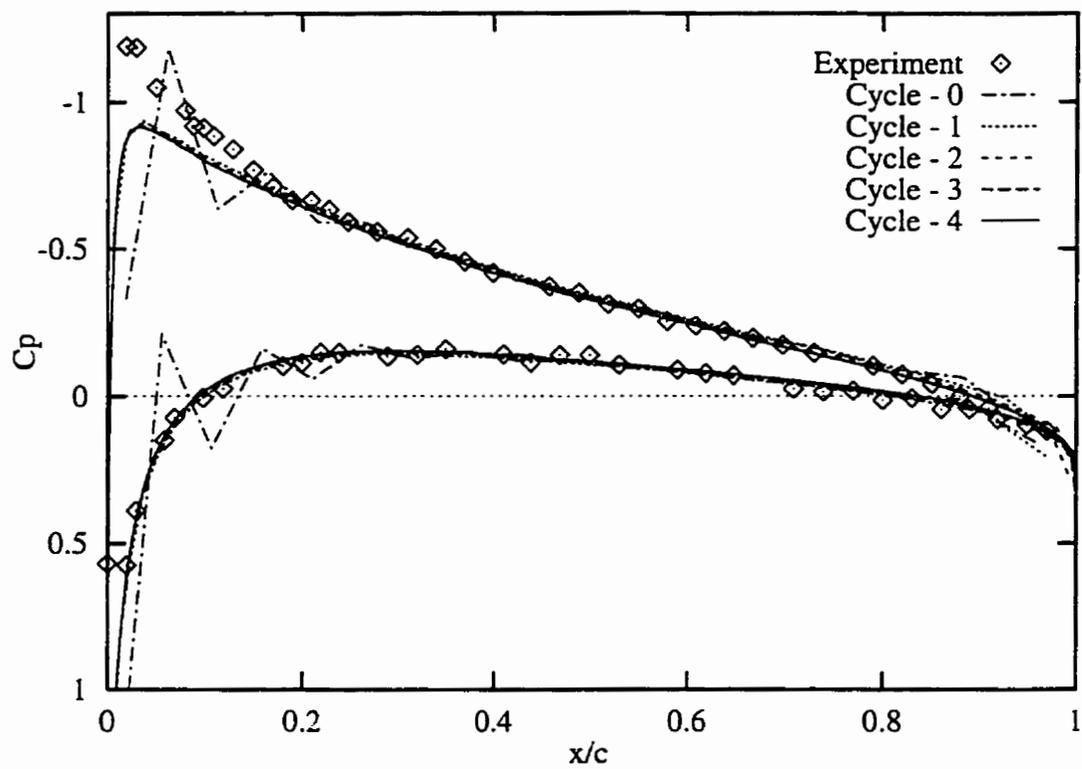


Figure 6.64 Distribution du coefficient de pression

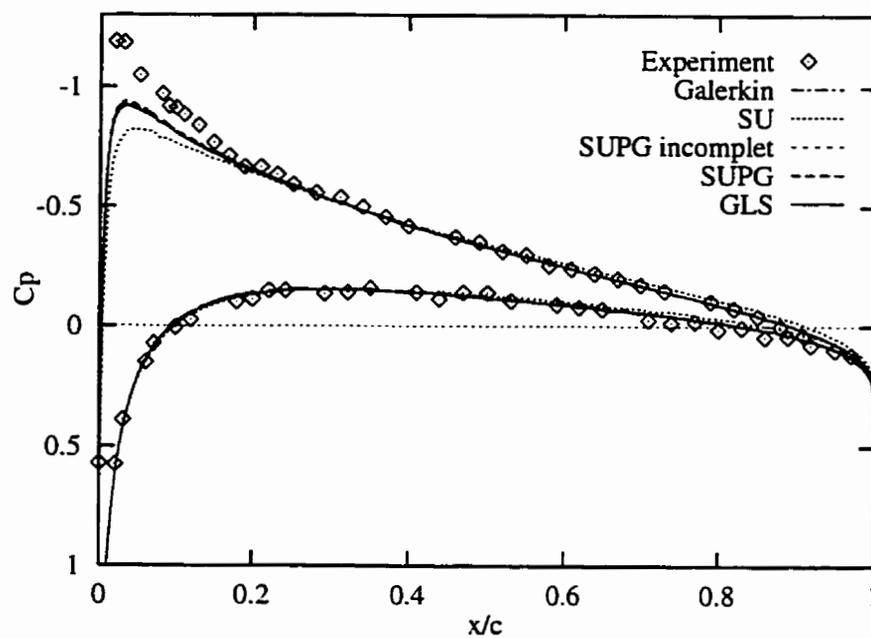


Figure 6.65 Distribution du coefficient de pression sur le maillage 3

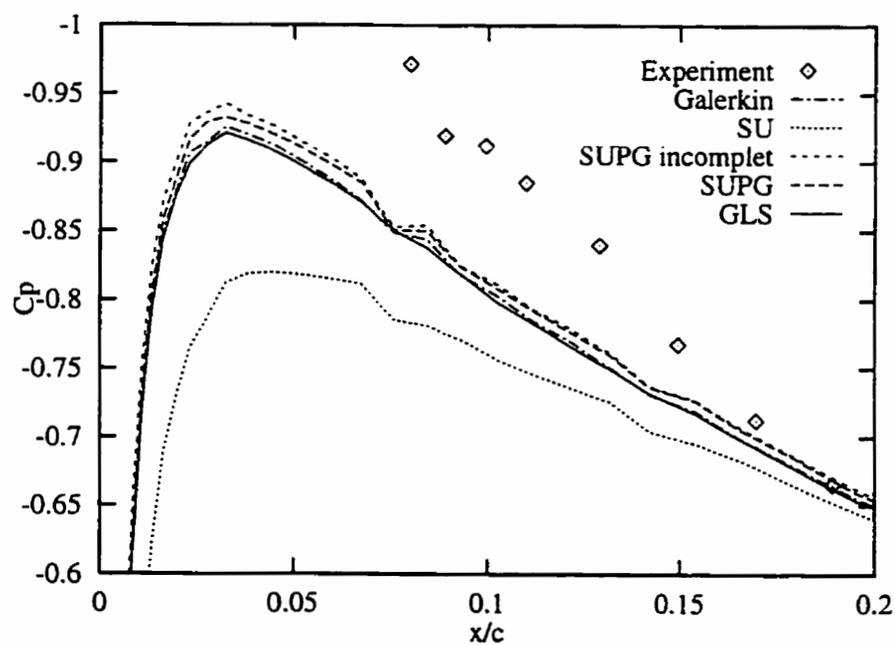
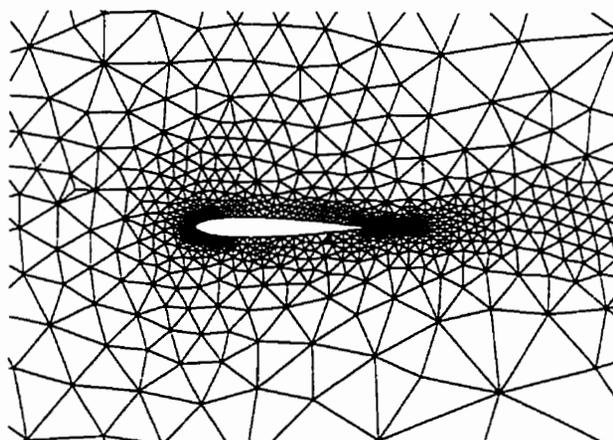
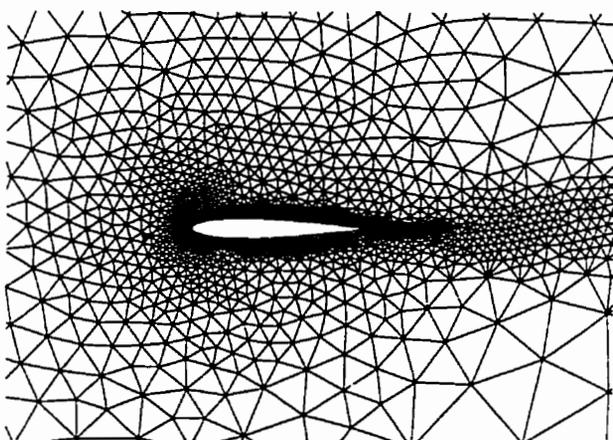


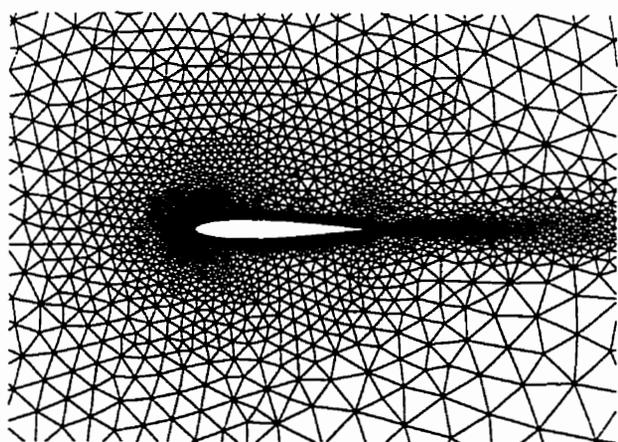
Figure 6.66 Détail de la distribution du coefficient de pression sur le maillage 3



Cycle - 2



Cycle - 3



Cycle - 4

Figure 6.67 Maillages adaptés - Prob2

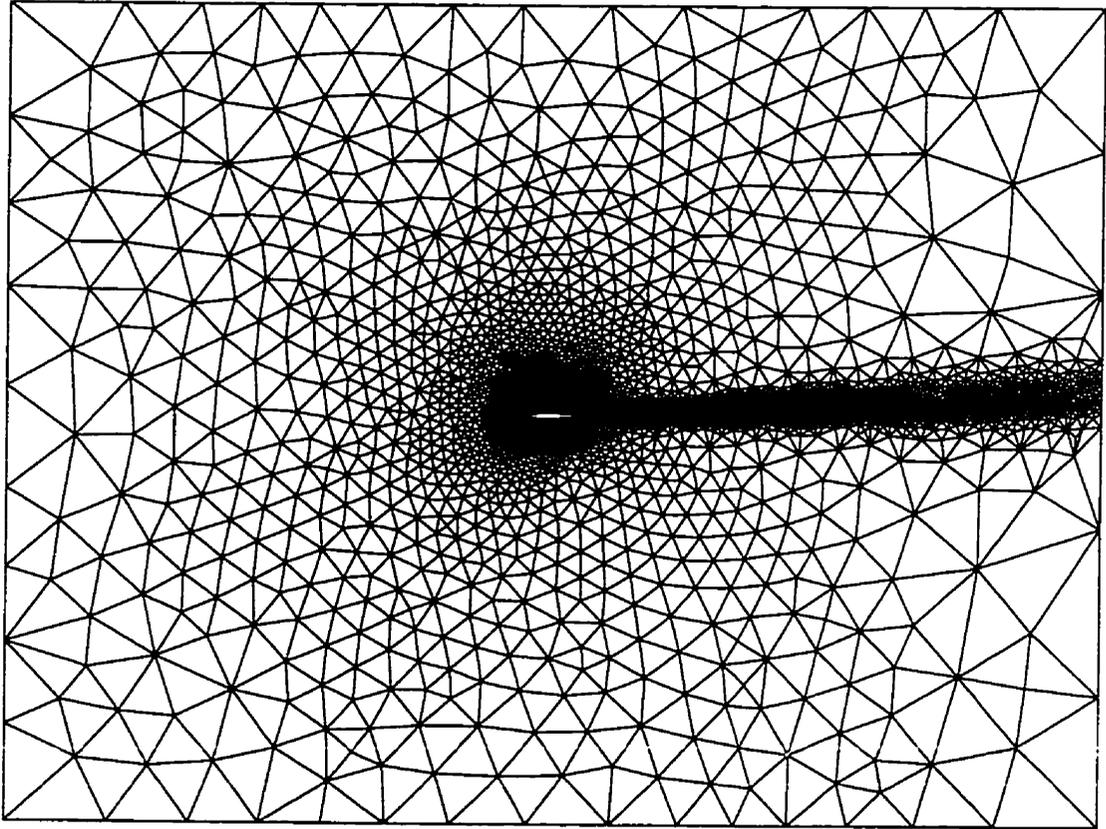
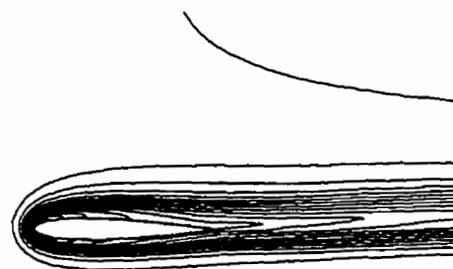
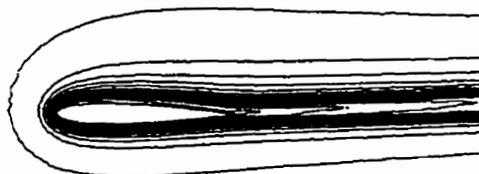


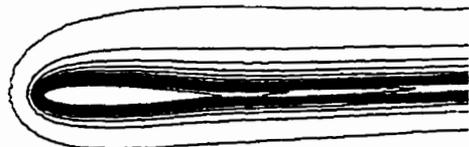
Figure 6.68 Profil NACA0012,  $\alpha=3.59^\circ$ : Maillage final (Prob2)



Prob2



Prob3



Prob4

Figure 6.69 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en  $ln(k)$

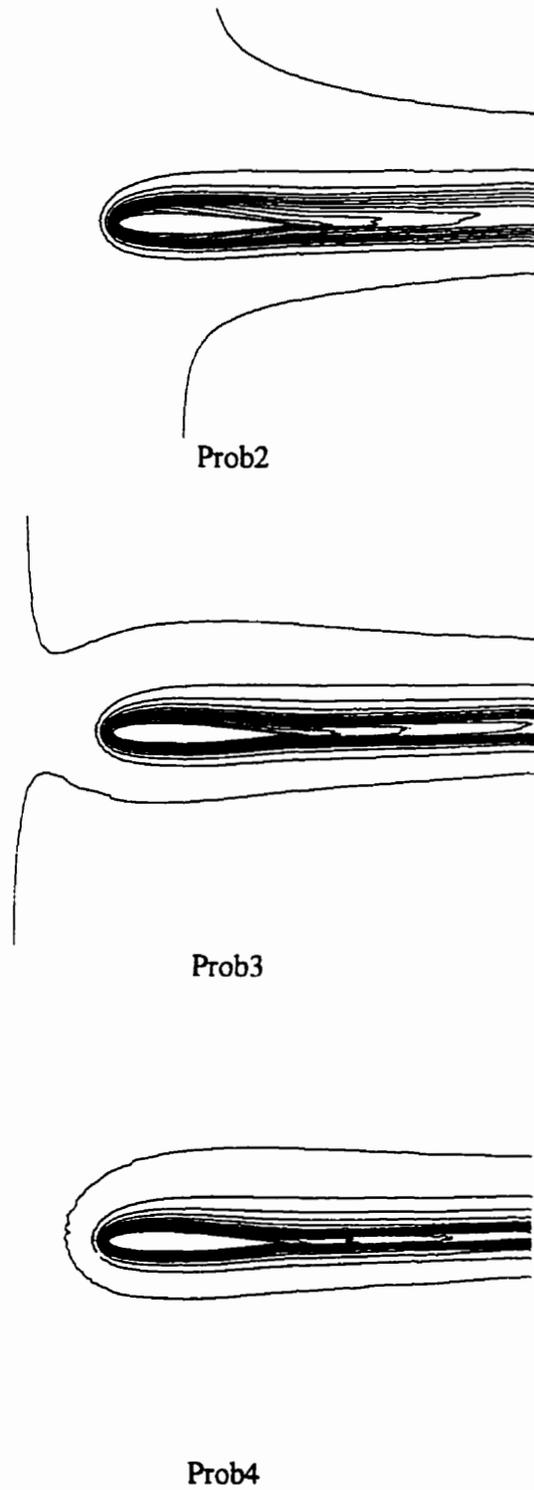


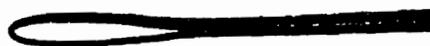
Figure 6.70 Influence des conditions limite à l'entrée sur la solution en  $\ln(\epsilon)$



Prob2 -  $(\mu_T)_{\max} = 0.00133$



Prob3 -  $(\mu_T)_{\max} = 0.000572$



Prob4 -  $(\mu_T)_{\max} = 0.000227$

Figure 6.71 Influence des conditions limite à l'entrée sur la viscosité turbulente

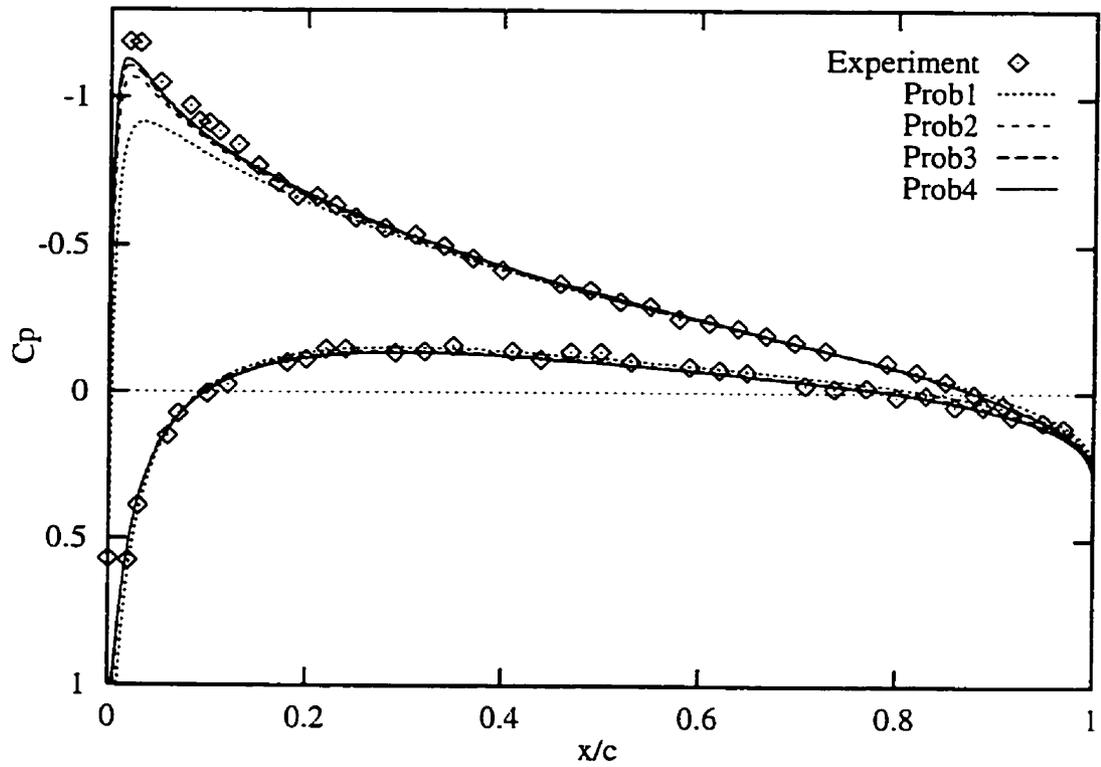


Figure 6.72 Influence des conditions limite à l'entrée sur la distribution du coefficient de pression

## Conclusion

Dans cette thèse nous avons développé une méthodologie adaptative capable de traiter les écoulements turbulents. La modélisation de l'écoulement a été réalisée à l'aide d'un modèle  $k-\epsilon$  à deux équations de transport, couplé à une loi de paroi. L'algorithme adaptatif procède par remaillage adaptatif. À chaque cycle d'adaptation la distribution de l'estimation de l'erreur sur le maillage courant est utilisée pour prédire les caractéristiques du prochain maillage adapté afin de réduire l'erreur.

Ce travail avait pour but d'obtenir de solutions numériques précises aux équations régissant les écoulements turbulents. Pour cela nous avons développé des techniques de résolution et d'estimation d'erreur couplées dans un algorithme adaptatif robuste, efficace et économique. Les résultats ont montré que l'adaptativité permet d'obtenir de solutions très précises et à moindre coût qu'une résolution classique.

La résolution a été effectuée sur de maillages non-structurés en employant un algorithme à base d'itérations globales en  $\mu_T$ . Afin de préserver la positivité des variables de turbulence  $(k, \epsilon, \mu_T)$  nous avons proposé un changement de variables dépendantes: la solution n'est plus obtenue avec  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes, mais plutôt avec leur logarithme naturel. Cette approche nouvelle bien que très simple et très efficace n'a jamais été employée auparavant. La résolution en variables logarithmiques conduit à des solutions pour lesquelles les variables de turbulence sont représentées avec beaucoup plus de précision. Le bénéfice de cette approche a été

immédiat au niveau de la positivité de la solution. En plus on a pu en tirer plusieurs autres avantages tant du point de vue du résolveur que du module adaptatif. On notera l'accélération de la convergence dans l'algorithme itératif de calcul et la robustesse accrue de l'estimation d'erreur et de l'adaptativité. Pour le cas de validation, nous avons obtenu une réduction de l'erreur en  $\mu_T$  de deux ordres de grandeur seulement en utilisant les logarithmes naturels de  $k$  et  $\epsilon$  comme variables dépendantes. Outre ce fait, nous avons utilisé avec succès des techniques d'éléments finis stabilisées ayant pour rôle de réduire où même d'éliminer les oscillations dans la solution lorsque les termes de convection sont dominants.

L'estimation d'erreur a été réalisée par une technique de projection locale de type moindres carrés. L'approche est la même pour toutes les variables d'intérêt: vitesse, pression, variables de turbulence et viscosité turbulente. Les cas de validation ont montré que les estimateurs à base de projection locale sont robustes et représentent correctement la distribution et l'amplitude de l'erreur.

La méthodologie adaptative a été appliquée à la résolution des écoulements turbulents pour lesquels on disposait de données expérimentales. Nos résultats indiquent que l'adaptativité nous permet d'obtenir des solutions qui ne dépendent plus du maillage. À toute fin utile la solution finale est numériquement exacte. Les résultats se comparent bien avec les mesures.

Dans tous les cas la solution dépend des valeurs imposées aux variables de turbulence en entrée. Dans ce sens on remarque pour la couche cisailée que la solution s'approche plus d'une solution similaire lorsque le niveau de turbulence baisse en amont de la zone de mélange. Les résultats viennent aussi confirmer plusieurs constatations faites auparavant qui concernent le comportement du modèle  $k-\epsilon$ . On note pour l'écoulement sur la marche une surévaluation du cisaillement turbulent dans la zone de recirculation et une sous-évaluation du cisaillement en aval du point de recollement.

Pourtant, nos prédictions relatives à la longueur de la zone de récirculation se situent entre 6.2 et 6.47 (dépendant des conditions imposées en entrée aux variables turbulentes), ce qui constitue une amélioration notable par rapport aux autres prédictions numériques référées dans la littérature.

Le calcul de l'écoulement turbulent autour du profil NACA0012 pose encore une fois la question de l'influence sur la solution des conditions limites. On remarque que la solution du problème dépend du niveau de la viscosité turbulente dans l'écoulement non-perturbé. La solution numérique s'approche de plus en plus des mesures expérimentales au fur et à mesure que la viscosité turbulente baisse en amont du profil jusqu'à des valeurs comparables à la viscosité laminaire du fluide. Cependant le calcul dans ces conditions est plus difficile car il comporte des grandes régions où les variables de turbulence prennent des valeurs extrêmement faibles et d'autres où les gradients de la solution sont très forts. Ces caractéristiques de la solution font apprécier d'autant l'avantage d'utiliser les variables logarithmiques.

Des améliorations sont encore possibles au niveau de l'algorithme de résolution car on ne dispose pas encore d'une formulation résiduelle qui fonctionne dans toutes les situations. On pense notamment aux équations de transport pour les variables de turbulence résolues en formulation GLS et SUPG. La présence de singularités et le comportement asymptotique des dérivées d'ordre deux, empêchent parfois ces techniques de stabilisation de converger. Une possibilité à envisager serait de diminuer la contribution de type moindre carré dans la formulation GLS dans les régions autour de singularités, là où de toute façon les éléments ont des tailles déjà suffisamment petites.

Il serait aussi utile d'explorer d'autres façon de traiter les régions près des parois solides. On pense notamment à l'utilisation des lois de parois sensibles au gradient de pression où bien encore à des formulations permettant d'intégrer les équations jusqu'à la paroi.

D'autre part on recommande l'application de la technique de résolution en variables logarithmiques et de la méthodologie adaptative à des variantes du modèle  $k-\epsilon$ , de même qu'à d'autres modèles de turbulence à deux équations. Cela permettrait de faire des analyses comparatives des différents modèles de turbulence étant donné que les erreurs numériques sont maintenant bien contrôlées.

Une suite intéressante à cette recherche serait aussi l'extension des méthodes proposées aux écoulements axisymétriques ou tridimensionnels. Cela ouvrirait un plus large horizon d'applications étant donné que, sans tenir compte de nos limites informatiques, la nature demeure toujours tridimensionnelle.

## Références

- [1] STOKES, G.G., "Mathematical and Physical Papers," *Cambridge Univ. Press*, 5, 1880-1905.
- [2] BOUSSINESQ, J., "Théorie de l'écoulement tourbillant," *Mém. prés. par div. savants à l'Académie des Sciences de Paris*, 23(46), 1877.
- [3] REYNOLDS, O., "An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water is Direct or Sinuous, and the Law of Resistance in Parallel Channels," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 174:935-982, 1883.
- [4] REYNOLDS, O., "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A186(123), 1894.
- [5] REYNOLDS, O., "Papers on Mathematical and Physical Subjects," *Cambridge Univ. Press*, 3, 1903.
- [6] BABUSKA, I., et RHEINBOLDT, W.C., "A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 12:1597-1615, 1978.

- [7] ZIENKIEWICZ, O.C., et ZHU, R.J.Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 24:337-357, 1987.
- [8] HÉTU, J.F., "Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles," *Thèse de Ph.D.*, École Polytechnique de Montréal, 1991.
- [9] ILINCA, F., "Application d'une méthode d'éléments finis adaptatives à des écoulements visqueux," *Thèse de M.Sc.A.*, École Polytechnique de Montréal, 1993.
- [10] LAUNDER, B.E., et SPALDING, J., "The Numerical Computations of Turbulent Flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:269-289, 1974.
- [11] VERFÜRTH, R., "A Posteriori Error Estimates for the Stokes Equations," *Numerische Mathematik*, 55:309-325, 1989.
- [12] STROUBOULIS, T., et ODEN, J.T., "A Posteriori Error Estimation of the Finite Element Approximation in Fluid Mechanics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78:201-242, 1990.
- [13] TURNER, M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C., et TOPP, L.J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of Aeronautical Science*, 23:805-823, 1956.
- [14] ZIENKIEWICZ, O.C., and HOLISTER, G.S., "Stress Analysis," *Wiley, New York*, 1965.

- [15] ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method," 3rd edition, *McGraw-Hill, London*, 1977.
- [16] ODEN, J.T., and REDDY, J.N., "An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements," *Wiley, New York*, 1976.
- [17] ODEN, J.T., "Finite-Element Analog of Navier-Stokes Equation," *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 96(4):529-534, 1970.
- [18] BAKER, A.J., "Finite Element Solution Algorithm for Viscous Incompressible Fluid Dynamics," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 6:89-101, 1973.
- [19] TAYLOR, C., and HOOD, P., "A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations using the Finite Element Technique," *Compt. Fluids*, 1:73-100, 1973.
- [20] RODI, W., "Turbulence Models and Their Applications in Hydraulics - A State of the Art Review," *IAHR State-of-the-Art Paper*, The Netherlands, 1984.
- [21] PRANDTL, L., "Rericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz," *ZAMM* 5:136, 1925.
- [22] VAN DRIEST, E.R., "On Turbulent Flow Near a Wall," *J. of Aerospace Science*, 1007-1011, 1956.
- [23] CEBECI, T., and SMITH, A.M.O., "Analysis of Turbulent Boundary Layers," *Ser. in Appl. Math. & Mech.*, XV, Academic Press, 1974.
- [24] BALDWIN, S.C., and LOMAX, H., "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," *Paper AIAA 78-257*, 1978.

- [25] PRANDTL, L., "Über ein neues Formalsystem für die ausgebildete Turbulenz," *Nachrichten von der Akad. der Wissenschaft in Gottingen*, 1945.
- [26] BRADSHAW, P., FERRIS, D.H., and ATWELL, N.P., "Calculation of Boundary-Layer Development using the Turbulent Energy Equation," *J. Fluid Mechanics*, 28:593, 1967.
- [27] BALDWIN, B.S., and BARTH, T.J., "A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows," *NASA TM-102847*, Août 1990.
- [28] SPALART, P.R., and ALLMARAS, S.R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," *Paper AIAA 92-439*, Reno, NV, 1992.
- [29] KOLMOGOROV, A.N., "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Turbulent Fluid," *IZV. Akad. Nauk SSSR, Ser. Phys.*, 6(1-2):56, 1942.
- [30] SAFFMANN, P.G., and WILCOX, D.C., "Turbulence-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers," *AIAA Journal*, 12:541-546, 1974.
- [31] WILCOX, D.C., "Turbulence Modeling for CFD," *DCW Industries, Inc.*, La Canada, California, 1993.
- [32] CHOU, P.Y., "On the Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation," *Quart. Applied Mathematics*, 3:38, 1945.
- [33] HARLOW, F.H., and NAKAYAMA, P., "Transport of turbulence Energy Decay Rate," *Los Alamos Science Lab., University California Report LA-3854*, 1968.

- [34] LAUNDER, B.E., and SPALDING, D.B., "Mathematical Models of Turbulence," *Academic Press*, London, 1972.
- [35] ZEIERMAN, S., and WOLFSHTEIN, M., "Turbulent Time Scale for Turbulent Flow Computations," *AIAA Journal*, 24(10):1606-1610, 1986.
- [36] SPEZIALE, C.G., ABID, R., and ANDERSON, E.C., "A Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near Wall Turbulence," *AIAA Paper 90-148*, 1990.
- [37] ROTTA, J., "Statische Theorie nichthomogener Turbulenz," *Zeitsch. fur Physik*, 129:547, 1951, and 131:51, 1951.
- [38] LAUNDER, B.E., REECE, G.J., and RODI, W., "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure," *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3):537-566, 1975.
- [39] SPEZIALE, C.G., "Second-Order Closure Models for Rotating Turbulent Flows," *Q. Appl. Math.*, 45:721-733, 1987.
- [40] REYNOLDS, W.C., "Fundamentals of Turbulence for Turbulence Modeling and Simulation," *In Lecture Notes for von Kármán Institute*, AGARD Lecture Series No. 86, pp. 1-66, New York, NATO, 1987.
- [41] LAUNDER, B.E., "Second-Moment Closure and its Use in Modelling Turbulent Industrial Flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9:963-985, 1989.
- [42] PATEL, V.C., RODI, W., and SCHEUERER, G., "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review," *AIAA Journal*, 23(9):1308-1319, 1985.

- [43] MINER, E.W., SWEAN, T.F., HANDLER, R.A., and LEIGHTON, R.I., "Evaluation of the Near-Wall  $k - \epsilon$  Turbulence Model by Comparison with Direct Simulations of Turbulent Channel Flow," *NRL Memorandum Report 6499*, pp. 1-32.
- [44] "FIDAP 7.0, Theory Manual," *Fluid Dynamics International, Inc.*, 1993.
- [45] CHABARD, J.P., "Manuel théorique de la version 3.1 du code N3S", *Note EDF/DER, HE-41/91.30*.
- [46] MANOUZI, H., and FORTIN, M., "A Treatment of Wall Boundaries for Trubulent Flows by the use of a Transmission Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 31:113-126, 1991.
- [47] PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K., and ZIENKIEWICZ, O.C., "Adaptive Remeshing for Compressible Flows," *J. Comp. Phys.*, 72(2), 1987.
- [48] LOHNER, R., MORGAN, K., and ZIENKIEWICZ, O.C., "Adaptive Grid Refinement for the Euler and Compressible Navier-Stokes Equations," in Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations, Wiley, 1986.
- [49] ZIENKIEWICZ, O.C., GAGO, J.P., and KELLEY, D.W., "The Hierarchical Concepts in Finite Element Analysis," *Comp. Struct.*, 16:53-65, 1983.
- [50] BABUSKA, I.M., and RODRIGUEZ, R., "The Problem of the Selection of an *A Posteriori* Error Indicator based on Smoothing Techniques," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:539-567, 1993.

- [51] BABUSKA, I.M., and MILLER, A., "The Post-Processing Approach in the Finite Element Method. Part 1: Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Derivatives of the Displacements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20:1085-1109, 1984.
- [52] HÉTU, J.F., and PELLETIER, D., "Adaptive Remeshing for Viscous Incompressible Flows," *AIAA Journal*, 30(8), 1992.
- [53] HÉTU, J.F., and PELLETIER, D., "A Fast Adaptive Finite Element Scheme for Viscous Incompressible Flows," *AIAA Journal*, 30(11), 1992.
- [54] PELLETIER, D., HÉTU, J.F., and ILINCA, F., "An Adaptive Finite Element Method for Thermal Flow Problems," *AIAA Journal*, 32(4):741-747, 1992.
- [55] PELLETIER, D., ILINCA, F., and HÉTU, J.F., "An Adaptive Remeshing for Convective Heat Transfer with Variable Fluid Properties," *AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 8(4):687-694, 1994.
- [56] PELLETIER, D., ILINCA, F., and HÉTU, J.F., "An Adaptive Finite Element Method for Turbulent Flow near a Propeller," *AIAA Journal*, 32(11):2186-2193, 1994.
- [57] PELLETIER, D., and ILINCA, F., "Adaptive Remeshing for the  $k-\epsilon$  Model of Turbulence," *AIAA Paper 94-0818, 32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, 1994.
- [58] AINSWORTH, M., ZHU, J.Z., CRAIG, A.W., and ZIENKIEWICZ, O.C., "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu *A Posteriori* Error Estimator on the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 28:2161-2174, 1989.

- [59] ZIENKIEWICZ, O.C., LIU, Y.C., and HUANG, G.C., "Error Estimates and Convergence Rates for Various Incompressible Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 28:2191-2202, 1989.
- [60] STROUBOULIS, T., and HAQUE, K.A., "Recent Experiences with Error Estimation and Adaptivity, Part 1: Review of Error Estimators for Scalar Elliptic Problems," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 97:399-436, 1992.
- [61] ZIENKIEWICZ, O.C., and ZHU, J.Z., "The Superconvergent Patch Recovery and *A Posteriori* Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 33:1331-1364, 1992.
- [62] ZIENKIEWICZ, O.C., and ZHU, J.Z., "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 101:207-224, 1992.
- [63] BABUSKA, I., STROUBOULIS, T., UPADHYAY, C.S., GANGARAJ, S.K., and COPPS, K., "Validation of *A Posteriori* Error Estimators by Numerical Approach," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:1073-1123, 1994.
- [64] WIBERG, N.E., and ABDULWAHAB, F., "Patch Recovery based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:2703-2724, 1993.
- [65] PELLETIER, D., and FORTIN, A., "Are FEM Solutions of Incompressible Flows Really Incompressible? (or How Simple Flows Can Cause Headaches)," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2(1):99-112, 1989.

- [66] RAITHBY, G.D., "A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow," *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 9:75-103, 1976.
- [67] HUGHES, T.J.R., and BROOKS, A., "A Multi-dimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion," in *T.J.R. Hughes (ed.), Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME, New York, 1979.
- [68] BROOKS, A., and HUGHES, T.J.R., "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Methods for Advection Dominated Flows," in *Proc. 3rd Int. Conf. on Finite Element Methods in Fluid Flows*, Banff, Canada, 283-292, 1980.
- [69] KELLY, D.W., NAKAZAWA, S., ZIENKIEWICZ, O.C., and HEINRICH, J.C., "A Note on Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Element Method Approximation to Convective Diffusion Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15:1705-1711, 1980.
- [70] HUGHES, T.J.R., and BROOKS, A.N., "A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline Upwind Procedure," in *R.H. Gallagher et al. (eds), Finite Elements in Fluid*, Vol. IV, Wiley, Chichester, 1982.
- [71] JOHNSON, C., and SARANEN, J., "Streamline Diffusion Methods for Incompressible Euler and Navier-Stokes Equations," *Math. Comput.*, 47:1-18, 1986.
- [72] JOHNSON, C., and SZEPESSY, A., "On the Convergence of Streamline Diffusion Finite Element Methods for Hyperbolic Conservation Laws," in *T.E. Tezduyar and T.J.R. Hughes (eds), Numerical Methods for Compressible Flows-*

Finite Difference, Element and Volume Techniques, AMD Vol. 78, ASME, New York, 75-91, 1986.

- [73] HUGHES, T.J.R., "Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7:1261-1275, 1987.
- [74] HUGHES, T.J.R., and MALLET, M., "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: III. The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58:305-328, 1986.
- [75] HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P., and HULBERT, G.M., "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73:173-189, 1989.
- [76] TEZDUYAR, T.E., ALIABADI, S.K., BEHR, M., and MITTAL, S., "Massively Parallel Finite Element Simulation of Compressible and Incompressible Flows," *AHPCRC Preprint 94-013*, 1994.
- [77] HUTTON, A.G., and SZCZEPURA, R.T., "Turbulent Flow and Heat Transfer in a Sudden Pipe Expansion," *Notes pour le Congrès AIRH*, 1987.
- [78] KIM, S.E., and CHOUDHURY, D., "Computations of Complex Turbulent Flows and Heat Transfer Using Two-Layer Based Wall Functions," *Proceedings of the 30th National Heat Transfer Conference*, 1995.

- [79] IGNAT, L., PELLETIER, D., and ILINCA, F., "An Adaptive Finite Element Method for Turbulent Heat Transfer," *AIAA Paper 96-0607, 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, 1996.
- [80] DELEUNE, B., "Projet N3S de mécanique des fluides; Modélisation de la couche limite thermique et implantation d'un modèle de paroi à deux échelles de vitesse dans N3S 3.0," *Électricité de France, HT-31/91.18B*, 1991.
- [81] ENGELMAN, M.S., and SANI, R.L., "The Implementation of Normal and/or Tangential Boundary Conditions in Finite Element Codes for Incompressible Fluid Flow," *Int. J. for Numer. Meth. Fluids*, 2:225-238, 1982.
- [82] MENTER, F.R., "Zonal Two-Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows," *Paper AIAA 93-2906, 24th Fluid Dynamics Conference*, July 6-9, 1993.
- [83] SHUR, M., STRELETS, M., ZAIKOV, L., GULYAEV, A., KOZLOV, V., and SECUNDOV, A., "Comparative Testing of One- and Two-Equation Turbulence Models for Flows with Separation and Reattachment," *Paper AIAA 95-0863, 33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January 9-12, 1995.
- [84] JACON, F., and KNIGHT, D., "A Navier-Stokes Algorithm for Turbulent Flows Using an Unstructured Grid and Flux Difference Splitting," *Paper AIAA 94-2293, 25th AIAA Fluid Dynamics Conference*, June 20-23, 1994.
- [85] ILINCA, F., PELLETIER, D., and GARON, A., "An Adaptive Finite Element for a Two-Equation Turbulence Model in Wall Bounded Flows," *AIAA Paper 94-2390, AIAA 25th Fluid Dynamics Conference*, Colorado Springs, 1994.

- [86] ILINCA, F., PELLETIER, D., and ARNOUX-GUISSE, F., "An Adaptive Finite Element Method for Turbulent Free Shear Flows," *AIAA Paper 95-0473, 33th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, 1995.
- [87] PELLETIER, D., GARON, A., and ILINCA, F., "Adaptive Finite Element Algorithms for the  $k-\epsilon$  and  $k-\omega$  Models of Turbulence," in Advances in Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting, 1994.
- [88] PELLETIER, D., and ILINCA, F., "Adaptive Finite Element Method for Mixed Convection," *AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 9(4):708-714, 1995.
- [89] PELLETIER, D., and ILINCA, F., "An Adaptive Remeshing for Forced Convective Heat Transfer," *Paper AIAA 94-1973, AIAA/ASME Thermophysics Conference*, Colorado Springs, June 20-23, 1994.
- [90] PELLETIER, D., IGNAT, L., and ILINCA, F., "An Adaptive Finite Element Method for Conjugate Heat Transfer," *AIAA Paper 95-0637, 33th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, 1995.
- [91] SCHLICHTING, H., "Boundary-Layer Theory", *McGraw-Hill*, 737-739, 1979.
- [92] SPENCER, B.W., and JONES, B.G., "Statistical Investigation of Pressure and Velocity Fields in the Turbulent Two-Stream Mixing Layer", *Paper AIAA 71-0613, 4<sup>th</sup> Fluids and Plasma Dynamics Conference*, June 21-23, 1971, Palo Alto, California.

- [93] DUNCAN, B.S., LIOU, W.W., and SHIH, T.H., "A Multiple-Scale Turbulence Model for Incompressible Flow", *Paper AIAA 93-0086, 31<sup>st</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January 11-14, 1993, Reno-Nevada.
- [94] KIM, J.J., "Investigation of separation and reattachment of turbulent shear layer: flow over a backward facing step", *Thèse de doctorat*, Stanford University, 1978.
- [95] MANSOUR, N.N., and MOREL, T., dans *AFOSR-HTTM- Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, Stanford University, III:1418-1423, 1981.
- [96] POLLARD, A., dans *AFOSR-HTTM- Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, Stanford University, III:1486-1490, 1981.
- [97] RODI, W., CELIK, I., DEMUREN, A.O., SCHEUERER, G., SHIRANI, E., LESCHZINER, M.A., and RASTOGI, A.K., dans *AFOSR-HTTM- Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, Stanford University, III:1495-1516, 1981.
- [98] ABDELMEGUI, A.M., GOH, S.Y., ILEGBUSI, J., and SPALDING, D.B., dans *AFOSR-HTTM- Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, Stanford University, III:1521-1526, 1981.
- [99] NALLASAMY, M., "Turbulence Models and their Applications to the Prediction of Internal Flows: A Review", *Computers and Fluids*, 15(2):151-194, 1987.
- [100] PATEL, R., "An Experimental Study of a Plane Mixing Layer", *AIAA Journal*, 11(1), 1973.

- [101] THANGHAM, S., HUR, N., "A Highly Resolved Numerical Study of Turbulent Separated Flow Past a Backward Facing Step", *Int. J. Engin. Science*, 29(5):607-615, 1991.
- [102] SPEZIALE, C.G., TUAN, N., "Numerical Solution of Turbulent Flow Past a Backward Facing Step Using a Non-linear  $k-\epsilon$  Model", *Int. J. Engin. Science*, 26(10):1099-1112, 1988.
- [103] "Experimental Data Base for Computer Program Assessment, Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04", *AGARD Advisory Report No. 138*, 1979.

## Annexe A. Évaluation des matrices élémentaires par différentiation numérique

Dans cette annexe on présente une technique d'évaluation des matrices élémentaires par différentiation numérique. Considérons d'abord qu'on doit résoudre une équation différentielle scalaire. La forme variationnelle peut être écrite sous la forme suivante:

$$R(u) = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $R$  est le résidu de l'équation et  $u$  est l'inconnue à déterminer. Notons que le résidu  $R$  contient tous les termes de l'équation à résoudre et qu'il correspond à la forme variationnelle de l'équation.

Le système d'équations est résolu de façon itérative. À chaque itération on dispose des valeurs déterminées à l'itération précédente  $u_0$  et on veut évaluer les corrections  $\delta u$  afin de satisfaire l'équation (A.1). On impose donc que:

$$R(u_0 + \delta u) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Considérons maintenant le développement en série de Taylor pour  $R$  autour du point  $u_0$  qui est la solution courante. L'équation à résoudre devient:

$$R(u_0) + \frac{\partial R}{\partial u} \delta u + \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \frac{\delta u^2}{2} + \dots = 0 \quad (\text{A.3})$$

et si on néglige les termes d'ordre supérieure en  $\delta u$ , on obtient:

$$R(u_0) + \frac{\partial R}{\partial u} \delta u = 0 \quad (\text{A.4})$$

ou bien

$$\frac{\partial R}{\partial u} \delta u = -R(u_0) \quad (\text{A.5})$$

On arrive donc à un système d'équations algébrique dont la matrice est donnée par le terme  $\frac{\partial R}{\partial u}$ , qui représente la différentielle du résidu par rapport à l'inconnue  $u$ . Le membre de droite du système dépende du résidu évalué à l'itération précédente. Le système à résoudre s'écrit alors sous la forme suivante:

$$A_{ij} \delta u_j = b_i \quad (\text{A.6})$$

où

$$A_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \quad (\text{A.7})$$

$$b_i = -R_i \quad (\text{A.8})$$

Ici  $R_i$  dénote le résidu de l'équation  $i$  (on associe une équation à chaque fonction test), et  $u_j$  représente la variable  $u$  associée au noeud  $j$ . Finalement, les coefficients  $A_{ij}$  sont évalués par différentiation numérique:

$$A_{ij} = \frac{R_i(u_0 + \delta u_j) - R_i(u_0 - \delta u_j)}{2 \delta u_j} \quad (\text{A.9})$$

Notons que cette procédure est générale. Elle demeure inchangée peu importe la forme de l'équation différentielle à résoudre et donc elle est indépendante de la forme de l'opérateur intégro-différentiel  $R$ . Remarquons que l'équation (A.5) est rigoureuse lorsque le résidu est une fonction linéaire de la variable  $u$ . Cependant, même si l'équation est non-linéaire, (A.5) représente une bonne approximation de l'équation initiale (A.2) lorsque les correction  $\delta u$  sont suffisamment petites par rapport à la solution  $u_0$ .

Dans le cas des équations de Navier-Stokes le système à résoudre est composé par les équations de mouvement et de continuité. Écrivons le sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} R_u(u, v, p) &= 0 \\ R_v(u, v, p) &= 0 \\ R_p(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où  $R_u$ ,  $R_v$  sont les résidus des équations scalaires de mouvement et  $R_p$  est le résidu de l'équation de continuité. On développe alors les résidus  $R_u$ ,  $R_v$  et  $R_p$  en série de Taylor autour de  $(u_0, v_0, p_0)$  pour ensuite obtenir le système suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_u}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R_u}{\partial v} \delta v + \frac{\partial R_u}{\partial p} \delta p &= -R_u(u_0, v_0, p_0) \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R_v}{\partial v} \delta v + \frac{\partial R_v}{\partial p} \delta p &= -R_v(u_0, v_0, p_0) \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R_p}{\partial v} \delta v &= -R_p(u_0, v_0) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

On peut aussi écrire le système à résoudre sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u(u_0, v_0, p_0) \\ -R_v(u_0, v_0, p_0) \\ -R_p(u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Ici encore une fois les coefficients de la matrice sont évalués par différences centrées.

## Annexe B. Calcul du paramètre de stabilisation $\tau$ et de la taille de l'élément

La méthode GLS ajoute à la forme variationnelle de Galerkin le terme de minimisation du carré du résidu fort de l'équation différentielle à résoudre. Ce terme est pondéré par le paramètre  $\tau$  qui a la forme suivante:

$$\tau = \frac{\delta h}{2|V|} \quad (\text{B.1})$$

Bien que cette expression soit rigoureusement correcte seulement pour le cas des éléments linéaires et des équations scalaires, son application aux équations de Navier-Stokes discrétisées avec des éléments quadratiques a donné des très bons résultats. Dans (B.1), le coefficient  $\delta$  dépend du nombre de Péclet local de l'élément:

$$Pe = \frac{\rho h |V|}{2\lambda} \quad (\text{B.2})$$

Comme on peut le constater les équations à résoudre auront des valeurs différentes du paramètre  $\tau$  car le nombre de Péclet dépend du coefficient de diffusion  $\lambda$  de l'équation de transport en question. Pour l'équation de mouvement on a  $\lambda = (\mu + \mu_T)$ , pour les équations de  $k$  et de  $K$ ,  $\lambda = (\mu + \mu_T / \sigma_k)$ , et pour les équation de  $\epsilon$  et de  $E$ ,  $\lambda = (\mu + \mu_T / \sigma_\epsilon)$ . Finalement, le terme de diffusion dans l'équation de continuité étant nul, on aura pour cette équation  $Pe = \infty$  et donc  $\tau_p$  est donné par:

$$\tau_p = \frac{h}{2|V|} \quad (\text{B.3})$$

Dans ces relations on a noté par  $V$  la norme du vecteur vitesse et par  $h$  la taille de l'élément. Dans la littérature il existe plusieurs possibilités de calculer  $h$  pour les maillages non-structurés. Notons que cette valeur représente la taille de l'élément dans direction de l'écoulement et donc qu'elle est une fonction de la vitesse. Dans nos calcul nous avons considéré pour  $h$  l'expression suivante:

$$h = \max_{i,j} \frac{|(x_i - x_j)u + (y_i - y_j)v|}{|V|} \quad (\text{B.4})$$

Cette valeur est illustrée dans la figure B.1.

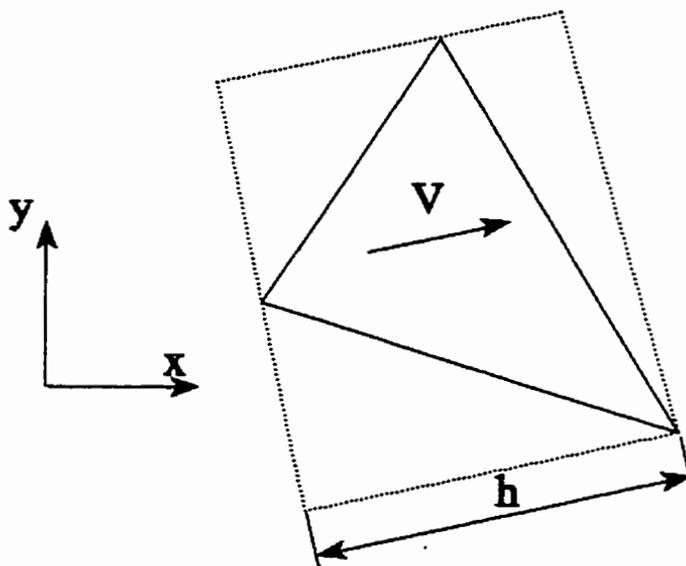


Figure B.1 Calcul de la taille de l'élément en direction de l'écoulement

## Annexe C. La méthode de Lagrangien augmenté pour satisfaire la contrainte d'incompressibilité et la condition de tangence

Considérons qu'on doit résoudre le système formé par les équations de mouvement (3.55), (3.56), l'équation de continuité et l'équation pour la contrainte de tangence (3.57). Le système d'équations peut alors être mis sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} Au + B^T p + C^T f &= b \\ Bu &= g \\ Cu &= q \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

où  $u$  est la vitesse,  $p$  est la pression (multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'incompressibilité) et  $f$  est le multiplicateur de Lagrange pour la condition de débit imposé. Notons que la matrice du système est symétrique par blocs,  $B$  étant la matrice divergence et  $C$  la matrice débit. Dans le membre de droite  $g$  est un terme qui dépend de la divergence du vecteur vitesse (en incompressible  $g=0$ ), tandis que  $q$  dépend du débit de fluide à travers la frontière. Pour une condition de non-pénétration (débit nul) on a  $q=0$ .

La méthode d'Uzawa fait appel à un algorithme itératif dans lequel à chaque étape on résout seulement pour les vitesses, les multiplicateurs de Lagrange  $p$  et  $f$  étant mis à jour afin de satisfaire les contraintes d'incompressibilité et de tangence. L'algorithme d'Uzawa pour la résolution du système (C.1) est le suivant:

1. donner  $p_0, f_0$ 
  - 1.1. résoudre  $Au = b - B^T p_0 - C^T f_0$
  - 1.2. évaluer  $R_p = Bu - g, R_f = Cu - q$
  - 1.3. calculer  $p = p_0 + rR_p, f = f_0 + rR_f$
2. résoudre  $Au = b - B^T p - C^T f$

Ici l'étape 1 est répétée tant que nécessaire pour obtenir une solution convergée. L'inconvénient principal pour l'algorithme d'Uzawa réside dans une mauvaise vitesse de convergence et donc un temps de calcul trop élevé. Ceci est dû au fait que l'algorithme d'Uzawa est un algorithme explicite, à l'étape 1.1 étant utilisées les valeurs de  $p$  et  $f$  de l'itération précédente. On s'attend donc à ce que la vitesse de convergence soit grandement améliorée par un traitement implicite de la pression  $p$  et de la réaction normale  $f$  dans l'étape 1.1. Cela revient à résoudre l'équation suivante:

$$Au = b - B^T p - C^T f \quad (\text{C.2})$$

où

$$p = p_0 + r(Bu - g) \quad (\text{C.3})$$

$$f = f_0 + r(Cu - q)$$

À l'étape 1.1 on a donc à résoudre l'équation suivante:

$$(A + rB^T B + rC^T C)u = b + rB^T g + C^T q - B^T p - C^T f \quad (\text{C.4})$$

ou encore

$$A_r u = b_r - B^T p - C^T f \quad (\text{C.5})$$

où

$$A_r = A + r(B^T B + C^T C) \quad (\text{C.6})$$

$$b_r = b + r(B^T g + C^T q)$$

On arrive alors à la méthode de Lagrangien augmenté (algorithme d'Uzawa implicite) dont l'algorithme est le suivant:

1. donner  $p_0, f_0$ 
  - 1.1. résoudre  $A_r u = b_r - B^T p_0 - C^T f_0$
  - 1.2. évaluer  $R_p = Bu - g, R_f = Cu - q$
  - 1.3. calculer  $p = p_0 + rR_p, f = f_0 + rR_f$
2. résoudre  $A_r u = b_r - B^T p - C^T f$

## Annexe D. Les formulations éléments finis stabilisées dans le cas des équations de transport des variables turbulentes

Comme on a vu dans le chapitre 3.2 que les équations de transport de  $k$  et d' $\epsilon$  sont les suivantes:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)k = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \quad (\text{D.1})$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\epsilon = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{D.2})$$

Pour stabiliser la solution lorsque l'écoulement est dominé par la convection on utilise des schémas à base de différentiation amont dans le sens de l'écoulement (*upwinding*). Comme pour les équations de Navier-Stokes nous avons considéré quatre formulations permettant de stabiliser les équations, soit SU (*upwinding* sur les termes de convection), SUPG-incomplet (*upwinding* sur tous les termes sauf celui de diffusion), SUPG (*upwinding* sur tous les termes de l'équation) et GLS (Galerkin Least-Squares). Les formes variationnelles correspondantes à ces méthodes sont les suivantes:

- équation de transport de  $k$

Galerkin: 
$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u}) w] d\Omega = 0$$

SU: 
$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u}) w] d\Omega + \sum_{\tau=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^{\tau}} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{SUPG-inc:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u}) w] d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u})] \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SUPG:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u}) w] d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k] + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} - \mu_T P(\mathbf{u}) \} \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GLS:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k \cdot \nabla w + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} w - \mu_T P(\mathbf{u}) w] d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla k] + \rho^2 C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_T} - \mu_T P(\mathbf{u}) \} \cdot \\ & \quad \tau \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla w] + \rho^2 C_{\mu} \frac{2k}{\mu_T} w \} d\Omega^{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

- équation de transport d'  $\epsilon$

$$\text{Galerkin:} \quad \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w - \rho C_1 C_{\mu} k P(\mathbf{u}) w] d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} \text{SU:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w - \rho C_1 C_{\mu} k P(\mathbf{u}) w] d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SUPG-inc:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon}}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w - \rho C_1 C_{\mu} k P(\mathbf{u}) w] d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} - \rho C_1 C_{\mu} k P(\mathbf{u})] \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SUPG:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w - \rho C_1 C_\mu k P(u) w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Gamma} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon] + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} - \rho C_1 C_\mu k P(u) \} \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GLS:} \quad & \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon \cdot \nabla w + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} w - \rho C_1 C_\mu k P(u) w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Gamma} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon] + \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} - \rho C_1 C_\mu k P(u) \} \cdot \\ & \tau \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla w] + \rho C_2 \frac{2\epsilon}{k} w \} d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une résolution en variables logarithmiques les équations à résoudre sont les suivantes:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla K \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] (\nabla K)^2 + \mu_T e^{-K} P(u) - \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \quad (\text{D.3})$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla E \right] + \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] (\nabla E)^2 + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) - C_2 \rho e^{E-K} \quad (\text{D.4})$$

Les formes variationnelles associées aux différentes formulations seront alors les suivantes:

- équation de transport de  $K$

Galerkin:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega = 0$$

SU:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega$$

$$+ \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{sum}}} \int_{\Omega^{\epsilon}} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0$$

SUPG-incomplet:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega$$

$$+ \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{sum}}} \int_{\Omega^{\epsilon}} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}] \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0$$

SUPG:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega$$

$$+ \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{sum}}} \int_{\Omega^{\epsilon}} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \} \cdot$$

$$\tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^{\epsilon} = 0$$

GLS:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega$$

$$+ \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{sum}}} \int_{\Omega^{\epsilon}} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla K - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} \} \cdot$$

$$\tau \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla w] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) 2 \nabla K \cdot \nabla w + \mu_T e^{-K} P(u) w$$

$$+ \rho^2 C_{\mu} \frac{e^K}{\mu_T} w \} d\Omega^{\epsilon} = 0$$

- équation de transport de  $E$

Galerkin:

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega = 0$$

SU:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

SUPG-incomplet:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega^e} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}] \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

SUPG:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{dim}}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K} \} \\ & \quad \cdot \tau \mathbf{u} \cdot \nabla w d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

GLS:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K}) \mathbf{w} + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla E \cdot \nabla \mathbf{w}] d\Omega \\
& + \sum_{\epsilon=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^\epsilon} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla E] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) + C_2 \rho e^{E-K} \} \\
& \quad \cdot \tau \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla \mathbf{w}] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) 2 \nabla E \cdot \nabla \mathbf{w} + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) \mathbf{w} \\
& \quad + C_2 \rho e^{E-K} \mathbf{w} \} d\Omega^\epsilon = 0
\end{aligned}$$

Le terme qui contient le gradient au carré de la variable logarithmique peut être associé au effets de convection et il détermine alors une modification de la vitesse de convection. Les équations s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$[\rho \mathbf{u} - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K] \cdot \nabla K = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \nabla K \right] + \mu_T e^{-K} P(u) - \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \quad (\text{D.5})$$

$$[\rho \mathbf{u} - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla E] \cdot \nabla E = \nabla \cdot \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla E \right] + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(u) - C_2 \rho e^{E-K} \quad (\text{D.6})$$

et la vitesse de convection sera:

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \quad \text{pour } K$$

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}) \nabla E \quad \text{pour } E$$

La méthode GLS peut être appliquée aussi en utilisant ces vitesses de convection modifiées dans le calcul du paramètre de stabilisation  $\tau$ . Considérons le cas de l'équation en  $K$ . Le paramètre  $\tau$  basé sur la vitesse  $\mathbf{u}_K$  sera donné par:

$$\tau = \frac{\delta h}{2 |\mathbf{u}_K|} \quad (\text{D.7})$$

où  $\delta$  dépend du nombre de Péclet de l'élément:

$$Pe = \frac{\rho h |u_K|}{2(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})} \quad (D.8)$$

On a donc que

$$Pe = \frac{\rho h |u - \frac{1}{\rho}(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})\nabla K|}{2(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})} \leq \frac{\rho h |u|}{2(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})} + \frac{h |\nabla K|}{2} \quad (D.9)$$

$$Pe \leq Pe_u + \frac{h |\nabla K|}{2} \quad (D.10)$$

Donc le nombre de Péclet varie par rapport à sa valeur basée sur la vitesse  $u$  par au plus  $h |\nabla K| / 2$  qui représente approximativement la variation de  $K$  à l'intérieur de l'élément. Dans les régions où le terme de stabilisation est important ce terme est en général petit par rapport à la valeur  $Pe_u$  et son importance diminue avec l'adaptativité. On s'attend donc à ne pas avoir des différences entre les solutions obtenues avec une ou l'autre des formes pour le paramètre de stabilisation.

Remarquons aussi que, lorsqu'on évalue les termes moindre carré des équations (D.5) et (D.6) sous leur forme linéarisée au niveau du terme de convection, on obtient les équation GLS suivantes:

équation de K:

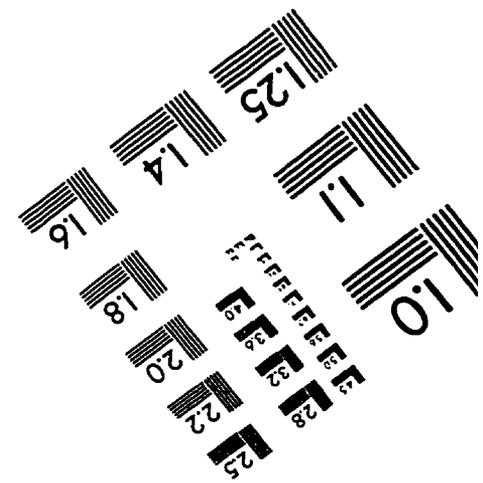
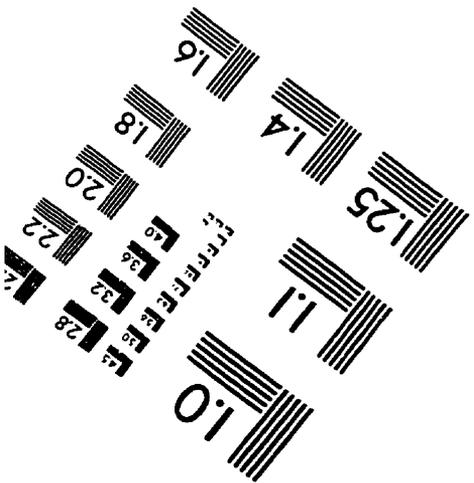
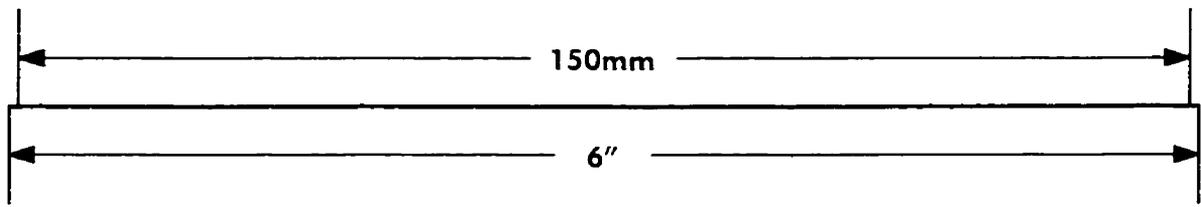
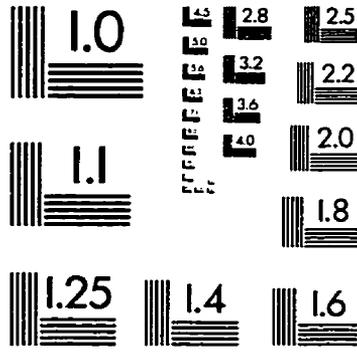
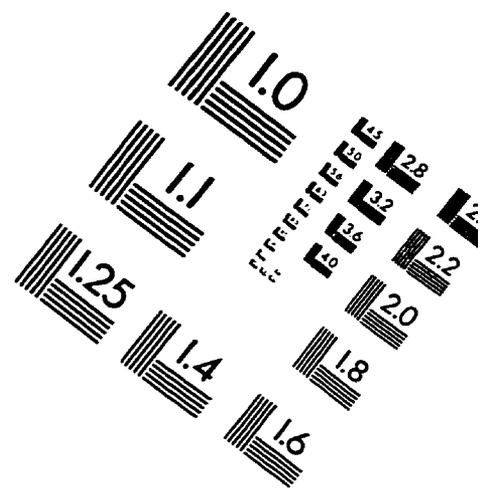
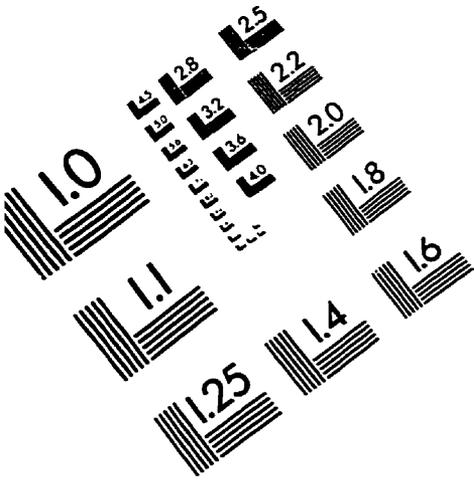
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\rho u \cdot \nabla K - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \{ \rho u \cdot \nabla K - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})(\nabla K)^2 - \mu_T e^{-K} P(u) + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} \} \cdot \\ & \tau \{ \rho u \cdot \nabla w - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla w] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \nabla K \cdot \nabla w + \mu_T e^{-K} P(u) w \\ & \quad + \rho^2 C_\mu \frac{e^K}{\mu_T} w \} d\Omega^e = 0 \end{aligned}$$

équation de E:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K}) w + (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w] d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{\text{face}}} \int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla E - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e})(\nabla E)^2 - \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{E-K} \} \\
 & \quad \cdot \tau \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nabla \cdot [(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla w] - (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_e}) \nabla E \cdot \nabla w + \rho C_1 C_\mu e^{K-E} P(\mathbf{u}) w \\
 & \quad + C_2 \rho e^{E-K} w \} d\Omega^e = 0
 \end{aligned}$$

Notons que maintenant le terme  $(\mu + \mu_T/\sigma_e) \nabla K \cdot \nabla w$  dans la variation du résidu fort n'est plus multiplié par 2 car il provient de la variation d'une forme linéarisée. Les différences sont minimales entre les deux formulations GLS (une basée sur la vitesse  $\mathbf{u}$  comme vitesse de convection et l'autre avec une vitesse de convection  $\mathbf{u}_K$  modifiée) et elles diminuent avec le raffinement du maillage. Nous avons alors opté pour la première forme des équations, car elle comporte moins de non-linéarités.

# TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved