UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UTILISATION DES SÉRIES DE FOURIER GÉNÉRALISÉES EN PROBABILITÉS APPLIQUÉES

JEAN-LUC GUILBAULT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET
DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
AVRIL 2000

0-612-53578-9

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

UTILISATION DES SÉRIES DE FOURIER GÉNÉRALISÉES
EN PROBABILITÉS APPLIQUÉES

présenté par : GUILBAULT Jean-Luc

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. FRAPPIER Clément, Ph. D., président

M. LEFEBVRE Mario, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. DUPONT André, Ph. D., membre

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon directeur de recherche, Monsieur Mario Lefebvre, sous la direction de qui il fut toujours agréable et enrichissant de travailler.

Résumé

Les problèmes d'instants et, dans une mesure moindre, d'endroits de premier passage ont été largement étudiés pour des processus unidimensionnels. Soit maintenant un processus de diffusion bidimensionnel $X(t)=(X_1(t), X_2(t))$ pour lequel les composantes $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont indépendantes. Soit aussi $T(x_1, x_2)$ la variable aléatoire associée à l'instant de premier passage du processus à la frontière d'une région rectangulaire finie qui est telle que

$$D := \{(x_1, x_2) \in R^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2, d_1 \leq x_1 \leq d_2\},$$

laquelle région est située à l'intérieur du premier quadrant. Aussi, le point de départ (x_1, x_2) dudit processus est nécessairement de cette région.

La probabilité d'atteindre la frontière c_2 de l'axe x_1 avant tout autre frontière, c'est-à-dire

$$p(x_1, x_2) := P[X_1(T) = c_2 \mid X_1(0) = x_1,\ X_2(0) = x_2],$$

est obtenue pour cinq processus bidimensionnels qui sont le mouvement brownien, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le mouvement brownien géométrique et le processus de Bessel. À ceux-ci se joint un processus sans désignation, trouvant application dans des domaines variés, en génétique et en mathématiques financières notamment.

Pour en arriver à ces fins, il s'agit de résoudre l'équation rétrospective de Kolmogorov :

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}v_i(x_i)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}+m_i(x_i)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}=0$$

où m_i et v_i désignent respectivement la moyenne et la variance infinitésimales du processus X_i. Cette dernière équation est soumise aux conditions à la frontière de la région circonscrite, où $p(x_1, x_2)$ est nulle en tout côté du rectangle, excepté en $x_1 = c_2$ où elle est unitaire. La solution, découlant de la méthode de séparation des variables, est présentée sous forme d'une série de Fourier généralisée.

Abstract

First hitting time problems and, to a lesser extent, first hitting place problems have been widely studied for one-dimensional processes. Now, let $X(t)=(X_1(t), X_2(t))$ be a two-dimensional diffusion process, the components $X_1(t)$ and $X_2(t)$ of which are independent. Let also $T(x_1, x_2)$ be the random variable associated with the first hitting time of the process to a boundary that circumscribes a rectangular area assumed to be finite, which is defined by

$$D := \{(x_1, x_2) \in R^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2, d_1 \leq x_1 \leq d_2\}.$$

The rectangle is situated entirely in the upper half-plane and the starting point (x_1, x_2) is necessarily located inside the aforesaid rectangular region.

The probability of reaching the boundary c_2 on the x_1-axis before any other, that is

$$p(x_1, x_2) := P[X_1(T) = c_2 \mid X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2],$$

is explicitly computed for five two-dimensional processes which are the Brownian motion and Ornstein-Uhlenbeck processes, the geometric Brownian motion and the Bessel process. Finally, a process without designation and having applications in various fields, genetics and financial mathematics notably, joins the former.

The achievement of this aim involves solving the Kolmogorov's backward equation

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}v_i(x_i)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}+m_i(x_i)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}=0$$

where m_i and v_i are referred respectively to the infinitesimal mean and variance of the process X_i. The solution of this latter equation is subject to the boundary conditions of the surrounding region, where $p(x_1,x_2)$ is zero for all sides of the rectangle but $x_1 = c_2$, where it is one. The solution, which follows from the method of separation of variables, is expressed as a generalised Fourier series.

Table des matières

Liste des annexes

Introduction

Un système dont l'évolution dans l'espace ou le temps est d'un déterminisme sans absoluité et dont le mouvement est gouverné par des lois de probabilité, est un système stochastique. Un processus stochastique serait alors un ensemble de variables aléatoires traduisant l'évolution dudit système. En outre, si le passage vers un état ultérieur n'a de dépendance qu'envers l'état présent, le processus est dit markovien et particulièrement de diffusion si ces changements continuels d'états se font au sein d'un espace continu d'états.

1. Problèmes de premier passage

Soit $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ un processus de diffusion bidimensionnel pour lequel les composantes $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont indépendantes. Est alors défini l'instant de premier passage par :

$$T(x_1, x_2) := \inf\{t > 0 : X_1(t) \notin (c_1, c_2) \text{ou } X_2(t) \notin (d_1, d_2) \mid X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2\}.$$

Il s'agit d'établir la probabilité que $X_1(T)$ soit égale à c_2 sous la condition initiale $(X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2)$, en supposant que le point de départ (x_1, x_2) soit localisé à l'intérieur d'une région circonscrite par le rectangle

$$D := \{(x_1, x_2) \in R^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2, d_1 \leq x_1 \leq d_2\},$$

les frontières c_i et d_i avec $i = 1,2$ étant toutes quatre finies. Une façon commode d'étudier ce type de problème consiste à considérer la délimitation de la région comme étant absorbante. C'est par l'intermédiaire de l'équation rétrospective de Kolmogorov qu'il est possible d'atteindre à la concrétisation du résultat espéré. Puisque les composantes $X_1(t)$ et $X_2(t)$ du processus stochastique sont réputées indépendantes, les termes de covariance sont nuls et l'équation rétrospective de Kolmogorov est telle que (Cox et Miller, 1965, p. 247)

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}v_i(x_i)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}+m_i(x_i)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right\}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

où la fonction ρ, limitée par les quatre frontières, est définie ci-dessous :

$$\rho(x_1,x_2;u,v,t):=P_{(x_1,x_2)}\left[X_1(t)\in(u,u+du),X_2(t)\in(v,v+dv)\right]/\,dudv.$$

Sous cette forme, l'équation de Kolmogorov est homogène dans le temps et suppose des mécanismes de transition indépendants du temps, cette constatation découlant du fait que le premier et le second moment infinitésimal $m_i(x_i)$ et $v_i(x_i)$ n'entretiennent aucune dépendance envers cette variable. La définition générale de ces moments est ainsi donnée par :

$$m(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E\left[X(t+\Delta t)-X(t)\,|\,X(t)=x\right]}{\Delta t}$$

et

$$v(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V\left[X(t+\Delta t)-X(t)\,|\,X(t)=x\right]}{\Delta t}$$

où les opérateurs E et V sont ceux de l'espérance mathématique et de la variance.

Si maintenant $\Theta(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $T(x_1, x_2)$, alors, par généralisation du cas unidimensionnel (Cox et Miller, 1965, p. 230),

$$1-\Theta(t) = P[T(x_1, x_2) > t] = \int_{d_1}^{d_2}\int_{c_1}^{c_2} \rho(x_1, x_2; u, v, t)\,du\,dv$$

et $\Theta'(t) = \theta(t)$, notée $\theta(t \mid x_1, x_2)$ pour bien marquer la dépendance vis-à-vis du point de départ (x_1, x_2), est la fonction de densité de $T(x_1, x_2)$. La transformée de Laplace $\theta^*(s \mid x_1, x_2)$ de cette fonction de densité

$$\begin{aligned}\theta^*(s \mid x_1, x_2) &= E\left[e^{-sT(x_1, x_2)}\right]\\ &= \int_0^\infty e^{-st}\theta(t \mid x_1, x_2)\,dt\end{aligned}$$

satisfait alors à l'équation

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}v_i(x_i)\frac{\partial^2\theta^*}{\partial x_i^2} + m_i(x_i)\frac{\partial\theta^*}{\partial x_i}\right\} = s\theta^* \qquad (1)$$

avec les conditions évidentes

$$\theta^*(s \mid c_1, x_2) = \theta^*(s \mid c_2, x_2) = \theta^*(s \mid x_1, d_1) = \theta^*(s \mid x_1, d_2) = 1$$

puisque, si le point de départ est situé sur l'une des frontières, l'absorption est immédiate de sorte que $T = 0$. La fonction de densité $\theta(t \mid x_1, x_2)$ comporte quatre branches correspondant à autant de frontières et peut être d'ores et déjà écrite comme une telle somme

$$\theta(t\,|\,x_1,x_2)=\theta_{c_1}(t\,|\,x_1,x_2)+\theta_{c_2}(t\,|\,x_1,x_2)+\theta_{d_1}(t\,|\,x_1,x_2)+\theta_{d_2}(t\,|\,x_1,x_2).$$

Alors, $\theta_i(t\,|\,x_1,x_2)$ est la fonction de densité de l'instant de premier passage à la frontière i, en clair reliée à la probabilité que l'absorption se produise à la frontière i. Si le problème est modifié de façon à ce que l'intérêt ne soit maintenu que pour la frontière j, la fonction θ^* sera posée nulle pour toute frontière, excepté pour celle en cause et la résolution de l'équation (1) conduira vers l'expression de $\theta_j^*(s\,|\,x_1,x_2)$. La limite de cette dernière lorsque s tend vers zéro est alors la probabilité que le processus soit absorbé à la frontière j.

Pour le problème faisant l'objet du présent ouvrage, il est ici nécessaire de définir la probabilité $p(x_1,x_2)$ comme suit:

$$p(x_1,x_2):=P[X_1(T)=c_2\,|\,X_1(0)=x_1,X_2(0)=x_2],$$

laquelle correspond à la limite $\lim_{s\downarrow 0}\theta_{c_2}^*(s\,|\,x_1,x_2)$. Cette probabilité satisfait donc à l'équation :

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}v_i(x_i)\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}+m_i(x_i)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}=0 \qquad (2)$$

soumise aux conditions aux frontières

$$p(c_1,x_2)=0,\ p(c_2,x_2)=1\ \ \forall x_2 \in [d_1,d_2]$$

et

$$p(x_1,d_i)=0\ \ \forall\ x_1 \in [c_1\ ,c_2).$$

Les problèmes d'endroits de premier passage unidimensionnels consistant en la détermination de la probabilité que le processus soit absorbé à une frontière a plutôt qu'à une frontière b furent largement étudiés pour différents processus de diffusion, particulièrement pour le mouvement brownien et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Cox et Miller, 1965, pp. 230-234). Pour le mouvement brownien ayant pour premier et second moments infinitésimaux μ et σ^2, la probabilité

$$p_a(x) := P[X(T_a)=a \mid X(0)=x]$$

où

$$T_a := \inf\{t>0 \colon X(t)=0 \text{ ou } a\,(>0) \mid X(0) \in (0,a)\}$$

est la suivante (Cox et Miller, 1965, p. 233):

$$p_a(x)=\frac{e^{-2\mu x/\sigma^2}-1}{e^{-2\mu a/\sigma^2}-1}\ .$$

Il importe de noter que ce résultat découle de la résolution de l'équation de Kolmogorov unidimensionnelle équivalente à (2), soit

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2p_a(x)}{dx^2}+\mu\frac{dp_a(x)}{dx}=0$$

avec les conditions aux frontières

$$p_a(a) = 1 \text{ et } p_a(0) = 0 .$$

La fréquence des écrits est considérablement diminuée lorsqu'il s'agit des problèmes équivalents en deux ou trois dimensions. Yin et *al.* (1999) ont obtenu la fonction de densité conjointe de l'instant et de l'endroit de premier passage ainsi que les fonctions de densité marginales correspondantes pour le mouvement brownien localisé à l'intérieur d'un cercle. Des résultats similaires ont été formulés pour le mouvement brownien situé à l'intérieur d'une coquille sphérique (Yin et Wu, 1999). Auparavant, Xiao et Yin (1998) avaient déterminé la distribution de l'instant et de l'endroit de premier passage à un hyperplan pour un mouvement brownien conditionné. Shao et Yin (1997) se sont aussi intéressés au mouvement brownien avec dérive. Quelques autres problèmes semblables furent introduits notamment par Lefebvre qui a établi les fonctions caractéristiques, de densité de probabilité et génératrices des moments pour l'endroit de premier passage de différents processus dans une région semi-infinie du plan (1997, 1989a, b). Finalement, certains auteurs ont traité de cas similaires à ceux énoncés ci-dessus mais pour des processus discrets (Lotov, 1977; Seneta, 1980; Nakajima, 1998).

Les résultats explicites concernant les instants de premier passage pour des processus de diffusion multidimensionnels ne sont guère plus nombreux. Ceux-ci, pour le mouvement brownien bidimensionnel, furent étudiés par Buckholtz et Wasan (1979) ainsi que par Iyengar (1985). Wendel (1980) a pour sa part considéré des problèmes d'instant de premier passage pour le mouvement brownien de dimension n pour des régions sphériques.

Maintenant, seront exposées les solutions explicites des fonctions $p(x_1, x_2)$ quant à cinq cas clairement définis, solutions dérivant de la résolution de l'équation rétrospective de Kolmogorov (2). Le mouvement brownien, aussi connu sous la désignation de processus de Wiener, ainsi que le processus d'Ornstein-Ulhlenbeck seront les premiers objets mis à l'étude. Suivront le mouvement brownien géométrique et le processus de Bessel. Finalement, l'analyse se déplacera vers un processus aléatoire tirant ses origines de domaines d'applications diverses, notamment en génétique et en mathématiques financières.

Il n'est méthode de résolution mieux adaptée à ce type de problèmes multidimensionnels que celle de la séparation des variables. Néanmoins, nulle démarche n'est revêtue d'un caractère d'infaillibilité et n'est applicable indifféremment à chacune des situations. Il est donc de toute nécessité d'en justifier l'emploi et c'est dans la théorie de Sturm-Liouville que repose ladite justification. En dernière analyse, la solution $p(x_1, x_2)$ sera rendue par les séries de Fourier généralisées.

2. Séparation des variables et théorie de Sturm-Liouville

L'équation rétrospective de Kolmogorov, associée aux problèmes d'endroit de premier passage bidimensionnel et trouvant solution par la séparation des variables, requiert que soit énoncée la solution $p(x_1, x_2)$ comme étant le produit de deux fonction $y_1(x_1)$ et $y_2(x_2)$, chacune ne dépendant que d'une seule variable libre. Dans ces conditions, l'équivalence entre l'équation (2) et la suivante peut être soutenue :

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{1}{2} v_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [y_1(x_1) y_2(x_2)] + m_i(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} [y_1(x_1) y_2(x_2)] \right\} = 0 .$$

Il se révèle maintenant, de la division de l'expression développée par la solution $p(x_1,x_2) = y_1(x_1)y_2(x_2)$, deux équations dissociées, chacune reliée à l'une des deux variables x_1 et x_2. En outre, l'égalité de ces équations n'est manifeste qu'en admettant qu'elle ne vaille indubitablement que des valeurs constantes λ, la dépendance propre de ces équations différant par les variables libres. En clair,

$$\frac{1}{2}v_1(x_1)\frac{y_1''(x_1)}{y_1(x_1)} + m_1(x_1)\frac{y_1'(x_1)}{y_1(x_1)} = -\frac{1}{2}v_2(x_2)\frac{y_2''(x_2)}{y_2(x_2)} - m_2(x_2)\frac{y_2'(x_2)}{y_2(x_2)} = \lambda .$$

Il ressort, des hypothèses qui précèdent, que la résolution de l'équation de Kolmogorov se cantonne dans la résolution des équations différentielles suivantes, lesquelles solutions sont assujetties aux contraintes des axes sur lesquels elles sont définies:

$$\frac{1}{2}v_2(x_2)y_2''(x_2) + m_2(x_2)y_2'(x_2) + \lambda\, y_2(x_2) = 0 \tag{3a}$$

et

$$\frac{1}{2}v_1(x_1)y_1''(x_1) + m_1(x_1)y_1'(x_1) - \lambda\, y_1(x_1) = 0 . \tag{3b}$$

Les équations différentielles homogènes admettent toujours la solution triviale $y_i(x_i) \equiv 0$. Dans bien peu de cas cependant, cette solution est satisfaisante. Il pourrait néanmoins exister, selon les $m_i(x_i)$ et $v_i(x_i)$, des valeurs pour λ, dès lors désignées par valeurs propres, auxquelles sont associées des solutions –les fonctions propres– autres que cette solution triviale. Essentiellement, il s'agit de résoudre un problème de Sturm-Liouvlle pour l'équation (3a) défini sur le domaine (d_1,d_2).

Hormis certaines occurrences particulières, les équations différentielles linéaires de second ordre peuvent adopter la forme que voici :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\,\mathrm{y}}{dx}\right]-q(x)\mathrm{y}+\lambda r(x)\mathrm{y}=0,$$

cette dernière équation étant reconnue par la dénomination d'équation de Sturm-Liouville. Pour assurer de l'orthogonalité des fonctions propres reliées à des valeurs propres distinctes eu égard à la fonction de poids $r(x)$ et à l'intérieur d'un intervalle ouvert (ζ_1,ζ_2), les solutions peuvent être entre autres soumises aux conditions homogènes aux frontières ci-après (Edwards et Penney, 1985, p. 519) :

$$\varphi_1\,\mathrm{y}(\zeta_1)-\kappa_1\,\mathrm{y}'(\zeta_1)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_2\,\mathrm{y}(\zeta_2)+\kappa_2\,\mathrm{y}'(\zeta_2)=0 \tag{4}$$

où les coefficients $\varphi_i, \kappa_i \quad i=1,2$ demeurent constants. Ces expressions incluent notamment les conditions de Dirichlet et de Neumann. Ainsi, l'orthogonalité se traduit par :

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} r(x)\mathrm{y}_i(x)\mathrm{y}_j(x)\,dx=0\,.$$

Une fonction $f(x)$ peut être représentée comme une sommation infinie sur les fonctions propres, en autant qu'il existe un nombre infini de ces fonctions propres et qu'aussi elles forment un ensemble complet. Or, la théorie de Sturm-Liouville admet le théorème ci-après.

De l'existence des fonctions propres:

Théorème 1: (Edwards et Penney, 1985, p. 519)

Si les fonctions $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont continues sur l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$ et si $p(x)$ ainsi que $r(x)$ sont strictement positives à chaque point de l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$, alors les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville constituent une suite croissante et infinie

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \cdots$$

de nombres réels avec

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty .$$

À un facteur constant multiplicatif près, une et une seule fonction propre $y_n(x)$ est associée à chacune des valeurs propres λ_n. De plus, si $q(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$ et les coefficients $\varphi_i, \kappa_i \quad i = 1, 2$ tous non négatifs (se référer à l'équation (4)), alors les valeurs propres sont toutes non négatives.

Reprenant l'équation (3a), si celle-ci est multipliée par $e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2}$, opération précédée d'un réarrangement des termes, c'est-à-dire

$$e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2} \left[y_2'' + \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} y_2' + \frac{2\lambda}{v_2(x_2)} y_2 \right] = 0 ,$$

alors elle s'exprime sous la forme de l'équation de Sturm-Liouville et devient

$$\left[e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2} y_2' \right]' + \frac{2\lambda\, e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2}}{v_2(x_2)} y_2 = 0$$

où, par identification,

$$p(x_2) = e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2},$$

$$q(x_2) \equiv 0$$

et

$$r(x_2) = \frac{2\, e^{\int \frac{2m_2(x_2)}{v_2(x_2)} dx_2}}{v_2(x_2)} = \frac{2p(x_2)}{v_2(x_2)} \, .$$

Le théorème 1 est, en conformité avec ce qui sera établi, vérifié dans les cinq cas précités (se rapporter supra, page 7) à l'exception du processus de Bessel et du processus cinquième qui sont problèmes, tantôt réguliers tantôt singuliers, suivant l'occurrence de l'inclusion ou non de l'origine au sein du domaine de définition.

Par les analyses précédentes, fut justifiée l'utilisation des séries de Fourier généralisées pour la résolution de l'équation rétrospective de Kolmogorov soumise aux contraintes de chacun des cinq cas autour desquelles s'articule l'ouvrage. Le chapitre prochain s'attache à la présentation des résultats, c'est-à-dire à l'établissement de la fonction $p(x_1, x_2)$.

Chapitre premier : Calculs des probabilités

1. Mouvement brownien

Les collisions successives et aléatoires que subit une particule immergée dans un fluide influent de manière déterminante sur son déplacement. Le processus aléatoire relié à ce mouvement brownien (ou processus de Wiener) fut originellement édifié à partir du dessein formé de décrire l'évolution d'une telle particule et la théorie formelle lui étant associée fut exposée par Wiener à partir de 1918 dans une série d'articles. Depuis lors, la correspondance entre l'évolution de différents systèmes et ce processus aléatoire fut établie et l'intérêt porté à ce processus s'étendit au-delà de la simple description du mouvement d'une particule au sein d'un fluide.

Pour ce premier processus stochastique mis sous étude, la moyenne et la variance infinitésimales sont telles que

$$m_i(x_i) \equiv \mu_i \in R \text{ et } v_i(x_i) \equiv \sigma_i^2 > 0$$

et la méthode de résolution embrassée conduit aux équations différentielles ci-après:

$$y_2'' + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0 \tag{1.1a}$$

et

$$y_1'' + \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda}{\sigma_1^2} y_1 = 0 \; . \tag{1.1b}$$

1.1. Résolution et analyse de l'équation différentielle première

Soit la première équation différentielle :

$$y_2'' + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0 .$$

Si est définie la variable $x_{2T} = x_2 - d_1$, alors celle-ci est restreinte au domaine $[0, d_{2T}]$ avec $d_{2T} = d_2 - d_1$. De cela, il ressort que

$$\frac{d\,y_2}{dx_2} = \frac{dz_2}{dx_{2T}}$$

et que

$$\frac{d^2\,y_2}{dx_2^2} = \frac{d^2 z_2}{dx_{2T}^2},$$

fut-il posé au préalable l'égalité entre $y_2(x_2)$ et $z_2(x_{2T})$. L'équation (1.1a) se résout, dans le nouveau système de référence, en l'expression

$$z_2'' + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} z_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} z_2 = 0 .$$

Maintenant, la méthode de résolution classique mène à l'équation caractéristique

$$\eta^2 + \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}\eta + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} = 0 ,$$

laquelle équation admet les racines suivantes:

$$\eta_{1,2} = \frac{-\mu_2}{\sigma_2^2} \pm \frac{1}{\sigma_2^2}\sqrt{\mu_2^2 - 2\lambda\sigma_2^2}\,.$$

Trois cas formels sont à analyser quant aux liens de grandeur qui unissent les termes apparaissant sous le radical :

i) $\mu_2^2 > 2\lambda\sigma_2^2$
ii) $\mu_2^2 = 2\lambda\sigma_2^2$
iii) $\mu_2^2 < 2\lambda\sigma_2^2$

i) Le premier de ces trois cas suppose l'existence de deux racines réelles distinctes et, de ce fait, une solution de la forme

$$z_2(x_{2T}) = \omega_1\, e^{\eta_1 x_{2T}} + \omega_2\, e^{\eta_2 x_{2T}}\,.$$

Cette solution est à rejeter puisque

$$z_2(x_{2T} = 0) = \omega_1 + \omega_2 = 0$$

entraîne que ω_1 est égale à $-\omega_2$. Aussi, à la seconde frontière,

$$z_2(x_{2T} = d_{2T}) = \omega_2\left(e^{\eta_2 d_{2T}} - e^{\eta_1 d_{2T}}\right) = 0$$

et n'est réalisable que si, d'une part, ω_2 est nulle et la solution triviale ou si, d'autre part, η_1 et η_2 sont égaux. Or, cette dernière exigence viendrait contredire l'hypothèse définissant la situation présente, la racine η_1 étant différente de η_2.

ii) Pour le second cas, la solution paraît comme suit:

$$z_2(x_{2T}) = \omega_1 \, e^{\frac{-\mu_2}{\sigma_2^2}x_{2T}} + \omega_2 x_{2T} \, e^{\frac{-\mu_2}{\sigma_2^2}x_{2T}} .$$

En évaluant la fonction aux frontières, les constatations prochaines, concernant les constantes d'intégration, découlent directement. Puisque

$$z_2(x_{2T} = 0) = \omega_1 = 0$$

il suit de là que

$$z_2(x_{2T} = d_{2T}) = \omega_2 d_{2T} \, e^{\frac{-\mu_2}{\sigma_2^2}d_{2T}} = 0 .$$

Hormis par la solution triviale qui est toujours apte à satisfaire une équation différentielle homogène, la relation précédente n'est satisfaite que si d_{2T} est nul. Cette contrainte constitue toutefois une servitude à laquelle le problème ne saurait se soumettre et est d'emblée rejetée.

iii) Dans ce dernier cas, la situation est telle que l'équation caractéristique admet les racines complexes

$$\begin{aligned}\eta_{1,2} &= \frac{-\mu_2}{\sigma_2^2} \pm i\frac{1}{\sigma_2^2}\sqrt{2\lambda\sigma_2^2 - \mu_2^2} \\ &:= a_2 \pm ib_2\end{aligned}$$

de sorte que

$$z_2(x_{2T}) = e^{a_2 x_{2T}} \{\omega_1 \cos(b_2 x_{2T}) + \omega_2 \sin(b_2 x_{2T})\}.$$

De l'évaluation aux frontières émanent les affirmations qui suivent:

$$z_2(x_{2T} = 0) = \omega_1 = 0$$

si bien que

$$z_2(x_{2T} = d_{2T}) = \omega_2 e^{a_2 d_{2T}} \sin(b_2 d_{2T}) = 0.$$

Si la solution triviale est écartée, nécessairement $\sin(b_2 d_{2T})$ est le terme par lequel l'équation devient nulle, et alors $b_2 d_{2T} = n\pi$ avec $n \in N^*$, N^* étant l'ensemble des entiers naturels excluant zéro. Il appert que la seule solution pleinement satisfaisante serait, en prenant $\omega_2 = 1$,

$$z_{2_n}(x_{2T}) = e^{a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right).$$

Maintenant, concernant la constante λ, celle-ci s'exprime explicitement en fonction des différents paramètres afférents à la définition du problème et l'expression est telle que

$$\lambda_n = \frac{\sigma_2^2}{2}\left\{\frac{n^2\pi^2}{d_{2T}^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^4}\right\},$$

laquelle est toujours positive, comme le présageait la théorie de Sturm-Liouville. Ce paramètre fut paré d'un indice n qui dénote un nombre infini de λ.

1.2. Résolution et analyse de l'équation différentielle seconde

Il est noté que la résolution de la seconde équation différentielle

$$y_1'' + \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} y_1 = 0$$

est facilitée en réalisant un changement de variable qui est ici $x_{1T} = x_1 - c_1$, laquelle variable est comprise dans l'intervalle $[0, c_{2T}]$ avec $c_{2T} = c_2 - c_1$. Puisque ceci implique nécessairement que

$$\frac{d\,y_1}{dx_1} = \frac{dz_1}{dx_{1T}} ,$$

alors

$$\frac{d^2\,y_1}{dx_1^2} = \frac{d^2 z_1}{dx_{1T}^2},$$

cela en ayant posé l'égalité entre $y_1(x_1)$ et $z_1(x_{1T})$.

L'équation (1.1b), dès lors dépendante de $z_1(x_{1T})$, devient:

$$z_1'' + \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} z_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} z_1 = 0 .$$

Aussi, l'équation caractéristique reliée à cette dernière expression,

$$\psi^2 + \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} \psi - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} = 0 ,$$

laquelle admet les racines réelles

$$\begin{aligned}\psi_{1,2} &= \frac{-\mu_1}{\sigma_1^2} \pm \frac{1}{\sigma_1^2}\sqrt{\mu_1^2 + 2\lambda_n \sigma_1^2} \\ &:= a_1 \pm b_1 ,\end{aligned}$$

conduit à la solution suivante:

$$\begin{aligned}z_{1_n}(x_{1T}) &= A_n \,\mathrm{e}^{\psi_1 x_{1T}} + B_n \,\mathrm{e}^{\psi_2 x_{1T}} \\ &= \mathrm{e}^{a_1 x_{1T}}\left(A_n \,\mathrm{e}^{b_1 x_{1T}} + B_n \,\mathrm{e}^{-b_1 x_{1T}}\right), n \in N^* .\end{aligned}$$

Par l'évaluation de cette fonction à la première frontière, il vient

$$z_{1_n}(x_{1T} = 0) = A_n + B_n = 0$$

si bien que, en utilisant le fait que A_n soit égale à $-B_n$ par la ligne précédente,

$$\begin{aligned}z_{1_n}(x_{1T}) &= B_n \,\mathrm{e}^{a_1 x_{1T}}\left(\mathrm{e}^{-b_1 x_{1T}} - \mathrm{e}^{b_1 x_{1T}}\right) \\ &= -2B_n \,\mathrm{e}^{a_1 x_{1T}} \mathrm{sh}(b_1 x_{1T}) .\end{aligned}$$

1.3. Solution générale pour le mouvement brownien

Des développements précédents est dérivée la solution au problème général du mouvement brownien. Ainsi,

$$p(x_{1T}, x_{2T}) = \sum_{n=1}^{\infty} -2B_n \,\mathrm{e}^{a_1 x_{1T}} \mathrm{sh}(b_1 x_{1T}) \mathrm{e}^{a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right)$$

et, de l'évaluation en c_{2T}, seconde frontière de l'axe x_{1T}, endroit où la probabilité est invariablement de un, c'est-à-dire

$$p(x_{1T} = c_{2T}, x_{2T}) = \sum_{n=1}^{\infty} -2B_n \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) e^{a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) = 1,$$

découle la relation suivante, obtenue par extraction du terme indépendant de n :

$$e^{-a_2 x_{2T}} = \sum_{n=1}^{\infty} -2B_n \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) \sin\left(\frac{n\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right).$$

Maintenant, en multipliant cette expression par $\sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right)$ et en l'intégrant entre zéro et d_{2T} comme suit :

$$\int_0^{d_{2T}} e^{-a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) dx_{2T} = \int_0^{d_{2T}} \sum_{n=1}^{\infty} -2B_n \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) \sin\left(\frac{n\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) dx_{2T},$$

la relation suivante est admissible par l'orthogonalité des fonctions sinus :

$$\begin{aligned} \int_0^{d_{2T}} e^{-a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) dx_{2T} &= -2B_{n'} \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) \int_0^{d_{2T}} \sin^2\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) dx_{2T} \\ &= -2B_{n'} \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) \frac{d_{2T}}{2}. \end{aligned}$$

Le coefficient de Fourier pour cette série en sinus est donc lié à l'intégrale qui précède de la manière qui suit:

$$-2B_{n'} \, e^{a_1 c_{2T}} \operatorname{sh}(b_1 c_{2T}) = \frac{2}{d_{2T}} \int_0^{d_{2T}} e^{-a_2 x_{2T}} \sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}} x_{2T}\right) dx_{2T}$$

d'où le fait que les égalités prochaines soient recevables:

$$-2B_{n'}\,e^{a_1c_{2T}}\mathrm{sh}(b_1c_{2T}) = \frac{-2}{d_{2T}}\left[\frac{d_{2T}^2\,e^{-a_2x_{2T}}}{a_2^2d_{2T}^2+n'^2\pi^2}\right]\left[a_2\sin\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}}x_{2T}\right)+\frac{n'\pi}{d_{2T}}\cos\left(\frac{n'\pi}{d_{2T}}x_{2T}\right)\right]_0^{d_{2T}}$$

$$= \frac{2n'\pi}{a_2^2d_{2T}^2+n'^2\pi^2}\left[(-1)^{n'+1}\,e^{-a_2d_{2T}}+1\right]$$

et ceci implique que

$$B_n = \frac{-n\pi\left\{(-1)^{n+1}\,e^{-a_2d_{2T}}+1\right\}}{\left(a_2^2d_{2T}^2+n^2\pi^2\right)e^{a_1c_{2T}}\,\mathrm{sh}(b_1c_{2T})}\,.$$

La solution générale, dans le système de référence original, est donc:

$$p(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{a_1(x_1-c_1)}\mathrm{sh}\{b_1(x_1-c_1)\}e^{a_2(x_2-d_1)}\sin\left\{\frac{n\pi}{d_2-d_1}(x_2-d_1)\right\}$$

où

$$C_n = \frac{2n\pi\left\{(-1)^{n+1}\,e^{-a_2(d_2-d_1)}+1\right\}}{\left\{a_2^2(d_2-d_1)^2+n^2\pi^2\right\}e^{a_1(c_2-c_1)}\mathrm{sh}\{b_1(c_2-c_1)\}}$$

$$a_i = {}^{-\mu_i}\!\big/_{\sigma_i^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sqrt{\mu_1^2+2\lambda_n\sigma_1^2}$$

$$\lambda_n = \frac{\sigma_2^2}{2}\left\{\frac{n^2\pi^2}{(d_2-d_1)^2}+\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^4}\right\}.$$

Ce processus, en tant que modèle descriptif pour le déplacement d'une particule brownienne, présente des limitations avérées : pour des temps très courts, se rapprochant de zéro, celui-ci suppose que la vitesse avec laquelle se meut la particule tend vers l'infini. Excepté justement pour des temps longs, en comparaison avec ceux séparant deux collisions successives, ce processus est vain. Pour suppléer cette lacune inhérente au processus de Wiener, fut introduit en 1930 par Ornstein et Uhlenbeck un processus substitutif, lequel est l'objet de la prochaine section.

2. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, plutôt que de s'attacher à la position, s'intéresse à la vitesse dans le temps de la particule brownienne. Les changements de vitesse résultant, d'une part, des heurts successifs de la particule avec celles du milieu ainsi que, d'autre part, des pertes frictionnelles encourues lors du déplacement dans le fluide, sont les facteurs réputés agissant.

Un processus stochastique est dit d'Ornstein-Uhlenbeck si sa spécificité est rendue par les modalités

$$m_i(x_i) = -\alpha_i x_i \;\; (\alpha_i > 0) \;\; \text{et} \;\; v_i(x_i) \equiv \sigma_i^2 \;\; (>0).$$

Soit les équations différentielles tirant leurs origines de la séparation des variables indépendantes de l'équation de Kolmogorov:

$$y_2'' - \frac{2\alpha_2 x_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0 \tag{2.1a}$$

et

$$y_1'' - \frac{2\alpha_1 x_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda}{\sigma_1^2} y_1 = 0. \tag{2.1b}$$

2.1. Résolution et analyse de l'équation différentielle première

La solution de l'équation différentielle

$$y_2'' - \frac{2\alpha_2 x_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0$$

est donnée par (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 143) :

$$y_2(x_2) = \omega_1 \Phi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} x_2^2\right) + \omega_2 \Psi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} x_2^2\right) \tag{2.2}$$

où $\Phi(\gamma, \beta; x)$ et $\Psi(\gamma, \beta; x)$ sont des fonctions hypergéométriques confluentes.

2.1.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle première et des frontières

La sujétion de la solution aux nécessités des frontières astreint à l'introduction d'un système d'équations linéaires pour lequel les constantes d'intégration ω_1 et ω_2 ont rôle de variables. Ainsi,

$$y_2(d_1) = \omega_1 \Phi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_1^2\right) + \omega_2 \Psi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_1^2\right) = 0$$

$$y_2(d_2) = \omega_1 \Phi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_2^2\right) + \omega_2 \Psi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_2^2\right) = 0$$

est un système d'équations qui, une fois présenté sous forme matricielle, devient :

$$\begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_1^2\right) & \Psi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_1^2\right) \\ \Phi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_2^2\right) & \Psi\left(\frac{-\lambda}{2\alpha_2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} d_2^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une solution autre que la solution triviale n'est admissible que si le déterminant de la matrice des coefficients prend la valeur nulle, c'est-à-dire si

$$\Delta := \begin{vmatrix} \Phi\left(a_2, \frac{1}{2}; b_2 d_1^2\right) & \Psi\left(a_2, \frac{1}{2}; b_2 d_1^2\right) \\ \Phi\left(a_2, \frac{1}{2}; b_2 d_2^2\right) & \Psi\left(a_2, \frac{1}{2}; b_2 d_2^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

où le symbolisme suivant a été adopté :

$$a_2 := \frac{-\lambda}{2\alpha_2}$$

et

$$b_2 := \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}.$$

Les racines a_2 de cette équation permettent pour leur part de fixer les valeurs propres qui, par essence, existent en nombre infini, affirmation assurée par le théorème 1. Les fonctions

$$p(x_2) = e^{-\frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}x_2^2}, \quad p'(x_2) = -\frac{2\alpha_2}{\sigma_2^2}x_2\, e^{-\frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}x_2^2}$$

et

$$r(x_2) = \frac{2}{\sigma_2^2} e^{-\frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}x_2^2}$$

sont toutes continues et strictement positives, quelle que soit la valeur réelle de x_2, à l'exception de $p'(x_2)$ qui devient nulle si la variable x_2 est elle-même nulle. Le paramètre λ sera dès lors noté λ_n.

Soit maintenant R_2 le rapport des constantes d'intégration tel que

$$R_2 := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-\Psi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 d_1^2\right)}{\Phi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 d_1^2\right)} = \frac{-\Psi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 d_2^2\right)}{\Phi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 d_2^2\right)} .$$

Alors, la solution de l'équation différentielle s'écrit maintenant

$$y_2(x_2) = \omega_2\left[R_2\Phi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 x_2^2\right) + \Psi\left(a_2,\frac{1}{2};b_2 x_2^2\right)\right]$$

et si les racines a_2 du déterminant Δ sont désignées par le symbole k_n^Δ de telle sorte que

$$k_n^\Delta = \frac{-\lambda_n}{2\alpha_2},$$

il appert alors que $\lambda_n = -2\alpha_2 k_n^\Delta$ et la solution devient finalement :

$$\begin{aligned} y_{2_n}(x_2) &= R_2\Phi\left(k_n^\Delta,\frac{1}{2};b_2 x_2^2\right) + \Psi\left(k_n^\Delta,\frac{1}{2};b_2 x_2^2\right) \\ &:= F\left(k_n^\Delta,\frac{1}{2};b_2 x_2^2\right). \end{aligned}$$

2.2. Résolution et analyse de l'équation différentielle seconde

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y_1'' - \frac{2\alpha_1 x_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} y_1 = 0 .$$

Pour cette seconde équation, la solution générale se présente comme suit (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 143) :

$$y_{1_n}(x_1) = A_n \Phi\left(\frac{\lambda_n}{2\alpha_1}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} x_1^2\right) + B_n \Psi\left(\frac{\lambda_n}{2\alpha_1}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} x_1^2\right)$$

et si $-2\alpha_2 k_n^{\Delta}$ est substitué à λ_n et b_1 à α_1/σ_1^2 alors

$$y_{1_n}(x_1) = A_n \Phi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 x_1^2\right) + B_n \Psi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 x_1^2\right) . \qquad (2.3)$$

2.2.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle seconde et de la première frontière

En conformité avec la définition des frontières, la solution y_{1_n} évaluée en c_1 est nulle. Ainsi,

$$y_{1_n}(x_1 = c_1) = A_n \Phi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 c_1^2\right) + B_n \Psi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 c_1^2\right) = 0 .$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{-\Psi\left(\dfrac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \dfrac{1}{2}; b_1 c_1^2\right)}{\Phi\left(\dfrac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \dfrac{1}{2}; b_1 c_1^2\right)} := R_1 \, .$$

En introduisant cette dernière expression dans (2.3) il vient

$$\begin{aligned} y_{1n}(x_1) &= B_n\left[R_1\Phi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 x_1^2\right) + \Psi\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 x_1^2\right)\right] \\ &:= B_n G\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \frac{1}{2}; b_1 x_1^2\right). \end{aligned}$$

2.3. Solution générale pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

La formulation de la solution générale suppose la connaissance d'un certain nombre de résultats lesquels sont introduits dans la prochaine sous-section.

2.3.1. Propositions essentielles

Les propositions suivantes sont indispensables à l'établissement des résultats.

Concernant l'orthogonalité des fonctions:

Proposition 2.1 (démonstration à l'annexe 1)

Soit f_a une fonction telle que

$$f_a := \omega_1 \Phi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) + \omega_2 \Psi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right)$$

où les fonctions $\Phi(\beta, \gamma; x)$ et $\Psi(\beta, \gamma; x)$ satisfont à l'équation hypergéométrique confluente. Alors,

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-bt^2} f_{a_1} f_{a_2} dt = 0 \text{ si } a_1 \neq a_2 \text{ et si } f_a(\zeta_i) = 0 \; \forall a, i = 1,2 .$$

Concernant les intégrales:

Proposition 2.2 (démonstration à l'annexe 1)

Soit f_a une fonction telle que

$$f_a := \omega_1 \Phi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) + \omega_2 \Psi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right)$$

où les fonctions $\Phi(\beta,\gamma;x)$ et $\Psi(\beta,\gamma;x)$ satisfont à l'équation hypergéométrique confluente. Alors,

$$\int e^{-bt^2} f_a dt = \frac{1}{2} t\, e^{-bt^2} H_{\omega_1,\omega_2}\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right)$$

avec

$$H_{\omega_1,\omega_2}\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right) = 2\omega_1\Phi\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right) - \omega_2\Psi\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right).$$

2.3.2. Solution

La solution générale de l'équation de Kolmogorov dépeignant le mouvement d'Ornstein-Uhlenbeck est rendue par l'expression qui suit:

$$p(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n F\left(k_n^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right) G\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1x_1^2\right).$$

Maintenant, évaluée à la seconde frontière de l'axe x_1,

$$p(x_1=c_2,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n F\left(k_n^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right) G\left(\frac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1c_2^2\right) = 1.$$

En multipliant cette dernière par $e^{-b_2x_2^2}\ F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)$ et en l'intégrant de d_1 à d_2, c'est-à-dire

$$\int_{d_1}^{d_2}\sum_{n=1}^{\infty}B_nG\left(\frac{-\alpha_2k_n^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1c_2^2\right)e^{-b_2x_2^2}\ F\left(k_n^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)dx_2,$$

alors

$$\int_{d_1}^{d_2}e^{-b_2x_2^2}\ F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)dx_2=B_{n'}G\left(\frac{-\alpha_2k_{n'}^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1c_2^2\right)\int_{d_1}^{d_2}e^{-b_2x_2^2}\left[F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)\right]^2dx_2\,.$$

Ce dernier résultat se réclamant de la relation d'orthogonalité introduite par la proposition 2.1. Si maintenant Λ_i est mis pour les intégrales définies $\int_{d_1}^{d_2}e^{-b_2x_2^2}\left[F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)\right]^i dx_2$, alors nécessairement

$$B_{n'}=\frac{\int_{d_1}^{d_2}e^{-b_2x_2^2}\ F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)dx_2}{G\left(\frac{-\alpha_2k_{n'}^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1c_2^2\right)\int_{d_1}^{d_2}e^{-b_2x_2^2}\left[F\left(k_{n'}^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)\right]^2dx_2}=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2G\left(\frac{-\alpha_2k_{n'}^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1c_2^2\right)}.$$

Partant de cela, la solution complète adopte la forme suivante :

$$p(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nF\left(k_n^{\Delta},\frac{1}{2};b_2x_2^2\right)G\left(\frac{-\alpha_2k_n^{\Delta}}{\alpha_1},\frac{1}{2};b_1x_1^2\right)$$

où

$$B_n = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 G\left(\dfrac{-\alpha_2 k_n^{\Delta}}{\alpha_1}, \dfrac{1}{2}; b_1 c_2^2\right)};$$

$$\Lambda_i = \int_{d_1}^{d_2} e^{-b_2 x_2^2}\left[F\left(k_n^{\Delta}, \frac{1}{2}; b_2 x_2^2\right)\right]^i dx_2 \, , i = 1,2 \, .$$

Aussi, par la proposition 2.2,

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left[d_2\, e^{-b_2 d_2^2}\, H_{R_2,1}\left(k_n^{\Delta} + 1, \frac{3}{2}; b_2 d_2^2\right) - d_1\, e^{-b_2 d_1^2}\, H_{R_2,1}\left(k_n^{\Delta} + 1, \frac{3}{2}; b_2 d_1^2\right)\right]$$

avec

$$H_{R_2,1}\left(k_n^{\Delta} + 1, \frac{3}{2}; b_2 x_2^2\right) = 2R_2 \Phi\left(k_n^{\Delta} + 1, \frac{3}{2}; b_2 x_2^2\right) - \Psi\left(k_n^{\Delta} + 1, \frac{3}{2}; b_2 x_2^2\right)$$

et, finalement,

$$b_i = \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}, i = 1, 2 \, .$$

Le processus de diffusion prochain, le mouvement brownien géométrique, est aussi, comme cette dénomination permet d'en inférer, un processus découlant du mouvement brownien et les pages à venir lui sont consacrées.

3. Mouvement brownien géométrique

Un processus aléatoire pour lequel les premier et second moments infinitésimaux sont donnés par

$$m_i(x_i) = \mu_i x_i \ \ (\mu_i \in R) \ \text{ et } \ v_i(x_i) = \sigma_i^2 x_i^2 \ \ (\sigma_i^2 > 0)$$

est désigné par le titre qui coiffe cette section, et les équations différentielles obtenues de la séparation des variables sont les suivantes :

$$x_2^2 y_2'' + \frac{2\mu_2 x_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0 \tag{3.1a}$$

et

$$x_1^2 y_1'' + \frac{2\mu_1 x_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda}{\sigma_1^2} y_1 = 0\,. \tag{3.1b}$$

Le mouvement brownien géométrique, par essence, l'exponentielle du mouvement brownien, présente une frontière inaccessible en zéro.

3.1. Résolution et analyse de l'équation différentielle première

Il s'agit d'abord de faire subir à cette équation d'Euler un changement de variables approprié de telle sorte que l'évaluation aux frontières puisse être simplifiée. Ainsi, pour l'équation différentielle

$$x_2^2 y_2'' + \frac{2\mu_2 x_2}{\sigma_2^2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0$$

si est posé le changement de variable $x_{2T} = x_2/d_1 \in [1, d_{2T}]$ avec $d_{2T} = d_2/d_1$, d_1 étant strictement positif, alors, en admettant que $y_2(x_2) = z_2(x_{2T})$, les égalités ci-après sont naturellement établies :

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{d_1}\frac{dz_2}{dx_{2T}}$$

et

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = \frac{1}{d_1^2}\frac{d^2 z_2}{dx_{2T}^2},$$

et l'équation différentielle de départ, laquelle demeure une équation d'Euler, adopte la forme suivante:

$$x_{2T}^2 z_2'' + \frac{2\mu_2 x_{2T}}{\sigma_2^2} z_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} z_2 = 0.$$

La résolution proprement dite amène à considérer l'équation caractéristique auxiliaire

$$\eta^2 + \left(\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} - 1\right)\eta + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} = 0,$$

laquelle équation admet les racines $\eta_{1,2}$ qui sont telles que

$$\eta_{1,2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}}\ .$$

Trois cas sont à analyser selon que :

$$\text{i)}\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}$$

$$\text{ii)}\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}$$

$$\text{iii)}\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}$$

i) Ce premier cas amène inévitablement l'équation caractéristique auxiliaire à admettre deux racines réelles distinctes, lesquelles engendrent la solution suivante:

$$z_2(x_{2T}) = \omega_1 x_{2T}^{\eta_1} + \omega_2 x_{2T}^{\eta_2}.$$

Or, de l'évaluation aux frontières origine le rejet de cette solution. En effet, en $x_{2T} = 1$

$$z_2(x_{2T} = 1) = \omega_1 + \omega_2 = 0$$

ou, de manière équivalente, $\omega_1 = -\omega_2$. Aussi,

$$z_2(x_{2T} = d_{2T}) = \omega_2\left(d_{2T}^{\eta_2} - d_{2T}^{\eta_1}\right) = 0.$$

Toutefois, cette dernière expression n'est jamais nulle autrement que si $\omega_2 = 0$, la racine η_1 étant nécessairement différente de η_2. Dans ces conditions, $z_2(x_{2T}) \equiv 0$ et ne peut, par conséquent, d'aucune façon satisfaire aux hypothèses constituantes du problème général, ce qui en justifie le rejet.

ii) La racine admise est unique et la solution est:

$$z_2(x_{2T}) = x_{2T}^{\eta}(\omega_1 + \omega_2 \ln x_{2T}).$$

L'évaluation aux frontières permet de soutenir que les constantes ω_1 et ω_2 doivent être nulles puisque

$$z_2(x_{2T} = 1) = \omega_1 = 0$$

et alors,

$$z_2(x_{2T} = d_{2T}) = \omega_2 d_{2T}^{\eta} \ln d_{2T} = 0$$

n'est praticable que si ω_2 est nulle et la solution triviale. Certes, cette solution triviale demeure, en définitive, inapte à satisfaire aux exigences qu'impose la situation du problème général.

iii) Les racines sont ici complexes et, dans un souci de concision, il est nécessaire de les représenter comme une somme ou une différence de termes. Ainsi, en adoptant le symbolisme suivant :

$$\begin{aligned}\eta_{1,2} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right) \pm i\sqrt{\frac{2\lambda}{\sigma_2^2} - \left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &:= a_2 \pm i b_2 ,\end{aligned}$$

la solution s'exprime comme suit:

$$z_2(x_{2T}) = x_{2T}^{a_2}\left[\omega_1 \cos(b_2 \ln x_{2T}) + \omega_2 \sin(b_2 \ln x_{2T})\right].$$

L'analyse du comportement aux frontières de cette solution générale permettra de l'adapter au problème. Ainsi,

$$z_2(x_{2T}=1)=\omega_1=0$$

et

$$z_2(x_{2T}=d_{2T})=\omega_2 d_{2T}^{a_2}\sin(b_2\ln d_{2T})=0\,.$$

Cela n'étant possible que si (la solution triviale étant réputée inadmissible)

$$b_2:=\sqrt{\frac{2\lambda}{\sigma_2^2}-\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{n\pi}{\ln d_{2T}},\, n\in N^*,$$

ce qui implique que les λ ne soient que positifs et, par suite de la constatation qu'ils forment un ensemble infini dénombrable, soient dorénavant notés λ_n. Aussi,

$$\lambda_n=\frac{\sigma_2^2}{2}\left(a_2^2+b_2^2\right)$$

et la solution en est réduite à :

$$z_{2_n}(x_{2T})=x_{2T}^{a_2}\sin\left(\frac{n\pi}{\ln d_{2T}}\ln x_{2T}\right).$$

3.2. Résolution et analyse de l'équation différentielle seconde

Soit l'équation différentielle rattachée à la variable x_1 :

$$x_1^2\, y_1'' + \frac{2\mu_1 x_1}{\sigma_1^2} y_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} y_1 = 0 .$$

Un changement de variable approprié, à l'instar de la section 3.1. de ce présent problème, serait $x_{1T} = x_1/c_1 \in [1, c_{2T}]$ avec $c_{2T} = c_2/c_1$, c_1 étant positif et non nul. Si $y_1(x_1) = z_1(x_{1T})$, il s'ensuit que la correspondance entre les dérivées premières et secondes des fonctions $y_1(x_1)$ et $z_1(x_{1T})$ est telle que

$$\frac{d\,y_1}{dx_1} = \frac{1}{c_1}\frac{dz_1}{dx_{1T}}$$

et

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{d^2 z_1}{dx_{1T}^2} .$$

L'équation initiale devient, dans ce nouveau système de référence ayant subi une translation :

$$x_{1T}^2 z_1'' + \frac{2\mu_1 x_{1T}}{\sigma_1^2} z_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} z_1 = 0 .$$

Soit l'équation caractéristique auxiliaire reliée à cette dernière expression:

$$\Psi^2 + \left(\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} - 1\right)\Psi - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2} = 0 .$$

Alors, les racines distinctes et réelles $\Psi_{1,2}$ suivantes sont celles admises par ladite équation caractéristique auxiliaire,

$$\Psi_{1,2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\lambda_n}{\sigma_2^2}}$$
$$:= a_1 \pm b_1$$

et de ces racines naît la solution attendue :

$$z_{1_n}(x_{1T}) = x_{1T}^{a_1}\left(A_n x_{1T}^{b_1} + B_n x_{1T}^{-b_1}\right).$$

Maintenant, du fait qu'en $x_{1T} = 1$ la solution doit être identiquement nulle, il en résulte que

$$z_{1_n}(x_{1T} = 1) = A_n + B_n = 0\,,$$

et les constantes $-B_n$ peuvent se substituer aux constantes A_n de manière à ce que la solution devienne :

$$z_{1_n}(x_{1T}) = B_n x_{1T}^{a_1}\left(x_{1T}^{-b_1} - x_{1T}^{b_1}\right) = B_n x_{1T}^{a_1 - b_1}\left(1 - x_{1T}^{2b_1}\right).$$

3.3. Solution générale pour le mouvement brownien géométrique

Reste maintenant à associer les solutions $z_1(x_{1T})$ et $z_2(x_{2T})$ des équations (3.1a) et (3.1b) de façon à édifier une solution générale en tout conforme à la définition du problème.

Celle-ci se présente sous les traits de la relation

$$p(x_{1T}, x_{2T}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_{1T}^{a_1 - b_1}\left(1 - x_{1T}^{2b_1}\right)x_{2T}^{a_2} \sin\left(\frac{n\pi \ln x_{2T}}{\ln d_{2T}}\right).$$

Dès lors qu'en c_{2T} la fonction p vaut un, c'est-à-dire

$$p(x_{1T} = c_{2T}, x_{2T}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_{2T}^{a_1 - b_1}\left(1 - c_{2T}^{2b_1}\right)x_{2T}^{a_2} \sin\left(\frac{n\pi \ln x_{2T}}{\ln d_{2T}}\right) = 1,$$

il suit de là que

$$x_{2T}^{-a_2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_{2T}^{a_1 - b_1}\left(1 - c_{2T}^{2b_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi \ln x_{2T}}{\ln d_{2T}}\right). \tag{3.2}$$

L'obtention de l'expression analytique du coefficient B_n est réalisée par l'entremise du changement de variables présenté dans les lignes subséquentes. À noter sa validité par le fait que la valeur nulle est extérieure à l'intervalle de définition de x_{2T}. Donc, si $u = \ln x_{2T}$, alors $\mathrm{e}^{u} = x_{2T}$ et $du = dx_{2T}/x_{2T}$; ce qui équivaut à dire que $x_{2T}du = dx_{2T}$, ou encore que $\mathrm{e}^{u}du = dx_{2T}$. La modification de l'équation (3.2) procède de ces changements. Aussi, convient-il d'écrire :

$$\mathrm{e}^{-a_2 u} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_{2T}^{a_1 - b_1}\left(1 - c_{2T}^{2b_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi u}{\ln d_{2T}}\right).$$

Cette série en est une de Fourier en sinus et en tel cas, les coefficients sont (par l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales):

$$
\begin{aligned}
B_n c_{2T}^{a_1-b_1}\left(1-c_{2T}^{2b_1}\right) &= \frac{2}{\ln d_{2T}} \int_0^{\ln d_{2T}} e^{-a_2 u} \sin\left(\frac{n\pi u}{\ln d_{2T}}\right) du \\
&= \frac{-2}{\ln d_{2T}} \left\{\frac{e^{-a_2 u} \ln^2 d_{2T}}{a_2^2 \ln^2 d_{2T} + n^2\pi^2}\right\} \left\{a_2 \sin\left(\frac{n\pi u}{\ln d_{2T}}\right) + \frac{n\pi}{\ln d_{2T}} \cos\left(\frac{n\pi u}{\ln d_{2T}}\right)\right\}\Bigg|_0^{\ln d_{2T}} \\
&= \frac{2n\pi\left\{(-1)^{n+1} + d_{2T}^{a_2}\right\}}{d_{2T}^{a_2}\left(a_2^2 \ln^2 d_{2T} + n^2\pi^2\right)}.
\end{aligned}
$$

D'où il vient, en isolant B_n, que

$$
B_n = \frac{2n\pi\left\{(-1)^{n+1} + d_{2T}^{a_2}\right\}}{c_{2T}^{a_1-b_1} d_{2T}^{a_2}\left(a_2^2 \ln^2 d_{2T} + n^2\pi^2\right)\left(1-c_{2T}^{2b_1}\right)} .
$$

Finalement, dans le système de référence initial, la solution du problème avec le mouvement brownien géométrique bidimensionnel est congrûment rendue par :

$$
p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{a_1-b_1}\left(c_1^{2b_1} - x_1^{2b_1}\right) x_2^{a_2} \sin\left\{\frac{n\pi \ln(x_2/d_1)}{\ln(d_2/d_1)}\right\}
$$

où

$$C_n = \frac{2n\pi\left\{(-1)^n d_1^{a_2} - d_2^{a_2}\right\}}{c_2^{a_1-b_1}\{d_1 d_2\}^{a_2}\left\{a_2^2 \ln^2(d_2/d_1) + n^2\pi^2\right\}\left\{c_2^{2b_1} - c_1^{2b_1}\right\}}$$

$$a_i = \frac{1}{2} - \frac{\mu_i}{\sigma_i^2},\ i = 1, 2$$

$$b_1 = \frac{1}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2\left(a_2^2 + b_2^2\right)}$$

$$b_2 = \frac{n\pi}{\ln(d_2/d_1)}.$$

Le mouvement brownien géométrique trouve application dans des disciplines variées et sert à modéliser des système dont la croissance ou la décroissance est exponentielle et dont la valeur n'est que positive. Par exemple, les variations du coût d'une marchandise dans le temps ou celles du débit d'une rivière sont bien rendues par ce modèle.

Il est un quatrième processus intimement uni au mouvement d'une particule brownienne et ce processus, dit de Bessel, sera traité dans la prochaine analyse.

4. Processus de Bessel

Le processus de Bessel en est un qui représente la distance euclidienne à l'origine d'un mouvement brownien multidimensionnel. Ainsi, si l'équation de Kolmogorov est établie de manière à ce que

$$m_i(x_i) = \frac{\alpha_i - 1}{2x_i} \quad (\alpha_i \geq 0) \quad \text{et} \quad v_i(x_i) \equiv \sigma_i^2 \quad (>0),$$

alors elle caractérise un processus de Bessel et les équations différentielles

$$y_2'' + \frac{(\alpha_2 - 1)}{\sigma_2^2 x_2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0 \tag{4.1a}$$

et

$$y_1'' + \frac{(\alpha_1 - 1)}{\sigma_1^2 x_1} y_1' - \frac{2\lambda}{\sigma_1^2} y_1 = 0 \tag{4.1b}$$

sont celles obtenues de la méthode de séparation des variables.

Une frontière est dite accessible si la probabilité qu'elle soit atteinte par le processus en un temps fini est supérieure à zéro. Sinon, elle est dite inaccessible. Les frontières régulières et de sortie sont accessibles dans ce sens que l'atteinte de celles-ci par le processus en un temps fini est une éventualité. En opposition, sont qualifiées d'inaccessibles les frontières d'entrée et naturelles.

L'origine est un point, pour le processus de Bessel, dont l'atteinte ou non par le processus dépend du lien de grandeur qui unit les paramètres α et σ^2. D'une part, si $\alpha_i < \sigma_i^2 + 1$, pour $i = 1,2$, tout point est accessible, incluant l'origine. Particulièrement, si $1-\sigma_i^2 < \alpha_i < 1+\sigma_i^2$, zéro est frontière régulière et si $0 \leq \alpha_i \leq 1-\sigma_i^2$, zéro est frontière de sortie pour l'axe $i = 1,2$. D'autre part, si $\alpha_i \geq \sigma_i^2 + 1$, l'origine est frontière d'entrée et manifestement inaccessible. La preuve en est présentée à l'annexe 2.

4.1. Résolution et analyse de l'équation différentielle première

Soit l'équation différentielle rattachée à la variable x_2 :

$$y_2'' + \frac{(\alpha_2 - 1)}{\sigma_2^2 x_2} y_2' + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2 = 0.$$

Dès l'abord, il apparaît que deux cas distincts sont à analyser selon que :

i) $\lambda = 0$
ii) $\lambda \neq 0$

i) Si $\lambda = 0$ alors l'équation différentielle de départ se réduit à:

$$y_2'' + \frac{(\alpha_2 - 1)}{\sigma_2^2 x_2} y_2' = 0.$$

En posant $u = y_2'$, alors $u' = y_2''$ et l'équation précédente prend la forme suivante :

$$u' + \frac{(\alpha_2 - 1)}{\sigma_2^2 x_2} u = 0,$$

laquelle équation a pour solution :

$$u = \omega x_2^{\frac{1-\alpha_2}{\sigma_2^2}} = y_2'.$$

Dans le système de référence initial, la solution s'exprime comme suit:

$$y_2(x_2) = \omega_1 x_2^{2\beta_2} + \omega_2$$

où

$$\beta_2 = \frac{\sigma_2^2 - \alpha_2 + 1}{2\sigma_2^2}.$$

Ceci en ayant supposé que σ_2^2 était différent de $\alpha_2 - 1$. Dans la situation opposée,

$$y_2(x_2) = \omega_1 \ln x_2 + \omega_2.$$

Pour ces deux solutions, la fixité des rapports de grandeur que doit entretenir σ_2^2 en regard de $\alpha_2 - 1$ réduit, dans une large mesure, la généralité du problème. Même en étant peu soucieux de cet inconvénient, l'évaluation aux frontières pousse à rejeter ces solutions. En effet, pour la première de celles-ci,

$$y_2(x_2 = d_1) = \omega_1 d_1^{2\beta_2} + \omega_2 = 0,$$

ceci n'étant possible qu'en admettant que la constante ω_2 soit égale à $-\omega_1 d_1^{2\beta_2}$. Aussi,

$$y_2(x_2 = d_2) = \omega_1\left(d_2^{2\beta_2} - d_1^{2\beta_2}\right) = 0$$

et parce que d_1 est différent de d_2 et β_2 de zéro, il est manifeste que cette expression n'est vérifiée que si ω_1 est nulle et la solution triviale. Une démarche analogue appliquée à la deuxième solution conduirait aux mêmes conclusions. Par suite de ce raisonnement déductif, λ est nécessairement différent de zéro.

ii) Dès lors que le paramètre λ ne peut être nul, la solution générale est la suivante (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 137):

$$y_2(x_2) = x_2^{\beta_2}\left\{\omega_1 J_\nu\left(\sqrt{b_2}x_2\right) + \omega_2 Y_\nu\left(\sqrt{b_2}x_2\right)\right\} \tag{4.2}$$

où

$$\beta_2 := \frac{\sigma_2^2 - \alpha_2 + 1}{2\sigma_2^2}$$
$$\nu := |\beta_2| \in R^+$$
$$b_2 := \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}.$$

Les fondements du problème imposent le choix d'un λ positif puisque, dans le cas contraire, la valeur $\sqrt{b_2}$ serait purement imaginaire; la solution ferait alors appel aux fonctions de Bessel modifiées, lesquelles n'admettent des zéros, d'une part, qu'en $x = 0$ pour $I_\nu(x)$ et, d'autre part, qu'en $x \to \infty$ pour $K_\nu(x)$. En outre, ces fonctions n'ont pas le caractère oscillant exigé.

La solution générale de cette première équation différentielle étant établie, il importe de l'harmoniser avec les frontières.

4.1.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle première et des frontières

Les formes limites des fonctions de Bessel seront ici nécessaires à l'obtention des conclusions. Soit donc ces formes limites pour des arguments se rapprochant de zéro et pour ξ réel et fixe (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 360):

$$J_\xi(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\xi+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\xi \quad \text{si } \xi \neq -1,-2,\ldots$$

et

$$Y_\xi(x) \approx \begin{cases} \dfrac{-1}{\pi}\Gamma(\xi)\left(\dfrac{2}{x}\right)^\xi & \text{si } \xi > 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\ln x & \text{si } \xi = 0 \end{cases} ,$$

le membre de gauche se comportant comme le membre de droite, la limite du quotient lorsque x tend vers zéro étant égale à un.

i) Cas où $d_1 = 0$

Cette situation correspond à un arrangement des paramètres tel que $0 \leq \alpha_2 < \sigma_2^2 + 1$ et de cet arrangement, il ressort que β_2 égale ν lesquelles valeurs sont strictement positives. Il résulte de l'évaluation de la fonction à la première frontière d_1 que ω_2 est nulle. En effet, par les formes limites,

$$\lim_{x_2 \to 0} y_2(x_2) = \lim_{x_2 \to 0} x_2^\nu \left\{ \frac{\omega_1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\sqrt{b_2}x_2}{2}\right)^\nu - \frac{\omega_2}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{\sqrt{b_2}x_2}\right)^\nu \right\}$$

$$= -\frac{\omega_2}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{\sqrt{b_2}}\right)^\nu$$

et il suit de cette limite que

$$y_2(x_2=0)=\frac{-\omega_2}{\pi}\Gamma(\nu)\left\{\frac{2}{\sqrt{b_2}}\right\}^{\nu}=0$$

n'est réalisable autrement que par le fait que ω_2 soit égale à zéro . En l'occurrence, la solution se réduit à :

$$y_2(x_2)=\omega_1 x_2^{\nu} J_{\nu}\left(\sqrt{b_2}x_2\right).$$

Maintenant, l'évaluation à la seconde frontière de l'axe x_2, soit en d_2, permet de fixer la valeur de $\sqrt{b_2}$ de telle sorte que la solution puisse satisfaire au problème. Ainsi,

$$y_2(x_2=d_2)=\omega_1 d_2^{\nu} J_{\nu}\left(\sqrt{b_2}d_2\right)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{b_2}=k_{\nu n}=\frac{\Omega_{\nu n}}{d_2},\ \nu>0,\ n\in N^*$$

où $\Omega_{\nu n}$ est la n^e racine de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν et le nombre de ces racines est infini (Abramowitz et Stegun 1965, p. 370). Par extension, le paramètre λ existe aussi en nombre infini : la quantité b_2 égalant à la fois $2\lambda/\sigma_2^2$ et $k_{\nu n}^2$ conduit à l'expression de λ, dès lors noté λ_n, qui est nécessairement $\sigma_2^2 k_{\nu n}^2/2$ et qui n'est que positive.

Finalement,

$$y_{2_n}(x_2) = x_2^{\nu} J_{\nu}(k_{\nu n} x_2).$$

ii) Cas où $d_1 > 0$

Si $0 \leq \alpha_2 < \sigma_2^2 + 1$ alors β_2 et ν sont égaux et différents de zéro; d_1 peut être positif. Par contre, si $\alpha_2 \geq \sigma_2^2 + 1$, β_2 est négatif et est de signe opposé à ν lequel peut être nul; d_1 n'est alors autrement que positif. Dans ces conditions, l'évaluation de la fonction (4.2) à chacune des frontières conduit vers un système d'équations linéaires dont les constantes arbitraires ω_1 et ω_2 de la solution constituent les termes variables:

$$\omega_1 J_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_1\right) + \omega_2 Y_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_1\right) = 0$$

$$\omega_1 J_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_2\right) + \omega_2 Y_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_2\right) = 0$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} J_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_1\right) & Y_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_1\right) \\ J_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_2\right) & Y_{\nu}\left(\sqrt{b_2} d_2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution non triviale pour ω_1 et ω_2 si, et seulement si, le déterminant de la matrice des coefficients prend la valeur nulle, c'est-à-dire si

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right) & Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right) \\ J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right) & Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right) \end{vmatrix} = 0\,,$$

et les racines positives de cette équation transcendante déterminent les valeurs propres. Aussi, doit-il être jugé acceptable que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right)}{J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right)} = \frac{-Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right)}{J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right)}\,.$$

Il est profitable de définir une constante ${}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)}$ comme étant l'égalité des rapports – multipliés par moins un – des fonctions Y_ξ et J_ξ évaluées aux points ζ_i, i=1,2,...n. Ainsi, si x est l'argument des ces fonctions, alors

$${}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)} := \left.\frac{-Y_\xi(x)}{J_\xi(x)}\right|_{x=\zeta_1} = \cdots = \left.\frac{-Y_\xi(x)}{J_\xi(x)}\right|_{x=\zeta_n}\,.$$

Dans le cas présent, puisque l'argument de la fonction y_2 est $\sqrt{b_2}x_2$,

$${}_\nu R_2^{(d_1,d_2)} := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right)}{J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_1\right)} = \frac{-Y_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right)}{J_\nu\left(\sqrt{b_2}d_2\right)}$$

et ainsi,

$$y_2(x_2) = \omega_2 x_2^{\beta_2}\left\{ {}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)} J_{\nu}\left(\sqrt{b_2}\,x_2\right) + Y_{\nu}\left(\sqrt{b_2}\,x_2\right)\right\}.$$

En désignant les racines $\sqrt{b_2}$ du déterminant par $k_{\nu n}^{\Delta}$ il s'ensuit que

$$k_{\nu n}^{\Delta} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\sigma_2^2}}$$

où n est un entier naturel excluant zéro.

Le théorème 1 assure de l'existence d'une infinité de valeurs propres λ et donc d'une infinité de racines $k_{\nu n}^{\Delta}$ puisque le problème de Sturm-Liouville est ici régulier, les fonctions

$$p(x_2) = x_2^{\frac{\alpha_2 - 1}{\sigma_2^2}}, \quad p'(x_2) = \frac{\alpha_2 - 1}{\sigma_2^2} x_2^{\frac{\alpha_2 - \sigma_2^2 - 1}{\sigma_2^2}}$$

et

$$r(x_2) = \frac{2}{\sigma_2^2} x_2^{\frac{\alpha_2 - 1}{\sigma_2^2}}$$

étant continues et strictement positives sur l'intervalle $[d_1, d_2]$. Aussi, λ sera-t-il orné d'un indice n qui évoquera cette réalité si bien que

$$\lambda_n = \frac{\sigma_2^2 \left(k_{\nu n}^{\Delta}\right)^2}{2}.$$

Cela, pour en arriver, en dernière analyse, à la solution générale

$$\begin{aligned} y_{2_n}(x_2) &= x_2^{\beta_2}\left\{{}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)}J_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right)+Y_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right)\right\} \\ &:= x_2^{\beta_2}F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right). \end{aligned}$$

Dans cette définition de $F_\nu(x)$, il est impératif de noter que l'argument de ${}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)}$ est le même que celui des fonctions J_ν et Y_ν, évaluées aux points qui définissent cette constante cependant.

4.2. Résolution et analyse de l'équation différentielle seconde

La solution de l'équation différentielle

$$y_1'' + \frac{(\alpha_1 - 1)}{\sigma_1^2 x_1}y_1' - \frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2}y_1 = 0,$$

laquelle est liée à la variable x_1, est donnée par (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 137) :

$$y_{1_n}(x_1) = x_1^{\beta_1}\left\{A_n J_\gamma\left(\sqrt{b_1}\,x_1\right) + B_n Y_\gamma\left(\sqrt{b_1}\,x_1\right)\right\}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \frac{\sigma_1^2 - \alpha_1 + 1}{2\sigma_1^2} \\ \gamma &:= |\beta_1| \in R^+ \\ b_1 &:= \frac{-2\lambda_n}{\sigma_1^2} \end{aligned}$$

et puisque, selon les déductions antérieures, les valeurs propres λ_n sont strictement positives, il apparaît que $\sqrt{b_1}$ est purement imaginaire et s'exprime par $i\sqrt{2\lambda_n/\sigma_1^2}$. Alors, de manière équivalente,

$$y_{1_n}(x_1) = x_1^{\beta_1}\left\{A_n J_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right) + B_n Y_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)\right\}.$$

L'application précédente ne préserve toutefois pas l'appartenance au corps des réels, c'est-à-dire qu'une valeur réelle de x_1 peut résulter en une évaluation complexe de la fonction. Le raisonnement suivant permettra cependant d'obvier à cet inconvénient.

Si $x_1^{\beta_1} J_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)$ est solution de l'équation différentielle, alors $i^{-\gamma} x_1^{\beta_1} J_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)$ l'est certainement aussi. Or, cette dernière expression est justement une fonction qui demeure réelle pour tout x_1 réel et contient la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Aussi, est-il souhaitable de substituer l'expression $x_1^{\beta_1} I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right)$ au terme $x_1^{\beta_1} J_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)$.

De manière similaire, si $x_1^{\beta_1} Y_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)$ est une solution valable, $x_1^{\beta_1} K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right)$ l'est tout autant – la fonction K_γ étant la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce – sachant que $x_1^{\beta_1} K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right) = \frac{\pi i^{\gamma+1}}{2} x_1^{\beta_1}\left\{J_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right) + iY_\gamma\left(i\sqrt{|b_1|}x_1\right)\right\}$. Finalement, l'affirmation suivante est pleinement justifiée:

$$y_{1_n}(x_1) = x_1^{\beta_1}\left\{A_n I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right) + B_n K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right)\right\}. \tag{4.3}$$

Il s'agit à ce stade de faire s'accorder solution et contrainte de la première frontière c_1. Ceci est justement l'objet de la prochaine sous-section.

4.2.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle seconde et de la première frontière

Les formes limites des fonctions de Bessel modifiées introduites dans les lignes prochaines seront essentielles à la poursuite des développements. Ainsi, pour des arguments se rapprochant de zéro et pour ξ réel et fixe (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 375),

$$I_\xi(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\xi+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\xi \quad \text{si } \xi \neq -1,-2,\ldots$$

et

$$K_\xi(x) \approx \begin{cases} -\ln x & \text{si } \xi = 0 \\ \frac{1}{2}\Gamma(\xi)\left(\frac{2}{x}\right)^\xi & \text{si } \xi > 0 \end{cases}.$$

i) *Cas où* $c_1 = 0$

Ceci n'est permis que si $0 \le \alpha_1 < \sigma_1^2 + 1$ et alors, β_1 et γ sont égaux, positifs et différents de zéro. L'évaluation de la solution à la frontière c_1 permet de fixer une première constante arbitraire. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \to 0} y_1(x_1) &= \lim_{x_1 \to 0} x_1^\gamma \left\{ A_n \frac{|b_1|^{\frac{\gamma}{2}}}{2^\gamma \Gamma(\gamma+1)} x_1^\gamma + B_n \frac{2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)}{|b_1|^{\frac{\gamma}{2}} x_1^\gamma} \right\} \\ &= B_n \frac{2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)}{|b_1|^{\frac{\gamma}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

et en conséquence de cette limite,

$$y_1(x_1 = 0) = \frac{B_n 2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)}{|b_1|^{\frac{\gamma}{2}}} = 0$$

ne peut être réalisé autrement que si B_n est nul et donc,

$$y_{1_n}(x_1) = A_n x_1^\gamma I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right)$$

avec

$$\sqrt{|b_1|} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 k_{vn}}{\sigma_1} & \text{si } d_1 = 0 \\ \dfrac{\sigma_2 k_{vn}^{\Delta}}{\sigma_1} & \text{si } d_1 > 0 \end{cases}.$$

ii) Cas où $c_1 > 0$

Encore une fois, si $0 \le \alpha_1 < \sigma_1^2 + 1$ alors β_1 et γ sont strictement positifs et sont égaux; c_1 peut dans ces conditions être positif. Aussi, dans le cas où $\alpha_1 \ge \sigma_1^2 + 1$, β_1 et $-\gamma$ sont égaux en valeur absolue et inférieurs ou égaux à zéro; c_1 n'est alors que positif.

L'évaluation à la première frontière conduit au résultat suivant:

$$y_{1_n}(x_1 = c_1) = c_1^{\beta_1}\left\{A_n I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}c_1\right) + B_n K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}c_1\right)\right\} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{-K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}c_1\right)}{I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}c_1\right)} :=_\gamma R_1^{(c_1)}$$

si

$$_\xi R_1^{(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)} := \left.\frac{-K_\xi(x)}{I_\xi(x)}\right|_{x=\zeta_1} = \cdots = \left.\frac{-K_\xi(x)}{I_\xi(x)}\right|_{x=\zeta_n}.$$

Ceci justifie l'expression :

$$\begin{aligned} y_{1_n}(x_1) &= B_n x_1^{\beta_1}\left\{_\gamma R_1^{(c_1)} I_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right) + K_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right)\right\} \\ &:= B_n x_1^{\beta_1} G_\gamma\left(\sqrt{|b_1|}x_1\right) \end{aligned}$$

avec

$$\sqrt{|b_1|} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 k_{vn}}{\sigma_1} & \text{si } d_1 = 0 \\ \dfrac{\sigma_2 k_{vn}^\Delta}{\sigma_1} & \text{si } d_1 > 0. \end{cases}$$

Dans cette notation, l'argument de $_\gamma R_1^{(c_1)}$ est celui des fonctions I_γ et K_γ évaluées en c_1.

4.3. Solution générale pour le processus de Bessel

Il existe neuf solutions dont certaines prennent le même visage. Toutefois, en conservant le symbolisme β_1 et β_2 dans les expressions, le nombre en est réduit à quatre. Cette seconde section s'applique à formuler ces solutions.

4.3.1. Propositions essentielles

Les propositions suivantes seront indispensables à l'obtention des résultats.

Concernant l'orthogonalité des fonctions:

Proposition 4.1 Orthogonalité des fonctions de Bessel (Bell, 1971, p. 137):

$$\int_0^{\zeta_2} x J_\xi\left(k_{\xi i}x\right) J_\xi\left(k_{\xi j}x\right) dx = \frac{\zeta_2^2}{2}\left\{J_{\xi+1}\left(k_{\xi j}\zeta_2\right)\right\}^2 \delta_{ij} = \frac{\zeta_2^2}{2}\left\{J_{\xi+1}\left(\Omega_{\xi n}\right)\right\}^2 \delta_{ij}, \xi \in R$$

$k_{\xi i}$ et $k_{\xi j}$ étant les racines de l'équation $J_\xi\left(k_{\xi n}\zeta_2\right) = J_\xi\left(\Omega_{\xi n}\right) = 0$.

Proposition 4.2 Orthogonalité des fonctions cylindriques (démonstration à l'annexe 1)

Soit $F_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta} x\right)$ une fonction telle que

$$F_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) := \omega_1 J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) + \omega_2 Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right), \xi \in R.$$

Si $F_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right) = F_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right) = 0$ avec $\zeta_1, \zeta_2 \neq 0$ alors nécessairement,

$$F_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) := {}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2)} J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) + Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right)$$

où

$${}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2)} := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right)}{J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right)} = \frac{-Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right)}{J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right)}$$

et les racines $k_{\xi n}^{\Delta}$ sont telles que

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right) & Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right) \\ J_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right) & Y_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Dans ces conditions,

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x F_\xi\left(k_{\xi i}^{\Delta}x\right) F_\xi\left(k_{\xi j}^{\Delta}x\right) dx = \frac{1}{2}\left[\zeta_2^2\left\{F_{\xi+1}\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right)\right\}^2 - \zeta_1^2\left\{F_{\xi+1}\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right)\right\}^2\right]\delta_{ij} \ .$$

Concernant les intégrales:

Proposition 4.3 (démonstration à l'annexe 1)

Soit $U_\xi(x)$ une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèce ainsi que de fonctions de Hankel, ces fonctions d'ordre ξ ayant x pour argument. Alors, pour ξ réel,

a) $$\int x^{1-\xi} U_\xi(x)\,dx = -x^{1-\xi} U_{\xi-1}(x)$$

b) $$\int x^{\xi+1} U_\xi(x)\,dx = x^{\xi+1} U_{\xi+1}(x)$$

4.3.2. Solution première $(c_1 = d_1 = 0)$

Par les résultats antérieurs,

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_1^{\gamma} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} x_1\right) x_2^{\nu} J_{\nu}(k_{\nu n} x_2)$$

constitue la solution. En c_2, la probabilité prend un pour valeur, conformément à la définition générale du problème. Ainsi,

$$p(x_1 = c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} c_2\right) x_2^{\nu} J_{\nu}(k_{\nu n} x_2) = 1.$$

De la sommation peut être extrait le terme x_2^{ν} en raison de son indépendance évidente du facteur n, de sorte que

$$x_2^{-\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} c_2\right) J_{\nu}(k_{\nu n} x_2).$$

Dans le cas de conditions de Dirichlet, la proposition 4.1 est applicable et en multipliant l'équation précédente par $x_2 J_{\nu}(k_{\nu n'} x_2)$ et en intégrant par la suite entre 0 et d_2, c'est-à-dire

$$\int_0^{d_2} x_2^{1-\nu} J_{\nu}(k_{\nu n'} x_2) dx_2 = \int_0^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} c_2\right) x_2 J_{\nu}(k_{\nu n} x_2) J_{\nu}(k_{\nu n'} x_2) dx_2,$$

il vient, par la relation d'orthogonalité introduite, que

$$A_{n'} = \frac{2\int_0^{d_2} x_2^{1-\nu} J_\nu\left(k_{\nu n'} x_2\right) dx_2}{c_2^2 d_2^2 I_\nu\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}}{\sigma_1} c_2\right)\left\{J_{\nu+1}\left(\Omega_{\nu n'}\right)\right\}^2} .$$

La partie *a)* de la proposition 4.3 permet l'obtention d'une expression analytique pour l'intégrale I_1 du numérateur. Pour ce faire, il s'agit d'abord d'effectuer le changement de variables $x = k_{\nu n'} x_2 = \Omega_{\nu n'} x_2 / d_2$, ce qui implique que $dx = k_{\nu n'} dx_2$. L'intégrale, maintenant dépendante de x, devient :

$$I_1 = \frac{1}{k_{\nu n'}^{2-\nu}} \int_0^{\Omega_{\nu n'}} x^{1-\nu} J_\nu(x)\, dx .$$

À ce point, la partie *a)* de la proposition 4.3 permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-1}{k_{\nu n'}^{2-\nu}} x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) \Big|_0^{\Omega_{\nu n'}} \\ &= \frac{1}{k_{\nu n'}^{2-\nu}} \left[\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \Omega_{\nu n'}^{1-\nu} J_{\nu-1}\left(\Omega_{\nu n'}\right)\right]. \end{aligned}$$

Cela, en considérant que (ν étant strictement positif)

$$\lim_{x\to 0}\left[x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[x^{1-\nu} \frac{x^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\right] = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}.$$

L'intégrale I_1 conduit donc à la relation suivante, pour ce qui est du coefficient $A_{n'}$:

$$A_{n'} = \frac{\left\{1 - 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n'}^{1-\nu} J_{\nu-1}(\Omega_{\nu n'})\right\}}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n'}^{2-\nu} c_2^{\gamma} d_2^{\nu} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}}{\sigma_1} c_2\right)\left\{J_{\nu+1}(\Omega_{\nu n'})\right\}^2} .$$

Alors, la solution complète est ici donnée par :

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\gamma} x_2^{\nu} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} x_1\right) J_{\nu}(k_{\nu n} x_2)$$

avec

$$C_n = \frac{\left\{1 - 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{1-\nu} J_{\nu-1}(\Omega_{\nu n})\right\}}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{2-\nu} c_2^{\gamma} d_2^{\nu} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} c_2\right)\left\{J_{\nu+1}(\Omega_{\nu n})\right\}^2} .$$

4.3.3. Solution seconde $(c_1 > 0, d_1 = 0)$

Étant données ces conditions, la solution se présente comme suit:

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_1^{\beta_1} x_2^{\nu} G_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1} x_1\right) J_{\nu}(k_{\nu n} x_2)$$

et de l'évaluation de cette solution à la seconde frontière de l'axe x_1, découlent les conclusions prochaines. Ainsi, conséquemment à la définition du problème,

$$p(x_1 = c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn}}{\sigma_1} c_2\right) x_2^{v} J_v(k_{vn} x_2) = 1$$

d'où l'implication nécessaire que

$$x_2^{-v} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn}}{\sigma_1} c_2\right) J_v(k_{vn} x_2).$$

Cette dernière expression, une fois multipliée par $x_2 J_v(k_{vn'} x_2)$ et intégrée sur le domaine $[0, d_2]$, opérations telles que les présente la ligne prochaine,

$$\begin{aligned}\int_0^{d_2} x_2^{1-v} J_v(k_{vn'} x_2)\,dx_2 &= \int_0^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn}}{\sigma_1} c_2\right) x_2 J_v(k_{vn} x_2) J_v(k_{vn'} x_2)\,dx_2 \\ &= B_{n'} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn'}}{\sigma_1} c_2\right) \int_0^{d_2} x_2 \{J_v(k_{vn'} x_2)\}^2\,dx_2\end{aligned}$$

permet d'écrire que

$$\begin{aligned}B_{n'} &= \frac{2\int_0^{d_2} x_2^{1-v} J_v(k_{vn'} x_2)\,dx_2}{c_2^{\beta_1} d_2^2 G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn'}}{\sigma_1} c_2\right) \{J_{v+1}(k_{vn'} d_2)\}^2} \\ &= \frac{\left\{1 - 2^{v-1}\Gamma(v)\Omega_{vn'}^{1-v} J_{v-1}(\Omega_{vn'})\right\}}{2^{v-2}\Gamma(v)\Omega_{vn'}^{2-v} c_2^{\beta_1} d_2^{v} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn'}}{\sigma_1} c_2\right) \{J_{v+1}(k_{vn'} d_2)\}^2},\end{aligned}$$

cela en ayant introduit les résultats de la section précédente concernant l'intégrale I_1.
Et donc,

$$p(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\beta_1} x_2^{\nu} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}x_1\right) J_\nu(k_{\nu n}x_2)$$

avec

$$C_n=\frac{\left\{1-2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{1-\nu}J_{\nu-1}(\Omega_{\nu n})\right\}}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{2-\nu}c_2^{\beta_1}d_2^{\nu}G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}c_2\right)\left\{J_{\nu+1}(\Omega_{\nu n})\right\}^2}.$$

4.3.4. Solution troisième $(c_1=0, d_1>0)$

À ce système correspond la solution :

$$p(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_1^{\gamma} x_2^{\beta_2} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}x_1\right) F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right)$$

et puisqu'à la frontière c_2 cette même solution doit être identiquement égale à un, alors

$$p(x_1=c_2,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}c_2\right) x_2^{\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right)=1.$$

En transférant de l'autre côté de l'égalité le terme variable indépendant de n, c'est-à-dire

$$x_2^{-\beta_2}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}c_2\right) F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right),$$

et par intégration entre d_1 et d_2 de l'équation ainsi obtenue, après l'avoir multipliée par $x_2 F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right)$, l'expression de A_n est facilement déduite. Soit donc :

$$\int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\beta_2} F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right) dx_2 = \int_{d_1}^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n}}{\sigma_1} c_2\right) x_2 F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n} x_2\right) F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right) dx_2$$

$$= A_{n'} c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n'}}{\sigma_1} c_2\right) \int_{d_1}^{d_2} x_2 \left\{F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right)\right\}^2 dx_2$$

$$= A_{n'} c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n'}}{\sigma_1} c_2\right) \frac{{}_B\Lambda_{n'}}{2}$$

cela en ayant utilisé les relations d'orthogonalité de la proposition 4.2 et en ayant substitué ${}_B\Lambda_{n'}$ à $d_2^2\left\{F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n'} d_2\right)\right\}^2 - d_1^2\left\{F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n'} d_1\right)\right\}^2$. De cette dernière égalité, les coefficients $A_{n'}$ se dégagent naturellement :

$$A_{n'} = \frac{2\int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\beta_2} F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right) dx_2}{c_2^{\gamma} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n'}}{\sigma_1} c_2\right) {}_B\Lambda_{n'}} .$$

Il ne reste à ce stade qu'à évaluer l'intégrale du numérateur. Or, la proposition 4.3 permet justement l'accomplissement de ce dessein . Cependant, le cas où β_2 et ν sont de mêmes signes doit être traité séparément du cas où ils sont de signes contraires.

i) Si $0 < \alpha_2 < \sigma_2^2 + 1$ alors β_2 et ν sont égaux et l'intégrale du numérateur du coefficient $A_{n'}$ devient :

$$I_2 := \int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\nu} F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n'} x_2\right) dx_2 .$$

En posant $x = k^{\Delta}_{vn'} x_2$, alors $dx = k^{\Delta}_{vn'} dx_2$ et ce changement de variables conduit l'intégrale I_2 vers une nouvelle forme, soit la forme suivante:

$$I_2 = \frac{1}{\left(k^{\Delta}_{vn'}\right)^{2-v}} \int_{k^{\Delta}_{vn'} d_1}^{k^{\Delta}_{vn'} d_2} x^{1-v} F_v(x) dx \ .$$

Par la partie *a)* de la proposition 4.3,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-1}{\left(k^{\Delta}_{vn'}\right)^{2-v}} \left[x^{1-v} F_{v-1}(x)\right]_{k^{\Delta}_{vn'} d_1}^{k^{\Delta}_{vn'} d_2} \\ &= \frac{1}{k^{\Delta}_{vn'}} \left\{d_1^{1-v} F_{v-1}\left(k^{\Delta}_{vn'} d_1\right) - d_2^{1-v} F_{v-1}\left(k^{\Delta}_{vn'} d_2\right)\right\} . \end{aligned}$$

ii) Par contre, si $\alpha_2 \geq \sigma_2^2 + 1$ alors β_2 et v sont de signes contraires et l'intégrale devient :

$$I_3 := \int_{d_1}^{d_2} x_2^{1+v} F_v\left(k^{\Delta}_{vn'} x_2\right) dx_2 \ .$$

Encore une fois, le changement de variable $x = k^{\Delta}_{vn'} x_2$ transforme l'intégrale comme suit:

$$I_3 = \frac{1}{\left(k^{\Delta}_{vn'}\right)^{2+v}} \int_{k^{\Delta}_{vn'} d_1}^{k^{\Delta}_{vn'} d_2} x^{1+v} F_v(x) dx \ .$$

C'est maintenant la partie *b)* de la proposition 4.3 qui conduit vers une expression analytique de I_3 si bien que

$$I_3 = \frac{1}{\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\right)^{2+\nu}}\left[x^{1+\nu}F_\nu(x)\right]_{k_{\nu n'}^{\Delta}d_1}^{k_{\nu n'}^{\Delta}d_2}$$

$$= \frac{1}{k_{\nu n'}^{\Delta}}\left\{d_2^{1+\nu}F_{\nu+1}\left(k_{\nu n'}^{\Delta}d_2\right) - d_1^{1+\nu}F_{\nu+1}\left(k_{\nu n'}^{\Delta}d_1\right)\right\}.$$

D'une façon claire et partant de ces résultats, la solution finale est la suivante :

$$p(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\gamma} x_2^{\beta_2} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}x_1\right)F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right)$$

avec

$$C_n = \frac{2\,{}_B\Xi_n}{k_{\nu n}^{\Delta}c_2^{\gamma}I_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}c_2\right){}_B\Lambda_n}$$

$${}_B\Lambda_n = d_2^2\left\{F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_2\right)\right\}^2 - d_1^2\left\{F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_1\right)\right\}^2$$

$${}_B\Xi_n = \begin{cases} d_1^{1-\nu}F_{\nu-1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_1\right) - d_2^{1-\nu}F_{\nu-1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_2\right) & \text{si } \beta_2 = \nu \\ d_2^{1+\nu}F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_2\right) - d_1^{1+\nu}F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}d_1\right) & \text{si } \beta_2 = -\nu\,. \end{cases}$$

4.3.5. Solution quatrième $(c_1 > 0, d_1 > 0)$

Ce cas est convenablement décrit par la solution ci-après:

$$p(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}x_1\right)F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}x_2\right).$$

Conformément à la démarche adoptée, les coefficients $B_{n'}$ sont déterminés par les conditions aux frontières. Ainsi,

$$p(x_1 = c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) x_2^{\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta} x_2\right) = 1$$

et donc,

$$x_2^{-\beta_2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta} x_2\right).$$

Alors, par les relations d'orthogonalité (proposition 4.2):

$$\begin{aligned}
\int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta} x_2\right) dx_2 &= \int_{d_1}^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) x_2 F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta} x_2\right) F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta} x_2\right) dx_2 \\
&= B_{n'} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) \int_{d_1}^{d_2} x_2 \left\{F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta} x_2\right)\right\}^2 dx_2 \\
&= B_{n'} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) \frac{{}_B\Lambda_{n'}}{2}
\end{aligned}$$

pour voir finalement que

$$B_{n'} = \frac{2\int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta} x_2\right) dx_2}{c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) {}_B\Lambda_{n'}}.$$

Justifiée par les résultats antérieurs (section 4.3.4), la solution suivante est certainement admissible:

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn}^{\Delta}}{\sigma_1} x_1\right) F_\nu\left(k_{vn}^{\Delta} x_2\right)$$

avec

$$C_n = \frac{2\,{}_B\Xi_n}{k_{vn}^{\Delta} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{vn}^{\Delta}}{\sigma_1} c_2\right) {}_B\Lambda_n}$$

$${}_B\Lambda_n = d_2^2\left\{F_{\nu+1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_2\right)\right\}^2 - d_1^2\left\{F_{\nu+1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_1\right)\right\}^2$$

$${}_B\Xi_n = \begin{cases} d_1^{1-\nu} F_{\nu-1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_1\right) - d_2^{1-\nu} F_{\nu-1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_2\right) & \text{si} \quad \beta_2 = \nu \\ d_2^{1+\nu} F_{\nu+1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_2\right) - d_1^{1+\nu} F_{\nu+1}\left(k_{vn}^{\Delta} d_1\right) & \text{si} \quad \beta_2 = -\nu . \end{cases}$$

5. Un processus aléatoire usité en génétique et en mathématiques financières

Il sied de représenter certains phénomènes génétiques ou certains systèmes de mathématiques financières par des processus stochastiques pour lesquels

$$m_i(x_i) \equiv \mu_i \ (\mu_i \in R) \ \text{ et } \ v_i(x_i) = \sigma_i^2 x_i \ (\sigma_i^2 > 0).$$

Étant donné la méthode de résolution retenue, l'introduction des équations différentielles (5.1a) et (5.1b) est primordiale et les dites équations sont telles que

$$\frac{\sigma_2^2 x_2}{2} y_2'' + \mu_2 y_2' + \lambda y_2 = 0 \tag{5.1a}$$

et

$$\frac{\sigma_1^2 x_1}{2} y_1'' + \mu_1 y_1' - \lambda y_1 = 0. \tag{5.1b}$$

L'origine est frontière accessible tant que la moyenne infinitésimale μ_i demeure inférieure à $\sigma_i^2/2$ pour l'axe x_i, $i = 1,2$. Particulièrement, zéro est frontière de sortie si $\mu_i \le 0$, et frontière régulière si $0 < \mu_i < \sigma_i^2/2$. Dans le cas où $\mu_i \ge \sigma_i^2/2$, l'origine est frontière d'entrée et est, comme il se doit, inaccessible. La justification de ces affirmations est présentée à l'annexe 2.

5.1. Résolution et analyse de l'équation différentielle première

La résolution de l'équation différentielle

$$\frac{\sigma_2^2 x_2}{2} y_2'' + \mu_2 y_2' + \lambda y_2 = 0$$

conduit à une solution ayant l'aspect suivant (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 137) :

$$y_2(x_2) = x_2^{\beta_2} \left\{ \omega_1 J_\nu \left(2\sqrt{b_2 x_2} \right) + \omega_2 Y_\nu \left(2\sqrt{b_2 x_2} \right) \right\} \tag{5.2}$$

où

$$\beta_2 = \frac{\sigma_2^2 - 2\mu_2}{2\sigma_2^2}$$
$$\nu = 2|\beta_2| \in R^+$$
$$b_2 = \frac{2\lambda}{\sigma_2^2}.$$

Il fut montré, dans le cas du processus de Bessel, que λ doit être strictement positif de manière à ce que la solution ne fasse appel aux fonctions de Bessel modifiées, lesquelles n'admettent des zéros qu'en $x = 0$ pour $I_\nu(x)$ et $x \to \infty$ pour $K_\nu(x)$. Était aussi en cause l'absence du caractère oscillant de ces fonctions.

5.1.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle première et des frontières

Tout comme pour le processus de Bessel et par les assises même du problème, il est impératif d'analyser le cas où l'origine est frontière accessible séparément de celui où elle ne peut être atteinte.

i) Cas où $d_1 = 0$

Puisque la possibilité pour d_1 d'être situé à l'origine n'existe que si $\mu_2 < \sigma_2^2/2$, β_2, étant la demie de ν, n'est que positif tout comme le paramètre ν. Par les formes limites des fonctions de Bessel de première et seconde espèces (section 4.1.1),

$$\begin{aligned}\lim_{x_2 \to 0} y_2(x_2) &= \lim_{x_2 \to 0} x_2^{\nu/2} \left\{ \frac{\omega_1}{\Gamma(\nu+1)} (b_2 x_2)^{\frac{\nu}{2}} - \frac{\omega_2}{\pi} \Gamma(\nu)(b_2 x_2)^{\frac{-\nu}{2}} \right\} \\ &= -\frac{\omega_2}{\pi} \frac{\Gamma(\nu)}{b_2^{\nu/2}}\end{aligned}$$

et cette limite n'est nulle autrement que si la constante d'intégration ω_2 est elle-même nulle. Par conséquent, lorsque l'origine est frontière accessible,

$$y_2(x_2) = \omega_1 x_2^{\nu/2} J_\nu\left(2\sqrt{b_2 x_2}\right).$$

L'évaluation en d_2 conduit à l'introduction de $\Omega_{\nu n}$, la n^e racine de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν :

$$y_2(x_2 = d_2) = \omega_1 d_2^{\nu/2} J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{b_2} = k_{\nu n} = \frac{\Omega_{\nu n}}{\sqrt{d_2}}.$$

De là, il est manifeste que λ n'est autrement que positif puisque sa dépendance des paramètres est telle que λ égale $k_{\nu n}^2 \sigma_2^2/8$ et peut être d'ores et déjà noté λ_n. Par le nombre infini de racines $\Omega_{\nu n}$, λ_n existe aussi en nombre infini.

Finalement, une expression équivalente pour la fonction $y_2(x_2)$ serait :

$$y_{2_n}(x_2) = x_2^{\nu/2} J_\nu\left(k_{\nu n}\sqrt{x_2}\right).$$

ii) Cas où $d_1 > 0$

Cette situation se présente indépendamment de l'accessibilité à l'origine et les valeurs des constantes d'intégration ω_1 et ω_2 sont assujetties au système

$$\begin{aligned} \omega_1 J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) + \omega_2 Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) &= 0 \\ \omega_1 J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) + \omega_2 Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

lequel, exprimé sous forme matricielle, devient :

$$\begin{pmatrix} J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) & Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) \\ J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) & Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système d'équations admet des solutions autres que la solution triviale pour ω_1 et ω_2 si, et seulement si, le déterminant de la matrice des coefficients prend lui-même la valeur nulle, c'est-à-dire si

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) & Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right) \\ J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) & Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right) \end{vmatrix} = 0 .$$

Les racines positives de cette dernière équation fixent les valeurs propres. Ainsi, la constante ${}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)}$ sera-t-elle définie par :

$${}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)} := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right)}{J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_1}\right)} = \frac{-Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right)}{J_\nu\left(2\sqrt{b_2 d_2}\right)} .$$

Dans ces circonstances, la solution s'énonce comme suit:

$$\begin{aligned} y_2(x_2) &= \omega_2 x_2^{\beta_2}\left\{{}_{\nu}R_2^{(d_1,d_2)} J_\nu\left(2\sqrt{b_2 x_2}\right) + Y_\nu\left(2\sqrt{b_2 x_2}\right)\right\} \\ &:= \omega_2 x_2^{\beta_2} F_\nu\left(2\sqrt{b_2 x_2}\right) \end{aligned}$$

avec $\nu = 2|\beta_2| \in R^+$.

Les racines $2\sqrt{b_2}$ sont désignées par $k_{\nu n}^{\Delta}$ et le nombre de ces racines $k_{\nu n}^{\Delta}$ est infini, laquelle assertion repose sur le théorème 1. Ainsi, sur le domaine $[d_1, d_2]$, lequel n'inclut aucunement l'origine, le problème de Sturm-Liouville est régulier et les exigences de continuité sont satisfaites puisque les fonctions

$$p(x_2) = x_2^{\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}}, \quad p'(x_2) = \frac{2\mu_2}{\sigma_2^2} x_2^{\frac{2\mu_2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2}}$$

et

$$r(x_2) = \frac{2}{\sigma_2^2} x_2^{\frac{2\mu_2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2}}$$

n'admettent de discontinuité pour des points autres que l'origine. Aussi, les fonctions $p(x_2)$ et $r(x_2)$ ne sont que positives en cet intervalle. Force est alors de conclure que

$$\lambda_n = \frac{\left(k_{\nu n}^{\Delta}\right)^2 \sigma_2^2}{8},$$

laquelle valeur est toujours positive, λ_n remplaçant dès lors λ. Finalement,

$$y_{2_n}(x_2) = x_2^{\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta} \sqrt{x_2}\right).$$

5.2. Résolution et analyse de l'équation différentielle seconde

Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\sigma_1^2 x_1}{2} y_1'' + \mu_1 y_1' - \lambda_n y_1 = 0.$$

La solution en est, considérant que λ n'est que positif, la suivante (Polyanin et Zaitsev, 1995, p. 137):

$$y_{1_n}(x_1) = x_1^{\beta_1} \left\{ A_n J_\gamma\left(2\sqrt{b_1 x_1}\right) + B_n Y_\gamma\left(2\sqrt{b_1 x_1}\right) \right\}$$

où

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2 - 2\mu_1}{2\sigma_1^2}$$

$$\gamma = 2\left|\beta_1\right| \in R^+$$

$$b_1 = \frac{-2\lambda_n}{\sigma_2^2} \Rightarrow \sqrt{b_1} = i\sqrt{\frac{2\lambda_n}{\sigma_1^2}}.$$

Par les mêmes raisonnements que ceux de la section 4.1.2 du processus de Bessel, il est nécessaire de substituer les fonctions de Bessel modifiées à celle de première et de seconde espèces. Ainsi,

$$y_{1_n}(x_1) = x_1^{\beta_1}\left\{A_n I_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right) + B_n K_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right)\right\} \tag{5.3}$$

où doit être remplacé $\sqrt{|b_1|}$ façon à ce que

$$\sqrt{|b_1|} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 k_{vn}}{2\sigma_1} \text{ si } d_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\sigma_2 k_{vn}^{\Delta}}{2\sigma_1} \text{ si } d_1 > 0 \end{cases}.$$

5.2.1. Harmonisation de la solution de l'équation différentielle seconde et de la première frontière

Les formes limites introduites à la section 4.2.1 seront ici nécessaires. Les cas où l'origine est accessible et inaccessible (ou accessible mais sans atteinte possible) seront traités dans des sections distinctes.

ii) Cas où $c_1 = 0$

Le paramètre β_1 est de deux fois inférieur au paramètre γ et sont tous deux strictement positifs. Les développements à venir montreront que B_n est nul dans ce cas puisque,

$$\begin{aligned}\lim_{x_1\to 0} y_1(x_1) &= \lim_{x_1\to 0} x_1^{\gamma/2}\left\{A_n\frac{\left(|b_1|x_1\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\Gamma(\gamma+1)}+B_n\frac{\Gamma(\gamma)\left(|b_1|x_1\right)^{\frac{-\gamma}{2}}}{2}\right\}\\ &= B_n\frac{\Gamma(\gamma)}{2|b_1|^{\frac{\gamma}{2}}}>0\end{aligned}$$

et en conséquence de cette limite, la fonction $y_1(x_1)$ n'est nulle que si le coefficient B_n est nul et alors,

$$y_{1_n}(x_1) = A_n x_1^{\gamma/2} I_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right)$$

où

$$\sqrt{|b_1|} = \begin{cases}\dfrac{\sigma_2 k_{vn}}{2\sigma_1} & \text{si } d_1 = 0\\[2ex] \dfrac{\sigma_2 k_{vn}^{\Delta}}{2\sigma_1} & \text{si } d_1 > 0.\end{cases}$$

ii) Cas où $c_1 > 0$

Puisqu'en c_1 la solution de l'équation différentielle seconde est nulle, il est manifeste que

$$y_{1_n}(x_1 = c_1) = A_n I_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|c_1}\right) + B_n K_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|c_1}\right) = 0.$$

De cette équation est définie la constante ${}_{\gamma}R_1^{(c_1)}$ qui est telle que

$$ {}_{\gamma}R_1^{(c_1)} := \frac{A_n}{B_n} = \frac{-K_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|c_1}\right)}{I_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|c_1}\right)}, $$

laquelle engendre finalement, à la solution, la modification que voici:

$$ \begin{aligned} y_{1_n}(x_1) &= B_n x_1^{\beta_1}\left\{{}_{\gamma}R_1^{(c_1)} I_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right) + K_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right)\right\} \\ &:= B_n x_1^{\beta_1} G_\gamma\left(2\sqrt{|b_1|x_1}\right) \end{aligned} $$

avec $\gamma = 2|\beta_1| \in R^+$.

5.3. Solution générale

La correspondance entre le processus de Bessel et ce présent processus est frappante, de sorte que si était posée l'égalité entre $1-\alpha_i$ et $\sigma_i^2 - 4\mu_i$ pour $i = 1,2$, alors les paramètres β_i apparaissant dans la solution du processus de Bessel seraient de deux fois supérieurs à ceux apparaissant dans cette section-ci pour un même i. Qui plus est, par les simples changements :

$$ \begin{aligned} x_i &\to \sqrt{x_i} \\ c_i &\to \sqrt{c_i} \\ d_i &\to \sqrt{d_i} \end{aligned} $$

et

$$ \beta_i \to 2\beta_i $$

pour $i = 1,2$, l'ensemble des solutions s'obtiendrait des résultats de la section 4. Aussi, la démonstration ne sera-t-elle donnée que pour le cas où c_1 et d_1 sont strictement positifs, à savoir la solution quatrième, alors que les trois premières solutions seront brièvement formulées. Dans les substitutions, il importe de ne pas perdre de vue que, quoique la notation soit demeurée la même, les racines $\Omega_{\nu n}$, $k_{\nu n}$ et $k_{\nu n}^{\Delta}$ des deux processus sont associées à des fonctions différentes.

La solution générale est donc congrûment rendue par les expressions qui suivent dans les quatre prochaines sous-sections.

5.3.1. Solution première $(c_1 = 0, d_1 = 0)$

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\gamma} x_2^{\nu} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{x_1}\right) J_{\nu}\left(k_{\nu n}\sqrt{x_2}\right)$$

avec

$$C_n = \frac{\left\{1 - 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{1-\nu} J_{\nu-1}(\Omega_{\nu n})\right\}}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{2-\nu} c_2^{\gamma} d_2^{\nu} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right)\left\{J_{\nu+1}(\Omega_{\nu n})\right\}^2}.$$

5.3.2. Solution seconde $(c_1 > 0, d_1 = 0)$

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\beta_1} x_2^{\nu} G_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{x_1}\right) J_{\nu}\left(k_{\nu n}\sqrt{x_2}\right)$$

avec

$$C_n = \frac{\left\{1 - 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{1-\nu} J_{\nu-1}(\Omega_{\nu n})\right\}}{2^{\nu-2}\Gamma(\nu)\Omega_{\nu n}^{2-\nu} c_2^{\beta_1} d_2^{\nu} G_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right)\left\{J_{\nu+1}(\Omega_{\nu n})\right\}^2}.$$

5.3.3. Solution troisième $(c_1 = 0, d_1 > 0)$

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^{\gamma} x_2^{\beta_2} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{x_1}\right) F_{\nu}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right)$$

avec

$$C_n = \frac{2\,{}_G\Xi_n}{k_{\nu n}^{\Delta} c_2^{\gamma} I_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right){}_G\Lambda_n}$$

$${}_G\Lambda_n = d_2\left\{F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right)\right\}^2 - d_1\left\{F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right)\right\}^2$$

$${}_G\Xi_n = \begin{cases} (d_1)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right) - (d_2)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right) & \text{si } \beta_2 = \nu/2 \\ (d_2)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right) - (d_1)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right) & \text{si } \beta_2 = -\nu/2 \end{cases}.$$

5.3.4. Solution quatrième $(c_1 > 0, d_1 > 0)$

La solution est ici établie à partir des développements du début de la section sans égard aux trois premières solutions ou aux résultats du processus de Bessel. Ainsi, cette solution s'énonce de la manière que voici :

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} G_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{x_1}\right) F_{\nu}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right).$$

De l'évaluation de cette dernière à la seconde frontière de l'axe des x_1, il appert que

$$p(x_1 = c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_{\gamma}\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) x_2^{\beta_2} F_{\nu}\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) = 1$$

si bien qu'en extrayant de la sommation infinie les termes indépendants de n,

$$x_2^{-\beta_2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right). \tag{5.4}$$

La relation d'orthogonalité suivante est valable:

$$\int_{d_1}^{d_2} F_\nu\left(k_{\nu i}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) F_\nu\left(k_{\nu j}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) dx_2 = \left\{d_2\left[F_{\nu+1}\left(k_{\nu i}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right)\right]^2 - d_1\left[F_{\nu+1}\left(k_{\nu i}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right)\right]^2\right\}\delta_{ij} = {}_G\Lambda_i \delta_{ij} \ .$$

En effet, par la proposition 4.2, si est posé le changement de variable $x = \sqrt{x_2}$ alors $dx = \dfrac{dx_2}{2\sqrt{x_2}}$ et les bornes d'intégration ζ_1 et ζ_2 sont remplacées par $\sqrt{d_1}$ et $\sqrt{d_2}$. La relation d'orthogonalité suit alors naturellement.

En multipliant donc l'équation (5.4) par $F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right)$ et en intégrant par la suite, c'est-à-dire

$$\int_{d_1}^{d_2} x_2^{-\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) dx_2 = \int_{d_1}^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) F_\nu\left(k_{\nu n}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) dx_2 ,$$

alors par la précieuse relation d'orthogonalité,

$$\begin{aligned}\int_{d_1}^{d_2} x_2^{-\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right) dx_2 &= B_{n'} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) \int_{d_1}^{d_2} \left\{F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right)\right\}^2 dx_2 \\ &= B_{n'} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) {}_G\Lambda_{n'}\end{aligned}$$

et nécessairement,

$$B_{n'} = \frac{\int_{d_1}^{d_2} x_2^{-\beta_2} F_\nu\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right)dx_2}{c_2^{\beta_1} G_7\left(\frac{\sigma_2 k_{\nu n'}^{\Delta}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right)_G \Lambda_{n'}}.$$

À ce stade, il ne reste qu'à formuler une solution explicite pour l'intégrale I du numérateur, et c'est par la proposition 4.3 que sera achevé ce dessein. La démonstration repose sur deux sections, chacune correspondant aux situations où $\beta = \nu/2$ et $\beta = -\nu/2$. En guise de prélude à la démonstration, il s'agit de faire subir à l'intégrale un premier changement de variable, soit en posant $x = k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{x_2}$ de sorte que $dx = \frac{k_{\nu n'}^{\Delta}}{2\sqrt{x_2}}dx_2$, lequel transforme cette intégrale de la façon suivante:

$$I_1 = \frac{2}{\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\right)^{2(1-\beta)}}\int_{k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_1}}^{k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_2}} x^{1-2\beta} F_\nu(x)dx.$$

i) Dans ce premier de deux cas, où $\beta = \nu/2$,

$$I_1 = \frac{2}{\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\right)^{2-\nu}}\int_{k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_1}}^{k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_2}} x^{1-\nu} F_\nu(x)dx = \frac{2}{k_{\nu n'}^{\Delta}}\left\{(d_1)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right) - (d_2)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k_{\nu n'}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right)\right\}$$

cela, par la partie *a)* de la proposition 4.3.

ii) Dans le second cas, où $\beta = -\nu/2$,

$$I_2 = \frac{2}{\left(k^{\Delta}_{\nu n'}\right)^{2+\nu}} \int_{k^{\Delta}_{\nu n'}\sqrt{d_1}}^{k^{\Delta}_{\nu n'}\sqrt{d_2}} x^{1+\nu} F_\nu(x)dx = \frac{2}{k^{\Delta}_{\nu n'}} \left\{ (d_2)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n'}\sqrt{d_2}\right) - (d_1)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n'}\sqrt{d_1}\right) \right\},$$

résultat justifié par la partie *b)* de la proposition 4.3.

La solution finale et complète est donc :

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{x_1}\right) F_\nu\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{x_2}\right)$$

avec

$$B_n = \frac{2\,{}_G\Xi_n}{k^{\Delta}_{\nu n} c_2^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2 k^{\Delta}_{\nu n}}{\sigma_1}\sqrt{c_2}\right) {}_G\Lambda_n}$$

$${}_G\Lambda_n = d_2\left\{F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_2}\right)\right\}^2 - d_1\left\{F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_1}\right)\right\}^2$$

$${}_G\Xi_n = \begin{cases} (d_1)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_1}\right) - (d_2)^{\frac{1-\nu}{2}} F_{\nu-1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_2}\right) & \text{si } \beta_2 = \nu/2 \\ (d_2)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_2}\right) - (d_1)^{\frac{1+\nu}{2}} F_{\nu+1}\left(k^{\Delta}_{\nu n}\sqrt{d_1}\right) & \text{si } \beta_2 = -\nu/2 \end{cases} .$$

Conclusion

Cet ouvrage est une ouverture nouvelle pour les problèmes d'endroit de premier passage et son originalité, s'il en fut, a été de considérer non plus l'instant mais l'endroit d'absorption du processus pour des problèmes bidimensionnels. Il fallut préalablement préciser la région du plan sur laquelle allait se cantonner le processus et bien que cette région fût ceinte par une frontière rectangulaire, tout autre contour eût été convenable. Cependant, le niveau de régularité de la forme donnée à cette région a une incidence directe sur le degré de difficulté que présentent la résolution du problème et la possibilité d'atteindre à la solution. Une structure rectangulaire, souvent privilégiée dans les applications, s'est avérée, dans ces circonstances, un choix heureux.

Ce type de problème peut aisément être généralisé et étendu à des situations autres que celles décrites dans ce travail. Premièrement, bien que la surface fût maintenue invariablement dans le premier quadrant, l'étude eût pu se déplacer vers toute autre région du plan cartésien. Il en paraît néanmoins certains appariements entre les cas abordés. D'abord, pour le mouvement brownien et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, lesquels sont définis sur l'ensemble du corps des réels, les solutions obtenues demeurent valables et inchangées, quel que soit l'emplacement de cette région. Les équations différentielles qui conduisirent vers les solutions ne présentaient au demeurant aucune singularité, quelles que fussent les valeurs réelles prises par la variable. Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la validité maintenue de la solution se voit aussi par le fait que les variables sont surmontées d'un exposant deux. Au contraire de ces deux premiers processus, le mouvement brownien géométrique, le processus de Bessel ainsi que le processus cinquième, n'ont pour espace des états que la partie positive des réels et l'inclusion de l'origine au sein de cet espace est conditionnelle à son accessibilité. Il est pourtant une universalisation qui soit concevable, sans égard à cette contrainte, en faisant que le domaine de définition embrasse l'ensemble des réels. L'inanité d'une résolution nouvelle, pour le processus de Bessel ainsi que pour le mouvement brownien géométrique et ce, pour chacun des quadrants, est une évidence. Ces solutions conserveraient le même visage si ce n'est, pour le mouvement brownien géométrique, de l'apparition de valeurs absolues pour les variables x_1 et x_2, les arguments des logarithmes népériens ainsi que pour les quantités c_i et d_i $i=1,2$ dont l'exposant est impair. Pour ce processus, l'évaluation de la fonction établie (ou la probabilité) serait clairement invariable avec le changement de quadrant. Il importe cependant de souligner que la possibilité pour la région de chevaucher les axes dépend de l'accessibilité de l'origine; cette possibilité est toujours inexistante, en opposition au processus de Bessel, pour le mouvement brownien géométrique. Le processus cinquième est, quant à lui, de généralisation plus complexe; cette complexité supplémentaire vient du fait que les variables qui apparaissent dans les fonctions de Bessel sont mises sous une racine carrée.

Deuxièmement, seuls cinq cas particuliers parmi un ensemble pléthorique et documenté de processus furent étudiés. Cependant, l'ensemble de ceux-ci se prêterait à ce type d'analyse. Entre autres exemples, les processus intégrés dont la variable aléatoire relative à l'un des axes est l'intégrale de la variable aléatoire associée au second axe. Dans ce cas, le problème différerait en cela que l'indépendance entre les processus reliés à chacun des axes serait inexistante. L'équation rétrospective de Kolmogorov serait alors dégénérée, dans ce sens qu'elle ne contiendrait qu'une seule dérivée seconde, et ne dépendrait que de la composante non intégrée. L'évolution de ce type de processus est particulière puisque, les deux composantes étant intimement liées, la vitesse à laquelle se déplace le processus suivant un axe ainsi que la direction de ce déplacement dépendent de la variation de la position de la composante intégrée. Le mouvement résultant est donc une ligne courbe dont l'orientation est négative.

Troisièmement, les développements ont porté, pour l'essentiel, sur la probabilité que l'absorption du processus se produise à une frontière particulière plutôt qu'à une autre. Mais qu'en était-il de l'endroit d'absorption sur cette frontière? L'inconnaissance de l'endroit précis d'absorption se traduirait par une variable aléatoire et le problème consisterait à déterminer la distribution de probabilité de celle-ci.

Finalement, dans un espace de dimension supérieure à deux, les mêmes travaux ne seraient guère dénués d'intérêt. La méthode de séparation des variables, alliée aux séries de Fourier généralisées, conduirait, comme il est possible de le penser, aux résultats souhaités.

Références

ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, New York.

BELL, W.W. (1971). *Fonctions spéciales à l'usage des chercheurs et ingénieurs*, Dunod, Paris.

BUCKHOLTZ, P.G., WASAN, M.T. (1979). First Passage Probabilities of a Two Dimensional Brownian Motion in a Anisotropic Medium, *Sankhya Ser. A.*, 41, 198-206.

COX, D.R.,. MILLER, H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen, London.

EDWARDS JR. C.H., PENNEY, D.E. (1985). *Elementary Differential Equations with Applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 517-519.

IYENGAR, S. (1985). Hitting Lines with Two-Dimensional Brownian Motion, *SIAM J. Appl. Math.*, 45, 983-989.

KANNAN, D. (1979). *An Introduction to Stochastic Processes*, North Holland, New York.

KARLIN, S., TAYLOR, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

LEFEBVRE, M. (1997). First Hitting Place Distributions for the Ornstein-Uhlenbeck Process, *Stat. Probab. Lett.* 34, 3, 309-312.

LEFEBVRE, M. (1989a). Moment Generating Function of a First Hitting Place for the Integrated Ornstein-Uhlenbeck Process, *Stochastic Processes Appl.* 32, 2, 281-287.

LEFEBVRE, M., LÉONARD, E. (1989b). On the First Hitting Place of the Integrated Wiener Process, *Adv. Appl. Probab.* 21, 4. 945-948.

LOTOV, V.I. (1976). Asymptotic Expansions of the Distribution of the Time and Place of Exit From an Interval for Certain Random Walks, *Sib. Math. J*, 17, 713.

NAKAJIMA, T. (1998). Joint Distribution of the First Hitting Time and First Hitting Place for a Random Walk, *Kodai Math. J.* 21, 2, 192-200.

NISHIOKA,K. (1997). The First Hitting Time and Place of a Half-line by a Biharmonic Pseudo Process, *Jap. J. Math., New Ser.* 23, 2, 235-280.

POLYANIN, A.D., ZAITSEV,V.F. (1995). *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations,* CRC Press, New York.

SENETA, E. (1980). Another Look at Independence of Hitting Place and Time for the Simple Random Walk, *Stochastic Processes Appl.*, 10, 101-104.

SHAO, X.,YIN, C. (1997). The Joint Distribution of the Hitting Time and Hitting Place for a Brownian Motion with Drift, *J. Eng. Math., Xi'an*, 14, 123-126.

WENDEL, J. G. (1980). Hitting Spheres with Brownian Motion, *Ann. Probab.*, 8, 164-169.

XIAO, F, YIN, C. (1998). On the First Hitting Place and the First Hitting Time for a Conditioned Brownian Motion to a Hyperplan, *J. Eng. Math., Xi'an,* 15. 4, 81-86.

YIN, C., SHAO, X. ET H. CHENG. (1999). The Joint Density of the Hitting Time and Place to a Circle for Planar Brownian Motion, *J. Qufu Norm. Univ., Nat. Sci.* 25, 1, 7-9.

YIN, C., WU, R. (1999). Hitting Time and P!ace to a Sphere or Spherical Shell for Brownian Motion, *Chin. Ann. Math., Ser. B 20*, 2, 205-214.

Annexe I : Démonstrations des propositions

Dans cette annexe, seront démontrés les propositions introduites dans les sections 2 et 4.

Proposition 2.1

Soit f_a une fonction telle que

$$f_a := \omega_1 \Phi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) + \omega_2 \Psi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right)$$

où les fonctions $\Phi(\beta, \gamma; x)$ et $\Psi(\beta, \gamma; x)$ satisfont à l'équation hypergéométrique confluente . Alors,

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \mathrm{e}^{-bt^2} f_{a_1} f_{a_2} dt = 0 \text{ si } a_1 \neq a_2 \text{ et si } f_a(\zeta_i) = 0 \; \forall a, i = 1{,}2 .$$

Démonstration[1]

Puisque la fonction f_a satisfait à l'équation différentielle suivante:

$$y'' - 2bt\,y' - 4ab\,y = 0 ,$$

[1] La démonstration est inspirée de la démarche adoptée par Bell (1971) lors de l'établissement de la preuve de la proposition 4.1 utilisée dans l'ouvrage présent (se reporter infra, page 56). Aussi, cette relation d'orthogonalité pouvait être déduite de la théorie de Sturm-Liouville.

alors deux fonctions f_{a_1} et f_{a_2} satisferont nécessairement à cette même équation et donc,

$$\frac{d^2 f_{a_1}}{dt^2} - 2bt\frac{df_{a_1}}{dt} - 4a_1 b f_{a_1} = 0$$

et

$$\frac{d^2 f_{a_2}}{dt^2} - 2bt\frac{df_{a_2}}{dt} - 4a_2 b f_{a_2} = 0\,.$$

Ces dernières expressions, une fois multipliées par e^{-bt^2} peuvent être exprimées sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_1}}{dt}\right) - 4a_1 b\, e^{-bt^2} f_{a_1} = 0$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_2}}{dt}\right) - 4a_2 b\, e^{-bt^2} f_{a_2} = 0.$$

Pour la suite de la démarche, il s'agit de multiplier la première des équations précédentes par f_{a_2} et la seconde, par f_{a_1} et de soustraire. Ainsi,

$$f_{a_2}\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_1}}{dt}\right) - 4a_1 b\, e^{-bt^2} f_{a_1} f_{a_2} - f_{a_1}\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_2}}{dt}\right) + 4a_2 b\, e^{-bt^2} f_{a_1} f_{a_2} = 0.$$

Ce qui revient à écrire que

$$f_{a_2}\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_1}}{dt}\right) - f_{a_1}\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2}\frac{df_{a_2}}{dt}\right) + 4b(a_2 - a_1)e^{-bt^2} f_{a_1} f_{a_2} = 0.$$

Le résultat réexprimé de la dérivée du produit de deux fonctions soit, $u\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d(uv)}{dt}-v\dfrac{du}{dt}$, conduit la relation précédente vers une nouvelle forme. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\left(f_{a_2}\,\mathrm{e}^{-bt^2}\frac{df_{a_1}}{dt}-f_{a_1}\,\mathrm{e}^{-bt^2}\frac{df_{a_2}}{dt}\right)+4b(a_2-a_1)\mathrm{e}^{-bt^2}\,f_{a_1}f_{a_2}=0\,,$$

laquelle, intégrée de ζ_1 à ζ_2, devient

$$\left[f_{a_2}\,\mathrm{e}^{-bt^2}\frac{df_{a_1}}{dt}-f_{a_1}\,\mathrm{e}^{-bt^2}\frac{df_{a_2}}{dt}\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2}+4b(a_2-a_1)\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\mathrm{e}^{-bt^2}\,f_{a_1}f_{a_2}\,dt=0\,.$$

Sachant que, par hypothèse, $f_a(\zeta_1)=f_a(\zeta_2)=0\ \forall a$, le premier terme est nécessairement nul puisque que $\left|\,f_a'(\zeta_i)\right|<\infty, i=1,2$, cette condition étant facilement vérifiable. Il devient alors nécessaire que l'intégrale $\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\mathrm{e}^{-bt^2}\,f_{a_1}f_{a_2}\,dt$ soit nulle, pour des valeurs différentes de a_1 et a_2. Cela constitue, en clair, la relation d'orthogonalité qu'il suffisait de montrer.

Proposition 2.2

Soit f_a une fonction telle que

$$f_a:=\omega_1\Phi\left(a,\frac{1}{2};bt^2\right)+\omega_2\Psi\left(a,\frac{1}{2};bt^2\right)$$

où les fonctions $\Phi(\beta,\gamma;x)$ et $\Psi(\beta,\gamma;x)$ satisfont à l'équation hypergéométrique confluente . Alors,

$$\int e^{-bt^2} f_a dt = \frac{1}{2} t\, e^{-bt^2} H_{\omega_1,\omega_2}\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right)$$

avec

$$H_{\omega_1,\omega_2}\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right) = 2\omega_1 \Phi\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right) - \omega_2 \Psi\left(a+1,\frac{3}{2};bt^2\right).$$

Démonstration

Il est simple de démontrer que l'équation différentielle associée à la fonction f_a s'exprime comme suit :

$$y'' - 2bt\, y' - 4ab\, y = 0\,.$$

Ainsi, la relation suivante, obtenue de la précédente après multiplication par e^{-bt^2} et après réarrangement des termes, soit :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt^2} f_a'\right) - 4ab\, e^{-bt^2} f_a = 0$$

(en ayant remplacé y par f_a), une fois intégrée, conduit à une première expression de l'intégrale:

$$\frac{1}{4ab}\left[e^{-bt^2} f_a'\right] = \int e^{-bt^2} f_a dt\,.$$

Par la propriété de linéarité de la dérivée, il est aisé de voir que

$$f_a' := \omega_1 \Phi'\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) + \omega_2 \Psi'\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right).$$

Soit les formules de récurrence (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 507) :

$$\frac{d}{dx}\Phi(\beta, \gamma; x) = \frac{\beta}{\gamma}\Phi(\beta + 1, \gamma + 1; x)$$

et

$$\frac{d}{dx}\Psi(\beta, \gamma; x) = -\beta\Psi(\beta + 1, \gamma + 1; x).$$

Alors, dans le cas présent, en appliquant le changement de variables $x = bt^2$, les formules de récurrence deviennent pleinement applicables et adoptent la forme que voici:

$$\frac{d}{dt}\Phi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) = 4abt\Phi\left(a + 1, \frac{3}{2}; bt^2\right)$$

et

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(a, \frac{1}{2}; bt^2\right) = -2abt\Psi\left(a + 1, \frac{3}{2}; bt^2\right).$$

Celles-ci permettent d'affirmer que

$$f_a' = 4\omega_1 abt\Phi\left(a + 1, \frac{3}{2}; bt^2\right) - 2\omega_2 abt\Psi\left(a + 1, \frac{3}{2}; bt^2\right) := 2abtH_{\omega_1, \omega_2}\left(a + 1, \frac{3}{2}; bt^2\right).$$

La résolution de l'intégrale vient alors naturellement et la solution explicite s'écrit:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-bt^2} f_a dt &= \frac{1}{4ab}\left[\mathrm{e}^{-bt^2} f_a^{'}\right] \\ &= \frac{1}{2} t\, \mathrm{e}^{-bt^2} H_{\omega_1,\omega_2}\left(a+1, \frac{3}{2}; bt^2\right)\end{aligned}$$

où la fonction H est définie de la façon suivante:

$$H_{\omega_1,\omega_2}(\beta,\gamma;x) = 2\omega_1\Phi(\beta,\gamma;x) - \omega_2\Psi(\beta,\gamma;x).$$

Lemme 4.1

Soit $U_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right)$ une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèces ainsi que de fonctions de Hankel, ces fonctions d'ordre ξ ayant $k_{\xi n}^{\Delta}x$ pour argument. Alors,

$$\frac{d}{dx}U_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) = \frac{\xi}{x}U_\xi\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right) - k_{\xi n}^{\Delta}U_{\xi+1}\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right).$$

Démonstration

En utilisant la formule de récurrence ci-dessous :

$$\frac{d}{dz}W_\xi(z) = \frac{\xi}{z}W_\xi(z) - W_{\xi+1}(z),$$

laquelle est pleinement valable si $W_\xi(z)$ est, soit une fonction de Bessel de première ou de seconde espèce, soit une fonction de Hankel ou encore, une combinaison linéaire de celles-ci (par les propriété de linéarité de la dérivée) et en posant $z = k^{\Delta}_{\xi n}x$, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}U_\xi(z) &= \left\{\frac{\xi}{z}U_\xi(z) - U_{\xi+1}(z)\right\}\frac{dz}{dx} \\ &= \left\{\frac{\xi}{z}U_\xi(z) - U_{\xi+1}(z)\right\}k^{\Delta}_{\xi n} \\ &= \frac{\xi}{x}U_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right) - k^{\Delta}_{\xi n}U_{\xi+1}\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right).\end{aligned}$$

Proposition 4.2 Orthogonalité des fonctions cylindriques

Soit $F_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right)$ une fonction telle que

$$F_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right) := \omega_1 J_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right) + \omega_2 Y_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right), \xi \in R.$$

Si $F_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right) = F_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right) = 0$ avec $\zeta_1, \zeta_2 \neq 0$ alors nécessairement,

$$F_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right) := {}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2)} J_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right) + Y_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}x\right)$$

où

$${}_\xi R_2^{(\zeta_1,\zeta_2)} := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Y_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right)}{J_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right)} = \frac{-Y_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right)}{J_\xi\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right)}$$

et les racines $k^{\Delta}_{\xi n}$ sont telles que

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right) & Y_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right) \\ J_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right) & Y_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right) \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Dans ces conditions,

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\, F_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi i} x\right) F_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi j} x\right) dx = \frac{1}{2}\left[\zeta_2^2 \left\{F_{\xi+1}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_2\right)\right\}^2 - \zeta_1^2 \left\{F_{\xi+1}\left(k^{\Delta}_{\xi n}\zeta_1\right)\right\}^2\right]\delta_{ij} \, .$$

Démonstration[2]

La fonction $F_{\xi n} := F_{\xi}\left(k^{\Delta}_{\xi n} x\right)$ satisfait à l'équation dite de Bessel soit :

$$x^2\, y'' + x\, y' + \left\{\left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2 x^2 - \xi^2\right\} y = 0 \, .$$

Il est donc permis d'affirmer que :

$$1) \quad x^2 \frac{d^2 F_{\xi i}}{dx^2} + x \frac{dF_{\xi i}}{dx} + \left\{\left(k^{\Delta}_{\xi i}\right)^2 x^2 - \xi^2\right\} F_{\xi i} = 0$$

et

$$2) \quad x^2 \frac{d^2 F_{\xi j}}{dx^2} + x \frac{dF_{\xi j}}{dx} + \left\{\left(k^{\Delta}_{\xi j}\right)^2 x^2 - \xi^2\right\} F_{\xi j} = 0 \, .$$

[2] La démonstration est inspirée de la démarche adoptée par Bell (1971) lors de l'établissement de la preuve de la proposition 4.1 utilisée dans l'ouvrage présent.

Aussi, les équations précédentes peuvent être présentées sous une forme plus concise :

$$1)\quad x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)+\left\{\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2 x^2-\xi^2\right\}F_{\xi j}=0$$

et

$$2)\quad x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)+\left\{\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2 x^2-\xi^2\right\}F_{\xi j}=0\,.$$

Pour la suite de la démarche, il s'agit de multiplier 1) par $\frac{1}{x}F_{vj}$ et 2) par $\frac{1}{x}F_{vi}$ et d'obtenir, après soustraction des relations ainsi obtenues, l'expression de la ligne prochaine :

$$F_{\xi j}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)-F_{\xi j}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)+\left\{\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2-\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2\right\}xF_{\xi j}F_{\xi j}=0\,.$$

Le résultat réexprimé de la dérivée du produit de deux fonctions soit, $u\frac{dv}{dt}=\frac{d(uv)}{dt}-v\frac{du}{dt}$, conduit la relation précédente vers une nouvelle forme. Ainsi,

$$\frac{d}{dx}\left(F_{\xi j}x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(F_{\xi j}x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right)+\left\{\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2-\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2\right\}xF_{\xi j}F_{\xi j}=0\,,$$

laquelle, intégrée sur le domaine $[\zeta_1,\zeta_2]$, c'est-à-dire

$$\left[F_{\xi j}x\frac{dF_{\xi j}}{dx}-F_{\xi j}x\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2}+\left\{\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2-\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2\right\}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}xF_{\xi j}F_{\xi j}\,dx=0\,,$$

permet d'affirmer que

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xF_{\xi j}F_{\xi j}dx = 0$$

en autant que $\left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2 \neq \left(k_{\xi j}^{\Delta}\right)^2$. Ce résultat découle du fait que pour chacune de bornes d'intégration, $F_{\xi n}(\zeta_1) = F_{\xi n}(\zeta_2) = 0$, ce qui implique nécessairement que le premier terme est nul. Aussi, est-il impératif de noter que $\left|\frac{dF_{\xi j}}{dx}\right|_{x=\zeta_i} < \infty, i = 1, 2$ puisque, $\frac{d}{dx}F_{\xi n} = \frac{\nu}{x}F_{\xi n} - k_{\xi n}^{\Delta}F_{\xi+1,n}$ (cf. lemme 4.1), laquelle expression évaluée aux bornes donne un nombre fini, quelle que soit la valeur de ces bornes pourvu qu'elles soient non nulles.

La seconde étape de la démonstration consiste essentiellement en l'évaluation explicite de l'intégrale $\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left[F_{\xi n}\right]^2 dx$. Reprenant l'équation différentielle associée à $F_{\xi n}$, il appert que

$$x^2 F_{\xi n}'' + xF_{\xi n}' + \left\{\left(k_{\xi n}^{\Delta}\right)^2 x^2 - \xi^2\right\}F_{\xi n} = 0,$$

laquelle devient, après multiplication par $2F_{\xi n'}$:

$$2x^2 F_{\xi n}'' F_{\xi n}' + 2x\left(F_{\xi n}'\right)^2 + 2\left\{\left(k_{\xi n}^{\Delta}\right)^2 x^2 - \xi^2\right\}F_{\xi n}F_{\xi n}' = 0$$

ou encore, présentée sous une forme équivalente :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^2\left(F_{\xi n}'\right)^2 - \xi^2\left(F_{\xi n}\right)^2 + \left(k_{\xi n}^{\Delta}\right)^2 x^2\left(F_{\xi n}\right)^2\right\} - 2\left(k_{\xi n}^{\Delta}\right)^2 x\left(F_{\xi n}\right)^2 = 0.$$

Maintenant, il résulte de l'intégration entre ζ_1 et ζ_2,

$$\left[x^2\left(F'_{\xi n}\right)^2 - \xi^2\left(F_{\xi n}\right)^2 + \left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2 x^2\left(F_{\xi n}\right)^2\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} - 2\left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left(F_{\xi n}\right)^2 dx = 0$$

ce qui implique nécessairement, en se rappelant que $F_{\xi n}(\zeta_1) = F_{\xi n}(\zeta_2) = 0$, la relation suivante:

$$\left[x^2\left(F'_{\xi n}\right)^2\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = 2\left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left(F_{\xi n}\right)^2 dx$$

ou, de manière équivalente :

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left(F_{\xi n}\right)^2 dx = \frac{1}{2\left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2}\left[x^2\left(F'_{\xi n}\right)^2\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

L'intégrale ainsi évaluée soutient que

$$\frac{1}{2\left(k^{\Delta}_{\xi n}\right)^2}\left\{\zeta_2^2\left(\frac{dF_{\xi n}}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=\zeta_2} - \zeta_1^2\left(\frac{dF_{\xi n}}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=\zeta_1}\right\} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left(F_{\xi n}\right)^2 dx.$$

En admettant que (cf. lemme 4.1)

$$\frac{d}{dx}F_{\xi n} = \frac{\xi}{x}F_{\xi n} - k^{\Delta}_{\xi n}F_{\xi+1,n},$$

alors il vient que

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x(F_{\xi n})^2\,dx = \frac{1}{2\left(k_{\xi n}^{\Delta}\right)^2}\left\{\zeta_2^2\left(\frac{\xi}{\zeta_2}F_{\xi n}\Big|_{x=\zeta_2} - k_{\xi n}^{\Delta}F_{\xi+1,n}\Big|_{x=\zeta_2}\right)^2 - \zeta_1^2\left(\frac{\xi}{\zeta_1}F_{\xi n}\Big|_{x=\zeta_1} - k_{\xi n}^{\Delta}F_{\xi+1,n}\Big|_{x=\zeta_1}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\zeta_2^2\left(F_{\xi+1,n}\Big|_{x=\zeta_2}\right)^2 - \zeta_1^2\left(F_{\xi+1,n}\Big|_{x=\zeta_1}\right)^2\right\}.$$

Finalement, avec la notation initiale,

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left\{F_{\xi}\left(k_{\xi n}^{\Delta}x\right)\right\}^2 dx = \frac{1}{2}\left[\zeta_2^2\left\{F_{\xi+1}\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_2\right)\right\}^2 - \zeta_1^2\left\{F_{\xi+1}\left(k_{\xi n}^{\Delta}\zeta_1\right)\right\}^2\right].$$

Proposition 4.3

Soit $U_{\xi}(x)$ une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèces ainsi que de fonctions de Hankel, ces fonctions d'ordre ξ ayant x pour arguments. Alors, pour ξ réel,

a) $$\int x^{1-\xi}U_{\xi}(x)\,dx = -x^{1-\xi}U_{\xi-1}(x)$$

b) $$\int x^{\xi+1}U_{\xi}(x)\,dx = x^{\xi+1}U_{\xi+1}(x)$$

Démonstration

partie a):

La démonstration se fait par l'intermédiaire de la formule de récurrence suivante (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 361):

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\vartheta}W_{\vartheta}(x)\right\} = -x^{-\vartheta}W_{\vartheta+1}(x),\ \vartheta \in R$$

où $W_{\vartheta}(x)$ est soit une fonction de Bessel de première ou de seconde espèce, soit une fonction de Hankel. Cette formule demeure aussi valable pour toute combinaison linéaire de ces fonctions (cf. proposition 4.3.1 partie *a*).

Maintenant, en posant $\vartheta + 1 = \xi$ et en remplaçant *W* par *U*, la formule de récurrence précédente est applicable aux fins de la présente preuve et devient :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{1-\xi}U_{\xi-1}(x)\right\} = -x^{1-\xi}U_{\xi}(x),$$

laquelle expression implique que

$$-d\left\{x^{1-\xi}U_{\xi-1}(x)\right\} = x^{1-\xi}U_{\xi}(x)dx.$$

Alors, en intégrant, le résultat vient naturellement.

partie b) :

Il s'agit maintenant d'appliquer la formule de récurrence suivante (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 361) :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\vartheta}W_{\vartheta}(x)\right\} = x^{\vartheta}W_{\vartheta-1}(x), \ \vartheta \in R$$

où $W_{\vartheta}(z)$ est soit une fonction de Bessel de première ou de seconde espèce, soit une fonction de Hankel. Cette formule est aussi valable pour toute combinaison linéaire des fonctions pour lesquelles elle est définie (cf. proposition 4.3.1 partie b).

En posant $\vartheta = 1 + \xi$ et en remplaçant W par U, la formule de récurrence devient :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{1+\xi}U_{1+\xi}(x)\right\} = x^{1+\xi}U_{\xi}(x)$$

si bien que

$$d\left\{x^{1+\xi}U_{1+\xi}(x)\right\} = x^{1+\xi}U_{\xi}(x)dx\,.$$

L'intégration de cette dernière conduit au résultat.

Proposition 4.3.1:

Soit les formules de récurrence suivantes:

a) $$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\xi}W_{\xi}(x)\right\} = -x^{-\xi}W_{\xi+1}(x), \xi \in R$$

b) $$\frac{d}{dx}\left\{x^{\xi}W_{\xi}(x)\right\} = x^{\xi}W_{\xi-1}(x), \xi \in R$$

où $W_{\xi}(x)$ est soit une fonction de Bessel de première ou de seconde espèce, soit une fonction de Hankel. Alors, cette formule demeure valable pour toute combinaison linéaire des fonctions pour lesquelles elle est définie.

Démonstration

Soit $U_{\xi}(x)$ une fonction définie comme étant une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèces ainsi que de fonctions de Hankel telle que

$$U_{\xi}(x) = a_1 W_{\xi,1}(x) + a_2 W_{\xi,2}(x) + \ldots + a_n W_{\xi,n}(x).$$

Alors,

partie a) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{-\xi}U_{\xi}(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left\{x^{-\xi}\left[a_1W_{\xi,1}(x)+a_2W_{\xi,2}(x)+\ldots+a_nW_{\xi,n}(x)\right]\right\}\\ &= \frac{d}{dx}\left[a_1x^{-\xi}W_{\xi,1}(x)\right]+\ldots+\frac{d}{dx}\left[a_nx^{-\xi}W_{\xi,n}(x)\right]\\ &= -a_1x^{-\xi}W_{\xi+1,1}(x)-\ldots-a_nx^{-\xi}W_{\xi+1,n}(x)\\ &= -x^{-\xi}U_{\xi+1}(x)\end{aligned}$$

partie b):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{\xi}U_{\xi}(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left\{x^{\xi}\left[a_1W_{\xi,1}(x)+a_2W_{\xi,2}(x)+\ldots+a_nW_{\xi,n}(x)\right]\right\}\\ &= \frac{d}{dx}\left[a_1x^{\xi}W_{\xi,1}(x)\right]+\ldots+\frac{d}{dx}\left[a_nx^{\xi}W_{\xi,n}(x)\right]\\ &= a_1x^{\xi}W_{\xi-1,1}(x)+\ldots+a_nx^{\xi}W_{\xi-1,n}(x)\\ &= x^{\xi}U_{\xi-1}(x)\end{aligned}$$

Annexe II : Classification des frontières

La classification des frontières ζ_1 et ζ_2 se fait par l'analyse d'intégrales définies sur une région (Kannan, 1979, p. 279). Ainsi, pour la variance infinitésimale $v(x)$ qui est strictement positive, il s'agit d'abord d'évaluer la fonction de Hille qui est telle que

$$h(x) = \exp\left\{-\int_a^x [2m(u)/v(u)]du\right\}$$

où la borne inférieure a de l'intégrale est comprise dans l'intervalle (ζ_1, ζ_2). Aussi est-il nécessaire de calculer la fonction $H(x)$ de la façon suivante :

$$H(x) = \frac{2}{v(x)h(x)}$$

Les relations ci-après sont celles qui permettent la classification attendue des frontières ζ_1 et ζ_2. Ainsi, l'évaluation des intégrales

$$\pi_1 = \iint\limits_{\zeta_1<y<x<a} H(x)h(y)\,dxdy, \qquad \pi_2 = \iint\limits_{a<x<y<\zeta_2} H(x)h(y)\,dxdy$$

$$\tau_1 = \iint\limits_{\zeta_1<y<x<a} h(x)H(y)\,dxdy, \qquad \tau_2 = \iint\limits_{a<x<y<\zeta_2} h(x)H(y)\,dxdy$$

permet d'affirmer que ζ_i pour $i = 1,2$ est frontière :

régulière	si $\pi_i < \infty,\ \tau_i < \infty$,
de sortie	si $\pi_i < \infty,\ \tau_i = \infty$,
d'entrée	si $\pi_i = \infty,\ \tau_i < \infty$,
naturelle	si $\pi_i = \infty,\ \tau_i = \infty$.

Une frontière est dite accessible si la probabilité qu'elle soit atteinte par le processus en un temps fini est positive. Sinon, elle est dite inaccessible. Les frontières régulière et de sortie sont accessibles dans ce sens que l'atteinte de celles-ci par le processus en un temps fini est une éventualité. En opposition, sont qualifiées d'inaccessibles les frontières d'entrée et les frontières naturelles.

1. Classification des frontières pour le processus de Bessel

Pour le processus de Bessel, l'origine est un point particulier et son appartenance à un type de frontière dépend des relations de grandeur qu'entretiennent les paramètres α et σ^2. Ainsi, il sera montré que si $\alpha \geq \sigma^2 + 1$, alors l'origine est frontière d'entrée et en conséquence, inaccessible. Si, par contre, $\alpha < \sigma^2 + 1$, tout point est accessible y compris l'origine. Particulièrement, zéro est frontière régulière si $1 - \sigma^2 < \alpha < 1 + \sigma^2$ et frontière de sortie si $0 \leq \alpha \leq 1 - \sigma^2$.

1.1. Formulation des intégrales π_1 et τ_1

La fonction de Hille dans le cas du processus de Bessel prend les aspect suivants :

$$h(x) = \exp\left\{-\int_a^x \left[(\alpha - 1)/\sigma^2\right] u du\right\} = \left\{\frac{x}{a}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}}$$

si bien que

$$H(x) = \frac{2}{\sigma^2}\left\{\frac{a}{x}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}}.$$

Il s'ensuit alors que, d'une part,

$$\pi_1 = \iint_{0<y<x<a} \frac{2}{\sigma^2}\left\{\frac{a}{x}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}}\left\{\frac{y}{a}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} dxdy$$

intégrale qui devient, après simplification :

$$\pi_1 = \frac{2}{\sigma^2} \iint_{0<y<x<a} x^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} y^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} dxdy$$

et que d'autre part,

$$\tau_1 = \frac{2}{\sigma^2} \iint_{0<y<x<a} x^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} y^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} dxdy.$$

1.2. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\alpha > \sigma^2 + 1$

Dans ces conditions, le paramètre α est une valeur supérieure à un et l'intégrale double π_1 diverge. En effet,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{2}{(\alpha+\sigma^2-1)}\int_{0^+}^{a} x^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}}\Bigg|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} dy \\
&= \frac{2}{(\alpha+\sigma^2-1)}\int_{0^+}^{a}\left\{a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}} y^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} - y\right\}dy \\
&= \frac{2\sigma^2 a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}}}{(\alpha+\sigma^2-1)(1-\alpha+\sigma^2)}\left\{a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} - y^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}}\Bigg|_{y\downarrow 0}\right\} - \frac{a^2}{\alpha+\sigma^2-1}
\end{aligned}$$

et puisque $1-\alpha+\sigma^2$ est strictement inférieur à zéro, π_1 tend vers l'infini.

L'intégrale τ_1 est pour sa part convergente, comme le démontrent les lignes suivantes:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{2}{\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \int_{0^+}^{a} x^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} \Bigg|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} dy \\
&= \frac{2}{\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \int_{0^+}^{a} \left\{ a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} y^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} - y \right\} dy \\
&= \frac{2\sigma^2 a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}}}{\left(\alpha+\sigma^2-1\right)\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \left\{ a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}} - y^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}} \Bigg|_{y \downarrow 0} \right\} - \frac{a^2}{1-\alpha+\sigma^2} \\
&= \frac{a^2}{\alpha+\sigma^2-1}.
\end{aligned}$$

Ceci découlant du fait que $\alpha+\sigma^2-1$ est toujours positif.

1.3. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\alpha = \sigma^2 + 1$

Puisque,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{0^+}^{a} \int_{y}^{a} \frac{x}{y} dx dy \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{0^+}^{a} \left[a^2 - y^2\right] y^{-1} dy \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[a^2 \ln y - \frac{y^2}{2} \right]_{y \downarrow 0}^{a},
\end{aligned}$$

alors π_1 diverge et tend vers l'infini par le logarithme népérien.

Aussi,

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\int_{y}^{a}\frac{y}{x}\,dx\,dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\left[y\ln a - y\ln y\right]dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{(\ln a)y^2}{2} - \frac{1}{4}\left(2y^2\ln y - y\right)\right]_{y\downarrow 0}^{a} \\
&= \frac{a}{2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

puisque $\lim_{y\downarrow 0} y^2 \ln y = 0$. L'intégrale étant maintenant convergente et l'association des résultats des sections 1.2 et 1.3 confirme que si $\alpha \geq \sigma^2 + 1$, zéro est frontière d'entrée.

1.4. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\alpha < \sigma^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{2}{\left(\alpha+\sigma^2-1\right)}\int_{0^+}^{a} x^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}}\Bigg|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}}\,dy \\
&= \frac{2}{\left(\alpha+\sigma^2-1\right)}\int_{0^+}^{a}\left\{a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}}\,y^{\frac{1-\alpha}{\sigma^2}} - y\right\}dy \\
&= \frac{2\sigma^2 a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}}}{\left(\alpha+\sigma^2-1\right)\left(1-\alpha+\sigma^2\right)}\left\{a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} - y^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}}\Bigg|_{y\downarrow 0}\right\} - \frac{a^2}{\alpha+\sigma^2-1} \\
&= \frac{a^2}{1-\alpha+\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

$$\tau_1 = \frac{2}{\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \int_{0^+}^{a} x^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} \Bigg|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} dy$$

$$= \frac{2}{\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \int_{0^+}^{a} \left\{ a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}} y^{\frac{\alpha-1}{\sigma^2}} - y \right\} dy$$

$$= \frac{2\sigma^2 a^{\frac{1-\alpha+\sigma^2}{\sigma^2}}}{\left(\alpha+\sigma^2-1\right)\left(1-\alpha+\sigma^2\right)} \left\{ a^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}} - y^{\frac{\alpha+\sigma^2-1}{\sigma^2}} \Bigg|_{y\downarrow 0} \right\} - \frac{a^2}{1-\alpha+\sigma^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^2}{\alpha+\sigma^2-1} & \text{si } \alpha+\sigma^2-1>0 \\ \infty & \text{si } \alpha+\sigma^2-1<0 \end{cases}.$$

En fait, il serait possible de montrer que la solution est telle que

$$\tau_1 = \begin{cases} \dfrac{a^2}{\alpha+\sigma^2-1} & \text{si } \alpha+\sigma^2-1>0 \\ \infty & \text{si } \alpha+\sigma^2-1\le 0 \end{cases}.$$

Par le recoupement des résultats qui précèdent, la classification qui suit s'impose. Ainsi, l'origine sera frontière :

régulière	si $1-\sigma^2<\alpha<\sigma^2+1$,
de sortie	si $0\le\alpha\le 1-\sigma^2$,
d'entrée	si $\alpha\ge\sigma^2+1$.

2. Classification des frontières pour le processus aléatoire usité en génétique et en mathématiques financières

Pour ce processus stochastique, l'origine présente aussi la particularité d'être tantôt accessible, tantôt inaccessible selon la valeur de la moyenne infinitésimale μ. Si cette moyenne infinitésimale est inférieure à $\sigma^2/2$, l'origine est tenue pour accessible et sous cette même limite, sera frontière de sortie lorsque la moyenne infinitésimale μ sera inférieure ou égale à zéro, frontière régulière sinon. À l'inverse, lorsque la moyenne infinitésimale est supérieure ou égale à $\sigma^2/2$, la frontière est d'entrée et inaccessible.

2.1. Formulation des intégrales π_1 et τ_1

La fonction de Hille est dans ce cas donnée par :

$$h(x) = \exp\left\{-\int_a^x \frac{2\mu}{\sigma^2 u} du\right\} = \left\{\frac{a}{x}\right\}^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}$$

et en conséquence de cette dernière,

$$H(x) = \frac{2}{\sigma^2 x}\left\{\frac{x}{a}\right\}^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} = \frac{2x^{\frac{2\mu-\sigma^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2 a^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}}.$$

La première intégrale d'intérêt est alors

$$\pi_1 = \iint_{0<y<x<a} \frac{2x^{\frac{2\mu-\sigma^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2 a^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}}\left\{\frac{a}{y}\right\}^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} dxdy$$

qui, après simplification, devient :

$$\pi_1 = \frac{2}{\sigma^2} \iint_{0<y<x<a} x^{\frac{2\mu-\sigma^2}{\sigma^2}} y^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}} dxdy.$$

La seconde intégrale simplifiée s'obtient de la précédente et est :

$$\tau_1 = \frac{2}{\sigma^2} \iint_{0<y<x<a} x^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}} y^{\frac{2\mu-\sigma^2}{\sigma^2}} dxdy.$$

2.2. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\mu \neq 0$ et $\mu \neq \sigma^2/2$

Les intégrales π_1 et τ_1 sont à la fois convergentes et divergentes selon que la variance infinitésimale σ^2 soit supérieure ou inférieure à 2μ. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{\mu}\int_{0^+}^{a} x^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}\Big|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}} dy \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{0^+}^{a}\left\{a^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} y^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}} - 1\right\}dy \\
&= \frac{\sigma^2 a^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}}{\mu(\sigma^2-2\mu)}\left\{a^{\frac{\sigma^2-2\mu}{\sigma^2}} - y^{\frac{\sigma^2-2\mu}{\sigma^2}}\Big|_{y\downarrow 0}\right\} - \frac{a}{\mu} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2a}{\sigma^2-2\mu} & \text{si } \sigma^2 - 2\mu > 0,\ \mu \neq 0 \\ \infty & \text{si } \sigma^2 - 2\mu < 0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque la moyenne peut être tout nombre réel, à l'exclusion de zéro et $\sigma^2/2$, le résultat s'énonce comme suit:

$$\pi_1 = \begin{cases} \dfrac{2a}{\sigma^2 - 2\mu} & \text{si } \mu \in \left(-\infty, \sigma^2/2\right)/\{0\} \\ \infty & \text{si } \mu \in \left(\sigma^2/2, \infty\right). \end{cases}$$

Maintenant, concernant τ_1,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2}{\left(\sigma^2 - 2\mu\right)} \int_{0^+}^{a} x^{\frac{\sigma^2 - 2\mu}{\sigma^2}} \Bigg|_{x=y}^{x=a} y^{\frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2}} dy \\ &= \frac{2}{\left(\sigma^2 - 2\mu\right)} \int_{0^+}^{a} \left\{ a^{\frac{\sigma^2 - 2\mu}{\sigma^2}} y^{\frac{2\mu - \sigma^2}{\sigma^2}} - 1 \right\} dy \\ &= \frac{\sigma^2 a^{\frac{\sigma^2 - 2\mu}{\sigma^2}}}{\mu\left(\sigma^2 - 2\mu\right)} \left\{ a^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} - y^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \Bigg|_{y \downarrow 0} \right\} - \frac{2a}{\sigma^2 - 2\mu} \\ &= \begin{cases} \dfrac{a}{\mu} & \text{si } \mu > 0,\ \mu \neq \sigma^2/2 \\ \infty & \text{si } \mu < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\mu = \sigma^2/2$

La divergence n'est ici que pour l'intégrale π_1 puisque

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\int_{y}^{a} y^{-1}dxdy \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\left\{ay^{-1} - 1\right\}dy \\
&= \frac{2a}{\sigma^2}\left\{\ln a - \ln y\big|_{y\downarrow 0} - 1\right\},
\end{aligned}$$

cette expression tendant vers l'infini par le logarithme népérien.

Pour ce qui est de τ_1,

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\int_{y}^{a} x^{-1}dxdy \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\{\ln a - \ln y\}dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\left[(\ln a)y - y\ln y + y\right]_{y\downarrow 0}^{a} \\
&= \frac{2a}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{y\downarrow 0} y\ln y = 0$.

2.4. Évaluation des intégrales π_1 et τ_1 lorsque $\mu = 0$

Les résultats s'obtiennent de la section 2.3 et sont tels que

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\int_{y}^{a} x^{-1}dxdy \\ &= \frac{2a}{\sigma^2}\end{aligned}$$

et

$$\tau_1 = \frac{2}{\sigma^2}\int_{0^+}^{a}\int_{y}^{a} y^{-1}dxdy$$

tend vers l'infini.

L'origine en tant que frontière est donc :

une frontière de sortie	si $\mu \in (-\infty, 0]$,
une frontière régulière	si $\mu \in (0, \sigma^2/2)$,
une frontière d'entrée	si $\mu \in [\sigma^2/2, \infty)$,

en conformité avec ce qui fut établi.