

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

GESTION DES ÉQUIPAGES AÉRIENS  
DURANT LE JOUR D'OPÉRATION

MIRELA STOJKOVIĆ  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
MARS 1998

© Mirela Stojković, 1998.



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37384-3

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

GESTION DES ÉQUIPAGES AÉRIENS  
DURANT LE JOUR D'OPÉRATION

présentée par: STOJKOVIĆ Mirela

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. SMITH Benjamin, T., Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. DESROSIERS Jacques, Ph.D., membre

M. MARIUS Solomon, M., Ph.D., membre externe

# REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, François Soumis, pour le soutien professionnel et financier dont j'ai bénéficié tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier mon collègue, Nicolas Bélanger, pour sa collaboration lors de l'implantation informatique des méthodes de branchement développées dans le cadre de cette thèse.

Je veux également exprimer ma gratitude au personnel du GERAD, et plus particulièrement à Nicole Paradis et à Francine Benoit qui étaient toujours disponibles pour répondre à mes besoins.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont encouragée de mener jusqu'au bout cette expérience inoubliable : le doctorat dans une langue dont je ne connaissais même pas un mot il y a cinq ans.

# RÉSUMÉ

Cette thèse traite le problème de gestion des équipages aériens durant le jour d'opération. Ce problème consiste à réparer le plan d'utilisation du personnel navigant de façon à couvrir un nombre maximum de vols durant une période considérée. Les vols qui doivent être couverts ont, soit l'horaire planifié, soit l'horaire modifié suite à certaines perturbations. Si le bloc mensuel planifié d'un membre d'équipage doit être modifié, le but est de revenir le plus rapidement possible au plan original. Les solutions modifiées doivent respecter les règles imposées par la convention collective de la compagnie aérienne et les règlements gouvernementaux. Enfin, les objectifs de la compagnie doivent être pris en considération. Le problème doit être résolu dans un délai très court car les opérations sont en cours.

Nous avons regroupé les variantes du problème de gestion des équipages aériens en trois types. Le premier type représente le problème où les horaires de vols, soit originaux, soit modifiés suite à des perturbations, sont fixes. Chacun des vols doit être couvert par un ou plusieurs membres d'équipage. Les modifications concernant les activités planifiées pour les membres d'équipage ne peuvent être effectuées que durant une période de temps prédéfinie, dont la durée est d'un ou de plusieurs jours. Au maximum une rotation par membre d'équipage peut être reconstruite. Les rotations modifiées doivent respecter toutes les contraintes qui les concernent. Les blocs mensuels doivent également rester valides. Le deuxième type de problème permet de modifier à la fois les heures de départ de vol et les activités planifiées pour les

membres d'équipage. Les itinéraires d'avion ne peuvent pas être modifiés. Cette restriction est prise en considération par de nouvelles contraintes: les *contraintes de préséance entre les vols*. Le problème considère un seul membre d'équipage à la fois. Au maximum un service de vol (une journée de travail) peut être modifié pour chacun des membres d'équipage considérés. La durée d'un service de vol modifié ne dépasse pas un maximum, qui est spécifié pour chaque membre d'équipage. Ce problème correspond au problème de gestion des horaires de pilote d'une compagnie aérienne. Étant donné que chacun des pilotes est qualifié pour une seule fonction, le problème concernant les pilotes (personnel navigant technique) doit être séparé en plusieurs problèmes de façon à obtenir un problème pour chacune des fonctions. Enfin, les problèmes de troisième type représentent la généralisation des problèmes précédents. La différence entre eux est le nombre de personnes par équipage. Dans ce dernier cas, un équipage comprend plusieurs membres dont les blocs mensuels peuvent être modifiés différemment. Pour s'assurer qu'un vol retardé lors des modifications des blocs planifiés aura la même heure de départ dans chacun des blocs auxquels il appartiendra, des *contraintes de même heure de départ* sont introduites. Ce problème correspond au problème de gestion des horaires d'agent de bord, où chacun des agents de bord est qualifié pour plusieurs fonctions. Les trois types de problème appartiennent à la famille des problèmes déterministes de routage de véhicules et de confection des horaires d'équipage. Les problèmes de cette famille sont fréquemment résolus par des méthodes de décomposition en raison de la grande taille de la plupart des applications. Nous utilisons également la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe (génération de colonnes) jumelée à un processus de séparation et d'évaluation progressive. Les résultats des expérimentations numériques révèlent l'efficacité de la méthodologie de résolution utilisée.

Une première contribution de cette thèse est d'identifier et de définir trois types de problème de gestion des équipages aériens durant le jour d'opération. Une seconde contribution est de formuler ces problèmes d'une manière efficace et de proposer également une approche optimale de résolution pour chacun d'entre eux. Chacune des approches de résolution proposées utilise une technique de séparation et d'évaluation pour obtenir des solutions en nombres entiers. Une troisième contribution est d'implanter et de tester une nouvelle technique de séparation et d'évaluation pour résoudre efficacement le problème du deuxième type. Ensuite, pour résoudre efficacement le troisième type de problème, nous proposons une version améliorée de cette nouvelle technique de séparation et d'évaluation. Enfin, les résultats numériques pour chacun des trois types de problème confirment à la fois l'efficacité des approches utilisées et la qualité des résultats obtenus.

# ABSTRACT

This dissertation treats the operational airline crew scheduling problem. This problem consists in repairing an existing plan of utilization of flight personnel in order to cover the maximum number of flights in the considered period of time. The set of flights which must be covered is either the original planned schedule or a schedule that has been modified because of certain disturbances. If the planned monthly block of a crew member must be modified, the goal is to return as soon as possible to the original plan. The modified solutions must respect the rules imposed by the collective agreement of the airline company and the governmental rules. Finally, the objectives of the airline company must be taken into consideration. The problem must be solved in real-time while the airline operations are in progress.

Three types of operational airline crew scheduling problems were defined in this dissertation. The first type is a problem with a fixed flight schedule. This flight schedule is either the original one or a modification of it. Each flight must be covered by one or several crew members. The modifications to the planned activities for the crew members must be made inside a predefined time period, the duration of which can be from one to several days. No more than one pairing for each crew member can be rebuilt. The modified pairings must respect all the corresponding constraints, and the monthly blocks must remain feasible. In the second type of problem, we allow the simultaneous modification of both the departure times for the considered flights

and the planned activities for the set of considered crew members. The aircraft itineraries can not be modified. To respect this requirement, we have introduced *flight precedence constraints*. The problem considers one crew member at a time. At most a single duty (individual work day) can be modified for each of the crew members considered. A modified personalized duty must not exceed a certain maximum value, which is specified for each of the crew members. This type of problem corresponds to the operational pilot scheduling problem. Specifically, in most large airline companies, technical crew members (pilots) are qualified for a single function (captain, first officer, second officer) and cannot be transferred to another. This specialization divides the overall problem into one problem per function, each consisting in scheduling one pilot with the required qualification for each flight. Finally, the problems of the third type represent a generalization of the previous type of problem. The difference between them is in the crew size. In the third type of problem, a crew consists of several crew members whose monthly blocks can be modified differently. Here we have introduced *same flight departure time constraints*, which ensure that a flight assigned to several crew members during modifications of the planned blocks will have the same departure time in each of these blocks. This type of problem corresponds to the operational flight attendant scheduling problem, where each flight attendant is qualified for several functions. All these three types of problems belong to the class of deterministic vehicle routing and crew scheduling problems. Due to the large size of many of the practical applications, problems in this class are most often solved using decomposition methods. To solve our problems, we use Dantzig-Wolfe decomposition (column generation) embedded into a branch-and-bound scheme. The results of the computational experiments reveal the efficiency of the proposed solution methodology.

A first contribution of this dissertation is to identify and to define three types of operational airline crew scheduling problems. A second contribution is to efficiently formulate these problems and to propose an optimal solution approach for each of them. Each of the proposed solution approaches uses a branch-and-bound strategy to obtain optimal integer solutions. A third contribution of this dissertation is to implement and to test a new branch-and-bound method in order to efficiently solve problems of the second type. Furthermore, to efficiently solve problems of the third type, we developed an upgraded version of this new branch-and-bound method. Finally, the numerical results obtained for each of these three types of problems confirm both the quality of the results obtained and the efficiency of the proposed approaches.

# TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	xi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
CHAPITRE 1 Introduction . . . . .	1
CHAPITRE 2 Le problème de gestion des horaires d'équipage aérien durant les opérations quotidiennes . . . . .	6
2.1 The Operational Airline Crew Scheduling Problem . . . . .	8
2.1.1 Introduction . . . . .	10

2.1.2	The Airline Crew Scheduling Problem . . . . .	11
2.1.3	The Operational Airline Crew Scheduling Problem . . . . .	15
2.1.4	Proposed Model . . . . .	16
2.1.5	Tests and Results . . . . .	33
2.1.6	Conclusion . . . . .	42
	References . . . . .	45

<b>CHAPITRE 3</b>	<b>Gestion simultanée des horaires d'équipage à un seul</b>	
	<b>membre et des horaires de vol durant le jour d'opération . . . . .</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Revue de la littérature . . . . .	52
3.3	Modèle proposé . . . . .	54
3.3.1	Notation . . . . .	55
3.3.2	Formulation mathématique . . . . .	60
3.3.3	Méthode de résolution . . . . .	61
3.4	Études numériques . . . . .	67

3.5	Conclusions et extensions . . . . .	79
<b>CHAPITRE 4 Gestion simultanée des horaires d'équipage à plusieurs</b>		
<b>membres et des horaires de vol durant le jour d'opération . . . . . 82</b>		
4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Modèle proposé . . . . .	86
4.2.1	Notation . . . . .	87
4.2.2	Formulation mathématique . . . . .	92
4.2.3	Méthode de résolution . . . . .	93
4.3	Études numériques . . . . .	103
4.4	Conclusions et extensions . . . . .	131
<b>CHAPITRE 5 Conclusion . . . . . 134</b>		
<b>RÉFÉRENCES . . . . . 137</b>		

# LISTE DES TABLEAUX

2.1	Basic scenarios . . . . .	35
2.2	Computational results for basic scenarios . . . . .	38
2.3	Computational results for additional scenarios . . . . .	40
3.1	Caractéristiques des problèmes . . . . .	69
3.2	Solution qui préserve les itinéraires des avions . . . . .	71
3.3	Solution qui préserve les itinéraires des avions et des équipages . . . . .	71
3.4	Solution après réoptimisation des horaires d'équipage . . . . .	73
3.5	Résultats - valeurs moyennes . . . . .	75
3.6	L'horaire fixé des vols : problèmes résiduels . . . . .	77
3.7	L'horaire fixé des vols : résultats - valeurs moyennes . . . . .	78
4.1	Caractéristiques des problèmes . . . . .	106
4.2	Caractéristiques des tests . . . . .	107

4.3	Solution qui préserve les itinéraires des avions et des équipages . . . . .	108
4.4	Modèle 2: Solution réoptimisée . . . . .	109
4.5	Modèle 2: Caractéristiques du graphe . . . . .	110
4.6	Modèle 2: Contraintes du problème maître . . . . .	111
4.7	Modèle 2: Nouvelle méthode de séparation et d'évaluation . . . . .	114
4.8	Modèle 2: Comparaison des deux méthodes de séparation . . . . .	116
4.9	Modèle 2: Branchement heuristique sur les variables de flot . . . . .	118
4.10	Modèle 2: L'horaire fixé des vols, solution réoptimisée . . . . .	120
4.11	Modèle 2: L'horaire fixé des vols, résultats numériques . . . . .	121
4.12	Modèle 3: Solution réoptimisée . . . . .	125
4.13	Modèle 3: Méthode améliorée de séparation et d'évaluation . . . . .	127
4.14	Modèle 3: Comparaison des deux méthodes de séparation . . . . .	128
4.15	Modèle 3: Branchement heuristique sur les variables de flot . . . . .	129
4.16	Vols résiduels pour les deux modèles . . . . .	130

# LISTE DES FIGURES

2.1 An instance of the problem . . . . .	22
--	----

---

# CHAPITRE 1

## Introduction

Les problèmes reliés aux opérations irrégulières d'une compagnie aérienne sont récemment apparus dans le domaine de la recherche opérationnelle. Les opérations irrégulières d'une compagnie aérienne sont simplement les opérations sous des conditions irrégulières, ce qui signifie que les opérations planifiées ont été affectées par des perturbations, ou que certaines perturbations sont envisagées plus tard dans la journée. Deux aspects majeurs des opérations irrégulières sont le problème de gestion des horaires d'avion et le problème de gestion des équipages aériens. Ce dernier problème faisant l'objet de cette thèse est appelé le *problème de gestion des horaires d'équipage aérien durant le jour d'opération*. La gestion des équipages aériens représente la partie la plus difficile du système, étant donné la complexité des nombreuses règles qui doivent être respectées et du temps de résolution très restreint.

En réalité, l'exécution des horaires d'équipage planifiés est fréquemment affectée par des perturbations. Par conséquent, les structures planifiées doivent souvent être réorganisées. La structure du nouveau plan opérationnel affecte inévitablement la performance financière de la compagnie et le niveau de satisfaction du personnel navigant devant s'adapter à ce plan modifié. Malgré la complexité du problème et la nécessité de réagir rapidement face à des perturbations, dans la plupart des

compagnies aériennes les opérateurs en temps réel utilisent actuellement une technologie primitive de résolution où papier et crayon prédominent. Ils prennent alors des décisions surtout à partir de leur intuition et de leur expérience.

Jusqu'à ce jour beaucoup d'efforts ont été consacrés au développement du meilleur plan possible, soit le plan qui fournit la structure initiale pour les opérations à venir. Étant donné que les changements durant le cours des opérations peuvent transformer radicalement le plan, le développement d'un modèle permettant de s'ajuster rapidement aux changements et de proposer des solutions satisfaisantes tant pour la compagnie que pour le personnel navigant est très important pour les compagnies aériennes. Malgré l'importance de ce problème, il n'y a pas beaucoup de publications sur ce sujet. Une revue de la littérature pertinente est présentée au Chapitre 3.

Cette thèse définit trois problèmes de gestion des horaires d'équipage durant le jour d'opération. Pour chacun des problèmes, nous proposons une approche optimale de résolution, les premières de ce type dans la littérature. Au Chapitre 2, nous définissons le problème de gestion des équipages durant le jour d'opération et présentons les différences majeures entre ce problème et le problème de planification. Ceci nous permet d'établir une approche optimale efficace pour résoudre ce type de problème. Notons que le problème de gestion des équipages est traité séparément du problème de gestion des avions. Ce qui signifie que les horaires de vol et les itinéraires d'avion, tant planifiés que modifiés, sont fixes et font partie de l'ensemble des données d'entrée. Les objectifs sont de couvrir, à coût minimum, un nombre maximal de vols durant une période considérée avec les membres d'équipage disponibles, tout en réduisant autant que possible les changements des horaires planifiés

pour les membres d'équipage. Nous permettons de modifier au maximum une rotation par personne. Afin de générer des rotations modifiées, le problème classique de construction des rotations et le problème de fabrication des horaires mensuels sont résolus simultanément. Nous proposons une méthode optimale pour résoudre ce nouveau type de problème. Le problème est formulé comme un problème de type partitionnement. La méthode de résolution utilise la génération de colonnes jumelée à un processus de séparation et d'évaluation progressive. La procédure proposée permet de résoudre consécutivement plusieurs scénarios du même problème et de choisir celui dont la solution est jugée la meilleure dans les circonstances considérées. La méthodologie proposée a été testée sur plusieurs jeux de données.

Au Chapitre 3 nous introduisons une nouvelle approche de gestion des équipages durant le jour d'opération. La principale différence par rapport à l'approche précédente est que cette fois nous traitons simultanément le problème de gestion des horaires de vol et des horaires d'équipage. Ainsi, contrairement au problème précédent où les horaires de vol étaient fixés à l'avance, cette nouvelle approche nous permet de modifier les horaires d'équipage en retardant, au besoin, certains des vols considérés. Toutes les modifications concernant les équipages sont faites au niveau d'une seule journée de travail (service de vol). Les itinéraires d'avion représentent une donnée d'entrée fixée. Notre objectif est de couvrir par des membres d'équipage disponibles un nombre maximal de vols appartenant au jour d'opération considéré, de façon à minimiser tant les changements d'horaires de vol que les changements des services de vol planifiés pour le jour suivant. Les nouveaux services de vol personnalisés doivent respecter la contrainte de durée maximale d'un service de vol. Les *contraintes de préséance entre les vols* sont introduites dans le problème afin de respecter les itinéraires d'avion. Le problème est formulé comme un problème

de type réseau multi-commodités à coût minimum, avec des fenêtres de temps et des contraintes supplémentaires. Il s'agit d'une formulation non linéaire, en nombres entiers, où chaque membre d'équipage est considéré comme une commodité distincte. La méthode de résolution utilise la décomposition de Dantzig-Wolfe de même qu'une technique de séparation et d'évaluation pour obtenir une solution optimale en nombres entiers. Le problème maître contient les contraintes de recouvrement des vols et les nouvelles contraintes de préséance entre les vols. Les sous-problèmes, qui sont des problèmes de plus court chemin avec fenêtres de temps et des coûts linéaires sur les variables de temps, sont résolus de façon optimale en utilisant un algorithme spécialisé de programmation dynamique. Plusieurs jeux de données ont servi pour l'expérimentation numérique. Ils ont tous été résolus avec succès en un temps raisonnable. L'approche proposée s'applique aux équipages à un seul membre (problème de pilotes) et également aux équipages à plusieurs membres lorsque tous les membres d'un équipage sont considérés comme une seule unité. Dans ce dernier cas, tous les membres appartenant au même équipage selon le plan resteront ensemble tout au long de la journée d'opération considérée.

Le cas général du problème de gestion des équipages à plusieurs membres est abordé au Chapitre 4. Chacun des vols considérés doit être couvert par un nombre préfixé de membres d'équipage. Un membre d'équipage est considéré comme une unité, ce qui nous permet d'apporter des modifications différentes aux membres appartenant à un même équipage selon le plan. Comme dans le modèle précédent, toutes les modifications concernant les équipages sont faites au niveau d'un seul service de vol. Un nouveau type de contraintes s'ajoute à l'ensemble des contraintes du modèle concernant les équipages à un seul membre. Il s'agit de *contraintes de même heure de départ*, qui représentent la principale nouvelle caractéristique par rapport

au modèle présenté au Chapitre 3. Ces contraintes doivent assurer qu'un vol qui appartient à plusieurs services de vol personnalisés (le nombre de services de vol est égal au nombre requis de membres d'équipage pour couvrir ce vol) aura la même heure de départ pour chacun d'entre eux. Le problème est formulé de la même façon que le problème du Chapitre 3 à la seule différence que les contraintes de même heure de départ sont ajoutées au problème maître. Nous considérons deux modèles différents correspondant à deux fonctions de coût pour les vols non couverts. Pour résoudre efficacement ces deux modèles, nous proposons deux nouvelles techniques de séparation et d'évaluation. Enfin, les deux modèles ont été testés sur plusieurs problèmes. L'expérimentation numérique confirme l'efficacité des deux stratégies de séparation et évaluation sur des problèmes de taille réelle.

## CHAPITRE 2

# Le problème de gestion des horaires d'équipage aérien durant les opérations quotidiennes

Ce chapitre décrit le problème de gestion des équipages aériens durant les opérations quotidiennes lorsqu'il faut modifier les horaires d'un certain nombre d'employés suite à des perturbations. Le problème doit être résolu en temps réel. La façon dont les horaires planifiés sont modifiés a d'importantes implications financières pour la compagnie aérienne. L'objectif est de couvrir, à coût minimum, tous les segments de vol d'une période considérée, soit la période opérationnelle, avec les équipages disponibles, tout en minimisant les changements pour les membres d'équipage. La durée de la période opérationnelle dépend du volume des perturbations et du délai dans lequel le problème doit être résolu. Le délais peut être très court lorsque les opérations planifiées ont été déjà affectées par des perturbations ou moins restrictif lorsque certaines perturbations sont envisagées plus tard dans la journée. Des décisions concernant la durée de la période opérationnelle requièrent le jugement basé sur l'intuition et l'expérience des opérateurs en temps réel. L'approche proposée nous permet de modifier au maximum une seule rotation complète par

membre d'équipage. Pour générer les rotations modifiées, le problème classique de construction des rotations et le problème de fabrication des horaires mensuels sont résolus simultanément. Les rotations modifiées doivent respecter les contraintes concernant le problème de construction des rotations, le problème de construction des horaires mensuels et également des contraintes additionnelles qui s'appliquent lors des opérations irrégulières. Pour résoudre ce problème, nous proposons une approche optimale dans laquelle les horaires de vol sont fixes et représentent une donnée d'entrée du problème. Le problème est formulé comme un problème non linéaire de réseau multi-commodités, en nombres entiers et avec des variables de ressource. Une commodité particulière est associée à chacun des membres d'équipage considérés. La résolution du problème utilise la méthode de génération de colonnes jumelée à un processus de séparation et d'évaluation progressive. Le problème maître est défini comme un problème de type partitionnement. Les sous-problèmes sont des problèmes de plus court chemin sur un graphe avec contraintes de ressource. L'approche proposée nous permet de résoudre le problème de gestion des équipages durant le jour d'opération et le problème de planification de rotations par le même optimiseur. Les étapes utilisées pour définir un cas particulier du problème à résoudre nous permettent également de résoudre consécutivement plusieurs scénarios du même problème et de choisir celui dont la solution est jugée la meilleure dans les circonstances considérées. De bons résultats, à la fois pour le temps de résolution et la qualité des solutions, ont été obtenus sur un ensemble de problèmes test. Cet article paraîtra sous peu dans *Transportation Science*.

## **2.1 The Operational Airline Crew Scheduling Problem**

**Mirela Stojković**

**François Soumis**

GERAD and École Polytechnique de Montréal

Montréal (Québec) Canada H3T 1V6

**Jacques Desrosiers**

GERAD and École des Hautes Études Commerciales

Montréal (Québec) Canada H3T 1V6

## Abstract

This paper describes the operational airline crew scheduling problem and represents a first published attempt to solve it. The problem consists of modifying, as necessary, personalized planned monthly assignments of airline crew members during day-to-day operations. It requires the covering at minimal cost of all flight segments from a given time period with available crew while minimizing the disturbances of crew members. To generate modified pairings for selected crew members, both the classical crew pairing problem and the problem of constructing personalized monthly assignments must be treated simultaneously. An optimization approach is proposed for the problem in which the flight schedule is fixed and represents input data. The problem is mathematically formulated as a Set Partitioning type problem and a column generation method embedded in a branch-and-bound search tree has been implemented to solve it. Good results, from the point of view of both solution times and achieved objectives, have been obtained on generated test problems. Since the solution time is reasonable, several different scenarios of the same problem may be solved. A final decision can then be made by considering all scenarios and choosing the one whose solution is the best in the given situation.

**Key Words:** Airline, Crew Scheduling, Column Generation

### 2.1.1 Introduction

The crew scheduling problem is an economically significant topic for airline companies. Crew costs constitute one of the largest components of direct operating costs and represent hundreds of millions of dollars a year for large airline companies. Airline crew schedule construction is very difficult because of the size of the problem and the complexity of collective agreements and governmental rules that must be respected. The problem is usually solved in two parts. First, a manpower plan is developed based on the planned schedule. Second, during day-to-day operations, the plan is constantly modified to compensate for all the schedule disruptions, aircraft substitutions, crew absences, etc., which occur in practice. Consequently, the crew scheduling problem can be viewed as having two phases: the planning and the operational phase.

In spite of the fact that all the changes that occur during day-to-day operations may drastically alter the plan, the research conducted so far directs its attention only toward developing the best possible plan. Therefore the term *airline crew scheduling problem*, when used in the literature, refers only to the planning phase of the problem consisting of the *crew pairing problem* and the *monthly block assignment problem*. This paper represents a first published attempt to solve the problem of modifying individual monthly work schedules for airline crew members during the operational phase of the planned schedule. This problem will be called *the operational airline crew scheduling problem*.

The contribution of this paper lies in the development of an optimization approach for solving the operational airline crew scheduling problem, in which all the

given flight segments are covered by available crew without violating a complex set of rules. In order to generate pairings for specific crew members, an approach which simultaneously solves both the crew pairing and monthly block assignment problems is implemented. The proposed approach solves a problem scenario in which the flight schedule is fixed and it does not allow for any supplementary flight delays. The first results are encouraging: the test problems were successfully solved in reasonable time. Unfortunately, due to the fact that the actual decision process does not keep track of disturbances and day-to-day decisions, it was not possible to make any comparisons between the results presently obtained by airline operators and the ones obtained by the proposed methodology.

The paper is organized as follows: The first part of the paper (Section 2.1.2) describes the airline crew scheduling problem while the second part (Section 2.1.3) gives a description of the operational airline crew scheduling problem. The third part (Section 2.1.4) presents a mathematical formulation and a column generation approach for solving the operational problem. The last part (Section 2.1.5) discusses results obtained on various test problems.

### **2.1.2 The Airline Crew Scheduling Problem**

The planning phase is usually executed in two consecutive steps:

1. Construction of a set of pairings from the given set of flight segments;
2. Construction of personalized monthly blocks from the given set of pairings obtained in the first step.

### 2.1.2.1 The crew pairing problem

Before the problem is described, some terms which will often be used in the paper are defined. A *flight segment* represents a nonstop flight between a pair of cities. If the crew members under consideration operate a given flight, then that segment is considered to be *active*. A *deadhead* flight segment is a passive segment used to transport crew members between stations, either by ground or air transportation. A *duty*, or individual work day, is a sequence of flight segments separated by connections. A *crew pairing* is a sequence of duties separated by rest periods, worked by a crew leaving and returning to the same crew home base.

The crew pairing problem consists in generating a set of minimal cost crew pairings covering all the given flight segments. The set of pairings must respect all the rules of the collective agreement and all the appropriate air traffic regulations, as well as some soft constraints which are not steadfast rules but, rather, preferences introduced to increase the quality of the solution if the cost of doing so is not too high. The resulting constraints may affect duty construction (briefing and debriefing time, minimum connection time, maximal duration of a duty, etc.), restrict each pairing (maximal duration of a pairing, minimal duration of the rest period, etc.), or be imposed on the overall crew schedule (distribution of pairings between airline bases according to the production days, etc.).

There are various methods, ranging from some heuristic pairing generators to optimal approaches, proposed to solve the airline crew pairing problem. This problem is usually formulated as a Set Partitioning problem (or Set Covering problem), where

variables correspond to feasible pairings. Some of the proposed approaches are restricted to relatively small problems where the set of feasible pairings can be generated *a priori* (Gerbracht, 1978; Marsten, Muler and Killion, 1979; Marsten and Shepardson, 1981; Ryan and Garner, 1985). To solve real-life problems, many approaches restrict either the number of pairings generated or the size of the corresponding Set Partitioning problem or both (Baker, Bodin and Fisher, 1985; Ball and Roberts, 1985; Gershkoff, 1989; Anbil *et al.*, 1991). Additional approaches are presented in Graves *et al.* (1993), Wedelin (1993) and Hoffman and Padberg (1993). Column generation based approaches have recently been suggested by Crainic and Rousseau (1987), Lavoie, Minoux and Odier (1988), Barnhart *et al.* (1994) and Desaulniers *et al.* (1997b).

### 2.1.2.2 Construction of personalized monthly blocks

A *personalized monthly block* is a sequence of activities carried out by one employee in one standardized month (a standard month could be a period of more or less than a month). These activities are pairings, which were constructed in the previous step, rest periods, annual vacations, transition activities, reserve blocks, desiderata and other periods of unavailability. Definitions of these activities follow. A *rest period* is a time period of a certain minimum length which must be assigned to an employee before the maximum number of consecutive work hours is achieved. *Annual vacations* are rest periods assigned to employees on an annual basis. *Transition activities* are activities overlapping two standard months, that is, activities which have been scheduled at the end of the previous month and which should finish in the considered month. *Reserve blocks* are periods in which an employee must be available to replace, if necessary, other employees who may be unable to carry out their scheduled tasks.

*Desiderata* are requests made by an employee before the construction of monthly blocks, such as specific pairings, rest periods, etc. *Other periods of unavailability* are all the other activities involving neither flight nor rest, such as medical appointments, training sessions, union activities, etc.

During the construction of personalized monthly blocks, each crew member's qualifications and pre-assigned activities must be taken into account, as well as the rules of the collective agreement (minimum number of days off, necessary patterns for days off, maximum credited time, etc.) and all the appropriate air traffic regulations (the composition of the crew assigned to the pairing: crew member qualifications, the number of crew members performing each function on the plane, etc.). In addition, there are some soft constraints which must be considered such as pairing variety, frequency to specific destinations, even distribution of work and benefits, etc.

The monthly block assignment problem consists in generating a set of monthly personalized blocks covering as many pairings as possible from the set of all pairings to be worked during the month, while maintaining efficient crew utilization. Uncovered pairings are assigned to reserve crew members.

There are three different ways of constructing the monthly blocks: bidline, rostering and preferential bidding. In a *bidline problem*, non-personalized blocks covering all pairings are first constructed and next, each employee chooses one according to his/her seniority (Glanert, 1984). In a *rostering problem*, the construction of personalized blocks takes into account pre-assigned activities. Recent literature includes Ryan (1992), Caprara *et al.* (1995), Gamache and Soumis (1997) and Gamache *et al.* (1997a). In a *preferential bidding problem*, personalized blocks are constructed while

respecting strict seniority (Moore, Evans and Noo, 1978; Byrne, 1988; Gamache *et al.*, 1997b).

### **2.1.3 The Operational Airline Crew Scheduling Problem**

Once the planning phase has been completed, the airline carrier has to deal with difficulties appearing during the implementation phase of the developed plan. This next step is the operational airline crew scheduling problem.

Disturbances in carrying out airline schedules occur frequently during the operational phase. These disturbances may be classified, according to their sources, either as disturbances originating from the flight dispatcher center (revised flight scheduled times, rerouted flights, canceled flights, new flights, change of planned aircraft type for a flight, etc.) or internal crew disturbances (no-show crews, late crews, unplanned absences, etc.). The crew operators' office constantly receives all the information relative to changes in the flight plan as well as the information about crew disturbances. In both cases, crew operators have to check planned monthly blocks in order to figure out whether the disturbances under consideration require a reorganization of these blocks. These verifications are usually performed by manual inspection. Further, if a need to perform some modifications in the planned blocks is detected, one or several solutions must be generated quickly. These modifications are usually based only on the operator's intuition and his/her experience. The new solution must be valid, that is, it must be in accordance with the collective agreement and governmental regulations.

Even though all these modifications may drastically change the plan during day-to-day operations, until now, a great deal of effort was spent on developing the best possible plan, providing a basic framework for operations to follow. However, since the plan is frequently affected by modifications, the manner in which the new operational plan is constructed affects both the carriers' economic results and the satisfaction of the flight personnel with their modified blocks. Even though an optimization model is employed to produce the monthly plan, the advantage of having such a good initial solution can be drastically reduced due to applied modifications. Considering the combinatorial nature of the operational airline crew scheduling problem, the question of the quality of proposed modifications in respect to the objectives of the airline company arises. Accordingly, the next logical step is to develop an approach which comprises an optimization model able to deal with any kind of disturbances appearing during the operational phase, while respecting the appropriate constraints.

In spite of the fact that all airline companies are faced with the problem of daily operations, there are no published papers dealing with this problem. The methodologies actually employed to handle this problem are developed internally within companies.

#### **2.1.4 Proposed Model**

The overall objective of this research is to develop an optimization method to solve the operational airline crew scheduling problem in the shortest possible time. The operational airline crew scheduling problem consists in modifying personalized monthly blocks such that all tasks (planned and new) from the considered period of

time are covered at minimal cost with available crew. For our purposes, a *task* will correspond to one crew member requirement for one flight segment. This means that a flight segment which must be covered by  $x$  crew members will be considered as  $x$  different tasks. The term *new task* may represent a flight segment with a modified schedule or itinerary or aircraft type as well as a new flight segment which is added to the schedule.

During the planning phase, the first step is to generate a set of non-personalized pairings. These pairings are then used to construct monthly plans for specific crew members, that is, personalized monthly blocks. Since the operational airline crew scheduling problem requires the immediate production of pairings for specific crew members, we are faced with a new crew pairing problem requiring the construction of *personalized crew pairings*. In order to generate pairings for specific crew members, an approach which simultaneously solves both the problem of pairing construction and personalized monthly blocks construction is required, that is:

- A set of new pairings must be constructed to replace the set of planned ones which have become non-feasible due to given disturbances;
- These new pairings must be inserted in already existing planned personalized monthly blocks.

New personalized pairings must respect all constraints regarding both the airline crew pairing problem and the personalized monthly block problem, as well as some additional constraints specifically related to the operational problem. More details about these constraints are presented in the next section.

#### 2.1.4.1 Objectives and problem constraints

The primary objectives when modifying personalized monthly blocks will be defined as follows:

- Cover at minimum cost all tasks considered in the problem;
- Remain as close as possible to the structure of the planned monthly blocks.

As we have stated earlier, the constraints that must be respected during the modification of personalized monthly blocks may be divided into three groups:

- *Constraints related to the airline crew pairing problem:* Each new pairing must be valid in regard to constraints mentioned in the planning phase;
- *Constraints regarding the construction of personalized monthly blocks:* An existing personalized monthly block must remain valid after the replacement of a planned pairing by a new one;
- *Operational constraints:* These are constraints resulting from the fact that some activities assigned to a specific crew member in the planning phase may need to remain assigned to him/her in the operational phase. Among these activities we find the activities already performed since the beginning of the standardized month, scheduled days off for each crew member and possibly some other scheduled activities fixed for a specific crew member in his/her monthly block. Operational constraints may also include constraints concerning utilization of different types of reserve, the constraint related to the latest return time to the home base of the modified personalized pairing (measured relatively to the return time of the scheduled personalized pairing), etc. These operational constraints differ from one company to another.

#### 2.1.4.2 Selection of an instance of the problem

When comparing the planning problem with the operational problem, certain differences become apparent, such as:

- *The structure:* During the planning phase of the airline crew scheduling problem, the set of all available crew members and all the information and constraints for the standardized month are considered. However, during the operational phase, the problem must be solved at a more local level, considering primarily the parts of the schedule currently affected by disturbances;
- *The available computing time:* Since the airline crew scheduling problem is solved only once per standardized month, the amount of time available to produce a solution is not the restrictive factor for airline crew planners. On the contrary, when disturbances in the planned schedule appear, crew operators are confronted with the task of making quick decisions. Consequently, during the operational phase the problem needs to be solved in real-time;
- *The objectives:* While in the planning phase, the objectives are defined in terms of cost minimization and efficient crew utilization. During the operational phase, an additional goal is to minimize the disturbances of the crew members in terms of the number of rescheduled tasks within a personalized monthly block.

Our goal is to produce good solutions quickly. Since the operational problem is a real-time problem, its dimensions must be small enough to be solved in reasonable time. On the other hand, in order to allow the generation of good solutions, the

dimension of the problem must be sufficiently large to involve enough tasks which could be rescheduled. Accordingly, the following three steps are proposed in order to select an instance of the problem:

**Step 1.** Choose the *operational period* according to the volume of disturbances and the amount of time available to produce the solution. The operational period includes the period of time in which the disturbances occur. Only within this period can the changes of planned pairings be done.

**Step 2.** Determine the *set of crew candidates* which will be treated. Most airline companies currently use a predetermined procedure, defined by the collective agreements, to prescribe the exact order that must be followed when looking for a crew member who could replace a planned one. The use of such a usually very complicated and highly restrictive approach is required in order to speed up the solution process when manually solving the operational problem. However, this approach doesn't take into account the actual situation very well, but is rather a strict set of rules that significantly reduce the liberty of operators while trying to solve the operational problem. This leaves no space for optimization.

The approach that we propose is to choose as candidates all the crew members whose monthly blocks are directly influenced by the given disturbances and additionally, some others whose planned blocks could be reorganized in order to improve the reassignments. It is important to mention that without this additional set of crew members, the reassignment problem is often infeasible. These additional candidates are: (1) crew members whose planned monthly blocks include pairings belonging to the operational period that pass through or close to the airports where new flight

segments begin, (2) active crew members without scheduled activities during the day(s) of the operational period, and (3) reserve crew members.

**Step 3.** Determine the *working period* as a function of the operational period and the set of candidates. Since one of the objectives is to minimize the number of rescheduled tasks in one's planned monthly block, the approach proposed in this paper is to allow changes regarding no more than one pairing for each candidate. If a given planned pairing, which has already begun, must be modified, it must be replaced by exactly one new pairing. In this case, the subsequent planned pairing must remain unchanged. However, if the end of the current pairing has been delayed (a modification not imposed by our model) and the rest period between this pairing and the subsequent one is no longer sufficient, then the current pairing is considered to be frozen, while the subsequent one has to be modified. The beginning and the end of the working period depend on the operational period and the set of candidates. These times are defined respectively by the earliest beginning time and latest ending time of all selected pairings.

All flight segments which are completely within the operational period are considered as *active tasks* in the rest of the paper. All the other flight segments (completely or partially outside the operational period) must remain unchanged, that is, they must remain assigned to the planned crew members. These flight segments will be called *frozen tasks*. While the activities starting before the beginning of the operational period (activities completely or partially done) must be considered as frozen tasks, activities after the operational period are also considered frozen in order to try to remain as close as possible to the original planned personalized blocks.

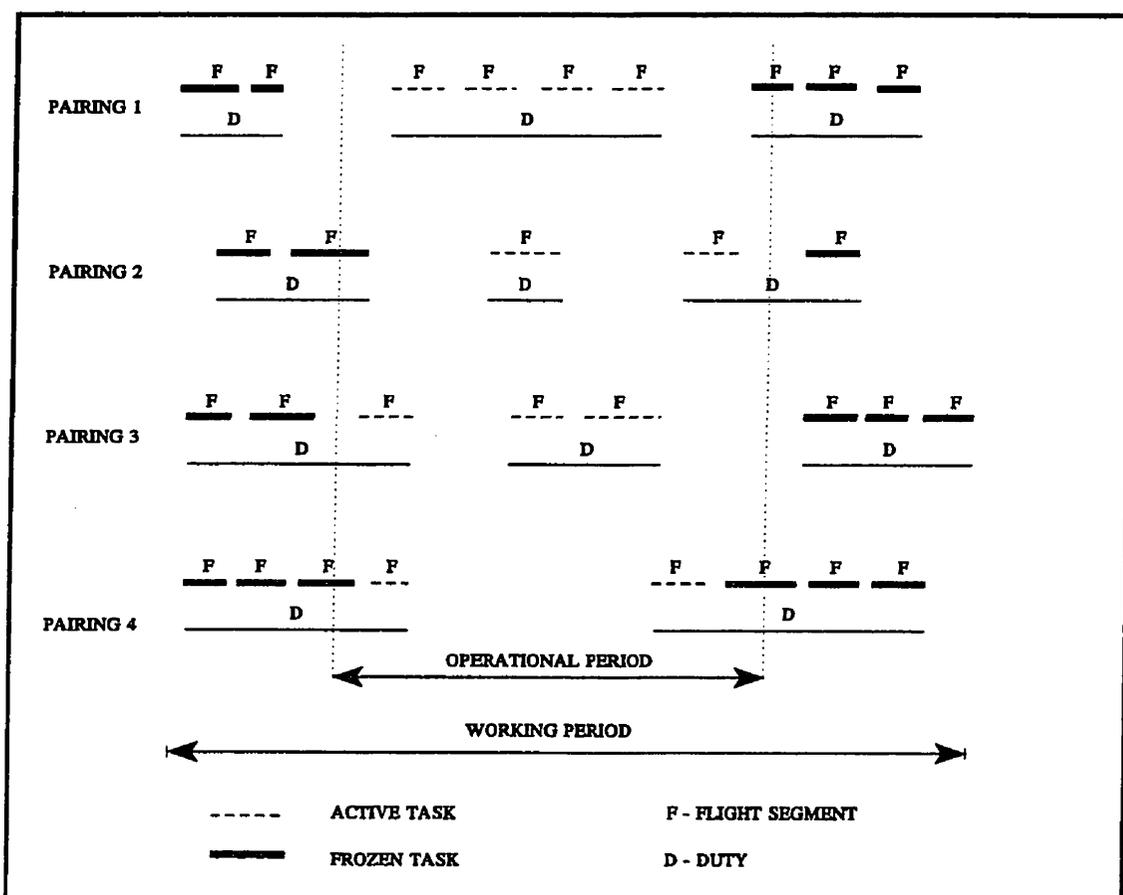


Figure 2.1 – *An instance of the problem*

The operational and working periods, some personalized pairings and certain appropriate active and frozen tasks are represented in Figure 2.1.

In the case of large volume disturbances, a longer operational period is needed in order to find a solution for the given situation. This implies that more than one pairing in one's personalized monthly block may require rescheduling. Consequently, the number of active tasks could increase significantly, causing a serious increase in solution time. In order to respond quickly in such a situation, the entire operational period may be decomposed into several smaller overlapping periods, involving only

one pairing per crew member, that will be consecutively treated. The overlapping between consecutive time periods will ensure a better transition between the parts of the solution constructed in consecutive calls to the solver.

### 2.1.4.3 A mathematical formulation

The problem can be mathematically formulated as an integer nonlinear multi-commodity network flow model with resource variables as described in Desaulniers *et al.* (1997b) in the context of the crew pairing problem. This paper describes how the integer nonlinear formulation can be solved using a generalization of the Dantzig-Wolfe decomposition principle embedded in a branch-and-bound search tree. In the case of the operational airline crew scheduling problem, a specific commodity is associated with each crew member belonging to the set of candidates. The decomposition approach is equivalent to the following column generation scheme which comprises a coordinating master problem and a specific pairing generator (subproblem) for each crew candidate. **The master problem** is defined as the following Set Partitioning type model:

$$\text{Minimize } \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} c_p^k \theta_p^k + \sum_{s \in FUM} c_s^+ Y_s^+ + \sum_{s \in FUM} c_s^- Y_s^- \quad (2.1)$$

subject to:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} a_{fp}^k \theta_p^k - Y_f^+ + Y_f^- = 1, \quad \forall f \in F \quad (2.2)$$

$$\underline{b}_m \leq \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} b_{mp}^k \theta_p^k - Y_m^+ + Y_m^- \leq \bar{b}_m, \quad \forall m \in M \quad (2.3)$$

$$0 \leq Y_s^+ \leq b_s^+, \quad 0 \leq Y_s^- \leq b_s^-, \quad \forall s \in F \cup M \quad (2.4)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (2.5)$$

$$\theta_p^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k \quad (2.6)$$

$$\theta_p^k \text{ binary}, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k. \quad (2.7)$$

where:

- $F$  : Set of tasks to be covered exactly once,
- $K$  : Set of crew candidates,
- $\Omega^k$  : Set of feasible new pairings for crew candidate  $k \in K$ ,
- $M$  : Set of global operational constraints,
- $a_{fp}^k$  : binary constant equal to 1 if pairing  $p$  for crew candidate  $k$  covers task  $f$ , and 0 otherwise,
- $\theta_p^k$  : binary variable which takes value 1 if pairing  $p$  is assigned to crew candidate  $k$ , and 0 otherwise,
- $b_{mp}^k$  : Contribution to global constraint  $m$  of pairing  $p$  for crew candidate  $k$ ,
- $\underline{b}_m, \bar{b}_m$  : Lower and upper bounds on global constraint  $m$ , respectively,
- $Y_s^+, Y_s^-$  : Surplus and slack variables, respectively,
- $b_s^+, b_s^-$  : Upper bounds on surplus and slack variables, respectively,
- $c_p^k$  : Cost of pairing  $p$  for crew candidate  $k$ ,
- $c_s^+, c_s^-$  : Costs associated with the surplus and slack variables, respectively.

The binary variable  $\theta_p^k$ , which is also called a *path* variable, is defined for each feasible path  $p$  in the space-time oriented graph  $G^k$  (defined below). Constraints (2.2) require that each task in  $F$  be covered exactly once. If  $f \in F$ , variables  $Y_f$  allow for the undercovering of a task ( $Y_f^- = 1$ ) or its overcovering ( $Y_f^+ = 1$ , *i.e.*, deadheading on considered task at a certain cost). When solving the problem for technical crew members (cockpit personnel) the undercovering of flights is not allowed ( $Y_f^- = 0$ ,  $f \in F$ ), since it is impossible to operate a flight if any of its corresponding tasks (the number of tasks is equal to the number of technical members in a complete crew) are not covered. To prohibit the undercovering of flights, the cost associated with corresponding slack variables must be fixed at an extremely high value ( $c_f^- = M$ ,  $M \gg 0$ ). If not all the given tasks can be covered, then the problem is infeasible. However, the undercovering of flights may be permitted when considering cabin personnel, since a flight can usually be operated even if the cabin crew is not complete. A solution which does not cover all given tasks must be examined by crew schedulers in order to determine if all flights can be operated. If not, the solution is infeasible. Relations (2.3) impose a set of global constraints linking several or all the path variables. If  $m \in M$ , supplementary variables  $Y_m^+$  and  $Y_m^-$  allow the violation of these global operational constraints. Constraints (2.5) require that each crew candidate must have a personalized pairing.

The linear relaxation (2.1)-(2.6) of the master problem is solved at each node of a branch-and-bound tree to obtain a lower bound. Since the number of feasible pairings (variables) for each crew member is usually huge, a column generation approach is applied to solve it. Hence, at each column generation iteration a restricted master problem considering only a relatively small set of path variables is solved. New path variables having negative reduced costs are generated by the subproblems, using the

dual variables derived from the restricted master problem solution to define the reduced costs. These variables are added to the current set of variables of the restricted master problem. This iterative process continues until the subproblems cannot further generate negative reduced cost variables. If no variables (columns) with negative reduced cost are found, then the solution of the current restricted master problem is optimal for the linear relaxation of the master problem.

**The subproblems** (column generators) are modeled as shortest path problems on a graph with resource variables. The resource variables are defined to model local constraints which only restrict the construction of a single pairing. These variables verify the feasibility of a partial path in the graph and store information used to compute the cost of such a path. The cost associated with each path is the marginal cost of the new pairing in the master problem. More details about the column generation approach and constrained shortest path problems are presented in Desrosiers *et al.* (1995).

The subproblem for crew candidate  $k$  is defined over the graph  $G^k = (V^k, A^k)$ , where  $V^k$  is the set of nodes and  $A^k$  is the set of arcs. This is a space-time oriented graph whose nodes represent airport locations at different moments and whose arcs represent various crew activities. The subproblem for crew candidate  $k$  can be written as the following shortest path problem with resource constraints (Desaulniers *et al.*, 1997b):

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{(i,j) \in A^k} g_{ij}^k(T_i^k) X_{ij}^k + \sum_{i \in V^k \setminus \{o(k)\}} g_i^k(T_i^k) \sum_{j: (j,i) \in A^k} X_{ij}^k \\
& - \sum_{(i,j) \in A_f^k} \alpha_f X_{ij}^k - \sum_{(i,j) \in B_m^k} \beta_m b_{m,ij}^k X_{ij}^k - \gamma^k
\end{aligned} \tag{2.8}$$

subject to:

$$\sum_{j: (o(k),j) \in A^k} X_{o(k),j}^k = 1 \quad , \tag{2.9}$$

$$\sum_{i: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k - \sum_{i: (j,i) \in A^k} X_{ji}^k = 0 \quad , \quad \forall j \in N^k \tag{2.10}$$

$$\sum_{i: (i,d(k)) \in A^k} X_{i,d(k)}^k = 1 \quad , \tag{2.11}$$

$$X_{ij}^k (f_{ij}^{kr}(T_i^k) - T_j^{kr}) \leq 0 \quad , \quad \forall r \in R^k, \forall (i,j) \in A^k \tag{2.12}$$

$$a_i^{kr} \leq T_i^{kr} \leq b_i^{kr} \quad , \quad \forall r \in R^k, \forall i \in V^k \tag{2.13}$$

$$X_{ij}^k \text{ binary} \quad , \quad \forall (i,j) \in A^k. \tag{2.14}$$

where:

- $A_f^k \subseteq A^k$  : Subset of arcs in  $G^k$  containing task  $f$ ,
- $B_m^k \subseteq A^k$  : Subset of arcs in  $G^k$  involved in the definition of constraint  $m$  for crew candidate  $k$ ,
- $o(k)$  : Source node of graph  $G^k$ ,
- $d(k)$  : Sink node of graph  $G^k$ ,

- $N^k = V^k \setminus \{o(k), d(k)\}$  : Subset of nodes in  $G^k$ ,  
 $R^k$  : Set of resources used on graph  $G^k$ ,  
 $X^k = (X_{ij}^k), (i, j) \in A^k$  : Network flow variables defined on the arcs of  $G^k$ ,  
 $T_i^k = (T_i^{kr}), r \in R^k, i \in V^k$  : Resource variables defined on the nodes of  $G^k$ , each of them being restricted to the resource interval  $[a_i^{kr}, b_i^{kr}]$ ,  
 $f_{ij}^{kr}(T_i^k)$  : Resource extension function from node  $i$  to node  $j$  for resource  $r$ ,  
 $\alpha, \beta, \gamma$  : Vectors of dual variables associated with constraint sets (2.2), (2.3) and (2.5), respectively,  $\alpha = \{\alpha_f | f \in F\}$ ,  
 $\beta = \{\beta_m | m \in M\}$ ,  $\gamma = \{\gamma^k | k \in K\}$ .

The first component of the cost function,  $g_{ij}^k$ , represents the cost function of using arcs  $(i, j) \in A^k$ . The second component,  $g_i^k$ , represents the cost function of visiting nodes  $i \in V^k \setminus \{o(k)\}$ . These two components depend on the resource vector  $T_i^k$  and are usually nonlinear functions.

Constraints (2.9)-(2.11) represent a path structure for each crew candidate  $k$ : the availability of a crew candidate at the origin node (constraint (2.9)), a demand of the same crew candidate at the destination node (constraint (2.11)) and the flow conservation equations at nodes of  $N^k$  (constraint (2.10)). Constraints (2.13)-(2.14) define respectively bounded resource variables and flow variables. These two types of decision variables are linked in (2.12). All the constraints (2.9)-(2.14) are called *local constraints* since they only restrict the construction of a single pairing for crew candidate  $k$ .

As shown in Desaulniers *et al.* (1997a), when graph  $G^k$  is acyclic, a shortest path problem with resource variables, known to be NP-hard, can be solved by pseudo-polynomial time algorithms if  $g_{ij}^k$ ,  $g_i^k$  and  $f_{ij}^{kr}$  are non-decreasing functions. This is usually the case in airline applications. If not, the corresponding constraints are relaxed and non-valid paths generated by the shortest path problem are eliminated, *i.e.* they are not transferred to the master problem. The next section describes the structure of graph  $G^k$  and the resources used in our problem.

#### 2.1.4.4 Modeling aspects

When solving the crew pairing problem, a pairing can begin from one particular base on each day of the considered planning period. In order to respect the constraint on the maximum duration of the pairing and to avoid the use of a maximum duration resource, one subgraph is defined for each of those days. Consequently, the number of subgraphs corresponding to one particular base is equal to the number of days in the considered period of time. In the operational airline crew scheduling problem, subproblems are initially related to crew candidates. If there are no restrictions on the starting time, nor on the ending time of a personalized pairing, then a new pairing can start on any day of the working period and its duration is determined only by the value defined in the collective agreement for planning purposes. In this case, the maximum number of possible subgraphs corresponding to the considered crew candidate is equal to the number of days covered by the working period. In the case where the beginning of a personalized pairing is fixed, only one graph corresponding to the day when the new personalized pairing must begin is created for that crew candidate. The duration of one such pairing is determined by the collective agreement.

Finally, if both the beginning and the end of the new pairing are defined, once again only one graph is created for the considered crew candidate. However, in this case the duration of the pairing is predetermined.

The subproblem modelling comprises two components:

1. A graph that adequately represents the tasks to be covered and some local constraints on the feasible paths;
2. Local constraints on pairing construction modeled with resource variables.

**A duty based graph:** A separate graph is constructed for each crew candidate because of the different frozen tasks assigned to them. Tasks that can be found in the graph for one specific crew candidate are divided in three groups: frozen tasks, active tasks for which a crew candidate is qualified and which are not in conflict with his/her frozen tasks and operational constraints, and deadhead tasks on company flights or on other carriers' flights.

Since a majority of rules affecting pairing feasibility concern duties, a sequence of valid duties, instead of a sequence of tasks, is used to construct pairings. Even though the construction of duties starting from a set of flight segments is a highly constrained problem, it is rather simple to enumerate all the feasible ones since a duty seldom contains more than five flight segments. By using a duty based graph, the rules concerning duty feasibility do not need to be handled explicitly. Moreover, it is necessary to have information concerning one complete duty (for example, total duration of a duty) in order to verify some pairing constraints. More details about the construction of valid crew pairings starting from the set of all valid duties can be found in Lavoie, Minoux and Odier (1988).

The different node types in graph  $G^k$  are:

- The *source nodes*: A source node corresponds to the beginning of a pairing; one source node is defined for each subgraph.
- The *sink nodes*: A sink node corresponds to the end of a pairing; a pairing that begins at one specific source node must finish at a sink node corresponding to the same subgraph.
- The *duty nodes*: A duty is associated with two duty nodes, one representing the departure time of the duty and the other representing its arrival time.

The different arc types of  $G^k$  are:

- The *departure arcs*: A departure arc links a source node to a duty node having a departure station and departure time compatible with the base and day of the subgraph. These arcs represent the beginning of a pairing.
- The *arrival arcs*: An arrival arc links a duty node to the sink node of a given subgraph if the arrival station of the duty node corresponds to the base of the subgraph.
- The *duty arcs*: A duty arc links two duty nodes corresponding respectively to the beginning and ending times of the same duty.
- The *rest arcs*: A rest arc links two duty nodes between which a rest period can occur, the first node corresponding to the end of a duty and the second one corresponding to the beginning of another duty. The first duty must end at the same station as where the second duty begins.
- The *waiting arcs*: A waiting arc links two consecutive duty nodes which begin at the same station. A sequence of these arcs represents the continuation of the rest period. These arcs are introduced in order to reduce the size of the network since they allow the removal of a number of rest arcs.

There are three different types of costs:

- *Real cost* of the new pairing: credited time cost, transportation cost between the airport and the hotel, deadhead cost, per diem and hotel cost, etc.
- *Penalties*: These costs are used to penalize the violation of global constraints.
- *Bonuses*: It is possible to suggest a certain activity to an employee. For example, if one activity assigned to a particular crew candidate by the monthly plan is not influenced by considered disturbances, one may prefer to keep it assigned to the same crew candidate in the modified solution in order to reduce the number of rescheduled tasks.

**Local constraints:** Constraints of the *crew pairing problem* must all be satisfied. Some of them are implicitly satisfied by the graph structure, for example the constraints within a duty period. Others are modeled as resources that are accumulated along a path. A resource represents a constraint-specific unit of measurement, such as credited time of one pairing, time away from base, etc. The resources for our operational airline crew scheduling problem are the same as the ones for the airline crew pairing problem and are specific to an airline company. Cost and extension functions are usually non-decreasing functions. Examples of resources for crew scheduling problems are given in Desaulniers *et al.* (1997b) in the airline context while Desrochers and Soumis (1989) provide some in the urban transit context.

All but two sets of constraints related to the construction of the *monthly block assignment problem* are implicitly respected by the proposed model. This is because, for a given crew candidate, only part of the selected pairing within the operational period can be changed by the proposed model. All other tasks, either already performed (with or without delays) or assigned to him/her by the monthly plan, are

frozen. Examples of constraints already satisfied are the minimum number of days off, the necessary pattern of days off, appropriate traffic regulations concerning the monthly assignment problem, etc. Constraints which are not implicitly respected are the maximum credited and block times by monthly block. They are treated the same way and only the first of the two is explained next. A constraint on the maximum credited time per monthly block is converted into a constraint on the maximum credited time per modified pairing. The maximum credited time allowed for a modified pairing for crew candidate  $k$  is the difference between the maximum credited time allowed for a monthly block and the planned credited time for all the unmodified pairings of crew candidate  $k$ . In spite of the fact that these are local constraints, they are modeled in our implementation as **global constraints** of the master problem. The idea is to allow the use of the same optimizer for both the crew pairing and operational airline crew scheduling problems. In the pairing context, there is a global constraint on the maximum credited time allowed for each crew base. In the operational problem, we consider that each crew candidate has his own specific crew base. Thus, global pairing constraints on the maximum credited and block times for each base are directly used as global operational constraints on the maximum credited and block times allowed for each crew candidate.

### 2.1.5 Tests and Results

**Data and scenarios:** The input data are pairings of a US carrier. Only cockpit personnel of a specific aircraft type, positioned at the carrier's unique base, is considered in the test problems. Since an airline company solves the operational problem separately for each of its bases and knowing that cockpit personnel is qualified for

only one specific aircraft type, the problem defined so far reflects a realistic situation. As we have already mentioned, all the constraints and resources applied to the crew pairing problem for the considered air carrier are also applied to the operational crew scheduling problem. To keep a monthly block valid after the replacement of the considered planned pairing by a new one, constraints on the maximum credited and block times for a new pairing are imposed. In addition, there is a set of operational constraints concerning the end of a new pairing. These constraints state that a new personalized pairing must terminate (return to the base) with the same flight segment as the planned one. The beginning and the duration of the operational period, as well as the set of candidates, are determined using the proposed methodology for determining an instance of the problem.

Disturbances considered in the test problems originate from both the crew dispatcher center and internal crew disturbances. They are:

- *Three delayed flights*: As a consequence of these delays, all crew members to whom these flights have been assigned to are late for their next planned flight segments;
- *One indisposed crew member*: The crew member has become indisposed away from the base and needs to be replaced by another one.

Two test problems were generated from the given input data. In the first problem, called Problem 1, a crew consists of a single crew member, while in Problem 2 there are two crew members per crew. Two basic scenarios were created for each of these two problems. The working period is the same for both scenarios, while the operational periods are of different durations. In the first scenario, the length of the operational period is one day, and the tasks from both the beginning and the end of planned pairings are frozen. Thus, the operational constraints related to the end

of a new pairing are implicitly satisfied. Corresponding test problems are Test 1.1 and Test 2.1. In the second scenario, the end of the operational period corresponds to the end of the working period. However, to satisfy the operational constraints concerning the end of a new pairing, the last flight segment from a planned pairing is frozen for each active crew candidate considered in the problem. The second scenario corresponds to test problems Test 1.2 and Test 2.2. These four test problems were created in order to explore how the solution time changes as a function of the number of subgraphs and the number of active tasks involved in a problem. The information relative to the test problems is presented in Table 2.1.

Table 2.1 – *Basic scenarios*

Problems	Problem 1		Problem 2	
Working Period (Number of Days)	13		13	
Crew Size (Number of Members)	1		2	
Number of Disturbed Blocs	4		7	
Number of Crew Candidates	9		16	
Number of Active Crew Candidates	7		14	
Number of Reserve Crew Candidates	2		2	
Scenarios	Test 1.1	Test 1.2	Test 2.1	Test 2.2
Operational Period (Number of Days)	1	7	1	7
Number of Tasks in Working Period	106	106	210	210
Number of Frozen Tasks	91	48	182	96
Number of Active Tasks	15	58	28	114

A total of 106 flight segments is considered in each test problem. Two of these flight segments must be covered by a single crew member (flight segments previously assigned to the indisposed crew member), while the others must be covered by a complete crew. Thus, the corresponding number of tasks in the working period is equal to 106 for Problem 1 where a complete crew consists of a single member and to 210 for Problem 2 which has two members in a complete crew.

**Optimizers:** The problems are solved using the GENCOL optimizer (version 3.0), which employs a column generation procedure within a branch-and-bound search tree to obtain integer solutions. This optimizer has been successfully used to solve different types of routing and scheduling problems, such as the airline crew pairing problem (Desaulniers *et al.*, 1997b), the bus crew scheduling problem (Desrochers and Soumis, 1989; Ribeiro and Soumis, 1991; Rousseau and Desrosiers, 1995) and the vehicle routing problem with time windows (Desrochers, Desrosiers and Solomon, 1992). Linear programs are solved using the CPLEX 3.0 optimizer. GENCOL 3.0 and CPLEX 3.0 are both incorporated within ALTITUDE, an airline operations management system used to solve crew pairing problems (Desrosiers *et al.*, 1995). Computational experiments were run on a HP9000/715 workstation (115.1 specint92, 138.7 specfp92) and solution times are expressed in seconds.

To accelerate the solution process, tests are performed using a heuristic approach which consists in early branching. An early branching strategy is conceived to keep improving the solution of the linear relaxation while undertaking the search for an integer solution. More details about this acceleration strategy can be found in (Gamache and Soumis, 1997).

**Results for basic scenarios:** The main computational results and relative information are presented in Table 2.2. The first block of the table gives information about the size of the master problem, that is, the total number of rows of the master problem. This number is equal to the sum of the number of active tasks, twice the number of active crew candidates (to account for frozen beginnings and ends of new pairings) and three times the number of crew candidates (to account for the maximum credited and block times, and the convexity constraint for the assignment of a

pairing to each crew candidate). The second block gives information about the network: the number of nodes, the number of arcs and the number of subgraphs. While the number of subgraphs for an active crew candidate is equal to one (the beginning of a pairing is frozen), the number of subgraphs for a reserve crew candidate is equal to the number of days on which a pairing, composed exclusively of active tasks and appropriate deadhead flights, can start from the home base at which this candidate is located. Potential deadhead flights may be chosen from a set of flight segments not required to be covered by using a methodology appropriate to each airline company. An efficient methodology for dynamically selecting deadhead flights can also be found in Barnhart, Hatay and Johnson (1995).

The third block, which relates to the process of solving the linear relaxation, includes the value  $Z_{LP}^H$  of the linear relaxation of the problem (which might be suboptimal due to early branching) and the total time required to obtain that value, respectively. The fourth block regards the search for an integer solution. This block contains the number of branching nodes and the value  $Z_{IP}$  of the integer solution. The next block provides information about the overall solution: the number of generated columns, the time spent solving the master problem, the time spent solving the subproblems and the total solution time. The last block gives information about the computer and optimizers used.

In the four test problems, all active tasks were covered only by active crew candidates. The number of branching nodes is equal to zero in all but the fourth problem, where there were 5 sets of branching decisions. This can be explained by the fact that the solution to the linear relaxation of the Set Partitioning problem is often integer for small sized instances (Hoffman and Padberg, 1993). The fact that,

in the operational crew pairing problem, a lot of columns (personalized pairings) contain some frozen tasks also contributes to obtaining an integer solution as the solution of the linear relaxation of the problem.

Table 2.2 – *Computational results for basic scenarios*

Problems	Problem 1		Problem 2	
Scenarios	Test 1.1	Test 1.2	Test 2.1	Test 2.2
<b>Size of Master Problem</b>				
Number of Rows	56	99	104	190
<b>Network Information</b>				
Number of Nodes	526	1363	966	2179
Number of Arcs	840	3589	1567	6031
Number of Subgraphs	14	23	21	30
<b>Linear Relaxation</b>				
$Z_{LP}^H$	39497.00	39296.00	79007.00	79097.65
$CPU_{TOT}$ (s)	5.76	202.39	23.12	810.57
<b>Integer Solution</b>				
Number of Branch-and-Bound Nodes	0	0	0	5
$Z_{IP}$	39497	39296	79007	78910
<b>Global Information</b>				
Total Number of Generated Columns	231	978	430	6115
$CPU_{MP}$ (s)	0.14	7.17	0.36	83.65
$CPU_{SP}$ (s)	5.98	233.45	28.20	1118.00
$CPU_{TOT}$ (s)	7.21	242.06	30.42	1207.19
Computer	HP 9000/715 (115.1 specint92, 138.7 specfp92)			
Optimizers	GENCOL 3.0/CPLEX 3.0			

The global information part shows that all the test problems were solved in reasonable times, ranging from a few seconds to 20 minutes. However, changes in solution times among the problems are significant. There are two possible factors explaining this phenomena: the number of subgraphs and the number of active tasks considered in the problem. The increase in the number of subgraphs leads to a larger

number of shortest path problems to be solved at each column generator iteration, which in turn increases the solution time. On the other hand, as the number of active tasks increases, networks become larger and less restrictive and hence, more potential paths must be evaluated while constructing shortest paths for each subgraph.

When comparing both scenarios of the same problem (Table 2.2), it is obvious that the solution time of the second scenario is significantly greater than that of the first one (approximately 4 minutes versus 7 seconds for Problem 1, and 20 minutes versus 30 seconds for Problem 2). This serious increase in solution times (approximately 34 and 40 times, respectively) is due to an increase in the number of active tasks (from 15 to 58 for Problem 1, and from 28 to 114 for Problem 2, that is approximately 4 times) as well as the number of corresponding subgraphs (from 14 to 23 for Problem 1, and from 21 to 30 for Problem 2, which corresponds to an increase of 64% for Problem 1 and of 43% for Problem 2).

**Additional scenarios:** In order to examine how the increase in the number of subgraphs influences the solution time, a new set of three scenarios was generated from Test 2.2. These three scenarios were created by varying the number of reserve crew candidates while keeping unchanged the number of active crew candidates and the number of tasks (active and frozen). The difference between these three new scenarios relatively to the previous ones lies in the fact that reserve crew candidates, if they are considered by the scenario, must be used in the final solution. Indeed, the first scenario, named Test 2.2a, does not include any reserve crew candidates. Since the number of active crew candidates is equal to 14, the corresponding number of subgraphs is also 14 (one subgraph per active crew candidate, as described earlier). Test 2.2b and Test 2.2c comprise one and two reserve crew candidates, respectively. Consequently,

the corresponding number of subgraphs augmented, compared to Test 2.2a, by the number of reserve crew candidates (which is equal to 1 for Test 2.2b and to 2 for Test 2.2c) multiplied by the number of days on which a reserve crew candidate can start a new pairing from the base (which is equal to 8 for both scenarios). The solution times obtained on the new test problems and other appropriate information are presented in Table 2.3.

Table 2.3 – *Computational results for additional scenarios*

Additional scenarios	Test 2.2a	Test 2.2b	Test 2.2c
Number of Rows	184	189	194
Number of Subgraphs	14	22	30
Solution times			
$CPU_{MP}$ (s)	80.73	111.68	91.93
$CPU_{SP}$ (s)	626.17	951.37	1211.29
$CPU_{TOT}$ (s)	710.47	1068.02	1309.92

Table 2.3 shows that, while the number of subgraphs of Test 2.2c increased by 114% compared to Test 2.2a, the total solution time increased by 84%. When comparing Test 2.2b and Test 2.2a, an increase of 57% in the number of subgraphs resulted in an increase of 50% in the total solution time. Thus, the results presented in Table 2.3 show a less than linear relation between the number of subgraphs and the total solution time.

In order to examine how the increase in the number of active tasks influences the total solution time, further comparisons are made between the scenarios presented in Table 2.3 and the appropriate ones from Table 2.2. When comparing Test 2.2a with Test 1.1, we notice that in both scenarios the number of subgraphs is equal to 14, while the number of active tasks changes from 15 (Test 1.1) to 114 (Test 2.2a),

that is approximately 8 times. The corresponding total solution time increased from slightly more than 7 seconds to slightly more than 700 seconds, that is approximately 100 times. When comparing Test 2.2b, Test 1.2 and Test 2.1, which have a similar number of subgraphs (22, 23 and 21 respectively) and a different number of active tasks (the number of active tasks for Test 2.2b is approximately twice the number of active tasks for Test 1.2 and four times the number of active tasks for Test 2.1), a significant increase in the total solution time is observed once again. Namely, the total solution times of Test 2.2b, Test 1.2 and Test 2.1 are approximately 1068, 242 and 30 seconds respectively, that is, the solution time of Test 2.2b is more than 4 times the total time of Test 1.2 and approximately 35 times the total time of Test 2.1. Hence, as the number of active tasks increases, the solution time of subproblems increases more than quadratically. Thus, between two possible factors (the number of subgraphs and the number of active tasks) influencing the total solution time, the one with a much stronger influence is the number of active tasks considered in the problem.

An additional remark may be made regarding the solution time. The results presented in both Table 2.2 and Table 2.3 reveal that a great majority of the computational time is dedicated to subproblems solution. Hence, future efforts should be concentrated on bigger problems (with more active tasks) in order to accelerate the subproblems solution time. In the case of big volume disturbances requiring a large operational period and having a large number of active tasks, the decomposition of the initial problem, as proposed in Section 2.1.4.2, may be applied and tested.

Finally, we can look at the effect of the size of the operational period on obtained solutions. Test 1.1 and Test 2.1 scenarios were defined such that both the

beginning and the end of personalized pairings for active crew candidates were fixed. In Test 1.2 and Test 2.2 scenarios, the working period terminates at the same time as the operational period and hence, only the beginning of the pairings for active crew candidates was fixed. A comparison between the results of two scenarios of the same problem reveals that, in both cases, the solution of the second scenario (Test 1.2 and Test 2.2) is slightly less costly than the solution of the first scenario (Test 1.1 and Test 2.1). However, in both Problem 1 and Problem 2, the solution of the second scenario, compared to the solution of the first one, comprises more changes in the structure of the new blocks for some crew candidates. Thus, the possibility to change the size and the position of the operational period related to the working period gives an opportunity for crew operators to produce several solutions for the considered problem. It is up to them to decide which of these solutions is the best one and to choose it as the solution of the given problem.

### **2.1.6 Conclusion**

In this paper we have studied the operational airline crew scheduling problem. The problem consists in modifying personalized planned monthly blocks in order to cover at minimal cost all flight segments from the considered period of time with available crew while minimizing the disturbances of crew members. The flight schedule which has been modified due to considered disturbances represents fixed input data of the model, which means that the flights considered cannot be further delayed in order to solve the crew problem. If the problem is feasible, the proposed approach allows the rebuilding for each crew member of the crew pairing belonging to the operational period. If not, a search for a feasible solution may be continued

by allowing some supplementary flight delays. This defines another research area for the operational crew scheduling problem.

A column generation method has been successfully implemented to solve this type of problem. Even though small problems could be solved by enumerating *a priori* all valid personalized pairings and then solving corresponding Set Partitioning problems, a lot of work should be done in order to define all the criteria that a personalized pairing must respect to be valid. On the other hand, most of the rules and constraints are already incorporated in an existing crew pairing optimizer based on a column generation method. The modeling approach described in this paper allows us to use the same optimizer to solve both the crew pairing and the operational airline crew scheduling problems. The second advantage of proposed column generation method over *a priori* enumeration is that it can also be applied to larger problems, where *a priori* enumeration of feasible pairings is impossible. Good results, from the point of view of both solution time and achieved objectives, have been obtained on test problems. The proposed steps used to define an instance of the problem allow the generation of different scenarios starting from the same input data. Since the solution time is reasonable, several different scenarios of the same problem may be solved by varying the size of the operational period. Different scenarios may also be generated by changing the number of considered candidates. A final decision may be made by considering all those scenarios and choosing the one whose solution seems to be the best in the given situation.

This paper represents the first attempt to solve the operational airline crew pairing problem in which both the crew pairing problem and the problem of constructing personalized monthly blocks must be treated simultaneously while respecting

additional operational constraints. More tests must be conducted in order to explore how the solution time changes according to the size of the problem. If the solution times of larger problems increase significantly, some additional acceleration strategies should be introduced in order to reduce them. These strategies should mainly tackle the solution process of the subproblems since most of the solution time of the test problems is spent solving subproblems. Also, another approach where the cost function incorporates not only real costs and penalties, but also bonuses, may be tested in the future. The purpose of these bonuses is to encourage the assignment of certain tasks to appropriate crew members during optimization rather than fixing them in advance. This approach would hopefully produce a solution that provides a compromise between the real cost of a solution and the quality of the solution in terms of the structure of the newly constructed personalized blocks.

**Acknowledgments:** This research was supported by the Quebec Government (Programme Synergie du Fonds de Développement Technologique) and by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. The authors also wish to thank the Editor and a referee whose suggestions have improved the paper.

## References

- [1] ANBIL, R., GELMAN, E., PATTY, B. and TANGA, R. (1991). Recent Advances in Crew Pairing Optimization at American Airlines, *Interfaces* **21**, 62-74.
- [2] BAKER, E.K., BODIN L.D. and FISHER, M. (1985). The Development of a Heuristic Set Covering Based System for Air Crew Scheduling, *Transportation Policy Decision Making* **3**, 95-110.
- [3] BALL, M. and ROBERTS, A. (1985). A Graph Partitioning Approach to Airline Crew Scheduling, *Transportation Science* **19**, 107-126.
- [4] BARNHART, C., JOHNSON, E.L., ANBIL, R. and HATAY, L. (1994). A Column Generation Technique for the Long-Haul Crew Assignment Problem, *Optimization in Industry 2: Mathematical Programming and Modeling Techniques in practice*, T.A. Ciriani and R. Leachman (eds.), John Wiley and Sons, New York, 7-22.
- [5] BARNHART, C., HATAY, L. and JOHNSON, E.L. (1995). Deadhead Selection for the Long-Haul Crew Pairing Problem, *Operations Research* **43**, 491-499.
- [6] BYRNE, J. (1988). A Preferential Bidding System for Technical Aircrew, *AGIFORS Proceedings XXVIII*, 87 - 99.
- [7] CAPRARA, A., FISCHETTI, M., TOTH, P. and VIGO, D. (1995). Models and Algorithms for the Crew Rostering Problem, Technical Report, DEIS, University of Bologna.

- [8] CRAINIC, T.G. and ROUSSEAU, J.M. (1987). The Column Generation Principle and the Airline Crew Scheduling Problem, *INFOR* **25**, 136-151.
- [9] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., IOACHIM, I., SOLOMON, M.M., SOUMIS, F. and VILLENEUVE, D. (1997a). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Fleet Management and Logistic*, G.Laporte (eds.).
- [10] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., DUMAS, Y., MARC, S., RIOUX, B., SOLOMON, M.M. and SOUMIS, F. (1997b). Crew Pairing at Air France, *European Journal of Operational Research* **97**, 245-259.
- [11] DESROCHERS, M. and SOUMIS, F. (1989). A Column Generation Approach to the Urban Transit Crew Scheduling Problem, *Transportation Science* **23**, 1-13.
- [12] DESROCHERS, M., DESROSIERS, J. and SOLOMON, M.M. (1992). A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Operations Research* **40**, 342-354.
- [13] DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M.M. and SOUMIS, F. (1995). Time Constrained Routing and Scheduling, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Volume 8 on Networks, Elsevier Science Publishers B.V., 35-139.
- [14] GAMACHE, M. and SOUMIS, F. (1997). A Method for Optimally Solving the Rostering Problem, in *Operations Research in the Airline Industry*, Gang Yu (eds.), Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 124-157.

- [15] GAMACHE, M., SOUMIS, F., MARQUIS, G. and DESROSIERS, J. (1997a). A Column Generation Approach for Large Scale Aircrew Rostering Problems, *Operations Research* (forthcoming).
- [16] GAMACHE, M., SOUMIS, F., VILLENEUVE, D., DESROSIERS, J. and GÉLINAS, É. (1997b). The Preferential Bidding System at Air Canada, *Transportation Science* (forthcoming).
- [17] GERBRACHT, R. (1978). A New Algorithm for Very Large Crew Pairing Problems, *AGIFORS Proceedings XVIII*, 315-341.
- [18] GERSHKOFF, I. (1989). Optimizing Flight Crew Schedules, *Interfaces* **19**, 29-43.
- [19] GLANERT, W. (1984). A Timetable Approach to the Assignment of Pilots to Rotations, *AGIFORS Proceedings XXIV*, 369-391.
- [20] GRAVES, G.W., McBRIDGE, R.D., GERSHKOFF, I., ANDERSON, D. and MAHIDHARA, D. (1993). Flight Crew Scheduling, *Management Science* **39**, 736-745.
- [21] HOFFMAN, K.L. and PADBERG, M. (1993). Solving Airline Crew Scheduling Problems by Branch-and-Cut, *Management Science* **39**, 657-682.
- [22] LAVOIE, S., MINOUX, M. and ODIER, E. (1988). A New Approach for Crew Pairing Problems by Column Generation with an Application to Air Transportation, *European Journal of Operational Research* **35**, 45-58.
- [23] MARSTEN, R.E., MULLER, M.R. and KILLION, C.L. (1979). Crew Planning at Flying Tiger: A Successful Application of Integer Programming, *Management Science* **25**, 1175-1183.

- [24] MARSTEN, R.E. and SHEPARDSON, F. (1981). Exact Solution of Crew Scheduling Problems Using Set Partitioning Model: Recent Successful Applications, *Networks* **11**, 165-177.
- [25] MOORE, R., EVANS, J. and NOO, H. (1978). Computerized Tailored Blocking, *AGIFORS Proceedings XVIII*, 343-361.
- [26] RIBEIRO, C. and SOUMIS, F. (1991). A Column Generation Approach to the Multiple Depot Vehicle Scheduling Problem, *Operations Research* **42**, 41-52.
- [27] ROUSSEAU, J.M. and DESROSIERS, J. (1995). Results Obtained with Crew-Opt, a Column Generation Method for Transit Crew Scheduling, Proceedings of the Sixth International Workshop on Computer-Aided Scheduling of Public Transport, Lisbonne, Portugal, 1993, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 430, J.R.Daduna et al. (eds.), 349-358.
- [28] RYAN, D.M. and GARNER, K.M. (1985). The Solution of Air-Crew Scheduling Problems for Air New Zealand, *Proceedings of the 21st Annual Conference of O.R.S.N.Z.*, 42-48.
- [29] RYAN, D.M. (1992). The Solution of Massive Generalized Set Partitioning Problems in Aircrew Rostering, *Journal of the Operational Research Society* **43**, 459-467.
- [30] WEDELIN, D. (1993). Efficient Algorithms for Probabilistic Interference, Combinatorial Optimization and the Discovery of Causal Structure from Data, Ph.D. Dissertation, department of Computer Sciences, Chalmers University of technology, Göteborg, Sweden.

# CHAPITRE 3

## Gestion simultanée des horaires d'équipage à un seul membre et des horaires de vol durant le jour d'opération

### 3.1 Introduction

L'exécution des opérations planifiées d'une compagnie aérienne est fréquemment affectée par des perturbations qui influencent l'horaire des vols, l'affectation des avions et les activités des équipages. Par conséquent, les opérations planifiées doivent être parfois modifiées. Ces modifications sont en général effectuées de façon séquentielle. Dans un premier temps, les horaires des vols sont réorganisés et certains vols peuvent être annulés si nécessaire. Dans un deuxième temps, l'affectation des avions et des itinéraires d'avion est révisée. Un itinéraire d'avion est défini comme une suite de vols ordonnés chronologiquement et affectés à un certain avion. Par ailleurs, les horaires d'équipage doivent être modifiés afin de couvrir tous les vols par les

membres d'équipage disponibles, tel que présenté au Chapitre 2 (Stojković, Soumis et Desrosiers [15]). Cette approche séquentielle n'est pas toujours en mesure de produire une solution réalisable et productive. Afin de trouver une solution manuellement, les deux premières étapes sont souvent agrégées. Enfin, plusieurs mises au point entre les responsables de la gestion des avions et des équipages sont nécessaires afin d'obtenir une solution acceptable.

Nous proposons une nouvelle approche optimale qui traite simultanément le problème de gestion des équipages à un seul membre et le problème de confection des horaires de vol. Des équipages à un seul membre sont des équipages constitués du personnel navigant technique (pilotes). En fait, dans la plupart des grandes compagnies aériennes un membre d'équipage faisant partie du personnel navigant technique est qualifié pour une seule fonction (telles que capitaine, premier officier, etc.) et ne peut être affecté à une autre fonction. En conséquence, le problème concernant le personnel navigant technique doit être séparé en plusieurs problèmes de façon à obtenir un problème pour chacune des fonctions. Chacun de ces problèmes consiste à attribuer un pilote ayant la qualification requise à chacun des vols considérés. De plus, le problème est séparé par type d'avion, puisque chaque pilote est qualifié pour un seul type d'avion. Cette approche originale nous permet de modifier les services de vol planifiés pour un ensemble de pilotes en retardant, si nécessaire, certains vols tout en respectant les itinéraires prédéfinis des avions. L'approche proposée pourrait être très utile lorsque les pilotes disponibles, dont le nombre est réduit suite aux perturbations des équipages, ne peuvent plus couvrir les horaires originaux de vol. Les changements des heures de départ pour certains vols pourraient nous permettre de couvrir un plus grand nombre de vols, ou encore tous les vols considérés. La même approche s'applique aussi lorsque les horaires planifiés des vols ont été changés et

que de nouveaux itinéraires d'avion ont été établis suite aux retards et aux annulations de certains vols. Par conséquent, certains services de vol planifiés doivent être réorganisés pour permettre de couvrir l'horaire des vols modifié par les pilotes disponibles. Dans les deux cas, certaines connexions importantes des passagers peuvent être préservées en ajoutant des contraintes concernant l'heure de départ des vols correspondants. La maintenance prévue des avions peut être respectée implicitement en fixant d'avance un retard maximal acceptable pour certains vols. Notre objectif est de minimiser la différence entre les nouvelles et les anciennes heures de départ et le nombre total de pilotes dont les services de vol pour le jour suivant ont été affectés par les modifications concernant le jour d'opération considéré.

Une première contribution de ce chapitre est de proposer une approche originale pour le problème de gestion des pilotes durant les opérations quotidiennes. Cette approche nous permet de retarder des vols en fabriquant simultanément des services de vol individuels modifiés. Une seconde contribution importante est d'avoir développé un modèle optimal pour résoudre ce problème, comme un problème de gestion des pilotes durant les opérations quotidiennes avec des fenêtres de temps et des *contraintes de préséance entre les vols* imposées par des itinéraires d'avion fixes. Enfin, une troisième contribution est l'implantation de notre modèle que nous avons testé sur quelques problèmes. Des résultats intéressants ont été obtenus sur des problèmes de taille réelle en un temps très respectable.

La prochaine section est une brève revue de la littérature. La Section 3.3 décrit le modèle proposé et explique la méthode de résolution. La Section 3.4 présente les résultats numériques. Enfin, la Section 3.5 donne les conclusions et les perspectives.

## 3.2 Revue de la littérature

Les articles qui traitent du sujet de la gestion des équipages aériens durant les opérations quotidiennes ne sont pas nombreux. Pour la première fois, le problème a été défini et résolu de façon optimale par Stojković, Soumis et Desrosiers [15]. L'article en question est présenté au Chapitre 2. Selon la définition donnée dans cet article, le problème de la gestion des équipages aériens durant les opérations quotidiennes consiste à couvrir, à coût minimum, tous les segments de vol d'une période considérée par les équipages disponibles. Les horaires de vol et les itinéraires d'avion sont fixes et représentent une donnée d'entrée du modèle. Le problème est formulé comme un problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec des variables de ressource, où une commodité particulière est associée à chacun des membres d'équipage considérés. Ce problème est résolu en utilisant la méthode de génération de colonnes jumelée à un algorithme de séparation et d'évaluation progressive. Le problème maître est défini comme un problème de type partitionnement. Les sous-problèmes sont modélisés comme des problèmes de plus court chemin sur un graphe avec contraintes de ressource. De bons résultats, du point de vue du temps de résolution et des objectifs atteints, ont été obtenus sur un ensemble de problèmes test. L'article présente aussi une revue de la littérature concernant la planification des horaires d'équipage, c'est-à-dire, le problème de construction des rotations et le problème de construction des blocs mensuels pour les membres d'équipage.

Il existe aussi deux modèles non publiés, développés à l'intérieur des compagnies aériennes, qui concernent le problème de gestion des équipages durant les opérations quotidiennes. Johnson *et al.* [9] ont présenté un système de rétablissement d'équipage

aérien, développé pour Northwest Airlines. Ils définissent le problème comme un problème de type recouvrement, l'objectif étant ici de minimiser le nombre de rotations qui doivent être changées et le coût additionnel provoqué par ces changements. Monroe et Chu [10] ont présenté un modèle d'aide à la décision, développé par SABRE Decision Technology, l'objectif étant de minimiser le coût additionnel d'opérations provoqué par la réaffectation des équipages.

Song, Wei et Yu [11] ont récemment proposé une approche heuristique pour résoudre le problème de gestion des équipages aériens durant les opérations irrégulières. Le but est de réparer les rotations qui sont devenues irréalisables suite aux perturbations. Les horaires de vol sont préalablement fixés et représentent une donnée d'entrée du problème. Le problème de gestion des équipages durant les opérations irrégulières est formulé comme un problème de réseau multi-commodités en nombres entiers, où un équipage complet est considéré comme une commodité. L'objectif est de couvrir un nombre maximum de vols tout en minimisant le nombre total de rotations modifiées. Un algorithme glouton construit une solution pour plusieurs équipages, où la rotation modifiée d'un équipage est générée en utilisant un algorithme de chemin à coût minimum. La faisabilité des rotations modifiées est vérifiée après qu'elles soient générées. Plusieurs solutions sont obtenues en explorant partiellement l'arbre des possibilités. Les résultats numériques concernent des problèmes de très petite taille.

Récemment, Stojković, Soumis et Desrosiers [14] ont proposé un modèle optimal pour le problème de confection d'horaires de vol en temps réel. Ce modèle détermine un nouvel horaire des vols qui préserve les itinéraires d'avion et ceux des équipages, de façon à respecter la maintenance prévue et les connexions des passagers. Afin de diminuer le temps de résolution, le problème dual de la formulation initiale a

été résolu. Cette formulation duale transforme le programme linéaire correspondant en un problème de flot à coût minimum. Les temps de résolution obtenus pour les problèmes test de taille réelle sont très courts.

Le problème de perturbations des horaires de vol a été traité dans Songjun et Yu [12] et Songjun et Yu [13]. Une approche qui permet de retarder les vols au sol, c'est-à-dire à l'aéroport considéré, est proposée. Dans Songjun et Yu [12] les équipages sont affectés aux avions, ce qui signifie qu'un équipage doit repartir de l'aéroport en question dans le même avion que celui avec lequel il a atterri à cet aéroport. Songjun et Yu [13] ont traité le cas général du problème précédent, où les équipages peuvent changer d'avion après l'atterrissage. Les problèmes sont formulés comme des programmes linéaires en nombres entiers. Des approches heuristiques sont utilisées pour résoudre ces problèmes. L'approche proposée dans Songjun et Yu [13] est illustrée sur un problème réel de taille moyenne.

### 3.3 Modèle proposé

Le problème est de modifier les services de vol planifiés pour un ensemble de pilotes disponibles afin de couvrir un ensemble de vols en retardant, si nécessaire, certains des vols. Les nouvelles heures de départ doivent être sélectionnées dans les fenêtres de temps qui leur sont associées. Une fenêtre de temps est définie pour chaque vol conformément aux contraintes commerciales et opérationnelles. L'heure de départ d'un vol peut être fixe (fenêtre de temps réduite à un point) ou flexible. L'ensemble des pilotes disponibles inclut les pilotes planifiés et ceux en réserve. Un pilote planifié est un pilote auquel correspond un service de vol planifié (une suite

de vols séparés par des connexions) dans la journée d'opération considérée. Un pilote en réserve est un pilote qui est affecté à une base donnée et qui est disponible pour travailler si nécessaire. Les contraintes concernant un service de vol, telles que le temps minimum de connexion entre deux vols, le temps de briefing et de debriefing et la durée maximum d'un service de vol doivent être respectées.

Le problème est formulé comme un problème de type réseau multi-commodités à coût minimum, avec des contraintes supplémentaires. Il s'agit d'une formulation non linéaire en nombres entiers, où chaque pilote appartenant à l'ensemble des pilotes disponibles est considéré comme une commodité distincte.

### 3.3.1 Notation

Soit  $N$  l'ensemble de tous les vols  $i$  qui doivent être couverts exactement une fois. Soit  $[a_i, b_i]$  la fenêtre de temps pour l'heure de départ du vol  $i \in N$ ,  $d_i$  sa durée et  $g_i$  son temps minimum au sol (le temps minimum qu'un avion doit rester au sol après avoir terminé un vol et avant qu'il ne puisse commencer le prochain vol prévu). Soit  $c_{ij}$  le temps minimum de connexion des passagers entre les vols  $i$  et  $j$ . Notons  $M \subset N$  l'ensemble des vols dont l'heure de départ est flexible.

Quelques *contraintes de préséance entre les vols* doivent être imposées pour assurer la faisabilité des itinéraires d'avion et des connexions de passager. Soit  $R$  l'ensemble des couples de vols  $(i, j)$  tels que le vol  $j$  suit le vol  $i$  dans l'itinéraire d'un avion ou lorsqu'il y a une connexion importante des passagers du vol  $i$  vers le vol  $j$ . Soit  $d_{ij}$  le temps minimum entre les vols  $i$  et  $j$ . Si ces deux vols sont consécutifs

dans l'itinéraire d'un avion, alors  $d_{ij} = d_i + g_i$ ; s'il y a une connexion importante des passagers entre les vols  $i$  et  $j$ , qui ne sont pas affectés au même avion, alors  $d_{ij} = d_i + c_{ij}$ .

Sachant que l'heure de départ peut être fixe ou flexible, toute séquence ordonnée  $(i, j) \in R$  doit appartenir à l'une des quatre catégories suivantes:  $i \notin M, j \notin M$ ;  $i \in M, j \notin M$ ;  $i \notin M, j \in M$  et  $i \in M, j \in M$ . Premièrement, si les deux vols considérés ont des heures de départ fixes (la première catégorie), la contrainte de préséance entre les vols est redondante. Deuxièmement, étant donné que l'heure de départ du vol  $j$  a été fixée en avance ( $a_j = b_j$ ), la contrainte de préséance concernant ce couple de vols peut être respectée implicitement. Il suffit d'imposer sur la borne supérieure de l'heure de départ du vol  $i$  la limite suivante:  $b_i \leq a_j - d_{ij}$ . Cette limite peut réduire le retard maximal accepté du vol  $i$ . Troisièmement, étant donné que l'heure de départ du premier vol a été déjà fixée ( $a_i = b_i$ ), la contrainte de préséance entre les vols peut être respectée implicitement. Il s'agit d'imposer sur la borne inférieure de l'heure de départ du vol  $j$  la limite suivante:  $a_j \geq b_i + d_{ij}$ . Cette limite peut réduire le retard maximal accepté du vol  $j$ . Quatrièmement, les réductions implicites ne s'appliquent pas car les heures de départ des deux vols sont flexibles. Alors, seulement dans ce dernier cas la contrainte de préséance doit être imposée explicitement. Soit  $W = R \cap (M \times M)$ .

Notons  $K$  l'ensemble de toutes les commodités  $k$ . Dans le modèle proposé, une commodité distincte est associée à chacun des pilotes considérés. Ce modèle peut alors traiter des pilotes distincts, dont les conditions initiales sont différentes. On entend par conditions initiales d'un pilote, l'aéroport et le moment où les modifications de son service de vol planifié peuvent commencer au plus tôt (ou quand la

construction d'un nouveau service de vol peut commencer si aucun service de vol n'a été affecté au pilote selon le plan). Un service de vol modifié, qui remplace celui planifié, doit être inséré dans le bloc mensuel déjà planifié pour le pilote considéré. Par conséquent, la durée maximale d'un service de vol modifié n'est pas nécessairement limitée à la même valeur pour tous les pilotes. Cette valeur varie d'un pilote à un autre, dépendamment de la durée du service de vol effectué précédemment et du début du prochain service de vol planifié. Ainsi, en plus des conditions initiales expliquées auparavant, il existe aussi des conditions finales pour chaque pilote : l'aéroport planifié et le dernier moment où un service de vol peut se terminer. Quant aux pilotes en réserve, les conditions finales concernant l'aéroport planifié ne s'appliquent pas toujours. Par contre, la contrainte concernant la durée maximale d'un service de vol, prescrite par la convention collective, doit être respectée. Soit  $G^k = (V^k, A^k)$  le graphe associé au pilote  $k$ , où  $V^k$  représente l'ensemble des noeuds et  $A^k$  l'ensemble des arcs. L'ensemble des noeuds  $V^k$  contient le noeud source  $o(k)$  qui représente les conditions initiales du pilote  $k$ , le noeud puits  $d(k)$  qui correspond aux conditions finales du pilote considéré et l'ensemble des noeuds  $N^k$ , qui peuvent être visités par un chemin de la commodité  $k$ . Tous les chemins réalisables dans  $G^k$ , qui correspondent aux services de vol réalisables pour le pilote  $k$ , commencent au noeud  $o(k)$  et finissent au noeud  $d(k)$ . Ainsi, nous avons  $V^k = N^k \cup \{o(k), d(k)\}$  et  $N = \cup_{k \in K} N^k$ . Les fenêtres de temps pour les noeuds source et puits sont données respectivement par  $[a_{o(k)}, b_{o(k)}]$  et  $[a_{d(k)}, b_{d(k)}]$ . Soit  $T_{i,j}^c$ , le temps minimum de connexion entre deux vols consécutifs  $i$  et  $j$  associés au même pilote. Suivant la nature de la connexion (entre deux vols domestiques, entre deux vols internationaux, d'un vol international à un vol domestique et vice versa, etc.), le temps minimum de connexion prend une valeur particulière imposée par la convention collective. Cette valeur constante doit

être respectée seulement si deux vols consécutifs considérés appartenant au service de vol d'un pilote n'appartiennent pas à l'itinéraire d'un même avion. Sinon, le temps minimum de connexion est égal au temps minimum au sol du premier de ces deux vols.

L'ensemble des arcs  $A^k$  contient trois types d'arcs: les arcs de début, les arcs de fin et les arcs de connexion. Un arc de début  $(o(k), i)$ , pour  $i \in N^k$ , relie le noeud source avec un vol  $i$  si l'aéroport de départ du vol  $i$  est compatible avec la position initiale du pilote  $k$  et si  $a_{o(k)} + T_b \leq b_i$ , où  $T_b$  représente le temps minimum de briefing. Un arc de fin  $(i, d(k))$ , pour  $i \in N^k$ , relie le vol  $i$  avec le noeud puits si  $a_i + d_i + T_d \leq b_{d(k)}$ , où  $T_d$  représente le temps minimum de debriefing. Chaque arc de connexion  $(i, j) \in A^k$  représente une connexion possible d'équipage entre ces deux vols si l'aéroport de destination du vol  $i$  est le même que l'aéroport de départ du vol  $j$ . De plus, le moment où le pilote  $k$  peut commencer, au plus tôt, le vol  $j$  après avoir terminé le vol  $i$  (le même chemin dans le graphe  $G^k$ ) ne peut dépasser la borne supérieure de la fenêtre de temps associée au vol  $j$ . Soit  $s_{ij}$  le temps minimum entre l'arrivée du vol  $i$  et le départ du vol  $j$ . L'arc de connexion  $(i, j) \in A^k$  existe si  $a_i + d_i + s_{ij} \leq b_j$ , où  $s_{ij} = g_i$  si le vol  $j$  suit le vol  $i$  dans l'itinéraire d'un avion. Sinon,  $s_{ij} = \max(g_i, T_{i,j}^c)$ . Enfin, un arc additionnel  $(o(k), d(k))$  a été créé pour chaque pilote  $k$ . Cet arc représente un pilote dont les conditions initiales restent inchangées, c'est-à-dire, un pilote qui n'aurait plus d'activités attribuées durant la journée d'opération considérée.

Le coût  $c_{ij}^k$  est associé aux arcs  $(i, j) \in A^k$ . Afin de s'assurer que chaque nouveau service de vol du pilote  $k$  terminera à l'aéroport planifié, une pénalité est associée à chaque arc de fin  $(i, d(k))$ , pour  $i \in N^k$ , si l'aéroport de destination du vol  $i$  n'est pas

compatible avec l'aéroport de destination planifié associé avec le noeud puits  $d(k)$ . La même pénalité est associée aux arcs  $(o(k), d(k))$  si l'aéroport associé au noeud  $o(k)$  n'est pas l'aéroport de destination planifié qui correspond au noeud  $d(k)$ . Sinon, il n'y a pas de pénalité associée au pilote planifié  $k$  qui n'a pas été utilisé. Ces deux pénalités s'appliquent aussi aux pilotes en réserve pour lesquels des conditions finales existent (des vacances ou des périodes d'entraînement préaffectées, etc.). Une pénalité associée à l'utilisation de chaque pilote en réserve disponible peut s'appliquer afin de forcer l'utilisation des pilotes planifiés, c'est-à-dire pour minimiser l'usage des pilotes en réserve dans la nouvelle solution.

Soit  $X_{ij}^k$ ,  $k \in K$ ,  $(i, j) \in A^k$ , la variable binaire de flot qui est égale à 1 si l'arc  $(i, j)$  est utilisé dans la solution et à zéro sinon. Notons  $T_i^k$ ,  $i \in N^k$ ,  $k \in K$ , la variable de temps qui représente l'heure de départ du vol  $i$  effectué par le pilote  $k$ . Le retard du vol  $i$  correspond à l'écart entre l'heure de départ du vol  $i$  et le début de sa fenêtre de temps (l'heure à laquelle le vol  $i$  peut commencer le plus tôt possible). Outre les pénalités concernant la construction de services de vol personnalisés, associées aux arcs, nous avons aussi un coût associé aux noeuds. Il s'agit d'un coût fixe unitaire  $u_i^k$  attribué à chaque minute de retard du vol  $i \in N^k$ ,  $k \in K$ .

### 3.3.2 Formulation mathématique

Le problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec fenêtres de temps et contraintes additionnelles de préséance entre les vols se formule mathématiquement de la façon suivante :

$$\text{Minimiser } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^k X_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in N^k} u_i^k T_i^k \quad (3.1)$$

sujet à:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.2)$$

$$\sum_{k \in K} T_j^k - \sum_{k \in K} T_i^k \geq d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in W \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in N^k} X_{o(k),j}^k = \sum_{j \in N^k} X_{j,d(k)}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k - \sum_{j: (j,i) \in A^k} X_{ji}^k = 0, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (3.5)$$

$$X_{ij}^k (T_i^k + d_i + s_{ij} - T_j^k) \leq 0, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \quad (3.6)$$

$$a_i \leq T_i^k \leq b_i, \quad \forall k \in K, \forall i \in \{o(k), d(k)\} \quad (3.7)$$

$$a_i \left( \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k \right) \leq T_i^k \leq b_i \left( \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k \right), \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (3.8)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire}, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k. \quad (3.9)$$

La fonction de coût (3.1) minimise la somme des coûts sur les arcs et sur les noeuds, soient respectivement le nombre de pilotes dont les opérations planifiées pour la journée suivante doivent être modifiées suite aux modifications proposées au niveau de la journée considérée et le retard total pour l'ensemble de tous les vols considérés. Les contraintes (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.9) sont les contraintes d'un problème classique

d'itinéraires de véhicule ou d'horaires d'équipage, où tout chemin correspondant à une commodité  $k \in K$  commence au noeud  $o(k)$  et se termine au noeud  $d(k)$ . La relation (3.3) modélise les contraintes de préséance entre les vols. La relation (3.6) représente les contraintes de compatibilité non linéaires entre les variables de flot et les variables de temps. Les contraintes de fenêtres de temps sont représentées par les relations (3.7) et (3.8). Il faut noter que la contrainte (3.8) impose  $T_i^k = 0$ ,  $k \in K$ ,  $i \in N^k$  chaque fois que  $\sum_{j:(i,j) \in A^k} X_{ij}^k = 0$ , ce qui signifie que seules les variables de temps associées aux noeuds du plus court chemin contribuent à l'objectif. Le traitement général des contraintes supplémentaires incluant des variables de ressource a été discuté dans Desaulniers *et al.* [1].

### 3.3.3 Méthode de résolution

Le modèle (3.1) à (3.9) possède une structure diagonale par blocs, (3.4) à (3.9), chaque bloc correspondant à un pilote. L'objectif (3.1) est également séparable par pilote. Il nous reste alors les contraintes couplantes, soient les contraintes de recouvrement (3.2) et les contraintes de préséance entre les vols (3.3). La formulation (3.1) à (3.9) est résolue par la génération de colonnes. Le schème de décomposition comprend le problème maître et un sous-problème pour chaque pilote  $k$ . Le problème maître est composé des relations (3.1) à (3.3), alors que les contraintes (3.4) à (3.9) définissent le sous-problème du pilote  $k$ . Une technique spécialisée de séparation et d'évaluation qui met à profit les caractéristiques particulières du problème est utilisée pour obtenir une solution entière optimale.

**Problème maître:** Soit  $\Omega^k$  l'ensemble de tous les points extrêmes  $p$  du sous-problème  $k \in K$ . Chaque point extrême correspond à un chemin réalisable (un service de vol réalisable) dans  $G^k$ . Soit  $\theta_p^k$  la variable du problème maître associée à la sélection du chemin  $p \in \Omega^k$  pour le pilote  $k$ , dont le coût est noté  $c_p^k$ . Soit

$$(x_p^k, t_p^k) = (x_{ij,p}^k, t_{i,p}^k), \quad (i, j) \in A^k, i \in N^k, p \in \Omega^k, \quad (3.10)$$

les coordonnées du point extrême  $p$  du sous-problème  $k$ . Les variables utilisées dans la formulation (3.1) à (3.9), qui sont également utilisées dans le sous-problème, sont reliées aux variables du problème maître par les relations suivantes :

$$X_{ij}^k = \sum_{p \in \Omega^k} x_{ij,p}^k \theta_p^k, \quad \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K, \quad (3.11)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire}, \quad \forall (i, j) \in A^k, \forall k \in K, \quad (3.12)$$

$$T_i^k = \sum_{p \in \Omega^k} t_{i,p}^k \theta_p^k, \quad \forall i \in N^k, \forall k \in K, \quad (3.13)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1, \quad \forall k \in K, \quad (3.14)$$

$$\theta_p^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k. \quad (3.15)$$

Soient dans le problème maître  $a_{i,p}^k$  et  $b_{i,p}^k$ ,  $i \in N$ ,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , les coefficients correspondant aux contraintes de recouvrement (3.2) et aux contraintes de préséance (3.3).

Le coût  $c_p^k$  et les coefficients  $a_{i,p}^k$  et  $b_{i,p}^k$  sont calculés de la façon suivante:

$$c_p^k = \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^k x_{ij,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k, \quad (3.16)$$

$$a_{i,p}^k = \sum_{j:(i,j) \in A^k} x_{ij,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k, \forall p \in \Omega^k, \quad (3.17)$$

$$b_{i,p}^k = t_{i,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k, \forall p \in \Omega^k. \quad (3.18)$$

En utilisant la même notation, le problème maître prend la forme suivante:

$$\text{Minimiser } \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} c_p^k \theta_p^k + \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} \sum_{i \in N^k} u_i^k b_{i,p}^k \theta_p^k \quad (3.19)$$

sujet à:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} a_{i,p}^k \theta_p^k = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.20)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} (b_{j,p}^k - b_{i,p}^k) \theta_p^k \geq d_{ij}, \quad \forall (i, j) \in W \quad (3.21)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.22)$$

$$\theta_p^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k. \quad (3.23)$$

$$X_{ij}^k = \sum_{p \in \Omega^k} x_{ij,p}^k \theta_p^k, \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (3.24)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire}, \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k. \quad (3.25)$$

La relaxation linéaire du problème maître est obtenue en éliminant les contraintes (3.24) et (3.25).

**Sous-problèmes:** Le coût réduit d'un chemin dans le graphe du sous-problème est obtenu en utilisant les variables duales du problème maître. Soit  $\alpha = \{\alpha_i \mid i \in N\}$ ,  $\beta = \{\beta_{(i,j)} \mid (i, j) \in W\}$  et  $\gamma = \{\gamma^k \mid k \in K\}$  les vecteurs des variables duales associés aux contraintes (3.20), (3.21) et (3.22), respectivement. Ainsi, la fonction économique du sous-problème  $k$  est de la forme:

$$\text{Minimiser } \sum_{(i,j) \in A^k} (c_{ij}^k - \alpha_i) X_{ij}^k + \sum_{i \in N^k} u_i^k T_i^k - \sum_{(i,j) \in W^k} \beta_{(i,j)} (T_j^k - T_i^k) - \gamma^k. \quad (3.26)$$

Le sous-problème  $k$ , défini par (3.26) et (3.4) à (3.9), est un plus court chemin avec fenêtres de temps et des coûts linéaires sur les variables de flot et de temps. Étant donné qu'une fenêtre de temps dans laquelle un noeud peut être visité est spécifiée pour chaque noeud dans le graphe  $G^k$ , le coût d'un chemin dans ce graphe est calculé en fonction des arcs inclus dans ce chemin et les temps de visite des noeuds correspondants. Rappelons que la contrainte (3.8) correspondant aux fenêtres de temps impose la valeur zéro aux variables de temps associées aux noeuds qui n'appartiennent pas au plus court chemin. Pour résoudre ce problème, nous proposons l'algorithme de programmation dynamique pour des réseaux sans cycle, développé par Ioachim *et al.* [7].

Il y a plusieurs algorithmes de programmation dynamique développés pour résoudre le problème classique de plus court chemin avec fenêtres de temps (Desrochers et Soumis [2], Desrochers et Soumis [3] et Desrosiers, Pelletier et Soumis [5]). Ces algorithmes construisent de façon itérative des chemins qui vont du noeud source jusqu'au noeud puits. L'étiquette associée à chaque chemin contient l'information sur l'heure de visite du dernier noeud du chemin et sur le coût du chemin en question qui est égal à la somme des coûts associés aux arcs du chemin. Un processus de dominance est développé afin de réduire le nombre de chemins partiels préservés lors des itérations de l'algorithme, c'est-à-dire, à un certain noeud on élimine les chemins qui ne correspondent pas aux sous-chemins d'un chemin optimal. La dominance entre les chemins qui arrivent à un même noeud est déterminée par une relation d'ordre partiel entre les étiquettes du même type (*coût, temps*).

Pour le problème de plus court chemin avec fenêtres de temps et des pénalités linéaires sur l'heure de visite, de nouvelles étiquettes et une nouvelle procédure de

dominance ont été développées afin de tenir compte des coûts linéaires sur l'heure de visite. Une fonction de dominance  $G_i$ , liée au noeud  $i$ , est définie comme le minimum de toutes les fonctions de coût associées aux chemins qui arrivent au noeud  $i$ . Cette fonction est linéaire par morceaux, non croissante et n'est pas nécessairement continue (Ioachim *et al.* [7]). Les points de discontinuité de  $G_i$  ne sont pas nécessairement entiers, même si toutes les données du problème reliées au temps sont entières. Ces points non entiers de discontinuité ne peuvent exister dans l'horaire optimal d'un plus court chemin. Ainsi, dans la représentation de la fonction  $G_i$ , chacun des ces points est remplacé par la prochaine valeur entière de la fenêtre de temps. La fonction de dominance est représentée par une liste d'étiquettes. Chaque étiquette est définie par un point de discontinuité et par la pente du prochain segment linéaire. Étant donné que le réseau est sans cycle, les noeuds sont numérotés dans l'ordre topologique.

L'algorithme optimal de programmation dynamique pour le problème de plus court chemin avec fenêtres de temps et des pénalités linéaires sur les heures de visite peut se résumer de la façon suivante:

Initialisation: Initialiser l'étiquette du noeud source. On donne le numéro 0 à ce noeud.

Étape principale: Traitement de tous les noeuds  $j$  de 1 à  $n + 1$ .

Les noeuds sont traités dans l'ordre topologique jusqu'à ce que le noeud puits, numéroté  $(n + 1)$ , soit atteint. Chaque noeud est traité une seule fois. Le traitement du noeud se fait en deux étapes. D'abord, les étiquettes de ses prédécesseurs sont prolongées jusqu'au noeud  $j$ . Ensuite, la fonction de dominance  $G_j$  du noeud  $j$  est calculée comme le minimum des étiquettes prolongées.

Fin de l'algorithme: L'algorithme se termine lorsque tous les noeuds sont traités. Le coût du plus court chemin est alors donné par la valeur minimale de la fonction  $G_{n+1}$ .

**Solutions entières:** Une technique de séparation et d'évaluation est utilisée pour obtenir une solution entière du problème. Pour notre application, les décisions sont prises selon la valeur des variables de temps  $T_i$ ,  $i \in N$ , et selon l'évaluation du flot  $X_{ij}^k$ ,  $k \in K$ , entre les couples de vols  $(i, j) \in A^k$ . Les décisions sur les variables de temps ont été présentées pour la première fois par Gélinas *et al.* [6]. Un arbre binaire de séparation et d'évaluation, dont la racine correspond à la formulation initiale du problème maître (3.19) à (3.23), a été utilisé. D'autres noeuds sont créés en ajoutant des décisions dans le problème maître et dans le sous-problème. Les principales étapes de la technique proposée, dont les détails sont présentés dans Ioachim *et al.* [8], peuvent se résumer de la façon suivante: choisir un noeud  $i$  visité au moment  $T_i$  qui représente la somme pondérée de plusieurs heures de visite différentes  $t_{i,p}^k$ , soit  $T_i = \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} t_{i,p}^k \theta_p^k$ ; définir deux branches qui séparent la fenêtre de temps associée au noeud  $i$  au moment  $T_i$ . La solution fractionnaire courante n'est réalisable dans aucune des deux branches car les horaires de certains chemins utilisés ne sont plus réalisables. Le problème obtenu dans chacune des branches possède la même structure que le problème original et peut être résolu par la même approche de génération de colonnes. Lorsque certaines variables de flot du problème maître sont encore fractionnaires, et que nous ne pouvons plus éliminer la solution fractionnaire courante en prenant des décisions sur des variables de temps, la recherche de la solution optimale entière continue en prenant des décisions sur les variables de flot. Dans ce cas, une nouvelle décision est imposée sur les arcs qui apparaissent dans une certaine variable de flot fractionnaire. Le branchement sur les variables de flot a été décrit dans Desaulniers *et al.* [1].

### 3.4 Études numériques

Le modèle défini par (3.1) à (3.9) n'autorise pas de vols non couverts. Pourtant, dans les applications réelles il est nécessaire d'avoir une solution, même si certains vols ne peuvent pas être couverts par les pilotes disponibles (actifs et en réserve). En fait, une fraction des vols non couverts dans la solution proposée peut être couverte par des pilotes inactifs, comme par exemple des pilotes en vacances ou des pilotes qui peuvent être utilisés pour couvrir un certain vol seulement si aucun des pilotes actifs et en réserve n'est disponible (*management pilots*). Ainsi, il est important de fixer correctement les heures de départ même pour les vols qui ne sont pas couverts par l'ensemble des pilotes disponibles. Afin d'implanter cette modification, nous ajoutons dans l'ensemble des commodités correspondant aux pilotes disponibles, une nouvelle commodité correspondant aux membres d'équipage artificiel. Il n'y a pas de conditions initiales et finales associées aux noeuds source et puits du graphe correspondant. Chacun des vols considérés  $i \in N$  est relié par un arc spécial de début au noeud source artificiel et par un arc spécial de fin au noeud puits artificiel. Un très grand coût  $M$ , qui correspond à la pénalité pour un vol  $i$  qui est non couvert, est associé aux arcs spéciaux de début. Ceci implique qu'un chemin non nul, affecté à un pilote artificiel, est constitué d'un seul vol  $i \in N$ .

Nous considérons une seule base où se trouvent tous les membres d'équipage en réserve. Tous les vols considérés sont des vols domestiques. Les valeurs de temps de briefing et de debriefing, la durée maximale d'un service de vol et le temps minimum de connexion d'équipage sont issus de la convention collective d'une compagnie aérienne américaine. Toutes les données du problème reliées au temps sont entières.

Il y a deux catégories de pilotes en réserve. La différence entre ces deux catégories réside dans la période de disponibilité des pilotes. Un pilote en réserve qui appartient à une catégorie particulière peut commencer un service de vol seulement si le début de ce dernier est à l'intérieur d'un intervalle de temps prédéfini. Les conditions finales ne s'appliquent pas à l'ensemble des pilotes en réserve. L'utilisation d'un pilote en réserve n'est pas pénalisée. Dans les problèmes considérés il n'était pas possible de couvrir tous les vols sans utiliser tous les pilotes en réserve.

L'ensemble des vols comprend les vols opérationnels et les vols de mise en place effectués par la compagnie considérée et utilisés dans les services de vol planifiés pour l'ensemble des pilotes considérés. Des vols de mise en place exécutés par d'autres compagnies aériennes (mise en place commerciale) ne sont pas considérés. Une grande pénalité s'applique à chaque vol opérationnel qui reste non couvert dans la solution optimale. Si un vol de mise en place n'est pas couvert, aucune pénalité ne s'applique. Un vol ne peut être sur-recouvert en aucun cas.

**Problèmes test:** Nous avons testé l'implantation informatique de notre approche sur trois ensembles de données, appelés respectivement Problème 1, Problème 2 et Problème 3. Une situation hypothétique, où l'aéroport *hub* est fermé pendant les heures de pointe matinales, est considérée comme la source de perturbations pour les trois problèmes. Par conséquent tous les vols, qui selon le plan devaient atterrir à cet aéroport avant l'heure de sa réouverture, sont directement influencés par la perturbation donnée. Cependant, les vols qui les précèdent ne sont pas influencés par la perturbation, étant donné qu'ils n'atterrissent pas à l'aéroport en question. Ainsi, leurs heures de départ restent telles que planifiées. Un des vols qui est directement perturbé est annulé dans les deux problèmes, soit le Problème 2 et le Problème 3.

De nouvelles heures de départ sont fixées pour les vols qui restent. Ces vols sont nommés les *vols retardés originalement*. Ensuite, si le temps au sol entre un vol retardé originalement et son successeur du même itinéraire d'avion est devenu plus petit que le minimum requis, le vol successeur est retardé en conséquence afin d'atteindre le minimum requis. Par la suite, les nouvelles heures de départ pour les vols successeurs retardés sont fixées. Ces vols sont appelés les *vols retardés subséquemment*. Tous les vols retardés, originalement ou subséquemment, sont nommés les *vols retardés initialement*. Les heures fixes originales de départ ont été transformées en heures de départ flexibles. La largeur maximale d'une fenêtre de temps, qui correspond au retard maximal accepté, est fixée à 1 heure. Mis à part les pilotes dont les blocs planifiés contiennent des vols retardés, les pilotes affectés aux avions impliqués sont aussi considérés comme des candidats pour les modifications. Le Tableau 3.1 présente les différentes caractéristiques des trois problèmes test.

Tableau 3.1 – *Caractéristiques des problèmes*

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3
<b>Vols</b>			
Nombre total	66	131	190
Retardés originalement	16	35	52
Retardés subséquemment	4	11	20
Retardés initialement	20	46	72
Heure de départ fixe	20	50	75
Heure de départ flexible	46	81	115
<b>Pilotes (services de vol)</b>			
Nombre total	18	42	59
<b>Avions</b>			
Nombre total	28	58	79

La taille de chaque problème dépend des caractéristiques reliées aux vols, aux pilotes et aux avions. Les caractéristiques reliées aux vols sont exprimées en nombre

total de vols considérés, nombre de vols retardés originalement, nombre de vols retardés subséquentement, nombre total de vols retardés initialement, nombre de vols ayant l'heure de départ fixe et nombre de vols ayant l'heure de départ flexible. Les caractéristiques reliées aux pilotes comprennent le nombre total de pilotes (ou de services de vol planifiés, vu qu'un service de vol est affecté à un pilote). Enfin, le nombre total d'avions (c'est-à-dire d'itinéraires d'avion) pour chacun des problèmes est aussi donné. Le Tableau 3.1 révèle que le premier problème correspond à des perturbations de petit volume, le deuxième à des perturbation de volume moyen et le troisième à des perturbations de grand volume correspondant à un nombre élevé de vols retardés et de pilotes influencés par ces perturbations.

Avant de fournir une solution réoptimisée, nous présentons deux tentatives systématiques ayant pour but de fixer les horaires des avions et des équipages. Les problèmes qui restent non résolus après ces deux tentatives nous permettent d'évaluer les difficultés des problèmes perturbés et mettent en lumière la contribution de l'approche optimale dont les résultats sont présentés par la suite. Les caractéristiques des différents problèmes, une fois les nouvelles heures de départ fixées par le service de gestion des vols afin de préserver les itinéraires d'avion planifiés (la première tentative), sont présentées au Tableau 3.2. Ce tableau présente le nombre de vols non couverts et le nombre de services de vol planifiés qui sont devenus non réalisables. Notons qu'un service de vol devient non réalisable si, à cause des changements des heures de départ de certains vols, le pilote correspondant n'est plus dans la possibilité d'effectuer le prochain vol selon son itinéraire planifié. Par conséquent, ce prochain vol et ses successeurs dans le service de vol considéré deviennent non couverts.

Tableau 3.2 – *Solution qui préserve les itinéraires des avions*

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3
Problèmes résiduels			
Vols non couverts	19	27	35
Services de vol non réalisables	7	12	16

La deuxième tentative pour résoudre le problème consiste à garder les services de vol planifiés en ajoutant des retards supplémentaires à des vols dont l'horaire est flexible. Les itinéraires d'avion doivent, comme avant, être préservés. Les résultats de cette procédure de réparation systématique sont donnés au Tableau 3.3.

Tableau 3.3 – *Solution qui préserve les itinéraires des avions et des équipages*

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3
Retard supplémentaires			
Vols retardés	4	4	4
Retard total (min)	72	49	49
Retard moyen (min)	18,00	12,25	12,25
Problèmes résiduels			
Vols non couverts	13	20	28
Services de vol non réalisables	4	9	13

La première partie du Tableau 3.3 correspond aux retards supplémentaires causés par la procédure appliquée : le nombre total de vols retardés, le retard supplémentaire total et le retard supplémentaire moyen, les deux derniers sont exprimés en minutes. Les problèmes résiduels, exprimés en nombre total de vols non couverts et en nombre total de services de vol qui demeurent non réalisables, sont donnés dans la deuxième partie du tableau. Il faut mentionner que des vols qui nécessiteraient un retard plus grand que le retard maximal accepté pour rendre légal le service de

vol planifié restent non couverts dans la solution. Par conséquent, les services de vol qui contiennent ces vols non couverts ne peuvent être réparés. Les deux dernières lignes du tableau montrent qu'une quantité importante de problèmes résiduels persiste après avoir appliqué cette procédure de réparation systématique.

Le prochain essai consiste à réoptimiser les horaires planifiés d'équipage, tout en préservant les itinéraires d'avion donnés. Pour ce faire, le modèle optimal présenté dans la Section 3.3 a été implanté. Les résultats correspondants sont présentés au Tableau 3.4. Chacun des problèmes a été traité en considérant un nombre différent de pilotes en réserve disponibles (la deuxième ligne du Tableau 3.4). Les deux prochaines parties du tableau correspondent aux lignes du Tableau 3.3. La seule différence est que la dernière ligne du Tableau 3.4 donne le nombre de services de vol (SDV) qui ne respectent pas les conditions finales (aéroport final) au lieu du nombre de services de vol non réalisables. Ce changement est dû au fait que tous les services de vol générés par notre approche optimale sont réalisables. Cependant, étant donné qu'un service de vol correspond à un pilote particulier, les conditions finales concernant l'aéroport planifié peuvent être violées. Ce qui signifie qu'un pilote peut terminer son nouveau service de vol à un aéroport autre que celui qui a été planifié. De tels services de vol sont notés comme les services de vol violant les conditions finales.

Le Tableau 3.4 met en évidence que les résultats obtenus en appliquant notre approche optimale sont bien meilleurs que ceux présentés au Tableau 3.3. Lorsque nous comparons les résultats du Tableau 3.3 avec les résultats du Tableau 3.4 qui correspondent à aucun pilote en réserve (seuls les pilotes planifiés peuvent être utilisés pour résoudre le problème), il devient évident que nous avons réussi à enlever un nombre important de difficultés qui avaient été laissées comme des problèmes résiduels

Tableau 3.4 – Solution après réoptimisation des horaires d'équipage

Problèmes	Problème 1			Problème 2				Problème 3				
Pilotes en réserve	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Retards supplémentaires												
Vols retardés	8	8	6	15	14	13	12	21	21	21	21	21
Retard total (min)	322	322	235	481	481	394	394	680	679	679	679	679
Retard moyen (min)	40	40	39	32	34	30	33	32	32	32	32	32
Problèmes résiduels												
Vols non couverts	3	1	0	4	2	1	0	7	5	3	1	0
SDV violant les conditions finales	3	3	2	3	3	2	2	5	5	5	6	6

à la fin de la procédure de réparation systématique. L'approche optimale a réduit le nombre de vols non couverts de 13 à 3 pour le Problème 1, de 20 à 4 pour le Problème 2 et de 28 à 7 pour le Problème 3. Le nombre de services de vol violant les conditions finales est égal à 3 pour les Problèmes 1 et 2 et à 5 pour le Problème 3. Ainsi, la plupart des problèmes concernant le jour d'opération considéré ont été résolus avec succès et seulement quelques difficultés ont été créées pour le prochain jour d'opération. De plus, le nombre de vols non couverts et le nombre de services de vol violant les conditions finales diminuent lorsque le nombre de pilotes en réserve augmente. Tous les vols sont couverts lorsqu'il y a 2 pilotes en réserve disponibles pour le Problème 1, 3 pilotes en réserve pour le Problème 2 et 4 pilotes en réserve pour le Problème 3. Il faudrait mentionner que le nombre de services de vol violant les conditions finales pourrait être réduit de façon significative en utilisant des vols de mise en place commerciaux.

Le Tableau 3.5 décrit les résultats numériques de notre nouvelle approche. Pour chacun des trois problèmes test, les valeurs présentées correspondent aux valeurs moyennes pour l'ensemble des cas ayant un nombre différent de pilotes en réserve.

Les problèmes test sont résolus à l'aide de l'optimiseur GENCOL, version 4.0. Les programmes linéaires sont résolus à l'aide de l'optimiseur CPLEX 4.0. Pour tous les cas considérés, la relaxation linéaire du problème maître a été résolue par l'algorithme primal du simplexe. Tous les problèmes test sont résolus à l'optimalité sur une station de travail HP9000/735 (124.0 Mips, 40.0 Mflops, 109.1 specint92, 167.9 specfp92).

La section supérieure du Tableau 3.5 donne les informations sur le réseau, c'est-à-dire le nombre de noeuds, arcs et commodités. Il faut noter que l'ensemble des commodités inclus, en plus des pilotes disponibles (actifs et en réserve), la commodité artificielle décrite au début de cette section. Les graphes qui correspondent aux sous-problèmes sont sans cycle, malgré le fait que l'horaire n'est pas fixe pour tous les vols. Ceci s'explique par le fait que la valeur moyenne de  $d_{ij} = d_i + g_i$  (120 minutes pour le Problème 1, 123 minutes pour le Problème 2 et 127 minutes pour le Problème 3) est grande par rapport à la largeur maximale de la fenêtre de temps (60 minutes pour chacun des trois problèmes).

La section suivante du Tableau 3.5, qui est dédiée à la relaxation linéaire du problème, révèle le temps de résolution en secondes (CPU) nécessaire pour produire ces solutions. La section Solution entière présente le temps de résolution nécessaire pour arriver à la solution optimale, le nombre de noeuds de l'arbre de séparation et d'évaluation explorés et le saut d'intégralité entre la solution entière optimale et la solution de la relaxation linéaire du problème, exprimé en pourcentage. La dernière section du tableau donne les informations globales, telles que le nombre de contraintes de recouvrement, le nombre de contraintes de préséance entre les vols, le nombre de colonnes générées, le temps de résolution requis pour résoudre le problème maître ( $CPU_{PM}$ ), le sous-problème ( $CPU_{SP}$ ) et le temps total utilisé par le logiciel

Tableau 3.5 – Résultats - valeurs moyennes

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3
<b>Réseau</b>			
Noeuds	106	220	314
Arcs	1676	7058	14114
Graphes	20	45	62
<b>Relaxation linéaire</b>			
CPU (s)	1,17	14,20	40,90
<b>Solution entière</b>			
CPU (s)	0,13	12,02	20,44
Noeuds de branchement	0,33	2,75	2,00
Saut d'intégralité ( % )	0	0	0
<b>Informations générales</b>			
Contraintes de recouvrement	85	175	251
Contraintes de préséance entre les vols	26	34	51
Colonnes générées	333	993	1505
CPU <sub>PM</sub> (s)	1,00	11,47	21,40
CPU <sub>SP</sub> (s)	0,30	14,80	39,90
CPU <sub>TOT</sub> (s)	1,60	29,65	69,82

(CPU<sub>TOT</sub>). Notons que seules les contraintes de préséance entre les vols imposées afin d'assurer la faisabilité des itinéraires d'avion ont été considérées dans les différents problèmes test. Le nombre de contraintes de recouvrement d'un problème particulier est la somme du nombre de vols et du nombre de pilotes réels (actifs et en réserve) impliqués dans le problème. Étant donné qu'exactement un service de vol peut être affecté à un pilote réel, nous demandons de couvrir chaque noeud source du sous-problème associé exactement une fois. D'après la discussion de la Section 3.3.1, si aucun service de vol n'est affecté à un pilote réel, le noeud source correspondant sera quand même couvert, car il existe un arc additionnel source-puits pour le sous-problème correspondant.

Le Tableau 3.5 nous montre que le nombre de noeuds de branchement nécessaire pour obtenir la solution optimale entière est très petit pour les trois problèmes. En fait, le nombre maximum de noeuds de branchement était égal à 1 pour le Problème 1, 5 pour le Problème 2 et 4 pour le Problème 3. Aucun cas n'avait de saut d'intégralité. Le nombre maximum de colonnes générées respectivement pour les Problèmes 1, 2 et 3 a été de 354, 1021 et 1662. Ce nombre est beaucoup plus petit que le nombre de services de vol théoriquement possibles. Le temps moyen total de résolution, qui comprend la lecture des données et le temps nécessaire pour résoudre le problème maître et le sous-problème, varie entre 1,60 et 69,82 secondes. Le temps de résolution le plus élevé pour les Problèmes 1, 2 et 3 a été, respectivement, de 2,2 secondes, 39,1 secondes et 83,3 secondes. On peut remarquer que les temps de résolution obtenus sont très satisfaisants. Le Problème 3, qui correspond à une perturbation de grand volume pour une grande flotte, est résolu en moyenne dans un temps qui est légèrement supérieur à une minute. Ceci est très rapide étant donné les caractéristiques du problème. Ainsi, nous pouvons en déduire que la méthodologie proposée nous permet de résoudre le problème de gestion des pilotes durant les opérations quotidiennes en temps réel, même dans le cas de perturbations de grand volume.

Enfin, nous avons testé les avantages de la nouvelle approche présentée dans ce chapitre par rapport à l'approche traditionnelle où l'horaire des vols est fixé et représente une donnée d'entrée du problème. Nous avons résolu tous les problèmes test en fixant les heures de départ pour tous les vols considérés. Ceci signifie qu'aucun des vols considérés ne peut être retardé lors des modifications des horaires d'équipage. Les problèmes résiduels de l'approche traditionnelle sont présentés au Tableau 3.6.

Tableau 3.6 – *L'horaire fixé des vols : problèmes résiduels*

Problèmes	Problème 1			Problème 2				Problème 3				
Pilotes en réserve	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Problèmes résiduels												
Vols non couverts	8	6	4	15	13	11	9	23	21	19	17	14
SDV violant les conditions finales	2	1	1	5	4	3	3	7	6	5	5	5

La Tableau 3.6 montre que la qualité des solutions obtenues en appliquant l'approche traditionnelle est très inférieure à la qualité des solutions obtenues en utilisant la nouvelle approche. En utilisant notre nouvelle approche, nous avons diminué de manière significative le nombre de vols non couverts pour tous les problèmes test présentés au Tableau 3.4. En effet, le nombre de vols qui restent non couverts lorsque nous traitons simultanément le problème de gestion des horaires des équipages et des vols (Tableau 3.4) est beaucoup plus petit que celui de l'approche séquentielle, où l'on fixe d'abord les horaires des vols et où par la suite, on modifie les horaires des équipages (Tableau 3.6). Il est en moyenne 4,5 fois plus petit pour le Problème 1, 6,9 fois plus petit pour le Problème 2 et 5,9 fois plus petit pour le Problème 3. En prenant la moyenne sur les 12 instances considérées, nous avons diminué le nombre de vols non couverts 5,9 fois. Le nombre de services de vol violant les conditions finales du Tableau 3.6 varie autour des valeurs présentées au Tableau 3.4. En effet, le nombre de services de vol violant les conditions finales présenté au Tableau 3.4 est en moyenne 4 % plus petit que celui du Tableau 3.6.

Le Tableau 3.7 décrit les résultats numériques obtenus en fixant les heures de départ pour tous les vols considérés (l'approche traditionnelle). Les rangées du Tableau 3.7 correspondent aux rangées du Tableau 3.5.

Tableau 3.7 – *L'horaire fixé des vols : résultats - valeurs moyennes*

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3
<b>Réseau</b>			
Noeuds	104	218	312
Arcs	1471	6495	13083
Graphes	19	44	61
<b>Relaxation linéaire</b>			
CPU (s)	0,33	5,35	13,70
<b>Solution entière</b>			
CPU (s)	0,00	6,40	8,86
Noeuds de branchement	0,00	5,75	2,60
Saut d'intégralité (%)	0	0	0
<b>Informations générales</b>			
Contraintes de recouvrement	85	175	251
Contraintes de préséance entre les vols	0	0	0
Colonnes générées	143	460	639
$CPU_{PM}$ (s)	0,10	1,47	1,54
$CPU_{SP}$ (s)	0,23	10,25	21,02
$CPU_{TOT}$ (s)	0,53	15,00	30,10

Le Tableau 3.7 montre que l'approche traditionnelle est en moyenne 2,4 fois plus rapide que notre nouvelle approche. Les deux réseaux correspondants diffèrent uniquement en nombre d'arcs. En fait, le nombre d'arcs est légèrement plus petit lorsque les heures de départ des vols considérés sont fixées, car certaines connexions entre les vols qui étaient préalablement réalisables deviennent non réalisables lorsqu'on fixe les heures de départ. Il faut ajouter que nous n'avons plus à imposer les contraintes de préséance entre les vols, car les itinéraires d'avions sont toujours respectés lorsque les heures de départs des vols sont fixes. Il s'ensuit que seules les contraintes de recouvrement des vols sont présentes dans le problème maître lorsque les fenêtres de temps sont réduites à un point. Les sous-problèmes correspondants sont des problèmes de plus court chemin sur un graphe acyclique. Nous pouvons

conclure que le problème de gestion simultanée des horaires d'équipage à un seul membre et des horaires de vol durant le jour d'opération produit des solutions dont la qualité est très supérieure à celle de l'approche traditionnelle. Il y a néanmoins un prix à payer pour ces améliorations : le problème devient d'autant plus complexe, ce qui a pour conséquence directe une augmentation du temps de résolution.

### 3.5 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre nous avons étudié et implanté avec succès une approche originale pour résoudre le problème de gestion des pilotes durant les opérations quotidiennes. L'approche proposée nous permet de modifier les journées de travail individuelles pour un ensemble de pilotes en modifiant simultanément et au besoin les heures de départ planifiées pour un ensemble de vols, sans changer les itinéraires prédéfinis des avions. Les contraintes concernant les horaires de maintenance d'avion pourraient être prises en considération implicitement en fixant le retard maximum accepté pour chacun des vols. Les objectifs sont alors de minimiser le nombre de vols annulés, le retard total de tous les vols et le nombre total de pilotes dont les activités planifiées pour le jour suivant d'opération doivent être modifiées par la suite. Le problème est formulé comme un problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec des fenêtres de temps et des contraintes additionnelles de préséance entre les vols. Il a été résolu par un algorithme de séparation et d'évaluation, où les bornes inférieures dérivent d'une extension de la décomposition de Dantzig-Wolfe. Des décisions de branchement sont prises en fonction des valeurs des variables de temps et selon l'évaluation du flot entre les couples de vols. Un sous-problème, qui

est le problème de plus court chemin avec fenêtres de temps et des pénalités linéaires sur les heures de visite, est résolu par un algorithme spécialisé de programmation dynamique.

Les résultats obtenus sur les trois jeux de données qui correspondent aux perturbations de petit, moyen et grand volume respectivement, sont très satisfaisants à la fois pour le temps de résolution et pour la qualité des solutions. Ces résultats nous indiquent que la méthodologie proposée permet de résoudre le problème de gestion des pilotes durant les opérations quotidiennes en temps réel, même lors de grandes perturbations. La résolution rapide nous permet de résoudre plusieurs scénarios différents obtenus à partir d'un même problème. Il suffit simplement de modifier les données du problème et de résoudre les problèmes ainsi générés, afin de trouver une solution satisfaisante.

Le modèle présenté dans ce chapitre est le premier de ce genre dans la littérature. L'approche proposée ne s'applique pas seulement au problème des horaires de pilotes, mais tout aussi bien à un cas particulier du problème des horaires d'agents de bord durant les opérations quotidiennes. Dans ce cas, l'équipage des agents de bord ayant le même plan pour la journée considérée est agrégé en une seule commodité. Ainsi, tous les agents de bord prévus d'être ensemble durant la journée d'opération considérée, auront les mêmes services de vol modifiés. La deuxième extension concerne la résolution du problème pour toutes les catégories de personnel navigant technique (capitaine, premier officier, etc.). Dans ce cas, une solution pour la catégorie la plus critique doit être produite d'abord. Ensuite, afin d'obtenir une solution réalisable pour la prochaine catégorie de personnel, le problème peut être résolu à nouveau en retardant certains vols si nécessaire. Quelques contraintes de

préséance supplémentaires peuvent être ajoutées au problème afin de préserver la faisabilité d'itinéraires de la première catégorie de personnel. De plus, la largeur des fenêtres de temps doit être restreinte pour respecter la durée maximale d'un service de vol de la première catégorie de personnel navigant technique.

Il est possible d'enrichir le modèle proposé en ajoutant plus de composantes dans la fonction économique. Ces nouveaux coûts devraient concerner l'aspect économique et la robustesse des solutions proposées. Pour améliorer la qualité des solutions du point de vue économique, il est possible d'introduire des pénalités associées aux connexions de longue durée entre deux vols (temps non actif) et des pénalités associées aux services de vol dont la durée est inférieure au minimum spécifié (qui est toujours payé même si la durée d'un service de vol est inférieure à ce minimum). Enfin, nous pouvons pénaliser les services de vol dont la durée est très proche de la valeur maximale. Étant donné que même de petites perturbations supplémentaires peuvent rendre ces services de vol non réalisables, ce dernier type de pénalités contribuera à améliorer la robustesse des solutions obtenues.

## **CHAPITRE 4**

# **Gestion simultanée des horaires d'équipage à plusieurs membres et des horaires de vol durant le jour d'opération**

### **4.1 Introduction**

La première approche optimale qui considère simultanément les problèmes de confection des horaires d'équipage et des horaires de vol a été proposée au Chapitre 3. Cette approche nous a permis de modifier des activités individuelles planifiées pour un ensemble de pilotes en retardant, si nécessaire, certains vols tout en préservant les itinéraires prédéfinis des avions. Toutes les modifications concernent une seule journée de travail. Les connexions importantes des passagers sont préservées en ajoutant des contraintes de préséance entre les vols appropriées. La maintenance prévue peut être respectée implicitement en fixant à l'avance le retard maximal accepté pour certains vols. L'objectif est de minimiser le nombre de vols non couverts, le retard total de tous

les vols considérés et le nombre de pilotes dont les journées de travail subséquentes doivent être modifiées suite aux changements apportés pour la journée considérée. Le même modèle peut être appliqué pour résoudre un cas particulier du problème concernant les agents de bord. Il s'agit d'affecter des services de vol identiques à tous les agents de bord qui ont les mêmes activités planifiées pour la journée d'opération considérée.

Dans ce chapitre, nous traitons une forme plus générale du problème de gestion des horaires d'agent de bord durant la journée d'opération. Ce qui signifie que les agents de bord ayant le même plan pour la journée considérée peuvent recevoir des modifications différentes. Ainsi, le problème consiste à couvrir chacun des vols considérés par un nombre prédéfini d'agents de bord, en retardant au besoin certains des vols. Les itinéraires fixes d'avion, des connexions de passager importantes et la maintenance planifiée des avions peuvent être préservés en ajoutant les contraintes correspondantes, tel qu'expliqué au chapitre précédent. Chacun des vols considérés appartiendra à plusieurs services de vol personnalisés. Le nombre de services de vol est égal au nombre de membres d'équipage requis pour couvrir le vol considéré. Si le vol doit être retardé, sa nouvelle heure de départ doit être identique pour tous les agents de bord affectés à ce vol. Ces *contraintes de même heure de départ* représentent la principale caractéristique qui distingue ce modèle du modèle présenté au Chapitre 3. En plus des contraintes de préséance, des connexions de passager et de maintenance d'avion, qui ont déjà été introduites dans le modèle qui s'applique aux équipages à membre unique (Chapitre 3), quelques contraintes supplémentaires peuvent être rajoutées au problème maître. Il s'agit des contraintes de préséance qui doivent assurer la faisabilité des itinéraires du personnel technique, préalablement modifiés. De plus, la largeur des fenêtres de temps initiales associées aux vols considérés, peut

être réduite afin de s'assurer que la durée maximale des services de vol du personnel technique ne sera pas dépassée. Nous considérons trois variantes du modèle. Le premier modèle comprend des contraintes de recouvrement strictes, alors que les deux autres ont des contraintes souples et un coût pour le sous-recouvrement. Un des objectifs des deux derniers modèles est de minimiser le nombre de vols non couverts. Plus précisément, dans le deuxième modèle nous permettons de couvrir des vols par des équipages incomplets. Un coût linéaire est associé à chaque membre d'équipage manquant. Dans le troisième modèle, un vol est considéré couvert seulement si un équipage complet lui est associé et une grande pénalité de coût est associée à chacun des vols qui n'est pas complètement couvert. Les autres éléments de l'objectif des trois modèles sont de minimiser le retard total des vols considérés et le nombre total d'agents de bord dont les services de vol subséquents doivent être changés suite aux modifications proposées.

Une première contribution de ce chapitre est d'ajouter les *contraintes de même heure de départ* à l'ensemble des contraintes présentées au Chapitre 3. Nous proposons une formulation de type réseau multi-commodités incluant ce nouveau type de contraintes. Chacune de ces nouvelles contraintes implique plusieurs membres d'équipage. Ainsi, les contraintes de même heure de départ représentent les contraintes *globales* du problème. Le problème maître est formulé comme un problème de type partitionnement qui contient les contraintes usuelles de recouvrement des vols et les contraintes additionnelles, soient les contraintes de préséance entre les vols et les contraintes de même heure de départ. Le sous-problème représente le problème de plus court chemin avec fenêtres de temps et des coûts linéaires sur les variables de

temps, qui a été étudié dans Ioachim *et al.* ([7], [8]), Desaulniers *et al.* [1] et au Chapitre 3. Une seconde contribution est d'avoir considéré deux modèles différents, c'est-à-dire, deux fonctions de coût pour des vols non couverts. Une troisième contribution est d'avoir implanté et testé une nouvelle méthode de séparation et d'évaluation, décrite dans Ioachim *et al.* [8], afin d'obtenir une solution entière optimale pour le deuxième modèle. De plus, nous avons prouvé que cette méthode était utilisable dans un contexte plus général. La nouvelle méthode apporte des améliorations importantes par rapport à la méthode implantée par Ioachim *et al.* [8]. Cette nouvelle stratégie de séparation nous a permis de résoudre des problèmes de taille réelle, qui ne pouvaient pas être résolus autrement d'une façon efficace. Une quatrième contribution est d'avoir amélioré cette nouvelle méthode de séparation et d'évaluation en ajoutant des décisions de séparation sur les variables associées aux agents de bord artificiels afin de résoudre efficacement des problèmes en utilisant le troisième modèle. Enfin, les deux modèles ont été implantés et testés sur plusieurs problèmes. Les expérimentations numériques confirment l'efficacité des deux stratégies de séparation et d'évaluation sur des problèmes de taille réelle.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. La Section 4.2 présente le premier modèle et la méthode proposée pour le résoudre. Dans la même section nous présentons les détails concernant la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation. La Section 4.3 décrit les deux autres modèles et la version modifiée de la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation, qui a été développée pour résoudre efficacement le troisième modèle. Dans la même section nous présentons les résultats numériques pour le deuxième et le troisième modèle, obtenus sur des problèmes test. Enfin, des conclusions et des perspectives sont présentées dans la Section 4.4.

## 4.2 Modèle proposé

Le problème est de couvrir par des agents de bord disponibles un ensemble de vols et de déterminer leurs nouvelles heures de départ. Chaque vol doit être couvert par un nombre prédéfini d'agents de bord. La fenêtre de temps associée à un vol est définie selon des contraintes commerciales et opérationnelles et peut être réduite afin de respecter la durée maximale des services de vol déjà réparés pour le personnel technique. Si la fenêtre de temps est réduite à un point, alors l'heure de départ du vol correspondant est fixe. Sinon, l'heure de départ est flexible. L'ensemble des candidats disponibles comprend les agents de bord planifiés et en réserve. Les agents de bord qui ont des activités planifiées pour le jour considéré sont considérés comme des agents de bord planifiés, alors que ceux qui demeurent à la base aérienne disponibles pour travailler sont considérés comme des agents de bord en réserve. Les contraintes concernant un service de vol, telles que le temps minimum de connexion entre deux vols, le temps de briefing et de debriefing et la durée maximum d'un service de vol doivent être respectées. Le problème présenté dans ce chapitre est une généralisation du problème défini et résolu au Chapitre 3, où l'équipage est constitué d'un seul membre. Le Chapitre 3 fournit également une revue de la littérature qui concerne le problème de gestion des équipages durant les opérations quotidiennes.

Nous avons formulé le problème comme un problème de type réseau multi-commodités à coût minimal, avec des contraintes supplémentaires. Il s'agit d'une formulation non linéaire, en nombres entiers, où chaque agent de bord appartenant à l'ensemble des agents disponibles est considéré comme une commodité distincte.

### 4.2.1 Notation

Soit  $F$  l'ensemble des numéros de vol. Chaque numéro  $f \in F$  correspond au vol qui doit être couvert durant le jour d'opération par un nombre prédéfini d'agents de bord. Soit  $n_f$  le nombre requis d'agents de bord pour couvrir le vol ayant le numéro  $f \in F$ . Le vol  $f \in F$  peut être représenté par  $n_f$  copies qui doivent, chacune, être couvertes par un seul agent de bord. Toutes ces  $n_f$  copies ont le même numéro  $f \in F$ , ainsi que toutes les autres informations associées au vol  $f$ . Ainsi, un numéro de vol  $f \in F$  peut être associé à un ( $n_f = 1$ ) ou à plusieurs vols ( $n_f > 1$ ) identiques au vol original. Chacun de ces  $n_f$  vols doit être couvert par un seul membre d'équipage. Ainsi, l'ensemble des vols  $F$  peut être considéré comme l'ensemble des numéros communs à plusieurs vols qui doivent être couverts pendant le jour d'opération.

Soit  $N$  l'ensemble des tous les vols  $i$  qui doivent être couverts par un seul membre d'équipage,  $|N| = \sum_{f \in F} n_f$ . Évidemment, nous avons que  $|F| \leq |N|$ . Soit  $f_i$ , avec  $f_i \in F$ , le numéro commun du vol  $i$ . Il s'ensuit que toutes les paires de vols  $(i, j) \in N \times N$  tels que  $f_i = f_j$  et  $f_i \in F$ , doivent avoir la même heure de départ. Autrement dit, toutes les copies représentant un même vol doivent être retardées, si nécessaire, d'une même valeur. Notons  $[a_i, b_i]$  la fenêtre de temps pour l'heure de départ du vol  $i \in N$ ,  $d_i$  sa durée et  $g_i$  le temps minimum au sol associée au vol  $i \in N$ . Soit  $c_{ij}$  le temps minimum de connexion de passager entre les vols  $i$  et  $j$ , où  $(i, j) \in N \times N$ ,  $f_i \neq f_j$  et  $(f_i, f_j) \in F \times F$ .

Chacun des vols considérés a une heure de départ soit fixe soit flexible. Soit  $M \subset N$  l'ensemble des vols dont les heures de départ sont flexibles. Certaines contraintes de préséance entre les vols doivent être imposées afin d'assurer la faisabilité

des itinéraires d'avion et des connexions de passager. Soit  $R$  l'ensemble des paires de vols  $(i, j) \in N \times N$ , où le numéro de vol  $f_j \in F$  suit le numéro de vol  $f_i \in F$  dans un itinéraire d'avion ou bien lorsqu'il y a un groupe important de passagers qui font une connexion du vol  $f_i$  vers le vol  $f_j$ . Soit  $d_{ij}$  le temps minimum requis entre les vols  $f_i$  et  $f_j$ . Nous avons que  $d_{ij} = d_i + g_i$  si ces deux vols sont consécutifs dans l'itinéraire d'un avion et que  $d_{ij} = d_i + c_{ij}$  s'il y a une connexion importante de passager entre les vols  $f_i$  et  $f_j$ . Comme nous l'avons vu au Chapitre 3 si  $i$  et  $j$  ont tous les deux des heures de départ flexibles, la contrainte de préséance entre les vols doit être imposée explicitement. Soit  $W = R \cap (M \times M)$ .

Notons  $K$  l'ensemble des toutes les commodités  $k$ . Dans le modèle que nous proposons, une commodité est associée à chacun des membres des équipages considérés. Ainsi, ce modèle est en mesure de distinguer les membres dont les conditions initiales sont différentes. On entend par conditions initiales d'un agent de bord le moment où les modifications du service de vol planifié peuvent commencer au plus tôt (ou bien le moment où la construction d'un nouveau service de vol peut commencer s'il n'y avait aucun service de vol planifié pour le membre d'équipage considéré) et l'aéroport associé. Un service de vol modifié, qui remplace un service de vol planifié, doit être inséré dans le bloc mensuel planifié du membre d'équipage considéré. Par conséquent, la durée maximale d'un service de vol modifié varie d'un membre d'équipage à un autre. La durée d'un service de vol personnalisé dépend de la durée du service de vol précédent et du début du service de vol subséquent. En plus des conditions initiales, nous avons les conditions finales pour un membre d'équipage : l'aéroport planifié et le moment où le service de vol doit terminer au plus tard. Quant aux membres d'équipage en réserve, ces conditions finales ne s'appliquent pas toujours. Par contre, la contrainte concernant la durée maximale d'un service de vol

doit toujours être respectée. Soit  $G^k = (V^k, A^k)$ , où  $V^k$  est l'ensemble des noeuds et  $A^k$  l'ensemble des arcs, le graphe associé au membre d'équipage  $k$ . L'ensemble des noeuds  $V^k$  contient le noeud source  $o(k)$  qui représente les conditions initiales du membre  $k$ , le noeud puits  $d(k)$  qui correspond aux conditions finales du membre  $k$  et l'ensemble des noeuds  $N^k$ ,  $N^k \subset N$ , qui peuvent être visités par un chemin de la commodité  $k$ . Tous les chemins réalisables dans  $G^k$ , qui correspondent à des services de vol valides du membre d'équipage  $k$ , commencent au noeud  $o(k)$  et finissent au noeud  $d(k)$ . Les restrictions de temps aux noeuds source et puits sont données par  $[a_{o(k)}, b_{o(k)}]$  et  $[a_{d(k)}, b_{d(k)}]$  respectivement. Nous avons par ailleurs que  $a_{o(k)} = a_{d(k)}$  et  $b_{o(k)} \leq b_{d(k)}$ .

Soit  $T_{i,j}^c$  le temps minimum de connexion entre deux vols consécutifs  $i$  et  $j$ , affectés au même membre d'équipage. Le temps minimum de connexion prend une valeur particulière, prescrite par la convention collective, suivant la nature de la connexion (entre deux vols domestiques, entre deux vols internationaux, d'un vol international à un vol domestique ou vice versa, etc.). Cette valeur constante doit être respectée seulement si les deux vols consécutifs considérés, qui appartiennent au service de vol d'un membre d'équipage, ne sont pas affectés à un même avion. Sinon, le temps minimum de connexion est égal au temps minimum au sol du premier des deux vols en question. Soit  $s_{ij}$  le temps minimum requis entre l'heure d'arrivée du vol  $i$  et l'heure de départ du vol  $j$ . Il faut noter qu'une attente sans pénalité de coût est permise avant le début des fenêtres de temps à tous les aéroports.

L'ensemble des arcs  $A^k$  du graphe  $G^k$  contient trois types d'arcs : les arcs de début, les arcs de fin et les arcs de connexion. Un arc de début  $(o(k), i)$ , pour  $i \in N^k$ , relie le noeud source  $o(k)$  avec le noeud  $i$  si l'aéroport de départ du vol  $i$  est compatible

avec la position initiale du membre d'équipage  $k$  et si  $a_{o(k)} + T_b \leq b_i$ , où  $T_b$  représente le temps minimum de briefing. Un arc de fin  $(i, d(k))$ , pour  $i \in N^k$ , relie le vol  $i$  avec le noeud puits  $d(k)$  si  $a_i + d_i + T_d \leq b_{d(k)}$ , où  $T_d$  représente le temps minimum de debriefing. Un arc de connexion  $(i, j) \in A^k$  représente une connexion réalisable d'équipage entre les vols  $i$  et  $j$ . Une telle connexion est dite réalisable si l'aéroport de destination du vol  $i$  correspond à l'aéroport de départ du vol  $j$ . De plus, l'heure où le membre  $k$  peut commencer au plus tôt le vol  $j$  après avoir terminé le vol  $i$  (le même chemin dans le graphe  $G^k$ ) ne peut pas dépasser la borne supérieure de la fenêtre de temps associée au noeud  $j$ . Ainsi, l'arc de connexion  $(i, j) \in A^k$  existe si  $a_i + d_i + s_{ij} \leq b_j$ , où  $s_{ij} = g_i$  si le vol  $j$  suit le vol  $i$  dans l'itinéraire d'un avion. Sinon,  $s_{ij} = \max(g_i, T_{i,j}^c)$ . Enfin, un arc additionnel  $(o(k), d(k))$  est créé pour chaque membre d'équipage  $k$ . Cet arc représente un membre d'équipage dont les conditions initiales ne changent pas, c'est-à-dire, à qui aucune activité supplémentaire ne sera affectée pendant le jour d'opération considéré.

Le coût  $c_{ij}^k$  est associé aux arcs  $(i, j) \in A^k$ . Pour forcer un nouveau service de vol construit pour le membre d'équipage  $k$  de finir à l'aéroport planifié (la condition finale du membre considéré), une pénalité de coût est introduite. Cette pénalité est associée à chaque arc de fin  $(i, d(k))$ , pour  $i \in N$ , si l'aéroport de destination du vol  $i$  ne correspond pas à l'aéroport final planifié qui est associé au noeud puits  $d(k)$ . La même pénalité est associée aux arcs  $(o(k), d(k))$  si l'aéroport associé au noeud source  $o(k)$  ne correspond pas à l'aéroport planifié associé au noeud puits  $d(k)$ . Sinon, aucune pénalité n'est associée au membre d'équipage  $k$  qui est planifié, mais qui n'est pas utilisé. Ces deux pénalités s'appliquent également aux membres d'équipage en réserve dont les conditions finales sont prédéfinies (des vacances ou des périodes d'entraînement préaffectées, etc.). Une pénalité associée à l'usage d'un

membre d'équipage en réserve pourrait être appliquée afin de maximiser l'usage des membres planifiés, plutôt que des membres en réserve, dans la nouvelle solution. Ce coût peut être associé aux arcs de début  $(o(k), i)$  ou aux arcs de fin  $(i, d(k))$ , où  $i \in N^k$  et  $k$  correspond à un membre d'équipage en réserve.

Soit  $X_{ij}^k$ ,  $k \in K$ ,  $(i, j) \in A^k$ , une variable binaire de flot qui est égale à 1 si l'arc  $(i, j)$  se trouve dans le service de vol du membre  $k$  dans la solution et 0 sinon. Notons  $T_i^k$ ,  $k \in K$ ,  $i \in N^k$ , la variable de temps qui représente l'heure de départ du vol  $i$  s'il est accompli par le membre d'équipage  $k$  et zéro sinon. Soit  $T_{f_i}$ ,  $f_i \in F$ , la variable non-négative de temps qui représente le retard du vol  $i$ ,  $T_{f_i} = \sum_{k \in K} T_i^k - a_i$ . Si les deux vols  $i$  et  $j$  appartenant à  $N$  représentent les copies d'un même vol, c'est-à-dire, si  $f_i = f_j$ ,  $f_i \in F$ , ces deux copies doivent avoir le même retard; ainsi  $T_{f_i} = T_{f_j}$ . Notons  $F' \subset F$  l'ensemble des numéros de vols associés aux vols avec un horaire flexible, qui doivent être couverts par plusieurs membres d'équipage ( $n_f > 1$ ). Soit  $M' \subset M$  l'ensemble des copies de vols correspondant à l'ensemble  $F'$ . Ainsi,  $|M'| = \sum_{f \in F'} n_f$ .

En plus des pénalités concernant la construction des services de vol personnalisés, qui sont modélisées par des coûts sur les arcs, nous avons un coût fixe unitaire  $u_i^k$  qui est associé à chaque minute de retard du vol  $i \in N^k$ ,  $k \in K$ . Si  $u_f$  représente le coût unitaire associé à une minute de retard du vol  $f \in F$ , alors le coût unitaire associé à sa copie  $i$  ( $f_i = f$ ) est donné par  $u_i = u_f/n_f$ . Cette pénalité est modélisée par un coût sur les variables de temps des noeuds.

## 4.2.2 Formulation mathématique

Le problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec fenêtres de temps et contraintes additionnelles de préséance entre les vols et de même heure de départ se formule mathématiquement de la façon suivante :

$$\text{Minimiser } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^k X_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in N^k} u_i^k T_i^k \quad (4.1)$$

sujet à :

$$\sum_{k \in K} \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in N \quad (4.2)$$

$$\sum_{k \in K} T_i^k - T_{f_i} = a_i, \quad \forall i \in M' \quad (4.3)$$

$$\sum_{k \in K} T_j^k - \sum_{k \in K} T_i^k \geq d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in W \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in N^k} X_{o(k),j}^k = \sum_{j \in N^k} X_{j,d(k)}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k - \sum_{j: (j,i) \in A^k} X_{ji}^k = 0, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (4.6)$$

$$X_{ij}^k (T_i^k + d_i + s_{ij} - T_j^k) \leq 0, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k \quad (4.7)$$

$$a_i \leq T_i^k \leq b_i, \quad \forall k \in K, \forall i \in \{o(k), d(k)\} \quad (4.8)$$

$$a_i \left( \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k \right) \leq T_i^k \leq b_i \left( \sum_{j: (i,j) \in A^k} X_{ij}^k \right), \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k \quad (4.9)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire}, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A^k. \quad (4.10)$$

La fonction de coût (4.1) minimise, respectivement, la somme des coûts sur les arcs et sur les noeuds, soit le nombre de membres d'équipage dont les opérations planifiées pour la journée suivante doivent être modifiées suite aux modifications proposées

pour la journée considérée, et le retard total pour l'ensemble des vols considérés. Les contraintes (4.2), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.10) sont les contraintes d'un problème d'itinéraires de véhicule ou d'horaires d'équipage, où tout chemin correspondant à une commodité  $k \in K$  commence au noeud  $o(k)$  et se termine au noeud  $d(k)$ . Les contraintes (4.3), (4.4) et (4.7) représentent, respectivement, les contraintes de même heure de départ, les contraintes de préséance entre les vols et les contraintes de compatibilité non linéaire entre les variables de flot et les variables de temps. Les contraintes (4.8) et (4.9) représentent les contraintes des fenêtres de temps. La contrainte (4.9) impose  $T_i^k = 0$ ,  $k \in K$ ,  $i \in N^k$ , chaque fois que  $\sum_{j:(i,j) \in A^k} X_{ij}^k = 0$ . Il s'ensuit que seules les variables de temps associées aux noeuds du plus court chemin contribuent à la fonction de coût.

Les variables  $T_f$ ,  $i \in N$ , peuvent être éliminées de la formulation du problème en les écrivant en fonction des variables  $T_i^k$ . Cependant, nous préférons la formulation qui les conserve, car elles sont utilisées plus tard pour définir les différentes stratégies de séparation et d'évaluation.

### 4.2.3 Méthode de résolution

Pour obtenir une solution entière optimale du problème, nous utilisons une approche de génération de colonnes jumelée à un processus de séparation et d'évaluation progressive. Le modèle (4.1) à (4.10) possède une structure diagonale par blocs, (4.5) à (4.10), chaque bloc représentant un membre d'équipage. La fonction de coût (4.1) est aussi séparable par membre d'équipage. Il nous reste les contraintes couplantes, soient les contraintes (4.2) de recouvrement des vols, les contraintes (4.3) de même

heure de départ et les contraintes (4.4) de préséance entre les vols. Dans un premier temps, la relaxation linéaire de la formulation (4.1) à (4.10) est résolue par génération de colonnes. Afin d'obtenir une solution optimale en nombres entiers, cette première étape est incorporée dans un arbre de séparation et d'évaluation, tel que chaque solution de la relaxation linéaire du problème fournit une borne inférieure de la branche explorée. Une technique spécialisée de séparation et d'évaluation, qui met à profit les caractéristiques particulières du problème, est utilisée pour obtenir une solution entière optimale du problème.

La stratégie de décomposition comprend le problème maître et un sous-problème pour chaque pilote  $k$ . Le problème maître comprend la fonction objectif (4.1) et les contraintes (4.2) à (4.4), alors que les contraintes (4.5) à (4.10) se retrouvent dans le sous-problème du membre d'équipage  $k$ .

**Problème maître:** Soit  $\Omega^k$  l'ensemble de tous les points extrêmes  $p$  du sous-problème  $k \in K$ . Tout point extrême correspond à un chemin réalisable (un service de vol valide) dans  $G^k$ . Soit  $\theta_p^k$  la variable du problème maître associée à la sélection du chemin  $p \in \Omega^k$  pour le membre d'équipage  $k$ , dont le coût est égal à  $c_p^k$ . Notons

$$(x_p^k, t_p^k) = (x_{ij,p}^k, t_{i,p}^k), \quad (i, j) \in A^k, i \in N^k, p \in \Omega^k, \quad (4.11)$$

les coordonnées du point extrême  $p$  du sous-problème  $k$ . Les variables utilisées dans la formulation (4.1) à (4.10), qui sont également utilisées dans le sous-problème, sont reliées aux variables du problème maître par les relations suivantes :

$$X_{ij}^k = \sum_{p \in \Omega^k} x_{ij,p}^k \theta_p^k, \quad \forall (i,j) \in A^k, \forall k \in K, \quad (4.12)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire}, \quad \forall (i,j) \in A^k, \forall k \in K, \quad (4.13)$$

$$T_i^k = \sum_{p \in \Omega^k} t_{i,p}^k \theta_p^k, \quad \forall i \in N^k, \forall k \in K, \quad (4.14)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1, \quad \forall k \in K, \quad (4.15)$$

$$\theta_p^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k. \quad (4.16)$$

Dans le problème maître, soit  $a_{i,p}^k$ ,  $i \in N$ ,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , le coefficient qui correspond aux contraintes (4.2) de recouvrement des vols et  $b_{i,p}^k$ ,  $i \in N$ ,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , le coefficient qui correspond aux contraintes (4.3) de même heure de départ et aux contraintes (4.4) de préséance entre les vols. Le coût  $c_p^k$  et les coefficients  $a_{i,p}^k$  et  $b_{i,p}^k$  sont calculés de la façon suivante :

$$c_p^k = \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^k x_{ij,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k, \quad (4.17)$$

$$a_{i,p}^k = \sum_{j:(i,j) \in A^k} x_{ij,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k, \forall p \in \Omega^k, \quad (4.18)$$

$$b_{i,p}^k = t_{i,p}^k, \quad \forall k \in K, \forall i \in N^k, \forall p \in \Omega^k. \quad (4.19)$$

En utilisant la même notation, le problème maître devient :

$$\text{Minimiser } \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} c_p^k \theta_p^k + \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} \sum_{i \in N^k} u_i^k b_{i,p}^k \theta_p^k \quad (4.20)$$

sujet à :

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} a_{i,p}^k \theta_p^k = 1 \quad , \quad \forall i \in N \quad (4.21)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} b_{i,p}^k \theta_p^k - T_{f_i} = a_i \quad , \quad \forall i \in M' \quad (4.22)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} (b_{j,p}^k - b_{i,p}^k) \theta_p^k \geq d_{ij} \quad , \quad \forall (i, j) \in W \quad (4.23)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1 \quad , \quad \forall k \in K \quad (4.24)$$

$$\theta_p^k \geq 0 \quad , \quad \forall k \in K, \forall p \in \Omega^k \quad (4.25)$$

$$X_{ij}^k = \sum_{p \in \Omega^k} x_{ij,p}^k \theta_p^k \quad , \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k \quad (4.26)$$

$$X_{ij}^k \text{ binaire} \quad , \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^k. \quad (4.27)$$

Les seules variables entières dans la formulation (4.20) à (4.27) sont les variables  $X_{ij}^k$ . Ainsi, la relaxation linéaire du problème maître est obtenue en éliminant les contraintes (4.26) et (4.27).

Nous allons prouver que la formulation (4.20) à (4.27) du problème possède une solution optimale avec  $\theta_p^k$  binaire et une valeur unique de l'heure de visite du noeud  $i \in N$ . Cette caractéristique nous servira pour introduire une nouvelle méthode de séparation et d'évaluation.

**Proposition 4.2.1** *La formulation (4.20) à (4.27) possède une solution optimale avec  $\theta_p^k$  binaire,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ .*

**Preuve.** Soit  $X_{ij}^k$ ,  $(i, j) \in A^k$ ,  $k \in K$ , et  $\theta_p^k$ ,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , les variables du problème maître associées à une solution optimale de la formulation (4.20) à (4.27). Si  $\theta_p^k$  est

une variable fractionnaire associée au chemin  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , soit  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  la succession de noeuds (vols) visités par le chemin fractionnaire  $p$  qui commence au noeud  $o(k)$  et se termine au noeud  $d(k)$ . Puisque  $X_{i_l, i_{l+1}}^k > 0$  pour  $1 \leq l \leq n-1$ , d'après la relation (4.27) nous avons alors que  $X_{i_l, i_{l+1}}^k = 1$ . Étant donné qu'une unité de flot passe par l'arc  $(i_l, i_{l+1})$  pour  $1 \leq l \leq n-1$ , d'après les contraintes (4.26) on en déduit qu'il existe au moins un autre chemin fractionnaire de la commodité  $k$  qui utilise le même arc. D'après la contrainte (4.21) nous savons qu'une seule unité de flot passe par le noeud  $i_l$ . Nous en déduisons qu'aucun chemin de la commodité  $k$  ne peut passer par le noeud  $i_l$  sans également passer par le noeud  $i_{l+1}$  pour  $1 \leq l \leq n-1$ . Enfin, nous pouvons en déduire que tous les chemins de la commodité  $k$  ayant un flot non nul qui passent par le noeud  $i_l$  pour  $1 \leq l \leq n$ , doivent visiter la succession de noeuds  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ . Tous ces chemins peuvent être remplacés par un seul chemin  $p$  tel que  $\theta_p^k = 1$ . Ce chemin visite le noeud  $i \in N$  au moment calculé comme la somme pondérée des heures de visite de tous les chemins correspondants qui visitent le noeud  $i$ .

**Proposition 4.2.2** *Si  $\theta_p^k$ ,  $p \in \Omega^k$ ,  $k \in K$ , sont binaires dans une solution de la formulation (4.20) à (4.26), alors  $X_{ij}^k$ ,  $k \in K$ ,  $(i, j) \in A^k$ , sont binaires.*

**Preuve.** La preuve est directe. Si les variables  $\theta_p^k$  sont binaires, d'après la relation (4.26) nous avons directement que  $X_{ij}^k$  sont des variables binaires.

**Proposition 4.2.3** *La formulation (4.20) à (4.27) possède une solution optimale avec l'heure de visite  $T_i$  unique pour chaque noeud  $i \in N$ .*

**Preuve.** Il existe une solution optimale avec  $\theta_p^k$  binaire d'après la Proposition 4.2.1. Dans cette solution il y a un seul chemin  $p$  qui visite le noeud  $i \in N$  (d'après (4.21)) à l'heure unique de visite.

Cependant, la proposition inverse n'est pas valide. Si l'heure de visite de chacun des noeuds est unique, les  $\theta_p^k$  ne sont pas nécessairement binaires, étant donné que nous pouvons avoir plusieurs chemins associés aux commodités différentes qui visitent la même séquence de noeuds. Dans ce cas, les heures de visite des noeuds correspondants sont uniques, car chaque heure de visite est calculée comme la somme pondérée des heures de visite associées aux chemins correspondants. Toutefois, les variables de chemin correspondantes  $\theta_p^k$  peuvent être fractionnaires.

**Sous-problèmes :** L'objectif du sous-problème  $k$  est de produire la colonne de plus petit coût réduit, générée par le graphe  $G^k$ . Le coût réduit d'un chemin dans le graphe du sous-problème est calculé en utilisant les variables duales associées aux contraintes du problème maître. Soit  $\alpha = \{\alpha_i \mid i \in N\}$ ,  $\beta = \{\beta_i \mid i \in N\}$ ,  $\gamma = \{\gamma_{(i,j)} \mid (i,j) \in W\}$  et  $\delta = \{\delta^k \mid k \in K\}$  les vecteurs des variables duales associés aux ensembles de contraintes (4.21), (4.22), (4.23) et (4.24) respectivement. Notons que la variable duale  $\beta_i$  est associée à chaque vol  $i \in M'$ , puisque les contraintes de même heure de départ s'appliquent seulement aux vols avec un horaire flexible qui doivent être couverts par au moins deux membres d'équipage. Pourtant, en supposant que la variable duale  $\beta_i$  associée au vol  $i \in N \setminus M'$  qui doit être couvert par un seul membre d'équipage est égale à zéro, nous pouvons associer une variable duale  $\beta_i$  à chaque vol  $i \in N$ . Ainsi, le vecteur  $\beta$  des variables duales  $\beta_i$  est donné pour tout  $i \in N$ . Comme dans la formulation originale du problème, nous trouvons deux types de variables dans le sous-problème  $k$ . Ce sont les variables de flot  $X_{ij}^k$ ,  $(i,j) \in A^k$  qui sont égales à 1 pour

les arcs du plus court chemin et 0 sinon, et les variables de temps  $T_i^k$  qui représentent les heures de départ des vols  $i \in N^k$ . Ainsi, la fonction économique du sous-problème  $k$  est de la forme :

$$\text{Minimiser } \sum_{(i,j) \in A^k} (c_{ij}^k - \alpha_j) X_{ij}^k + \sum_{i \in N^k} (u_i^k - \beta_i) T_i^k - \sum_{(i,j) \in W^k} \gamma_{(i,j)} (T_j^k - T_i^k) - \delta^k. \quad (4.28)$$

Le sous-problème  $k$  défini par les relations (4.28) et (4.5) à (4.10) est un plus court chemin avec fenêtres de temps et coûts linéaires sur les variables de flot et de temps. Le coût d'un chemin dans le graphe  $G^k$  est calculé en fonction des arcs inclus dans ce chemin et les heures de visite des noeuds correspondants. Nous rappelons que les contraintes (4.9) de fenêtres de temps imposent la valeur zéro pour les variables de temps associées aux noeuds qui n'appartiennent pas au plus court chemin. L'algorithme de programmation dynamique pour les réseaux sans cycle développé par Ioachim *et al.* [7] et appliqué d'ailleurs au Chapitre 3, est utilisé pour résoudre ce type de sous-problème.

**Solutions entières :** Une fois la relaxation linéaire du problème maître résolue, le processus est imbriqué dans un arbre de séparation et d'évaluation afin d'obtenir une solution entière optimale du problème. Nous utilisons un arbre binaire de séparation et d'évaluation dont la racine correspond à la relaxation linéaire du problème maître, définie par (4.20) à (4.25). D'autres noeuds sont créés en ajoutant des décisions dans le problème maître et dans le sous-problème. Les contraintes (4.26) et (4.27), qui ont été éliminées lors de la résolution de la relaxation linéaire du problème, doivent être imposées afin d'obtenir des variables entières de flot  $X_{ij}^k$ . Pour notre application, nous utilisons une technique de séparation et évaluation qui implique des décisions sur les

variables de temps  $T_f$ ,  $f \in F$  et sur les variables de flot  $X_{ij}^k$ ,  $k \in K$ ,  $(i, j) \in A^k$ . Les décisions sur les variables de temps ont été présentées pour la première fois par Gélinas *et al.* [6]. Les décisions sur les variables de flot ont été utilisées, entre autres, dans [1] et [4]. La technique qui implique des décisions sur les deux types de variables, soit les variables de temps et les variables de flot, a été développée par Ioachim *et al.* [8] pour résoudre le problème d'affectation et de routage des avions. Cette technique a été utilisée au Chapitre 3 pour résoudre le problème de gestion simultanée des horaires de vol et des équipages à membre unique durant les opérations quotidiennes. Dans les deux applications précédentes, les décisions sur les variables de temps s'appliquent seulement lorsque ces variables sont fractionnaires. Notons que toute variable  $T_f$  apparaît dans au moins deux contraintes du problème maître (tous les  $i \in M'$  tels que  $f_i = f$ ). Soient  $\underline{b}$  et  $\bar{b}$  les bornes inférieure et supérieure de  $T_f$  respectivement. Ainsi,  $\underline{b} \leq T_f \leq \bar{b}$ . Les bornes initiales de  $T_f$  sont données par  $\underline{b} = 0$ ,  $\bar{b} = b_i - a_i$ , pour  $f_i = f$  et  $i \in M'$ . Il faut noter que les décisions sur les variables de temps, telles que définies par Ioachim *et al.* [8], s'appliquent seulement si les données du problème reliées au temps sont entières. Dans ce cas,  $T$  doit être entier dans la solution optimale. Les étapes principales de la méthode proposée par cet auteur sont présentées ci-dessous.

**Étape 1: Choisir une variable fractionnaire de décision.** Lorsque nous obtenons une solution fractionnaire après avoir résolu un noeud de branchement  $i$ , il faut d'abord identifier, s'il y en a, des variables de temps fractionnaires  $T_f$ . Parmi ces variables fractionnaires nous cherchons celle qui apparaît dans le plus grand nombre de contraintes du problème maître. La prochaine décision sera imposée sur cette variable. Notons  $T$  la valeur de la variable sélectionnée et allons à l'Étape 2. S'il n'y a aucune variable de temps fractionnaire, mais la solution du problème maître est

fractionnaire, la procédure de séparation et d'évaluation continue par des décisions sur les variables de flot, c.-à.-d. sur les arcs qui correspondent aux variables de flot fractionnaires.

**Étape 2 : Définir les deux branches.** En utilisant les bornes de la variable choisie  $T_f$ ,  $\underline{b}$  et  $\bar{b}$ , définir deux branches correspondant aux nouvelles décisions données par  $\underline{b} \leq T_f \leq \lfloor T \rfloor$  et  $\lceil T \rceil \leq T_f \leq \bar{b}$ . Ces décisions sont imposées par la suite dans le problème maître et dans le sous-problème pour éliminer la valeur fractionnaire courante  $T$ .

**Étape 3 : Identifier la décision la plus prometteuse.** Calculer la somme de toutes les variables du problème maître correspondant à des chemins qui visitent le noeud considéré dans les deux intervalles de temps définis antérieurement. La décision la plus prometteuse correspond à la somme ayant la plus grande valeur. Notons  $\underline{h} \leq T_f \leq \bar{h}$  la décision choisie.

**Étape 4 : Imposer la décision sélectionnée.** La décision  $\underline{h} \leq T_f \leq \bar{h}$  est imposée dans le problème maître en éliminant toutes les colonnes avec  $b_{i,p}^k \notin [\underline{h}, \bar{h}]$ . Elle est aussi imposée dans le sous-problème. Pour ce faire, les fenêtres de temps associées aux noeuds  $i \in M'$  tels que  $f_i = f$  doivent être modifiées par  $[a_i + \max(\underline{b}, \underline{h}), a_i + \min(\bar{b}, \bar{h})]$ . Ainsi, toutes les fenêtres de temps associées aux vols (noeuds) ayant le même numéro sont modifiées. La prochaine solution de plus court chemin respectera la décision courante.

**Étape 5 : Résoudre le noeud courant de l'arbre de séparation et d'évaluation.** Réoptimiser par génération de colonnes le problème maître obtenu suite à l'application de la décision. Toutes les colonnes générées à ce noeud sont compatibles avec la dernière décision imposée.

Pour résoudre notre problème, nous avons implanté une nouvelle technique de séparation concernant les variables de temps. Cette nouvelle stratégie, proposée dans Ioachim *et al.* [8], réduit le domaine des variables  $T_i^k$  et améliore la borne inférieure avant que le processus de séparation et d'évaluation se poursuive par des décisions sur les variables de flot. Nous imposons des décisions pour obtenir l'heure unique de visite de chacun des noeuds  $i \in N$ . Une telle solution optimale existe d'après la Proposition 4.2.3. Soit  $i$  un noeud avec plusieurs heures de visite  $t_{i,p}^k$ . Soit  $T$ , défini précédemment, la valeur de la variable de temps  $T_f$  qui est impliquée dans la contrainte de même heure de départ associée au noeud  $i$  ( $f_i = f$ ). Rappelons que la variable de temps  $T_{f_i}$ , associée au noeud  $i \in M'$ , est définie par  $T_{f_i} = \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} t_{i,p}^k \theta_p^k - a_i$ . Étant donné que  $T$  représente la somme pondérée de plusieurs heures de visite différentes  $t_{i,p}^k$ , déphasée par  $(-a_i)$ , il y a au moins deux chemins  $p$  et  $p'$  tels que  $t_{i,p}^k - a_i < T < t_{i,p'}^k - a_i$ . Ainsi, nous pouvons définir deux branches telles que chacune d'elles élimine un de ces deux chemins. Les décisions correspondantes sont données par  $\underline{b} \leq T_f \leq T$  et  $T < T_f \leq \bar{b}$ . Lorsque les données du problème reliées au temps sont entières, les décisions sont plus restrictives. Elles sont données par  $\underline{b} \leq T_f \leq \lfloor T \rfloor$  et  $\lfloor T \rfloor + 1 \leq T_f \leq \bar{b}$ .

Évidemment, cette nouvelle méthode de séparation et d'évaluation ne diffère de la méthode originale que dans les deux premières étapes. Dans la première étape, nous permettons de choisir, soit une variable de décision fractionnaire, soit une variable de décision entière. Par la suite, dans la deuxième étape les décisions de séparation sont définies conformément au type de la variable de décision choisie dans la première étape. Les étapes subséquentes (Étape 3 - Étape 5) ne sont pas modifiées. Il faut noter que la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation que nous avons implantée ne requiert pas que toutes les données du problème reliées au temps soient entières.

Contrairement à la version proposée par Ioachim *et al.* [8], les nouvelles décisions s'appliquent même lorsque les données du problème reliées au temps sont fractionnaires.

### 4.3 Études numériques

Le Modèle 1, défini par (4.1) à (4.10), n'admet pas de laisser des vols non couverts. Pourtant, le fait que le problème soit irréalisable n'a aucune importance pratique lors de la résolution d'un problème réel. Même si certains vols de l'ensemble des vols considérés ne peuvent pas être couverts, une solution qui permet de continuer les opérations aériennes doit être trouvée. Ceci implique que le non recouvrement de vols doit être considéré comme une alternative lors de la résolution du problème. Pour traiter le problème de vols non couverts, nous proposons deux modèles. Ils imposent des modifications différentes du Modèle 1 présenté dans la Section 4.2.2. La première modification nous permet de produire une solution dans laquelle certaines copies de vol peuvent restées non couvertes. Étant donné que la plupart des compagnies aériennes acceptent de faire partir un vol qui n'est pas couvert par un équipage complet, ce modèle peut produire une solution acceptable. Cependant, si un vol ne peut être effectué que s'il est couvert par un équipage complet, ou lorsque la solution produite par la première modification du Modèle 1 n'est pas satisfaisante, nous sommes obligés d'appliquer une deuxième modification au modèle. Dans ce cas, un vol est, soit couvert par un équipage complet, soit toutes les copies de ce vol restent non couvertes. Ces deux modèles modifiés sont appelés le Modèle 2 et le Modèle 3 respectivement.

Pour implanter le Modèle 2, nous ajoutons dans l'ensemble des commodités réelles, défini dans la Section 4.2.1, une nouvelle commodité correspondant à un membre d'équipage artificiel. Les conditions initiales et finales associées aux noeuds source et puits du graphe correspondant ne sont pas définies. Chacune des copies considérées  $i \in N$  est reliée par un arc spécial de début au noeud source artificiel et par un arc spécial de fin au noeud puits artificiel. Un très grand coût  $M$ , qui correspond à la pénalité pour une copie de vol  $i$  qui est non couverte, est associé aux arcs spéciaux de début. Ceci implique qu'un chemin non nul, affecté au membre d'équipage artificiel, est constitué d'un seul vol  $i \in N$ .

Pour implanter le Modèle 3, nous introduisons également une commodité artificielle. Cette fois ci, la nouvelle commodité correspond à un équipage artificiel. Comme dans le modèle précédent, les conditions initiales et finales de l'équipage artificiel ne sont pas définies. Nous ajoutons les arcs artificiels pour créer des chemins qui commencent au noeud source artificiel, puis visitent toutes les  $n_f$  copies du vol  $f \in F$  et retournent à la fin au noeud puits artificiel. Si les  $n_f$  copies du vol  $f \in F$  restent toutes non couvertes, une très grande pénalité  $M$  doit être payée. Cette pénalité est associée aux arcs spéciaux de début.

**Problèmes test :** Tous les vols considérés sont des vols domestiques. Les valeurs de temps de briefing et de debriefing, la durée maximale d'un service de vol et le temps minimal de connexion pour les membres d'équipage sont issues de la convention collective d'une compagnie aérienne nord-américaine. Aucun membre d'équipage en réserve n'est considéré. Des vols de mise en place, effectués, soit par la compagnie traitée, soit par une autre compagnie aérienne, ne sont pas pris en considération. Ainsi, le sur-recouvrement de vols n'est pas permis.

Les Modèles 2 et 3 ont été implantés et testés sur quatre jeux de données, appelés Problème 1, Problème 2, Problème 3 et Problème 4. Une situation hypothétique où l'aéroport *hub* est fermé pendant les heures de pointe matinales, est considérée comme la source de perturbations pour les quatre cas. Par conséquent, tous les vols qui selon le plan devaient atterrir à l'aéroport hub avant l'heure de sa réouverture, sont directement influencés par la perturbation en question. Un de ces vols a été annulé dans le Problème 2, le Problème 3 et le Problème 4. Par la suite, les nouvelles heures de départ sont fixées pour le reste des vols perturbés. Si le temps au sol entre un vol retardé et son successeur du même itinéraire d'avion est devenu inférieur au minimum prescrit, ce vol-successeur est également retardé afin de respecter le temps minimum au sol requis. Par la suite, les nouvelles heures de départ fixes sont établies pour tous les vols-successeurs retardés. L'ensemble de tous les vols retardés est nommé les *vols retardés initialement*. Les heures de départ pour le reste des vols, qui étaient fixes originalement, sont devenues flexibles. La largeur maximale de la fenêtre de temps, qui correspond au retard maximal permis, est de une heure. Les membres d'équipage, dont les blocs mensuels incluent des vols retardés et ceux qui ont été affectés aux avions impliqués, sont considérés comme des candidats pour les modifications. Le Tableau 4.1 met en évidence les différentes caractéristiques des problèmes traités. Le pourcentage des vols retardés initialement varie de 29% (Problème 1) à 38% (Problème 4), alors que le pourcentage des vols ayant l'horaire flexible varie de 61% (Problème 4) à 71% (Problème 1).

Plusieurs problèmes test ont été créés par la suite à partir de chacun des quatre problèmes. Les problèmes test créés à partir d'un même problème diffèrent en nombre de membres constituant un équipage complet. Ainsi, le nombre total de membres d'équipage et le nombre total de copies de vol considérées dans un problème changent

Tableau 4.1 – *Caractéristiques des problèmes*

Problèmes	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4
<b>Vols</b>				
Nombre total	24	66	131	190
Retardés initialement	7	20	46	72
Heure de départ fixe	7	20	50	76
Heure de départ flexible	17	46	81	114
<b>Avions</b>				
Nombre total	13	28	58	79

d'un test à l'autre. L'identificateur associé à un test est composé de deux chiffres. Le premier chiffre (celui qui se trouve à gauche du point) représente le numéro du problème à partir duquel ce test a été créé. Le deuxième chiffre correspond au nombre de membres par équipage complet. Ainsi, à partir du Problème 1 nous avons créé 6 problèmes test, soient les Tests 1.2 à 1.7, qui correspondent à des équipages de 2 à 7 membres respectivement. De même, nous avons les Tests 2.2 à 2.5 pour le Problème 2, le Test 3.2 et le Test 3.3 pour le Problème 3 et, finalement, le Test 4.2 dérivé du Problème 4. Les caractéristiques de chacun des problèmes test sont présentées dans le Tableau 4.2.

Le Tableau 4.3 présente la situation après que les vols aient été retardés. Notons que ces retards préservent les itinéraires d'avion. De plus, aucun changement dans les itinéraires d'équipage n'a été fait.

Pour chacun des problèmes test présentés dans la première colonne du tableau, la deuxième colonne fournit le nombre de services de vol planifiés qui sont devenus irréalisables, c'est-à-dire, le nombre de membres d'équipage dont les services de vol ne sont plus valides. L'aéroport de destination du dernier vol qui peut être effectué par

Tableau 4.2 – *Caractéristiques des tests*

Problèmes test	Membres par équipage	Copies des vols	Total membres d'équipage
<b>Problème 1</b>			
Test 1.2	2	48	14
Test 1.3	3	72	21
Test 1.4	4	96	28
Test 1.5	5	120	35
Test 1.6	6	144	42
Test 1.7	7	182	49
<b>Problème 2</b>			
Test 2.2	2	132	43
Test 2.3	3	198	59
Test 2.4	4	264	79
Test 2.5	5	330	97
<b>Problème 3</b>			
Test 3.2	2	262	84
Test 3.3	3	393	126
<b>Problème 4</b>			
Test 4.2	2	380	118

le membre d'équipage considéré est, soit l'aéroport défini par les conditions finales de ce membre, soit un autre aéroport. Dans ce dernier cas, le membre considéré ne peut pas continuer ses activités planifiées pour le jour suivant. Un tel membre d'équipage est appelé un *membre déplacé*. Le nombre de membres déplacés est donné dans la troisième colonne du Tableau 4.3. Enfin, la dernière colonne du tableau fournit le nombre total de copies de vol non couvertes qui appartiennent aux services de vol non réalisables. Ce nombre varie de 22 à 78. Nous présentons uniquement les résultats des Modèles 2 et 3, car tous les problèmes test sont irréalisables pour le Modèle 1.

Tableau 4.3 – Solution qui préserve les itinéraires des avions et des équipages

Problèmes test	Services de vol non réalisables	Membres d'équipage déplacés	Copies non couvertes
<b>Problème 1</b>			
Test 1.2	8	5	22
Test 1.3	12	7	34
Test 1.4	16	10	44
Test 1.5	20	12	56
Test 1.6	24	15	66
Test 1.7	28	17	78
<b>Problème 2</b>			
Test 2.2	9	6	26
Test 2.3	13	8	39
Test 2.4	17	10	52
Test 2.5	21	12	65
<b>Problème 3</b>			
Test 3.2	18	10	40
Test 3.3	27	15	60
<b>Problème 4</b>			
Test 4.2	26	18	56

**Modèle 2 :** Pour obtenir une solution meilleure que celle présentée dans le Tableau 4.3, le nouveau modèle optimal de la Section 4.2, modifié conformément aux explications du début de la section courante, a été implanté. Le Tableau 4.4 montre les résultats correspondants.

Les colonnes du Tableau 4.4 révèlent les problèmes résiduels exprimés par le nombre de membres d'équipage déplacés (la deuxième colonne), le nombre des copies de vol non couvertes (la troisième colonne), le nombre de vols retardés par l'optimiseur (la quatrième colonne) et le retard moyen en minutes (la dernière colonne).

Tableau 4.4 – *Modèle 2 : Solution réoptimisée*

Problèmes test	Membres d'équipage déplacés	Copies non couvertes	Vols retardés	Retard moyen (min)
<b>Problème 1</b>				
Test 1.2	7	10	4	46,25
Test 1.3	10	16	4	46,25
Test 1.4	14	20	4	46,25
Test 1.5	17	26	4	46,25
Test 1.6	21	30	4	46,25
Test 1.7	24	36	4	46,25
<b>Problème 2</b>				
Test 2.2	7	7	8	38,00
Test 2.3	10	10	10	33,00
Test 2.4	13	13	11	30,10
Test 2.5	16	16	11	30,09
<b>Problème 3</b>				
Test 3.2	10	8	15	32,07
Test 3.3	15	12	14	34,36
<b>Problème 4</b>				
Test 4.2	14	14	20	34,05

Nous observons que les résultats obtenus en utilisant notre nouveau modèle optimal sont très supérieurs aux résultats du Tableau 4.3. Le nombre de copies de vol non couvertes se réduit de façon très significative, tandis que le nombre de membres déplacés dans la solution optimale est légèrement plus grand qu'auparavant (dans tous les tests excepté les trois derniers). La réduction concernant le nombre de copies non couvertes varie entre 50% (Problème 1) et 80% (Problème 3) par rapport aux résultats du Tableau 4.3. Nous pouvons en déduire que la grande majorité des problèmes concernant le jour d'opération considéré ont été résolus avec succès, sans laisser beaucoup de problèmes pour le jour suivant. Il faut noter que le nombre de membres déplacés peut être réduit considérablement en introduisant des vols de

mise en place pour transporter les équipages entre les aéroports, et en rajoutant des membres d'équipage en réserve dans l'ensemble des candidats disponibles.

Tableau 4.5 – *Modèle 2: Caractéristiques du graphe*

Problèmes test	Noeuds	Arcs	Commodités
<b>Problème 1</b>			
Test 1.2	78	914	15
Test 1.3	116	1974	22
Test 1.4	154	3436	29
Test 1.5	192	5300	36
Test 1.6	230	7566	43
Test 1.7	268	10234	50
<b>Problème 2</b>			
Test 2.2	220	7011	44
Test 2.3	322	14818	62
Test 2.4	424	25515	80
Test 2.5	526	39092	98
<b>Problème 3</b>			
Test 3.2	432	26628	85
Test 3.3	647	59475	127
<b>Problème 4</b>			
Test 4.2	618	53642	119

Le Tableau 4.5 décrit les caractéristiques du graphe : le nombre de noeuds, le nombre d'arcs et le nombre de commodités respectivement. Le nombre de commodités dépasse d'une unité le nombre de membres réels considérés. Cette unité correspond au membre d'équipage artificiel introduit au début de cette section pour nous permettre de couvrir les copies de vol qui ne peuvent pas être couvertes autrement. Étant donné que la valeur moyenne de  $d_{ij} = d_i + g_i$  est grande par rapport à la largeur maximale des fenêtres de temps, les graphes qui correspondent aux sous-problèmes sont sans cycle, malgré le fait que l'heure de départ ne soit pas fixe pour tous les vols.

Les informations concernant le problème maître sont présentées dans le Tableau 4.6. Dans ce tableau nous trouvons le nombre de contraintes de préséance entre les vols, le nombre de contraintes de même heure de départ, le nombre de contraintes de recouvrement et le nombre total des contraintes du problème maître pour chacun des problèmes test considérés. Nous n'avons pas imposé de contraintes de connexion de passager dans aucun des problèmes.

Tableau 4.6 – *Modèle 2: Contraintes du problème maître*

Problèmes tests	Contraintes			
	Préséance entre les vols	Même heure de départ	Recouvrement	Total
<b>Problème 1</b>				
Test 1.2	9	34	62	105
Test 1.3	9	51	93	153
Test 1.4	9	68	124	201
Test 1.5	9	85	155	249
Test 1.6	9	102	186	297
Test 1.7	9	119	217	345
<b>Problème 2</b>				
Test 2.2	26	92	175	293
Test 2.3	26	138	259	423
Test 2.4	26	184	343	553
Test 2.5	26	230	427	683
<b>Problème 3</b>				
Test 3.2	34	162	346	542
Test 3.3	34	243	519	796
<b>Problème 4</b>				
Test 4.2	50	228	498	776

Le nombre de contraintes de même heure de départ d'un problème test particulier est égal au nombre des vols correspondants ayant des heures de départ flexibles

(Tableau 4.1) multiplié par le nombre de membres d'équipage dans un équipage complet du problème test considéré (Tableau 4.2). Le nombre de contraintes de recouvrement d'un problème particulier est la somme du nombre de copies de vol (la troisième colonne du Tableau 4.2) et du nombre de membres d'équipage impliqués dans le problème (la quatrième colonne du Tableau 4.2). Étant donné qu'exactly un service de vol peut être affecté à un membre d'équipage réel, nous demandons de couvrir chaque noeud source du sous-problème associé exactement une fois. D'après la discussion de la Section 4.2.1, si aucun service de vol n'est affecté à un membre d'équipage réel, le noeud source correspondant sera quand même couvert, car il existe un arc additionnel source-puits pour chaque sous-problème. Enfin, la dernière colonne fournit le nombre total de contraintes du problème maître. Nous observons que l'augmentation du nombre de membres par équipage implique l'accroissement du nombre de contraintes du problème maître. Ainsi, les problèmes correspondants deviennent de plus en plus difficiles à résoudre.

Le Tableau 4.7 présente les résultats numériques. Les problèmes test sont résolus par une version spécialisée de l'optimiseur GENCOL (version 4.0). Les programmes linéaires sont résolus par CPLEX 4.0. La version primale du simplexe a été utilisée pour résoudre la relaxation linéaire du problème. La procédure de séparation et d'évaluation proposée dans la Section 4.2.3 a été utilisée pour obtenir la solution entière optimale. Nous avons utilisé le critère *meilleur d'abord* lors de la recherche de la solution entière optimale. Tous les problèmes test sont résolus à l'optimalité. Les expérimentations numériques ont été effectuées sur la station de travail Ultra-2/2300 (512 M Ram, 10.5 specint95, 17.7 specfp95).

La deuxième colonne du Tableau 4.7 fournit le nombre de colonnes générées. La colonne suivante présente le nombre total de noeuds de l'arbre de séparation et d'évaluation (ASE) explorés lors de la recherche de la solution entière optimale. La quatrième colonne présente le saut d'intégralité exprimé en pourcentages. Il est évident que la valeur de la fonction objectif et le saut d'intégralité dépendent de la grandeur relative des pénalités utilisées. Dans notre cas les coûts utilisés pour pénaliser les vols non couverts et les membres d'équipage déplacés sont du même ordre de grandeur. Nous obtenons donc des solutions réalisant un compromis entre le nombre de vols non couverts et le nombre de membres d'équipage déplacés. Le pourcentage du saut d'intégralité présenté dans le Tableau 4.7 donne l'information sur la difficulté des problèmes testés. L'information sur le saut d'intégralité permet également de comparer l'efficacité des différentes méthodes de séparation et d'évaluation. La prochaine section du tableau concerne les temps de résolution, exprimés en secondes (CPU). La première colonne de cette section présente le temps requis pour résoudre la relaxation linéaire du problème au noeud zéro de l'ASE correspondant en incluant le temps de résolution du problème maître et du sous-problème. Les deux prochaines colonnes donnent le temps total dédié respectivement à la résolution du problème maître et du sous-problème, en incluant le temps de résolution de la relaxation linéaire au noeud zéro de l'ASE et le temps de branchement. Le temps total de résolution est présenté dans la dernière colonne du tableau.

Le nombre de colonnes générées varie de 274 pour le Test 1.2 jusqu'à 107187 pour le Test 2.4. Ce nombre est beaucoup plus petit que le nombre de services de vol théoriquement possibles. Le Tableau 4.7 met en évidence que le nombre de noeuds de l'ASE explorés pour trouver la solution entière optimale est élevé et que le saut d'intégralité existe dans presque tous les problèmes testés. La valeur du saut

Tableau 4.7 – *Modèle 2: Nouvelle méthode de séparation et d'évaluation*

Problèmes test	Colonnes générées	Noeuds de l'ASE	Saut d'intégralité (%)	CPU (s)			
				RL	PM	SP	Total
<b>Problème 1</b>							
Test 1.2	274	6	0,045	0,1	0,3	0,1	0,5
Test 1.3	757	30	0,039	0,4	2,6	0,9	4,1
Test 1.4	1864	101	0,023	1,0	12,3	4,3	19,0
Test 1.5	3367	348	0,021	1,5	51,5	21,5	85,0
Test 1.6	5003	351	0,015	2,9	115,6	46,7	178,4
Test 1.7	5848	250	0,015	5,4	237,2	92,2	354,9
<b>Problème 2</b>							
Test 2.2	4258	110	2,956	5,2	92,9	34,1	140,2
Test 2.3	17068	442	2,245	26,2	1219,0	544,6	1888,5
Test 2.4	107187	5454	1,764	53,2	22400,7	8612,6	32725,4
Test 2.5	64476	2484	1,449	152,1	23409,8	9933,5	34836,3
<b>Problème 3</b>							
Test 3.2	7319	216	0,000	65,3	996,1	602,8	1676,6
Test 3.3	44440	1317	0,000	339,7	23948,8	17339,8	42403,8
<b>Problème 4</b>							
Test 4.2	28708	688	0,000	201,9	9669,8	10979,0	21249,5

d'intégralité est de 3% au maximum (Test 2.2). En effet, des problèmes de ce type sont très difficiles à résoudre, ceci est dû non seulement à leur nature combinatoire qui influence le temps de résolution des sous-problèmes, mais tout aussi bien au grand nombre de contraintes du problème maître. Parmi ces contraintes, les contraintes les plus difficiles à satisfaire sont les contraintes de même heure de départ. En fait, l'accroissement du nombre de ces contraintes, causé par l'accroissement du nombre de membres par équipage, augmente la difficulté et le temps de résolution du problème maître. Il faut aussi noter que la borne inférieure fournie par la relaxation linéaire du problème initial est souvent de mauvaise qualité. De plus, les variables fractionnaires dans la solution de la relaxation linéaire sont très nombreuses. Pourtant, la valeur

de la borne inférieure de la solution entière augmente rapidement lors du branchement sur les variables de temps. En effet, la valeur de la borne inférieure est égale à la valeur de la solution entière optimale lorsqu'il devient impossible d'imposer des décisions sur les variables de temps. Ainsi, le processus de séparation et d'évaluation continue par des décisions sur les variables de flot en utilisant la valeur de la solution entière optimale comme borne inférieure courante. Toutefois, avant d'obtenir la solution entière optimale du problème, beaucoup de travail reste à faire étant donné le grand nombre de variables fractionnaires de flot. Il faut remarquer que la grande majorité du temps de résolution total est dédiée à la résolution du problème maître. Ceci est dû aux nombreuses contraintes présentes dans le problème maître.

Lorsque les décisions sont prises comme dans la méthode développée et implantée par Ioachim *et al.* [8], c'est-à-dire, seulement lorsque les variables de temps sont fractionnaires, le temps total de résolution pourrait être très grand. En fait, nous avons observé que la borne inférieure atteinte à la fin du branchement sur les variables de temps fractionnaires a été, dans la majorité des cas, loin de la valeur de la solution entière optimale. Ainsi, étant donné que la recherche de la solution entière optimale se poursuit par des décisions sur les variables de flot, un très grand ASE résiduel doit être exploré complètement pour trouver la solution entière optimale. En effet, la valeur de la borne inférieure ne change pas avant qu'un niveau profond de l'ASE correspondant soit atteint. Les informations concernant les deux stratégies de séparation et d'évaluation, soient l'originale et la nouvelle, appliquées sur des problèmes de petite taille, sont présentées dans le Tableau 4.8.

Nous avons limité le temps CPU de résolution pour la méthode originale à 3600 secondes. La deuxième colonne de ce tableau fournit soit le nombre de noeuds

de l'ASE explorés pour arriver à la dernière valeur de la borne inférieure atteinte avant que la solution entière optimale ait été obtenue (CPU < 3600s), soit le nombre de noeuds de l'ASE explorés avant que le processus ait été arrêté (CPU > 3600s). La prochaine colonne présente l'augmentation de la valeur de la borne inférieure (BI) sur la valeur de la solution de la relaxation linéaire du problème, exprimée en pourcentage. La colonne suivante présente le saut résiduel exprimé en pourcentage. La cinquième colonne nous montre si le processus de résolution a été arrêté après 3600 secondes du temps CPU, ou sinon, le temps de résolution consacré à l'augmentation de la valeur de la borne inférieure une dernière fois avant que la solution entière optimale ait été obtenue. Les prochaines quatre colonnes, en rapport à la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation, correspondent aux colonnes de l'ancienne méthode.

Tableau 4.8 – *Modèle 2: Comparaison des deux méthodes de séparation*

Problèmes test	Branchement sur les variables de temps fractionnaires				Branchement sur les variables de temps fractionnaires et entières			
	Noeuds de l'ASE	Changement de BI (%)	Saut résiduel (%)	CPU (s)	Noeuds de l'ASE	Changement de BI (%)	Saut résiduel (%)	CPU (s)
Test 1.2	110	0,037	0,008	4,8	6	0,037	0,008	0,5
Test 1.3	11	0,039	0,000	1,8	11	0,039	0,000	2,1
Test 1.4	28018	0,019	0,004	3600,0	7	0,023	0,000	3,4
Test 1.5	9	0,021	0,000	6,0	9	0,021	0,000	8,5
Test 1.6	14675	0,012	0,003	3600,0	7	0,015	0,000	16,9
Test 1.7	9	0,015	0,000	30,4	9	0,015	0,000	124,8

Le Tableau 4.8 met en lumière à la fois l'efficacité de la nouvelle méthode et l'inefficacité de l'ancienne, même pour des petits problèmes présentés dans le tableau. Lorsque nous avons appliqué la nouvelle méthode, la borne inférieure a atteint sa valeur finale après que 11 noeuds au maximum aient été explorés. De plus, la dernière

valeur de la borne inférieure trouvée avant l'obtention de la solution optimale est égale à la valeur de la solution entière optimale dans tous les cas, à l'exclusion du Test 1.2. Dans ce dernier test, l'ASE correspondant a été complètement exploré. Ce qui signifie que le dernier changement de la borne inférieure s'est produit lorsque la solution entière optimale a été obtenue (après que le sixième noeuds de l'ASE ait été exploré). D'un autre côté, l'ancienne méthode n'a pas été en mesure d'augmenter la valeur de la borne inférieure à sa valeur finale pour les Tests 1.4 et 1.6, même après 1 heure de temps CPU. Pourtant, la nouvelle méthode l'a fait en 3.4 secondes et 16.9 secondes respectivement. Il faut noter que l'ancienne méthode, lorsqu'elle fonctionne bien, peut augmenter la valeur de la borne inférieure à sa valeur finale plus rapidement que la nouvelle méthode, car elle est moins complexe.

Les temps de résolution présentés dans le Tableau 4.7 peuvent être réduits davantage, d'une manière remarquable, en utilisant une méthode heuristique lors de la prise de décisions sur les variables de flot. Il s'agit de fixer simultanément, soit à 0, soit à 1, plusieurs variables de flot fractionnaires. À partir du noeud considéré, nous définissons une branche pour chacune de ces deux décisions. Les résultats obtenus en utilisant la méthode heuristique de séparation et d'évaluation sont présentés dans le Tableau 4.9. Les colonnes du Tableau 4.9 correspondent aux colonnes du Tableau 4.7.

Le Tableau 4.9 confirme que le temps de résolution est réduit de manière remarquable pour tous les problèmes test, sans pour autant détériorer la qualité des solutions entières obtenues. En fait, nous avons toujours obtenu la solution entière optimale. Ceci implique que le saut d'optimalité pour tous les cas considérés est égal à zéro. Le Tableau 4.9 révèle que le temps consacré pour résoudre le problème maître domine le temps consacré à la résolution des sous-problèmes. Le même phénomène

Tableau 4.9 – *Modèle 2: Branchement heuristique sur les variables de flot*

Problèmes test	Colonnes générées	Noeuds de l'ASE	Saut d'optimalité (%)	CPU (s)			
				RL	PM	SP	Total
<b>Problème 1</b>							
Test 1.2	274	6	0	0,1	0,3	0,1	0,5
Test 1.3	616	11	0	0,3	1,4	0,6	2,2
Test 1.4	1538	22	0	1,0	3,9	2,0	6,6
Test 1.5	2059	27	0	1,5	6,7	5,0	13,1
Test 1.6	3298	19	0	2,9	14,4	8,3	24,4
Test 1.7	3395	22	0	5,5	16,5	12,8	31,6
<b>Problème 2</b>							
Test 2.2	4006	45	0	4,3	49,2	15,2	70,0
Test 2.3	16613	78	0	17,1	312,6	96,3	434,4
Test 2.4	69074	171	0	54,6	2125,1	1205,8	3644,3
Test 2.5	74532	115	0	157,1	3163,8	2755,1	6567,2
<b>Problème 3</b>							
Test 3.2	7336	32	0	63,0	98,8	148,5	267,7
Test 3.3	12450	57	0	302,3	528,2	1060,4	1673,8
<b>Problème 4</b>							
Test 4.2	9076	37	0	197,2	375,0	1001,8	1479,8

a été observé lorsque nous avons appliqué des décisions optimales sur les variables de flot (une seule variable pouvant être fixée à la fois). Notons que les temps de résolution de la relaxation linéaire du problème (colonne RL) dans les Tableaux 4.9 et 4.7 sont légèrement différents. Ces petites différences sont causées par des charges différentes de la station de travail au moment de résolution des problèmes.

Étant donné la complexité et la taille des problèmes considérés, nous pouvons en conclure que les temps de résolution présentés au Tableau 4.9 sont très satisfaisants pour des problèmes de petite et de moyenne taille. Pour des petits problèmes, tels que les Tests 1.2 à 1.7, le temps de résolution varie de 0,5 à 31,6 seconds. Par contre,

le temps de résolution est plus élevé pour les tests qui représentent des problèmes de grande taille. Par exemple, le très grand problème représenté par le Test 2.5 a été résolu en 1 heures et 49 minutes, alors que le problème représenté par le Test 3.3 a été résolu en 28 minutes. Le Test 4.2 a été résolu en 25 minutes. Il est évident que le temps de résolution augmente de manière considérable lorsque le nombre de membres par équipage s'accroît.

Enfin, nous avons comparé, de la même façon qu'au Chapitre 3, les avantages de la nouvelle approche, soit la gestion simultanée des horaires d'équipage à plusieurs membres et des horaires de vol durant le jour d'opération, par rapport à l'approche traditionnelle, soit la résolution séquentielle des problèmes de gestion des horaires de vol et des horaires d'équipage. En effet, dans l'approche traditionnelle l'horaire des vols est fixé et représente une donnée d'entrée du problème de gestion des horaires des équipages. Nous avons traité tous les problèmes test du Tableau 4.4 en fixant les heures de départ pour tous les vols considérés de sorte qu'aucun retard additionnel n'est permis. Les problèmes résiduels qui persistent après avoir résolu les problèmes avec l'approche traditionnelle sont présentés au Tableau 4.10.

La Tableau 4.10 confirme encore une fois que la qualité des solutions obtenues en utilisant la nouvelle approche est très supérieure à la qualité des solutions obtenues en appliquant l'approche traditionnelle. En utilisant notre nouvelle approche, nous avons diminué de manière significative le nombre de vols non couverts pour tous les problèmes test présentés au Tableau 4.4. En effet, le nombre de vols restant non couverts lorsque les heures de départ de tous les vols sont fixées (Tableau 4.10) est en moyenne 2,4 fois plus élevé par rapport à l'approche simultanée proposée dans ce chapitre (Tableau 4.4). Le nombre de services de vol violant les conditions finales du

Tableau 4.10 – *Modèle 2: L'horaire fixé des vols, solution réoptimisée*

Problèmes test	Membres d'équipage déplacés	Copies non couvertes
Problème 1		
Test 1.2	5	20
Test 1.3	7	31
Test 1.4	11	40
Test 1.5	12	51
Test 1.6	15	60
Test 1.7	17	71
Problème 2		
Test 2.2	7	18
Test 2.3	10	26
Test 2.4	13	34
Test 2.5	16	42
Problème 3		
Test 3.2	14	30
Test 3.3	21	45
Problème 4		
Test 4.2	18	46

Tableau 4.10 varie autour des valeurs présentées au Tableau 4.4. En effet, le nombre de services de vol violant les conditions finales présenté au Tableau 4.4 est en moyenne 7% plus élevé que celui du Tableau 4.10.

Le Tableau 4.11 décrit les résultats numériques obtenus en fixant les heures de départ pour tous les vols considérés. Le Tableau 4.11, dont les colonnes correspondent aux colonnes du Tableau 4.7, montre que l'approche traditionnelle est beaucoup plus rapide que la nouvelle approche. Le temps total de résolution (la dernière colonne des Tableaux 4.7 et 4.11) est en moyenne 24 fois plus rapide lorsque les heures de départ des vols sont fixées. Ceci est dû à plusieurs faits. Premièrement, étant donné

que les itinéraires d'avion sont toujours respectés lorsque les heures de départ des vols sont fixes, les contraintes de préséance entre les vols deviennent redondantes. Deuxièmement, les contraintes de même heure de départ sont également respectées

Tableau 4.11 – *Modèle 2: L'horaire fixé des vols, résultats numériques*

Problèmes test	Colonnes générées	Noeuds de l'ASE	Saut d'intégralité (%)	CPU (s)			
				RL	PM	SP	Total
<b>Problème 1</b>							
Test 1.2	56	0	0	0,0	0,0	0,0	0,1
Test 1.3	99	0	0	0,1	0,1	0,0	0,2
Test 1.4	219	13	0	0,1	0,3	0,5	1,1
Test 1.5	289	20	0	0,3	0,5	1,1	2,2
Test 1.6	418	35	0	0,5	1,3	3,2	5,8
Test 1.7	486	41	0	0,8	2,6	5,5	10,2
<b>Problème 2</b>							
Test 2.2	499	7	0	0,8	0,8	1,3	2,7
Test 2.3	1477	114	0	2,7	26,2	32,0	65,2
Test 2.4	3254	482	0	11,8	231,7	485,9	784,0
Test 2.5	4352	532	0	31,4	462,2	1533,3	2138,3
<b>Problème 3</b>							
Test 3.2	2356	203	0	14,3	77,1	285,4	394,1
Test 3.3	3759	466	0	74,0	653,3	3271,9	4150,2
<b>Problème 4</b>							
Test 4.2	3246	227	0	57,5	181,9	1648,7	1932,9

de manière implicite, étant donné que toutes les heures de départ sont fixes. Il s'ensuit que seules les contraintes de recouvrement de vols sont présentes dans le problème maître lorsque les fenêtres de temps associées aux vols considérés sont réduites à un point. Troisièmement, les sous-problèmes correspondants sont des problèmes de plus court chemin ordinaire, qui sont plus faciles à résoudre que les problèmes de plus court chemin avec fenêtres de temps. Enfin, comme mentionné au Chapitre 3,

le nombre d'arcs est légèrement plus petit lorsque les heures de départ des vols considérés sont fixes. Nous pouvons ainsi conclure que le problème de gestion simultanée des horaires d'équipage à plusieurs membres et des horaires de vol durant le jour d'opération produit des solutions dont la qualité est très supérieure à la qualité des solutions produites par l'approche traditionnelle. Il y a pourtant un prix à payer : l'augmentation du temps de résolution du problème. Celle-ci est une conséquence de l'augmentation significative de la complexité du problème lorsqu'on considère des heures de départ de vols flexibles. Ces conclusions sont conformes aux conclusions du Chapitre 3 concernant la qualité des solutions et le temps de résolution des problèmes par l'approche simultanée.

**Modèle 3 :** Nous avons amélioré la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation, qui a été définie dans la Section 4.2.3, car aucune des deux méthodes précédentes n'a été en mesure de résoudre efficacement le problème. Par exemple, lorsque nous avons utilisé la nouvelle méthode de branchement, qui a été développée pour le Modèle 2, la solution entière optimale pour le Test 1.2 a été atteinte après 3633 secondes et après que 81110 noeuds de l'ASE aient été explorés. Le saut d'intégralité a été de 18.827% et la valeur de la borne inférieure que nous avons eue à la fin du processus de branchement sur les variables de temps, est très éloignée de la valeur de la solution entière optimale. Pour obtenir la solution optimale, l'ASE correspondant a été complètement exploré. La même méthode a été appliquée pour résoudre le Test 1.3. Dans ce cas, nous avons arrêté le processus de résolution après 5,7 heures de temps CPU et après que 191053 noeuds aient été explorés, car la solution optimale n'était pas encore atteinte. L'inefficacité de cette méthode nous a conduit à développer une version améliorée. Pour ce faire, nous avons exploité les caractéristiques particulières

du problème, soit la présence de l'équipage artificiel qui nous permet de couvrir simultanément toutes les copies d'un vol. D'abord, nous avons observé que la solution de la relaxation linéaire du problème est très fractionnaire. Nous avons ensuite trouvé parmi les variables de flot fractionnaires des flots fractionnaires associés à l'équipage artificiel. Ceci implique que le Modèle 3 est encore plus difficile à résoudre que le Modèle 2, car il existe une grande différence entre la solution obtenue en fixant à 1 (pénalité pour un vol non couvert) et à 0 (aucune pénalité) le flot fractionnaire associé à l'équipage artificiel. En effet, étant donné que la borne inférieure de la solution entière optimale ne change plus après avoir fixé les nouvelles heures de départ, toute branche de l'ASE doit être explorée jusqu'au bout. Lorsque une branche est complètement explorée, l'exploration de l'ASE se poursuit à partir d'un autre noeud de l'ASE n'ayant pas encore été exploré. Pour réduire le temps de résolution, nous devons être en mesure de fournir une borne inférieure de bonne qualité lors du processus de branchement. Pour ce faire, nous avons introduit un nouveau type de décision. Il s'agit de décisions sur les variables de flot qui correspondent à l'équipage artificiel. Ainsi, la méthode améliorée de séparation et d'évaluation nous permet d'imposer des décisions sur les variables de flot associées à l'équipage artificiel, sur les variables de temps et sur les variables de flot associées aux membres d'équipage réels. Les étapes principales de la méthode modifiée de séparation et d'évaluation sont les suivantes :

**Étape 1 : Choisir une variable de décision et définir deux décisions possibles de séparation.** Lorsque nous obtenons une solution fractionnaire après avoir résolu le noeud de branchement  $i$ , il faut d'abord identifier les variables de flot fractionnaires associées à l'équipage artificiel. Parmi ces variables trouver celle ayant la plus grande valeur. La prochaine décision sera imposée sur cette variable. Créer deux branches en fixant la valeur de la variable sélectionnée à 1 et à 0.

**Étape 2 : Identifier la décision la plus prometteuse.** La décision la plus prometteuse est celle qui correspond à la valeur de 0 de la variable fractionnaire sélectionnée. En fait, cette décision signifie que le vol correspondant doit être complètement couvert par les membres d'équipage réels. Néanmoins, si une telle solution n'existe pas, la branche correspondante sera coupée immédiatement. Dans ce cas, la valeur de la variable sélectionnée sera correctement fixée à 1 et la recherche de la solution optimale se poursuivra sur la branche associée.

**Étape 3 : Imposer la décision sélectionnée.** Imposer la décision courante en éliminant toutes les colonnes du problème maître qui ne la respectent pas. Imposer également cette décision dans le sous-problème. Pour ce faire, il faut éliminer tous les arcs qui ne correspondent pas à la décision imposée.

**Étape 4 : Résoudre le noeud courant de l'ASE.** Réoptimiser le problème maître ainsi obtenu par la génération de colonnes. Toutes les colonnes générées à ce noeud sont compatibles avec la dernière décision imposée.

Si certaines variables de flot du problème maître sont encore fractionnaires, malgré le fait qu'il n'y ait plus de variables fractionnaires de flot associées à l'équipage artificiel, le processus de séparation et d'évaluation se poursuit par des décisions sur les variables de temps. La méthode de séparation et d'évaluation utilisée est celle définie dans la Section 4.2.3. Enfin, lorsqu'il devient impossible de prendre des décisions sur les variables de temps, mais que certaines variables du problème maître sont encore fractionnaires, la recherche de la solution entière optimale se poursuit par des décisions sur les variables de flot associées aux membres d'équipage réels.

Les résultats obtenus en utilisant le Modèle 3, qui requiert de couvrir un vol par un équipage complet ou de le laisser non couvert sinon, sont présentés dans le Tableau 4.12.

Tableau 4.12 – *Modèle 3 : Solution réoptimisée*

Problèmes test	Membres déplacés	Vols non couverts	Vols retardés	Retard moyen (min)
<b>Problème 1</b>				
Test 1.2	8	6	4	46,25
Test 1.3	11	6	4	46,25
Test 1.4	16	6	4	46,25
Test 1.5	19	6	4	46,25
Test 1.6	24	6	4	46,25
Test 1.7	27	6	4	46,25
<b>Problème 2</b>				
Test 2.2	7	4	7	41,71
Test 2.3	9	4	9	35,33
Test 2.4	11	4	9	35,33
Test 2.5	13	4	9	35,33
<b>Problème 3</b>				
Test 3.2	10	4	14	34,36
Test 3.3	15	4	15	32,07
<b>Problème 4</b>				
Test 4.2	14	7	20	34,05

Le Tableau 4.12 met en évidence que les résultats ainsi obtenus sont très supérieurs aux résultats du Tableau 4.3. La discussion des résultats obtenus est semblable à celle effectuée pour le Modèle 2. Le nombre de membres d'équipage déplacés selon la solution optimale est, en général, plus grand que dans la solution initiale (car il n'y a pas de vols de mise en place), alors que le nombre de copies de vol non couvertes est réduit de 45% à 80% par rapport à la solution présentée au Tableau 4.3.

Nous observons ainsi que la grande majorité des problèmes reliés au jour d'opération considéré ont été résolus avec succès.

Les informations concernant le réseau sont identiques à celles présentées dans le Tableau 4.5, à l'exception du nombre d'arcs qui est légèrement inférieur à celui du Modèle 2. Cette différence est due aux différences dans le nombre d'arcs associés aux membres d'équipage artificiels. Les informations concernant le problème maître sont identiques à celles présentées dans le Tableau 4.6 pour le Modèle 2. Les temps de résolution obtenus en utilisant la version améliorée de la nouvelle méthode de séparation et d'évaluation sont présentés au Tableau 4.13. Tous les problèmes ont été résolus à l'optimalité. Les colonnes du tableau correspondent aux colonnes du Tableau 4.7.

Le Tableau 4.13 nous révèle un très grand saut d'intégralité pour tous les tests, excepté pour les trois derniers tests. Pour trouver une solution entière optimale, il a été nécessaire d'explorer un plus grand nombre de noeuds de l'ASE que dans le Modèle 2. Ainsi, il est plus difficile de résoudre ce dernier modèle que le modèle précédent et par conséquent, les temps de résolution correspondants sont plus élevés. Encore une fois, nous pouvons conclure que les temps de résolution sont très satisfaisants pour des petits problèmes et des problèmes de taille moyenne, alors qu'ils augmentent de manière très significative pour des problèmes de grande taille. La majorité du temps, comme pour le Modèle 2, est dédiée à la résolution du problème maître.

Le Tableau 4.14, dont les colonnes correspondent à celles du Tableau 4.8, met en lumière l'efficacité de la version améliorée par rapport à la méthode initiale (la

Tableau 4.13 – *Modèle 3: Méthode améliorée de séparation et d'évaluation*

Problèmes test	Colonnes générées	Noeuds de l'ASE	Saut d'intégralité (%)	CPU (s)			
				RL	PM	SP	Total
<b>Problème 1</b>							
Test 1.2	379	17	18,827	0,2	1,0	0,2	1,3
Test 1.3	887	35	12,053	0,7	4,8	1,1	6,6
Test 1.4	2801	140	18,944	1,4	23,7	6,6	33,8
Test 1.5	3742	84	14,760	3,2	33,8	9,5	46,4
Test 1.6	4961	282	18,984	6,3	145,5	37,5	197,7
Test 1.7	7637	383	15,959	11,9	265,8	73,4	366,2
<b>Problème 2</b>							
Test 2.2	24855	369	13,936	6,6	478,4	105,5	624,6
Test 2.3	92004	671	15,546	22,8	3142,8	567,0	3918,0
Test 2.4	225864	1019	16,318	94,9	8672,7	3759,7	13271,0
Test 2.5	673985	1700	16,805	229,4	32532,2	21610,6	61924,7
<b>Problème 3</b>							
Test 3.2	10414	291	0,000	70,4	1567,7	823,4	2479,3
Test 3.3	93102	1165	0,000	383,9	28200,2	19414,3	48809,5
<b>Problème 4</b>							
Test 4.2	23714	426	0,000	219,9	5628,0	6462,1	12437,3

nouvelle méthode de séparation et d'évaluation appliquée pour le Modèle 2). Comme auparavant, le maximum de 1 heure sur le temps de résolution (CPU) a été imposé pour la méthode originale.

Le Tableau 4.14 révèle que la méthode originale est très inefficace pour le Modèle 3, où nous avons de très grands sauts d'intégralité. Aucun des problèmes n'a été résolu en un temps de résolution acceptable. De plus, la valeur de la borne inférieure au dernier noeud exploré (le dernier noeud exploré avant que le processus ait été arrêté après une heure de temps CPU) est très éloigné de sa valeur finale pour tous les tests, sauf le plus petit (le Test 1.2). Nous observons également que le

Tableau 4.14 – *Modèle 3: Comparaison des deux méthodes de séparation*

Problèmes test	Branchement sur les variables de temps				Branchement sur les variables artificielles et de temps			
	Noeuds de l'ASE	Changement de BI (%)	Saut résiduel (%)	CPU (s)	Noeuds de l'ASE	Changement de BI (%)	Saut résiduel (%)	CPU (s)
Test 1.2	81109	18,823	0,004	3600,0	13	18,827	0,000	0,9
Test 1.3	25681	1,656	10,397	3600,0	13	12,053	0,000	3,3
Test 1.4	24952	0,023	18,921	3600,0	9	18,944	0,000	7,3
Test 1.5	11266	0,021	14,739	3600,0	11	14,760	0,000	20,5
Test 1.6	11473	0,015	18,969	3600,0	9	18,984	0,000	24,0
Test 1.7	5923	0,015	15,944	3600,0	13	15,959	0,000	60,6

saut résiduel demeure grand même après une heure de temps CPU. Sa valeur est de 0.004 % pour le Test 1.2, alors qu'elle varie de 10.397 % à 18.969 % pour les autres tests. Le nombre de noeuds de l'ASE explorés pendant une heure de temps CPU est très grand, lui aussi. D'un autre côté, la version améliorée est très efficace pour tous les problèmes test. Lorsque nous avons utilisé la version améliorée, au maximum 12 noeuds de l'ASE ont été explorés avant d'établir la valeur finale de la borne inférieure. Le temps de résolution nécessaire pour arriver à cette valeur finale est très efficace. Il est égal à 60,6 secondes pour le plus difficile des problèmes présentés dans le Tableau 4.14, soit le Test 1.7. Notons aussi que la dernière borne inférieure trouvée par la version améliorée est égale à la valeur de la solution entière optimale pour tous les problèmes présentés dans le Tableau 4.14. Nous pouvons conclure que, sans la version modifiée, le Modèle 3 ne pourrait pas être appliqué même pour résoudre des problèmes de très petite taille.

Les temps de résolution présentés dans le Tableau 4.13 ont été améliorés davantage en utilisant la même approche heuristique qui a été utilisée pour résoudre les

Tableau 4.15 – *Modèle 3 : Branchement heuristique sur les variables de flot*

Problèmes test	Colonnes générées	Noeuds de l'ASE	Saut d'optimalité (%)	CPU (s)			
				RL	PM	SP	Total
<b>Problème 1</b>							
Test 1.2	370	13	0	0,2	0,8	0,2	1,1
Test 1.3	778	20	0	0,7	2,9	0,8	4,0
Test 1.4	1901	22	0	1,4	7,8	2,4	11,1
Test 1.5	3651	28	0	3,2	20,4	5,8	27,6
Test 1.6	3579	28	0	6,3	26,3	8,7	37,2
Test 1.7	5425	45	0	11,9	58,7	18,4	81,2
<b>Problème 2</b>							
Test 2.2	24118	279	0	6,6	385,2	91,3	511,7
Test 2.3	87333	325	0	22,8	2052,6	404,9	2611,9
Test 2.4	203721	305	0	99,7	5100,1	3004,1	8938,5
Test 2.5	646684	641	0	228,7	24825,6	16465,3	48635,4
<b>Problème 3</b>							
Test 3.2	9386	104	0	70,4	568,2	471,4	1068,8
Test 3.3	44306	136	0	394,0	3566,3	4902,7	8804,3
<b>Problème 4</b>							
Test 4.2	15929	50	0	221,9	849,4	1597,1	2565,1

problèmes par le Modèle 2. Cette fois-ci, cette technique est appliquée seulement sur les variables de flot associées aux membres d'équipage réels. Le Tableau 4.15 révèle que les temps de résolution sont réduits de manière très significative lorsque nous avons utilisé la méthode heuristique plutôt que la méthode optimale. De plus, les solutions correspondantes restent toujours optimales.

**Comparaison entre le Modèle 2 et le Modèle 3 :** Le Tableau 4.16 permet de comparer les solutions optimales du deuxième et du troisième modèle. Ce tableau présente le nombre total de vols non couverts, correspondant aux copies de vol non couvertes pour les deux modèles. Les vols couverts par un équipage incomplet sont

appelés les vols partiellement non couverts, alors que les autres vols sont référés comme les vols complètement non couverts. Le nombre total de vols non couverts dans le Modèle 2 représente la somme des vols non couverts, soit partiellement, soit complètement. Le Tableau 4.16 montre que les deux modèles laissent le même nombre

Tableau 4.16 – Vols résiduels pour les deux modèles

Problèmes test	Vols non couverts			
	Modèle 2			Modèle 3
	Complètement	Partiellement	Total	Total
<b>Problème 1</b>				
Test 1.2	4	2	6	6
Test 1.3	4	2	6	6
Test 1.4	4	2	6	6
Test 1.5	4	2	6	6
Test 1.6	4	2	6	6
Test 1.7	4	2	6	6
<b>Problème 2</b>				
Test 2.2	1	5	6	4
Test 2.3	1	5	6	4
Test 2.4	1	6	7	4
Test 2.5	1	6	7	4
<b>Problème 3</b>				
Test 3.2	3	2	5	4
Test 3.3	3	3	6	4
<b>Problème 4</b>				
Test 4.2	7	0	7	7

de vols non couverts dans les tests correspondant au Problème 1 et au Problème 4. Pour les autres problèmes test, le Modèle 3 laisse moins de vols non couverts que le Modèle 2. Ceci est dû au fait que les membres d'équipage qui avaient été affectés aux vols partiellement non couverts dans la solution fabriquée par le Modèle 2 ont été utilisés par le Modèle 3 pour couvrir complètement quelques autres vols.

## 4.4 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de gestion des horaires d'équipages et des horaires de vols durant une journée d'opération. Les vols ont des heures de départ fixes ou flexibles. Les itinéraires d'avion sont prédéfinis et doivent être respectés. Nous avons développé deux modèles originaux pour résoudre ce problème. Les deux modèles ont été implantés et résolus avec succès. Les objectifs ont été de minimiser le nombre total de copies de vol non couvertes (Modèle 2) ou le nombre total de vols non couverts (Modèle 3), le retard total pour l'ensemble des vols considérés et le nombre total de membres d'équipage dont les activités planifiées pour le jour d'opération suivant doivent être modifiées en conséquence. Le problème est formulé comme un problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec fenêtres de temps et contraintes additionnelles de préséance entre les vols et de même heure de départ. Ce problème est très difficile à résoudre dû aux nombreuses contraintes imposées dans le problème maître. Parmi ces contraintes, les plus difficiles à satisfaire sont les contraintes de même heure de départ. La difficulté du problème provient également du fait qu'un saut d'intégralité existe dans la majorité des cas et que sa valeur peut être très élevée (jusqu'à 19% pour l'ensemble des problèmes testés en utilisant le Modèle 3). Pour chacun des modèles proposés, nous avons développé un algorithme spécialisé de séparation et d'évaluation, qui implique des décisions sur les variables de temps et sur les variables de flot. La méthode de séparation et d'évaluation développée pour un modèle particulier exploite les caractéristiques propres à ce problème, afin de permettre l'augmentation de la borne inférieure sur la solution entière optimale tout au long du processus de branchement. Ceci implique qu'il n'est plus nécessaire d'explorer complètement l'ASE correspondant, ce qui était

le cas lorsque nous avons utilisé la version originale développée et implantée par Ioachim *et al.* [8]. Dans ce dernier cas, il n'y avait pratiquement pas d'élimination par borne. Avant de développer ces nouvelles techniques de séparation et d'évaluation, nous n'étions pas en mesure de résoudre d'une manière efficace même de très petits problèmes.

Nous avons développé des approches originales, les premières de ce type dans la littérature, pour résoudre de façon optimale le problème. Ces approches, de même que les méthodes de séparation et d'évaluation correspondantes, ont été testées sur plusieurs problèmes test. La qualité des solutions obtenues est très satisfaisante. Les temps de résolution sont très efficaces pour des problèmes de petites et de moyennes tailles. Ils sont en fait moins efficaces pour des problèmes de grandes tailles ayant un nombre élevé de membres par équipage. L'expérimentation numérique révèle que la majorité du temps de résolution a été consacré à la résolution du problème maître. L'accroissement du temps de résolution est principalement causé par la présence de contraintes de même heure de départ (dans le problème maître), qui sont très difficiles à satisfaire. La complexité du problème maître augmente proportionnellement à l'accroissement de la taille de l'équipage, car le nombre de contraintes de même heure de départ, qui correspondent à un vol particulier, est égal au nombre de membres d'équipage requis pour former un équipage complet. Ainsi, afin de réduire le temps total de résolution, nous devons concentrer les efforts sur la réduction du temps de résolution du problème maître. Une amélioration pourrait être de modifier les contraintes de même heure de départ en introduisant une tolérance dans les contraintes d'égalité. Ceci signifie que les copies d'un même vol peuvent avoir des heures de départ différentes à condition que cette différence ne soit pas plus grande que la tolérance donnée. Une telle modification a été proposée dans Ioachim *et al.* [8]

afin de réduire le temps de la résolution du problème maître. Les expérimentations numériques confirment l'efficacité de l'approche proposée. Une autre amélioration pourrait être appliquée lorsqu'un groupe de colonnes avec des horaires différents visite une même suite de noeuds. Dans ce cas, on ajoute la colonne réalisable qui visite les mêmes noeuds aux heures données par les variables de temps du problème maître. En introduisant une telle colonne dans l'ensemble des colonnes générées par le sous-problème, nous pouvons éventuellement éliminer les branchements nécessaires pour fixer correctement l'heure de visite du noeud considéré. Une troisième amélioration pourrait être de remplacer les contraintes de couverture des copies de vols par une seule contrainte demandant de couvrir plusieurs fois un même vol. Avec cette modification les variables de flot cessent d'être binaires et une méthode de branchement adaptée devrait être développée. Ceci nous permettra de résoudre, d'une façon efficace, également des problèmes de grande taille qui impliquent un nombre élevé de personnes par équipage. Les deux approches d'optimisation que nous avons proposées dans ce chapitre peuvent également être combinées en une seule approche. L'approche ainsi obtenue nous permettra de garder dans la solution optimale certains vols partiellement couverts, à la condition d'avoir au minimum un nombre prédéfini de membres d'équipage affectés à ces vols. Sinon, les vols partiellement couverts seront laissés non couverts. Enfin, une fonction objectif plus complexe que celle utilisée dans nos modèles peut apporter certaines améliorations au niveau des aspects économiques et de la robustesse des solutions proposées.

# CHAPITRE 5

## Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié le problème de gestion des horaires d'équipage durant le jour d'opération. Trois différentes approches ont été développées et un chapitre de la thèse est dédié à chacune d'elles. La première approche, décrite au Chapitre 2, traite le problème de gestion des équipages séparément du problème de gestion des horaires de vol. Ceci correspond à la façon traditionnelle, employée par la plupart des compagnies aériennes pour modifier les activités planifiées durant le jour d'opération. En fait, les horaires de vol doivent être révisés d'abord. Par la suite, ces horaires de vol modifiés deviennent les données d'entrée du problème de gestion des horaires d'équipage.

Contrairement aux approches actuellement utilisées dans les compagnies aériennes, nous proposons une nouvelle approche, la première de ce type, qui résout le problème de façon optimale. Le problème est formulé comme un problème non linéaire de réseau multi-commodités, en nombres entiers et avec des variables de ressource, où une commodité particulière est associée à chacun des membres d'équipage considérés. La résolution du problème utilise la méthode de génération de colonnes ainsi qu'un processus de séparation et d'évaluation progressive pour obtenir la solution

optimale en nombres entiers. Le problème maître est un modèle de type partitionnement. Les sous-problèmes sont des problèmes de plus court chemin sur le graphe avec contraintes de ressource. Si le problème est réalisable, tous les vols considérés seront couverts par des membres d'équipage disponibles. De plus, notre modèle produit la solution optimale dans laquelle tous les blocs mensuels, dont une partie a été modifiés, demeurent valides.

Pourtant, si le problème n'est pas réalisable, les horaires de vol doivent être modifiés à nouveau et le problème de gestion d'équipage doit être lui aussi à nouveau résolu. Ce cycle doit être répété plusieurs fois avant qu'une solution acceptable soit obtenue. Pour éviter les nombreuses itérations, souvent nécessaires pour trouver une solution réalisable, nous proposons une approche originale qui traite simultanément le problème de gestion des équipages et le problème de confection des horaires de vol. Cette approche nous permet de modifier les services de vol planifiés pour un ensemble de membres d'équipage, en retardant simultanément, si nécessaire, certains vols et en respectant les itinéraires prédéfinis des avions qui effectuent ces vols. Nous avons utilisé cette nouvelle approche pour résoudre de façon optimale deux types de problème. Au Chapitre 3, nous l'avons appliquée pour résoudre le problème des pilotes, où un équipage est constitué d'un seul membre, ainsi que pour résoudre le problème des agents de bord lorsque tous les membres d'un équipage sont considérés comme étant une seule unité. Le problème est formulé comme un problème de type multi-commodités à coût minimal avec des contraintes supplémentaires. Il s'agit d'une formulation non linéaire, en nombres entiers, où chaque pilote, ou bien chaque équipage, est considéré comme une commodité distincte. La méthode de résolution utilise la décomposition de Dantzig-Wolfe ainsi qu'une technique de séparation et d'évaluation pour obtenir une solution optimale entière. Le problème maître contient

les contraintes de recouvrement des vols et des nouvelles contraintes : les *contraintes de préséance entre les vols*. Les sous-problèmes sont des problèmes de plus court chemin avec fenêtres de temps et des coûts linéaires sur les variables de temps.

L'approche de résolution simultanée est également utilisée au Chapitre 4 pour résoudre le problème des agents de bord, où chacun des agents de bord appartenant au même équipage est considéré comme étant une unité distincte. Ainsi, ce problème, qui représente la forme générale du problème précédent, est formulé de la même façon que le problème du Chapitre 3. La principale caractéristique qui distingue ce nouveau modèle du modèle présenté au Chapitre 3 est la présence des *contraintes de même heure de départ*, qui sont ajoutées au problème maître. Étant donné que nous avons des équipages à plusieurs membres, un sous-problème correspond à chacun des agents de bord considérés. La méthode de résolution est identique à la méthode du Chapitre 3. Afin de résoudre efficacement le problème, nous avons implanté un nouvel algorithme de séparation et d'évaluation où les décisions de séparation sont prises sur les variables de temps, c'est-à-dire les heures de départ des vols. Nous avons également développé et implanté une version améliorée de cet algorithme où les décisions de séparation sont prises sur les variables de flot artificielles.

Les modèles présentés au Chapitres 3 et 4 peuvent être utilisés pour résoudre les cas où les fenêtres de temps associées aux vols considérés représentent des contraintes souples. Il s'agit d'imposer des pénalités lorsque les bornes inférieure ou supérieure ne sont pas respectées. Étant donné que dans ces deux modèles nous traitons déjà des pénalités associées au retard, il suffit de considérer des valeurs différentes de pénalités lorsque l'horaire de vol est à l'extérieur de la fenêtre de temps.

Tous les modèles proposés dans cette thèse nous permettent de résoudre les problèmes correspondant de façon optimale. L'efficacité de chacun de ces modèles est testée sur plusieurs jeux de données. Les résultats obtenus confirment leurs capacités à produire de bonnes solutions en temps réel pour des problèmes de petite et moyenne taille.

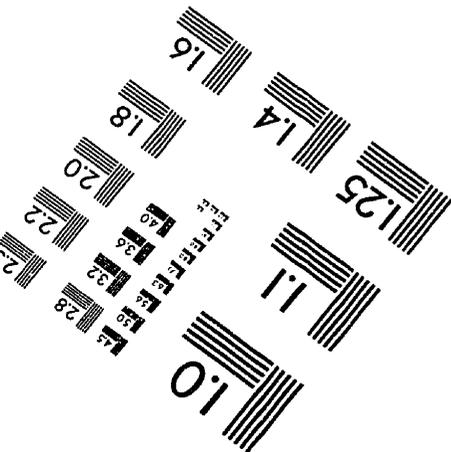
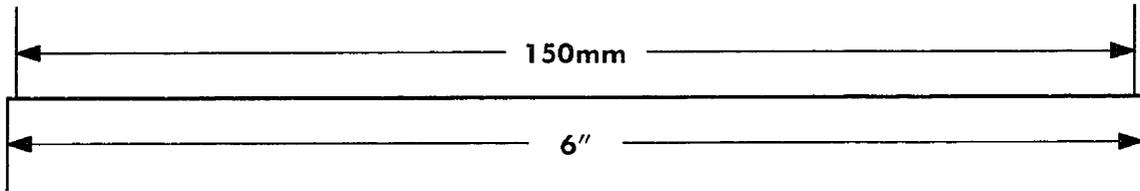
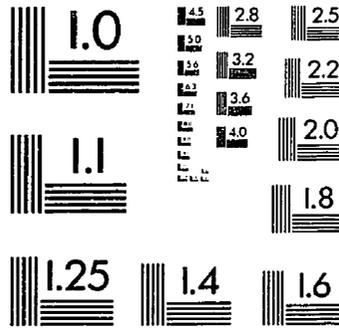
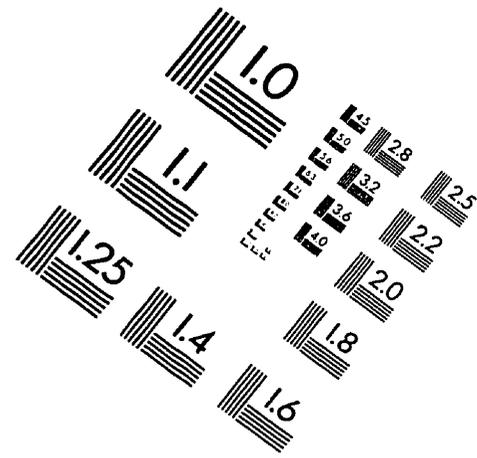
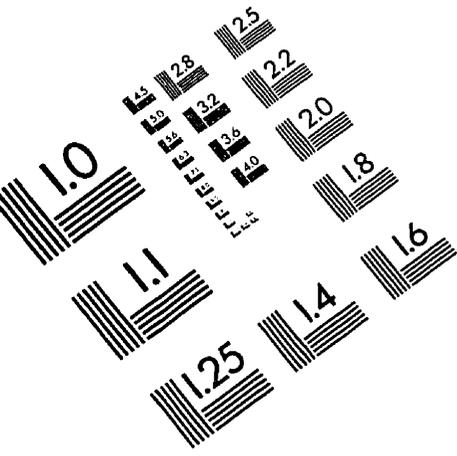
# RÉFÉRENCES

- [1] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., IOACHIM, I., SOUMIS, F. et SOLOMON, M. (1994). A Unified Framework for Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Les Cahiers du GERAD G-94-46*, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6, Révisé 1998.
- [2] DESROCHERS, M. et SOUMIS, F. (1988). A Generalized Permanent Labeling Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows, *INFOR* **26**, 191-212.
- [3] DESROCHERS, M. et SOUMIS, F. (1988). A Reoptimization Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows, *European Journal of Operational Research* **35**, 242-254.
- [4] DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M. et SOUMIS, F. (1994). Time Constrained Routing and Scheduling, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Volume on Networks, North Holland, Amsterdam.
- [5] DESROSIERS, J., PELLETIER, P. et SOUMIS, F. (1983). Plus Court Chemin avec Contraintes d'Horaire, *RAIRO* **17**, 357-377.
- [6] GÉLINAS, S., DESROCHERS, M., DESROSIERS, J. et SOLOMON, M.M. (1995). A New Branching Strategy for Time Constrained Routing Problems with Application to Backhauling, *Annals of Operations Research* **61**, 91-109.

- [7] IOACHIM, I., GÉLINAS, S., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (1998). A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs, *Networks* **31**, 193-204.
- [8] IOACHIM, I., DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et BÉLANGER, N. (1994). Fleet Assignment and Routing with Schedule Synchronization Constraints, *Les Cahiers du GERAD G-94-48, École des Hautes Études Commerciales*, Montréal, Canada, H3T 1V6, Révisé 1997.
- [9] JOHNSON, E.L., LETTOVSKY, L., NEMHAUSER, G.L., WISE, T. et OLSON, E. (1995). Crew Recovery, *INFORMS Conference*, New Orleans.
- [10] MONROE, W. et CHU, H.D. (1995). Real-Time Crew Rescheduling, *INFORMS Conference*, New Orleans.
- [11] SONG, M., WEI, G. et GANG, Y. (1998). A Decision Support Framework for Crew Management During Airline Irregular Operations, in *Operations Research in the Airline Industry*, Gang Yu (eds.), Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 259-286.
- [12] SONGJUN, L. et GANG, Y. (1998). Airline Schedule Perturbation Problem: Landing and Takeoff with Nonsplittable Resource for the Ground Delay Program, in *Operations Research in the Airline Industry*, Gang Yu (eds.), Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 404-432.

- [13] SONGJUN, L. et GANG, Y. (1998). Airline Schedule Perturbation Problem: Ground Delay Program with Splitable Resources, in *Operations Research in the Airline Industry*, Gang Yu (eds.), Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 433-460.
- [14] STOJKOVIĆ, G., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (1997). An Optimization Model for Real-Time Flight Scheduling, *Les Cahiers du GERAD G-97-46*, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.
- [15] STOJKOVIĆ, M., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (1997). The Operational Airline Crew Scheduling Problem, *Transportation Science*, à paraître.

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



**APPLIED IMAGE, Inc**  
 1653 East Main Street  
 Rochester, NY 14609 USA  
 Phone: 716/482-0300  
 Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

