

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CODAGE SPATIO-TEMPOREL POUR LES SYSTÈMES MULTI-ANTENNES  
DE COMMUNICATIONS SANS-FIL

LIONEL SCREMIN  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUIN 2000



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57427-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CODAGE SPATIO-TEMPOREL POUR LES SYSTÈMES MULTI-ANTENNES  
DE COMMUNICATIONS SANS-FIL

présenté par : SCREMIN Lionel

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CONAN Jean, Ph.D., président

M. HACCOUN David, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PIERRE Samuel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. FORTIER Paul, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma reconnaissance envers mon directeur de recherche, Dr David Haccoun, pour sa supervision constructive et inspirée ainsi que pour son aide financière. Je souhaite remercier mon codirecteur, Dr Samuel Pierre, pour son amitié et pour m'avoir guidé au début de la maîtrise.

Je remercie Supélec sans qui cette échange à Montréal n'aurait pu se concrétiser. Je pense notamment à Catherine Dao Duy en charge des affaires internationales et mon tuteur Jacques Antoine.

De nombreuses personnes ont contribué à rendre ce séjour agréable. Je pense tout particulièrement à Brice, Guillaume, Pierre-Frédéric, Steve et Youenn.

Enfin, je dédie ce mémoire à mes proches et ma famille en France qui occuperont toujours mes pensées.

## RÉSUMÉ

L'utilisation de systèmes de communications sans-fil a connu un essor rapide durant la dernière décennie. La recherche et le développement de nouvelles techniques s'avèrent nécessaires pour satisfaire un nombre croissant d'abonnés et une augmentation du débit de données tout en préservant qualité et disponibilité du service. Les contraintes physiques du canal radio sans-fil et les limitations du spectre de fréquences disponibles accentuent la difficulté.

Les canaux sans-fil à spectre limité sont des conduits étroits qui ne supportent pas un flux rapide de données. Nous montrerons que le déploiement d'antennes multiples à l'émission et à la réception élargit ces conduits de données. Le récepteur bénéficie ainsi de répliques des signaux transmis sous la forme de redondance spatiale. Cette ressource est appelée diversité spatiale et elle contribue grandement à la fiabilité des communications sans-fil.

Le défi de concevoir un codage de canal pour des systèmes multi-antennes à haute capacité a abouti au développement des codes spatio-temporels (CST), pour lesquels le codage est réalisé suivant les dimensions spatiale et temporelle. Ce mémoire se concentre sur l'introduction d'une nouvelle classe de CST basés sur le codage convolutionnel. Nous présentons une liste de bons CST convolutionnels pour la modulation BPSK. Nous soulignons la possibilité d'accommoder des codes à taux compatible avec un nombre variable d'émetteurs. Finalement, on expose une simplification de l'algorithme de décodage qui résulte dans une diminution conséquente de la complexité.

Dans ce mémoire, on évalue les performances de ces codes en termes de taux d'erreur par trame. On fournit des résultats de simulations qui mettent en relief l'influence de divers paramètres du système tels que le nombre d'émetteurs, le nombre de récepteurs, la longueur de contrainte du code et le type d'évanouissements du canal. Une analyse comparative est menée avec les procédés connus et avec la

mesure théorique de la capacité. Les CST convolutionnels s'affirment comme un bon compromis entre le taux de transmission, la diversité, la taille de constellation et la complexité.

## ABSTRACT

The use of wireless communication systems has experienced a rapid breakthrough during the last decade. With an increasing number of subscribers, and requirements for higher data rates, quality and availability, new techniques are being investigating and developed. The physical constraints of the wireless radio channel over which the communication takes place, and the limited radio spectrum available, make it non trivial to meet the demands.

Band-limited wireless channels are relatively narrow and do not accommodate rapid flow of data. We will show that deploying multiple transmit and receive antennas broadens these data ducts. The receiver is provided with replicas of transmitted signals in the form of redundancy in spatial domain. This resource is called spatial diversity and it is an important contributor to reliable wireless communications.

The challenge of designing channel codes for high capacity multi-antenna systems has led to the development of so-called "Space-Time Codes" (STC), in which coding is performed across the spatial dimension as well as time. The focus of this thesis is to exhibit a new class of STC based on the use of convolutional codes. We provide a list of good convolutional STC with BPSK modulation. We emphasize on the possibility to adapt rate compatible codes with a variable number of transmitters. In addition, a simplification of the decoding algorithm will be presented resulting in a substantial reduction of complexity.

The codes performance in terms of frame error rate is assessed in this paper. We provide simulations results hinting at the impact of various parameters such as the number of transmitters, the number of receivers, the constraint length of the code and the type of channel fadings. A comparative analysis is performed with the existing schemes and with a theoretical measure of the capacity. The convolutional STC appears to have a good tradeoff between rate, diversity gain, constellation size and complexity.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>xviii</b>
<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Motivations . . . . .	1
1.2 Liste des contributions . . . . .	2
1.3 Contenu du mémoire . . . . .	2
<b>CHAPITRE 2: QUELQUES PRINCIPES DE COMMUNICATIONS</b>	
<b>NUMÉRIQUES</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Chaîne de transmission . . . . .	4
2.2 Environnement du sans-fil . . . . .	6
2.2.1 Variations à petite échelle . . . . .	7
2.2.2 Le bruit . . . . .	14
2.3 Modulations numériques . . . . .	16
2.3.1 Introduction . . . . .	16



2.3.2	Représentation géométrique des signaux . . . . .	17
2.3.3	Modulation BPSK . . . . .	18
<b>CHAPITRE 3: CODAGE DE CANAL . . . . .</b>		<b>21</b>
3.1	Généralités . . . . .	21
3.2	Codage Linéaire en blocs . . . . .	23
3.2.1	Définition . . . . .	23
3.2.2	Représentation linéaire . . . . .	24
3.2.3	Codes cycliques . . . . .	25
3.3	Codage convolutionnel . . . . .	27
3.3.1	Définition . . . . .	27
3.3.2	Diverses représentations . . . . .	30
3.3.3	Décodage optimal des codes convolutionnels . . . . .	32
3.3.4	Performances . . . . .	37
<b>CHAPITRE 4: SYSTÈMES MULTI-ANTENNES . . . . .</b>		<b>39</b>
4.1	Diversité spatiale : applications et limitations physiques . . . . .	39
4.1.1	Présentation de la diversité . . . . .	39
4.1.2	Applications de la diversité spatiale . . . . .	41
4.1.3	Limitations physiques . . . . .	43
4.2	Étude théorique de la capacité . . . . .	44
4.2.1	Modélisation mathématique du canal . . . . .	44
4.2.2	Capacité théorique . . . . .	45
4.3	Simulations et analyse des performances . . . . .	47
4.3.1	Description des simulations . . . . .	47
4.3.2	Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité . . . . .	48
4.3.3	L'efficacité en fonction du nombre d'antennes . . . . .	49
4.4	Conclusion . . . . .	52



6.4.1 Confrontation face aux procédés temporels . . . . . 96

6.4.2 Confrontation face aux CST en treillis . . . . . 98

6.5 Influence du canal . . . . . 100

6.6 Performance vis-à-vis de la capacité théorique . . . . . 102

6.7 Conclusion . . . . . 104

**CHAPITRE 7: CONCLUSION . . . . . 106**

**BIBLIOGRAPHIE . . . . . 108**

**ANNEXES . . . . . 113**

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les différentes sources de bruit radioélectrique . . . . .	15
B.1	CST convolutionnels de taux 1/2 . . . . .	118
B.2	CST convolutionnels de taux 1/3 . . . . .	119
B.3	CST convolutionnels de taux 1/4 . . . . .	120
B.4	CST convolutionnels de taux 1/5 . . . . .	121
B.5	CST convolutionnels de taux 1/6 . . . . .	122
B.6	CST convolutionnels de taux 1/7 . . . . .	123
B.7	CST convolutionnels de taux 1/8 . . . . .	123
B.8	CST convolutionnels de taux 1/9 . . . . .	124
B.9	CST convolutionnels de taux 1/10 . . . . .	124

## LISTE DES FIGURES

2.1	Schéma-bloc général d'un système de communication numérique . . .	5
2.2	Illustration de l'effet Doppler . . . . .	7
2.3	Spectre Doppler . . . . .	8
2.4	Illustration des chemins multiples . . . . .	9
2.5	Profil des échos . . . . .	10
2.6	Modèle de canal à 2 raies . . . . .	10
2.7	Interprétation temporel du délai . . . . .	11
2.8	Interprétation fréquentielle du délai . . . . .	12
2.9	Allure d'un signal reçu en milieu urbain . . . . .	13
2.10	Distribution de Rayleigh . . . . .	14
2.11	Spectre du bruit blanc gaussien additif . . . . .	15
2.12	Constellations de signaux pour $M=16$ , (a) 16-PSK (b) 16-QAM . .	17
2.13	Diagramme de constellation BPSK . . . . .	19
2.14	Spectre de puissance pour la modulation BPSK . . . . .	20
3.1	Schéma de principe des codages en blocs et convolutionnel . . . . .	22
3.2	Schéma-bloc d'un codeur convolutionnel . . . . .	28
3.3	Exemple de codeur convolutionnel de taux $1/3$ : $G=[4,5,7]$ . . . . .	28
3.4	Diagramme d'état du code $G=[4,5,7]$ . . . . .	30
3.5	Arbre d'encodage du code $G=[4,5,7]$ . . . . .	31
3.6	Treillis du code $G=[4,5,7]$ . . . . .	32
3.7	Treillis du code doublement complémentaire $G=[5,7]$ . . . . .	35
3.8	Sous-treillis du code doublement complémentaire $G=[5,7]$ . . . . .	35
3.9	Représentation en papillon . . . . .	36
3.10	Algorithme CSA . . . . .	36

4.1	Modélisation du canal . . . . .	44
4.2	Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité d'un système avec $N=2,3$ émetteurs et $M=2,3$ récepteurs . . . . .	48
4.3	Seuil d'efficacité à 99% pour 2 émetteurs . . . . .	49
4.4	Seuil d'efficacité à 99% pour un récepteur . . . . .	50
4.5	Seuil d'efficacité à 99%, pour $N$ émetteurs et $M$ récepteurs, avec $N + M=5$ . . . . .	51
5.1	Schéma général de codage spatio-temporel . . . . .	54
5.2	Schéma d'un émetteur spatio-temporel à 2 antennes . . . . .	56
5.3	Schéma général d'un récepteur spatio-temporel . . . . .	57
5.4	Illustration du gain en diversité et en codage . . . . .	61
5.5	Exemple de CST en treillis avec constellation 4-PSK . . . . .	68
5.6	Exemple de codeur convolutionnel équivalent au CST en treillis . . . . .	68
5.7	Codeur convolutionnel de taux $1/2$ : $G=[133,171]$ , $K=7$ . . . . .	73
5.8	Codage convolutionnel classique et CST convolutionnel . . . . .	75
5.9	CST de taux compatible . . . . .	77
5.10	Algorithme CSA pour les CST . . . . .	79
6.1	Gain relatif en diversité à l'émission, avec 3 récepteurs, mesuré pour $P(E)=10^{-2}$ ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $K = 8$ - SNR = 8.75 dB), ( $K = 9$ - SNR = 8.5 dB) . . . . .	85
6.2	Gain relatif en diversité à l'émission, avec 3 récepteurs, mesuré pour $P(E)=10^{-3}$ ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $K = 8$ - SNR = 12.1 dB), ( $K = 9$ - SNR = 11.9 dB) . . . . .	86
6.3	Gain relatif en diversité à la réception, avec 2 émetteurs et $K=5$ ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $P(E) = 10^{-3}$ - SNR = 13.5 dB), ( $P(E) = 10^{-4}$ - SNR = 16 dB) . . . . .	88

6.4	Gain relatif en diversité à la réception, avec 3 émetteurs et $K=5$ ; référence pour 3 émetteurs, 2 récepteurs : ( $P(E) = 10^{-3}$ - SNR = 16.5 dB), ( $P(E) = 10^{-4}$ - SNR = 18.5 dB) . . . . .	89
6.5	Gain relatif en diversité spatiale globale, en utilisant un nombre égal d'émetteurs et de récepteurs, mesuré pour $P(E) = 10^{-2}$ ; référence pour 2 émetteurs, 2 récepteurs : ( $K = 7$ - SNR = 13.75 dB), ( $K =$ 8 - SNR = 13.5 dB), ( $K = 9$ - SNR = 13 dB) . . . . .	91
6.6	Gain relatif en diversité spatiale globale, en utilisant un nombre égal d'émetteurs et de récepteurs, mesuré pour $P(E) = 10^{-3}$ ; référence pour 2 émetteurs, 2 récepteurs : ( $K = 7$ - SNR = 17.75 dB), ( $K =$ 8 - SNR = 17.5 dB), ( $K = 9$ - SNR = 17.25 dB) . . . . .	92
6.7	Performance de CST de taux 1/2 en fonction de la longueur de con- trainte pour un système à 2 émetteurs et 2 récepteurs . . . . .	93
6.8	Performance de CST de taux 1/3 en fonction de la longueur de con- trainte pour un système à 3 émetteurs et 3 récepteurs . . . . .	94
6.9	Performance de CST de taux 1/4 en fonction de la longueur de con- trainte pour un système à 4 émetteurs et 4 récepteurs . . . . .	95
6.10	Performance du CST généré par $G=[23,35]$ pour un nombre variable d'émetteurs comparée avec la borne union d'un événement erreur au décodage . . . . .	97
6.11	Performance de CST convolutionnels de taux 1/2 (2 émetteurs), de longueur de contrainte $K$ variable, avec des trames de 130 bits pour : (a) un récepteur - (b) deux récepteurs . . . . .	99
6.12	Performance du CST généré par $G=[5,7]$ pour deux émetteurs et deux récepteurs, dans un canal à évanouissements quasi-statiques ou rapides . . . . .	100

6.13 Performance du CST généré par $G=[133,171]$ pour deux émetteurs et un récepteur, dans un canal à évanouissements quasi-statiques ou rapides . . . . .	101
6.14 Performance des CST convolutionnels confrontés aux évanouissements de Rayleigh . . . . .	102
6.15 Méthode pour évaluer les performances des CST vis-à-vis de l'efficacité spectrale théorique . . . . .	103
C.1 Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité d'un système avec $N=3,4$ émetteurs et $M=3,4$ récepteurs . . . . .	125
C.2 Seuil d'efficacité à 99% pour 3 émetteurs . . . . .	126
C.3 Seuil d'efficacité à 99% pour 4 émetteurs . . . . .	126
D.1 Performance du CST associé au générateur $G=[5,7]$ , $K=3$ . . . . .	127
D.2 Performance du CST associé au générateur : (a) $G=[23,35]$ , $K=5$ - (b) $G=[133,171]$ , $K=7$ . . . . .	128
D.3 Performance du CST associé au générateur : (a) $G=[247,371]$ , $K=8$ - (b) $G=[561,753]$ , $K=9$ . . . . .	129
D.4 Performance du CST associé au générateur $G=[25,33,37]$ , $K=5$ . . . . .	130
D.5 Performance du CST associé au générateur : (a) $G=[133,171,165]$ , $K=7$ - (b) $G=[247,371,353]$ , $K=8$ . . . . .	131
D.6 Performance du CST associé au générateur $G=[561,753,715]$ , $K=9$ . . . . .	132
D.7 Performance du CST associé au générateur $G=[25,27,33,37]$ , $K=5$ . . . . .	133
D.8 Performance du CST associé au générateur : (a) $G=[133,171,165,117]$ , $K=7$ - (b) $G=[247,371,353,327]$ , $K=8$ . . . . .	134
D.9 Performance du CST associé au générateur $G=[561,753,715,517]$ et $K=9$ . . . . .	135



## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

ACS	Add Compare Select
ASK	Amplitude Shift Keying
bps	bits par seconde
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CRC	Cyclic Redundancy Check
CSA	Compare Select Add
CST	Code Spatio-Temporel
FSK	Frequency Shift Keying
OFDM	Orthogonal Frequency Division Mutliplexing
P(E)	Probabilité d'erreur par trame
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
SNR	Signal to Noise Ratio
†	Trans-conjugaison matricielle
*	Conjugaison pour les nombres complexes
<i>det</i>	Déterminant
$I_n$	Matrice carrée identité de taille $n \times n$
$Z_i$	Groupe des entiers relatifs modulo $i$

## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe A:</b>	<b>Théorie pour CST en modulation BPSK . . . . .</b>	<b>114</b>
A.1	Définition de la (-1)-équivalence . . . . .	114
A.2	Première proposition . . . . .	114
A.3	Deuxième proposition . . . . .	115
A.4	Critère du rang en binaire . . . . .	117
<b>Annexe B:</b>	<b>Listes de CST convolutionnels . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>Annexe C:</b>	<b>Résultats complémentaires pour les systèmes multi- antennes . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>Annexe D:</b>	<b>Résultats de simulations pour les CST convolution- nels . . . . .</b>	<b>127</b>
D.1	Système à deux émetteurs avec CST convolutionnels de taux 1/2 . .	127
D.2	Système à trois émetteurs avec CST convolutionnels de taux 1/3 . .	130
D.3	Système à trois émetteurs avec CST convolutionnels de taux 1/4 . .	133

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Motivations

La demande explosive à l'égard des connexions et applications liées à l'Internet, dans les dernières années, souligne le désir insatiable de notre société pour la liberté d'accès à l'information. Parallèlement, la popularité croissante des téléphones cellulaires, depuis leur introduction il y a une quinzaine d'années, assouvit le besoin de l'humanité à communiquer sans contraintes de temps ni d'espace.

L'essor des systèmes de communications sans-fil est marqué par un nombre croissant d'abonnés et une augmentation du débit de données tout en préservant qualité et disponibilité du service. Pour répondre à ces défis, la recherche et le développement de nouvelles technologies sont nécessaires. Les contraintes physiques du canal radio sans-fil et les limitations du spectre de fréquences disponibles accentuent la difficulté.

Parmi les champs d'investigation, l'utilisation de la dimension spatiale a un impact significatif sur la conception et la performance des systèmes de communications. La possibilité de disposer de plusieurs antennes, aussi bien à l'émission qu'à la réception, est une technique qui suscite un intérêt certain. La diversité spatiale permet de combattre les atténuations du canal tout en assurant une capacité de transmission accrue.

La dimension temporelle se conçoit plus naturellement puisque le temps s'écoule au cours d'une transmission. D'ailleurs, la diversité temporelle est depuis longtemps exploitée notamment par le biais du codage de canal. Ce dernier, par l'ajout contrôlé de redondance, permet de protéger l'information et le cas échéant de réaliser des gains en termes d'énergie consommée.

L'objectif de ce mémoire est précisément de réunir la dimension spatiale et la dimension temporelle à travers le codage spatio-temporel. Notre analyse aboutira à la présentation et à la simulation de ces nouveaux codes adaptés aux systèmes multi-antennes de communications sans-fil.

## 1.2 Liste des contributions

- Étude des systèmes multi-antennes. Intérêts théoriques, problèmes pratiques, applications et simulations pour illustrer la diversité spatiale.
- Tour d'horizon complet des concepts du codage spatio-temporel. Formalisme théorique, analyse de performances et enjeux. Introduction des codes disponibles dans la littérature.
- Présentation d'une nouvelle classe de codes spatio-temporels : les CST convolutionnels. Recherche et inventaire de bons codes.
- Mise en valeur des codes à taux compatible permettant d'accommoder un nombre variable d'émetteurs.
- Simplification du décodage à maximum de vraisemblance en utilisant la propriété de double complémentarité des codes.
- Simulations des CST convolutionnels. Évaluation des différents paramètres tels que le nombre d'émetteurs, le nombre de récepteurs, la longueur de contrainte et le type de canal. Analyse comparative vis à vis des procédés connus. Mesure de l'écart par rapport à la capacité théorique.

## 1.3 Contenu du mémoire

La composition du mémoire est la suivante :

- Le chapitre 2 est un rappel des éléments constitutifs de la chaîne de transmission qui entrent en jeu dans la suite du mémoire. On y évoque entre autres l'environnement du sans-fil et les différents types de modulation.
- Le chapitre 3 est entièrement consacré au codage de canal. On y explique les principes essentiels utilisés par la suite. Il y sera exposé le codage en blocs, le codage convolutionnel et le décodage de Viterbi.
- Le chapitre 4 présente les systèmes multi-antennes. On y trouvera une description détaillée de la diversité spatiale : son impact, ses applications et ses limites. Il est mené une analyse théorique de la capacité suivie de simulations pour évaluer quantitativement les gains potentiels.
- Le chapitre 5 introduit les concepts de codage spatio-temporel. Les modèles théoriques, les critères de performances et les codes de la littérature sont présentés. Ensuite, une nouvelle classe de CST basés sur le codage convolutionnel est explicitée. Une liste de bons CST convolutionnels est alors établie. On met en relief l'existence de codes à taux compatible qui permettent d'accommoder un nombre variable d'émetteurs. Enfin, on opère à une simplification de l'algorithme de décodage.
- Le chapitre 6 regroupe des résultats de simulations. On illustre l'influence du nombre d'antennes, la longueur de contrainte du code et le type de canal. On opère à une analyse comparative vis à vis des dispositifs connus et de la capacité théorique.
- La conclusion réalise la synthèse des résultats et apportent des nouvelles perspectives de recherches.
- Les annexes A, B, C et D présentent respectivement des démonstrations, des listes de CST convolutionnels, des résultats de simulations de systèmes multi-antennes et des résultats simulations de CST convolutionnels.

## CHAPITRE 2

### QUELQUES PRINCIPES DE COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques principes de bases qui régissent l'analyse et le design des systèmes de communications numériques. La clé des communications numériques réside dans l'utilisation d'un ensemble fini de messages discrets, alors que les communications analogiques procèdent par des messages continus. Des techniques analogiques sont toujours utilisées mais le tout numérique a connu une progression spectaculaire durant les dernières décennies notamment car le numérique est plus robuste, plus flexible et plus fiable. Dans les prochaines sections, nous aborderons la chaîne de transmission, l'environnement des communications sans-fil et quelques techniques de modulations utilisées dans ce mémoire.

#### 2.1 Chaîne de transmission

La figure 2.1 représente le schéma-bloc général d'un système de communication numérique [Skl88]. Il est constitué de 18 éléments qui peuvent être groupés par paires. Toutes ces fonctionnalités ne sont pas toujours indispensables mais elles ont toutes pour objectif d'améliorer la qualité de la transmission, c'est-à-dire reproduire en sortie, de manière la plus fidèle possible, l'information appliquée en entrée.

La connaissance des caractéristiques des canaux physiques à travers lesquels est transmis l'information est d'une importance capitale : elle affecte le design des blocs du système de communication. La compréhension des ces caractéristiques reviendra de manière récurrente au cours de ce mémoire.

Le rôle de la modulation est de générer un signal adapté à la transmission à travers le canal, et cela afin de transporter l'information requise jusqu'au récepteur. Comme la plupart des canaux sont analogiques par nature, le modulateur produit

généralement un signal analogique de même format. Toutefois, dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons qu'aux modulations numériques. Le modulateur numérique est une interface numérique/analogique.

L'accès multiple est la technique de gestion des ressources en fréquence, en temps et en code pour permettre à différents usagers d'interconnecter simultanément leurs circuits de voix téléphonique, de données et autres. C'est une préoccupation majeure dans la conception des réseaux de téléphones mobiles.

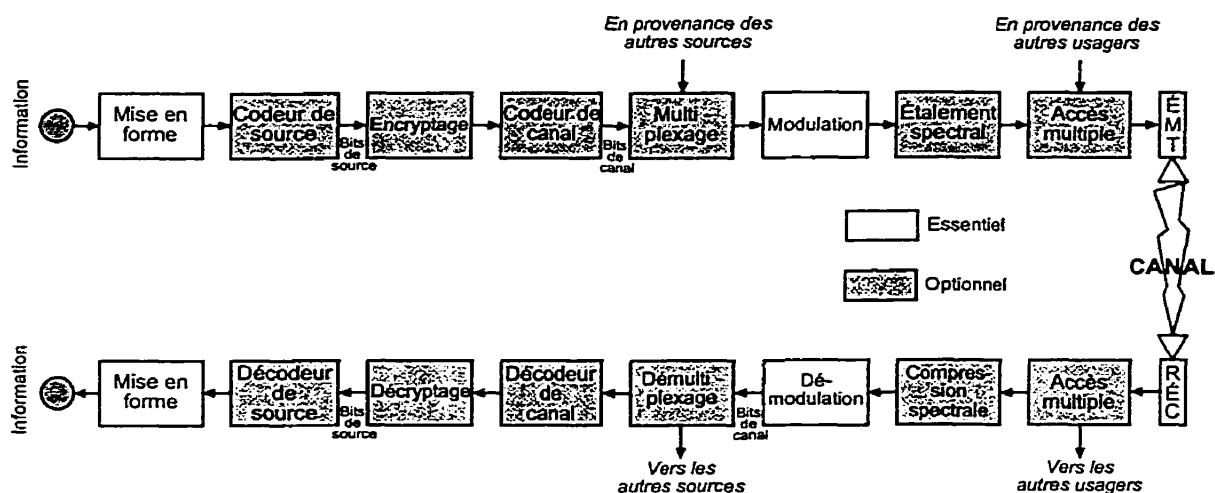


Figure 2.1: Schéma-bloc général d'un système de communication numérique

Le codage de canal a pour but de protéger l'information numérique en ajoutant de la redondance dans les messages transmis. Cette redondance permet de détecter ou de corriger des erreurs. Le prix à payer pour cette protection est une diminution de la largeur de bande disponible pour l'information utile. Le chapitre 3 sera entièrement consacré aux rappels des éléments de codage de canal.

Le codage de source est utilisé pour supprimer les redondances inhérentes aux sources naturelles d'information. Il numérise l'information source et réduit le flot de symboles à la stricte intelligibilité suivant les limitations des émetteurs ou des récepteurs. Le codage de source peut aussi inclure des codes spécifiques à la mise en forme des données pour l'émetteur (le code Morse pour la télégraphie).

L'encryptage consiste en des codes secrets tels que l'information ne puisse être comprise que par le récipiendaire choisi. Nous n'aborderons pas ces deux types de codage dans la suite de ce mémoire.

## 2.2 Environnement du sans-fil

La compréhension du canal de transmission est primordiale mais il est très difficile d'en avoir une connaissance parfaite. Nous allons présenter quelques éléments de modélisation du canal sans-fil que l'on utilisera pour le codage spatio-temporel. Pour cela, nous reprendrons en partie la description de [Boi99] concernant le canal radiomobile. Les radiocommunications mobiles utilisent des ondes à petite portée (afin de permettre la réutilisation des fréquences) et dont la fréquence ne dépasse pas les quelques GHzertz.

Par opposition à une liaison fixe où l'on s'efforce de dégager la liaison, la liaison entre un émetteur-récepteur fixe et un récepteur-émetteur mobile est perturbée par la présence d'obstacles naturels (relief, arbre...) ou artificiels (bâtiments...). L'effet des obstacles sur la propagation dépend de leur taille vis-à-vis de la longueur d'onde ( $\lambda = 6$  cm pour 5 GHz). Les phénomènes rencontrés sont :

- réflexions sur un obstacle (façades...)
- diffractions par des écrans (relief, toits...)
- diffusions (végétations...)
- pénétrations (à travers les murs...)

On distingue trois échelles de variation. Il y a tout d'abord les variations à grande échelle dues principalement à l'atténuation avec la distance de la puissance électromagnétique. Viennent ensuite les altérations par effet de masque dues



aux obstacles, et enfin les évanouissements rapides causés par le phénomène multi-chemins. Les prochaines sections détailleront le cas des variations à petite échelle et du bruit additif.

### 2.2.1 Variations à petite échelle

L'onde radioélectrique parvient au récepteur via différents trajets. Le trajet direct est emprunté lorsque le récepteur et l'émetteur sont en visibilité et à celui-ci s'ajoutent tous les échos issus de réflexions et de diffractions sur des structures diverses. Le canal radiomobile est aussi caractérisé par sa nature fluctuante due au déplacement relatif de l'émetteur et du récepteur, aux modifications de l'environnement (déplacement d'obstacles...). Ces deux phénomènes vont se traduire par des évanouissements en temps et en fréquence du signal reçu dus aux interférences entre les différents trajets.

#### 2.2.1.1 L'effet Doppler

Afin d'illustrer l'influence de l'effet Doppler lors du déplacement de l'émetteur ou/et du récepteur, on considère le cas particulier où il n'y aurait qu'un seul trajet. La figure 2-2 décrit une situation de transmission de fréquence porteuse  $f_o$  d'une base B en vue directe avec un mobile M qui se déplace à la vitesse constante  $\vec{v}$ .

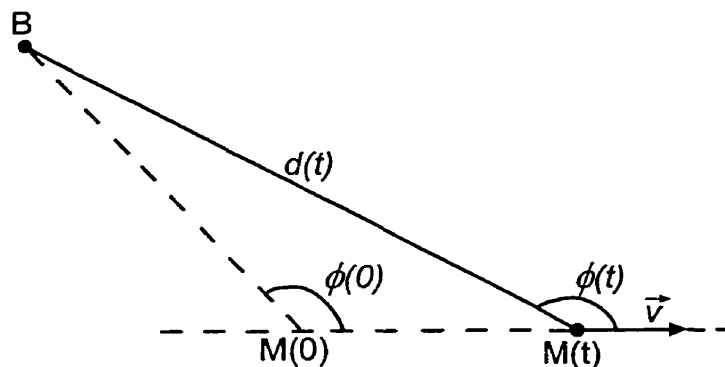


Figure 2.2: Illustration de l'effet Doppler

On peut montrer que tout se passe comme si la fréquence d'émission n'était plus  $f_o$ , mais  $f_o \pm f_d \cos \phi(0)$  avec  $f_d = f_o v / c$  où  $c$  est la célérité de la lumière [Hay94]. Le décalage Doppler est positif (augmentation de la fréquence) quand les ondes proviennent de devant l'unité mobile, inversement il est négatif quand les ondes proviennent de derrière l'unité mobile. C'est un phénomène très classique pour les ondes acoustiques (sirène de pompiers...). Pour exemple, si on considère  $f_o = 5$  GHz et  $v = 8$  km/h, alors  $f_d = 37$  Hz.

Dans le cas plus réaliste où le récepteur reçoit plusieurs ondes issues d'un diffuseur, on peut montrer que le décalage fréquentiel se fait de manière continue sur toute une gamme de fréquences définie par le spectre Doppler de l'équation 2.1 avec  $\sigma^2$  la puissance du signal reçu [Wau97]. L'allure de ce spectre est donnée à la figure 2.3 en fonction de la fréquence réduite  $f/f_d$ .

$$S_c(f) = \frac{\sigma^2}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} \quad (2.1)$$

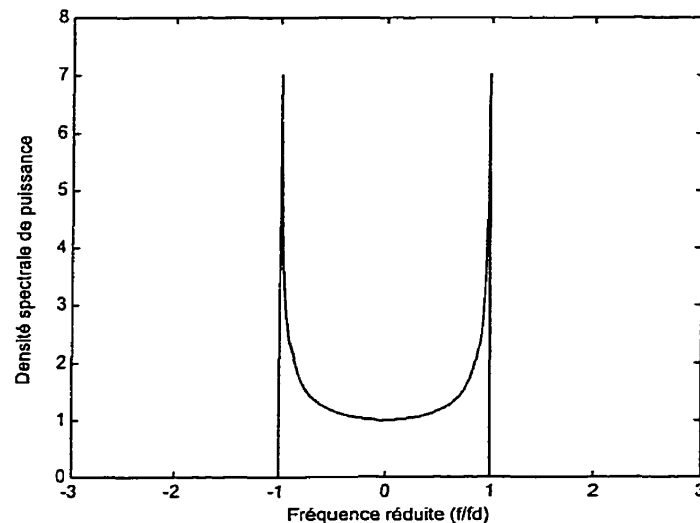


Figure 2.3: Spectre Doppler

On définit usuellement le temps de cohérence :  $T_c \approx 1/f_d$ . Le temps de cohérence est en fait une mesure statistique de la durée sur laquelle le canal peut être considéré invariant. Deux cas de figure sont alors possibles en fonction de la durée  $T_s$  des symboles émis :

- $T_s > T_c$  : le canal est dit à évanouissements rapides.
- $T_s < T_c$  : le canal est dit à évanouissements lents.

### 2.2.1.2 Les chemins multiples

Le signal reçu résulte de la superposition des ondes qui interfèrent les unes avec les autres de manière constructive ou destructive. Il y a donc des évanouissements qui se produisent typiquement à des intervalles de  $\lambda/2$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la porteuse. Les effets de la propagation par trajets multiples sont linéaires et le canal peut être représenté par un filtre linéaire. Par analogie à l'optique géométrique, les trajets sont apparentés à des rayons optiques rectilignes réfléchis ou diffractés sur des obstacles (figure 2.4).

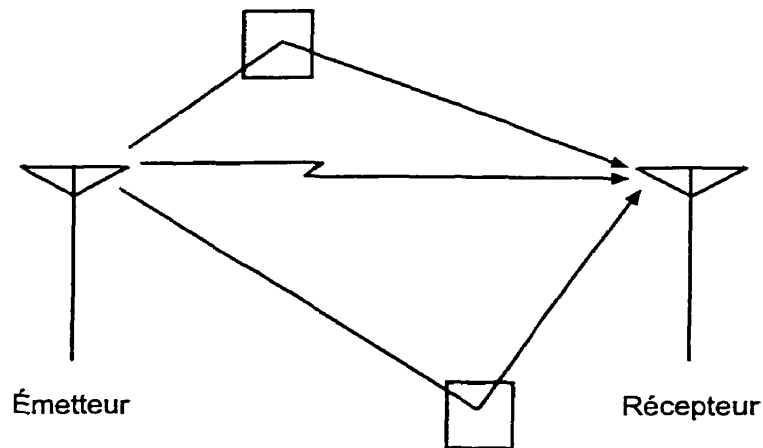


Figure 2.4: Illustration des chemins multiples

Le signal reçu peut alors s'écrire sous la forme :  $r(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i e(t - \tau_i)$  où  $e(t)$  représente le signal émis,  $\tau_i$  est le retard de l' $i$ -ème trajet et  $L$  est le nombre d'échos

décelables. Le retard introduit est dû à la distance  $d_i$  parcourue par l'onde entre l'émetteur et le récepteur.  $\alpha_i$  est l'atténuation sur cet  $i$ -ème trajet (atténuation en fonction de l'éloignement et absorption d'énergie par les obstacles).

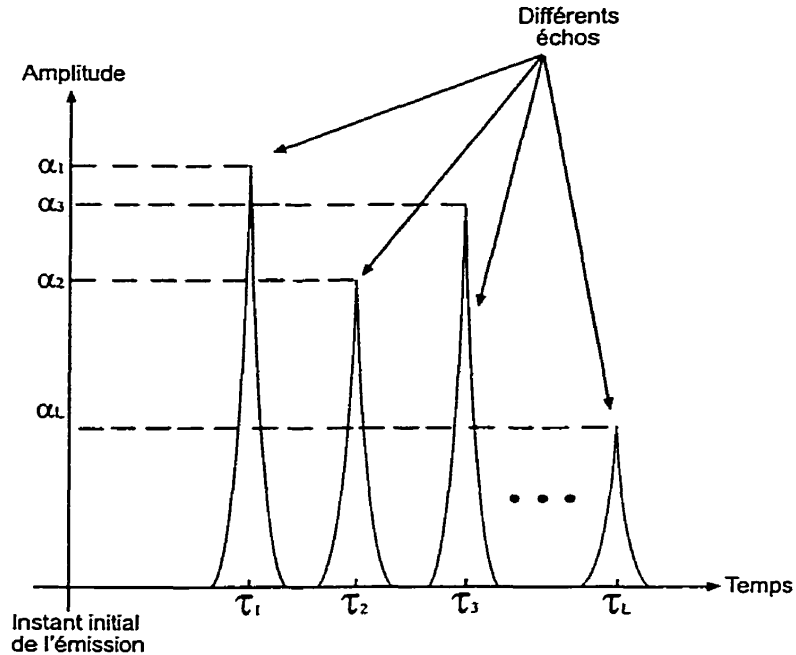


Figure 2.5: Profil des échos

Illustrons le phénomène de délai en considérant le cas simple d'un modèle de canal à 2 raies [CL99]. Il est possible d'interpréter ce phénomène de manière temporelle et fréquentielle.

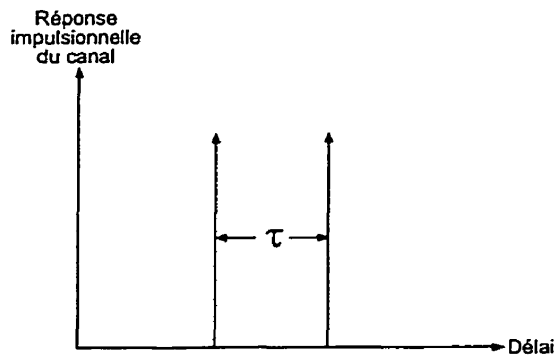


Figure 2.6: Modèle de canal à 2 raies

Le passage d'un symbole de durée  $T_s$  à travers le canal est représenté par la figure 2.7. L'interprétation temporelle est la suivante :

- $\tau/T_s$  est petit : l'interférence inter-symbole est négligeable.
- $\tau/T_s$  est grand : l'interférence inter-symbole est source d'erreurs.

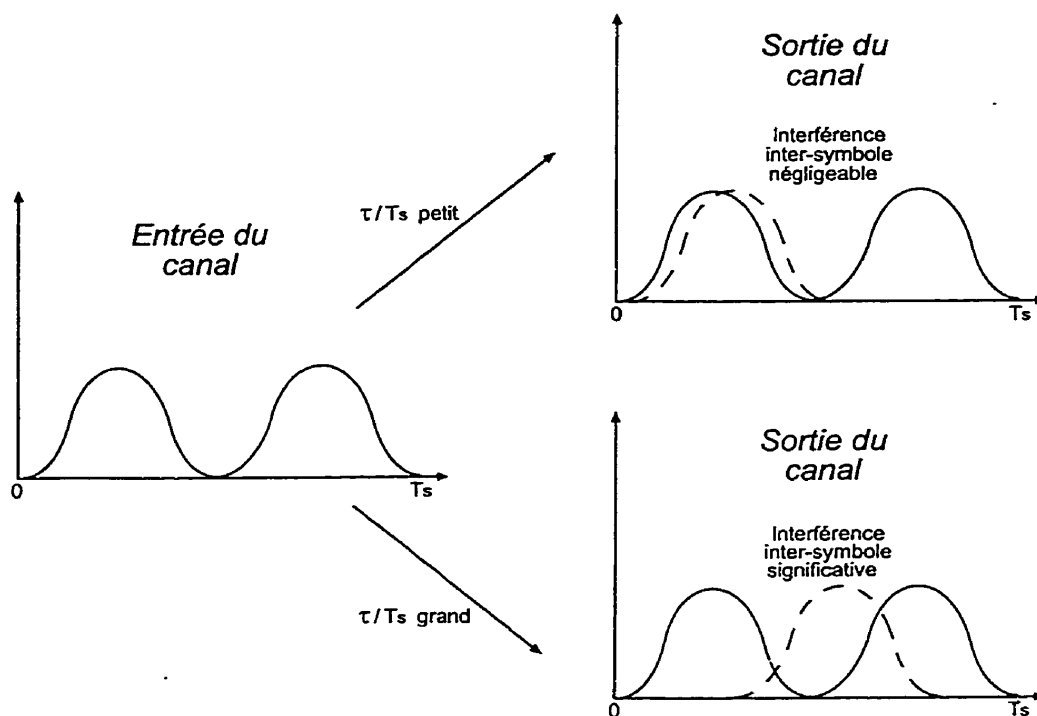


Figure 2.7: Interprétation temporelle du délai

La figure 2.8 représente le comportement fréquentiel du même symbole de durée  $T_s$  à travers le canal. Soit  $B_s$  la largeur de bande du signal associé au symbole :  $B_s \approx 1/T_s$ . On note  $H(f)$  la transformée de Fourier de la réponse du canal (la transformée de Fourier d'une raie est un cosinus). L'interprétation fréquentielle est la suivante :

- $\tau/T_s$  est petit : il y a des évanouissements "plats".
- $\tau/T_s$  est grand : les évanouissements sont sélectifs en fréquence.

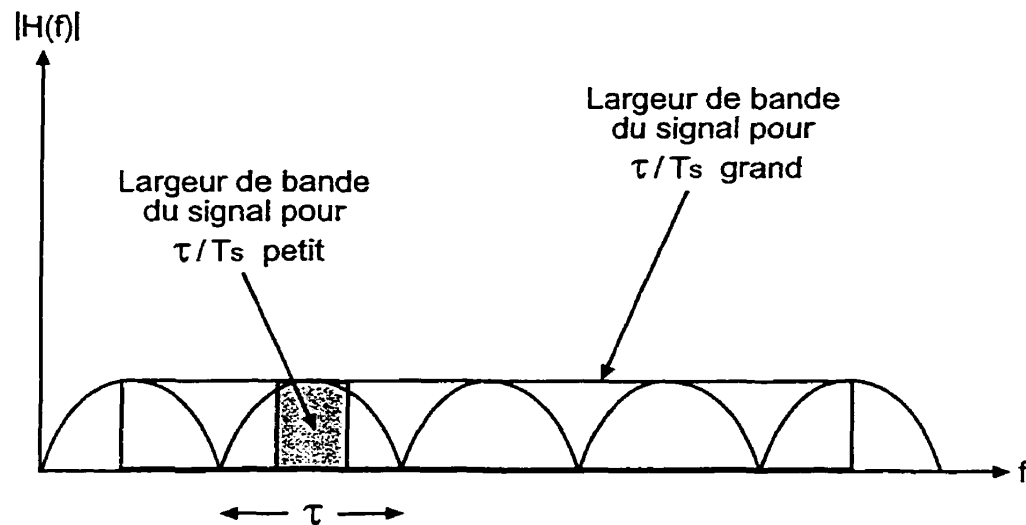


Figure 2.8: Interprétation fréquentielle du délai

On appelle bande de cohérence, la mesure statistique de la plage de fréquences sur laquelle le canal est “plat” (évanouissements plats) : c’est-à-dire qu’il ne déforme ni la phase ni l’amplitude du signal. Au contraire, la sélectivité en fréquence induit des évanouissements du signal conséquence des interférences multi-chemins.

### 2.2.1.3 Distribution de Rayleigh

Lorsque la transmission ne s’opère pas par un trajet direct, le modèle de Rayleigh est un outil élégant pour représenter les évanouissements subis par le signal. Si au contraire le trajet direct est possible, comme c’est souvent le cas pour une liaison par satellite ou en milieu rural, on peut adopter la modélisation de Rice qui donne des résultats moins pessimistes. Dans la suite de ce mémoire, on adoptera la modélisation de Rayleigh afin de se placer dans le pire cas du canal sans-fil.

Sur la figure 2.9, il est représenté l’allure de l’enveloppe d’un signal radiomobile en milieu urbain [Hay94]. Les évanouissements profonds et rapides sont très bien caractérisés par le modèle de Rayleigh. Typiquement, ces évanouissements

interviennent aux demi-longueurs d'onde.

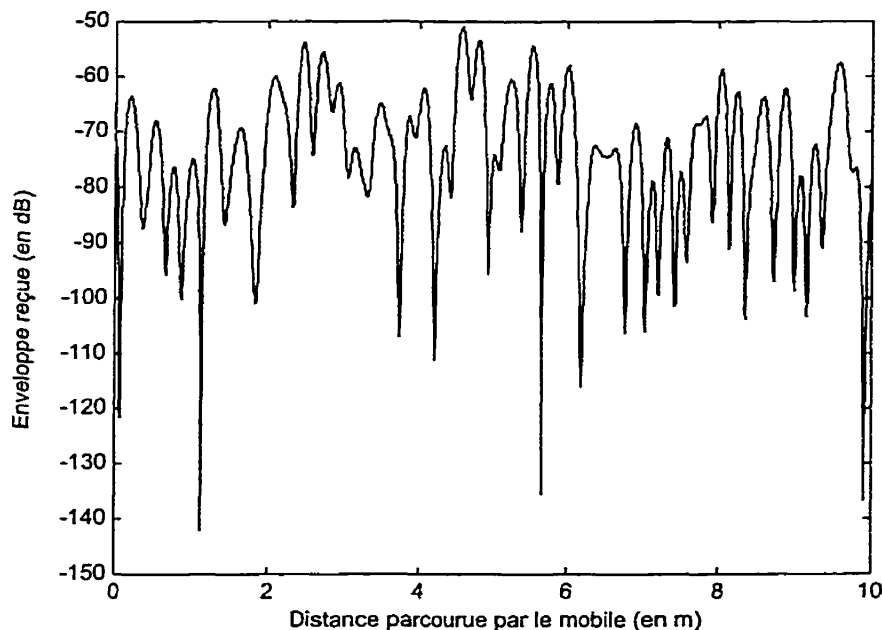


Figure 2.9: Allure d'un signal reçu en milieu urbain

Dans ce modèle, on caractérise statistiquement le signal reçu par sa densité de probabilité [Jak74]. On considère que les composantes en phase et en quadrature des différents échos répondent à une loi gaussienne de moyenne nulle du fait de leur grand nombre. On peut aussi décrire le signal par son enveloppe complexe. La phase est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi]$ . Pour l'amplitude, on utilise la densité de probabilité de Rayleigh donnée par l'expression suivante :

$$p(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) & \text{pour } 0 \leq r < +\infty \\ 0 & \text{pour } -\infty < r \leq 0 \end{cases}$$

où  $\sigma^2$  est la puissance moyenne reçue. L'allure de cette distribution est représentée à la figure 2.10.

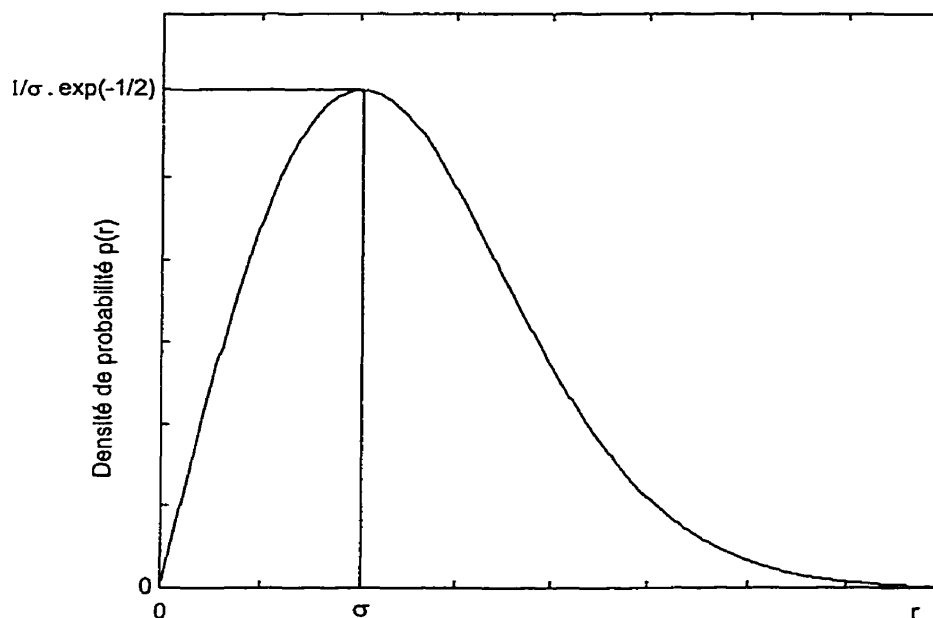


Figure 2.10: Distribution de Rayleigh

### 2.2.2 Le bruit

En plus de toutes les altérations concernant le niveau de puissance et les délais de réception du signal s'ajoutent toutes les perturbations électromagnétiques hertziennes mais aussi celles causées par les appareils électroniques eux-mêmes. On peut regrouper les sources de bruit radioélectrique en deux grandes familles conformément au tableau 2.1 [Duf76].

Parmi les sources naturelles de bruit terrestres, ce sont les phénomènes atmosphériques tels que les orages qui dominent jusqu'à une fréquence de 100 MHz. Pour ce qui concerne les fréquences supérieures (jusqu'à 1 GHz), c'est le bruit cosmique qui est dominant. Mais le bruit d'origine humaine demeure le plus important, surtout dans les régions industrialisées. Les rayonnements parasites qui sont la cause de cette pollution électromagnétique proviennent de tous les types d'appareils électriques et électroniques, qu'ils soient personnels, industriels, scientifiques ou médicaux. Pour ce qui est du bruit inhérent aux appareils de communications, il est dû à l'agitation thermique des électrons dans les composants.



Tableau 2.1: Les différentes sources de bruit radioélectrique

Origine						
Naturelles		Humaines				
Terrestre	Extra-terrestre	Électronique de communication	Puissance électrique	Machines outils	Systèmes d'allumage	Industrie et particuliers
Atmosphérique Précipitations	Soleil Cosmique Étoiles	Émission Relais Navigation Radar	Générateur Conversion Transmission Distribution	Équipements Appareils Bureautique Transporteurs	Véhicules Engins Outils	Radiateur Soudeur Ultrasons Éclairage

Le spectre de ce bruit s'étale jusqu'à des fréquences pouvant aller jusqu'à quelques GHz et la puissance ici mise en jeu est de l'ordre de :  $P = kTB$  où  $k$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température et  $B$  est la largeur de bande considérée.

On modélise généralement le bruit par un bruit blanc gaussien additif. L'adjectif blanc est en rapport avec la lumière blanche qui contient une égale proportion des couleurs visibles. Il s'agit d'un processus aléatoire dont les réalisations à des instants distincts sont indépendants et dont la fonction de densité de probabilité est gaussienne de moyenne nulle et de variance  $N_o/2$ . Par analogie,  $N_o = kT$  en Watt/Hz. Le spectre de densité de puissance bilatérale du bruit blanc gaussien additif est représenté à la figure 2.11. Ce modèle n'est pas réaliste car la puissance du bruit est ici théoriquement infinie. En fait, ce modèle est applicable dès lors que le bruit a une largeur de bande supérieure à celle du système lui-même [Hay94].

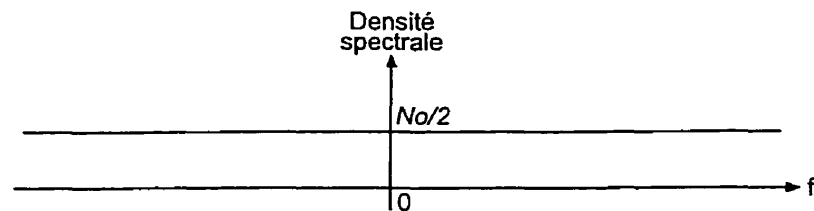


Figure 2.11: Spectre du bruit blanc gaussien additif

## 2.3 Modulations numériques

### 2.3.1 Introduction

Les systèmes de communication modernes utilisent des techniques de modulation numériques. La mise en oeuvre de ces dernières a été rendue possible par les progrès en intégration à très grande échelle (VLSI) et grâce aux processeurs dédiés au traitement des signaux (DSP). La modulation numérique présente de nombreux avantages vis-à-vis de la modulation analogique. Parmi ceux-ci on compte :

- meilleure immunité au bruit
- robustesse vis-à-vis des imperfections du canal
- multiplexage facilité
- intégration de codes correcteurs d'erreurs

Le modulateur numérique est une interface numérique/analogique : pour transmettre  $b$  bits durant un intervalle de transmission  $T$ , le modulateur sélectionne un signal analogique parmi une constellation de  $2^b$  signaux de durée  $T$ . Le message modulé peut être représenté comme une succession de symboles où chaque symbole peut prendre  $M = 2^b$  états finis.

De nombreuses méthodes de modulation numériques peuvent être adoptées : cohérente ou non cohérente (c'est-à-dire avec ou sans référence de phase), binaire ou  $M$ -aire, orthogonale ou non-orthogonale... On distingue : les modulations d'amplitude ASK (Amplitude Shift Keying), de phase PSK (Phase Shift Keying) et les modulations de fréquence FSK (Frequency Shift Keying). Certaines modulations sont mixtes : QAM (Quadrature Amplitude Modulation). Il n'existe pas de méthode de modulation "passe-partout" applicable à tous les systèmes de communications. Le choix d'une technique de modulation par rapport à une autre se fait souvent de manière empirique, en faisant des compromis entre l'efficacité spectrale

et le niveau de puissance requis. On retiendra que l'efficacité spectrale, c'est-à-dire le débit transité dans une largeur de bande donnée, ne peut être supérieure à la borne  $C_{Shannon}$  (bits/s/Hz) [Sk188] introduite par Shannon pour une communication d'un point à un point :

$$C = \frac{Q}{B} \leq C_{Shannon} = \log_2(1 + SNR) \quad (2.2)$$

où  $C$  est l'efficacité spectrale,  $C_{Shannon}$  est la capacité,  $B$  est la largeur de bande,  $Q$  est le débit binaire et  $SNR$  est le rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit dans le bande considérée.

### 2.3.2 Représentation géométrique des signaux

Afin de faciliter la visualisation de l'ensemble des  $M$  signaux de modulation  $\{s_1, s_2, \dots, s_M\}$ , il est avantageux de considérer ces signaux comme des points dans un espace vectoriel. Cette représentation géométrique permet d'évaluer facilement les performances d'une technique de modulation. Chaque signal de modulation est alors décrit par un jeu de coordonnées dans un diagramme de constellations.

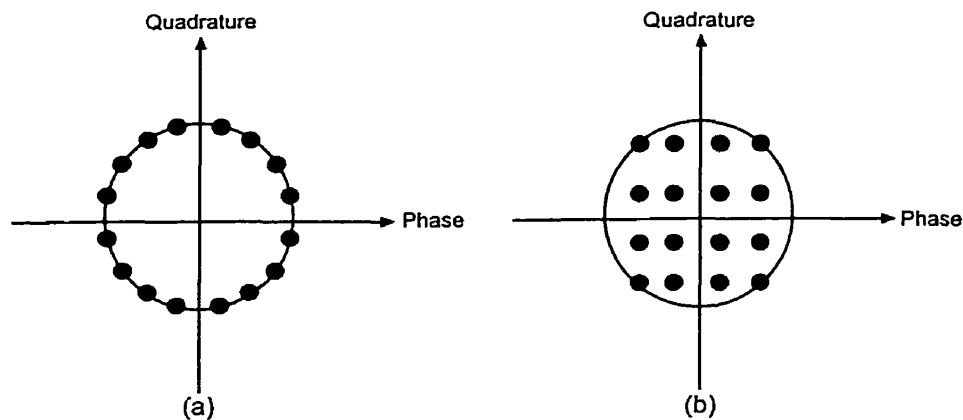


Figure 2.12: Constellations de signaux pour  $M=16$ , (a) 16-PSK (b) 16-QAM

À partir de cette représentation, on peut exprimer grâce à la “borne union”, une limite supérieure de la probabilité d’erreur en fonction du bruit (considéré gaussien). Soit  $P_e(i)$  la probabilité qu’un récepteur optimal fasse une erreur de symbole quand le signal  $s_i$  est envoyé. On a [Hay94] :

$$P_e(i) \leq \sum_{j=1, j \neq i}^M Q\left(\frac{d_{ij}}{\sqrt{2N_o}}\right) \quad (2.3)$$

où  $d_{ij}$  est la distance euclidienne entre le  $i$ -ème vecteur et le  $j$ -ème vecteur et la fonction  $Q(x)$  est définie de la manière suivante :

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (2.4)$$

Si les  $M$  signaux de modulation sont équiprobables, alors la probabilité moyenne d’erreur de symbole se calcule par :

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_e(i) \quad (2.5)$$

### 2.3.3 Modulation BPSK

Comme dans la suite du mémoire nous utiliserons principalement la modulation BPSK (binary Phase Shift Keying), nous la présentons ici plus en détail. La constellation de signaux est composée de 2 signaux  $s_1(t)$  et  $s_0(t)$  en opposition de phase qui représentent respectivement les symboles binaires 1 et 0. Physiquement, la modulation BPSK correspond aux signaux suivants d’énergie  $E_s$  et de durée  $T_s$  :

$$0 \leq t \leq T_s \quad \begin{cases} s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cdot \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \\ s_0(t) = -\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cdot \cos(2\pi f_c t + \theta_c) \end{cases}$$

Pour s’assurer que chaque symbole transmis contient un nombre entier de cycles de la porteuse sinusoïde, la fréquence de la porteuse  $f_c$  est un multiple entier de  $1/T_s$ .

Si on pose :  $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t)$  pour  $0 \leq t \leq T_s$ , alors la constellation de signaux BPSK peut être exprimée par :  $\{\sqrt{E_s}\phi(t), -\sqrt{E_s}\phi(t)\}$ . La figure 2.13 représente géométriquement les 2 signaux.

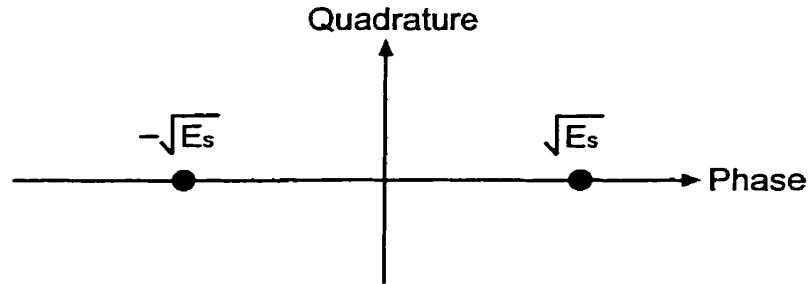


Figure 2.13: Diagramme de constellation BPSK

On peut calculer la probabilité moyenne d'erreur de symbole pour une modulation BPSK. Il s'agit en fait de la borne supérieure donnée par l'équation 2.3 :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_o}}\right) \quad (2.6)$$

Il est souvent pratique de modéliser l'information binaire selon un train de signaux "carrés"  $m(t)$  qui peut prendre pour valeur -1 ou +1. Ainsi le signal BPSK peut être décrit par :

$$S_{BPSK}(t) = m(t) \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

Vient la représentation complexe :

$$S_{BPSK}(t) = \text{Re}\{g_{BPSK}(t) \sqrt{\exp(j2\pi f_c t)}\}$$

avec  $g_{BPSK}(t)$  l'enveloppe complexe du signal donné par :

$$\frac{2E_s}{T_s} m(t) \exp(j\theta_c)$$

La densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe vaut [Hay94]:

$$P_{gBPSK}(f) = 2E_s \left( \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right)^2$$

L'allure de cette densité est donnée par la figure 2.14. Pour simplifier, nous avons représenté seulement les fréquences positives. La densité est normalisée par rapport à  $2E_s$  et la fréquence est normalisée par rapport au débit binaire  $1/T_s$ . L'énergie est concentrée dans le lobe principal mais les lobes secondaires ne sont pas négligeables. En fait, on peut montrer que plus on choisit une modulation avec une fonction  $g(t)$  "douce", plus les lobes secondaires sont négligeables.

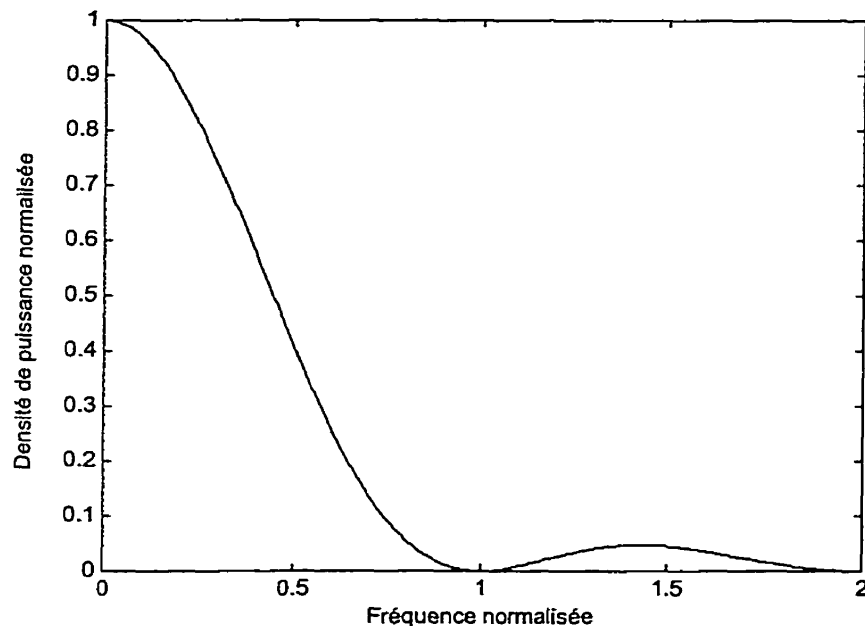


Figure 2.14: Spectre de puissance pour la modulation BPSK

## CHAPITRE 3

### CODAGE DE CANAL

Le codage de canal ou encore codage de contrôle d'erreurs est un domaine à part entière des communications numériques. Dans ce chapitre, nous introduirons des concepts de codage de contrôle d'erreurs utilisés dans la suite de ce mémoire. En particulier, nous présenterons le codage linéaire en blocs et le codage convolutionnel.

#### 3.1 Généralités

La tâche d'un concepteur de systèmes de communications numériques est de fournir les procédés, ayant un bon rapport coût/qualité, pour assurer la transmission de l'information d'un point du système avec un débit, une fiabilité et une qualité qui soient acceptables pour un utilisateur à un autre point du système. Deux paramètres primordiaux du système disponibles pour le concepteur sont : la puissance d'émission et la largeur de bande fréquentielle. Avec une estimation du bruit résiduel au niveau du récepteur, on peut calculer le rapport de puissance signal sur bruit (SNR). Nous avons vu précédemment que ce rapport déterminait les performances d'un type de modulation. Pour une valeur de SNR donné et une modulation choisie, un des seuls moyens pour améliorer la qualité de l'information est d'utiliser le codage de contrôle d'erreurs *i.e.* le codage de canal. Un autre intérêt de ce codage est de réduire le SNR pour une qualité de transmission donnée. Par la suite, nous emploierons le terme codage pour désigner le codage de canal.

Le codage ajoute de la redondance dans l'information transmise et ceci afin que le récepteur puisse détecter et même si possible corriger des erreurs. La quantité d'information ajoutée est exprimée par le taux de codage  $R$  en bits/symbole. Le taux de codage est le rapport de  $k$ , nombre de bits d'information transmis par

mot de code, sur  $n$ , le nombre total de symboles transmis par mot de code (figure 3.1). Si l'on suppose que le débit binaire  $Q$  doit rester constant, alors la redondance nous oblige à augmenter le taux de transmission à  $Q/R$  symboles/s. Si cette fois-ci, on suppose que la puissance émise est constante, alors l'énergie reçue par symbole est réduite d'un facteur  $R$ . Toutefois, la redondance doit permettre de corriger des erreurs et donc de diminuer le SNR pour une probabilité d'erreur donnée. On quantifie cette amélioration par la puissance supplémentaire requise pour qu'un système sans codage atteigne les mêmes performances. Il s'agit du gain de codage.

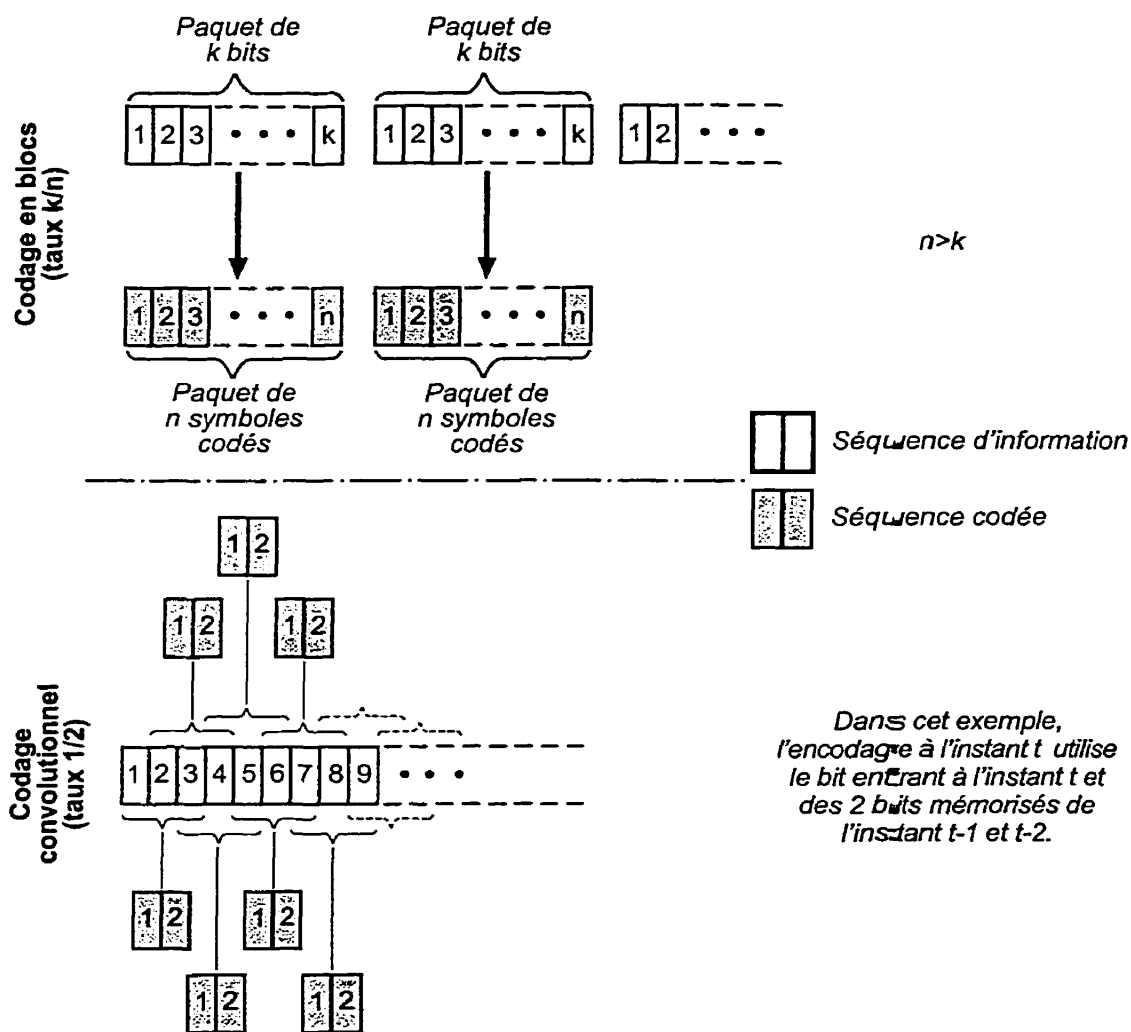


Figure 3.1: Schéma de principe des codages en blocs et convolutionnel



En 1948, Shannon a démontré qu'en codant de manière adéquate l'information, il serait possible de diminuer indéfiniment le taux d'erreur quel que soit le niveau de bruit si toutefois le débit ne dépasse pas la capacité du canal donné par l'équation 2.2 [Wic95]. Malheureusement, la théorie ne révèle pas explicitement la bonne façon de coder. Historiquement, les codes ont été répartis en deux catégories : les codes en blocs et les codes convolutionnels (figure 3.1). Les codes en blocs encodent l'information par paquets indépendamment les uns des autres. Les codes convolutionnels traitent le flux de données de manière continue.

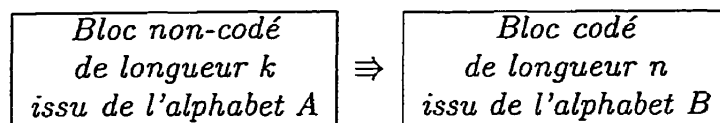
### 3.2 Codage linéaire en blocs

Les codes en blocs ont été les premiers codes étudiés. Nous présenterons seulement les codes linéaires en blocs : ce sont les plus utilisés parmi les codes en blocs car ils sont faciles à implémenter.

#### 3.2.1 Définition

Par définition, les codes en blocs forment des espaces vectoriels sur des corps finis. Bien que la théorie de Galois sur les corps finis soit essentielle pour comprendre la théorie du codage en blocs, nous allons seulement rappeler des résultats pragmatiques sans pénétrer l'atmosphère rarifiée des mathématiques abstraites.

À chaque séquence d'information constituée de  $k$  symboles issus d'un alphabet  $A$  de taille  $a$ , le code en blocs  $(n,k)$  associe une séquence codée de  $n$  symboles issus d'un alphabet  $B$  de taille  $b$  ( $a^k < b^n$ ) :



Un code en blocs  $(n,k)$  est donc un ensemble de  $a^k$  vecteurs appelés "mots de codes"

de longueur fixée  $n$ . Généralement, les alphabets  $A$  et  $B$  sont identiques et  $k < n$ . La redondance vaut alors  $(n - k)$  et le taux de codage est  $\frac{k}{n}$ . Typiquement, on utilise l'alphabet binaire  $\{0,1\}$ .

On appelle poids d'un mot de code le nombre d'éléments non nuls qu'il possède. L'ensemble de tous les poids forme la distribution de poids du code. On appelle distance de Hamming entre deux mots de code, le nombre d'éléments différents entre ces deux mots de code. La plus petite distance entre toutes les paires de mots de code distincts est appelée distance minimale du code.

Si un code possède une distance minimale  $d_{min}$ , alors un vecteur de bruit ayant  $(d_{min} - 1)$  symboles non nuls (ou moins) ne pourra pas transformer un mot de code en un autre mot de code valide. Un tel code pourra détecter la présence d'erreurs si le patron d'erreurs (le bruit) ne contient pas plus de  $(d_{min} - 1)$  erreurs. En outre, pour un décodage à maximum de vraisemblance, on montre que ce code peut corriger  $t$  erreurs avec  $t \leq (d_{min} - 1)/2$  [Wic95].

### 3.2.2 Représentation linéaire

À tout code linéaire en blocs  $(n,k)$ , on peut associer une matrice génératrice  $G$  de taille  $k \times n$  et de rang  $k$ . Soit  $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_k]$  le vecteur des  $k$  symboles d'information, on peut alors obtenir le mot de code associé  $\bar{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  par l'encodage matriciel suivant :

$$\bar{Y} = \bar{X}G$$

On peut réduire  $G$  par de simples manipulations à la forme systématique suivante :

$$G = \left( I_k \quad P \right)$$

où  $I_k$  est la matrice identité  $k \times k$  et  $P$  est la matrice de parité de taille  $k \times (n - k)$ . Dans ce cas, les  $k$  premiers symboles de  $\bar{Y}$  représentent le vecteur  $\bar{X}$  et les autres  $(n - k)$  sont les symboles de parité, ce qui met en évidence la redondance.

Pour toute matrice  $G$  de taille  $k \times n$  et de rang  $k$ , il existe une matrice  $H$  dite de “contrôle”, de taille  $(n - k) \times n$  de rang  $(n - k)$  telle que :

$$GH^\dagger = 0$$

où  $\dagger$  désigne la transposition.  $H$  peut aussi écrire de façon systématique :

$$H = \begin{pmatrix} -P^\dagger & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Si  $\bar{Y}$  est un mot de code spécifié par  $G$ , alors  $\bar{Y}H^\dagger = \bar{X}GH^\dagger = 0$ . Cette propriété est très utile pour le décodage. Soit  $\bar{n}$  le vecteur de bruit accompagnant le vecteur  $\bar{Y}$  transmis dans le canal. Soient  $\bar{r}$  le vecteur reçu et  $\bar{s}$  le syndrome défini par :  $\bar{s} = \bar{r}H^\dagger$ . On obtient facilement :  $\bar{s} = \bar{n}H^\dagger$ . Le syndrome ne dépend que du bruit : c'est un indicateur d'erreurs de transmission.

$$\begin{aligned} \bar{s} = 0 &\Rightarrow \text{Pas de composantes de bruit.} \\ \bar{s} \neq 0 &\Rightarrow \text{Présence d'erreurs dans le mot reçu.} \end{aligned}$$

Il est alors possible d'associer à un syndrome un patron d'erreur. On peut construire une table de décodage. Un problème étant que plusieurs patrons d'erreurs produisent le même syndrome.

### 3.2.3 Codes cycliques

Nous présentons ici le cas de codes cycliques linéaires. Il est à noter que des codes non-linéaires peuvent être cycliques mais ils ont une structure moins “riche”. Les codes cycliques sont très utilisés en pratique car leur implémentation simple grâce à des registres à décalage pénalise peu le débit. Par ailleurs, on compte parmi certaines familles de codes cycliques, les codes en blocs les plus puissants, entre autres les codes de Golay, les codes BCH et les codes de Reed-Solomon.

Des codes sont dit cycliques si tout déplacement cyclique des éléments d'un mot de code donne aussi un mot de code. Outre la représentation matricielle classique, il existe une représentation polynômiale pour les codes cycliques. Pour un code cyclique  $(n, k)$ , les mots de code sont écrits comme des coefficients d'un polynôme  $Y(x)$  de degré au plus  $n - 1$ .

$$\tilde{Y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, y_0) \Rightarrow Y(x) = y_{n-1}x^{n-1} + y_{n-2}x^{n-2} + \dots + y_1x + y_0$$

À l'instar des matrices génératrices, il existe des polynômes générateurs. Le polynôme générateur  $g$  d'un code cyclique  $(n, k)$  est un polynôme de degré  $(n - k)$  qui divise  $(1 + x^n)$ . Il existe bien sûr une forme systématique pour un tel polynôme. Soit  $U(x)$  le polynôme message de degré au plus  $(k - 1)$  alors le mot de code correspondant s'écrit sous la forme du polynôme :

$$Y(x) = U(x)g(x)$$

Tout comme pour les autres codes linéaires, on peut utiliser les syndromes pour corriger ou détecter les erreurs des codes cycliques. Le polynôme syndrome  $S(x)$  est de degré au plus  $(n - k - 1)$ . Soit  $R(x)$  un polynôme reçu après le passage dans le canal,  $S(x)$  est le reste de la division euclidienne de  $Z(x)$  par  $g(x)$ . Si  $R(x)$  est un mot de code, alors  $S(x)$  est nul. L'avantage de la représentation polynômiale réside dans l'implémentation facile de multiplications ou de divisions de polynômes sous forme de circuits logiques et de registres à décalage.

Les CRC (Cyclic Redundancy Check) constituent un cas assez particulier parmi les codes cycliques. Ce sont en fait des codes détecteurs d'erreurs très utilisés pour les communications informatiques notamment. Ces codes CRC sont standardisés : ils sont obtenus à partir du raccourcissement de codes cycliques. Toutefois, il est possible d'utiliser le même codeur et décodeur que pour le code cyclique originel. Sans rentrer dans les détails, on obtient un CRC  $(n - j, k - j)$  à partir d'un code

cyclique systématique  $(n,k)$  en supprimant  $j$  bits parmi les mots de code qui ont  $j$  bits nuls. Comme les codes raccourcis diminuent le taux de codage, les codes raccourcis ont un pouvoir de détection et de correction qui est au moins aussi bon que les codes originels. Les CRC ont d'ailleurs une excellente capacité à détecter les salves d'erreurs qui sont fréquentes dans les circuits "hardware" ou les canaux à évanouissements multi-chemins. Par exemple, le CRC-ANSI (American National Standards Institute) détectent toutes les salves d'erreurs de 16 bits. Ainsi, les systèmes communiquant par trames d'information (réseaux informatiques, trames de voix téléphoniques...) contrôlent les erreurs en ajoutant un CRC dans la trame et parfois le combinent avec une méthode de retransmission de requêtes (si une salve d'erreurs intervient lors de la première transmission, on peut espérer que la retransmission atteigne le récepteur sans erreurs) [Wic95].

### 3.3 Codage convolutionnel

Les codes convolutionnels sont apparus un peu plus tard que les codes en blocs et ils ont eu un peu plus de mal à s'imposer car ils sont plus difficiles à analyser. Pourtant, ils sont extrêmement performants. À l'inverse des codes en blocs, ils reposent sur un traitement continu de l'information.

#### 3.3.1 Définition

La figure 3.2 illustre la structure générale d'un code convolutionnel. Le flux d'information à coder passe par un registre à décalage de  $K$  étages ( $K$  est appelé la longueur de contrainte). Chaque sous-registre contient quant à lui  $k$  bits.  $n$  additionneurs sont reliés à des cases mémoires selon un schéma précis établi par des vecteurs de connexions ou fonctions génératrices. Les sorties de chacun des additionneurs sont les symboles codés.

Lorsque  $k$  nouveaux bits d'information parviennent au codeur, le contenu des registres à décalage se décalent de  $k$  positions et on obtient à nouveau en sortie  $n$

symboles codés. Le taux de codage est donc  $\frac{k}{n}$ .

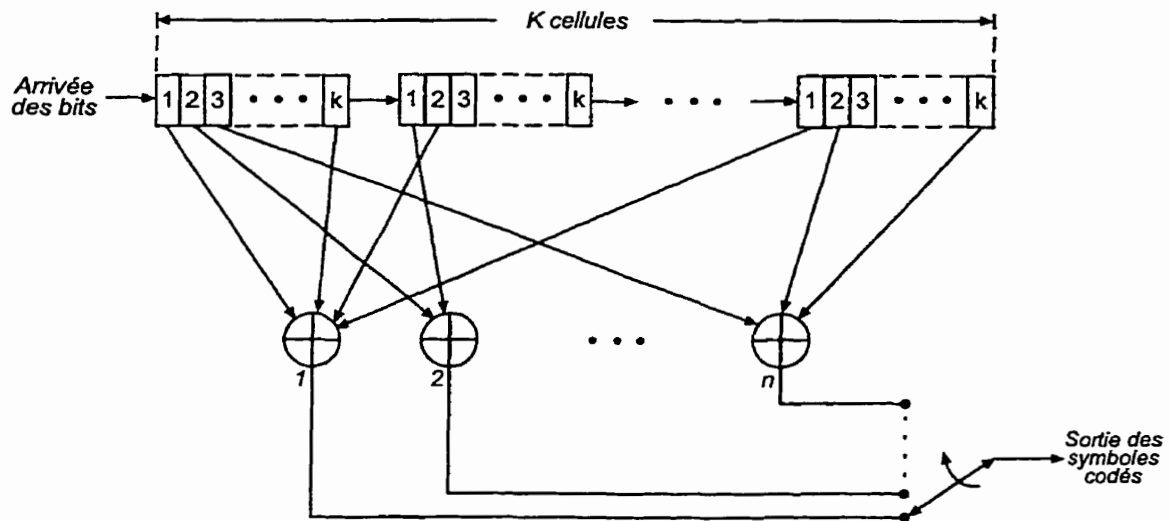


Figure 3.2: Schéma-bloc d'un codeur convolusionnel

Toutefois, pour la plupart des applications, on utilise des codes convolusionnels simples avec un taux de codage  $1/n$  dont un exemple est représenté par la figure 3.3. Ces codes utilisent des décalages de 1 bit au lieu de  $k$  bits comme précédemment.

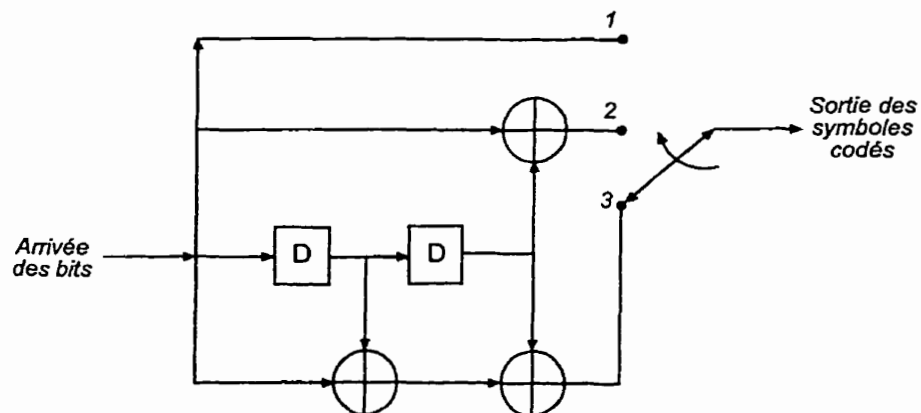


Figure 3.3: Exemple de codeur convolusionnel de taux  $1/3$  :  $G=[4,5,7]$

Pour le schéma de la figure 3.3, on a utilisé des opérateurs de retard  $D$  au lieu de registres à décalage, mais cela ne change rien fondamentalement. Dans cet exemple,

la longueur de contrainte vaut  $K = 3$ , et le taux de codage est de  $1/3$ . Dans ce cas de modélisation, on définit la mémoire du code  $\mu = K - 1$  : plus la mémoire est élevée, plus le codage est long ainsi que le décodage. Chaque symbole codé dépend du bit d'entrée présent et des  $\mu$  précédents. La mémoire du code présentée est de 2. On peut remarquer que notre exemple fournit un code systématique, c'est-à-dire qu'il répète à la sortie un bit de l'entrée. Cela laisse apparaître la redondance ajoutée par le codage.

Ce code convolutionnel peut être entièrement défini par les coefficients de connexions entre les cellules et les additionneurs. Une connexion est représentée par un "1" alors qu'un "0" signifie que l'additionneur ne prend pas en compte la valeur de la cellule. En lisant ces coefficients de l'entrée vers la sortie, on forme  $n$  vecteurs de connexions de longueur  $K$ . Ici, on obtient les 3 vecteurs générateurs  $G_1 = (1, 0, 0)$ ,  $G_2 = (1, 0, 1)$  et  $G_3 = (1, 1, 1)$ . En fait, on utilise plus facilement la notation octale : 4, 5 et 7.

L'utilisation de l'opérateur de retard permet une représentation sous forme polynômiale. Le paramètre  $D$  devient alors un indicateur de temps. Les vecteurs générateurs deviennent polynômes générateurs :  $G_1(D) = 1$ ,  $G_2(D) = 1 + D^2$  et  $G_3 = 1 + D + D^2$ . L'entrée s'écrit aussi sous forme polynômiale : les indices élevés correspondent aux instants les plus récents de l'arrivée de l'information. Par exemple, la séquence binaire  $U = (...1101)$  s'écrit  $U(D) = D^3 + D^2 + 1$ . On obtient alors la sortie polynômiale correspondante  $Y(D) = U(D)[G_1(D), G_2(D), G_3(D)]$ .

Il existe d'autres opérations mathématiques pour représenter le codage. De façon similaire au codage en blocs, on peut utiliser le produit matriciel. Toutefois, théoriquement, les matrices ici ne sont pas de taille finie. En pratique, on ne code jamais de séquence infinie ! On peut aussi faire usage de la réponse impulsionnelle du code convolutionnel : il s'agit de la séquence de symboles codés obtenues à partir de la séquence d'entrée (...0...001). Or la séquence de sortie est obtenue par combinaison linéaire des entrées présentes et passées. Cette séquence peut alors

s'écrire comme le produit de convolution de la séquence d'entrée et de la réponse impulsionnelle du code : d'où le nom des codes convolutionnels.

### 3.3.2 Diverses représentations

#### 3.3.2.1 Le diagramme d'état

Les codeurs convolutionnels sont des machines linéaires à nombre d'états fini, ce qui permet de représenter ces codes par ce que l'on appelle un diagramme d'état. La figure 3.4 présente ce diagramme dans le cas particulier introduit précédemment.

Les différents états sont définis par les  $(K - 1)$  valeurs des opérateurs de retard. Pour un schéma avec un registre à décalage, on utilisera les  $(K - 1)$  bits les plus récemment entrés dans le registre à décalage (le premier bit de description de l'état correspond au dernier bit à être entré). Il existe donc  $2^{K-1}$  états différents pour un code binaire de taux  $1/n$ . Dans le schéma, les états sont représentés par des cercles alors que les transitions sont représentées par des flèches. La séquence binaire associée à une flèche est la séquence générée par le code. Le bit d'entrée  $e$  dans le codeur définit la flèche sortante empruntée.

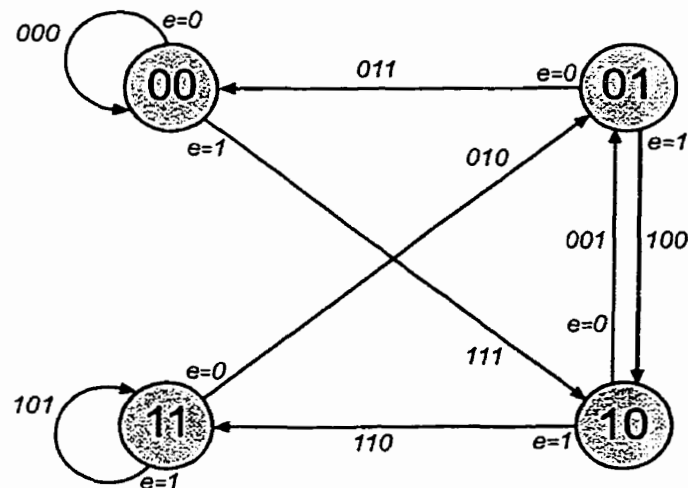


Figure 3.4: Diagramme d'état du code  $G=[4,5,7]$



### 3.3.2.2 L'arbre d'encodage

La représentation en arbre d'encodage est mieux adaptée au décodage que le diagramme d'état. En effet, le décodage consiste à trouver le chemin le plus probable à l'intérieur d'un arbre dont le nombre de branches croît de manière géométrique. La figure 3.5 représente l'arbre correspondant à l'exemple de la figure 3.3. On remarquera le chemin en gras qui correspond à la séquence d'entrée 0111 (Un bit d'entrée "0" implique une montée dans l'arbre, alors qu'un bit d'entrée "1" implique une descente). Les séquences codées générées sont indiquées sur chaque branche.

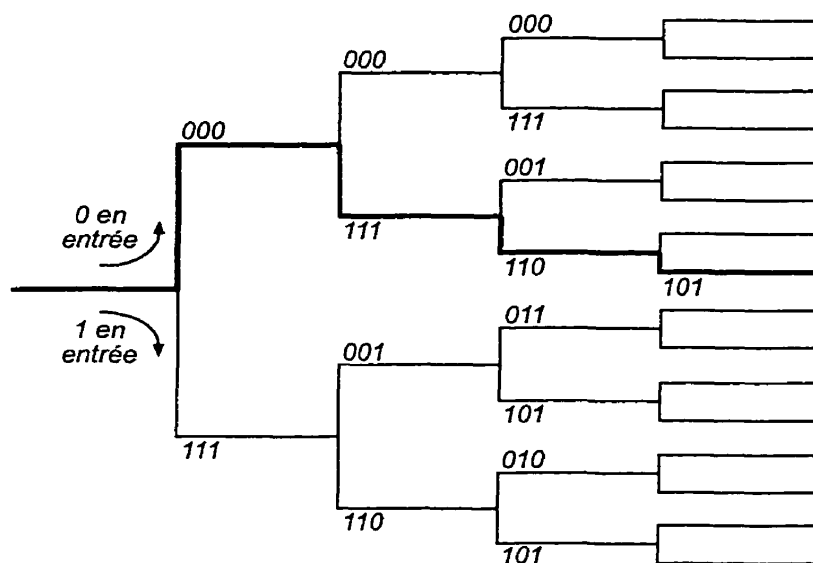
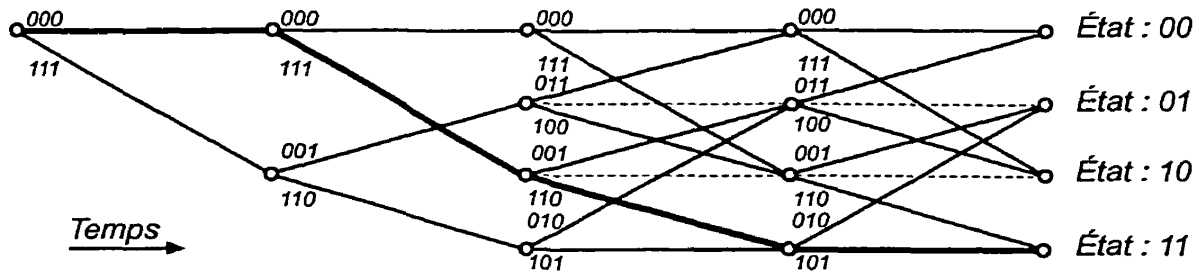


Figure 3.5: Arbre d'encodage du code  $G=[4,5,7]$

Toutefois, la représentation en arbre devient très vite inutilisable du fait du nombre croissant de branches.

### 3.3.2.3 Le treillis d'encodage

Afin de combiner les avantages de la représentation en diagramme d'états et en arbre, on a recours à la représentation en treillis. Celle-ci tient compte à la fois des différents états et de la progression temporelle. La figure 3.6 représente le treillis de l'exemple précédent avec le chemin de la séquence d'entrée 0111 en gras.

Figure 3.6: Treillis du code  $G=[4,5,7]$ 

Quelques notions de distances de Hamming propres aux codes convolutionnels peuvent être définies grâce au treillis.

- *La distance minimale* :  $d_{min}(p)$

C'est la distance minimale entre les chemins de deux mots de codes de longueur  $p$  branches qui ont leur première branche différente.

- *La distance libre* :  $d_{libre}$

C'est la distance minimale entre deux mots de code de longueur infinie qui ont leur première branche différente. On a :  $d_{libre} = \lim_{p \rightarrow \infty} d_{min}(p)$ .

- *La distance de colonne* :  $d_c(p)$

C'est le poids minimal d'un mot de code calculé sur les  $p$  premières branches dont la première est non nulle.

### 3.3.3 Décodage optimal des codes convolutionnels

Cette section a pour but d'introduire les concepts de décodage optimal des codes convolutionnels. Il existe d'autres types de codages (séquentiel, seuil) mais nous n'en ferons pas usage.

#### 3.3.3.1 Décodage de Viterbi

Le décodage optimal est connu sous le nom de son inventeur Viterbi. Il existe une correspondance unique entre la séquence de symboles codés et la séquence

d'information, cette séquence correspondant elle-même à un chemin dans le treillis. L'objectif du décodeur est de maximiser la vraisemblance d'un chemin sachant que l'on a reçu une séquence codée bruitée.

En termes mathématiques, le décodeur détermine le mot de code  $\bar{Y}$  le plus probablement transmis sachant qu'il a été reçu la séquence codée bruitée  $\bar{R}$  :

$$P(\bar{Y}|\bar{R}) \geq P(\bar{Y}'|\bar{R}) \quad \forall \bar{Y} \neq \bar{Y}'$$

En utilisant l'équiprobabilité des mots de code et la règle de Bayes pour les probabilités conditionnelles, on obtient la règle de maximum de vraisemblance :

$$P(\bar{R}|\bar{Y}) \geq P(\bar{R}|\bar{Y}') \quad \forall \bar{Y} \neq \bar{Y}'$$

Pour un code de taux  $1/n$ , un mot de code de longueur  $L$  est représenté par le vecteur :  $\bar{Y} = (y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}, y_{1,0}, \dots, y_{L-1,n-1})$ . La séquence bruitée de symboles codés correspond au vecteur :  $\bar{R} = (r_{0,0}, r_{0,1}, \dots, r_{0,n-1}, r_{1,0}, \dots, r_{L-1,n-1})$ . Si on suppose que le canal de transmission est discret sans mémoire, on peut écrire :

$$P(\bar{R}|\bar{Y}) = \prod_{i=0}^{L-1} \prod_{j=0}^{n-1} p(r_{i,j}|y_{i,j})$$

En appliquant une fonction logarithmique à l'expression précédente, on obtient une métrique additive :

$$\log (P(\bar{R}|\bar{Y})) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{n-1} \log (p(r_{i,j}|y_{i,j})) \quad (3.1)$$

L'équation 3.1 définit une métrique cumulative sur  $L$  branches du treillis. Le décodage de Viterbi est une procédure optimale qui consiste à calculer les métriques de tous les chemins convergeant à chaque état pour tous les niveaux du treillis. De tous les chemins qui convergent à un état donné, on ne garde que celui de meilleure

métrique (survivant) et on élimine les autres. Cet algorithme est dit ACS (Add Compare Select).

De manière générale, on essaie de démarrer et de terminer dans un même état du codeur. Outre la synchronisation du codage, cela permet de déterminer un unique survivant. Pour cela il est nécessaire d'ajouter une queue d'information factice au message initial.

Enfin, il est à noter que certains codes ont la particularité de causer une infinité d'erreurs au décodage avec seulement un nombre d'erreurs fini de symboles codés. Il s'agit des codes catastrophiques. On les reconnaît par le fait qu'il existe une boucle de poids zéro autre que la branche qui boucle sur l'état 0 dans le diagramme d'états. Nous éviterons de tels codes.

### 3.3.3.2 Procédure CSA

Il existe une simplification du décodage de Viterbi sans perte de performance, pour les codes doublement complémentaires [SF98] [HCN99]. Un code convolutionnel de taux  $1/n$  est doublement complémentaire si chacun de ses  $n$  générateurs est connecté à la première et à la dernière cellule du registre à décalage.

Un code binaire de taux  $1/n$  et de mémoire  $\mu$  est décrit par ses  $n$  générateurs :

$$G^{(i)} = (g_0^{(i)}, g_1^{(i)}, \dots, g_\mu^{(i)}) \quad i = 1 \dots n$$

La double complémentarité nous permet d'écrire :  $g_0^{(1)} = g_0^{(2)} = \dots = g_0^{(n)} = 1$  et  $g_\mu^{(1)} = g_\mu^{(2)} = \dots = g_\mu^{(n)} = 1$ . Par conséquent, les séquences de  $n$  symboles de deux branches, convergeant vers un même état du treillis ou quittant un même état du treillis, sont complémentaires l'une de l'autre. Ceci est illustré par la figure 3.7 pour le code  $G=[5,7]$ .

On peut diviser le treillis du code précédent à 4 états en deux sous-treillis à deux états, appelés papillons, comme le montre la figure 3.8. De manière générale

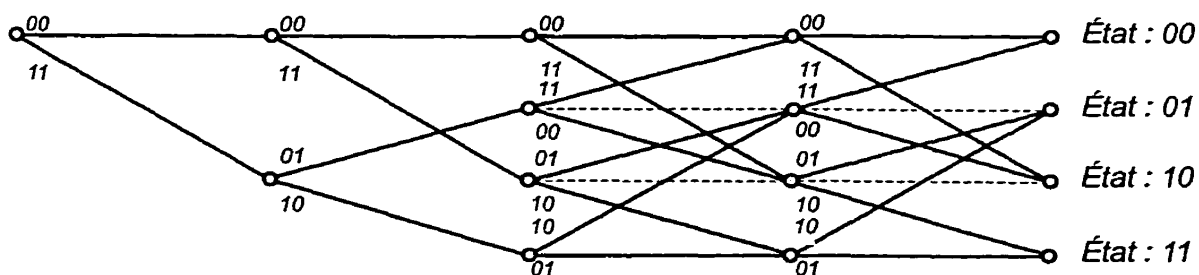


Figure 3.7: Treillis du code doublement complémentaire  $G=[5,7]$

pour un code de mémoire  $\mu$ , il est possible de diviser le treillis principal à  $2^\mu$  états en  $2^{\mu-1}$  papillons à 2 états. On observe que pour chaque sous-treillis, les symboles sur les branches parallèles sont identiques et sont complémentaires aux symboles des branches croisées. On peut montrer que le calcul des métriques est simplifié puisqu'il suffit de déterminer une métrique pour une branche de chaque papillon puis déduire les autres en prenant l'opposé (pour les branches de nature différente) ou la même valeur (pour la branche homologue). On a alors tout intérêt à procéder au décodage en travaillant sur chaque papillon plutôt que sur le treillis entier, et ce afin de minimiser les calculs.

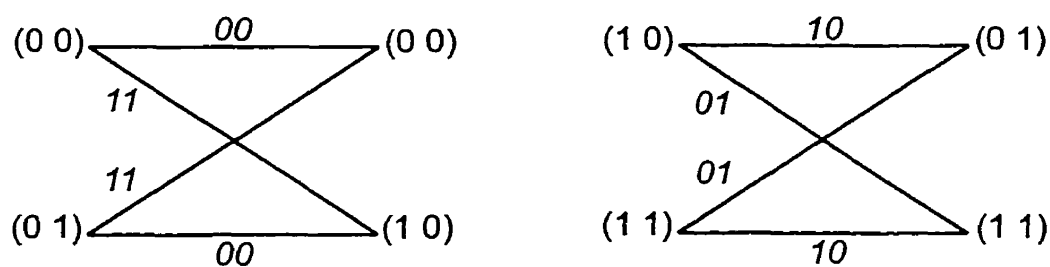


Figure 3.8: Sous-treillis du code doublement complémentaire  $G=[5,7]$

La figure 3.9 explicite une représentation générale et montre la structure élégante d'un papillon. Chaque état est désigné par  $\mu$  bits. Or vu la complémentarité du code, on en déduit que deux états d'un même papillon à l'instant  $t$  diffèrent au niveau du dernier bit, et que deux états d'un même papillon à l'instant  $t + 1$  diffèrent au niveau du premier bit : on peut donc identifier les états par un bit.

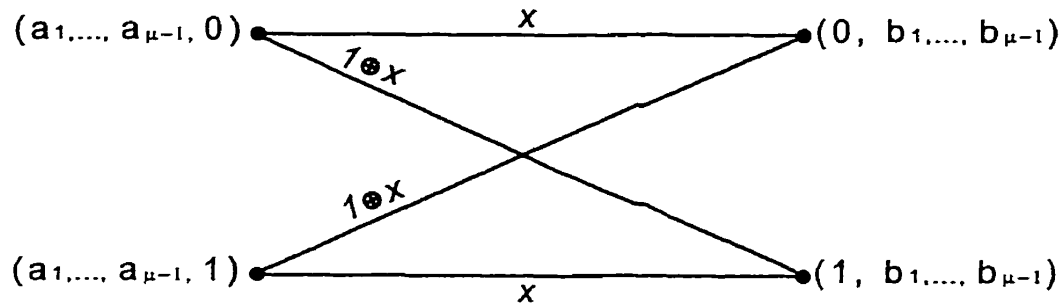


Figure 3.9: Représentation en papillon

L'algorithme CSA (Compare Select Add) consiste à comparer la métrique de branche, calculée pour la transition de l'instant  $t$  à  $t+1$ , avec les métriques générales déterminées à l'instant  $t$  (aux entrées du papillon), choisir la meilleure branche et enfin mettre à jour les métriques générales à l'instant  $t+1$ .

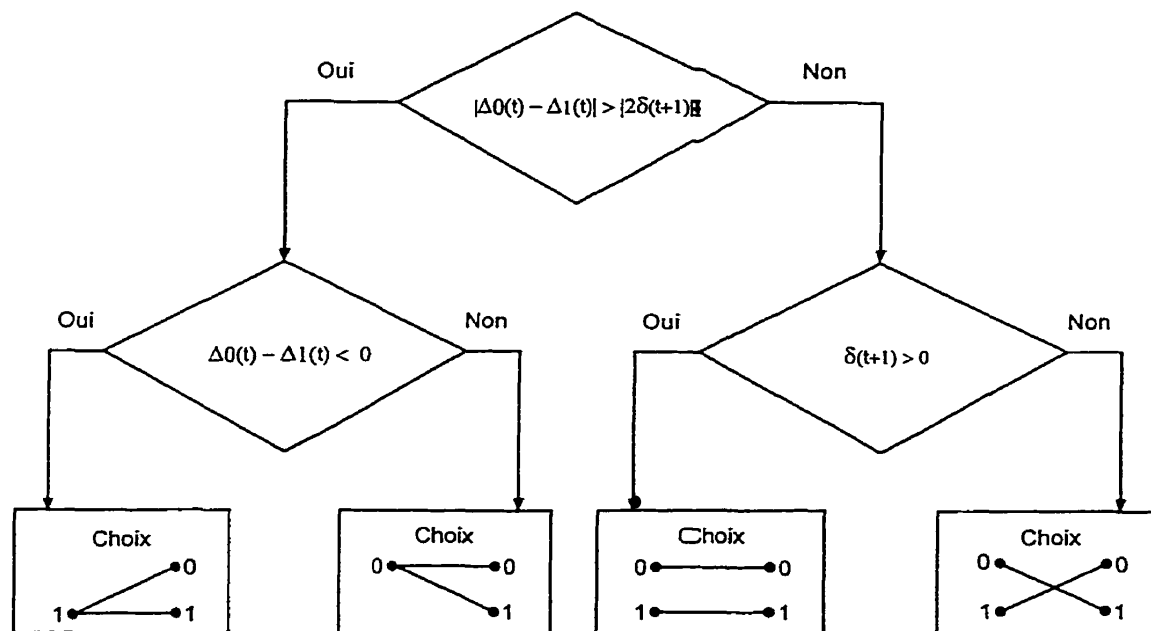


Figure 3.10: Algorithme CSA

La figure 3.10 présente les différents phases de l'algorithme CSA pour un papillon dans le cas d'une maximisation de métrique [HCN99]. Un noeud à  $t+1$  est atteint par deux branches originaires de l'instant  $t$  : l'une décrivant un bit d'entrée 0 et

l'autre un bit d'entrée 1. On notera  $\Delta_i(t)$  la métrique générale à l'instant  $t$  du noeud identifié par son dernier bit  $i = 0$  ou  $1$ . Par ailleurs, la métrique de branche calculée pour une transition parallèle, de  $t$  à  $t + 1$ , sera dénommée  $\delta(t + 1)$ . L'astuce de l'algorithme réside dans le fait que l'on regarde d'abord si l'addition de la métrique de branche fait évoluer la métrique cumulée de manière notable : si oui alors on est obligé d'affiner les comparaisons en étudiant la métrique de branche, si non alors il suffit d'étudier les métriques cumulées. L'algorithme classique ACS calcule d'abord toutes les métriques générales et ensuite fait son choix.

Les algorithmes CSA et ACS ont les mêmes performances : ils sont tous les deux optimaux. L'avantage de l'algorithme CSA est de réduire la complexité du décodage. Pour un décodage CSA, on estime que la complexité est réduite d'un tiers [HCN99] par rapport au décodage classique. C'est un gain important qui peut être mis à profit pour l'ingénierie d'un système de télécommunications.

### 3.3.4 Performances

Afin d'évaluer de façon rapide les performances des codes convolutionnels, une borne supérieure sur la probabilité d'erreur a été introduite [Wic95]. Elle découle d'une propriété des probabilités qui est appelée la "borne union" :

$$P\left(\bigcup_j B_j\right) \leq \sum_j P(B_j)$$

En appliquant ce principe pour un canal à bruit blanc gaussien et un décodage à décision douce, on obtient une borne de la probabilité d'événement erreur :

$$P(e) \leq \sum_{j=d_{\text{libre}}}^{\infty} a_j P_2(j) \quad (3.2)$$

où l'ensemble  $\{a_j\}$  est la distribution de poids du code convolutionnel, et  $P_2(j)$  est

la probabilité d'erreur par paire de mots de code définie par :

$$P_2(j) = Q \left( \sqrt{\frac{2jE_s}{N_0}} \right)$$

avec  $E_s$  l'énergie par symbole codé,  $N_0/2$  la variance du bruit gaussien et  $Q(.)$  la fonction explicitée par l'équation 2.4 (chapitre 2).



## CHAPITRE 4

### SYSTÈMES MULTI-ANTENNES

À la lumière des chapitres précédents, il apparaît que la conception d'un système de communications sans-fil requiert une bonne adéquation entre des paramètres de diverses natures : physique (puissance, largeur de bande...), performance (débit, capacité, qualité...) et environnement (interférences, atténuation...). À ce titre, le codage est une technique mature pour améliorer les performances. Présentement, un procédé suscite de plus en plus d'intérêt : il s'agit de l'utilisation de systèmes multi-antennes qui mettent en valeur la dimension spatiale. Dans ce chapitre, nous évoquerons l'impact de la diversité spatiale pour les télécommunications, puis nous analyserons les performances d'un système multi-antennes.

#### 4.1 Diversité spatiale : applications et limitations physiques

##### 4.1.1 Présentation de la diversité

Dans la majorité des cas, les canaux de transmission sans-fil présentent des évanouissements provoqués par des propagations multi-chemins et des interférences diverses. La détection du signal peut s'avérer impossible si l'atténuation est trop importante à moins que l'on utilise des répliques du même signal. Cette méthode générique pour combattre les atténuations est connue sous le nom de "diversité" [NTSC98]. On la retrouve notamment sous les formes suivantes : temporelle, fréquentielle et spatiale. Voici quelques exemples de diversité.

- *Diversité temporelle* : le codage associé à l'entrelacement. Basiquement, un entrelaceur mélange les symboles codés, ce qui permet de lutter contre les salves d'erreurs [Bou97]. La redondance s'opère ici sous forme temporelle.

- *Diversité fréquentielle* : dans un système multi-usagers, le “frequency hopping” [MNK97] assigne à un utilisateur des fréquences qui varient dans le temps. C’est un moyen de lutter contre les canaux sélectifs en fréquence.
- *Diversité spatiale* : plusieurs antennes réparties dans l’espace permettent l’utilisation de répliques du signal dans le domaine spatial sans pénalité pour la largeur de bande.

Il est souhaitable de concevoir des systèmes de communications profitant autant que possible de toutes les formes de diversité [Gro98]. Par exemple, certains téléphones cellulaires utilisent le codage et l’entrelacement pour obtenir une forme de diversité temporelle. Pour les systèmes opérant avec un accès multiple à répartition de codes, le récepteur de Rake utilise la diversité fréquentielle. Enfin, la diversité spatiale est disponible pour la liaison montante du téléphone mobile à la base, ce qui permet de compenser le faible pouvoir d’émission des mobiles.

Néanmoins, toutes les formes de diversité ne sont pas disponibles dans tous les cas. Par exemple, le codage est très efficace pour des évanouissements rapides (mobilité rapide) mais il offre peu de protection pour des évanouissements lents, à moins que le système puisse tolérer un délai d’entrelacement important. De la même manière, la diversité fréquentielle n’est pas disponible pour des évanouissements “plats”. Enfin, la petite taille des téléphones portables rend délicate l’implantation de plusieurs antennes. En effet, outre le problème de place, le fait de rapprocher des antennes créent des problèmes physiques de nature électromagnétique comme nous le soulignerons ultérieurement. Ce facteur a longtemps limité l’utilisation de plusieurs antennes aux seules stations de bases où plus de place est disponible. Toutefois, la diversité spatiale appliquée au niveau de l’émetteur connaît un engouement depuis quelques années.

## 4.1.2 Applications de la diversité spatiale

### 4.1.2.1 Pourquoi plusieurs antennes ?

La diversité spatiale pour un récepteur est assez bien comprise. Toutefois, la diversité spatiale pour l'émetteur l'est moins. L'utilisation de plusieurs antennes au niveau du récepteur (typiquement la station de base pour les communications cellulaires) est motivée par plusieurs intérêts [Ast99] :

- gain : il est possible de combiner astucieusement les signaux de telle manière que le SNR soit amélioré.
- diversité : la protection contre les évanouissements est augmentée car tous les chemins ne sont pas atténués simultanément.
- suppression d'interférences : pour un système multi-usagers, les différentes localisations des récepteurs facilitent la distinction des signaux qui ont des propriétés temporelles et fréquentielles similaires.
- localisation : l'utilisation de plusieurs antennes permet de déterminer des paramètres physiques comme la direction des ondes incidentes, ce qui peut présenter un intérêt pour la localisation d'urgence.

Si l'on ajoute la diversité spatiale à l'émetteur, on conserve bien sûr les qualités précédentes, et de plus il est possible de gagner en capacité [FG98]. En effet, la capacité d'un système multi-antennes dépasse celle d'un système mono-antenne. Une étude de la capacité sera l'objet d'une section prochaine. Dans la suite du mémoire, nous présenterons des designs de codage et de modulation associés à des systèmes multi-antennes, à l'émetteur et au récepteur, et ce pour la quête de performance meilleure. Il s'agit là d'une nouveauté puisque codage et diversité spatiale évoluaient auparavant dans deux mondes parallèles distincts.

#### 4.1.2.2 Différentes catégories de systèmes avec diversité spatiale

Les variations spatio-temporelles du canal sans-fil créent des signatures spatio-temporelles différentes pour chaque “sous-canal” associé à une antenne émettrice et une antenne réceptrice. L’estimation du comportement des sous-canaux peut se faire de plusieurs manières. Historiquement, il existe trois catégories de systèmes avec diversité à l’émetteur : les systèmes avec boucle de retour, les systèmes avec séquences d’entraînement et les systèmes aveugles [TSC98].

Les systèmes avec boucle de retour (feedback) utilisent de l’information fournie par le récepteur pour configurer l’émetteur. Par exemple, c’est le cas lorsque émetteur et récepteur utilisent les mêmes coefficients de poids de pondération des antennes. Ces coefficients sont choisis au récepteur pour maximiser le SNR.

Généralement, dans les systèmes avec séquences d’entraînement (feedforward), l’émetteur envoie périodiquement des signaux connus du récepteur, ce qui permet d’estimer l’état du canal. Par exemple, l’émetteur éteint successivement toutes les antennes sauf une qu’il utilise pour générer un signal connu qui sera reçu par toutes les antennes du récepteur. Ensuite, le décodage au niveau du récepteur s’opère par traitement linéaire ou par maximum de vraisemblance.

Un système aveugle ne fait pas usage d’information de retour ni de séquences d’entraînement. Plusieurs techniques sont applicables. On peut par exemple utiliser du codage associé à une émission orthogonale des signaux.

Suivant les systèmes employés, des approches distinctes peuvent être adoptées. Certains procédés font appels à du traitement du signal associé à de l’égalisation de canal [NTC99] [Fos96] [WFGV99] [SK99]. D’autres perspectives font appel au codage [TSC98] [HG00] [GFK98] [BBH00]. Dans la suite du mémoire, nous étudierons principalement l’aspect codage par le biais du codage spatio-temporel.

### 4.1.3 Limitations physiques

L'augmentation du nombre d'antennes et le rapprochement des antennes posent des problèmes physiques. Tout d'abord, l'occupation spatiale est un facteur limitant pour la conception d'un système de communications. Concrètement, en téléphonie mobile, la volonté commerciale de miniaturisation laisse tout juste la place pour une antenne visible. On peut imaginer une seconde antenne cachée à l'intérieur du boîtier en acceptant l'atténuation engendrée par le confinement. Typiquement, on considère qu'un espacement d'une demi-longueur d'onde entre les antennes permet d'assurer une bonne diversité (notamment pour discerner les évanouissements rapides du modèle de Rayleigh). Par exemple, à la fréquence de 5 GHz, la demi-longueur d'onde vaut  $\lambda/2 = 3$  cm. Dans les hautes fréquences, les opportunités d'accommoder plusieurs antennes dans un espace restreint semblent donc réelles.

Outre la limitation de place, il se pose des problèmes électromagnétiques. Dès lors que l'espacement entre antennes descend en dessous de  $\lambda/2$ , la corrélation entre les chemins d'émissions augmentent sensiblement [Jak74]. Or l'indépendance entre les émissions est une hypothèse pratique pour le traitement spatio-temporel. Par ailleurs, le rapprochement des antennes provoque un couplage électromagnétique entre antennes [FG98]. Ce couplage rend ardue l'adaptation d'impédance nécessaire pour assurer un bon transfert d'énergie depuis l'émetteur ou vers le récepteur. De plus, le couplage augmente la corrélation entre les signaux émis. Le couplage est fonction de l'espacement entre antennes, du nombre d'antennes et de la direction d'émission. Une émission omni-directionnelle, avec des antennes espacées de  $\lambda/2$ , induit un couplage faible pour n'importe quel nombre d'antennes. Enfin, certains procédés de transmission avec antennes multiples évitent des recouvrements de radiations qui dégradent le débit d'information. Ainsi, le codage spatio-temporel en blocs, dont l'efficacité spectrale est théoriquement maximale, assure de part son orthogonalité une équi-répartition de l'énergie irradiée qui en pratique permet de conserver l'efficacité maximale [LT99].

## 4.2 Étude théorique de la capacité

### 4.2.1 Modélisation mathématique du canal

L'analyse de la capacité d'un système multi-antennes est un problème délicat et ouvert. Il existe d'ailleurs une littérature abondante sur le sujet dont voici quelques références [RC96] [MF70] [DF99] [MH99]. Les résultats dépendent avant tout du modèle élaboré pour le canal de transmission. Le choix du modèle est motivé par les applications, la précision et la complexité mises en jeu. Par la suite, nous baserons notre étude sur le modèle explicité dans [Fos96] et [FG98] qui aboutit à des résultats probants et assez simples.

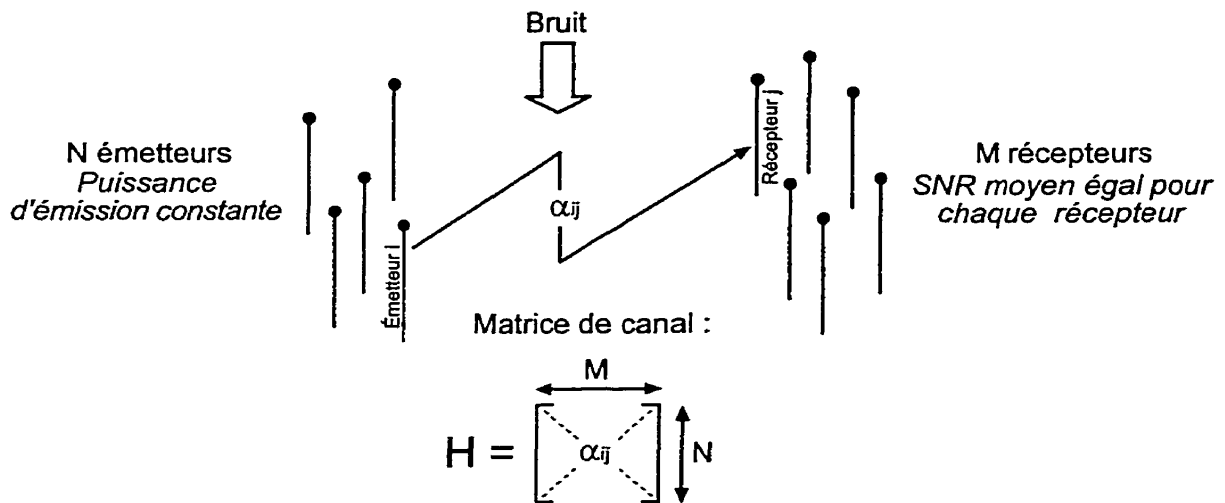


Figure 4.1: Modélisation du canal

Pour un système avec  $N$  émetteurs et  $M$  récepteurs, on considère un modèle complexe en bande de base impliquant une matrice de canal  $H$  de taille  $N \times M$ , avec un bruit blanc gaussien additif. Le temps est une donnée discrète. On ne tient compte que des co-interférences (du système d'antennes avec lui-même). La matrice de canal a pour éléments les coefficients  $\alpha_{ij}$  d'atténuation entre l'antenne émettrice  $i$  et l'antenne réceptrice  $j$  (figure 4.1). Elle est bien sûr aléatoire. L'état du canal est inconnu à l'émission mais on fait usage d'une connaissance a priori

idéale du canal au niveau du récepteur. Cela implique l'utilisation de systèmes intelligents du type "feedback" ou "feedforward".

On fera l'hypothèse que les  $N$  signaux transmis sont indépendants, de même énergie et de distribution gaussienne. Il est important de noter que l'on utilise une puissance constante d'émission, que l'on répartit également sur les différents émetteurs. Ceci est nécessaire pour faire des comparaisons crédibles entre les performances de systèmes n'utilisant pas le même nombre d'émetteurs. On en déduit aussi que chaque récepteur reçoit en moyenne la même puissance. Dans la suite, nous considérerons donc que le SNR est indépendant du nombre d'émetteurs et qu'il est le même en moyenne sur chaque récepteur : il sera calculé pour un récepteur.

Nous procéderons à une analyse quasi-statique. Dans ce cas, la matrice de canal n'évolue pas pendant une salve de transmission, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de modification du canal par rapport à la durée d'une salve. Cela implique une mobilité restreinte. Ce serait par exemple le cas pour des communications à l'intérieur de bâtiments. Il est à noter que pour une salve de plusieurs Mbps durant quelques ms, un nombre suffisant de symboles est envoyé pour que l'on puisse considérer un horizon de temps infini, et donc faire usage des résultats de la théorie de l'information en ce qui concerne la capacité de canal. L'hypothèse quasi-statique peut être mise en défaut par une boucle de retour type feedback : on préférera un procédé du genre entraînement qui est moins complexe et plus rapide.

#### 4.2.2 Capacité théorique

La capacité est exprimée sous forme d'efficacité spectrale en bps/Hz. La formule générale est la suivante [FG98] :

$$C = \log_2 \left( \det \left[ I_M + \left( \frac{SNR}{N} \right) \cdot H^\dagger H \right] \right) \quad \text{bps/Hz} \quad (4.1)$$

où  $I_M$  est la matrice identité de taille  $M \times M$  et  $\dagger$  est la trans-conjugaison matricielle.

L'efficacité spectrale est ici une variable aléatoire : on s'intéressera donc à la probabilité d'atteindre un seuil d'efficacité. Pour un système point à point, on retrouve la formule de Shannon :

$$C = \log_2 (1 + SNR \cdot |H|^2) \quad \text{bps/Hz}$$

Il est intéressant de considérer le cas où  $N = M = n$  et  $H = I_n$ . C'est le cas hypothétique de canaux parallèles mais orthogonaux (qui n'interfèrent pas entre eux). On a :

$$C(n \rightarrow \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log_2 (1 + (SNR/n)) = SNR / \ln(2)$$

Or, dans le cas d'une seule antenne, la croissance est seulement logarithmique pour de grandes valeurs de SNR. Ceci illustre la puissance de la diversité spatiale.

Pour un cas plus réaliste, on utilise le modèle d'un canal "plat" (non sélectif en fréquence) avec évanouissements de Rayleigh. Les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont alors des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance unité. L'indépendance est une approximation bien vérifiée pour un espacement entre antennes supérieur à la demi-longueur d'onde. Foschini et Gans [FG98] ont recherché des équivalents de l'expression donnée par l'équation 4.1 : il apparaît que la capacité augmente au moins linéairement avec le nombre d'antennes émettrices et cela tant que le nombre d'antennes à la réception est au moins aussi grand que le nombre d'antennes à l'émission. Des tests grandeur nature [WFGV99] ont confirmé le bien fondé de cette capacité accrue. Avec un prototype muni de 8 antennes émettrices et 12 antennes réceptrices, il a été atteint une efficacité spectrale de 20 à 40 bps/Hz dans un environnement intérieur pour des SNR de 24 à 34 dB. De telles performances ne semblent pas réalisables avec des techniques traditionnelles. Nous allons quantifier ces résultats prometteurs par des simulations dans la section suivante.



## 4.3 Simulations et analyse des performances

### 4.3.1 Description des simulations

Nous faisons ici usage d'un canal à évanouissements de Rayleigh réels avec un bruit blanc additif gaussien. On procède à une analyse quasi-statique comme décrit précédemment. Par ailleurs, nous rappelons qu'il a été tenu compte d'une puissance constante d'émission dans la détermination de la capacité théorique. Le SNR correspond au rapport de la puissance moyenne du signal reçu par un récepteur sur la puissance moyenne du bruit : il est indépendant du nombre d'émetteurs.

L'efficacité spectrale est une donnée aléatoire : on s'intéresse donc à la probabilité d'atteindre une efficacité. Or, le calcul direct du déterminant aléatoire (équation 4.1) de manière analytique est difficile. Ainsi, afin d'estimer la distribution de probabilité, on a préféré utiliser une méthode dite de "Monte-Carlo". Tout d'abord on génère un échantillon de variables aléatoires gaussiennes réelles. Ensuite, pour un SNR donné, on calcule l'efficacité de chaque échantillon. Enfin, on effectue un tri : pour chaque efficacité calculée, on recherche le nombre d'échantillons qui permettent de dépasser cette efficacité. Le rapport entre ce nombre et le nombre total d'échantillons donne une estimation de la probabilité de dépasser le seuil d'efficacité.

Les simulations ont été réalisées avec 10000 valeurs de déterminants, pour une valeur de SNR donnée, obtenus par le logiciel Matlab<sup>®</sup> et le tri a été opéré suivant une routine programmée avec le logiciel Visual C++<sup>®</sup>. On écrira que l'efficacité atteint un "seuil à 99%", pour signifier que dans 99 cas sur 100 en moyenne, l'efficacité dépasse le seuil désigné c'est-à-dire qu'il y a une probabilité de 0.01 que la capacité ne soit pas atteinte. Par extension, cela correspond à une probabilité d'erreur de transmission de 0.01.

### 4.3.2 Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité

Dans cette section, on met en relief le paramètre du seuil. La figure 4.2 représente la distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité pour des systèmes ayant autant d'émetteurs que de récepteurs (en l'occurrence deux et trois) soumis à différentes valeurs de SNR : 0, 3, 6 et 9 dB. En ordonnée, on lit la probabilité que l'efficacité dépasse une valeur seuil en abscisse. On retrouvera en annexe C une courbe similaire avec trois et quatre émetteurs/récepteurs.

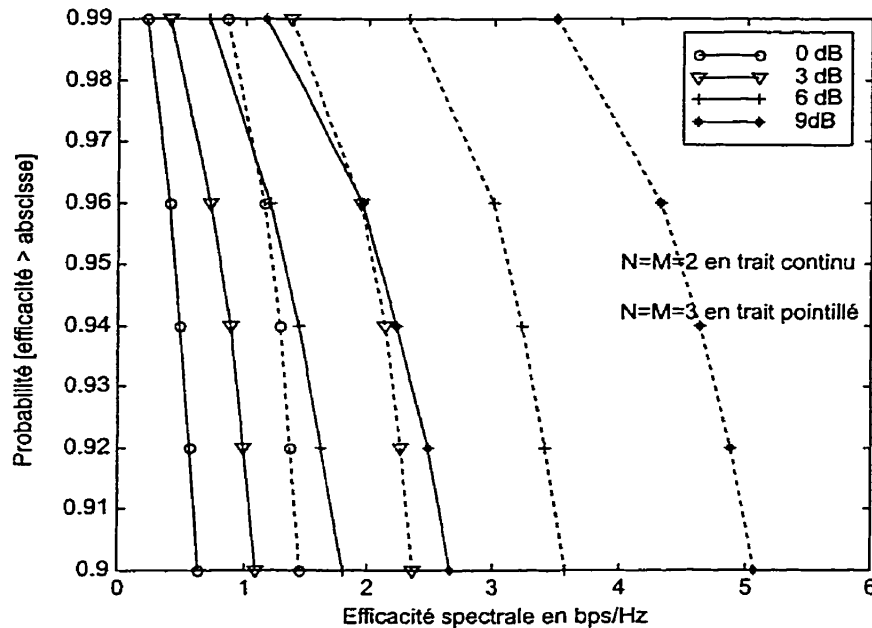


Figure 4.2: Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité d'un système avec  $N=2,3$  émetteurs et  $M=2,3$  récepteurs

On observe logiquement que pour un système donné, la capacité augmente dès lors que le seuil diminue. Il est bien sûr normal que le seuil à 90% soit supérieur au seuil à 99%, dans la mesure où le seuil à 90% n'est pas dépassé par un cas sur 10 en moyenne, alors que le seuil à 99% concerne un cas sur 100. Pour la suite des simulations, on ne représentera que le cas du seuil à 99%. Tout d'abord, il s'agit d'une valeur de probabilité d'erreur aisément utilisable pour évaluer les

performances “en capacité” des codes de contrôle d’erreurs. Par ailleurs, si on souhaite obtenir un seuil plus fin, 99.9% par exemple, il est nécessaire de faire des simulations avec un plus grand nombre d’échantillons, car pour 10000 valeurs d’efficacité, le tri à 99.9% isole 10 valeurs en dessous du seuil, ce qui n’est pas une valeur statistique suffisante.

D’autre part, on remarque immédiatement que la capacité augmente nettement avec l’ajout d’une unité pour l’émetteur et le récepteur. Cela confirme l’intérêt de la diversité spatiale. Analysons ce gain potentiel en capacité en fonction du nombre d’antennes disponibles.

### 4.3.3 L’efficacité en fonction du nombre d’antennes

Nous présentons ici l’évolution de l’efficacité dans différentes configurations en fonction du SNR. La figure 4.3 illustre le seuil d’efficacité à 99% d’un système avec deux émetteurs et un nombre variable de récepteurs.

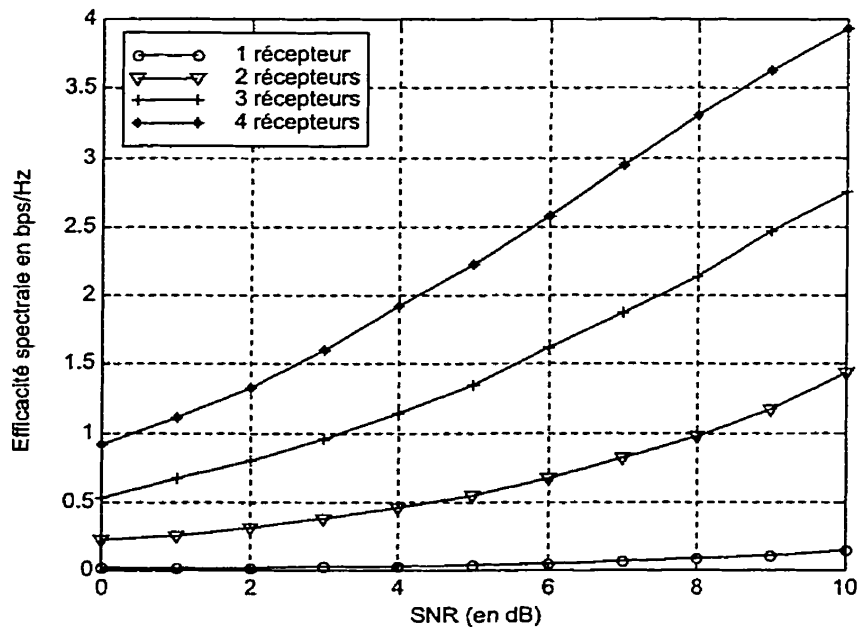


Figure 4.3: Seuil d’efficacité à 99% pour 2 émetteurs

On trouvera en annexe C, les courbes similaires pour des systèmes avec trois et quatre émetteurs. Ces résultats nous permettront de comparer les performances de systèmes spatio-temporels réels avec les valeurs maximales théoriquement atteignables. Il apparaît clairement un avantage en diversité obtenu par l'augmentation du nombre de récepteurs pour un nombre d'émetteurs fixé. De la même manière, la figure 4.4 met en relief la gain en diversité obtenue par l'augmentation du nombre d'émetteurs avec un unique récepteur.

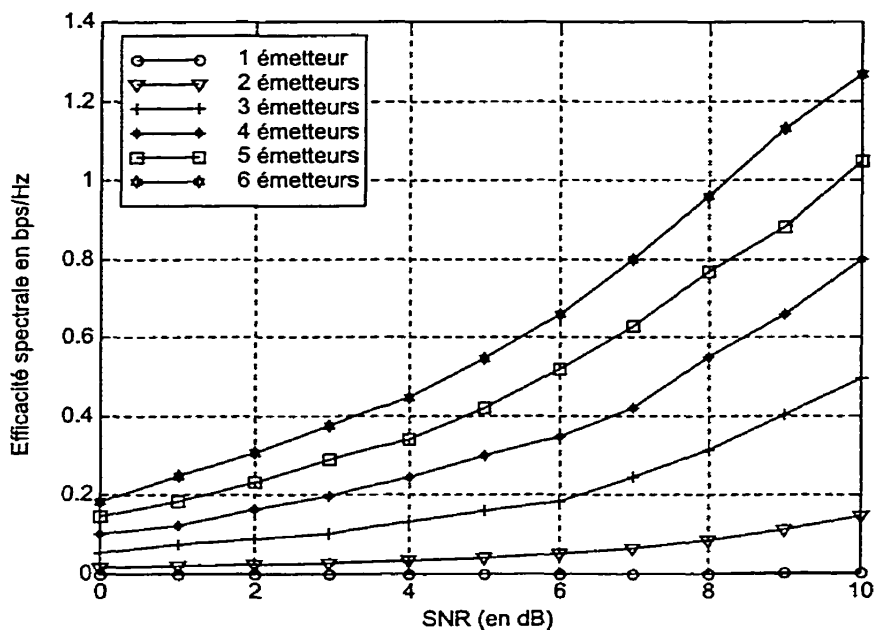


Figure 4.4: Seuil d'efficacité à 99% pour un récepteur

Cette courbe illustre la supériorité manifeste des systèmes multi-antennes par rapport au système mono-antenne : les performances du systèmes mono-antenne sont d'ailleurs à peine discernables ! Il convient quand même de relativiser la capacité potentielle des systèmes multi-antennes. En effet, on observe que, pour un système avec un unique récepteur, le gain obtenu par la diversité spatiale à l'émission a tendance à stagner à partir d'un certain nombre d'émetteurs. Intuitivement, on se doute bien qu'il y a un point à partir duquel le fait d'ajouter

des émetteurs n'apporte pas grand chose pour la qualité de réception : il y a une saturation. Tarokh [TSC98] explique ce phénomène de manière analytique. En notant  $\chi_N^2$  une loi chi-carré : somme de carrés de  $N$  variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance unité, l'équation 4.1 peut s'écrire :

$$C = \log_2 (1 + (\chi_N^2/N) \cdot SNR)$$

Par la loi des grands nombres,  $\lim_{N \rightarrow \infty} (\chi_N^2/N) = 1$  en distribution. Ainsi, à partir d'un certain nombre d'émetteurs, l'efficacité sera équivalente à la limite de Shannon : il n'y aura plus de gain notable.

Enfin, si l'on se place d'un point de vue design de systèmes, on peut s'interroger sur l'intérêt d'avoir plus d'antennes à l'émission ou à la réception. La figure 4.5 apporte quelques éléments de réponse. Il y est représenté l'efficacité d'un système avec cinq antennes.

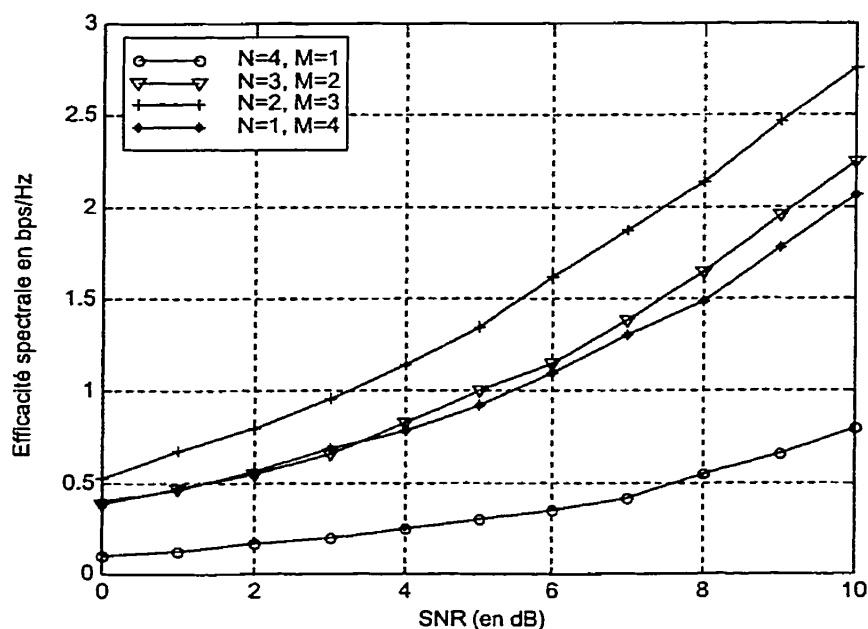


Figure 4.5: Seuil d'efficacité à 99%, pour  $N$  émetteurs et  $M$  récepteurs, avec  $N + M = 5$

Le travail du concepteur de systèmes sera de trouver une bonne répartition entre les antennes émettrices et les antennes réceptrices pour assurer une bonne adéquation prix/performance. Comme prévisible, le système à 3 récepteurs est très performant et s'avère un bon compromis. Il faut bien sûr conserver à l'esprit que la réception requiert un traitement plus lourd que l'émission. Il sera donc plus cher et plus complexe d'installer des antennes à la réception. En ce qui concerne les performances, il est assez avantageux d'avoir plus d'antennes à la réception. Nous avons précédemment cité le cas de l'équivalent théorique de la capacité, pour un grand nombre d'antennes, qui établit une croissance linéaire de la capacité dès lors que le nombre d'antennes réceptrices demeurent supérieur au nombre d'antennes émettrices. Intuitivement, on peut comprendre l'importance d'un nombre accru de récepteurs : si il y a moins de récepteurs que d'émetteurs, il semblerait normal que la capacité de traitement à la réception soit surpassée par le flux de données émis. Toutefois, il ne faut pas négliger le nombre d'émetteurs, car il apporte une réserve conséquente en diversité dont le potentiel est révélé par le nombre de récepteurs.

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes multi-antennes. Il s'avère que la diversité spatiale au niveau de la réception et de l'émission offre des perspectives très alléchantes. Outre son aptitude à lutter contre l'adversité du canal sans-fil et ses évanouissements, la diversité spatiale assure aux systèmes multi-antennes une efficacité spectrale nettement supérieure aux systèmes mono-antenne. Néanmoins, le simple fait de rapprocher des antennes pose des problèmes physiques (place, interactions électromagnétiques...). À l'instar du (dé)codage turbo, la diversité spatiale apparaît comme une nouvelle frontière dans l'univers des télécommunications.

## CHAPITRE 5

### CODAGE SPATIO-TEMPOREL

Après avoir présenté les bons comportements théoriques - en terme de capacité notamment - des systèmes multi-antennes, il nous faut dès lors appréhender les techniques pour utiliser la diversité spatiale. Le codage spatio-temporel (space-time coding en anglais) est un moyen d'y parvenir. Ce chapitre décrira le concept du codage spatio-temporel, étudiera les critères pour obtenir de bons CST (Code Spatio-Temporel) et établira une nouvelle classe de CST.

#### 5.1 Description

L'idée de base des CST repose sur la transmission adéquate de l'information parmi les différentes antennes et dans le temps. Il s'agira donc d'associer la dimension temporelle du codage de canal "classique" avec la dimension spatiale (dans le sens géographique du terme) des multi-antennes. Les CST tirent leur richesse de cette ambivalence. Ainsi, il faudra prendre garde à ne pas raisonner uniquement sur une dimension, car l'espace et le temps seront par la suite intimement liés.

##### 5.1.1 Définition générale

De façon générale, on représente le mécanisme de codage spatio-temporel par le schéma de la figure 5.1 pour un système comportant  $N$  antennes émettrices [TSC98]. À l'origine, une source d'information produit  $k$  symboles d'information à partir d'un alphabet discret  $\Phi$ . Ces symboles sont ensuite codés selon un code correcteur d'erreurs qui génère des mots de codes de longueur  $L$  tirés d'un alphabet  $\Psi$ . La longueur  $L$  est directement proportionnelle au nombre d'antennes  $N$ . Les symboles codés sont alors répartis parmi les  $N$  émetteurs, puis le modulateur associé

à chaque émetteur les transcrit en points d'une constellation discrète  $\Delta$  de signaux à valeur complexe afin de transmettre l'information dans le canal sans-fil. Finalement, les signaux modulés en bande passante sont transmis simultanément sur chaque antenne. Il est à noter que par souci de simplicité on a omis le prétraitement des signaux en bande de base, tel que le filtrage de mise en forme (pulse shaping) [Pro95].

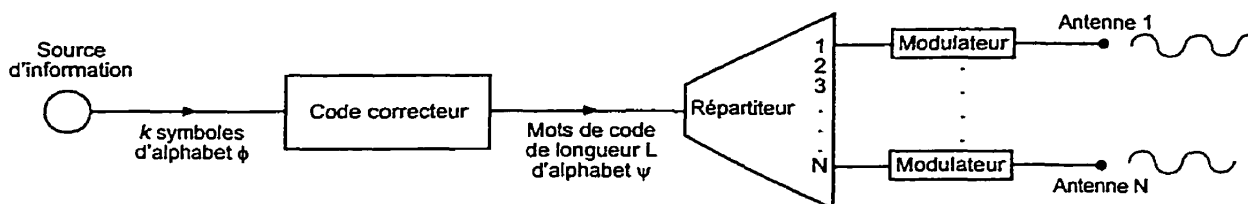


Figure 5.1: Schéma général de codage spatio-temporel

Formellement, on peut définir un CST comme étant l'association d'un code correcteur d'erreur et d'un répartiteur "spatial". Plus précisément, pour un système à  $N$  émetteurs : un code spatio-temporel  $N \times h$  de taille  $k$  se compose (1) d'un code correcteur d'erreurs  $C$  générant des mots de code de longueur  $Nh$  et dont le taux de codage vaut  $\frac{k}{N \times h}$  et (2) d'un répartiteur spatial, qui à partir de chaque mot de code  $\bar{c}$  de  $C$ , génère une matrice de  $N$  rangées et de  $h$  colonnes dont les éléments sont des arrangements de  $\bar{c}$ . On dira que le CST est linéaire si le code correcteur  $C$  et le répartiteur sont linéaires [HG00].

### 5.1.2 L'émission

Concrètement, on considérera par la suite que les symboles traités sont tous des bits  $\{0,1\}$ , que le répartiteur sera un simple convertisseur série-parallèle et que la constellation utilisée sera de type  $M$ -PSK (et même BPSK pour les applications pratiques en fin de mémoire). En conservant les notations du paragraphe précédent,



on observe dès lors que le répartiteur transforme le mot de code de longueur  $Nh$  :

$$\bar{c} = (c^1(1), \dots, c^N(1), c^1(2), \dots, c^N(2), \dots, c^1(h), \dots, c^N(h)) \in \mathbf{C}$$

en la matrice de taille  $N \times h$  :

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c^1(1) & c^1(2) & \dots & c^1(h) \\ c^2(1) & c^2(2) & \dots & c^2(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^N(1) & c^N(2) & \dots & c^N(h) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Dans cette notation, il faut comprendre que  $c^i(t)$  est le vecteur de symboles codés assigné à l'antenne  $i$  à l'instant  $t$ .

Soit  $f : \Psi \rightarrow \Delta$  la fonction bijective de modulation.  $\Psi$  est un ensemble de  $n$ -uplets de  $\{0,1\}$  et  $\Delta$  est une constellation de signaux PSK. Alors:

$$\bar{S} = f(\bar{C}) = \begin{pmatrix} f(c^1(1)) & f(c^1(2)) & \dots & f(c^1(h)) \\ f(c^2(1)) & f(c^2(2)) & \dots & f(c^2(h)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(c^N(1)) & f(c^N(2)) & \dots & f(c^N(h)) \end{pmatrix}$$

est la version en bande passante du mot de code transmis à travers le canal sans-fil. Il s'agit d'une trame spatio-temporelle de données. On notera  $s^i(t)$  les éléments de la matrice  $\bar{S}$ .

La figure 5.2 est un exemple pratique d'émetteur à 2 antennes. Nous rappelons que, pour le cas général d'un émetteur à  $N$  antennes, les  $N$  signaux  $s_1(t), \dots, s_N(t)$  sont transmis simultanément à l'instant  $t$  sur les  $N$  antennes et ils auront la même durée de transmission. Nous négligeons ici les durées de propagation à l'intérieur du matériel dans le cas où par exemple une antenne serait plus éloignée que d'autres.

On pourrait toujours synchroniser les émissions en utilisant une mémoire tampon et une horloge. Ces signaux appartiennent tous à une même constellation (Phase Shift Keying) dont seule la phase varie : les antennes utilisent notamment la même fréquence de modulation. Il est toutefois possible de faire évoluer ce système en introduisant plusieurs fréquences notamment par le biais de l'OFDM et donc d'utiliser la diversité fréquentielle [ATNS98].

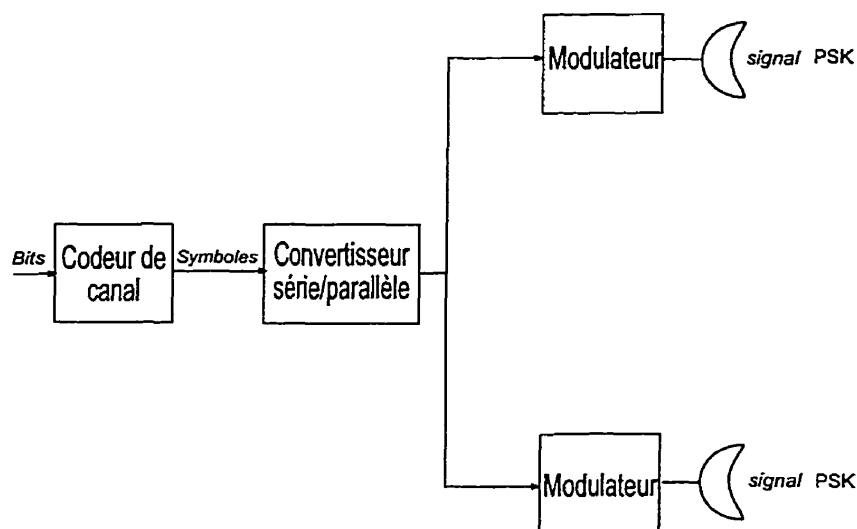


Figure 5.2: Schéma d'un émetteur spatio-temporel à 2 antennes

### 5.1.3 La réception

Considérons le cas d'un système comportant  $M$  antennes réceptrices schématisé par la figure 5.3. Le signal capté à chaque antenne réceptrice est une superposition bruitée des  $N$  signaux émis dégradés par des évanouissements de type Rayleigh [HG00] [TSC98]. Pour information, le cas d'évanouissements de type Rice a été aussi considéré dans [TSC98], toutefois le modèle de Rayleigh demeure le plus contraignant dans la mesure où il décrit le cas d'un récepteur "encaissé" (entourés de beaucoup de réflecteurs).

Nous utilisons ici un modèle de canal semblable à celui décrit dans le chapitre précédent avec des évanouissements "plats" (non-sélectifs en fréquence). Il est à

noter que des modèles multi-chemins ont été utilisés [RC96] avec une approche plus axée sur le traitement du signal et l'égalisation [NTC99]. En termes mathématiques, les évanouissements se traduisent par un facteur multiplicatif de gain  $\alpha_{i,j}$  entre l'antenne émettrice  $i$  (prise parmi  $N$ ) et l'antenne réceptrice  $j$  (prise parmi  $M$ ) : on considère donc formellement un ensemble de  $N \times M$  canaux distincts.

Nous ferons l'hypothèse par la suite que ces canaux sont indépendants, c'est-à-dire que idéalement les coefficients  $\alpha$  sont indépendants entre eux. Rappelons que cette hypothèse semble valide dès lors que les antennes sont séparées de  $\frac{\lambda}{2}$ . Alors, conformément à la description de Rayleigh, les coefficients  $\alpha$  seront des échantillons de variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle : on prendra une variance de 0.5 par dimension dans le cas complexe et 1 pour le cas réel . Une approche du cas de coefficients corrélés a été réalisée dans [TSC98].

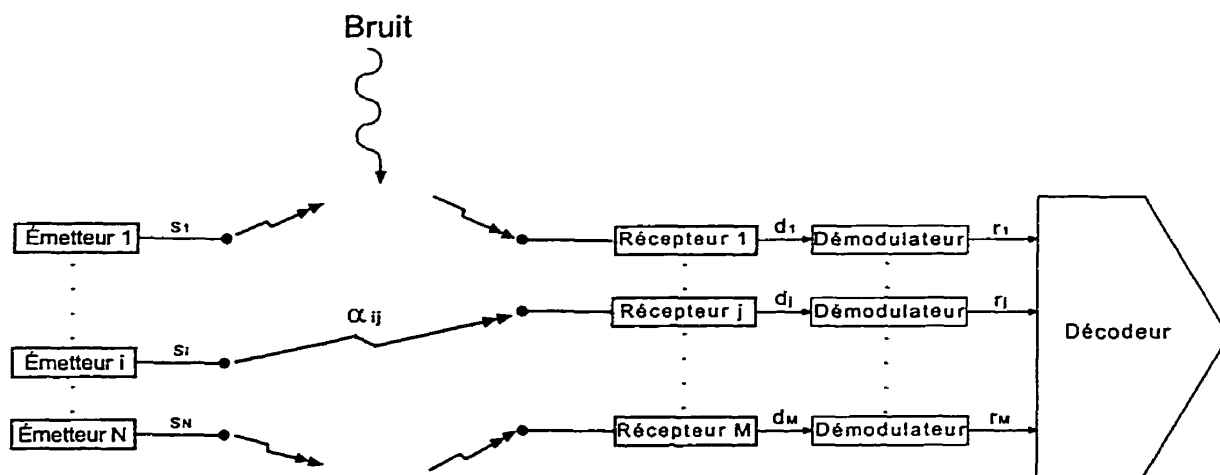


Figure 5.3: Schéma général d'un récepteur spatio-temporel

Enfin, nous pourrons adapter ce modèle pour le cas d'évanouissements quasi-statiques ou rapides. Les évanouissements sont quasi-statiques dans le sens où les coefficients  $\alpha$  demeurent constants durant la transmission d'un mot de code spatio-temporel (trame), mais varient indépendamment d'une transmission de trame à l'autre. Ce modèle étant en tout point semblable à celui décrit au chapitre précédent, nous pourrons utiliser les résultats de la capacité théorique. Le cas d'évanouissements

rapides quant à lui met en oeuvre la variation des coefficients  $\alpha$  à chaque instant  $t$  d'émission. Il s'agit d'un cas critique. En fait, la réalité se situe dans un cas intermédiaire entre le modèle de canal quasi-statique et le modèle de canal avec évanouissements rapides.

Le bruit additif à l'instant  $t$  est modélisé par une variable aléatoire gaussienne  $\gamma(t)$  centrée de variance  $N_0/2$  pour le cas réel (on utilise une gaussienne sur chaque composante pour le cas complexe). Soit  $d^j(t)$  le signal reçu par l'antenne  $j$  (parmi les  $M$  antennes) à l'instant  $t$  :

$$d^j(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s^i(t) + \gamma^j(t) \quad (5.2)$$

Soit  $r^j(t)$  le signal démodulé (matched filter) associé à  $d^j(t)$ . En supposant une connaissance idéale du temps et des fréquences, le signal a pour forme :

$$r^j(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot c^i(t) + \gamma^j(t) \quad (5.3)$$

Des moyens décrits au chapitre précédent (notamment les séquences d'entraînement) permettent au récepteur de déterminer les coefficients  $\alpha_{i,j}$ . Connaissant ces coefficients, il s'agira pour le décodeur d'estimer la séquence des symboles  $c^i$ , qui après "passage" dans le canal bruité, "ressemble le plus" aux signaux extraits  $r^j$  par les différents démodulateurs.

Contrairement au cas temporel classique, on dispose ici de  $M$  signaux reçus qui sont autant d'informations potentielles pour déterminer au mieux la séquence des symboles. Il ne faut donc pas estimer les symboles en considérant séparément chaque signal  $r^j$  puisque dans ce cas là on ne saurait dire quel signal  $r^j$  est le plus important. Une simple sommation des signaux  $r^j$  ne serait pas non plus satisfaisante dans la mesure où les chemins avec gain élevé seraient alors avantagés. La meilleure stratégie consiste alors à considérer simultanément l'ensemble de ces

signaux. Pour cela, on utilise la norme mathématique en complexe qui décrit la distance du signal utile au bruit ambiant. En d'autres termes, il faudra minimiser la métrique suivante :

$$\sum_{j=1}^M \left| r^j(t) - \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot c_{estimate}^i(t) \right|^2 \quad (5.4)$$

Généralement, l'algorithme de Viterbi est ensuite utilisé pour déterminer la séquence des  $c_{estimate}^i$  avec la plus petite métrique cumulée : c'est-à-dire la séquence la plus vraisemblable. Pour le cas où la connaissance des coefficients  $\alpha$  est imparfaite et erronée, le lecteur pourra se référer à [TNSC99] dans lequel sont explicités les modifications et critères correspondants. Il semble que les CST demeurent efficaces malgré une estimation erronée.

## 5.2 Critères de performances théoriques

Ce chapitre a pour but de présenter des critères qui nous permettront par la suite de construire de bons CST. On peut déterminer une borne supérieure sur la probabilité qu'un récepteur à maximum de vraisemblance puisse prendre une décision erronée pour une suite de  $h$  paquets de symboles envoyés par  $N$  antennes (c'est à dire que chaque antenne envoie  $h$  symboles). Il y a donc  $N \times h$  symboles envoyés au total ( $N \leq h$ ).

On considère ainsi la probabilité que le récepteur fasse une erreur en choisissant le mot de code :

$$E = e^1(1), \dots, e^N(1), e^1(2), \dots, e^N(2), \dots, e^1(h) \dots e^N(h)$$

sachant que

$$C = c^1(1), \dots, c^N(1), c^1(2), \dots, c^N(2), \dots, c^1(h) \dots c^N(h)$$

a été transmis.

On appelle cette probabilité :  $P(C \rightarrow E)$ . A noter que l'on évoque ici des symboles non modulés.

Il nous faut introduire à présent quelques notations mathématiques [TSC98]. Conformément aux notations précédentes, on note  $f$  une fonction de modulation pour une constellation de signaux PSK. Soit  $B(C, E)$  la matrice suivante ayant  $N$  rangées et  $k$  colonnes :

$$\begin{pmatrix} f(e^1(1)) - f(c^1(1)) & f(e^1(2)) - f(c^1(2)) & \dots & f(e^1(h)) - f(c^1(h)) \\ f(e^2(1)) - f(c^2(1)) & f(e^2(2)) - f(c^2(2)) & \dots & f(e^2(h)) - f(c^2(h)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(e^N(1)) - f(c^N(1)) & f(e^N(2)) - f(c^N(2)) & \dots & f(e^N(h)) - f(c^N(h)) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On notera  $r = \text{rang}[B(C, E)]$ . Soit :  $A(C, E) = B(C, E) \cdot B(C, E)^\dagger$ . Comme  $A(C, E)$  est une matrice hermitienne, elle admet des valeurs propres réelles. De plus,  $A(C, E)$  étant définie non négative, ces valeurs propres sont non négatives. Enfin, le rang de  $A(C, E)$  est aussi  $r$ . On notera  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres positives non nulles de  $A(C, E)$  en tenant compte des multiplicités.

### 5.2.1 Cas d'évanouissements quasi-statiques

En faisant quelques manipulations algébriques [TSC98], on peut démontrer avec  $E_s$  l'énergie moyenne de la constellation PSK :

$$P(C \rightarrow E) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-M} \cdot (E_s/4N_0)^{-Mr} \quad (5.6)$$

On définit :

- l'avantage en diversité :  $Mr$
- le gain en codage :  $(\prod_{i=1}^r \lambda_i)^{1/r}$

Le nombre  $M$  d'antennes de réception étant une donnée fixée intrinsèquement par le matériel disponible, on ne le considère pas comme une variable de critère de performance pour le codage. On déduit 2 critères afin de minimiser  $P(C \rightarrow E)$ ,

c'est à dire pour trouver de bons CST.

Le critère du rang : maximiser  $r$  sur l'ensemble des paires distincts de mots de code.

Le critère du déterminant : maximiser  $(\prod_{i=1}^r \lambda_i)^{1/r}$  sur l'ensemble des paires distincts de mots de code.

Le critère du rang est en fait le plus important car il détermine la pente asymptotique de la performance en fonction du SNR (figure 5.4). Idéalement, on peut optimiser le critère du déterminant après avoir maximisé le rang. Si on obtient une diversité totale :  $NM$  c'est à dire  $r = N$ , alors le critère du déterminant se réduit à la maximisation du déterminant de  $A(C, E)$  (ce qui explique le nom du critère). Le gain en codage est une mesure approximative du gain d'un système codé par rapport à un système non codé opérant avec le même avantage de diversité (il joue sur la translation de la courbe de performance, figure 5.4).

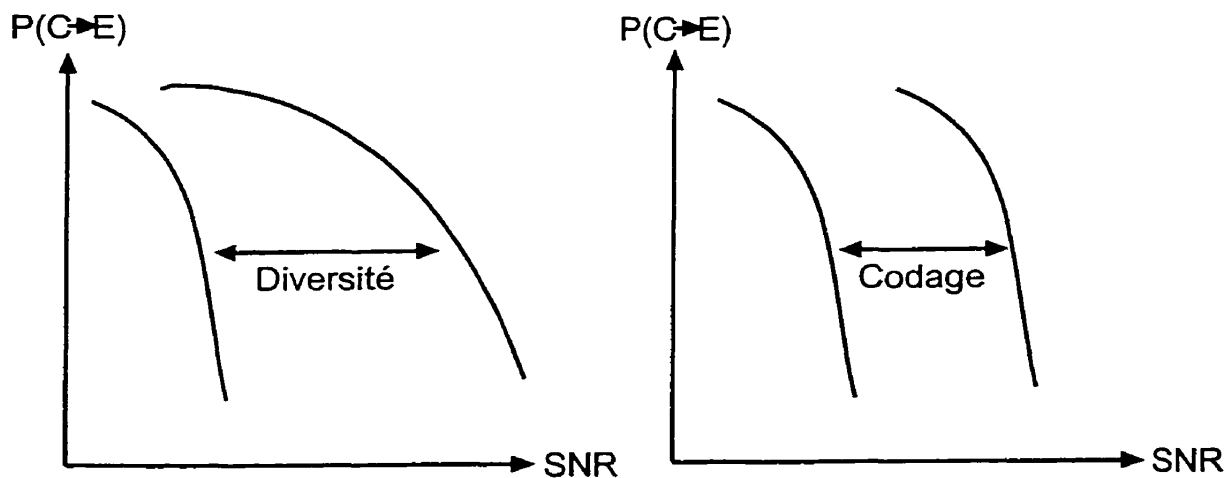


Figure 5.4: Illustration du gain en diversité et en codage

Ces critères sont en quelque sorte la généralisation des critères purement temporels que sont la distance de Hamming ou la distance euclidienne.

### 5.2.2 Cas d'évanouissements rapides

La matrice de canal évolue pendant la transmission d'une trame. Soient  $\bar{e}_t$  la  $t$ -ième colonne de  $E : e^1(t), \dots, e^N(t)$ , et  $\bar{c}_t$  la  $t$ -ième colonne de  $C : c^1(t), \dots, c^N(t)$ . Tout calcul fait [TSC98], on obtient :

$$P(C \rightarrow E) \leq \prod_{\bar{c}_t \neq \bar{e}_t} \left( |f(\bar{c}_t) - f(\bar{e}_t)|^2 \cdot \frac{Es}{4No} \right)^{-M} \quad (5.7)$$

On appelle  $d$  le nombre de colonnes  $\bar{c}_t$  qui diffèrent des colonnes  $\bar{e}_t$  pour  $1 \leq t \leq h$ . Dans ce cas, on en déduit :

- *l'avantage en diversité* :  $Md$
- *le gain en codage* :

$$\left( \prod_{\bar{c}_t \neq \bar{e}_t} |f(\bar{c}_t) - f(\bar{e}_t)|^2 \right)^{1/d}$$

Viennent alors des critères de performance modifiés.

Le critère de la distance : maximiser  $d$ , le nombre de différences entre colonnes distinctes de mots de codes parmi l'ensemble des paires distinctes de mots de code.

On obtient alors la diversité  $Md$ .

Le critère du produit : maximiser le gain en codage sur l'ensemble des paires distincts de mots de code.

En fait, les évanouissements dans un canal réel ne sont jamais totalement quasi-statiques ni rapides : il faut considérer une situation intermédiaire. Il est donc intéressant de construire des codes qui se comportent bien dans les deux situations extrêmes, étant entendu qu'il est délicat de modéliser une situation parfaitement intermédiaire. Ces genres de codes sont appelés "smart-greedy" codes [TSC98] car ils exploitent au mieux la diversité spatio-temporel disponible. Pour construire de tels codes, il faut respecter les critères de performances hybrides, d'une part pour le cas quasi-statique et d'autre part pour le cas rapidement variable.



### 5.2.3 Efficacité spectrale, diversité et taille de constellation

Considérons un système de communications sans-fil avec  $N$  émetteurs et  $M$  récepteurs. D'après les résultats précédents, nous pouvons atteindre la diversité maximale  $NM$ . L'objectif est de construire des codes qui atteignent une efficacité spectrale maximale pour une diversité  $rM$  donnée.

Il a été notamment démontré que, pour une constellation de  $2^b$  éléments, si l'avantage en diversité est maximal *i.e.*  $r = N$ , alors l'efficacité est au plus de  $b$  bps/Hz [TSC98]. Pour les modulations BPSK, 4-PSK et 8-PSK avec un avantage en diversité de  $NM$ , l'efficacité théorique maximale est respectivement de 1, 2 et 3 bps/Hz. La construction de CST devra donc trouver une bonne adéquation entre diversité spatiale, gain de codage, taux de transmission et complexité.

## 5.3 CST en blocs et en treillis

Cette section a pour but de présenter les codes spatio-temporels de la littérature. Il ne s'agit pas d'une description complète des codes disponibles, mais c'est un aperçu utile afin de pouvoir mieux situer les CST étudiés dans ce mémoire par la suite. Sauf indications, nous considérons des évanouissements quasi-statiques.

### 5.3.1 CST en blocs ou design orthogonal

Un CST en bloc est décrit par une matrice générique de transmission  $G$  dont le nombre  $p$  de colonnes correspond aux différents instants d'émission et le nombre  $N$  de rangées correspond au nombre d'antennes utilisées pour émettre à l'instant défini par la rangée [TJC99]. On suppose l'utilisation d'une constellation de  $2^b$  signaux de type PSK. A l'instant  $t$ ,  $kb$  bits parviennent au codeur et déterminent la sélection de  $k$  signaux  $s_1, s_2, \dots, s_k$  de la constellation. En posant  $x_j = s_j$  dans  $G$ , on obtient une matrice  $C$  : c'est une trame spatio-temporelle dont les éléments sont des combinaisons (et conjuguaisons) de  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Pour fixer les idées, considérons

l'exemple suivant, où la matrice  $G$  mise en jeu a  $p=8$  colonnes et  $N=3$  rangées :

$$G = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & x_1^* & -x_2^* & -x_3^* & -x_4^* \\ x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 & x_2^* & x_1^* & x_4^* & -x_3^* \\ x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 & x_3^* & -x_4^* & x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad x_j = s_j$$

$$C = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & s_1^* & -s_2^* & -s_3^* & -s_4^* \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 & s_2^* & s_1^* & s_4^* & -s_3^* \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 & s_3^* & -s_4^* & s_1^* & s_2^* \end{pmatrix}$$

La transmission des symboles de constellation s'effectue simultanément sur les  $N$  antennes. La  $i$ -ème rangée de  $C$  représente les symboles transmis depuis l'antenne  $i$ , et la  $j$ -ème colonne de  $C$  représente les symboles transmis au temps  $j$  par le système multi-antennes. Dès lors que  $p$  instants sont utilisés pour transmettre  $kb$  bits, l'efficacité est de  $kb/p$  bps/Hz. Pour s'affranchir de la taille de la constellation, on définit le taux d'efficacité du design. On sait que l'efficacité spectrale maximale est au plus de  $b$  bps/Hz (section 5.2.3). On définit alors le rapport d'efficacité :  $kb/pb$  soit  $k/p$  (sans unité). Dans notre exemple, il y a 3 antennes, 8 instants de transmission et 4 symboles sélectionnés. Le taux d'efficacité est de  $1/2$ . Un taux d'efficacité égal à 1 signifie que l'efficacité est maximale.

La difficulté de ce type de codage réside dans la recherche de matrices  $G$ . Outre le fait que ces matrices doivent vérifier les critères de performances énoncés précédemment (en premier lieu le critère du rang) et produire une bonne efficacité spectrale, elles doivent aussi présenter la particularité d'avoir des rangées orthogonales. Cette orthogonalité permet un décodage simple. En effet un décodage par maximum de vraisemblance peut être réalisé par un traitement linéaire. La question est de savoir si il s'agit vraiment de codage dans le sens ou il est difficile de trouver

une interprétation algébrique (notamment du fait de la conjugaison des signaux) et que par exemple le gain en codage comme nous l'avons défini précédemment est parfois nul. Le terme de design orthogonal serait donc plus approprié.

Ce type de design a été amorcé par Alamouti dans [Ala98]. On y trouve un système de transmission à 2 antennes très simple. Deux signaux indépendants de constellation  $s_1, s_2$  sont transmis simultanément au premier temps de transmission. Au deuxième temps de transmission, les signaux conjugués  $-s_2^*, s_1^*$  sont transmis par les antennes respectives. Ce procédé a la propriété intéressante que les deux transmissions sont orthogonales dans la dimension temporelle et la dimension spatiale. On peut formaliser cette transmission par la matrice  $G(x_1, x_2)$  suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix}$$

Nous allons démontrer que  $G$  vérifie le critère du rang. Considérons les couples distincts de signaux  $(s_1, s_2)$  et  $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ . On associe comme précédemment les matrices mots de code  $C(s_1, s_2)$  et  $C(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$  en posant  $s_i$  ou  $\tilde{s}_i$  égal à  $x_i$  dans  $G$ . Appelons  $\Theta = C(s_1, s_2) - C(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ . On souhaite montrer que  $\text{rang}[\Theta] = 2$ .

$$\det(\Theta) \neq 0 = \sum_{i=1}^2 |s_i - \tilde{s}_i|^2$$

Ainsi,  $\det(\Theta)$  est non nul :  $\Theta$  est non singulière. Donc, son rang est maximal et vaut en l'occurrence 2. Par ailleurs, si l'on utilise une constellation de  $2^b$  signaux, l'efficacité spectrale sera de  $b$  bps/Hz puisque les  $2b$  bits qui arrivent au premier temps d'émission sélectionnant les signaux  $(s_1, s_2)$  sont finalement totalement transmis à la fin du deuxième temps d'émission. L'efficacité spectrale est ici maximale. Le décodage est un traitement linéaire simple de maximisation de métrique. Le lecteur curieux pourra approfondir ce détail dans l'article [Ala98].

Ce type de design a été ensuite généralisé par Tarokh dans [TJC99]. Il s'agit de l'application aux télécommunications de la théorie de Hurwitz-Radon qui est explicitée en détail dans [GS79]. Les mathématiques développées sont de haut niveau et fournissent des résultats très intéressants et quelque peu surprenants. Par la suite, nous allons énoncer les principaux résultats.

- *Le design orthogonal réel :*

Considérons des matrices  $G$  carrées  $n \times n$  ayant les éléments  $\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n$ . Dans ce cas, le taux d'efficacité vaut 1 (ce qui est le maximum). La diversité spatiale est aussi maximale. Par ailleurs, le décodage est simple (maximum de vraisemblance par traitement linéaire). Les propriétés précédentes sont conservées si on utilise des combinaisons linéaires des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Le problème est que ce genre de design orthogonal (linéaire ou non) existe si et seulement si  $n = 2, 4$  ou  $8$ . La linéarité n'apporte rien sauf de la complexité !

- *Le design orthogonal généralisé réel :*

Il s'agit ici de considérer des matrices rectangulaires à  $p$  colonnes et  $n$  rangées ayant pour éléments  $\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_k$  (taux d'efficacité  $k/p$ ). Un design orthogonal généralisé vérifie :  $G.G^\dagger = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2).I_n$ . On peut alors montrer que la diversité maximale est atteinte. Si on impose  $n$  et le taux de transmission, il nous reste à minimiser  $p$  afin de réduire la complexité des traitements. On s'intéresse bien sûr au taux d'efficacité maximal : 1. Tarokh a trouvé une méthode de construction de codes optimaux pour n'importe quelle valeur de  $n$ . Il a explicité quelques résultats pour  $n \leq 8$ .

- *Le design orthogonal complexe :*

Il s'agit ici de construire des matrices  $G$  carrées  $n \times n$  avec des combinaisons linéaires de  $\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n$  et leurs conjugués. Tarokh a montré qu'il en existait une seule ! C'est le cas de  $n=2$  qui correspond au procédé d'Alamouti.

- *Le design orthogonal généralisé complexe :*

On s'intéresse ici aux matrices à  $n$  rangées et  $p$  colonnes ayant pour éléments  $\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n$  et leurs conjugués. Soit  $G$  un de ces designs. Il faut que  $G.G^\dagger$  soit une matrice diagonale ayant pour éléments une combinaison linéaire positive de module au carré de  $x_i$ . Il s'agit encore de minimiser  $p$ . Tarokh a montré que pour un taux d'efficacité d'au plus  $1/2$ , on est assuré de trouver un design pour n'importe quel  $n$  et il a donné la méthode de construction. On a très peu de connaissances pour un taux supérieur à  $1/2$ . Tarokh a explicité 2 codes de taux  $3/4$ . Leur construction est délicate.

### 5.3.2 CST en treillis

Tarokh a proposé des règles de design pour des CST en treillis avec diversité spatiale 2 pour des systèmes n'utilisant que 2 antennes émettrices [TSC98]. Au début et à la fin de chaque paquet, le codeur doit être dans l'état zéro. A l'instant  $t$ , en fonction de l'état du codeur et des bits en entrée, une branche de transition est choisie. Si la valeur de cette branche est  $(q_1(t), q_2(t))$ , alors l'antenne émettrice  $i$  est utilisée pour envoyer un symbole de constellation  $q_i(t)$  pour  $i=1,2$  et toutes les émissions sont simultanées.

Règle 1 : les transitions divergeant d'un même état ont leur second symbole différent.

Règle 2 : les transitions convergeant vers un même état ont leur premier symbole différent.

La figure 5.5 est un exemple de CST en modulation 4-PSK avec une efficacité spectrale de 2 bps/Hz et un gain en diversité de 2. Les 4 séries de nombres à gauche désignent la valeur des transitions émergeant des 4 noeuds associés. La lecture de gauche à droite se transcrit sur le treillis par une répartition de bas en haut sur les transitions. Les nombres sont écrits en quaternaire : chaque nombre représente un signal sur la constellation 4-PSK. On vérifie aisément que ce code respecte les deux règles précédentes.

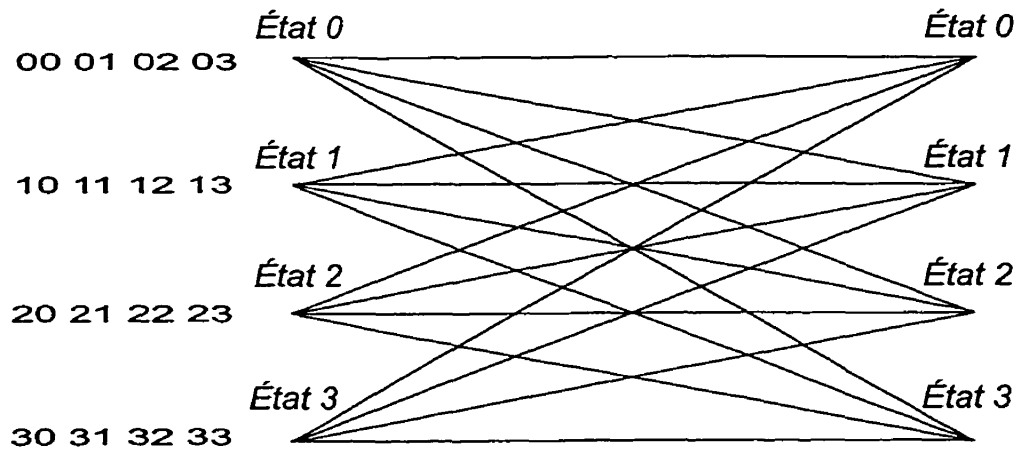


Figure 5.5: Exemple de CST en treillis avec constellation 4-PSK

On peut décrire ce treillis de manière simple par un codeur convolusionnel (figure 5.6). On note alors que les noeuds de bas en haut du treillis correspondent aux états 0,1,2,3 du codeur. Les données entrantes sont dans  $Z_4$  ce qui explique l'efficacité spectrale de 2 bps/Hz. Cette efficacité est d'ailleurs maximale puisque dans ce cas la constellation est 4-PSK et donc possède  $2^2$  signaux. Il nous reste encore à vérifier que le gain en diversité est maximal (en l'occurrence 2 puisqu'on utilise 2 antennes émettrices).

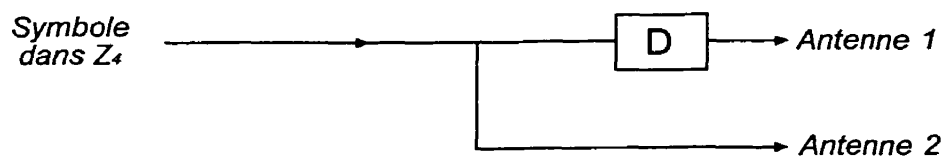


Figure 5.6: Exemple de codeur convolusionnel équivalent au CST en treillis

Quand les règles précédentes sont appliquées, la matrice de différence de mots de code  $B(C, E)$  possède deux rangées et est de la forme suivante (voir équation 5.5) avec  $X$  et  $Y$  deux nombres complexes non nuls :

$$\begin{pmatrix} \dots & X & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & Y & \dots \end{pmatrix}$$

En effet, le codeur devant nécessairement se trouver dans l'état 0 au début et à la fin de l'encodage, les mots de code  $C$  et  $E$  ont au moins un point de convergence et de divergence dans le treillis. En appliquant la règle 1 au point de divergence et en appliquant la règle 2 au point de convergence, on obtient nécessairement 2 colonnes libres. D'où  $\text{rang}[B(C, E)] = 2$ .

D'autre part, Tarokh [TSC98] a établi des résultats intéressants concernant la complexité des treillis. Entre autres :

- La longueur de contrainte d'un treillis de diversité spatiale  $r$  est au moins de  $r - 1$ .
- Soit  $b$  le taux de transmission d'un système multi-antennes avec un treillis de diversité spatiale  $r$ , il y a au moins  $2^{b(r-1)}$  états.

On peut aisément vérifier ces résultats sur l'exemple précédent.

Tarokh a réussi à designer, en recherche systématique assistée par ordinateurs, de bons et de mauvais codes suivant ces règles. Il a aussi élaboré de bons codes qui ne respectent pas ces règles. A noter que le gain de codage n'a pas été pris en compte ici. C'est ainsi que ces codes ont été améliorés dans [BBH00] grâce au gain de codage. Par ailleurs, une troisième règle a été proposée dans [GFK98], afin de généraliser la recherche de CST à une diversité spatiale supérieure ou égale à 2. Il s'agit de la règle dite de "symétrie des zéros" qui se focalise sur la triangularité de la matrice  $B(C, E)$ . Cette règle semble être nécessaire mais non suffisante. Bref, il manque des critères unificateurs pour construire de bons CST. Le prochain chapitre apportera de nouvelles solutions.

#### 5.4 CST convolutionnels pour modulation BPSK

La construction de CST est rendue difficile car le critère du rang, pour le cas d'évanouissements quasi-statiques, s'applique à une différence en complexe de mots de code. Il est alors difficile de se référer au domaine binaire où le design de code est mieux compris. D'ailleurs, le critère du rang s'appuie sur une différence dont le signe a de l'importance ce qui semble compliqué à traduire en binaire. L'astuce

a consisté à introduire une relation d'équivalence entre matrices pour se ramener au cadre binaire. Le critère du rang en binaire, démontré en annexe A, en est l'aboutissement. Par la suite, nous utilisons les résultats de l'article [HG00] pour expliciter une nouvelle classe de CST.

Critère du rang en binaire :

Soit  $\Gamma$  un CST linéaire  $N \times h$  ( $N \leq h$ ) et  $\mathbf{C}$  le code correcteur binaire associé. Si tout mot de code  $\bar{C}$  de  $\mathbf{C}$ , non nul, de longueur  $Nh$ , mis sous forme de la matrice de taille  $N \times h$  :

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c^1(1) & c^1(2) & \dots & c^1(h) \\ c^2(1) & c^2(2) & \dots & c^2(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^N(1) & c^N(2) & \dots & c^N(h) \end{pmatrix}$$

admet le rang maximal  $N$  sur  $Z_2$ , alors pour la modulation BPSK, le CST  $\Gamma$  atteint la diversité maximale  $N$ .

#### 5.4.1 La construction en pile

Soient  $M_1, M_2, \dots, M_N$  des matrices binaires de dimension  $L \times h$  ( $L \leq h$  et  $N \leq h$ ). Considérons le code correcteur binaire  $\mathbf{C}$ , qui à tout bloc  $\bar{x}$  de  $L$  bits d'information associe un mot de code de longueur  $Nh$  que l'on peut représenter sous la forme de la matrice de taille  $N \times h$  :

$$\bar{C}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}.M_1 \\ \bar{x}.M_2 \\ \dots \\ \bar{x}.M_N \end{pmatrix}$$

Soit  $\Gamma$  le CST  $N \times h$  associé au code correcteur  $\mathbf{C}$ .  $\Gamma$  satisfait le critère du rang en binaire (et donc atteint la diversité maximale  $N$  pour la modulation BPSK) si et seulement si les matrices  $M_1, M_2, \dots, M_N$  vérifient la propriété suivante, où



l'opérateur  $\oplus$  représente l'addition modulo 2 :

$$\forall \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathbb{Z}_2 \text{ non tous nuls,}$$

$$M = \beta_1 M_1 \oplus \beta_2 M_2 \oplus \dots \oplus \beta_N M_N \text{ est de rang maximal } N$$

*Démonstration :*

( $\Rightarrow$ ) Procédons par l'absurde. Supposons que  $\Gamma$  satisfasse le critère du rang en binaire mais que  $M = \beta_1 M_1 \oplus \beta_2 M_2 \oplus \dots \oplus \beta_N M_N$  ne soit pas de rang maximal pour des coefficients non tous nuls  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathbb{Z}_2$ . Il existe un vecteur binaire  $\bar{x}_0$  non nul de longueur  $L$  tel que  $\bar{x}_0 \cdot M = 0$ . Alors,

$$\bar{x}_0 \cdot M = \beta_1 \bar{x}_0 \cdot M_1 \oplus \beta_2 \bar{x}_0 \cdot M_2 \oplus \dots \oplus \beta_N \bar{x}_0 \cdot M_N = 0$$

est une combinaison linéaire liée de rangées de  $\bar{C} \in \mathbb{C}$ . Comme  $\Gamma$  satisfait le critère du rang en binaire, alors tout mot de code non nul de  $\mathbb{C}$  a une matrice représentative de rang maximal. On en déduit que nécessairement,  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = 0$ . D'où l'absurdité.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $M_1, M_2, \dots, M_N$  vérifient la propriété précédente mais que pour un certain vecteur binaire  $\bar{x}_0$  non nul,  $\bar{C}(\bar{x}_0) \in \mathbb{C}$  n'ait pas une matrice représentative de rang maximal. Il existe des coefficients non tous nuls  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathbb{Z}_2$ , pour lesquels :

$$\bar{x}_0 \cdot M = \beta_1 \bar{x}_0 \cdot M_1 \oplus \beta_2 \bar{x}_0 \cdot M_2 \oplus \dots \oplus \beta_N \bar{x}_0 \cdot M_N = 0$$

Par hypothèse,  $M$  est de rang maximal donc nécessairement  $\bar{x}_0 = 0$ . D'où l'absurdité.

Intuitivement, on peut expliquer la construction en pile comme ci-après. Afin d'atteindre la diversité maximale  $N$  pour un canal à évanouissements quasi-statiques,

on s'attend à ce que le récepteur faisant face à  $N - 1$  canaux d'évanouissements soit capable de retrouver l'information du vecteur de bits  $\bar{x}$  à partir d'un canal non évanoui, ce qui implique que chaque  $M_i$  soit non singulière. Et par un raisonnement similaire, qu'une combinaison linéaire des  $M_i$  soit aussi non singulière.

La construction en pile est donc une méthode simple pour obtenir de bons CST. La prochaine section mettra en relief un nouveau type de CST obtenu par cette construction appliquée aux codes convolutionnels. Nous étudierons uniquement cette classe de code, mais avec cet outil puissant, gageons qu'il est possible d'obtenir de nombreux autres codes.

#### 5.4.2 Les CST convolutionnels

Considérons les codes convolutionnels binaires de taux  $1/N$  de longueur de contrainte  $K$ . Ces codes correcteurs sont décrits par  $N$  vecteurs de connexions de longueur  $K$  :

$$G_1(D), G_2(D), \dots, G_N(D)$$

où  $D$  est le paramètre de retard.  $G_i(D)$  correspond au codage du  $i$ -ème symbole codé. Par souci de simplicité, on écrit les vecteurs de connexions sous forme octal. On note  $G$  le vecteur de longueur  $N$  qui regroupent ces valeurs octales.

Associons à l'antenne  $i$  la  $i$ -ème sortie du codeur. On obtient alors une classe de CST pour un système à  $N$  antennes émettrices dont le code correcteur associé est un code convolutionnel de taux  $1/N$ . La figure 5.7 est une illustration de ce type de CST dit "convolutionnel".

Soit  $x(D)$  le polynôme d'information. Le mot de code obtenu par codage convolutionnel est  $\bar{C}(D) = x(D)[G_1(D), G_2(D), \dots, G_N(D)]$ . Soit  $\mu$  la mémoire du code,  $\mu = K - 1$ . Si on restreint  $x(D)$  à un bloc de  $L$  bits, alors on obtient un CST  $N \times (L + \mu)$  de taille  $L$ .

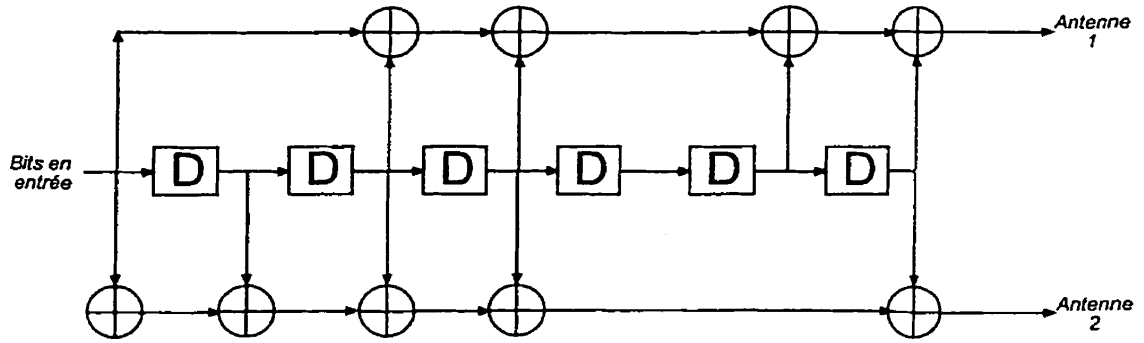


Figure 5.7: Codeur convolutionnel de taux 1/2 :  $G=[133,171]$ ,  $K=7$

*Proposition :*

Les CST associés aux codes correcteurs binaires convolutionnels de taux  $1/N$  et ayant les vecteurs de connexions  $G_i(D)$  pour  $i=1, \dots, N$ , satisfont le critère du rang en binaire (et donc atteignent la diversité maximale  $N$  pour la modulation BPSK) si et seulement si  $[G_1(D), G_2(D), \dots, G_N(D)]$  atteint le rang maximal  $N$  sur  $Z_2$ .

*Démonstration :*

Soit  $G_i(D) = g_{i0} + g_{i1}D + g_{i2}D^2 + \dots + g_{i\mu}D^\mu$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$ . On déduit la proposition en appliquant la construction en pile aux matrices génératrices  $M_i$ , chacune de dimension  $L \times (L + \mu)$  :

$$M_i = \begin{pmatrix} g_{i0} & g_{i1} & \dots & g_{i\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{i0} & g_{i1} & \dots & g_{i\mu} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{i0} & g_{i1} & \dots & g_{i\mu} \end{pmatrix}$$

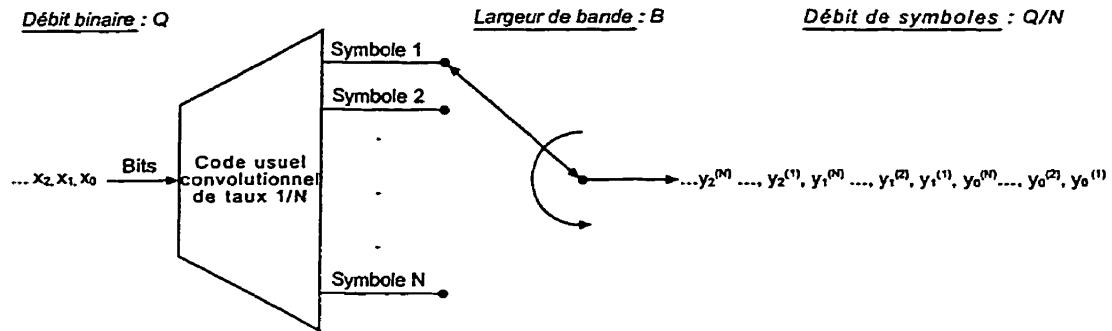
Ces CST convolutionnels ont aussi une représentation en treillis. À ce titre, on peut utiliser les résultats de Tarokh pour les CST en treillis. Ainsi, on peut remarquer que  $N - 1 \leq \mu$  pour que la diversité maximale soit atteinte. Pour ce qui est des analogies avec les CST en treillis, le critère du rang en binaire n'est

pas suffisant car Tarokh a développé des codes utilisant des modulations d'un ordre supérieur à BPSK et par ailleurs les codes en treillis sont souvent non linéaires.

La construction en pile a été considérée pour un canal quasi-statique. Mais dans une perspective plus globale, les CST convolutionnels devraient aussi avoir un assez bon comportement pour un canal rapidement variable. En effet, pour un tel environnement, le critère de la distance (qui est le pendant du critère du rang) établit que le gain en diversité correspond au nombre de différences entre colonnes pour des mots de codes distincts. Il faut alors s'intéresser au profil de distance des colonnes du code convolutionnel temporel. Une idée simple consiste à considérer que plus la distance libre du code convolutionnel est élevée, plus il y a potentiellement des termes distincts entre deux mots de codes temporels distincts, ce qui se traduit matriciellement dans le domaine spatial par le fait que deux trames distinctes de CST auront des colonnes ayant un nombre de différences potentiellement élevé. En fait, pour être exact, c'est la distance minimale du code qui importe car vu la structure du codage spatio-temporel, on ne raisonne jamais sur des mots de code de longueur très élevée. Ce raisonnement est un peu simpliste car un code convolutionnel pourrait très bien avoir une distance libre ou minimale élevée sans pour autant présenter de nombreuses différences entre deux mots de code distincts. Néanmoins, c'est un bon point de départ pour construire des CST convolutionnels appartenant à la classe des "smart-greedy" codes. Les simulations permettront de juger des performances pour différents types d'évanouissements.

La figure 5.8 établit une comparaison entre le codage convolutionnel classique et le CST convolutionnel. Elle illustre le fait que le CST assure un meilleur débit de données et tire un meilleur parti de la largeur de bande disponible. Du fait de la transmission en parallèle sur chaque antenne émettrice pour une même fréquence, il n'y a pas de perte de débit dans le canal par rapport à la source, pour une largeur de bande donnée.

### Codage convolutionnel temporel



### CST convolutionnel

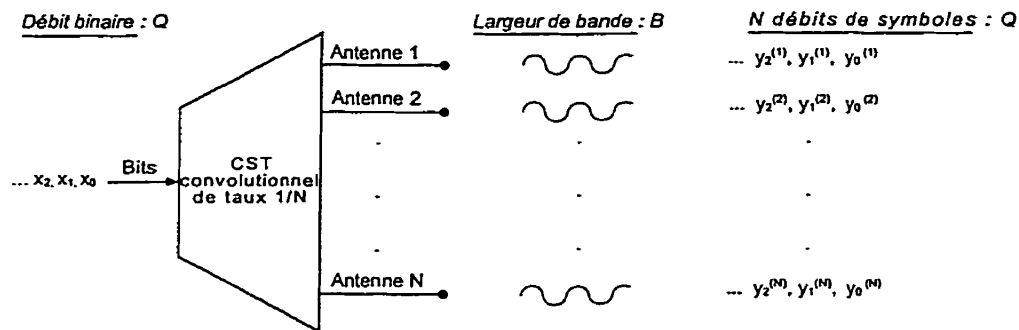


Figure 5.8: Codage convolutionnel classique et CST convolutionnel

#### 5.4.3 Recherche de CST convolutionnels

Afin de trouver les bons CST convolutionnels, il faut faire une recherche parmi les meilleurs codes convolutionnels connus (distance libre la plus élevée) et vérifier que la fonction de transfert admette un rang maximal. On peut par ailleurs s'interroger sur l'impact de la distance libre comme critère de performance. En effet, ce paramètre n'intervient pas directement dans la borne supérieure d'erreur de trame (équation 5.6). On peut néanmoins intuitivement penser que la distance libre améliore le gain de codage et donc tend à se conformer au critère du

déterminant. Les simulations apporteront des réponses quantitatives.

L'annexe B établit des listes de CST convolutionnels de diversité maximale  $N$  (en BPSK) pour  $N = 2, 3, \dots, 10$  à partir de codes convolutionnels binaires de taux de codage  $1/N$ . Pour obtenir ces listes, nous avons effectué une recherche systématique parmi les codes classiques de la littérature obtenues par Odenwalder (1970), Larsen (1973) et Daut *et al.* (1982) [Ode70][Lar73][DMW82] et parmi les codes imbriqués de faibles taux de codage obtenus par D. Haccoun et ses étudiants [coi94] [Hc95]. Nous avons délibérément présenté de nombreux codes afin d'établir un bilan complet, toutefois certains d'entre eux n'ont qu'un intérêt académique. En effet, nous avons recensé des codes ayant une longueur de contrainte  $K$  allant jusqu'à 14, ce qui est optimiste dans la mesure où la difficulté d'implantation physique fait que les applications des codes convolutionnels avec décodage de Viterbi se limitent au plus à  $K=9$ .

Par ailleurs, nous avons présenté tous les codes ayant une distance libre maximale. Néanmoins, on observe que plus  $N$  augmente, plus les codes convolutionnels impliqués ont une distance libre qui n'est pas maximale par rapport au codes connus. En d'autres termes, les codes convolutionnels ayant les distances libres les plus élevées vérifient de moins en moins le critère du rang en binaire dès lors que  $N$  augmente.

En outre, on trouvera aussi des codes qui n'ont pas une distance libre maximale pour  $K$  et  $N$  fixés, alors qu'il existe bel et bien un CST ayant une distance libre maximale pour ces valeurs de  $K$  et  $N$ . Ces codes concernés sont en fait des codes imbriqués, c'est-à-dire que le code avec le plus petit taux de codage contient ceux de taux supérieurs (certains codes classiques sont aussi imbriqués). Ainsi, nous disposons de séries de codes à "taux compatible". À l'origine, le terme de taux compatible décrit des codes simplement temporels pour lesquels on peut passer d'un code à l'autre en ajoutant des bits de répétition [KH90]. Ces codes présentent l'intérêt de pouvoir faire varier le taux de codage suivant les conditions de trans-

mission. Par analogie, les CST à taux compatible pourraient s'avérer utiles dans le cadre d'un système où l'on souhaite faire varier le nombre d'antennes émettrices utilisées suivant les conditions du canal ou de la puissance disponible puisque, avec la dimension spatiale, le taux de codage est directement lié au nombre d'antennes émettrices (figure 5.9).

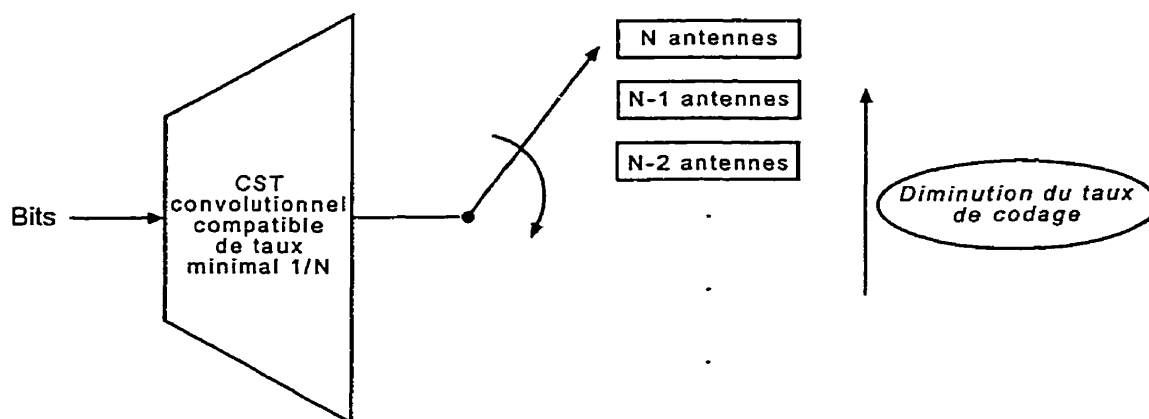


Figure 5.9: CST de taux compatible

Finalement, on notera que les codes convolutionnels énumérés sont tous doublement complémentaires excepté un ! Nous allons exposer par la suite l'adaptation aux CST des techniques explicitées au chapitre 3 concernant le décodage de codes temporels convolutionnels doublement complémentaires et ceci afin de diminuer la complexité du décodage.

#### 5.4.4 Adaptation de la procédure CSA

Un code convolutionnel de taux de codage  $1/N$  est doublement complémentaire si chacun de ses  $N$  générateurs est connecté à la première et à la dernière cellule du registre à décalage. Cette particularité implique que l'on peut subdiviser le treillis représentatif du code en sous-treillis (papillons) tels que  $N$  symboles entrant ou quittant un même noeud sont complémentaires. Pour un code de mémoire  $\mu$ , il y a  $2^{\mu-1}$  papillons à deux états. Chaque état étant désigné par  $\mu$  bits, on en

déduit que les deux états d'un même papillon, qui servent de point de départ aux transitions, diffèrent au niveau du dernier bit (figure 3.9, chapitre 3) : on peut donc les identifier par leur dernier bit. Le calcul des métriques est simplifié puisqu'il suffit de déterminer une métrique pour une branche de chaque papillon puis déduire les autres par complémentarité. On va donc procéder au décodage en travaillant sur chaque papillon [SF98][HCN99].

D'après les équations 5.2 et 5.4, le récepteur ayant reçu  $M$  signaux  $d^j(t)$  pour  $j=1, 2, \dots, M$ , le décodeur doit estimer la séquence des  $s_{estimate}^i(t)$  pour  $i=1, 2, \dots, N$ , connaissant les atténuations du canal  $\alpha_{i,j}$ , afin de minimiser la métrique :

$$\sum_{j=1}^M \left( d^j(t) - \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t) \right)^2$$

Soit en développant :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \left( (d^j(t))^2 + \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t) \right)^2 - 2d^j(t) \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^M (d^j(t))^2 + \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t) \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^M \left( d^j(t) \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t) \right) \end{aligned}$$

$\sum_{j=1}^M (d^j(t))^2$  est un terme commun pour chaque branche du treillis, on peut donc l'éliminer du calcul de la métrique. Pour une modulation BPSK, on peut écrire  $s_{estimate}^i(t) = (-1)^{c^i_{estimate}(t)}$  avec  $c^i$  les symboles codés. D'après la propriété de la double complémentarité, les symboles codés des branches du papillon arrivant à un même noeud sont complémentaires, donc les symboles BPSK correspondants sont opposés. Ainsi, on peut aussi éliminer  $\sum_{j=1}^M [\sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t)]^2$  du calcul de la métrique à chaque noeud d'un papillon. Finalement, la métrique de branche d'un papillon sera  $\chi(t) = 2 \sum_{j=1}^M [d^j(t) \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t)]$  qui ne peut prendre que deux valeurs opposées. Le but sera alors de minimiser la métrique générale  $\Delta = \sum_t \chi(t)$



à chaque noeud. Minimiser est à prendre au sens large *i.e.* trouver la valeur la plus négative car on a supprimé les termes positifs de la métrique. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il s'agit d'une minimisation : ceci nous impose de modifier l'algorithme CSA classique, présenté au chapitre 3 pour le cas d'une maximisation de métrique.

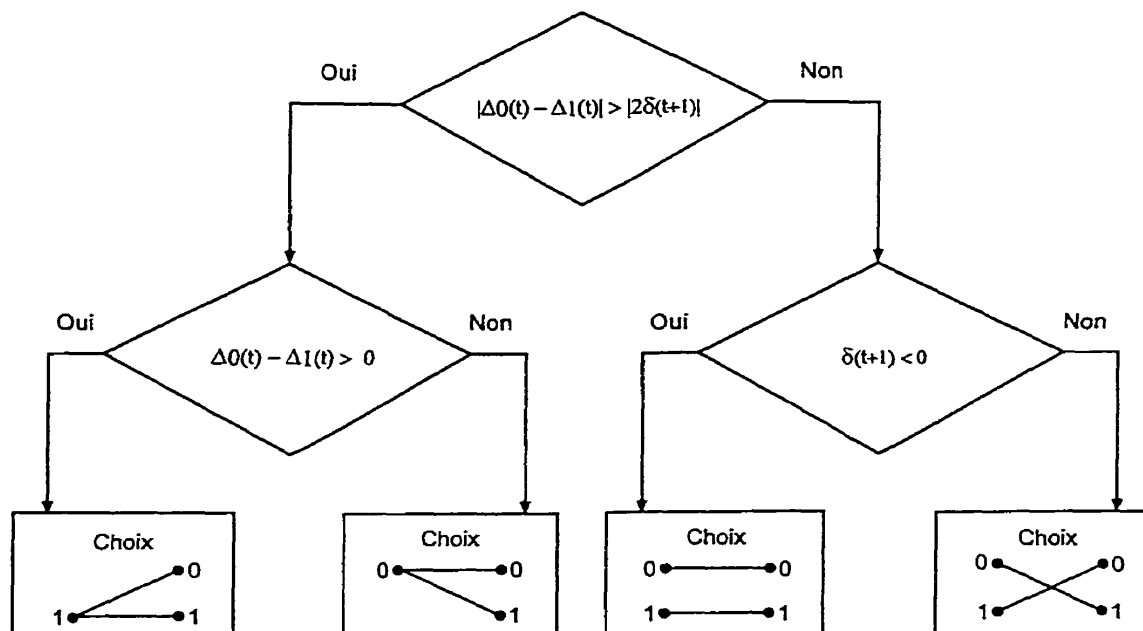


Figure 5.10: Algorithme CSA pour les CST

L'algorithme CSA consiste à comparer la métrique de branche, calculée pour la transition de l'instant  $t$  à  $t + 1$ , avec les métriques générales déterminées à l'instant  $t$  (aux entrées du papillon), choisir la meilleure branche et enfin mettre à jour les métriques générales à l'instant  $t + 1$ . L'algorithme classique ACS calcule d'abord toutes les métriques générales et ensuite fait son choix. La figure 5.10 présente les différents phases de l'algorithme CSA adapté au cas du décodage spatio-temporel (voir chapitre 3). Un noeud à  $t + 1$  est atteint par deux branches originaires de l'instant  $t$  : l'une décrivant un bit d'entrée 0 et l'autre un bit d'entrée 1. On notera  $\Delta_i(t)$  la métrique générale à l'instant  $t$  du noeud identifié par son dernier bit  $i$ , pour  $i=0,1$ . Par ailleurs, la métrique  $\chi(t)$  calculée pour une transition parallèle de

$t$  à  $t + 1$  sera dénommée  $\delta(t + 1)$ .

Les algorithmes CSA et ACS ont les mêmes performances : ils sont tous les deux optimaux. L'avantage de l'algorithme CSA est de réduire la complexité du décodage. Pour un décodage CSA, on estime que la complexité est réduite d'un tiers [HCN99] par rapport au décodage classique, sans porter atteinte à l'optimalité de la procédure. Cette diminution peut être mise à profit pour simplifier l'architecture, accélérer le décodage ou tout simplement économiser de l'énergie.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des éléments de codage spatio-temporel qui repose sur l'utilisation adéquate des deux dimensions : spatiale et temporelle. Avec un système multi-antennes, il s'agit de répartir astucieusement la transmission de l'information sur les différentes antennes et dans le temps. Pour un canal à évanouissements de Rayleigh, nous disposons de deux critères de design de codes : (1) le critère du rang, qui décrit la décroissance exponentielle des courbes de performance, (2) le critère du déterminant, qui décrit le gain en codage. À partir de ces critères, des recherches directes ont permis de découvrir des CST en treillis et en blocs. Toutefois, ces critères ne sont pas suffisants pour établir des règles de design. Pour combler ce manque, nous avons présenté une méthode générale de codage binaire pour la modulation BSPK. En appliquant cette méthode, il a été possible de définir une nouvelle classe de CST : les CST convolutionnels. Nous avons alors répertorié une liste de bons CST convolutionnels, dont certains permettent d'accommoder un nombre variable d'émetteurs, et nous avons explicité un décodage plus simple associé à ces codes en faisant usage de leur propriété de double complémentarité. Le chapitre suivant aura pour but de simuler sur ordinateurs les performances de ces codes et d'analyser les résultats.

## CHAPITRE 6

### ANALYSE DES PERFORMANCES DES CST CONVOLUTIONNELS

Dans ce chapitre, nous étudierons l'impact des différents paramètres de simulation d'un système multi-antennes utilisant des CST convolutionnels. On évaluera principalement les performances du système par le taux d'erreur de transmission. Après avoir décrit la méthode de simulation assistée par ordinateurs, nous aborderons successivement : l'influence du nombre d'antennes, l'influence de la longueur de contrainte du code, la comparaison avec les systèmes connus, l'influence du canal et enfin les performances vis-à-vis de la capacité théorique du canal.

#### 6.1 Description des simulations

Le taux d'erreur est une donnée primordiale pour l'analyse d'un système de communications. Nous avons choisi d'étudier le taux d'erreur par trame plutôt que le taux d'erreur par bit. Il est certain que la probabilité d'erreur par bit est une donnée plus générale puisqu'elle ne dépend pas de la longueur de trame, mais notre préférence se justifie par le fait que les CST sont intrinsèquement construits suivant un modèle de transmission spatio-temporelle de trames. De plus, de très nombreux systèmes de communications utilisent des trames d'information (téléphone, ordinateurs...). Pour exemple, la norme "Digital Speed level 1", pour le signal vocal numérisé PCM (modulation par impulsion et codage) dans le téléphone fixe au Canada, préconise l'utilisation de trames de 193 bits [dtB99].

Dans l'absolu, il est délicat de fixer une longueur de trame. En effet, seul le concepteur du système final pourra jouir de cette possibilité. Pour nos simulations, et sauf contre-indications, nous avons considéré des trames de 250 bits d'information utile. Cette valeur, bien que proche des 256 valeurs de quantification de la voix sur 8

bits, n'a pas de signification précise. Toutefois, elle n'a pas été complètement choisie au hasard. Tout d'abord, il s'agit d'une valeur moyenne qui pourrait très bien être adoptée pour un système réel. Ensuite, la longueur est suffisamment conséquente pour faire quelques approximations. Finalement, cette valeur est suffisamment petite pour que la durée des simulations ne soit pas prohibitive.

Cette valeur de 250 bits d'information n'est en fait qu'une approximation. En effet, elle ne comptabilise pas les symboles dédiés au fonctionnement du système. Outre les problèmes de synchronisation, le fonctionnement du système est basé sur une connaissance a priori idéale du canal. En optant pour l'émission de séquences périodiques d'entraînement, il serait nécessaire d'ajouter des bits connus à l'avance du récepteur. Comme nous utilisons un nombre limité de récepteurs, ces bits additionnels ne fausseraient pas les résultats. Par ailleurs, l'ajout d'une queue d'information est un moyen pour améliorer les performances du décodage de Viterbi. Dans la pratique, on complète toujours la trame utile par une séquence de zéro dont la longueur est égale à la mémoire du code, et cela pour ré-initialiser le codeur et le décodeur. Là encore, les codes utilisés ont une mémoire limitée : on peut négliger ces bits additionnels. Pour un système réel, on pourrait astucieusement utiliser des bits d'entraînement comme des bits de queue ou vice-versa. À l'instar de la plupart des procédés de transmission de trames, le contrôle d'erreurs est rendu encore plus efficace en ajoutant un code CRC dans la trame combiné avec une méthode de retransmission de requêtes. Ces techniques n'étant pas directement liées aux CST, nous n'en tiendrons pas compte lors des simulations.

En fonction des qualités de service souhaitées par les utilisateurs du système de communications, certaines performances minimales sont requises. Typiquement, pour assurer une conversation fiable au téléphone, on recherche une probabilité d'erreur par trame  $P(E)$  de  $10^{-3}$  alors qu'un transfert de données de type vidéo nécessite une  $P(E)$  de  $10^{-5}$  [Gro98]. Dans le cadre de nos simulations, nous nous sommes efforcés de représenter le seuil de  $P(E)$  égal à  $10^{-3}$ . Cela implique parfois

un temps de calcul conséquent. En effet, pour déterminer  $P(E)$  nous avons simulé l'envoi d'un certain nombre de trames, pour un SNR donné, et nous avons compté le nombre de trames en erreur à la réception. Il est à noter qu'une trame est en erreur dès lors qu'un bit est erroné. Nous avons considéré que 25 erreurs de trames était un minimum statistique pour obtenir une probabilité valable. Le seuil de  $10^{-3}$  implique donc la simulation d'au moins  $\frac{25}{10^{-3}} = 25000$  transmissions de trames soit 6 250 000 bits. Pour un code ayant une longueur de contrainte de 9, le temps de calcul d'une valeur de  $P(E)$  s'élève à plusieurs heures.

La complexité des calculs est fonction de la longueur de contrainte du code, du nombre d'émetteurs et de récepteurs. La longueur de contrainte est le paramètre le plus pénalisant : la complexité du décodage de Viterbi augmente exponentiellement avec la mémoire du code convolutionnel [Wic95]. Le nombre d'émetteurs  $N$  et le nombre de récepteurs  $M$  interviennent dans le calcul de la métrique. La métrique de branche est de la forme (chapitre 5) :  $\sum_{j=1}^M [d^j(t) \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \cdot s_{estimate}^i(t)]$ . La double sommation implique une complexité proportionnelle à  $MN$ . En pratique, les simulations ont été réalisées avec plus de récepteurs que d'émetteurs. On a pu observer une augmentation conséquente de la durée des calculs sur la plage de variation du nombre de récepteurs.

La programmation du simulateur a été réalisée avec le logiciel Visual C++<sup>®</sup>. Il s'agit évidemment d'un simulateur purement numérique. Les trames d'information utile, avant l'encodage, sont des séquences aléatoires de zéros et de uns. Nous avons pris garde de générer équiprobablement et aléatoirement ces données binaires. Plus précisément pour l'aspect aléatoire, le logiciel fournissant un tableau pré-défini de nombres aléatoires, il suffit d'initialiser la lecture du tableau à différents moments. La génération du bruit et des évanouissements est obtenue de façon similaire. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le SNR représente le rapport de la puissance moyenne du signal à un récepteur sur la puissance moyenne du bruit. La puissance moyenne du bruit est facilement obtenue par la variance de la variable

aléatoire gaussienne. En revanche, il faut bien se rappeler que la puissance moyenne à un récepteur ne dépend pas du nombre d'antennes, notamment car la puissance d'émission est constante. Nous avons pondéré la valeur des signaux émis en fonction du nombre d'émetteurs et ce pour que la puissance discrète simulée à l'émission soit constante. Cette précaution nous permettra de comparer les performances du système pour différents nombre d'antennes.

Tous les résultats ont été obtenus par l'algorithme CSA : nous avons validé sa fiabilité en vérifiant que l'algorithme ACS donnait les mêmes résultats pour un code donné et une séquence donnée, et à différentes valeurs de SNR. Le modèle utilisé, sauf précisions, est un canal plat à évanouissements quasi-statiques de Rayleigh. Le canal n'est pas quantifié et le décodage s'effectue de manière totalement "douce", c'est-à-dire que les valeurs des métriques sont continues.

## 6.2 Influence du nombre d'antennes

Le premier paramètre régissant la conception d'un système multi-antennes est la détermination du nombre d'antennes à utiliser. Il s'agit aussi de connaître la répartition du nombre d'antennes à l'émission et à la réception. La nature même des CST convolutionnels ne permet pas d'étudier séparément l'influence du nombre d'émetteurs. En effet, le nombre d'émetteurs est inversement proportionnel au taux de codage du code convolutionnel originel. Or, de manière générale, les performances du codage convolutionnel s'améliorent quand le taux de codage diminue (notamment car la distance libre augmente). Dès lors, il est délicat de quantifier exactement le gain en diversité à l'émission sachant que le gain en codage biaise les résultats. Ce n'est toutefois pas le cas pour la diversité à la réception, puisque le nombre de récepteurs est indépendant du code choisi.

### 6.2.1 Diversité à l'émission

Nous présentons ici des résultats quant à la diversité à l'émission. Ces données sont à considérer avec prudence comme expliqué précédemment. Le nombre de récepteurs a été fixé à 3. Nous avons simulé les performances d'erreurs d'un système avec un nombre variable d'émetteurs de 2 à 5. Les CST employés ont pour longueur de contrainte  $K=8, 9$ . Parmi les CST disponibles (annexe B), nous avons choisi les codes imbriqués qui permettent un taux compatible de 2 à 5 émetteurs tout en maximisant la distance libre. Les figures 6.1 et 6.2 illustrent directement le gain relatif en diversité à l'émission, mesuré pour deux valeurs de  $P(E)$  :  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ .

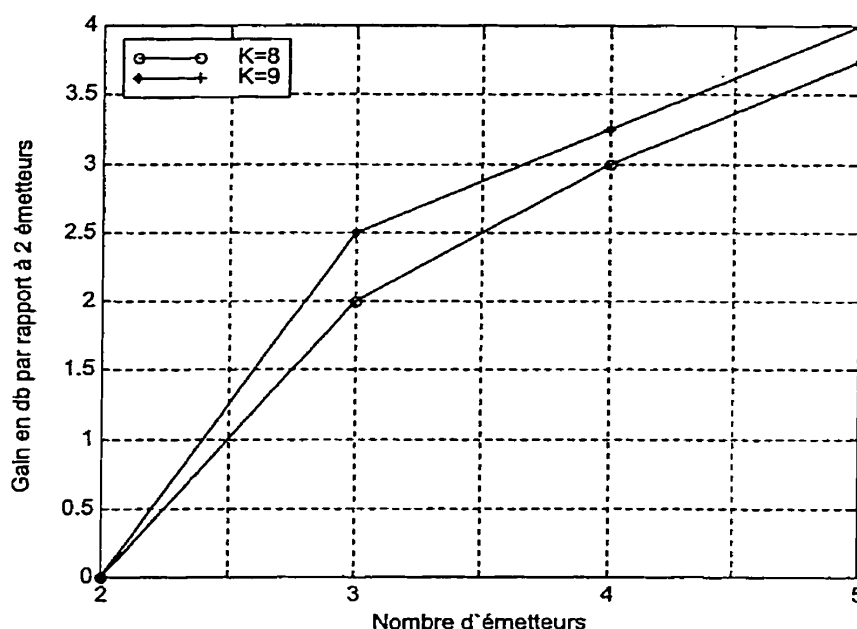


Figure 6.1: Gain relatif en diversité à l'émission, avec 3 récepteurs, mesuré pour  $P(E)=10^{-2}$  ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $K = 8$  - SNR = 8.75 dB), ( $K = 9$  - SNR = 8.5 dB)

À l'observation de la figure 6.1, deux remarques immédiates s'imposent : augmenter le nombre d'émetteurs (gain en diversité) ou augmenter la longueur de contrainte (gain en codage) - toute chose étant égale par ailleurs - permet d'améliorer

les performances. Le contraire aurait été surprenant : l'équation 5.6 montre entre autres que, en théorie, la borne supérieure de performance décroît exponentiellement en fonction du SNR élevé à la puissance du nombre d'émetteurs. Le simulateur semble bien réaliste. Néanmoins, en ce qui concerne la diversité à l'émission, on s'aperçoit que le gain a tendance à stagner avec l'augmentation du nombre d'émetteurs. Ce phénomène ne semble pas être conforme notamment avec le fait que l'augmentation du nombre d'émetteurs entraîne un gain en codage (du fait de la diminution du taux de codage). En fait ici, un autre facteur se manifeste : le nombre d'émetteurs peut dépasser le nombre de récepteurs. Or, la qualité du décodage ne peut pas indéfiniment s'améliorer avec un afflux de plus en plus important d'information : le traitement à la réception ne parvient pas à "digérer" toutes les données incidentes. C'est une observation classique et intuitive pour les systèmes multi-antennes (nous l'avons déjà remarqué pour l'efficacité spectrale).

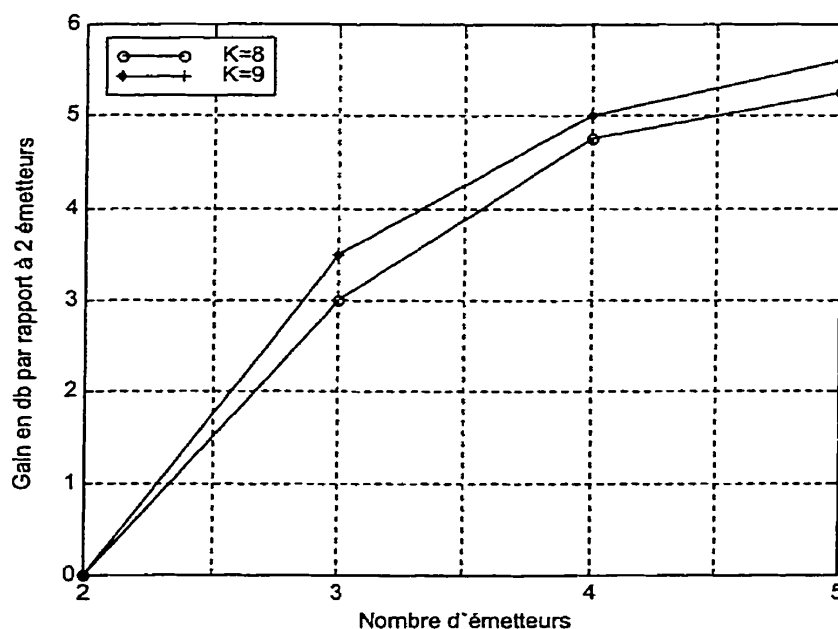


Figure 6.2: Gain relatif en diversité à l'émission, avec 3 récepteurs, mesuré pour  $P(E)=10^{-3}$  ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $K = 8$  - SNR = 12.1 dB), ( $K = 9$  - SNR = 11.9 dB)



Le gain mesuré pour  $P(E)=10^{-3}$  confirme les observations précédentes. En comparant les deux figures, on note que le gain augmente quand  $P(E)$  diminue. Par exemple, avec  $K=9$  et 4 émetteurs, le gain pour  $P(E)=10^{-2}$  est de 3.25 dB alors qu'il est de 5 dB pour  $P(E)=10^{-3}$ . Cela s'explique par la décroissance exponentielle des courbes de performances des codes convolutionnels : les gains se dilatent en parallèle avec l'augmentation du SNR.

D'un point de vue purement numérique, le passage de 2 émetteurs à 3 émetteurs procure un gain d'au moins 2 dB sur les 2 figures alors que l'augmentation d'une unité de longueur de contrainte ne donne qu'un avantage d'au plus 0.5 dB. Tout chose étant, le codage est moins coûteux en matériel. Cependant, il apparaît clairement que la diversité est une technique performante.

### 6.2.2 Diversité à la réception

Afin d'illustrer la diversité à la réception, nous avons simulé les performances en termes d'erreurs d'un système avec un nombre variable de récepteurs jusqu'à 9. Les CST employés ont pour longueur de contrainte  $K=5$ . Nous avons volontairement choisi une longueur de contrainte modeste pour que la durée de calcul avec un nombre élevé de récepteurs ne soit pas prohibitive. Les simulations ont été réalisées pour 2 et 3 émetteurs. Pour le coup, nous n'avons pas considéré des CST imbriqués : nous avons préféré employer des codes qui maximisent la distance libre. Pour 2 et 3 émetteurs, on utilise respectivement les générateurs  $G=[23,35]$  et  $G=[25,33,37]$ . Les figures 6.3 et 6.4 illustrent directement le gain relatif en diversité à la réception, mesuré pour deux valeurs de  $P(E)$  :  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ .

L'observation des courbes atteste pleinement du gain en diversité à la réception. Bien que le gain semble avoir un comportement asymptotique logarithmique, les premiers gains sont énormes puisque l'on gagne aisément 3 dB en ajoutant un récepteur : cela signifie une réduction de moitié de la puissance ! Autant de puissance en moins pour le chargement d'éventuelles batteries.

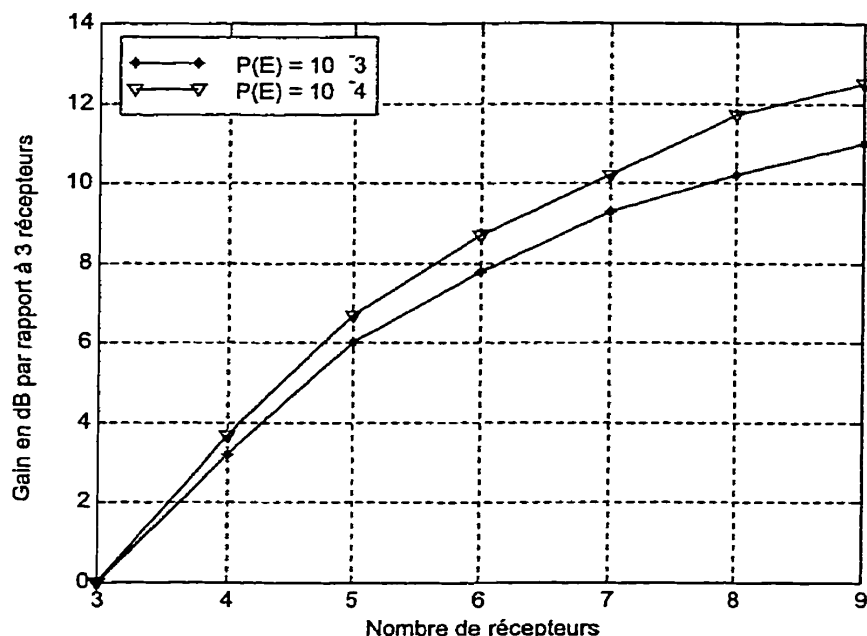


Figure 6.3: Gain relatif en diversité à la réception, avec 2 émetteurs et  $K=5$  ; référence pour 2 émetteurs, 3 récepteurs : ( $P(E) = 10^{-3}$  - SNR = 13.5 dB), ( $P(E) = 10^{-4}$  - SNR = 16 dB)

Intuitivement, le semblant de palier du gain peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de récepteurs, pour un nombre fixe d'émetteurs, épuise les possibilités de diversité : c'est-à-dire que pour un nombre élevé de récepteurs, la capacité de discernement des évanouissements sur les différents sous-canaux est déjà importante et l'ajout d'un récepteur apporte peu. Le gain est surtout notable quand les nombres d'émetteurs et de récepteurs sont à peu près similaires.

Le gain est logiquement plus important quand on le mesure pour  $P(E)$  plus bas. En effet,  $P(E)$  plus bas va de paire avec un SNR plus élevé. Or, les performances des CST convolutionnels sont exponentielles en fonction du SNR. Il est donc normal que le gain relatif augmente.

En comparant les figures 6.3 et 6.4, on s'aperçoit que le gain relatif initialement est plus élevé sur la figure 6.4. Cela corrobore nos propos précédents. En effet, pour la figure 6.4, la référence est le cas de 3 émetteurs et 2 récepteurs alors que la

référence de la figure 6.3 est le cas de 2 émetteurs et 3 récepteurs. Il est donc normal que le gain obtenu en ajoutant quelques récepteurs soit plus important dans le cas de la figure 6.4, car il existe un potentiel de diversité à l'émission plus important et que ce potentiel n'a été que partiellement entamé par la présence de 2 récepteurs. Toutefois par la suite, on voit que l'augmentation du nombre de récepteurs donne sensiblement le même comportement asymptotique sur les deux figures.

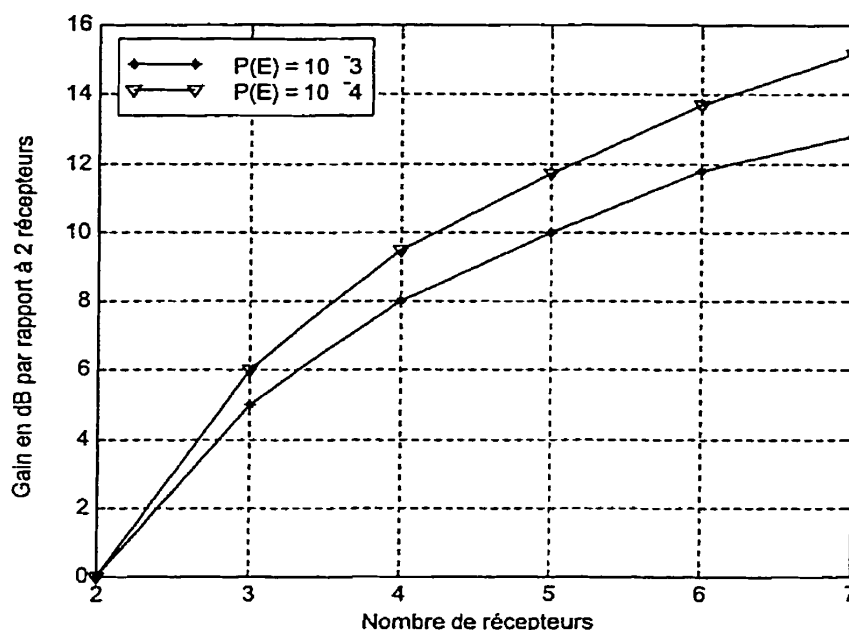


Figure 6.4: Gain relatif en diversité à la réception, avec 3 émetteurs et  $K=5$  ; référence pour 3 émetteurs, 2 récepteurs : ( $P(E) = 10^{-3}$  - SNR = 16.5 dB), ( $P(E) = 10^{-4}$  - SNR = 18.5 dB)

Nous avons présenté des résultats concernant des gains relatifs afin d'isoler l'avantage généré par la diversité à la réception. Pour la conception d'un système de télécommunications global, il est aussi nécessaire de connaître les performances obtenues en cumulant diversité à la réception et à l'émission. La prochaine section apportera des éléments de réponse.

### 6.2.3 Diversité spatiale globale

D'un point de vue design de systèmes, on peut s'interroger sur l'intérêt d'avoir plus d'antennes à l'émission ou à la réception. L'objectif du concepteur sera de trouver une bonne répartition entre le nombre d'antennes émettrices et le nombre d'antennes réceptrices pour assurer une bonne adéquation prix/performance. Dans cette optique, l'annexe D regroupe une série de résultats de simulations de CST convolutionnels de taux 1/2, 1/3 et 1/4, pour différentes longueurs de contrainte et pour un nombre variable de récepteurs.

Ces données permettent de déterminer la configuration la plus appropriée afin d'assurer une valeur maximale de  $P(E)$  pour un SNR donné. Pour une longueur de contrainte égale à 5 et un SNR de 5 dB, on observe que 9 antennes sont requises pour atteindre un  $P(E)$  d'au plus  $10^{-3}$  : 2 émetteurs et 7 récepteurs (figure D.2), ou 3 émetteurs et 6 récepteurs (figure D.4) ou 4 émetteurs et 5 récepteurs (figure D.7). Il s'agit d'une situation fortuite : le nombre requis d'antennes est ici égal pour les trois configurations. Il n'est pas possible d'affirmer de manière empirique qu'il vaut mieux ajouter un récepteur plutôt qu'un émetteur ou vice-versa. Le choix peut s'avérer délicat. De façon générale, l'ingénierie exacte d'un système nécessitera l'évaluation des paramètres de configuration au cas par cas, suivant les performances souhaitées et les disponibilités en matériel.

En plus des résultats bruts de l'annexe D, il est possible d'apprécier l'impact de la diversité globale en considérant les gains successifs générés par l'ajout simultané d'une antenne à l'émission et à la réception. Soit  $n$  le nombre égal d'émetteurs et de récepteurs. Nous avons simulé les performances d'erreurs d'un système pour  $n$  variant de 2 à 5. Les CST employés ont pour longueur de contrainte  $K=7, 8, 9$ . Parmi les CST disponibles (annexe B), nous avons choisi les codes imbriqués qui permettent un taux compatible de 2 à 5 émetteurs tout en maximisant la distance libre. Les figures 6.5 et 6.6 illustrent directement le gain relatif en diversité spatiale globale, mesuré pour deux valeurs de  $P(E)$  :  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ .

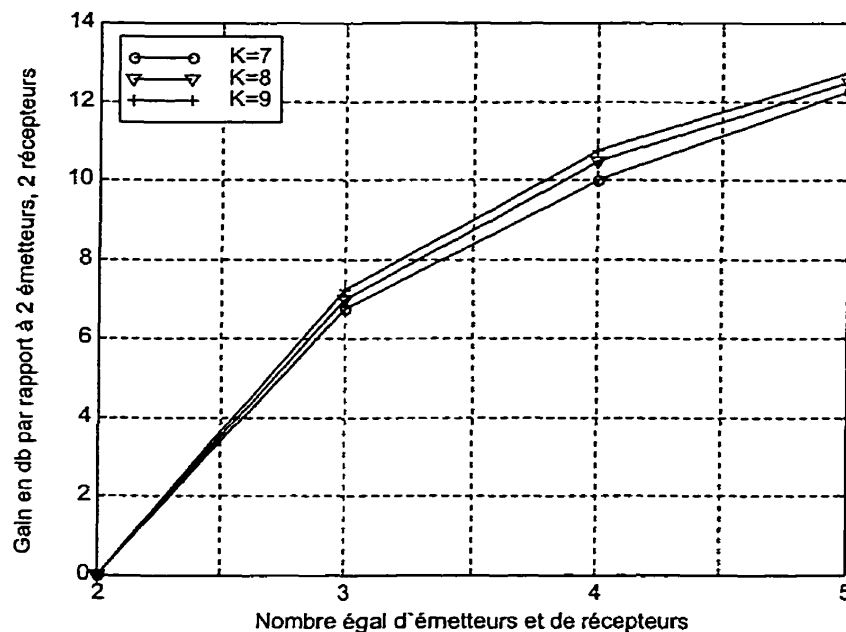


Figure 6.5: Gain relatif en diversité spatiale globale, en utilisant un nombre égal d'émetteurs et de récepteurs, mesuré pour  $P(E) = 10^{-2}$  ; référence pour 2 émetteurs, 2 récepteurs : ( $K = 7$  - SNR = 13.75 dB), ( $K = 8$  - SNR = 13.5 dB), ( $K = 9$  - SNR = 13 dB)

La lecture des figures 6.5 et 6.6 prouve que les premiers gains sont colossaux : on gagne plus de 6 dB en passant de  $n=2$  à  $n=3$  ! En revanche, les gains ont là encore tendance à stagner. On semble atteindre une saturation au niveau de la quantité de diversité spatiale disponible alors qu'on aurait pu légitimement prédire un gain linéaire. En fait,  $n$  émetteurs et  $n$  récepteurs permettent de disposer de  $n^2$  sous canaux et le passage de  $n$  à  $n+1$  fournit  $2n+1$  sous canaux supplémentaires. L'ajout en termes de sous-canaux devient donc négligeable pour un nombre  $n$  élevé. Or au final, c'est le nombre de sous-canaux qui crée la diversité. On s'imagine bien que pour  $n$  élevé, un nombre conséquent de sous-canaux peut surmonter les évanouissements et ce n'est pas le fait de rajouter quelques sous-canaux -potentiellement corrompus- qui amélioreront notablement la situation.

Par ailleurs, la diversité cumulée à l'émetteur et au récepteur surpasse largement

le gain de codage considéré seul, puisque l'augmentation d'une unité de longueur de contrainte ne fait gagner que des dixièmes de décibel.

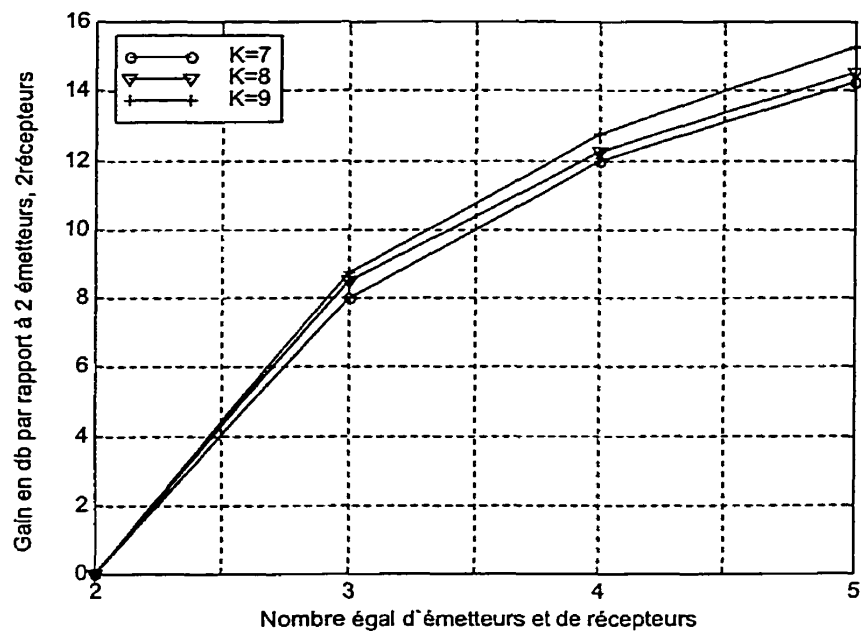


Figure 6.6: Gain relatif en diversité spatiale globale, en utilisant un nombre égal d'émetteurs et de récepteurs, mesuré pour  $P(E) = 10^{-3}$  ; référence pour 2 émetteurs, 2 récepteurs : ( $K = 7$  - SNR = 17.75 dB), ( $K = 8$  - SNR = 17.5 dB), ( $K = 9$  - SNR = 17.25 dB)

Enfin de façon similaire aux cas précédemment présentés, le gain mesuré pour  $P(E)=10^{-3}$  est supérieur au gain mesuré pour  $P(E)=10^{-2}$ . Il s'agit encore de l'impact des performances exponentielles des codes convolutionnels en fonction du SNR : les gains relatifs augmentent avec le SNR. •

### 6.3 Influence de la longueur de contrainte

La longueur de contrainte est un paramètre crucial pour les codes convolutionnels. De manière générale, l'augmentation de la longueur de contrainte va de paire avec une augmentation de la distance libre et donc une amélioration des performances. Cette amélioration se fait au détriment de la rapidité et de la complexité.

En effet, les nombres d'opérations pour l'encodage et pour le décodage sont directement proportionnels à la longueur de contrainte. Et plus d'opérations signifie potentiellement une perte de temps. En outre, pour le décodage, il intervient aussi un problème de stockage des données dont la quantité croît avec la longueur de contrainte. Bref, le choix de la longueur de contrainte résulte surtout d'un compromis matériel. Il est certain que les progrès permanents dans la conception des puces, notamment l'intégration à grande échelle, permet de repousser les limites concernant la complexité. Ces considérations dépassent le cadre de ce mémoire, et nous analyserons seulement l'impact de la longueur de contrainte sur les performances.

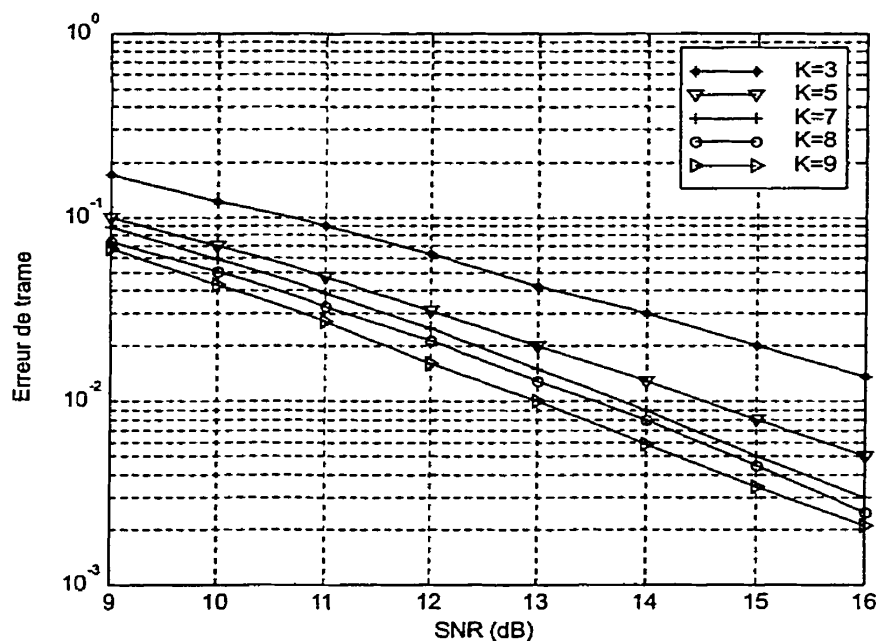


Figure 6.7: Performance de CST de taux 1/2 en fonction de la longueur de contrainte pour un système à 2 émetteurs et 2 récepteurs

Nous avons regroupé les résultats de performances en terme d'erreurs, d'un système avec un nombre  $n$  égal d'émetteurs et de récepteurs, pour  $n$  variant de 2 à 4 sur les figures 6.7, 6.8 et 6.9. Les CST employés ont une longueur de contrainte  $K$  allant jusqu'à 9. Nous avons considéré les CST imbriqués à taux compatible de 2 à

4 émetteurs maximisant la distance libre : il s'agit des codes utilisés pour illustrer la diversité à l'émission.

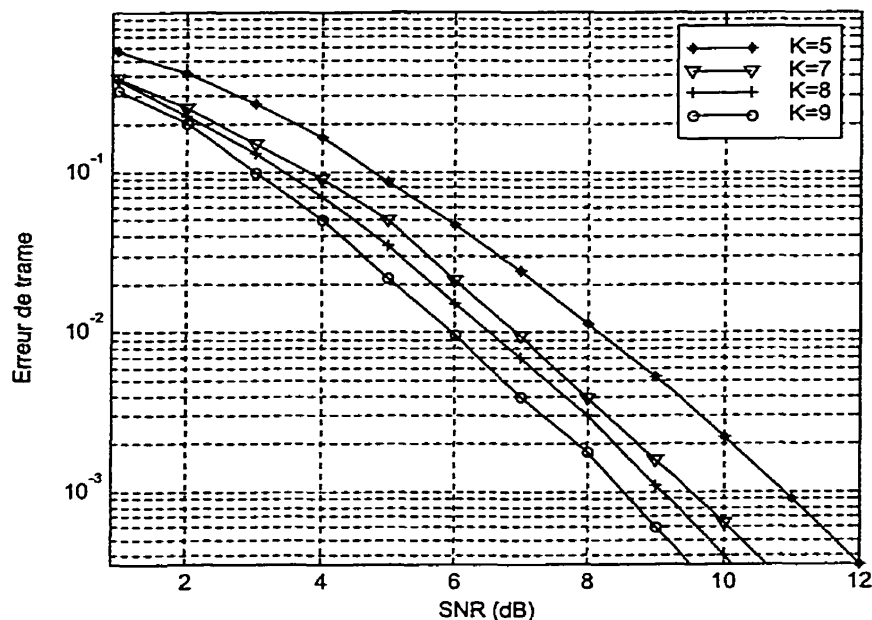


Figure 6.8: Performance de CST de taux 1/3 en fonction de la longueur de contrainte pour un système à 3 émetteurs et 3 récepteurs

La lecture des figures atteste que l'augmentation de la longueur de contrainte améliore les performances : il s'agit d'un gain en codage. Ce gain opère une translation quasi constante des courbes de performance et ce, quel que soit le seuil de  $P(E)$ . En moyenne, ce gain est de 0.5 dB par augmentation d'une unité de longueur de contrainte. En fait, on retrouve les mêmes comportements que les codes convolutionnels purement temporels. Il existe des sauts de performance ; par exemple les courbes correspondant aux longueurs de contrainte  $K=7$  et  $K=8$  sont plus rapprochées. Il sera donc intéressant pour un constructeur de puces d'omettre  $K=8$  et de concentrer ses efforts sur le passage direct de  $K=7$  à  $K=9$  afin de profiter pleinement du gain de codage. Le coût supplémentaire en complexité doit ainsi être évalué au cas par cas suivant les améliorations de performance.



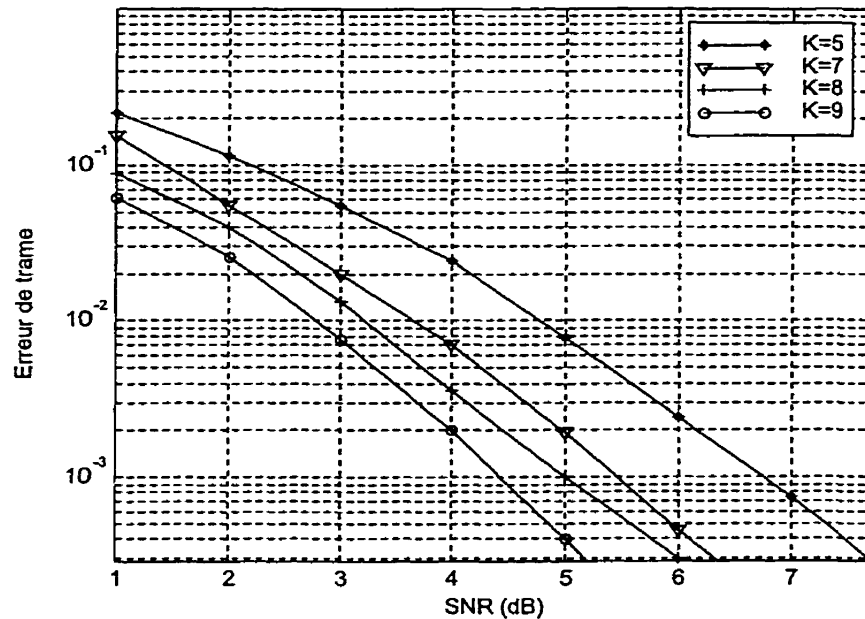


Figure 6.9: Performance de CST de taux 1/4 en fonction de la longueur de contrainte pour un système à 4 émetteurs et 4 récepteurs

La longueur de contrainte est liée au gain de codage par la distance libre. Toutefois, la distance libre n'apparaît pas explicitement dans l'estimation théorique des performances (équation 5.6). Gageons que la distance libre ne soit pas le seul paramètre du gain de codage pour les CST : il doit exister des procédés plus subtils qui permettent d'exploiter au mieux le gain potentiel en codage. L'analyse du gain en codage pourra faire l'objet de travaux futurs, à commencer par l'impact réel de la distance libre pour une longueur de contrainte fixe.

La comparaison entre les trois figures met une nouvelle fois en évidence la supériorité de la diversité spatiale sur le gain en codage. Même si le gain en codage n'est pas encore totalement mis à profit, l'avantage en diversité semble nettement plus important. On trouve ici une confirmation pratique du fait qu'il semble, en théorie, préférable d'optimiser d'abord l'avantage en diversité plutôt que le gain en codage comme nous l'avons précisé dans la section 5.2.1.

## 6.4 Comparaison avec les systèmes connus

Cette section est destinée à confronter les CST convolutionnels aux procédés déjà existants. Tout d'abord, notre évaluation se portera sur les systèmes purement temporels. Puis, nous effectuerons une analyse comparative avec les performances des CST en treillis.

### 6.4.1 Confrontation face aux procédés temporels

Nous faisons ici usage de la borne union pour la probabilité d'événement erreur des codes convolutionnels. L'équation 3.2 donne une borne théorique de la probabilité qu'un décodeur de Viterbi fasse une erreur de décodage pour une séquence de longueur infinie. Dans ce cas, la modélisation du canal prend seulement en compte un bruit blanc additif gaussien sans évanouissements de Rayleigh, ce qui est moins précis que la modèle utilisé dans ce mémoire. Nous comparerons cette borne aux performances des CST en termes d'erreur de trame. Il s'agit là bien sûr d'une comparaison approximative dans la mesure où les trames spatio-temporelles ne sont pas de longueur infinie (elle ne comporte que 250 bits). Toutefois, cela nous donnera un aperçu intéressant.

L'expression de cette borne est obtenue par une sommation infinie sur la distribution de poids du code convolutionnel. Une telle sommation est impossible : nous l'avons limitée à une cinquantaine de termes, mais la convergence est assez rapide surtout quand le rapport signal sur bruit est élevé. D'ailleurs, nous ne faisons pas usage du SNR mais plutôt du rapport  $E_b/N_0$  qui met en relief l'énergie par bit  $E_b$ . Il s'agit du paramètre le plus classique pour les performances de codes temporels. Les comparaisons s'établiront donc d'un point de vue d'énergie réellement consommée par la transmission d'un bit d'information utile.

La figure 6.10 illustre cette comparaison pour le code convolutionnel généré par  $G=[23,35]$  avec  $K=3$  ; le système spatio-temporel a donc 2 émetteurs. En trait

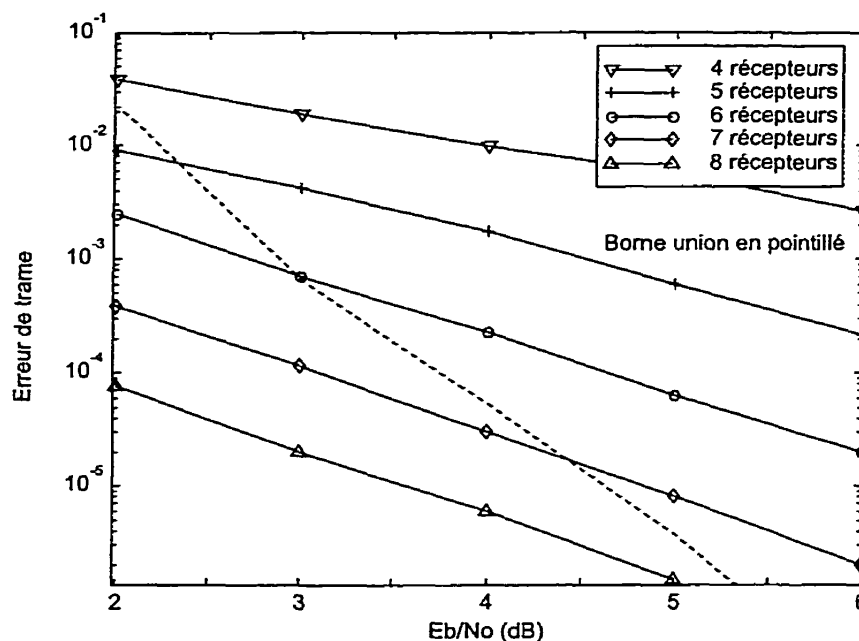


Figure 6.10: Performance du CST généré par  $G=[23,35]$  pour un nombre variable d'émetteurs comparée avec la borne union d'un événement erreur au décodage

pointillé, on a représenté la borne union pour un événement erreur au décodage. Pour de faibles rapport  $E_b/N_0$ , cette borne est moins précise mais elle met en relief la tendance “explosive” des codes convolutionnels. En effet, les performances de ces codes peuvent se dégrader très vite et même devenir plus mauvaises que celles d'un système non codé : des valeurs consécutives trop bruitées font décrocher le décodeur. Quant aux performances des CST, elles semblent se détériorer plus graduellement. Cela s'explique par l'avantage en diversité réalisé à la réception. Certes, le bruit a la même puissance en moyenne mais il n'a pas le même impact sur tous les récepteurs : il est clair que le récepteur multi-antennes disposera de meilleures répliques du signal que l'unique signal destiné au système mono-antenne. Pour un environnement très bruyant, ces bonnes répliques du signal permettent au décodeur de surmonter les grosses atténuations et donc de toujours accrocher le bon chemin dans le treillis.

En revanche, le comportement du code temporel s'améliore nettement plus rapidement quand le rapport  $E_b/N_0$  augmente. Il faut alors utiliser un grand nombre de récepteurs pour s'aligner sur les gains du code temporel. En fait, outre le bruit additif, le système multi-antennes doit combattre les évanouissements multi-chemins. Ces derniers deviennent prépondérants quand le bruit ambiant diminue. Cette adversité supplémentaire explique des gains plus modestes obtenues avec l'augmentation du rapport  $E_b/N_0$ . Les codes spatio-temporels convolutionnels demeurent quand même concurrentiels puisque leur efficacité spectrale ne diminue pas avec le taux de codage et reste constante à 1 bps/Hz (pour la modulation BPSK). Pour l'exemple de la figure 6.10, le CST est deux fois plus efficace que le code temporel. Ainsi, les performances en termes de  $P(E)$  pourraient très facilement être améliorées avec un système de retransmission de requêtes. Les CST y perdraient un peu en efficacité spectrale mais ils surpasseraient alors les systèmes temporels.

#### 6.4.2 Confrontation face aux CST en treillis

Nous utilisons les résultats de simulations des CST en treillis publiés dans [TSC98]. La diversité à l'émission est uniquement de 2 émetteurs et la modulation employée est QPSK. De plus, les simulations ont été réalisées avec des trames de 130 bits. La figure 6.10 présentent les performances des CST convolutionnels (modulation BPSK) de taux  $1/2$  et de longueur de contrainte  $K$  variable, pour un et deux récepteurs, avec des trames de 130 bits.

Dans les 2 cas, la comparaison des résultats mesurés pour  $P(E)=10^{-1}$  montre que les CST en treillis surpassent les CST convolutionnels de 1.5 dB. D'un point de vue performance pure, les CST en treillis sont donc meilleurs. Toutefois, cet avantage est acquis au détriment de la simplicité. En effet, outre l'utilisation de la modulation QPSK, les treillis sont assez complexes et les codes sont bien souvent non linéaires. C'est d'ailleurs cette complexité qui pour l'instant limite les CST en treillis à une diversité spatiale de seulement 2 émetteurs.

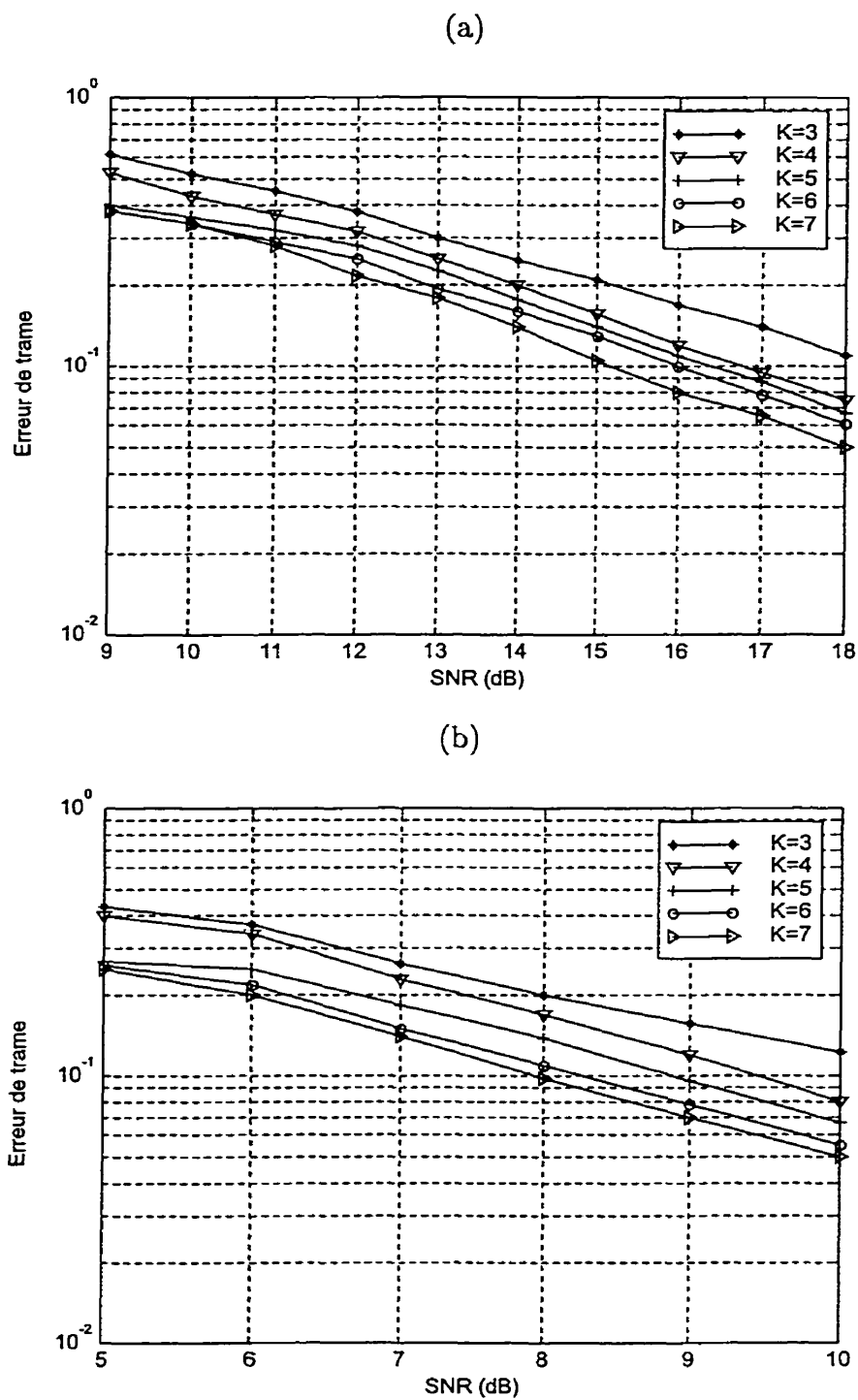


Figure 6.11: Performance de CST convolutionnels de taux  $1/2$  (2 émetteurs), de longueur de contrainte  $K$  variable, avec des trames de 130 bits pour : (a) un récepteur - (b) deux récepteurs

## 6.5 Influence du canal

Cette section a pour but d'évaluer le comportement des CST dans un canal rapidement variable. Jusqu'à présent, nous avons considéré un canal subissant des évanouissements quasi-statiques. Les évanouissements sont rapides dès lors que la matrice de canal évolue à chaque instant d'émission. Il s'agit d'un cas critique. En fait, la réalité est une situation intermédiaire entre des évanouissements quasi-statiques et rapides. Il est donc intéressant de posséder des codes qui ont des bonnes performances dans les deux conditions de canal. De tels codes s'appellent des "smart-greedy codes" : ils utilisent au mieux les possibilités de diversité.

Les figures 6.12 et 6.13 représentent les performances de CST convolutionnels pour 2 émetteurs dans un canal avec évanouissements quasi-statiques ou rapides pour des trames de 250 bits.

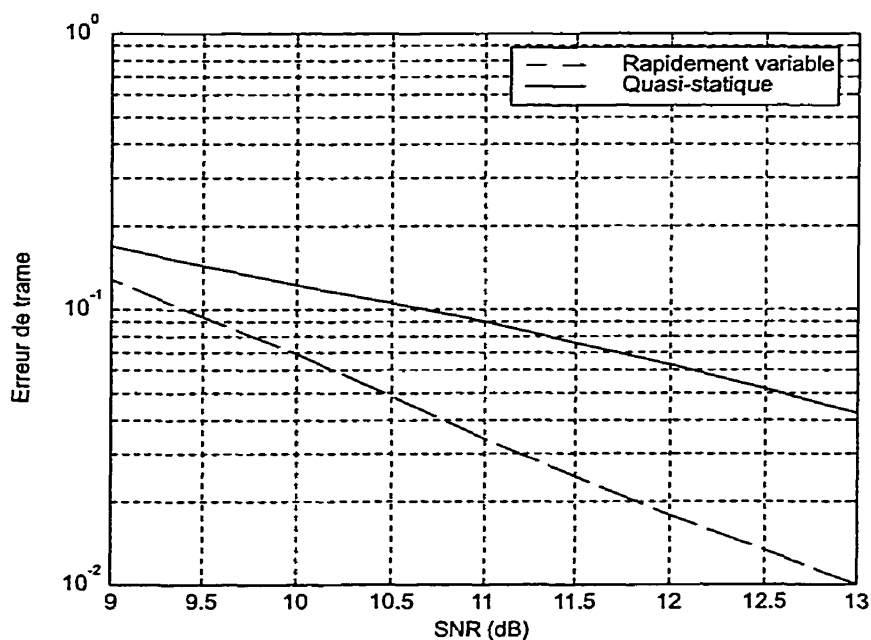


Figure 6.12: Performance du CST généré par  $G=[5,7]$  pour deux émetteurs et deux récepteurs, dans un canal à évanouissements quasi-statiques ou rapides

Dans notre modèle, nous avons supposé une connaissance idéale du canal :

il est évident que cette hypothèse devient discutable pour des évanouissements rapides puisque le canal évolue constamment. Une telle connaissance nécessiterait des techniques d'égalisation plus fines. Nous passerons outre ce problème tout en conservant à l'esprit que notre modèle est optimiste.

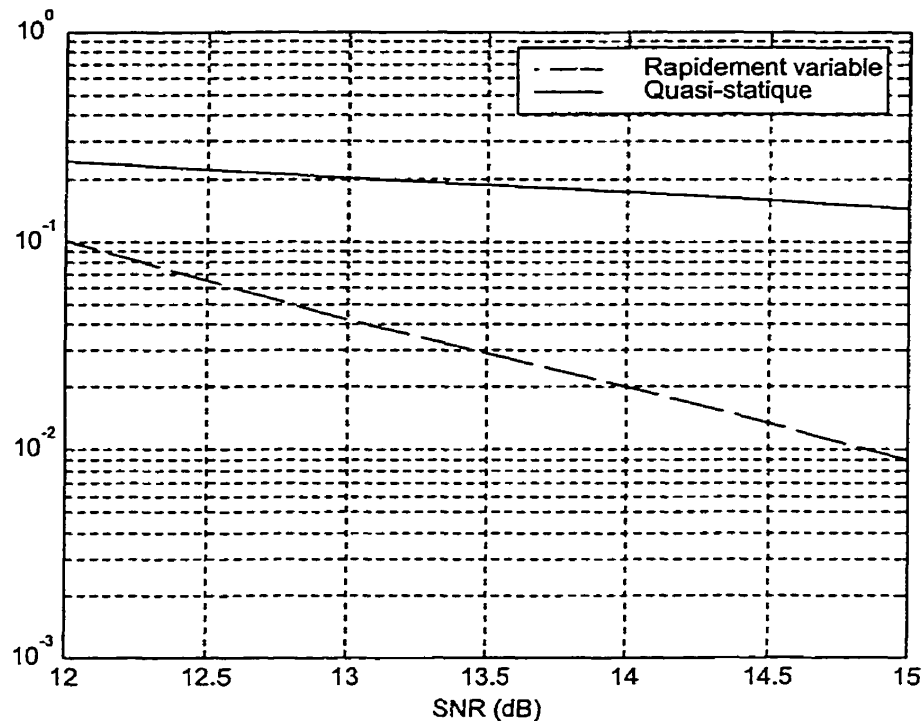


Figure 6.13: Performance du CST généré par  $G=[133,171]$  pour deux émetteurs et un récepteur, dans un canal à évanouissements quasi-statiques ou rapides

Les deux figures attestent du bon comportement des CST convolutionnels confrontés à des évanouissements rapides. Et même, les performances sont meilleures que pour des évanouissements quasi-statiques. Nous avons la confirmation que les CST font partie de la classe des "smart-greedy codes". On peut toutefois s'interroger sur le fait que les CST convolutionnels soient meilleurs dans un milieu a priori plus hostile. La figure 6.14 permet d'expliquer ce phénomène. Dans un canal quasi-statique, les CST convolutionnels ont des performances qui s'améliorent exponentiellement. Les évanouissements rapides peuvent s'interpréter comme des

fluctuations moyennes autour d'un point de fonctionnement pour un canal quasi-statique. Ces fluctuations provoquent des gains ou des pertes de performances. Comme les courbes sont exponentielles, ces corrections sont nécessairement dissymétriques. En l'occurrence, les gains sont supérieurs aux pertes. D'où le meilleur comportement dans un canal rapidement variable.

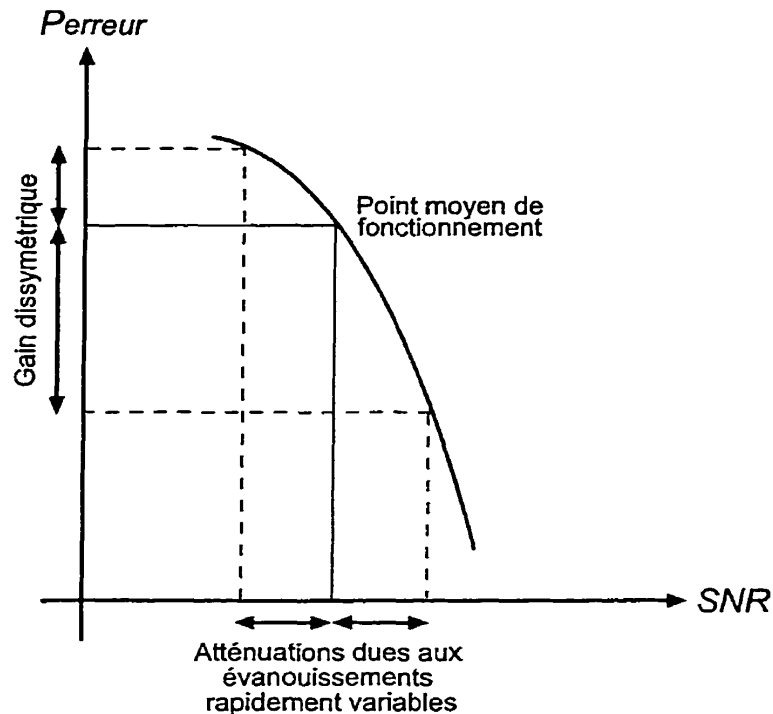


Figure 6.14: Performance des CST convolutionnels confrontés aux évanouissements de Rayleigh

## 6.6 Performance vis-à-vis de la capacité théorique

Les résultats du chapitre 5 ont montré que les CST convolutionnels pour la modulation BPSK ont une efficacité spectrale de 1 bps/Hz. Le chapitre 4 fournit les capacités théoriques des systèmes multi-antennes pour des transmissions dans un canal plat soumis à des évanouissements quasi-statiques. Ces résultats théoriques sont donnés en termes d'efficacité spectrale pour un seuil d'erreur donné.



On s'intéressera à l'efficacité spectrale obtenue pour un seuil à 99%, ce qui correspond à une valeur de  $P(E)$  égale à  $10^{-2}$ . D'après les courbes de performances des CST (disponibles en annexe D), il faut déterminer le SNR mesuré pour  $P(E)$  égal à  $10^{-2}$ , et ensuite le comparer avec la valeur du SNR qui permet en théorie aux systèmes multi-antennes d'atteindre l'efficacité de 1 bps/Hz (voir le chapitre 4 et l'annexe C). La figure 6.15 illustre la méthode proposée.

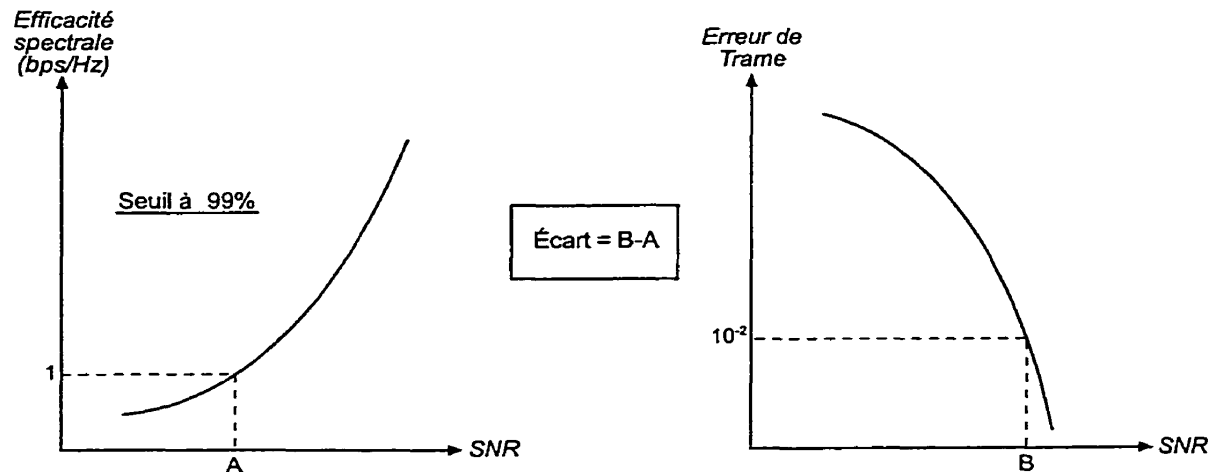


Figure 6.15: Méthode pour évaluer les performances des CST vis-à-vis de l'efficacité spectrale théorique

Considérons tout d'abord les systèmes à 2 émetteurs. On s'aperçoit que le gain en diversité à la réception est sensiblement le même en théorie qu'en pratique. Autrement dit, seul le gain de codage permet de réellement se rapprocher de la limite théorique. Pour une longueur de contrainte variable  $K=3, 5, 7, 8$  et  $9$ , on se trouve respectivement à 8, 7, 6, 5.5 et 5 dB et cela est assez bien vérifié quel que soit le nombre de récepteurs. Le gain de 0.5 dB par unité de longueur de contrainte est conforme au comportement des codes convolutionnels.

Pour les systèmes à 3 et 4 émetteurs, l'influence du nombre de récepteurs est plus sensible et semble jouer en faveur des CST convolutionnels avec un avantage de quelques dixièmes de décibel par récepteur. Pour 3 récepteurs et 3 émetteurs, avec une longueur de contrainte variable  $K=5, 7, 8$  et  $9$ , on est respectivement à

7, 6, 5.5 et 5 dB de la limite théorique. Il faut compter un gain de 0.5 dB pour 4 émetteurs dans les mêmes conditions.

Cette analyse simple permet d'espérer une amélioration des CST avec la longueur de contrainte et un nombre élevé d'antennes. Toutefois, il existe encore un potentiel de capacité inexploité. Nous n'en sommes qu'aux balbutiements du codage spatio-temporel et il reste une bonne partie submergée de l'iceberg à découvrir !

## 6.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons quantifié les performances des CST convolutionnels à l'aide de résultats fournis par des simulations assistées par ordinateurs. Ces simulations ont été principalement réalisées pour des transmissions de trames dans un canal plat à évanouissements quasi-statiques.

Nous avons mis en évidence l'avantage en diversité obtenu à l'émission et à la réception. Le choix du nombre d'antennes ainsi que la répartition de ces antennes à l'émission et à la réception représentent un problème délicat que le concepteur de systèmes de communications résoudra en cherchant la meilleure adéquation coût/performances.

La longueur de contrainte du code est un paramètre de seconde importance dans la mesure où il implique un gain de codage de moindre envergure. Plus exactement, c'est la distance libre qui est à l'origine du gain de codage. Toutefois en théorie, le gain en codage des CST n'est pas directement lié à la distance libre, ce qui laisse supposer une amélioration possible du gain en codage par d'autres codes ou d'autres procédés. Finalement, l'augmentation de la longueur de contrainte est à évaluer suivant la complexité à laquelle on peut faire face au niveau du décodeur.

Par ailleurs, nous avons mené une analyse comparative des CST convolutionnels avec des procédés déjà existants. Il s'avère que les CST convolutionnels rivalisent bien avec les techniques purement temporelles. En revanche, les CST en treillis demeurent plus performants mais ils requièrent une plus grande complexité. En

outre, nous avons montré que les CST convolutionnels ont de bonnes performances pour un canal subissant des évanouissements rapides. Enfin, la mesure de l'écart avec la capacité théorique laisse entrevoir de grandes perspectives d'amélioration pour les CST.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

Le codage spatio-temporel associé aux systèmes multi-antennes de communications sans-fil constitue l'essence de ce mémoire. C'est tout d'abord l'idée récente d'utiliser plusieurs antennes à l'émission qui nous fait considérer la diversité spatiale sous un jour nouveau. Ce regain d'intérêt est suscité par des performances prometteuses en termes de capacité. Le codage spatio-temporel se profile alors comme l'élément unificateur de la diversité spatiale, et son potentiel révélé, avec les techniques classiques du codage de contrôle d'erreurs, mettant en jeu la diversité temporelle. La symbiose enthousiaste de ces deux procédés, auparavant dissociés, établit le fil conducteur de notre étude.

La diversité est une technique générale pour combattre les atténuations et interférences inhérentes aux canaux de communications sans-fil. Il s'agit de disposer de répliques du signal qui peuvent prendre différentes formes : temporelle, fréquentielle, spatiale ... La diversité spatiale est intrinsèque aux systèmes multi-antennes mais elle a longtemps été cantonnée à la simple réception. Or, nous avons présenté des résultats qualitatifs et quantitatifs qui attestent que la diversité spatiale, au niveau de la réception et de l'émission, offrent des perspectives très alléchantes. Ainsi, les systèmes multi-antennes ont une efficacité spectrale nettement supérieure aux systèmes mono-antenne. Par ailleurs, l'association de plusieurs antennes requiert des technologies spécifiques. Il faut noter que le fait de rapprocher des antennes posent des problèmes physiques.

La combinaison du codage de canal avec une répartition astucieuse de la transmission de l'information sur différentes antennes donne naissance au codage spatio-temporel. La force de cette technique réside dans son ambivalence. Des critères théoriques concernant les performances de ce codage ont permis la découverte de

différentes familles de CST. Notre intérêt s'est porté sur une nouvelle famille de CST basés sur l'usage du codage convolutionnel. Nous avons répertorié les bons CST convolutionnels associé à la modulation BPSK, puis nous avons introduit une simplification du décodage en exploitant la propriété de double complémentarité.

Par la suite, nous avons évalué les performances des CST convolutionnels grâce à des simulations assistées par ordinateur. Le système étudié est général et de nombreux paramètres peuvent être ajustés parmi lesquels le nombre d'antennes émettrices, le nombre d'antennes réceptrices, la longueur de contrainte du code et le type d'évanouissements du canal. Nous avons pu confronter les CST convolutionnels aux procédés déjà existants. Il s'avère que ces CST sont des rivaux sérieux pour les codes purement temporels. Ils sont néanmoins moins performants que certains CST existants mais ils sont aussi moins complexes. Finalement, le grand potentiel théorique en terme de capacité, procuré par la diversité spatiale, n'a été que partiellement exploité. Cela assure de beaux jours au codage spatio-temporel.

On trouvera parmi les points suivants des perspectives de développement futur autour du thème du codage spatio-temporel :

- Établir des CST convolutionnels utilisant des constellations de signaux de taille supérieure à BPSK, en commençant par QPSK.
- Associer la diversité fréquentielle au codage spatio-temporel. Ainsi, l'OFDM, une technique "à la mode", peut se combiner aux CST : l'utilisation de plusieurs fréquences de modulation, facilement discernables car orthogonales, permet de gagner en performance.
- À l'instar du codage turbo, il est certain que de nouvelles approches plus subtiles permettraient d'exploiter au mieux le potentiel des CST.
- On peut aussi considérer les CST sous un aspect plus basé sur le traitement du signal. Notamment, la connaissance de l'état du canal implique des techniques d'égalisation qui suscitent d'importantes recherches.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ala98] S. M. Alamouti. "A simple transmit diversity technique for wireless communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(8):744–765, October 1998.
- [Ast99] D. Astely. "*Spatial and spatio-temporal processing with antenna arrays in wireless communications*". PhD thesis, Department of Signal Processing, Sensors and Systems, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999.
- [ATNS98] D. Agrawal, V. Tarokh, A. Naguib, and N. Seshadri. "Space-time coded OFDM for high data rate wireless communication over wideband channels". In *Proceedings of IEEE VTC'98, Ottawa, Canada*, pages 2232–2236, May 1998.
- [BBH00] S. B aro, G. Bauch, and A. Hansmann. "Improved codes for space-time treillis coded modulation". *IEEE Communications Letters*, 4(1):20–22, January 2000.
- [Boi99] G. Boillet. "*Analyse comparative des performances du MC-DS-CDMA dans un réseau cellulaire de troisième génération*". Mémoire de Maîtrise,  cole Polytechnique de Montréal, Canada, 1999.
- [Bou97] N. Bouzouita. "*Sur le décodage itératif des codes turbo*". Mémoire de Maîtrise,  cole Polytechnique de Montréal, Canada, 1997.
- [CL99] L. J. Cimini and Y. Li. "Orthogonal frequency division multiplexing for wireless channels". In *Tutorials of IEEE ICC'99, Vancouver, Canada*, 1999.

- [coi94] S. Lefrançois. “*Applications des codes convolutionnels dans les systèmes AMRC*”. Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1994.
- [DF99] P. F. Driessen and G. J. Foschini. “On the capacity formula for multiple input-multiple output wireless channels : a geometric interpretation”. *IEEE Transactions on Communications*, 47(2):173–176, February 1999.
- [DMW82] D. G. Daut, J. W. Modestino, and L. D. Wismer. “New short constraint length convolutional code construction for selected rational rates”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 28:793–799, September 1982.
- [dtB99] Ingénierie des télécommunications Bell. “Commutation”. *Cours de l'École Polytechnique de Montréal*, 1999.
- [Duf76] W. G. Duff. “*Mobile communications*”. Don White Consultants Inc., 1976.
- [FG98] G. J. Foschini and M. J. Gans. “On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas”. *Wireless Personal Commun.*, 6:311–335, 1998.
- [Fos96] G. J. Foschini. “Layered space-time architecture for wireless communications in a fading environment when using multi-element antennas”. *Bell Labs Technical Journal - October*, pages 41–58, 1996.
- [GFK98] J. Grimm, M. P. Fitz, and J. V. Krogmeier. “Further results on space-time coding for Rayleigh fading”. In *Allerton Conference*, September 1998.
- [Gro98] Radiocommunications Study Group. “Working document towards submission of RTT candidate to ITU-R, IMT-2000 Process : the CDMA

- 2000 RTT candidate submission". Technical report, International Telecommunication Union, June 1998.
- [GS79] A. V. Geramita and J. Seberry. "Orthogonal Designs, quadratic forms and Hadamard matrices", volume 43 of *Lecture notes in pure and applied mathematics*. Marcel Dekker, New York and Bassel, 1979.
- [Hay94] S. Haykin. "Communication Systems". Wiley, third edition, 1994.
- [Hc95] D. Haccoun and S. Lefrançois. "Very low rate nested convolutional codes and their application to CDMA". In *Proc. 5<sup>th</sup> Intern. Conf. on Advances in Comm. and Control, Rethymnon, Crete*, page 32, June 1995.
- [HCN99] D. Haccoun, M. Caron, and M. Nabli. "Complexity reduction of the Viterbi algorithm using doubly complementary convolutional codes". In *Conference Proceedings of IEEE PACRIM'99, Victoria, Canada*, pages 408–411, August 1999.
- [HG00] A. R. Hammons and H. El Gamal. "On the theory of space-time codes for PSK modulation". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46(2):524–542, March 2000.
- [Jak74] W. C. Jakes. "Microwave Mobile communications". Wiley, 1974.
- [KH90] S. Kallel and D. Haccoun. "Generalized type II hybrid ARQ scheme using punctured convolutional coding". *IEEE Transactions on Communications*, 38:1938–1946, November 1990.
- [Lar73] K. J. Larsen. "Short convolutional codes with maximal free distance for rates 1/2, 1/3 and 1/4". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 19:371–372, May 1973.



- [LT99] T. Lo and V. Tarokh. "Space-time block coding - from a physical perspective". *IEEE*, 1999.
- [MF70] R. K. Mueller and G. J. Foschini. "The capacity of linear channels with additive gaussian noise". *The Bell System Technical Journal*, pages 81–95, January 1970.
- [MH99] T. L. Marzetta and B. M. Hochwald. "Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh fading". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(1):139–157, January 1999.
- [MNK97] N. Morinaga, M. Nakagawa, and R. Kohno. "New concepts and technologies for achieving highly reliable and high capacity multimedia wireless communications systems. *IEEE Communications Magazine*, pages 34–40, January 1997.
- [NTC99] R. Negi, A. M. Tehrani, and J. M. Cioffi. "Adaptative antennas for space-time coding over block-time invariant multi-path fading channels ". *IEEE GLOBECOMM'99*, 1:70–74, 1999.
- [NTSC98] A. F. Naguib, V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank. "A space-time coding modem for high data rate wireless communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(8):1459–1477, October 1998.
- [Ode70] J. P. Odenwalder. "*Optimal decoding of convolutionnal codes*". PhD thesis, Department of Systems Sciences, School of Engineering and Applied Sciences, University of California, Los Angeles, 1970.
- [Pro95] J. G. Proakis. "*Digital communications*". Mc Graw Hill, third edition, 1995.

- [RC9+6] G. G. Raleigh and J. M. Cioffi. "Spatio-temporal coding for wireless communications". *IEEE GLOBECOMM'96*, 3:1809–1814, 1996.
- [SF98] L. Shu and M. Fossorier. "A differential Viterbi algorithm for decoding rate- $1/n$  doubly complementary convolutional codes and their high-rate punctured codes based on a Compare-Select-Add principle". In *Proceedings 1998 International Symposium on Information Theory, Cambridge, Mass.*, page 102, August 1998.
- [SK99] D. S. Shiu and J. M. Kahn. "Design of high throughput codes for multiple-antenna wireless systems". *Submitted to IEEE Trans. Inform. Theory*, January 1999.
- [Sk188] B. Sklar. *Digital communications : fundamentals and applications*. Prentice Hall, 1988.
- [TJC'99] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank. "Space-Time Block Codes From Orthogonal Designs". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(5):1456–1467, July 1999.
- [TNS:C99] V. Tarokh, A. Naguib, N. Seshadri, and A. R. Calderbank. "Space-time codes for high data rate wireless communication : performance criteria in the presence of channel estimation errors, mobility, and multi-paths". *IEEE Transactions on Communications*, 47(2):199–206, February 1999.
- [TSC'98] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank. "Space-time codes for high data rate wireless communication : performance criterion and code construction". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(2):744–765, March 1998.
- [Wau:97] A. Wautier. "Le canal radiomobile". *Cours de l'École Supérieure d'Électricité*, 1997.

- [WFGV99] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela. "V-Blast : an architecture for realizing very high data rates over the rich scattering wireless channel". Technical report, Bell Laboratories, 1999.
- [Wic95] S. B. Wicker. "*Error Control Systems for Digital Communication and Storage*". Prentice Hall, 1995.

## Annexe A

### Théorie pour CST en modulation BPSK

Les résultats de cette annexe sont inspirés de l'article [HG00] et concernent le cas d'évanouissements de Rayleigh quasi-statiques.

#### A.1 Définition de la (-1)-équivalence

Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux matrices complexes.  $r_1$  et  $r_2$  sont (-1)-équivalentes si on peut transformer  $r_1$  en  $r_2$  en multipliant n'importe quels éléments de  $r_1$  par une puissance de (-1) c'est-à-dire par 1 ou -1. En utilisant cet outil, il a été démontré des résultats très simples pour les CST en modulation BPSK. On notera :  $r_1 \sim r_2$ , pour signifier que  $r_1$  et  $r_2$  sont (-1)-équivalentes.

#### A.2 Première proposition

La modulation BPSK est réalisée par la fonction  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & -1^x \\ Z_2 & & \{-1, 1\} \end{array}$$

Il est à noter que la modulation peut introduire un décalage uniforme  $e^{j\theta}$ . Cela ne modifierait pas les résultats concernant le rang de la matrice  $B(C, E)$  (équation 5.5) ni les valeurs propres de la matrice  $A(C, E) = B(C, E).B(C, E)^\dagger$ , donc il n'y aurait pas d'incidences sur les critères de performances. Par la suite, nous noterons  $\oplus$  l'addition modulo 2.

*Proposition 1 :*

Soit  $\Gamma$  un CST linéaire  $N \times h$  ( $N \leq h$ ) et  $\mathbf{C}$  le code correcteur binaire associé. Si tout mot de code  $\bar{C}$  de  $\mathbf{C}$ , non nul, de longueur  $Nh$ , mis sous forme matricielle  $N \times h$  (équation 5.1) a la propriété que toute matrice rationnelle  $(-1)$ -équivalente à  $\bar{C}$  admette le rang maximal  $N$ , alors pour la modulation BPSK, le CST  $\Gamma$  satisfait le critère du rang et atteint la diversité maximale  $N$ .

*Démonstration :*

Soient  $\bar{C}_1$  et  $\bar{C}_2$  deux mots de code distincts de  $\mathbf{C}$ . On vérifie grâce aux tableaux suivants que :  $[f(\bar{C}_1) - f(\bar{C}_2)]/2 \sim \bar{C}_1 \oplus \bar{C}_2$ . On note  $\Delta$  la fonction bi-variables :  $(x, y) \rightarrow (-1)^x - (-1)^y$ .

$\Delta$		$c_1$	
		0	1
$c_2$	0	0	-2
	1	2	0

$\oplus$		$c_1$	
		0	1
$c_2$	0	0	1
	1	1	0

Comme  $\mathbf{C}$  est linéaire,  $\bar{C}_1 \oplus \bar{C}_2$  est un mot de code. Ainsi, d'après l'hypothèse, toute matrice rationnelle  $(-1)$ -équivalente à  $\bar{C}_1 \oplus \bar{C}_2$  admet le rang maximal  $N$ , en particulier  $[f(\bar{C}_1) - f(\bar{C}_2)]/2$  est de rang maximal  $N$ . Donc  $[f(\bar{C}_1) - f(\bar{C}_2)]$  est de rang maximal  $N$  : le CST  $\Gamma$  satisfait le critère du rang pour la modulation BPSK.

## A.3 Deuxième proposition

*Lemme :*

Soit  $A$  une matrice de rationnels. L'équation matricielle  $A.\bar{x} = 0$  admet un vecteur solution de réels si et seulement si il existe un vecteur solution d'entiers non tous nuls et premiers entre eux.

*Démonstration :*

Une implication est triviale : une solution d'entiers est une solution réelle. Supposons qu'il existe un vecteur solution réel. En appliquant le pivot de Gauss à la matrice  $A$ , on obtient une forme canonique rationnelle. Il en découle l'existence d'une solution rationnelle. Or toute solution rationnelle peut être transformée par multiplications ou divisions d'entiers en une solution d'entiers premiers entre eux.

*Proposition 2 :*

La matrice  $N \times h$  ( $N \leq h$ ) binaire  $B = [\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_N]^\dagger$  admet le rang maximal  $N$  sur  $Z_2$  si et seulement si toute matrice rationnelle  $R = [\bar{r}_1 \bar{r}_2 \dots \bar{r}_N]^\dagger$  (-1)-équivalente à  $B$  admet le rang maximal  $N$  sur le corps des rationnels.

*Démonstration :*

( $\Rightarrow$ ) Procédons par l'absurde. Supposons que  $R$  ne soit pas de rang maximal  $N$  sur le corps des rationnels. Il existe  $N$  rationnels non tous nuls  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  tels  $\beta_1 \bar{r}_1 + \beta_2 \bar{r}_2 + \dots + \beta_N \bar{r}_N = 0$  (\*). Par le lemme, on peut supposer que les  $\beta_i$  sont des entiers premiers entre eux. Comme  $B$  est binaire et que  $B \sim R$ , on en déduit que :  $\bar{r}_i \equiv \bar{b}_i \pmod{2}$ . Ainsi, en réduisant (\*) modulo 2, on obtient une combinaison binaire linéaire de  $\bar{b}_i$  égale à 0. Comme les  $\beta_i$  ne sont pas tous divisibles par 2, la combinaison binaire linéaire est non triviale. Donc  $B$  n'est pas de rang maximale sur  $Z_2$ . D'où l'absurdité.

( $\Leftarrow$ ) Procédons par l'absurde. Supposons que  $B$  ne soit pas de rang maximal  $N$  sur  $Z_2$ . Il existe  $\delta$  rangées de  $B$  telles que :  $\bar{b}_{i_1} \oplus \bar{b}_{i_2} \oplus \dots \oplus \bar{b}_{i_\delta} = 0$ . Parmi ces  $\delta$  rangées, chaque colonne de  $B$  contient un nombre pair de 1. On peut alors multiplier par -1 certains de ces termes et obtenir une sommation rationnelle des  $\delta$  rangées égale à 0. Cette modification permet d'obtenir une matrice rationnelle (-1)-équivalente à  $B$  qui n'est pas de rang maximale sur le corps des rationnels. D'où l'absurdité.

## A.4 Critère du rang en binaire

*Théorème :*

Soit  $\Gamma$  un CST linéaire  $N \times h$  ( $N \leq h$ ) et  $\mathbf{C}$  le code correcteur binaire associé. Si tout mot de code  $\tilde{\mathbf{C}}$  de  $\mathbf{C}$ , non nul, de longueur  $Nh$ , mis sous forme matricielle  $N \times h$  admet le rang maximal  $N$  sur  $\mathbb{Z}_2$ , alors pour la modulation BPSK, le CST  $\Gamma$  atteint la diversité maximale  $N$ .

*Démonstration:*

Immédiate d'après les propositions 1 et 2.

## Annexe B

## Listes de CST convolutionnels

*Légende*

\* . \* : distance libre non maximale pour un  $K$  donné

\$ . \$ : code non doublement complémentaire

\_\_\_\_\_ : code imbriqué

Tableau B.1: CST convolutionnels de taux 1/2

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{\text{libre}}$
3	5,7	5
4	15,17	6
5	23,35	7
6	53,75	8
7	133,171	10
8	247,371	10
9	561,753	12
10	1167,1545	12
11	2335,3661	14
12	4335,5723	15
13	10533,17661	16
14	21675,27123	16



Tableau B.2: CST convolutionnels de taux 1/3

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
3	<u>\$ 5,7,6 \$</u>	*7*
4	<u>13,15,17</u>	10
5	<u>23,35,27</u>	*11*
5	<u>25,33,37</u>	12
6	<u>47,53,75</u>	13
7	<u>133,145,171</u>	*14*
7	<u>133,145,175</u>	15
7	<u>133,171,165</u>	15
8	<u>225,331,367</u>	16
8	<u>247,371,353</u>	16
8	<u>247,371,233</u>	16
9	<u>561,753,625</u>	*17*
9	<u>557,663,711</u>	18
9	<u>561,753,715</u>	18
10	<u>1167,1545,1721</u>	*19*
10	<u>1167,1365,1633</u>	20
10	<u>1167,1545,1375</u>	20
11	<u>2335,3661,2427</u>	*20*
11	<u>2335,3661,3127</u>	*21*
11	<u>2353,2671,3175</u>	22
12	<u>4335,5723,7341</u>	*22*
12	<u>4335,5723,7453</u>	*23*
12	<u>4767,5723,6265</u>	24
13	<u>10533,17661,12243</u>	*22*
13	<u>10533,10675,17661</u>	24
13	<u>10533,17661,15137</u>	24
14	<u>21675,27123,30541</u>	*23*
14	<u>21645,35661,37133,</u>	26
14	<u>21675,27123,33631</u>	26

Tableau B.3: CST convolutionnels de taux 1/4

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
5	<u>23,27,33,37</u>	16
6	<u>53,75,47,71</u>	*17*
6	<u>53,67,71,75</u>	18
6	<u>53,75,67,47</u>	18
7	<u>133,171,165,117</u>	20
7	<u>133,171,145,137</u>	20
8	<u>235,275,313,357</u>	22
8	<u>247,371,353,327</u>	22
8	<u>247,371,233,275</u>	22
9	<u>561,753,625,467</u>	*23*
9	<u>463,535,733,745</u>	24
9	<u>561,753,715,517</u>	24
10	<u>1167,1545,1721,1363</u>	*26*
10	<u>1117,1365,1633,1653</u>	27
10	<u>1167,1365,1633,1653</u>	27
11	<u>2335,3661,2427,2203</u>	*24*
11	<u>2335,3661,3127,2751</u>	*28*
11	<u>2387,2353,2671,3175</u>	29
12	<u>4335,5723,7341,4505</u>	*27*
12	<u>4335,5723,7453,7465</u>	*31*
12	<u>4767,5723,6265,7455</u>	32
13	<u>10533,17661,12243,15031</u>	*28*
13	<u>10533,17661,15137,17123</u>	*32*
13	<u>11145,12477,15537,16727</u>	33
14	<u>21675,27123,30541,22117</u>	*30*
14	<u>21113,23175,35527,35537</u>	36
14	<u>21675,27123,33631,37253</u>	36

Tableau B.4: CST convolutionnels de taux 1/5

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
6	75,71,73,65,57	22
7	133,171,145,137,115	*24*
7	133,171,165,117,135	25
8	247,371,233,275,323	*27*
8	257,233,323,271,357	28
8	247,371,353,327,275	28
9	561,753,625,467,715	*29*
9	561,753,715,517,755	30
10	1167,1545,1721,1363,1265	*32*
10	1167,1545,1375,1523,1137	34
11	2335,3661,2427,2203,3713	*32*
11	2335,3661,3127,2751,3753	36
12	4335,5723,7341,4505,6171	*34*
12	4335,5723,7453,7465,5713	39
13	10533,17661,12243,15031,11347	*36*
13	10533,17661,15137,17123,16551	41
14	21675,27123,30541,22117,32545	*38*
14	21675,27123,33631,37253,27551	44

Tableau B.5: CST convolutionnels de taux 1/6

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
7	<u>133,171,145,137,115,165</u>	*29*
7	<u>133,171,165,117,135,173</u>	30
8	<u>247,371,233,275,323,265</u>	*32*
8	<u>247,371,353,327,275,331</u>	34
9	<u>561,753,715,517,755,625</u>	36
9	<u>561,753,625,467,715,477</u>	36
10	<u>1167,1545,1721,1363,1265,1471</u>	*38*
10	<u>1167,1545,1375,1523,1137,1723</u>	40
11	<u>2335,3661,2427,2203,3713,3265</u>	*39*
11	<u>2335,3661,3127,2751,3753,3345</u>	44
12	<u>4335,5723,7341,4505,6171,5553</u>	*42*
12	<u>4335,5723,7453,7465,5713,7515</u>	47
13	<u>10533,17661,12243,15031,11347,16471</u>	*44*
13	<u>10533,17661,15137,17123,16551,17127</u>	50
14	<u>21675,27123,30541,22117,32545,35231</u>	*46*
14	<u>21675,27123,33631,37253,27551,23633</u>	54

Tableau B.6: CST convolutionnels de taux 1/7

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
9	<u>561,753,625,467,715,477,511</u>	*40*
10	<u>1167,1545,1721,1363,1265,1471,1037</u>	*44*
10	<u>1167,1545,1375,1523,1137,1723,1327</u>	48
11	<u>2335,3661,2427,2203,3713,3265,3625</u>	*46*
11	<u>2335,3661,3127,2751,3753,3345,3545</u>	51
12	<u>4335,5723,7341,4505,6171,5553,7463</u>	*50*
12	<u>4335,5723,7453,7465,5713,7515,5731</u>	55
13	<u>10533,17661,12243,15031,11347,16471,16625</u>	*52*
13	<u>10533,17661,15137,17123,16551,17127,17315</u>	58
14	<u>21675,27123,30541,22117,32545,35231,34555</u>	*55*
14	<u>21675,27123,33631,37253,27551,23633,32745</u>	63

Tableau B.7: CST convolutionnels de taux 1/8

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
9	<u>561,753,625,467,715,477,511,655</u>	*46*
10	<u>1167,1545,1721,1363,1265,1471,1037,1153</u>	*50*
11	<u>2335,3661,2427,2203,3713,3265,3625,3451</u>	*52*
11	<u>2335,3661,3127,2751,3753,3345,3545,3731</u>	58
12	<u>4335,5723,7341,4505,6171,5553,7463,7111</u>	*56*
12	<u>4335,5723,7453,7465,5713,7515,5731,6517</u>	63
13	<u>10533,17661,15137,17123,16551,17127,17315,15651</u>	67
14	<u>21675,27123,30541,22117,32545,35231,34555,37445</u>	*64*
14	<u>21675,27123,33631,37253,27551,23633,32745,37545</u>	72

Tableau B.8: CST convolutionnels de taux 1/9

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
10	<u>1167,1545,1721,1363,1265,1471,1037,1153,1551</u>	*56*
11	<u>2335,3661,2427,2203,3713,3265,3625,3451,3311</u>	*58*
11	<u>2335,3661,3127,2751,3753,3345,3545,3731,2517</u>	66
12	<u>4335,5723,7341,4505,6171,5553,7463,7111,6525</u>	*63*
14	<u>21675,27123,30541,22117,32545,35231,34555,37445,33257</u>	*74*
14	<u>21675,27123,33631,37253,27551,23633,32745,37545,36461</u>	80

Tableau B.9: CST convolutionnels de taux 1/10

$K$	Vecteurs de connexions en octal	$d_{libre}$
11	<u>2335,3661,2427,2203,3713,3265,3625,3451,3311,3545</u>	*65*
12	<u>4335,5723,7341,4505,6171,5553,7463,7111,6525,7545</u>	*71*
14	<u>21675,27123,30541,22117,32545,35231,34555,37445,33257,36423</u>	*82*
14	<u>21675,27123,33631,37253,27551,23633,32745,37545,36461,27153</u>	90

## Annexe C

## Résultats complémentaires pour les systèmes multi-antennes

Cette annexe comporte quelques résultats de simulation de capacité de systèmes multi-antennes. Les simulations ont été réalisées en générant 10000 valeurs aléatoires d'efficacité spectrale et en opérant un tri avec une méthode dite "Monte-Carlo" (voir chapitre 4). De part la nature aléatoire de l'efficacité, on s'intéresse à la densité de probabilité de l'efficacité pour un système donné. Ensuite, une fois un seuil de probabilité fixé, on peut étudier le comportement du seuil d'efficacité pour différents systèmes de transmission.

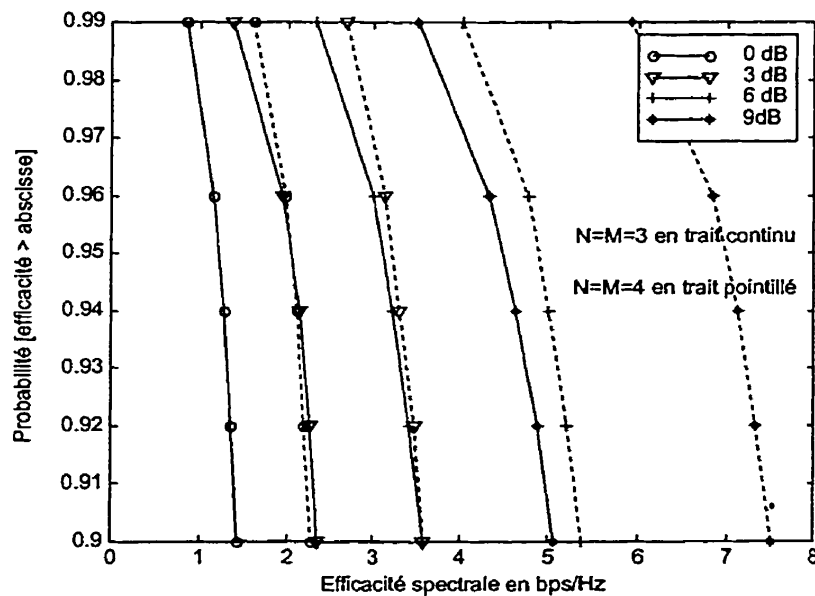


Figure C.1: Distribution de probabilité complémentaire de l'efficacité d'un système avec  $N=3,4$  émetteurs et  $M=3,4$  récepteurs

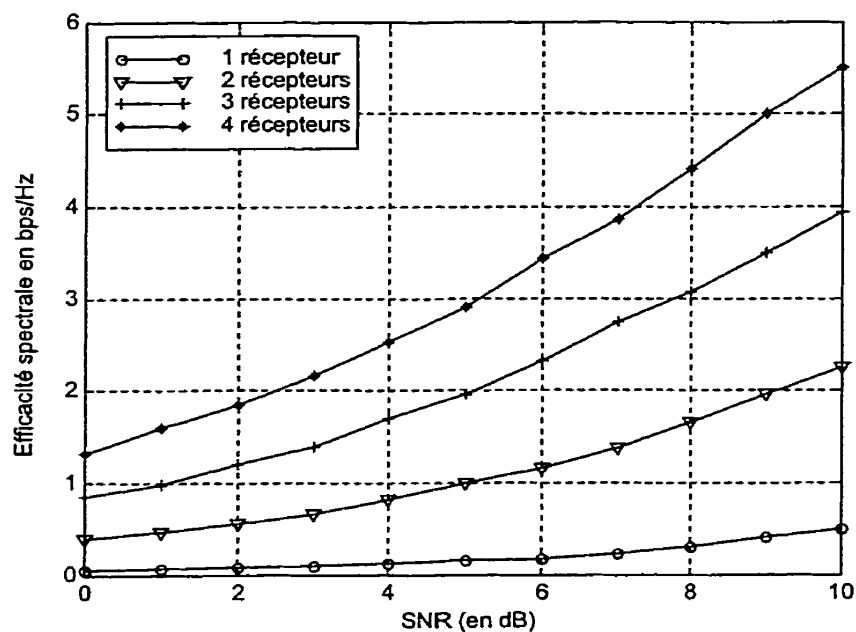


Figure C.2: Seuil d'efficacité à 99% pour 3 émetteurs

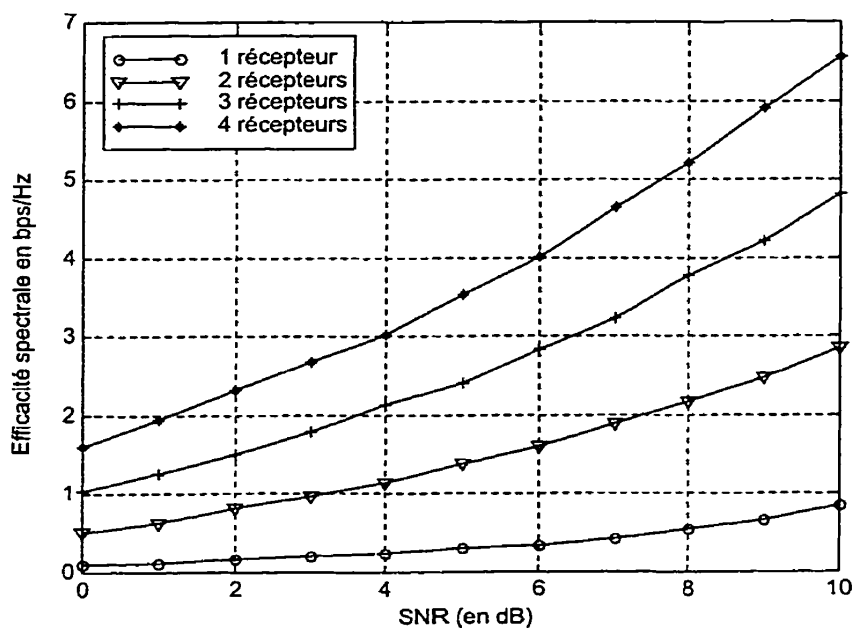


Figure C.3: Seuil d'efficacité à 99% pour 4 émetteurs



## Annexe D

## Résultats de simulations pour les CST convolutionnels

Cette annexe comporte une série de résultats de simulations de CST convolutionnels de taux  $1/2$ ,  $1/3$  et  $1/4$ , ayant une longueur de contrainte  $K$ . Les performances sont représentées en terme de probabilité d'erreur par trame en fonction du SNR. Sauf contre-indications, on considère des trames de 250 bits envoyées à travers un canal plat à évanouissements de Rayleigh quasi-statique.

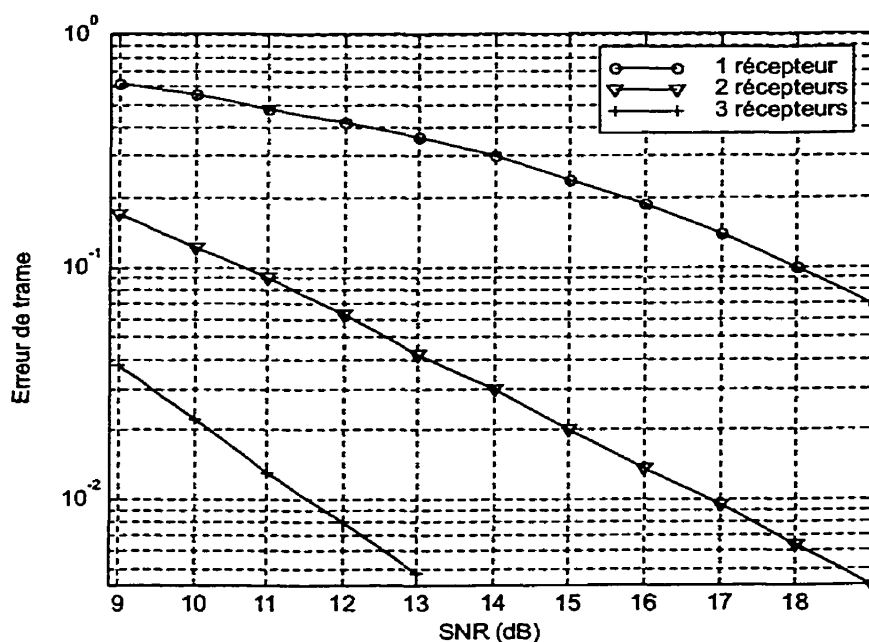
D.1 Système à deux émetteurs avec CST convolutionnels de taux  $1/2$ 

Figure D.1: Performance du CST associé au générateur  $G=[5,7]$ ,  $K=3$

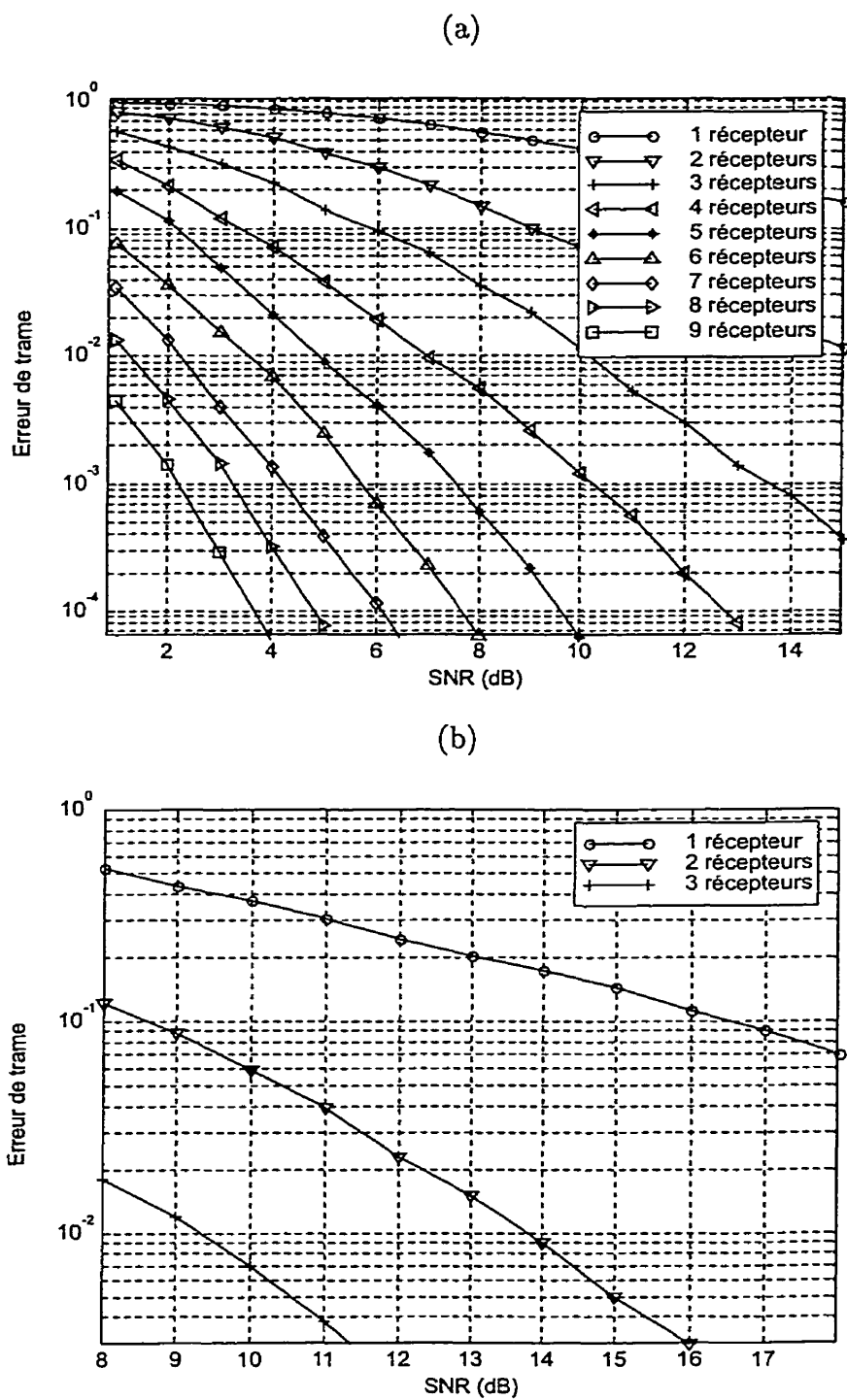


Figure D.2: Performance du CST associé au générateur : (a)  $G=[23,35]$ ,  $K=5$  - (b)  $G=[133,171]$ ,  $K=7$

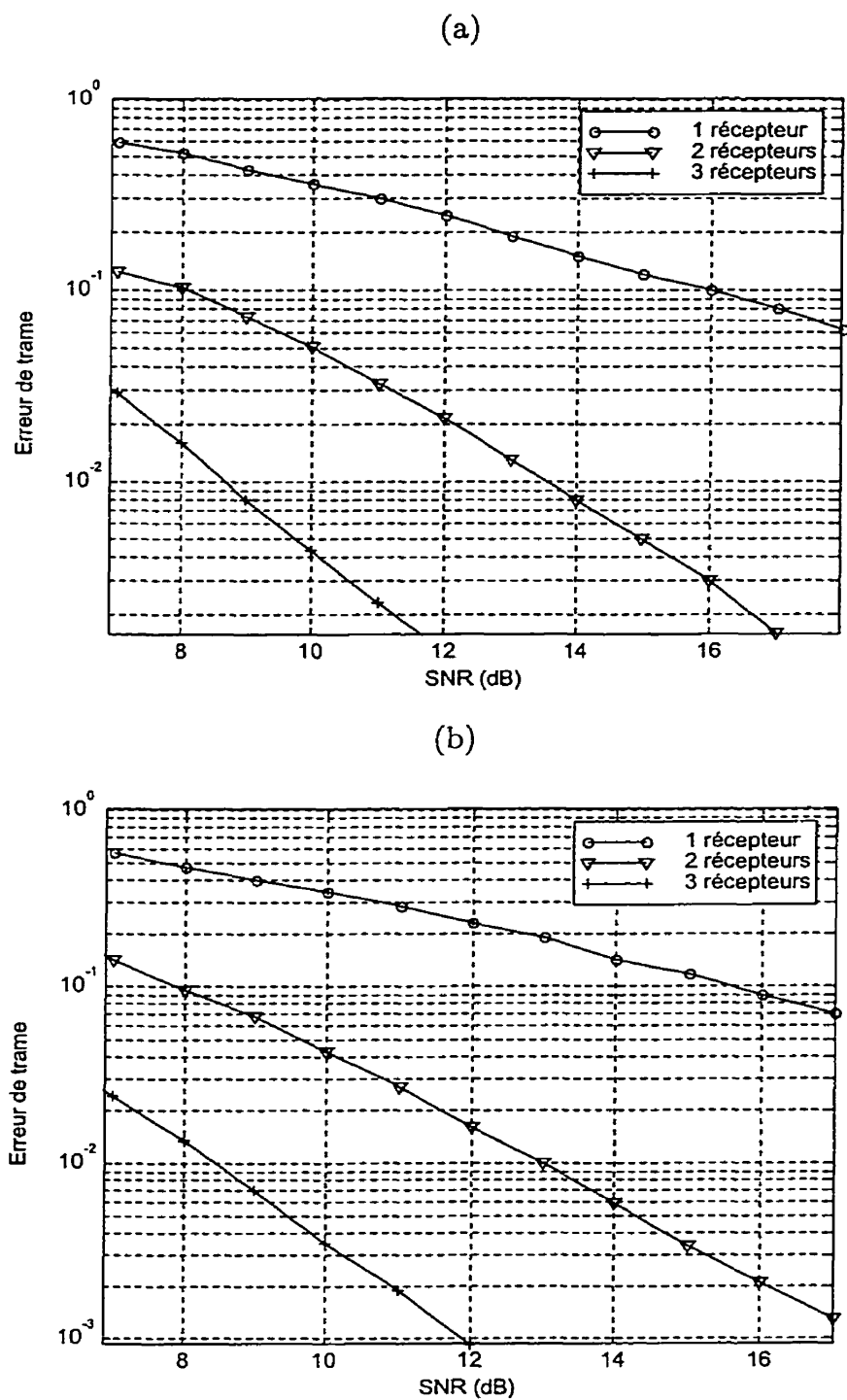
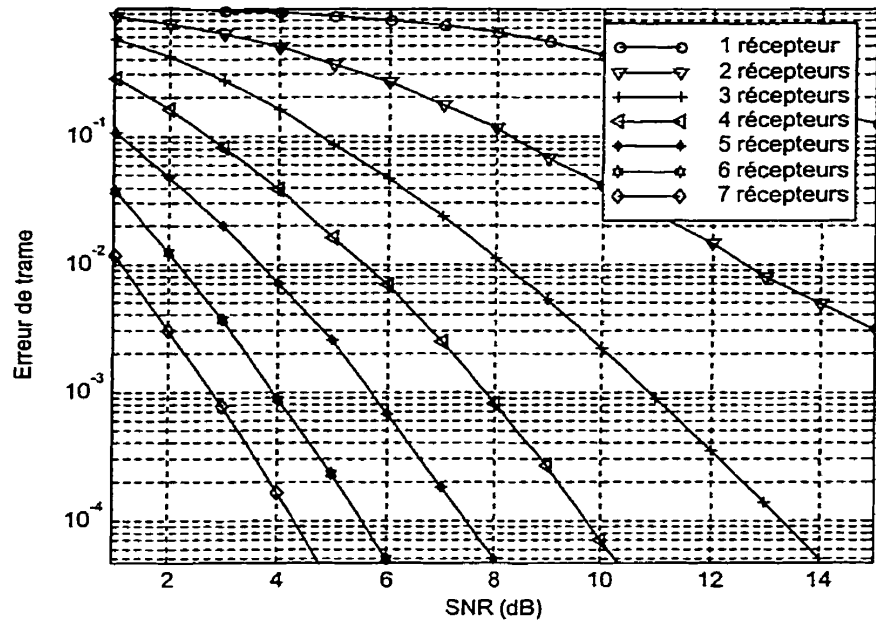


Figure D.3: Performance du CST associé au générateur : (a)  $G=[247,371]$ ,  $K=8$  - (b)  $G=[561,753]$ ,  $K=9$

## D.2 Système à trois émetteurs avec CST convolutionnels de taux 1/3

Figure D.4: Performance du CST associé au générateur  $G=[25,33,37]$ ,  $K=5$

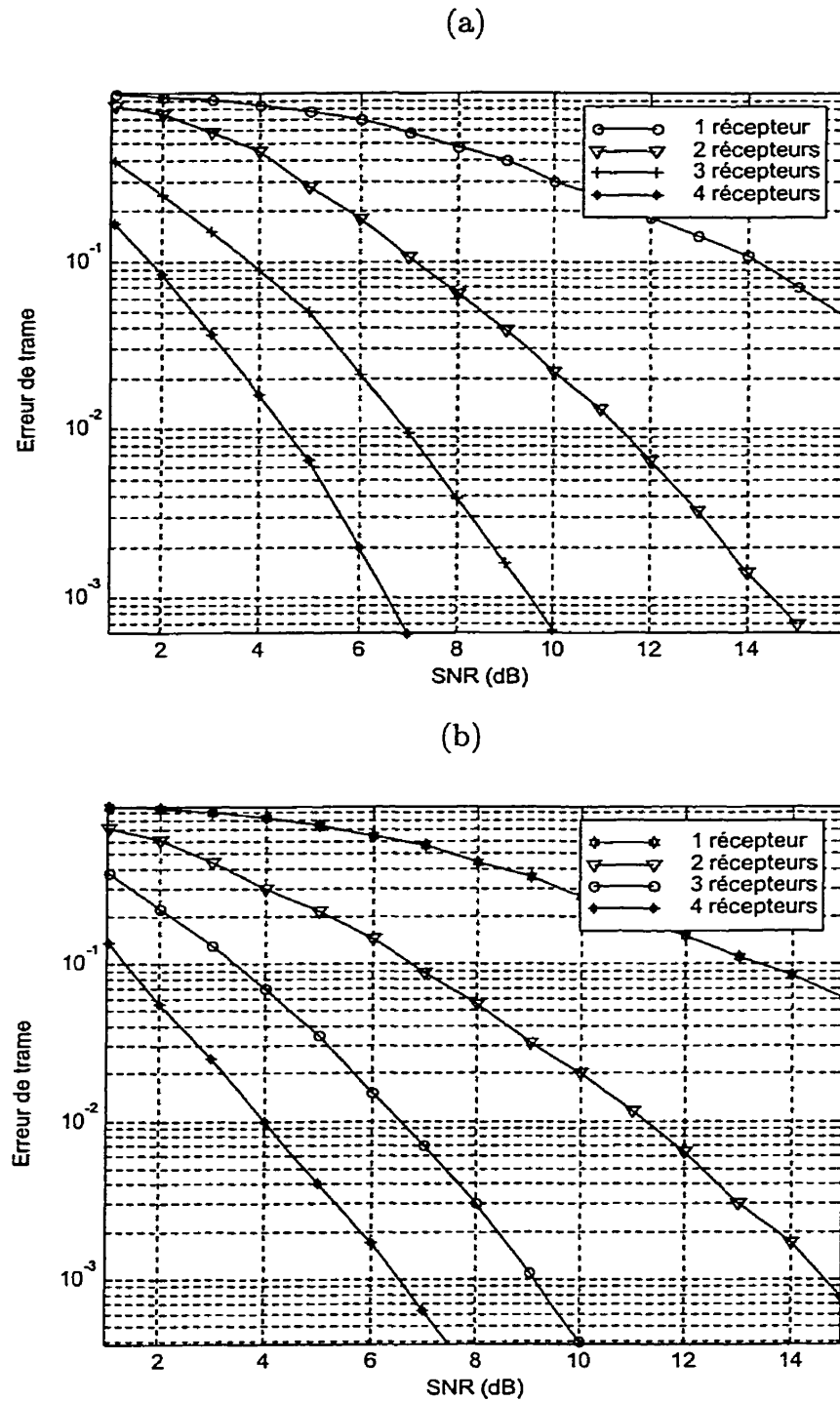


Figure D.5: Performance du CST associé au générateur : (a)  $G=[133,171,165]$ ,  $K=7$  - (b)  $G=[247,371,353]$ ,  $K=8$

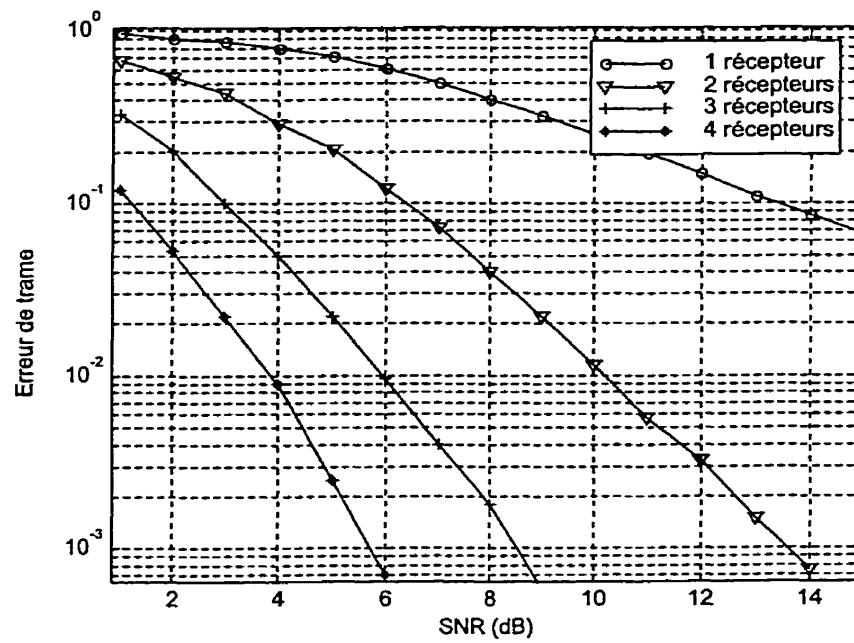
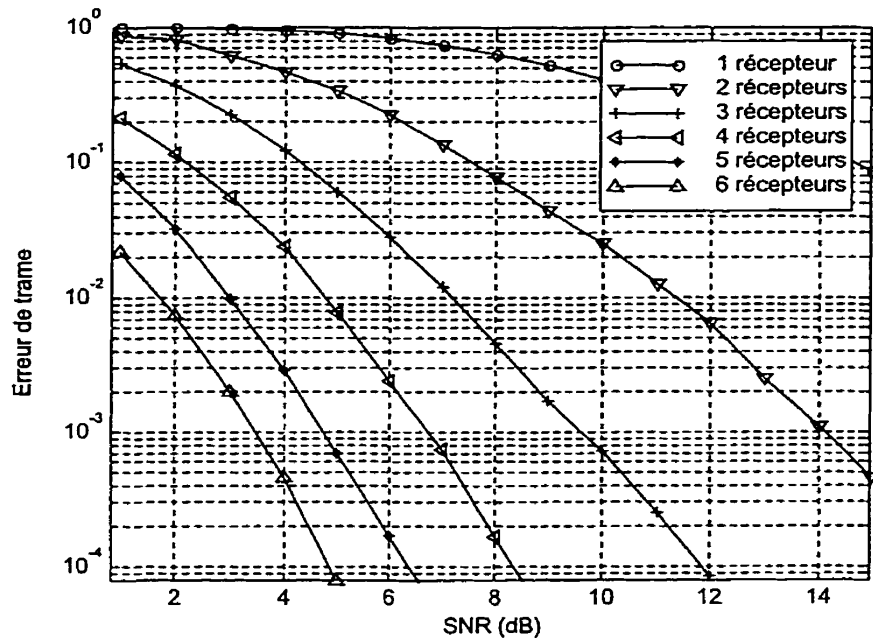


Figure D.6: Performance du CST associé au générateur  $G=[561,753,715]$ ,  $K=9$

## D.3 Système à trois émetteurs avec CST convolutionnels de taux 1/4

Figure D.7: Performance du CST associé au générateur  $G=[25,27,33,37]$ ,  $K=5$

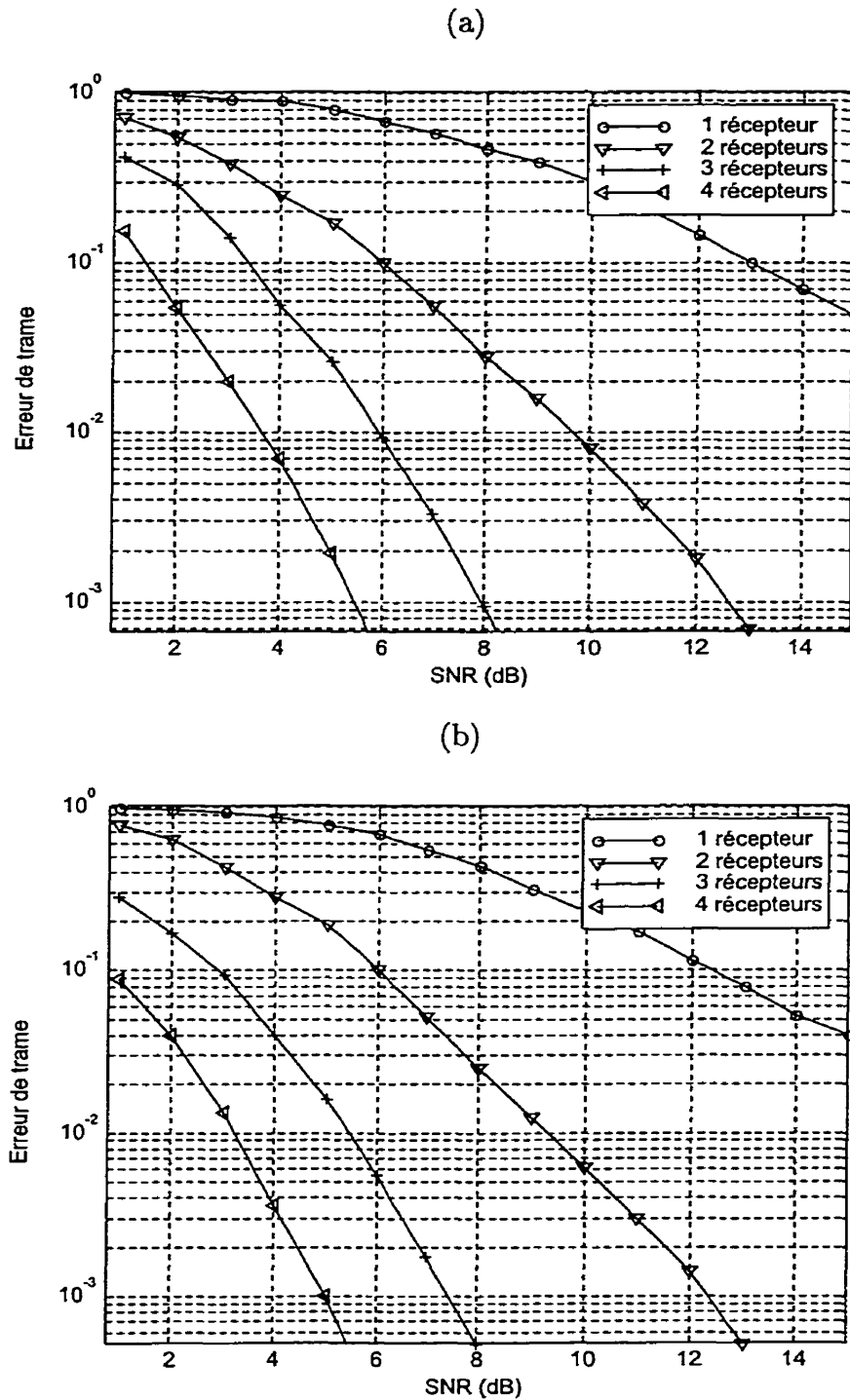


Figure D.8: Performance du CST associé au générateur : (a)  $G=[133,171,165,117]$ ,  $K=7$  - (b)  $G=[247,371,353,327]$ ,  $K=8$



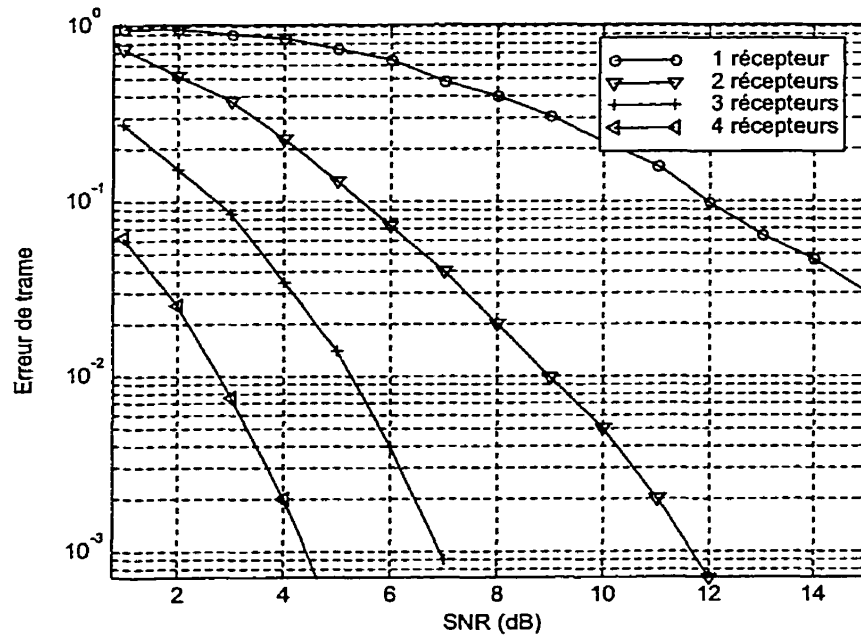


Figure D.9: Performance du CST associé au générateur  $G=[561,753,715,517]$  et  $K=9$