

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

DAVID LACASSE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JUIN 2000



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57415-6

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

présenté par: LACASSE David

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Monsieur Dominique Pelletier. Son jugement sûr et la pertinence de ses conseils ont rendu la réalisation de ce travail agréable et instructive.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance et mon appréciation à mon collègue, Monsieur Éric Turgeon. Ses explications détaillées et une multitude de renseignements pertinents ont grandement accéléré mon apprentissage.

Finalement, j'aimerais remercier Monsieur André Garon pour m'avoir donné accès à des ressources informatiques sans lesquelles ce travail n'aurait pu être réalisé.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente l'application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements turbulents. L'accent est donc mis sur les résultats plutôt que sur l'implantation de la méthode. Les articles:

1. "On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity" et
2. "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity"

reproduits intégralement aux chapitres cinq et six contiennent l'analyse des résultats. Les chapitres préliminaires décrivent de façon succincte les caractéristiques des écoulements turbulents et la méthode numérique employée pour les simuler.

Le premier objectif du mémoire est de démontrer qu'un modèle de simulation bien défini produit de bonnes prédictions de l'écoulement, de la turbulence et des quantités dérivées telles que les coefficients de friction et de transfert thermique sur une paroi. Par modèle de simulation bien défini on entend l'utilisation judicieuse du modèle de turbulence et des lois de paroi, ainsi que le choix approprié du domaine de calcul et des conditions frontières. On garantit alors que toute phénoménologie incluse dans le modèle mathématique est active dans la simulation. Le second objectif est de montrer que la validation des résultats et du modèle de simulation n'est significative que sur la base de solutions indépendantes du maillage telles qu'obtenues avec le remaillage adaptatif. Cette technique s'avère un outil efficace de contrôle de la qualité des solutions numériques.

Pour simuler les écoulements turbulents, nous utilisons un modèle à *viscosité turbulente*. L'écoulement moyen est calculé en résolvant les équations de Navier-Stokes alors que l'effet de la turbulence est modélisé par l'ajout d'une viscosité turbulente μ_t à la viscosité moléculaire μ . Deux quantités: l'énergie cinétique de la turbulence, k , et son taux de dissipation, ϵ , permettent de calculer la distribution de μ_t en tous points du domaine. Les distributions de k et ϵ sont obtenues à l'aide d'équations de transport, ci-après appelées équations de la turbulence. Un concept similaire à la viscosité turbulente, la *conductivité turbulente*, λ_t , permet de calculer le transfert thermique en régime turbulent. La distribution de λ_t est obtenue à partir de la distribution de μ_t .

La solution aux équations de Navier-Stokes, d'énergie et de la turbulence est obtenue de façon approximative avec une méthode d'éléments finis. Le domaine de calcul est divisé en éléments constituant le maillage. Les composantes de vitesse, la température et les variables de turbulence sont interpolées sur l'élément à l'aide de fonctions quadratiques. L'interpolation de la vitesse est enrichie par une fonction bulle cubique. Afin d'accroître la robustesse de l'algorithme de calcul, les équations de la turbulence sont exprimées en termes des logarithmes des variables de la turbulence. On s'assure ainsi de la positivité de k et ϵ partout dans le domaine. Les conditions frontières aux parois sont obtenues à l'aide de lois de paroi pour toutes les variables.

Le remaillage adaptatif constitue un outil puissant pour contrôler et évaluer les erreurs de discrétisation et produire des solutions indépendantes du maillage. La méthode consiste d'abord à estimer l'erreur de la solution sur chaque élément du domaine. On utilise une méthode dite de projection locale pour construire une approximation de la solution exacte. Les estimations d'erreur sont ensuite utilisées pour redéfinir la taille des éléments du maillage partout dans le domaine de calcul de façon à ce qu'elle soit plus petite dans les régions où la solution varie rapidement et

plus grande là où la solution change peu. Le maillage est donc “adapté” à la solution afin d’en contrôler et d’en uniformiser la précision.

L'article intitulé “On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity” montre que la prédiction précise du coefficient de friction et du nombre de Stanton est possible avec le modèle de turbulence $k - \epsilon$ et les lois de paroi. Le succès de la simulation repose sur l'utilisation judicieuse du modèle. Un écoulement turbulent sur une plaque plane, avec et sans transfert thermique, est utilisé comme problème type. Les prédictions du coefficient de friction local ont été obtenues pour des nombres de Reynolds de 2×10^5 et 2×10^6 . Pour le cas $Re = 2 \times 10^5$, on étudie les effets du nombre de Reynolds de turbulence à l'entrée, de la géométrie de la plaque et du type de lois de paroi. Lorsque le nombre de Reynolds de turbulence à l'entrée vaut 10% du nombre de Reynolds de l'écoulement, les résultats de la simulation sont réalistes. On observe de la turbulence de grille si le nombre de Reynolds de turbulence à l'entrée est trop bas. Une amélioration significative est apportée aux prédictions si on incorpore l'épaisseur de la plaque dans le modèle de simulation. Finalement, nos calculs démontrent que la loi de paroi à deux échelles de vitesse donne de meilleurs résultats que la loi de paroi à une échelle de vitesse. Pour le cas $Re = 2 \times 10^6$, l'écart entre la prédiction numérique du coefficient de friction local, $C_f(x)$, et la corrélation empirique est d'au maximum 13% sur toute la longueur de la plaque. Pour le coefficient local de transfert de chaleur, $St(x)$, l'écart entre la prédiction et la corrélation ne dépasse pas 7%.

L'article intitulé “Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity” présente l'application du remaillage adaptatif à la simulation d'un écoulement turbulent séparé. La méthode est d'abord employée sur un problème possédant une solution analytique afin de démontrer ses performances et sa fiabilité. Elle est ensuite utilisée pour simuler un écoulement turbulent

dans une conduite annulaire coudée à 180 degrés. L'article montre que l'utilisation du modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec des lois de paroi permet de prédire la séparation de la couche limite sur une surface courbe et lisse. On obtient de bonnes prédictions si les valeurs de y^+ sur la frontière du domaine de calcul à l'intérieur du virage sont proches de 30. Le maillage doit également être suffisamment raffiné afin de s'assurer que les conditions frontières obtenues avec les lois de paroi ne dépendent plus de la finesse du maillage. Le remaillage adaptatif s'avère un outil très efficace à cet égard. Les prédictions obtenues avec deux modèles différents de la conduite sont comparées avec des mesures expérimentales. Un modèle utilise des profils plats de u , k et ϵ à l'entrée de la conduite et l'autre utilise des profils partiellement développés. Dans les deux cas, l'importance d'obtenir des solutions indépendantes du maillage est démontrée. Les prédictions obtenues avec le modèle à profils partiellement développés sont en meilleur accord avec les données expérimentales.

ABSTRACT

This thesis presents the application of an adaptive finite element method to turbulent flows. Emphasis is put on results rather than on the method itself. The articles entitled:

1. "On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity" and
2. "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity"

reprinted in chapters five and six contain the analysis of the results. The preliminary chapters contain a concise description of the characteristics of turbulence and of the numerical method used to simulate turbulent flows.

The first objective of this thesis is to show that a properly defined computational model yields accurate predictions of the flow, turbulence, and quantities such as the skin friction and heat transfer coefficients. The computational model is well defined if the turbulence model and wall functions are used judiciously and if the computational domain and boundary conditions are chosen appropriately to insure that physics embedded in the mathematical model are triggered in the computation. The second objective is to show that the validation of both the results and the computational model is only possible with grid independent solutions such as the ones obtained with adaptive remeshing. This technique proves to be an efficient tool for ensuring the quality of numerical results.

To simulate turbulent flows, we use an *eddy viscosity* turbulence model. The mean flow is governed by the Navier-Stokes equations and the effect of turbulence is mod-

eled by adding an eddy viscosity μ_t to the molecular viscosity μ . The turbulence kinetic energy, k , and its dissipation rate, ϵ , are used to compute the value of μ_t everywhere in the domain. The distributions of k and ϵ are governed by transport equations. A concept similar to the eddy viscosity, the *eddy conductivity*, λ_t , is used to compute the distribution of the temperature in turbulent flows. The distribution of λ_t is computed from the distribution of μ_t .

The solution to the Navier-Stokes, energy, and the turbulence equations is obtained with a finite element method. The computational domain is divided in elements in a process called meshing. The components of the velocity, temperature, and turbulence variables are interpolated on each element with quadratic functions. To improve the robustness of the algorithm, the turbulence equations are expressed in terms of the logarithms of k and ϵ variables therefore insuring positivity of k and ϵ everywhere in the domain. Boundary conditions on solid walls are enforced with wall functions for all variables.

Adaptive remeshing is a powerful tool to control and evaluate discretisation errors and produce grid independent solutions. The method first estimates the error of the solution on each element of the domain. A local projection method is used in this regard to generate an approximation of the true solution. Error estimates are then used to redefine the size of elements in the mesh everywhere in the domain. The size of the elements is smaller in regions where the variations of the solution are larger in order to improve the accuracy of the interpolations. The mesh is therefore “adapted” to the solution.

The paper entitled “On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity” shows that accurate predictions of the skin friction and Stanton number can be achieved with the $k - \epsilon$ model of turbulence with wall functions. Success hinges on the judicious use of the model. Turbulent flow and heat transfer over a

flat plate are used as test cases. Predictions of the local skin friction coefficient on the plate were obtained for Reynolds numbers of 2×10^5 and 2×10^6 . In the case $Re = 2 \times 10^5$, the effects of inflow turbulence Reynolds number, geometry of the plate and type of wall functions are assessed. It is found that an inlet turbulence Reynolds number equal to 10% of the Reynolds number yields realistic results. Grid turbulence is observed if the inlet value of the turbulence Reynolds number is too low. Significant improvement in accuracy of the predictions is achieved if the plate thickness is included in the computational model. Finally, results show that a two-velocity scale wall function is superior to the more popular one-velocity scale wall function. For the case $Re = 2 \times 10^6$, discrepancies between predictions of the local skin friction coefficient, $C_f(x)$, and the empirical correlation do not exceed 13% over the plate length. Predictions of the local heat transfer coefficient, $St(x)$, are in excellent agreement with experimental correlations: discrepancies do not exceed 7%.

The paper entitled "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity" presents an application of adaptive remeshing to the prediction of turbulent separated flows on smooth curved surfaces. The methodology is first demonstrated on a problem possessing a closed form solution to establish the performance and reliability of the proposed approach. The method is then applied to the prediction of turbulent flow in an annular, axisymmetric turnaround duct (TAD). The paper shows that the $k - \epsilon$ model with wall functions can predict separated flows along smooth curved surfaces. Success is achieved if the wall functions exhibit values of y^+ close to 30, and if meshes are fine enough to guarantee that wall function boundary conditions are grid converged. Adaptive remeshing proves to be a very cost effective tool in this context. Predictions from two computational models of the TAD are compared with experimental measurements. The first model uses flat profiles of u , k , and ϵ at the duct inlet while the second model uses partially developed profiles. The importance of appropriate meshes to

achieve grid independent solutions is demonstrated in both cases. Better agreement with measurements is obtained when partially developed profiles of u , k , and ϵ are specified at the TAD inlet.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xiii
LISTE DES FIGURES	xvii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xix
LISTE DES TABLEAUX	xxii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 LA SIMULATION D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS	3
1.1 La turbulence et ses effets	4
1.2 Un modèle de turbulence: $k - \epsilon$	5
1.3 Résolution numérique: la revue bibliographique	7
CHAPITRE 2 LES ÉQUATIONS ET LA MÉTHODE DE RÉOLUTION	10
2.1 Les équations: représentation mathématique du milieu continu	10
2.2 Les équations sous forme non-dimensionnelle	13
2.3 La méthode des éléments finis	15
2.3.1 L'élément	15
2.3.2 Formulation variationnelle	16
2.3.3 Le modèle éléments finis	19
2.4 Résolution	20
2.4.1 Algorithme	20
2.4.2 Traitement des non-linéarités	21
2.4.3 Contrainte d'incompressibilité	22

CHAPITRE 3	CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES	23
3.1	Stabilisation de l'algorithme de résolution	23
3.1.1	Origine des instabilités	23
3.1.2	Formulations "Streamline Upwind"	25
3.1.3	Formulation "Galerkin Least Squares"	27
3.2	Utilisation de lois de paroi	28
3.2.1	Loi de paroi à une échelle de vitesse	29
3.2.2	Loi de paroi à deux échelles de vitesse	32
3.2.3	Loi de paroi thermique	33
3.3	Formulation des équations de turbulence en variables logarithmiques	35
CHAPITRE 4	SYNTHÈSE DES TRAVAUX	38
4.1	Le remaillage adaptatif	38
4.1.1	Estimation d'erreur	39
4.1.2	Opérateur de transition	42
4.2	Validation d'un modèle de simulation	44
4.2.1	Effet de Re_t	45
4.2.2	Effet du type de lois de paroi	46
4.2.3	Effet de la géométrie de la plaque	49
4.2.4	Effet du nombre de Reynolds de l'écoulement	50
4.2.5	Conclusion	51
4.3	Simulation d'un écoulement séparé	52
4.3.1	Vérification de l'algorithme de remaillage adaptatif	52
4.3.2	Écoulement dans une conduite annulaire coudée à 180 degrés	55
4.3.3	Conclusion	59

CHAPITRE 5	ON THE JUDICIOUS USE OF THE $k - \epsilon$ MODEL, WALL FUNCTIONS AND ADAPTIVITY	60
5.1	Abstract	60
5.2	Introduction	61
5.3	Modeling of the Problem	62
5.3.1	Reynolds-averaged Navier-Stokes equations	62
5.3.2	The standard $k - \epsilon$ turbulence model	63
5.3.3	Wall boundary conditions	64
5.3.3.1	One-velocity scale wall function	64
5.3.3.2	Two-velocity scale wall function	65
5.3.3.3	Thermal wall function	66
5.3.4	Turbulence equations in logarithmic form	67
5.3.5	Finite element formulation and adaptive remeshing	68
5.4	Isothermal Flat Plate	69
5.4.1	Effect of the turbulence Reynolds number	70
5.4.2	Effect of the type of wall functions	73
5.4.2.1	One velocity scale	73
5.4.2.2	Two velocity scales	75
5.4.3	Effect of the plate geometry	76
5.4.3.1	Square edge - 1 velocity scale	76
5.4.3.2	Square edge - 2 velocity scales	77
5.4.3.3	Round edge - 1 velocity scale	80
5.4.3.4	Round edge - 2 velocity scales	80
5.5	Heated Flat Plate	81
5.5.1	Prediction of $C_f(x)$	81
5.5.2	Prediction of $St(x)$	81
5.5.3	Evolution of y^+ with the mesh	84
5.6	Conclusion	85
5.7	Acknowledgments	86

CHAPITRE 6	PREDICTION OF TURBULENT SEPARATED FLOW IN A TURNAROUND DUCT USING WALL FUNCTIONS AND ADAPTIVITY	87
6.1	Abstract	87
6.2	Introduction	88
6.3	Modeling of the Problem	89
6.3.1	Reynolds-averaged Navier-Stokes equations	89
6.3.2	The standard $k - \epsilon$ turbulence model	90
6.3.3	Turbulence equations in logarithmic form	91
6.3.4	Wall boundary conditions	93
6.3.5	Finite element formulation and adaptive remeshing	94
6.4	Verification	95
6.5	Flow in a Turnaround Duct	99
6.5.1	Computational model #1	100
6.5.1.1	Domain and boundary conditions	100
6.5.1.2	Wall functions with $d = 0.015$ on inner wall	101
6.5.1.3	Wall functions with $d = 0.01$ on inner wall	102
6.5.2	Computational model #2	107
6.5.2.1	Domain and boundary conditions	107
6.5.2.2	Results	108
6.5.3	Validation	113
6.5.3.1	Experimental flow rates	113
6.5.3.2	Assessment of the computational models	114
6.6	Conclusion	116
6.7	Acknowledgments	117
	CONCLUSION	118
	RÉFÉRENCES	121

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Élément de Crouzeix-Raviart.	16
Figure 3.1	Loi de paroi universelle pour la couche limite turbulente.	30
Figure 4.1	Sous-domaine Ω_S autour du sommet P	41
Figure 4.2	Iso-valeurs de k	47
Figure 4.3	Distributions de $C_f(x)$ sur une plaque infiniment mince.	48
Figure 4.4	Distributions de $C_f(x)$ sur une plaque avec épaisseur.	49
Figure 4.5	Distributions de $C_f(x)$ pour le cas $Re = 2 \times 10^6$	51
Figure 4.6	Normes réelles et estimées de l'erreur.	54
Figure 4.7	Efficacités de l'estimateur d'erreur.	54
Figure 4.8	Conduite annulaire coudée à 180 degrés.	55
Figure 4.9	y^+ et la vitesse de glissement pour le cas $d = 0.015$	57
Figure 4.10	y^+ et la vitesse de glissement pour le cas $d = 0.01$	58
Figure 5.1	Domain and boundary conditions.	69
Figure 5.2	Contours of TKE	71
Figure 5.3	Variation of μ_t in the boundary layer at $x/L = 0.5$	71
Figure 5.4	Final meshes of the adaptive remeshing procedure	72
Figure 5.5	Evolution of the distributions of $C_f(x)$ with adaptive cycles	74
Figure 5.6	Distributions of $C_f(x)$ on an infinitely thin plate.	74
Figure 5.7	Horizontal velocity at $y = 0$	76
Figure 5.8	Enlargement of the plate leading edge	77
Figure 5.9	Variation of TKE along the plate.	78
Figure 5.10	Distributions of $C_f(x)$ along a plate with a finite thickness for $Re = 2 \times 10^5$	78
Figure 5.11	Slip velocity along the plate.	79
Figure 5.12	Distributions of $C_f(x)$ for $Re = 2 \times 10^6$	82
Figure 5.13	Distributions of $St(x)$ for $Re = 2 \times 10^6$	82

Figure 5.14	Meshes obtained with the adaptive remeshing procedure. . . .	83
Figure 5.15	Evolution of y^+ with the mesh.	85
Figure 6.1	Computational domain for free turbulent jet	95
Figure 6.2	True and estimated error norms	98
Figure 6.3	Relative errors	98
Figure 6.4	Efficiencies	98
Figure 6.5	Computational models for flow in a turnaround duct.	100
Figure 6.6	y^+ and slip velocity on inner wall for $d = 0.015$ with computational model #1.	101
Figure 6.7	y^+ and slip velocity on inner wall for $d = 0.01$ with computational model #1.	102
Figure 6.8	Three meshes of the adaptive process for $d = 0.01$ on inner wall with computational model #1.	103
Figure 6.9	Contours for computational model #1 with $d = 0.01$ on inner wall.	105
Figure 6.10	Tangential velocity profiles for $d = 0.01$ on inner wall with computational model #1.	106
Figure 6.11	y^+ and slip velocity on inner wall for computational model #2.	108
Figure 6.12	Tangential velocity profiles for computational model #2.	109
Figure 6.13	Three meshes of the adaptive process for computational model #2.	110
Figure 6.14	Contours for computational model #2.	111
Figure 6.15	Streamlines.	112
Figure 6.16	Experimental and predicted tangential velocity profiles.	115

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Caractères usuels

$C_f(x)$	Coefficient de friction local
$C_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon$	Constantes pour le modèle $k - \epsilon$
C_1, C_2	
c_p	Chaleur spécifique à pression constante
d	Distance entre la paroi et la frontière de calcul
D	Tenseur de taux de déformation
err	Erreur
E	Paramètre de rugosité
h	Taille de l'élément
H	Hauteur du canal
k	Énergie cinétique de la turbulence (TKE)
L	Longueur de la plaque
Nu	Nombre de Nusselt
p	Pression
Pe	Nombre de Péclet
Pr	Nombre de Prandtl
q	Flux thermique
R	Tenseur de Reynolds
Re	Nombre de Reynolds
s	Coordonnée selon le rayon de courbure
$St(x)$	Nombre de Stanton local
t	Temps
T	Température
U	Vitesse

\mathbf{u}	Vecteur vitesse
u, v	Composantes du vecteur vitesse
u_k	Échelle de vitesse basée sur TKE
u_*	Vitesse de friction
u_{**}	Échelle de vitesse obtenue avec la loi de paroi
V	Module de la vitesse ($\sqrt{u^2 + v^2}$)
r, r	Axes en coordonnées cylindriques
x, y	Axes cartésiens

Lettres calligraphiques

\mathcal{E}	Logarithme naturel de ϵ
\mathcal{K}	Logarithme naturel de k

Lettres grecques

α	Coefficient de diffusion
δ_*	Fonction poids de la formulation Galerkin (fonction d'interpolation)
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ	Taux de dissipation de la turbulence
γ	Fonction de taille du maillage
Γ	Frontière du domaine de calcul
κ	Constante de Kármán
λ	Conductivité thermique
μ	Viscosité
Ω	Domaine de calcul
ϕ	Fonction d'interpolation
ρ	Masse volumique
τ	Contrainte de cisaillement
$\hat{\tau}$	Paramètre de stabilisation

Indices

e	Frontière de calcul à l'extérieur du tournant
h	Numérique
i	Frontière de calcul à l'intérieur du tournant
\mathcal{N}	Portion de la frontière où est imposée une condition de Neumann
o	Valeur caractéristique
t	Turbulent
$trans$	Transition laminaire-turbulent
w	Valeur à la paroi
x	Basé sur une longueur x
∞	Écoulement libre

Exposants

e	Élémentaire
$*$	Valeur estimée
$+$	Sans dimension (loi de paroi)

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Constantes du modèle $k - \epsilon$	13
Tableau 2.2	Valeurs à spécifier au programme pour résoudre les équations non-dimensionnelles	15
Tableau 4.1	Conditions frontières pour l'écoulement sur une plaque plane .	46
Tableau 5.1	Constants for the $k - \epsilon$ model	63
Tableau 5.2	Inlet values of k and ϵ	70
Tableau 6.1	Constants for the $k - \epsilon$ model	91
Tableau 6.2	Experimental flow rates	113

INTRODUCTION

Qu'ils soient ou non associés à du transport d'énergie ou de masse, les écoulements de fluides jouent un rôle essentiel dans l'environnement et les organismes vivants. De l'observation de phénomènes naturels, des individus tels Bernoulli, Navier, Stokes, Boussinesq, Reynolds et Prandtl ont jeté les bases de la science connue sous le nom de mécanique des fluides. Les ingénieurs utilisent les principes de mécanique des fluides pour, par exemple, convertir le flot d'un cours d'eau en électricité ou encore pour faire voler les avions. Le développement d'outils élaborés pour comprendre et prédire les écoulements résulte du rôle central et indéniable que jouent de telles applications de la mécanique des fluides dans notre quotidienneté.

L'extraordinaire évolution des micro-ordinateurs au cours des trois dernières décennies permet l'essor d'une science devenue aujourd'hui indispensable: la mécanique des fluides assistée par ordinateur (MFAO). De l'optimisation d'un profil de Formule 1 aux prédictions météorologiques, les débouchés de cette discipline sont multiples. Plusieurs individus tentèrent donc l'expérience de la MFAO pour simuler des écoulements turbulents d'application industrielle. Certains obtinrent de "bons" résultats, c'est-à-dire des résultats comparables aux mesures expérimentales. Les autres imputèrent leurs mauvais résultats au modèle de turbulence utilisé et conclurent, sans autre forme de procès, de l'inadéquation des modèles de turbulence simples tels que le modèle $k - \epsilon$. Aujourd'hui, les journaux scientifiques sérieux exigent qu'un résultat numérique soit accompagné d'une estimation de l'erreur. Il devient alors possible, sur la base de résultats numériques fiables, de porter un jugement sur, par exemple, la validité d'un modèle de turbulence. Une technique permettant d'améliorer la précision des solutions numériques et d'obtenir une estimation fiable de l'erreur existe et porte le nom de maillage adaptatif. Il s'agit en fait d'une méthode de contrôle

de la qualité des solutions.

Le noyau du présent mémoire est constitué de deux articles: "On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity" soumis pour publication à l'*AIAA Journal* et "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity" soumis pour publication au *International Journal for CFD*. Ces articles présentent les résultats de la simulation d'écoulements turbulents obtenus avec un algorithme de remaillage adaptatif. Le modèle de turbulence $k - \epsilon$ et les lois de parois sont utilisés. Dans le premier article, on étudie un écoulement sur une plaque plane avec et sans transfert thermique. Le second article est consacré à l'étude d'un écoulement séparé dans une conduite annulaire axisymétrique coudée à 180 degrés.

Un aperçu de la simulation des écoulements turbulents est d'abord donné au chapitre un. Le phénomène qu'est la turbulence, de même que ses effets, sont brièvement décrits. Le modèle de turbulence $k - \epsilon$, que nous utilisons, est ensuite introduit. Le chapitre comprend aussi une revue bibliographique de la méthode de résolution numérique employée. Les équations utilisées pour modéliser les problèmes étudiés et la description de la méthode de résolution numérique font l'objet du chapitre deux. Au chapitre trois, quelques artifices numériques nécessaires à la résolution des problèmes sont présentés. Nous discuterons alors des méthodes de stabilisation, des lois de paroi et de la résolution des équations de turbulence en variables logarithmiques. Le chapitre quatre est une synthèse de ce qui constitue l'essence de ce mémoire, c'est-à-dire le remaillage adaptatif et les articles "On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity" et "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity". Ceux-ci sont reproduits dans leur version intégrale aux chapitres cinq et six respectivement.

CHAPITRE 1

LA SIMULATION D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Les écoulements turbulents sont de nature non-stationnaire et tridimensionnelle. Ils présentent également une vaste gamme d'échelles de longueurs et de temps. Pour simuler exactement de tels écoulements, la finesse du maillage devrait être du même ordre de grandeur que la plus petite échelle de longueur (*i.e.* $\approx O(0.001L)$, où L est la longueur caractéristique de l'écoulement). Ceci se traduit par un maillage tridimensionnel contenant un minimum de 10^9 noeuds [1]. Afin de tenir compte de la nature transitoire du phénomène, il faudrait en plus résoudre l'écoulement à des intervalles de temps du même ordre de grandeur que la plus petite échelle de temps. La capacité de calcul des ordinateurs disponibles aujourd'hui est insuffisante pour accomplir une telle tâche. On a donc recours à des modèles de turbulence dont le but est de reproduire le phénomène qu'est la turbulence à un coût numérique acceptable. Cette approche implique que la résolution exacte de l'écoulement est abandonnée au profit de la résolution de l'écoulement dit "moyen". Les effets de la turbulence entrent dans la description de l'écoulement via le modèle, lequel est typiquement constitué d'informations théoriques et empiriques. Il n'existe toutefois pas de modèle universel pouvant être utilisé dans toutes les applications. Le choix du modèle est basé sur les besoins propres à l'écoulement (complexité de la géométrie) et le niveau de précision recherché.

Dans ce chapitre, nous décrivons succinctement le phénomène de la turbulence et ses effets. Le modèle de turbulence utilisé dans ce mémoire, le modèle $k - \epsilon$, est ensuite présenté. Le chapitre se termine par une revue bibliographique.

1.1 La turbulence et ses effets

L'étude phénoménologique détaillée de la turbulence dépasse largement les objectifs de cet ouvrage. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails à cet effet dans les ouvrages de Hinze [2] ou de Tennekes et Lumley [3]. Nous nous limiterons donc à la description qualitative de la turbulence et de ses effets.

L'écoulement turbulent peut être perçu comme un écoulement tourbillonnant irrégulier dont les fluctuations par rapport au temps et à l'espace semblent tout à fait aléatoires. Il est donc difficile d'obtenir une description mathématique exacte d'un tel phénomène. C'est pourquoi une approche statistique est utilisée afin de séparer l'écoulement en une partie "moyenne" et une partie "fluctuante" [4, 5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les barres horizontales au-dessus des variables représentent les valeurs moyennées dans le temps:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u} \, dt \quad , \quad \bar{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p \, dt \quad , \quad \bar{T} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T \, dt$$

où l'intervalle $t_2 - t_1$ est long comparativement à l'échelle de temps du mouvement turbulent. Les caractéristiques propres à l'écoulement turbulent proviennent du mouvement de la partie fluctuante (\mathbf{u}'), lequel est impossible à prédire. On cherchera donc à prédire les effets du mouvement plutôt que le mouvement lui-même. Parmi ces effets, notons l'accroissement extraordinaire de la viscosité apparente du fluide par un facteur atteignant parfois plusieurs dizaines de milliers. Ceci s'explique par

l'effet accru de mélange causé par le mouvement désordonné des particules de fluide. On visualise facilement cet effet lorsqu'on pense à un groupe de coureurs au départ d'un marathon. Lorsque tous les coureurs circulent dans la même direction, on observe l'écoulement ordonné du peloton, comparable à un écoulement laminaire. Si par contre quelques coureurs décidaient de courir en zigzag, les chocs entre les individus auraient bientôt pour effet de ralentir tout le peloton. On pourrait alors dire que le peloton a une "viscosité apparente" plus élevée. Cet accroissement de la viscosité est à la base de nombreux modèles de turbulence dont le modèle $k - \epsilon$ décrit à la section suivante. Ces modèles portent le nom de *modèles à viscosité turbulente*.

L'effet de mélange est à l'origine de la résistance accrue observée pour les écoulements turbulents dans les tuyaux et de la force de traînée élevée que doivent vaincre les avions et les bateaux. Par contre, ce même effet de mélange augmente le transfert thermique, indispensable dans plusieurs applications.

1.2 Un modèle de turbulence: $k - \epsilon$

L'analogie entre le mouvement moléculaire, qui conduit à la loi de viscosité de Stokes pour les écoulements laminaire, et le mouvement des particules de fluide dans un écoulement turbulent est à la base du concept de viscosité turbulente. Les tourbillons turbulents se comportent comme les molécules qui se frappent et échangent de la quantité de mouvement. Tout comme la viscosité moléculaire est proportionnelle à la vitesse et à la trajectoire moyenne des molécules, la viscosité turbulente est proportionnelle à une vitesse caractéristique des particules de fluide et à la longueur caractéristique de leur déplacement:

$$\mu_t \propto \rho \hat{V} L_m \quad (1.2)$$

Ces échelles de vitesse et de longueur correspondent aux grandes échelles du mouvement turbulent qui peuvent être prédites assez précisément pour la plupart des écoulements turbulents [5]. Les échelles \hat{V} et L_m changent en fonction de la position à l'intérieur du domaine de calcul. La viscosité turbulente est donc une propriété de l'écoulement et non du fluide. Le modèle $k - \epsilon$ de Launder et Spalding [6] permet, de façon indirecte, de calculer la distribution de μ_t partout sur le domaine à l'aide de l'énergie cinétique de la turbulence, k , et de son taux de dissipation, ϵ . L'énergie cinétique de la turbulence k , définie comme suit:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (1.3)$$

est l'échelle appropriée pour \hat{V} et on utilise:

$$\hat{V} \propto k^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Par une étude dimensionnelle [7], on peut aussi montrer que:

$$L_m \propto \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}. \quad (1.5)$$

En remplaçant (1.5) et (1.4) dans (1.2), on obtient:

$$\mu_t \propto \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

ou encore, sous la forme de la relation de Kolmogorov-Prandtl:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1.6)$$

qui relie directement la viscosité turbulente μ_t aux variables k et ϵ . Les distributions de k et ϵ sont obtenues à l'aide d'équations différentielles de transport présentées au

chapitre suivant.

1.3 Résolution numérique: la revue bibliographique

Tous les écoulements, y compris les écoulements turbulents, obéissent aux lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le développement de ces lois sous la forme d'équations différentielles pour le cas particulier des fluides newtoniens incompressibles (équations de Navier-Stokes) se retrouve dans tout bon livre de mécanique des fluides. Citons en particulier les ouvrages de Batchelor [8] et de Currie [9]. Les équations de transport des variables de turbulence k et ϵ sont développées de façon assez détaillée dans Rodi [5]. Cet ouvrage décrit également l'usage de données empiriques pour obtenir les équations de transport de k et ϵ sous une forme "utilisable". C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elles sont présentées au chapitre 2.

On résout le système d'équations avec une méthode d'éléments finis. De nombreux ouvrages ont été écrits sur le sujet. Reddy et Gartling [1] proposent une approche pratique de la méthode des éléments finis pour les applications en dynamique des fluides et transfert thermique. Les fondements mathématiques de la méthode peuvent être retrouvés dans les livres de Reddy et Oden [10] et de Gunzburger [11]. En bref, la méthode est basée sur l'idée que la solution d'une équation différentielle peut être représentée par la combinaison linéaire de paramètres inconnus c_j et de fonctions ϕ_j , choisies de façon à respecter les conditions frontières du problème. Les paramètres c_j sont alors déterminés de telle sorte que le résidu pondéré de l'équation différentielle soit minimal. Afin de faciliter le choix des fonctions ϕ_j , on divise le domaine en portions géométriquement simples, appelées *éléments finis*. Les fonctions ϕ_j sont construites sur la base d'idées empruntées à la théorie de l'interpolation, d'où

leur nom de *fonctions d'interpolation*. La méthode des éléments finis consiste donc à résoudre (dans le sens du résidu minimal) une équation différentielle de façon élémentaire, c'est-à-dire sur chaque élément d'un domaine. La subdivision du domaine, appelée *maillage*, revêt donc une importance particulière puisque, intuitivement, on réalise que la précision de l'"interpolation" sera inversement proportionnelle à la taille de l'élément. Il faudra cependant mailler le domaine de façon judicieuse, c'est-à-dire utiliser des éléments de petite taille seulement là où la solution le requiert vraiment. C'est ce que permet le *remaillage adaptatif*. Une méthode de remaillage adaptatif a été développée et appliquée par Pelletier et Héту [12-14] à des écoulements laminaires incompressibles. Les détails sont présentés dans Héту [15]. La méthode évolua et les applications furent étendues aux écoulements turbulents [16-21].

Il apparaît évident que la résolution d'un écoulement turbulent constitue un problème de plus grande taille que la résolution d'un problème laminaire puisque les équations de transport de k et ϵ doivent être résolues en plus des équations de Navier-Stokes et de conservation d'énergie le cas échéant. L'accroissement des difficultés numériques n'est toutefois pas aussi manifeste. Les équations de transport de k et ϵ sont très non-linéaires et fortement couplées aux équations de Navier-Stokes pour l'écoulement moyen. Lors de leur résolution, il peut arriver que k et ϵ prennent des valeurs négatives en certains endroits du domaine. Advenant le cas d'une valeur négative de ϵ , il en résulterait une valeur négative de μ_t (1.6). Afin d'éviter l'occurrence d'une telle situation, certains auteurs optent pour la méthode de "*clipping*" [22] qui consiste à limiter les valeurs de k et ϵ à un seuil minimal. Nous préférons utiliser la méthode dite de *résolution en variables logarithmiques* telle que présentée par Ilinca et Pelletier [16,23]. Non seulement elle préserve la positivité de k et ϵ mais elle facilite aussi la convergence des calculs puisque la fonction logarithme varie plus doucement que son argument. Les régions de forts gradients de k et ϵ sont donc plus faciles à représenter.

Les équations de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie, tout comme les équations de turbulence, sont des équations de type convection-diffusion. Pour un nombre de Reynolds élevé, le terme de convection prend beaucoup d'importance. Il peut en résulter des instabilités, purement numériques, qui faussent la solution, ou pire, empêchent carrément la convergence de la méthode de résolution. Différentes formulations numériques ont été développées afin de pallier à ces inconvénients. Nous utilisons au besoin la formulation SU de Hughes et Brooks [24], SUPG de Brooks et Hughes [25] ou GLS de Hughes *et al.* [26].

Le modèle $k - \epsilon$ a été développé pour des écoulements turbulents isotropiques, à nombre de Reynolds de turbulence élevé, et non confinés. Un problème se pose donc près des parois solides où la nature de l'écoulement change et le nombre de Reynolds diminue. À la paroi-même, il existe une sous-couche laminaire où le modèle est tout à fait inapplicable. Ces régions adjacentes aux parois solides constituent un défi numérique de taille puisque non seulement le modèle de turbulence n'y est plus valide, mais aussi parce qu'à cet endroit les gradients des variables (k , ϵ , \mathbf{u} et T) sont les plus élevés et la résolution des équations jusqu'aux parois s'avère inabordable du point de vue numérique. On aura donc recours à une autre stratégie: l'utilisation de lois de parois. Cette approche [6] permet de définir des conditions frontières à une certaine distance des parois solides grâce à l'utilisation d'un profil de vitesse universel. Il s'agit d'une approche contestée par certains auteurs mais dont il sera beaucoup question dans ce mémoire.

CHAPITRE 2

LES ÉQUATIONS ET LA MÉTHODE DE RÉOLUTION

Ce chapitre est consacré aux équations utilisées pour modéliser les écoulements présentés aux chapitres 5 et 6. On présente d'abord les équations pour l'écoulement moyen et les variables de turbulence. Le concept de viscosité turbulente introduit au chapitre précédent y est décrit en détails. Une section est ensuite consacrée aux formes non-dimensionnelles puisqu'elles représentent la forme préconisée pour la résolution numérique. La méthode des éléments finis, utilisée pour résoudre les équations, fera l'objet de la section suivante. L'algorithme de résolution est présenté en dernier lieu.

2.1 Les équations: représentation mathématique du milieu continu

L'approche statistique introduite à la section 1.1, qui vise à diviser l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante, est utilisée pour simplifier le traitement des écoulements turbulents. Ainsi, les variables \mathbf{u} , p et T sont remplacées par les expressions (1.1) dans l'équation de continuité, dans les équations de Navier-Stokes et dans l'équation de conservation de l'énergie. Après simplifications [4], on obtient

pour un écoulement permanent:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)] + \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (2.2)$$

$$\text{où } \mathbf{R} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

$$\rho c_p \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T} = \nabla \cdot [\lambda \nabla \bar{T} - \mathbf{u}'T] \quad (2.3)$$

Le terme de force massique des équations de mouvement (2.2) de même que le terme de dissipation visqueuse et le terme source de l'équation d'énergie (2.3) ont été négligés. Dorénavant, et ce par souci de clarté d'écriture, les barres horizontales au-dessus des variables moyennes seront omises.

La modélisation des termes $\overline{u'_i u'_j}$ et $\overline{\mathbf{u}'T}$ est au coeur du problème de la simulation des écoulements turbulents. Physiquement, la corrélation $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ représente le transport de quantité de mouvement attribuable à la partie fluctuante du mouvement. Par exemple, le terme $-\rho \overline{u'v'}$ est le terme de transport de la quantité de mouvement en x dans la direction y (ou vice versa). Il agit comme une contrainte sur le fluide, d'où son nom de contrainte turbulente ou contrainte de Reynolds. Le tenseur $\mathbf{R} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ porte le nom de tenseur de Reynolds. L'honneur revient semble-t-il à Boussinesq (1877) d'avoir été le premier à proposer une analogie entre l'effet du tenseur de Reynolds et une *viscosité turbulente*:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Le premier terme à droite de l'égalité dans (2.4) conduit aux contraintes normales suivantes:

$$-\rho \overline{u'^2} = 2\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad -\rho \overline{v'^2} = 2\mu_t \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad -\rho \overline{w'^2} = 2\mu_t \frac{\partial w}{\partial z}$$

dont la somme est zéro en raison de l'équation de continuité (2.1). Cependant, la somme des contraintes normales doit être positive et égale à deux fois l'énergie cinétique de turbulence [5] telle que définie par l'équation (1.3). On rajoute donc le deuxième terme au membre de droite de (2.4) de façon à ce que la trace du tenseur de contraintes turbulentes soit égale à $2k$.

Le terme $\overline{\mathbf{u}'T}$ de l'équation d'énergie est modélisé grâce à un concept similaire à la *viscosité turbulente*, soit la *conductivité turbulente*:

$$-\overline{\mathbf{u}'T} = \lambda_t \nabla T \quad (2.5)$$

En remplaçant (2.4) et (2.5) dans (2.2) et (2.3) respectivement, on obtient les équations de mouvement et d'énergie dans une forme modélisée:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (2.6)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T] \quad (2.7)$$

Le terme $\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$ de (2.4) est inclus dans le terme de gradient de pression puisqu'il s'agit d'une contrainte normale.

La tâche se résume maintenant à trouver les valeurs de μ_t et de λ_t . Tel que vu au chapitre précédent, la distribution de μ_t dans le domaine de calcul est obtenue à partir des variables de turbulence k et ϵ ($\mu_t = C_\mu \rho k^2 / \epsilon$). Celles-ci obéissent aux équations de transport suivantes [6]:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \quad (2.8)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.9)$$

$$\text{où} \quad P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.10)$$

Les valeurs des constantes du modèle (tableau 2.1) sont telles que suggérées par Launder et Spalding [6]. La distribution de λ_t est obtenue par:

Tableau 2.1: Constantes du modèle $k - \epsilon$

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

$$\lambda_t = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \quad \text{avec } Pr_t = 1. \quad (2.11)$$

2.2 Les équations sous forme non-dimensionnelle

Bien que les équations (2.1) et (2.6) à (2.9) soient résolues telles que présentées, il est plus pratique de formuler un problème avec une forme non-dimensionnelle. Ceci permet de regrouper et de mettre en évidence les dimensions caractéristiques d'un problème sous la forme de nombres sans dimension ayant une signification physique, *e.g.* Re ou Pr . Il devient alors simple de modifier les données d'un problème en changeant un seul paramètre. De plus, comme leur nom l'indique, les formes non-dimensionnelles sont indépendantes du système d'unités utilisé. Pour les obtenir, on

remplace les variables non-dimensionnelles suivantes dans les équations.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{u}}{U_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_{ref}}{p_o}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_o}, \quad \bar{\mu}_t = \frac{\mu_t}{\rho L_o U_\infty}, \\ \bar{\lambda}_t &= \frac{\lambda_t}{\rho c_p L_o U_\infty}, \quad \bar{k} = \frac{k}{U_\infty^2}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\left(\frac{U_\infty^3}{L_o}\right)} \quad \text{et l'opérateur } \bar{\nabla} = \nabla L_o. \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'équation de continuité devient:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.13)$$

alors que l'équation de mouvement s'écrit:

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L_o} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = -\frac{p_o}{L_o} \bar{\nabla} \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\mu U_\infty}{L_o^2} + \frac{\rho U_\infty^2}{L_o} \bar{\mu}_t \right) (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T) \right]$$

Après division de tous les termes par $\frac{\rho U_\infty^2}{L_o}$ et remplacement de l'échelle de pression p_o par ρU_∞^2 , on obtient la forme souhaitée:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\nabla} \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \bar{\mu}_t \right) (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T) \right] \quad (2.14)$$

$$\text{où} \quad \text{Re} = \frac{L_o \rho U_\infty}{\mu}$$

Les formes non-dimensionnelles des équations d'énergie et de transport de k et ϵ sont obtenues de façon similaire:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} = \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Pr Re}} + \bar{\lambda}_t \right) \bar{\nabla} \bar{T} \right] \quad (2.15)$$

$$\text{où} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{k} = \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\bar{\mu}_t}{\sigma_k} \right) \bar{\nabla} \bar{k} \right] + \bar{\mu}_t \bar{P}(\bar{\mathbf{u}}) - \bar{\epsilon} \quad (2.16)$$

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\epsilon} = \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\bar{\mu}_t}{\sigma_\epsilon} \right) \bar{\nabla} \bar{\epsilon} \right] + C_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \bar{\mu}_t \bar{P}(\bar{\mathbf{u}}) - C_2 \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \quad (2.17)$$

En comparant les équations (2.6) à (2.9) aux équations non-dimensionnelles (2.14) à (2.17) respectivement, on obtient les valeurs des paramètres à spécifier au programme pour résoudre les équations non-dimensionnelles. Ces valeurs sont présentées au tableau 2.2.

Tableau 2.2: Valeurs à spécifier au programme pour résoudre les équations non-dimensionnelles

Paramètre	Valeur
ρ	1
μ	$\frac{1}{\text{Re}}$
c_p	1
λ	$\frac{1}{\text{Pr Re}}$

2.3 La méthode des éléments finis

2.3.1 L'élément

La méthode des éléments finis consiste à diviser un domaine en petits éléments puis à trouver en certains points du domaine, appelés noeuds de calcul, la valeur des

variables dépendantes \mathbf{u} , T , k et ϵ qui minimisent le résidu pondéré des équations. Nous utilisons l'élément de Crouzeix-Raviart [27] tel que présenté à la figure 2.1. Les distributions de la vitesse et des scalaires (T , k , ϵ) sont interpolées sur l'élément à l'aide de fonctions quadratiques. Ainsi, on évalue les composantes de la vitesse et la valeur des scalaires aux sommets des éléments de même qu'au milieu des arêtes. L'interpolation de la vitesse est enrichie par une fonction bulle cubique associée au centroïde de l'élément. La distribution de la pression est quant à elle évaluée en trois endroits à l'intérieur de l'élément par des fonctions d'interpolation linéaires.

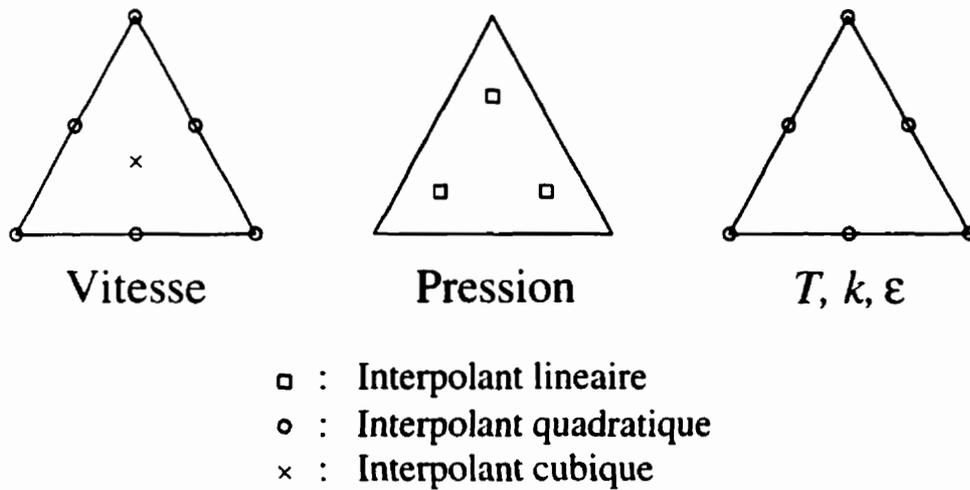


Figure 2.1: Éléments de Crouzeix-Raviart.

2.3.2 Formulation variationnelle

Pour résoudre des équations différentielles par une méthode d'éléments finis, la première étape consiste à écrire la formulation variationnelle (forme faible) des équations. La formulation variationnelle peut être définie comme une forme intégrale des équations différentielles où apparaît la condition frontière naturelle du problème. Pour l'obtenir, la première étape est d'écrire l'équation sous la forme intégrale d'un

résidu pondéré. On met d'abord tous les termes de l'équation du même côté de l'égalité puis on multiplie par une fonction poids (ou fonction 'test') $\delta \mathbf{u}$ et on intègre sur l'élément. Pour les équations de mouvement on obtient:

$$\int_{\Omega^e} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \} \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e = 0 \quad (2.18)$$

Le terme entre accolades est le résidu. La méthode des éléments finis fait en sorte que les valeurs aux noeuds des variables sont ajustées de façon à minimiser ce résidu sur chaque élément. Ceci relève de la théorie du calcul variationnel, dont nous ne discuterons pas ici. À ce sujet, le lecteur peut consulter le livre de Reddy et Oden [10]. Les termes de diffusion et de pression de l'équation (2.18) sont ensuite intégrés par parties:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} 2(\mu + \mu_t) D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega^e \\ - \int_{\Omega^e} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^e = \int_{\Gamma_N^e} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_N^e \end{aligned} \quad (2.19)$$

où le tenseur du taux de déformation D est défini comme suit:

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.20)$$

La condition frontière naturelle (ou de Neumann) $\hat{\mathbf{t}}$ apparaît suite à cette intégration par parties. Dans ce cas-ci, cette condition prend la forme de contraintes sur la frontière:

$$\hat{\mathbf{t}} = 2(\mu + \mu_t) D(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - p \hat{\mathbf{n}} \quad (2.21)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière. Sur les portions de frontière où une condition de Neumann est imposée (Γ_N^e), la quantité $\hat{\mathbf{t}}$ est connue. Ailleurs sur la frontière on impose directement la valeur de \mathbf{u} (u, v ou w) et la fonction

poids ($\delta u, \delta v$ ou δw) doit s'annuler. Il s'agit alors d'une condition de Dirichlet. En plus de faire apparaître les conditions frontières naturelles du problème, l'intégration par parties présente l'avantage de réduire la condition de régularité des fonctions d'interpolation, un sujet dont il sera brièvement question à la section suivante.

L'équation (2.19) constitue la formulation variationnelle des équations de conservation de la quantité de mouvement. De façon similaire, on obtient la formulation variationnelle des équations de continuité, d'énergie, de même que celle des équations de transport de k et ϵ .

Continuité:

$$\int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega^e \quad (2.22)$$

Énergie:

$$\int_{\Omega^e} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T \, d\Omega^e = \int_{\Gamma_N^e} \hat{q} \delta T \, d\Gamma_N^e \quad (2.23)$$

$$\text{où} \quad \hat{q} = (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.24)$$

Transport de k :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} [\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k - \mu_t P(\mathbf{u}) + \rho \epsilon] \delta k \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \nabla \delta k \, d\Omega^e \\ = \int_{\Gamma_N^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta k \, d\Gamma_N^e \end{aligned} \quad (2.25)$$

Transport de ϵ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon - C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P(\mathbf{u}) + C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \right] \delta \epsilon \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \cdot \nabla \delta \epsilon \, d\Omega^e \\ = \int_{\Gamma_N^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta \epsilon \, d\Gamma_N^e \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.3 Le modèle éléments finis

L'étape suivante consiste à construire un système matriciel permettant la résolution numérique des équations. Pour ce faire, les variables dépendantes sont approximées par une combinaison linéaire de paramètres inconnus et de fonctions connues. Par exemple, la distribution de la composante de vitesse horizontale est approximée sur un élément par l'expression suivante:

$$u \approx u^e = \sum_{j=1}^{N_u} u_j^e \phi_j^e \quad (2.27)$$

où u_j^e est la valeur de u^e au noeud j et N_u est le nombre de degrés de liberté élémentaires pour u . Dans le cas de l'élément de Crouzeix-Raviart, $N_u = 7$ (voir figure 2.1). Les fonctions d'interpolation ϕ_j^e ont la propriété suivante:

$$\phi_j^e(x_i, y_i) = \delta_{ij}$$

De plus, afin que la solution numérique converge vers la "vraie" solution, quelques critères s'appliquent au choix de l'approximation u^e [1]:

1. Les approximations u^e doivent satisfaire aux exigences de continuité des formulations variationnelles. En d'autres mots, la différentiation des fonctions d'interpolation ne doit pas entraîner l'annulation de termes dans les formes

variationnelles.

2. Les polynômes utilisés pour représenter u^e doivent être complets: tous les termes, du degré zéro au degré le plus élevé, doivent s'y retrouver, et ce pour chacune des variables indépendantes.
3. Tous les termes des polynômes doivent être linéairement indépendants.

Le critère #1 est atténué par l'intégration par parties lors du développement des formes variationnelles. L'ordre des dérivées est alors réparti également entre les fonctions poids et les variables dépendantes.

La raison d'être des fonctions poids est de fournir, à partir des formes variationnelles, autant d'équations algébriques indépendantes qu'il y a d'inconnues. On choisira donc N_u fonctions indépendantes pour δu dans chaque élément. Un choix assez vaste de fonctions poids existe puisque les formes variationnelles doivent être satisfaites peu importe la valeur des fonctions poids. Nous utilisons la méthode de Rayleigh-Ritz-Galerkin (ou simplement Galerkin) pour laquelle les fonctions d'interpolation et les fonctions poids sont les mêmes: $\delta u = \phi_1^e, \phi_2^e, \dots, \phi_{N_u}^e$. Ce choix est intuitif lorsqu'on considère la fonction poids comme une variation virtuelle de la variable dépendante. Le système matriciel élémentaire comprenant les degrés de liberté de toutes les variables dépendantes est ainsi construit. Le système matriciel global est obtenu par assemblage des systèmes élémentaires [28].

2.4 Résolution

2.4.1 Algorithme

Le système matriciel global est résolu selon l'algorithme suivant:

1. Initialiser les variables \mathbf{u} , T , k , ϵ .
2. Calculer la distribution initiale de μ_t .
3. Résoudre.
 - 3.1. Résoudre les équations de mouvement, continuité et énergie (s'il y a lieu).
 - 3.2. Résoudre les équations de k et ϵ avec le champ de vitesse calculé à l'étape précédente.
 - 3.2.1. Résoudre l'équation de k .
 - 3.2.2. Résoudre l'équation de ϵ .
 - 3.2.3. Calculer une nouvelle distribution de μ_t
 - 3.2.4. Retourner à l'étape 3.2.1 si le critère d'arrêt n'est pas satisfait. Dans le cas contraire, poursuivre à l'étape 3.3.
 - 3.3. Retourner à l'étape 3.1 si le critère de convergence global n'est pas satisfait. Autrement, arrêter les calculs.

2.4.2 Traitement des non-linéarités

Les termes de convection dans les équations de mouvement entraînent des systèmes matriciels non-linéaires de la forme

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

pour lesquels la matrice des coefficients est fonction du vecteur d'inconnues \mathbf{U} . Les équations de transport des variables de turbulence sont elles aussi non-linéaires et un problème similaire surgit lors de leur résolution. Pour pallier à cet inconvénient, deux

choix s'offrent à nous. Tout d'abord, le système peut être résolu par une méthode itérative dite *méthode de Picard*:

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1}) \mathbf{U}^n = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n-1})$$

La matrice des coefficients est évaluée à l'aide des valeurs de \mathbf{U} de l'itération précédente. Cette méthode a l'avantage d'être robuste mais son taux de convergence est linéaire. Un second choix, la *méthode de Newton*, évalue la matrice des coefficients en utilisant un développement en série de Taylor d'ordre un autour de la solution connue \mathbf{U}^{n-1} :

$$\left[\mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1}) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1})}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U} \right] (\mathbf{U}^{n-1} + \Delta \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n-1})$$

$$\text{où } \Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}$$

qui conduit au système:

$$\left[\mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1}) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1})}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^{n-1} \right] \Delta \mathbf{U} = r(\mathbf{U}^{n-1})$$

où le résidu $r(\mathbf{U}^{n-1})$ est défini de la façon suivante:

$$r(\mathbf{U}^{n-1}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n-1}) - \mathbf{C}(\mathbf{U}^{n-1}) \mathbf{U}^{n-1}$$

2.4.3 Contrainte d'incompressibilité

Lors de la construction des systèmes matriciels, la pression n'est pas considérée comme une variable dépendante mais plutôt comme un multiplicateur de Lagrange. L'équation de continuité constitue la contrainte et on utilise la méthode d'Uzawa pour la satisfaire [29].

CHAPITRE 3

CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

La simulation d'écoulements turbulents comporte quelques difficultés numériques auxquelles nous nous attarderons dans ce chapitre. Elles sont de deux types. Il y a d'abord les instabilités numériques engendrées par le caractère hyperbolique des problèmes à nombre de Reynolds élevé. Certaines méthodes permettent de stabiliser la résolution des équations par la modification des fonctions poids et d'éliminer ces oscillations de la solution. Nous présentons trois d'entre-elles à la section 3.1: les formulations SU, SUPG et GLS. Il y a ensuite les difficultés résultant de l'utilisation du modèle $k - \epsilon$, lesquelles proviennent de deux sources, soit l'imposition des conditions frontières sur les parois solides et le comportement très non-linéaire des équations de turbulence. L'utilisation de lois de parois décrite à la section 3.2 permet de générer des conditions frontières près des parois pour toutes les variables dépendantes. La résolution des équations de turbulence est quant à elle facilitée par la formulation en variables logarithmiques telle que présentée à la section 3.3.

3.1 Stabilisation de l'algorithme de résolution

3.1.1 Origine des instabilités

Considérons une simple équation unidimensionnelle de type convection-diffusion:

$$u \frac{dc}{dx} = \alpha \frac{d^2c}{dx^2} \quad (3.1)$$

Un schéma de type différentiation centrée avec la méthode des différences finies, ou encore l'utilisation d'interpolants linéaires avec la méthode des éléments finis en formulation Galerkin, fait en sorte que l'équation différentielle est discrétisée de la façon suivante:

$$u \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2\Delta x} = \alpha \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$

Nous remplaçons maintenant les valeurs nodales amont (c_{i-1}) et aval (c_{i+1}) par des développements de Taylor autour du noeud i . Ceci mettra en évidence la différence entre l'équation différentielle (3.1) et l'équation discrétisée (3.2). Les développements en série de Taylor sont les suivants:

$$c_{i-1} = c_i - \Delta x \frac{dc_i}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2c_i}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{d^3c_i}{dx^3} \quad (3.3)$$

$$c_{i+1} = c_i + \Delta x \frac{dc_i}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2c_i}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{d^3c_i}{dx^3}$$

où les dérivées d'ordre trois sont obtenues en différentiant l'équation (3.1):

$$\frac{d^3c_i}{dx^3} = \frac{u}{\alpha} \frac{d^2c_i}{dx^2} \quad (3.4)$$

En remplaçant (3.3) et (3.4) dans (3.2), on s'aperçoit que la solution de (3.2) est la solution nodalement exacte de l'équation différentielle perturbée suivante:

$$u \frac{dc_i}{dx} = \left[\alpha - \frac{u^2(\Delta x)^2}{3\alpha} \right] \frac{d^2c_i}{dx^2} \quad (3.5)$$

Un coefficient de diffusion artificiel négatif ($-\frac{u^2(\Delta x)^2}{3\alpha}$) est ainsi introduit et a pour effet de déstabiliser la solution, particulièrement lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé ($u/\alpha \gg 1$) ou que le maillage (Δx) est grossier. Différentes

techniques visant à régler ce problème majeur ont été développées, à commencer par la différentiation amont ou l'ajout de diffusivité artificielle positive. Cette dernière technique s'est avérée efficace en 1D mais son extension aux cas multidimensionnels n'a pas connu le même succès puisque la diffusion transversale à l'écoulement faussait les résultats. Les méthodes dites "Streamline Upwind" ont alors été développées. La diffusivité artificielle, auparavant un scalaire agissant dans toutes les directions, a été remplacée par un tenseur qui agit uniquement dans le sens de l'écoulement.

3.1.2 Formulations "Streamline Upwind"

L'équation de convection-diffusion (3.1) est réécrite pour le cas multidimensionnel:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\alpha \nabla c) \quad (3.6)$$

À la diffusivité réelle α est ajoutée la diffusivité artificielle sous forme tensorielle α_{ij} [24]:

$$\alpha_{ij} = \hat{\tau} u_i u_j \quad (3.7)$$

Le produit dyadique du vecteur vitesse ($\mathbf{u}\mathbf{u}$) dans l'expression de la diffusivité artificielle fait en sorte que celle-ci agit uniquement dans le sens de l'écoulement. Le paramètre $\hat{\tau}$ est déterminé par une analyse théorique de convergence. Il est défini comme suit:

$$\hat{\tau} = \frac{\xi h}{2V} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \xi &= \coth \text{Pe} - \frac{1}{\text{Pe}} \\ \text{et } \text{Pe} &= \frac{hV}{2\alpha} \end{aligned}$$

V et h sont respectivement le module de la vitesse et le taille de l'élément. Le nombre de Péclet (Pe) est en quelque sorte un nombre de Reynolds élémentaire.

L'équation (3.6) est réécrite en y ajoutant la diffusivité artificielle:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\alpha \nabla c + \tau \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla c) \quad (3.9)$$

La formulation variationnelle élémentaire de cette équation s'obtient en multipliant par une fonction poids δc et en intégrant par parties (on suppose des conditions de Dirichlet sur les frontières). La fonction poids δc correspond à la fonction poids de la méthode de Galerkin, c'est-à-dire la fonction d'interpolation.

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{u} \cdot \nabla c \delta c \, d\Omega^e = - \int_{\Omega^e} \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} (\tau \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla c) \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e \quad (3.10)$$

Le terme issu de la diffusivité artificielle peut être réarrangé et additionné au terme de convection:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{u} \cdot \nabla c (\delta c + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e = 0 \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) porte le nom de formulation variationnelle "Streamline Upwind" ou SU [24]. Elle diffère d'avec la formulation Galerkin par la fonction poids du terme de convection. La formulation SU a permis de résoudre les problèmes d'oscillations et de diffusion transversale mais la pondération modifiée du terme de convection posait problème en présence de termes sources ou pour les écoulements transitoires. Une variante de SU, la formulation SUPG pour "Streamline Upwind / Petrov-Galerkin", fut alors développée [25]. Elle consiste à utiliser la fonction poids du terme de

convection de la formulation SU pour tous les termes de l'équation différentielle. On obtient alors la formulation variationnelle SUPG suivante pour l'équation (3.6):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \mathbf{u} \cdot \nabla c (\delta c + \dot{\tau} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e \\ - \int_{\Omega^e} \nabla \cdot (\alpha \nabla c) (\dot{\tau} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) \, d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.3 Formulation "Galerkin Least Squares"

La formulation "Galerkin Least Squares" ou GLS est le fruit d'une démarche tout à fait différente mais dont le résultat s'apparente beaucoup à la formulation SUPG. Pour stabiliser la formulation Galerkin de base, on y ajoute la première variation d'une fonctionnelle de moindres carrés du résidu fort. Soit R , le résidu fort de l'équation différentielle (3.6):

$$R = \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\alpha \nabla c) \quad (3.13)$$

On cherche à minimiser la fonctionnelle de moindres carrés suivante sur chaque élément:

$$I(c) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \dot{\tau} R^2 \, d\Omega^e \quad (3.14)$$

C'est-à-dire:

$$\delta I(c) = \int_{\Omega^e} R \dot{\tau} \delta R \, d\Omega^e = 0 \quad (3.15)$$

La formulation GLS élémentaire est donc la suivante:

$$\int_{\Omega^e} (R \delta c + R \dot{\tau} \delta R) \, d\Omega^e = 0 \quad (3.16)$$

On remplace l'expression du résidu (3.13) dans l'équation (3.16) et on intègre par parties le terme de diffusion de la formulation Galerkin de base afin d'obtenir la formulation variationnelle suivante:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{u} \cdot \nabla c \delta c \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \dot{\tau} [\mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\alpha \nabla c)] [\mathbf{u} \cdot \nabla \delta c - \nabla \cdot (\alpha \nabla \delta c)] \, d\Omega^e = 0 \quad (3.17)$$

On peut réarranger les termes pour obtenir:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{u} \cdot \nabla c (\delta c + \dot{\tau} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \nabla \cdot (\alpha \nabla c) (\dot{\tau} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} [\mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\alpha \nabla c)] \dot{\tau} \nabla \cdot (\alpha \nabla \delta c) = 0 \quad (3.18)$$

La similitude entre les formulations SUPG (3.12) et GLS (3.18) est évidente. Cette dernière comprend un terme supplémentaire constitué du résidu fort multiplié par le coefficient $\dot{\tau} \nabla \cdot (\alpha \nabla \delta c)$.

Les formulations SU, SUPG et GLS pour les équations de mouvement, de même que pour les équations de transport de k et ϵ en variables logarithmiques sont présentées en détails dans la référence [17]. Les équations de k et ϵ en variables logarithmiques seront introduites à la section 3.3.

3.2 Utilisation de lois de paroi

Sur une paroi solide, la condition de non-glissement s'applique, de telle sorte que la vitesse moyenne ainsi que sa fluctuation sont nulles. Il en résulte $\mathbf{u} = k = 0$. Par contre, le taux de dissipation ϵ y est différent de zéro. Lorsqu'on fixe la frontière du domaine de calcul directement à la paroi, on doit nécessairement intégrer les équations

tions jusqu'à celle-ci. Ceci n'est pas souhaitable pour deux raisons. Tout d'abord, les variations des variables sont très importantes dans la sous-couche laminaire située à proximité de la paroi. Par conséquent, un nombre excessif de noeuds de calcul devrait être utilisée pour bien saisir les variations de la solution. De plus, le modèle de turbulence $k - \epsilon$ ne s'applique pas dans la sous-couche laminaire, rendant les équations standard de transport de k et ϵ inutilisables à cet endroit. Une approche privilégiée pour contourner ces difficultés consiste à utiliser des lois de paroi qui permettent de déplacer le domaine de calcul et ainsi imposer des conditions frontières à une certaine distance des parois [6]. Dans les sections qui suivent, nous décrivons l'utilisation de lois de paroi sur des surfaces horizontales seulement. L'implantation dans l'algorithme de calcul d'une loi de paroi applicable à toutes surfaces est décrite en détails dans la référence [17].

3.2.1 Loi de paroi à une échelle de vitesse

Par un choix approprié de variables sans dimension, il est possible d'obtenir le profil "universel" de la vitesse tangentielle dans la couche limite turbulente près d'une paroi. Ce profil, la **loi de paroi**, est obtenu à partir d'une combinaison d'informations théoriques et expérimentales. La figure 3.1 montre une loi de paroi typique pour une couche limite turbulente sur une surface lisse. On retrouve en ordonnée la vitesse tangentielle, u^+ , exprimée en fonction de la distance à la paroi y^+ . Ces variables sans dimension sont définies comme suit:

$$u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad (3.19)$$

$$y^+ = \frac{y\rho u_*}{\mu}. \quad (3.20)$$

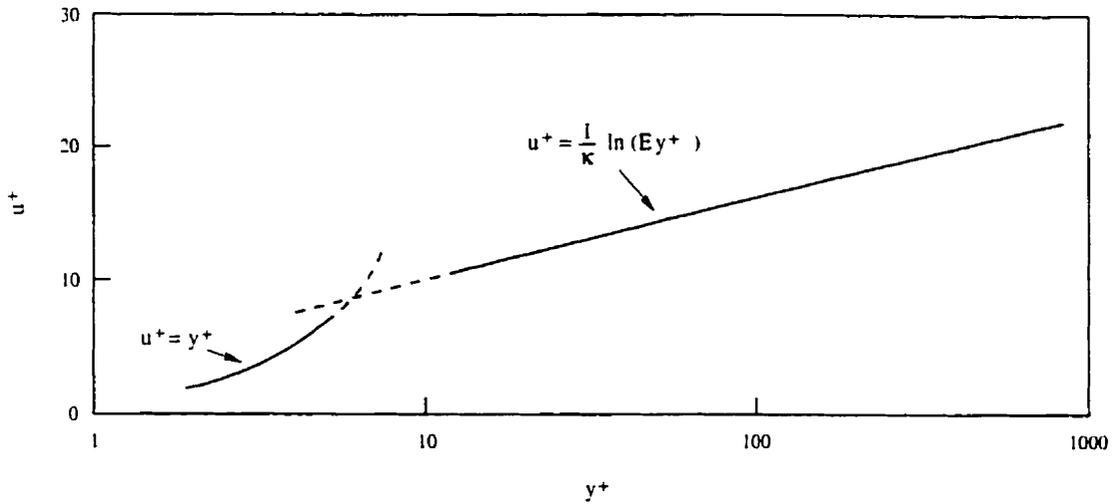


Figure 3.1: Loi de paroi universelle pour la couche limite turbulente.

L'équation (3.20) peut être interprétée comme un nombre de Reynolds de l'écoulement près de la paroi.

Une seule échelle de vitesse est utilisée dans les équations (3.19) et (3.20). Il s'agit de u_* , la vitesse de frottement, définie à partir du cisaillement à la paroi τ_w :

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (3.21)$$

Le développement des lois de paroi repose sur l'hypothèse que τ_w , et par conséquent u_* , sont constants dans la région $0 < y^+ < \pm 300$ [30]. La loi de paroi suivante:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y \rho u_*}{\mu} \right) \quad (3.22)$$

avec $\kappa = 0.42$ et $E = 9.0$, est valide sur l'intervalle $30 < y^+ < 300$ [30]. Certains auteurs [5] suggèrent cependant de limiter son utilisation à $30 < y^+ < 100$. L'équation (3.22) fournit une condition frontière pour la vitesse tangentielle u à une distance $y = d$ de la paroi. Cette condition frontière n'est toutefois pas explicite. Il s'agit d'une condition mixte, c'est-à-dire une relation entre u et le cisaillement à

la paroi τ_w (par l'entremise de u_*). Son application n'est pas triviale puisque u_* se retrouve à gauche de l'égalité et dans l'argument du logarithme. τ_w est relié à \hat{t}_u , la condition frontière naturelle sur u (voir équation 2.21), par:

$$\tau_w = -\hat{t}_u \quad (3.23)$$

Dans l'intervalle $30 < y^+ < 300$, la convection et la diffusion de l'énergie cinétique de turbulence sont négligeables [30]. On suppose alors qu'il y a équilibre local entre la production et la dissipation de k . L'équation (2.8) est donc réduite à:

$$\mu_t P(\mathbf{u}) = \rho \epsilon \quad (3.24)$$

Dans la couche limite près d'une paroi horizontale, on peut réécrire (3.24) de la façon suivante en utilisant la définition de la viscosité turbulente (1.6):

$$\mu_t^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho^2 C_\mu k^2 \quad (3.25)$$

En posant

$$\tau_w \approx \mu_t (\partial u / \partial y) \quad (3.26)$$

et de la définition de u_* (3.21), on obtient finalement:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3.27)$$

L'équation (3.24) peut également être réécrite sous la forme suivante:

$$\left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \epsilon \quad (3.28)$$

En substituant (3.26) et (3.21) dans (3.28), puis en utilisant la loi de paroi (3.22) pour calculer $\partial u/\partial y$, on obtient:

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa y} \quad (3.29)$$

Les équations (3.27) et (3.29) sont utilisées comme conditions frontières pour k et ϵ à $y = d$.

3.2.2 Loi de paroi à deux échelles de vitesse

La loi de paroi à une échelle de vitesse s'avère inappropriée en transfert de chaleur puisque son utilisation entraîne la prédiction de flux de chaleur nuls aux points de stagnation, résultat contraire aux observations expérimentales [31]. Les fluctuations de la vitesse, responsables en grande partie du transfert thermique en régime turbulent, ne sont pas nulles aux points de stagnation. On introduit donc une échelle de vitesse qui tient compte de la partie fluctuante de la vitesse, c'est-à-dire de l'énergie cinétique de la turbulence:

$$u_k = \sqrt{C_\mu^{\frac{1}{2}} k} \quad (3.30)$$

L'équation (3.30) est semblable à (3.27). Au lieu de calculer k sur la frontière avec la valeur de u_* connue, on calcule u_k à partir de la valeur de k déterminée *a priori*. L'approche proposée par [31] consiste à résoudre l'équation de transport de k avec la condition frontière $\partial k/\partial n = 0$. Lorsque u_k est connue, on résout l'équation de transport de ϵ avec la condition frontière:

$$\epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa y} \Big|_{y=d} \quad (3.31)$$

u_k est ensuite introduite dans la loi de paroi (3.22) en modifiant la définition de y^+ :

$$y^+ = \frac{y\rho u_k}{\mu}. \quad (3.32)$$

Il en résulte la loi de paroi à deux échelles de vitesse suivante:

$$\frac{u}{u_{**}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y\rho u_k}{\mu} \right) \quad (3.33)$$

Les deux échelles de vitesse u_k et u_{**} sont utilisées pour calculer la condition frontière mixte sur u :

$$-\hat{t}_u = \tau_w = \rho u_k u_{**}. \quad (3.34)$$

À $y = d$, on obtient une relation linéaire entre u et \hat{t}_u :

$$-\hat{t}_u = \frac{\rho u_k}{\frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{d\rho u_k}{\mu} \right)} u. \quad (3.35)$$

3.2.3 Loi de paroi thermique

La loi de paroi thermique décrit le profil de la température sans dimension T^+ dans la couche limite turbulente en fonction de y^+ . Elle est analytiquement identique aux lois de paroi pour la vitesse. Nous utilisons la loi de paroi thermique décrite par Arpaci et Larsen [32]:

$$T^+ = \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(y^+) + \beta \quad \text{pour } y_c^+ \leq y^+ \quad (3.36)$$

où la température sans dimension T^+ est définie par:

$$T^+ = (T_w - T) \frac{\rho c_p u_k}{q_w}. \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \beta &= a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2\kappa} \left[1 + \ln \left(\frac{\kappa}{a_1} \right) \right], \\ y_c^+ &= \left(\frac{\kappa}{a_1} \right)^{1/2}, \\ a_1 &= 10^{-3} \text{Pr}_t, \\ a_2 &= 15 \text{Pr}^{2/3}. \end{aligned}$$

Pour obtenir une loi de paroi comme (3.36), différentes hypothèses doivent être posées sur le nombre de Prandtl (Pr). Pour cette raison, on limitera la validité de (3.36) à $0.5 < \text{Pr} < 5.0$ [33]. Dans les simulations présentées aux chapitres suivants, nous considérons $\text{Pr} = 0.7$ et $\text{Pr}_t = 1.0$. La loi de paroi (3.36) se résume alors à:

$$T^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 3.44 \quad \text{pour} \quad 20.5 \leq y^+ \quad (3.38)$$

Lorsqu'on désire imposer une condition de flux constant (q'') à la paroi, on pose simplement la condition naturelle $\hat{q} = q''$ (voir équation 2.24). Dans le cas où la température de la paroi (T_w) est constante, on utilise plutôt la loi de paroi (3.38) et la définition de T^+ pour obtenir la condition mixte:

$$\hat{q} = q_w = \frac{\rho c_p u_k (T_w - T)}{T^+} \quad (3.39)$$

3.3 Formulation des équations de turbulence en variables logarithmiques

La formulation des équations de turbulence en variables logarithmiques, telle que présentée par Ilinca [16], permet d'assurer la positivité des variables de turbulence k , ϵ et μ_t lors de la résolution. La robustesse de l'algorithme s'en trouve donc accrue. Cette technique présente aussi l'avantage de faciliter la convergence de l'algorithme de résolution puisque la fonction logarithme varie plus lentement que son argument. Il est alors possible d'obtenir des solutions sur des maillages plus grossiers. Finalement, la précision des variables de turbulence est améliorée dans les régions où les valeurs de k et ϵ sont très faibles.

Soit l'équation de transport de l'énergie cinétique (2.8), dont on réécrit le dernier terme du membre de droite avec la définition de μ_t (1.6):

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} \quad (3.40)$$

Avec le changement de variable:

$$k = e^{\mathcal{K}} \quad (3.41)$$

on obtient:

$$\rho \mathbf{u} \cdot (e^{\mathcal{K}} \nabla \mathcal{K}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) e^{\mathcal{K}} \nabla \mathcal{K} \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{e^{2\mathcal{K}}}{\mu_t} \quad (3.42)$$

Le terme de diffusion peut être décomposé de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) e^{\mathcal{K}} \nabla \mathcal{K} \right] &= e^{\mathcal{K}} \nabla \mathcal{K} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] \\ &\quad + e^{\mathcal{K}} \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

On a alors, après division par e^κ :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ + \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{e^\kappa}{\mu_t} \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'équation de transport de ϵ en variables logarithmiques s'obtient de façon analogue avec le changement de variable:

$$\epsilon = e^\mathcal{E} \quad (3.45)$$

On obtient finalement:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \end{aligned} \quad (3.46)$$

La viscosité turbulente sera toujours positive puisque calculée de la façon suivante:

$$\mu_t = \rho C_\mu e^{2\kappa - \mathcal{E}} \quad (3.47)$$

Les formulations variationnelles Galerkin des équations (3.44) et (3.46) sont:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_\mu \frac{e^\kappa}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} \, d\Omega^e \\ + \int_{\Omega^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} \, d\Omega^e = \int_{\Gamma_Y^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \delta \mathcal{K} \, d\Gamma_Y^e \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} \, d\Omega^e \\
+ \int_{\Omega^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} \, d\Omega^e = \int_{\Gamma_N^e} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta \mathcal{E} \, d\Gamma_N^e
\end{aligned} \tag{3.49}$$

CHAPITRE 4

SYNTHÈSE DES TRAVAUX

Les articles présentés aux chapitres 5 et 6 démontrent qu'il est hasardeux de porter un jugement quant à la validité d'un modèle de turbulence ou la précision d'un résultat numérique tant et aussi longtemps que la solution des équations différentielles change avec le raffinement du maillage. Le remaillage adaptatif constitue un outil puissant, voire même indispensable, pour contrôler et évaluer les erreurs de discrétisation et produire des solutions indépendantes du maillage. La première section de ce chapitre décrit les principes de base de l'implantation d'un algorithme de remaillage adaptatif. Cette technique est ensuite appliquée à la validation d'un modèle de simulation puis à la simulation d'un écoulement complexe avec séparation de la couche limite.

4.1 Le remaillage adaptatif

Par remaillage adaptatif on entend le réajustement du maillage en fonction des besoins de la solution. La première étape de ce processus consiste à évaluer les besoins de la solution, c'est-à-dire déterminer en quels endroits précis du domaine le maillage devra être plus raffiné. Pour ce faire, on utilise une méthode permettant d'estimer l'erreur de la solution sur chaque élément du domaine. La seconde étape du remaillage adaptatif consiste à transformer les estimations d'erreur en une information permettant de redéfinir la taille des éléments du maillage partout dans le domaine de calcul. C'est le rôle de l'opérateur de transition.

Les deux principales composantes de l'algorithme de remaillage adaptatif, soit l'estimation d'erreur et l'opérateur de transition, sont présentées ci-après.

4.1.1 Estimation d'erreur

Il convient tout d'abord de définir les outils de mesure de l'"erreur", tels qu'utilisés dans l'algorithme de remaillage adaptatif. Soit C_{ex} , la distribution exacte d'une variable quelconque C , et C_h sa solution éléments finis. La norme de l'erreur sur C , $\|err^C\|$, peut être définie de la façon suivante:

$$\|err^C\| \equiv \left\{ \int_{\Omega} (\nabla C_{ex} - \nabla C_h) \cdot (\nabla C_{ex} - \nabla C_h) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

Les gradients de la solution exacte ∇C_{ex} étant inconnus, on utilisera les approximations:

$$\nabla C^* \approx \nabla C_{ex}. \quad (4.2)$$

La norme estimée de l'erreur, $\|err^C\|^*$, est donc:

$$\|err^C\| \approx \|err^C\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (\nabla C^* - \nabla C_h) \cdot (\nabla C^* - \nabla C_h) d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

Pour chacune des variables, la norme estimée de l'erreur est définie comme suit:

$$\mathbf{u} : \quad \|err^{\mathbf{u}}\|^* = \left\{ \int_{\Omega} 4 [D(\mathbf{u})^* - D(\mathbf{u})_h] : [D(\mathbf{u})^* - D(\mathbf{u})_h] \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

$$T : \quad \|err^T\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (\nabla T^* - \nabla T_h) \cdot (\nabla T^* - \nabla T_h) \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{K} : \quad \|err^{\mathcal{K}}\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{K}^* - \nabla \mathcal{K}_h) \cdot (\nabla \mathcal{K}^* - \nabla \mathcal{K}_h) \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{E} : \quad \|err^{\mathcal{E}}\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{E}^* - \nabla \mathcal{E}_h) \cdot (\nabla \mathcal{E}^* - \nabla \mathcal{E}_h) \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

$$p : \quad \|err^p\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (p^* - p_h)^2 \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

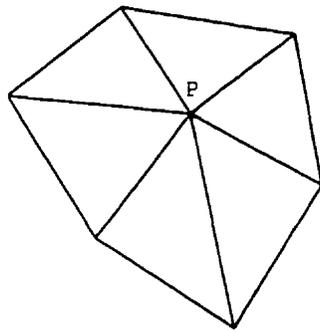
On calcule aussi une norme de l'erreur estimée pour la viscosité turbulente. Il sera ainsi possible de contrôler la précision de cette quantité de première importance.

$$\|err^{\mu_t}\|^* = \left\{ \int_{\Omega} (\nabla \mu_t^* - \nabla \mu_{t_h}) \cdot (\nabla \mu_t^* - \nabla \mu_{t_h}) \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

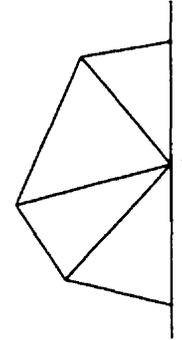
Puisqu'il n'y a pas d'interpolant pour μ_t , ses gradients sont calculés à partir des gradients de \mathcal{K} et \mathcal{E} :

$$\nabla \mu_t = [2\nabla \mathcal{K} - \nabla \mathcal{E}] (\rho C_{\mu} e^{2\mathcal{K} - \mathcal{E}}) \quad (4.10)$$

Pour calculer les valeurs estimées des gradients de la solution (ou de la solution elle-même dans le cas de la pression), on a recours à la méthode dite de projection locale proposée originalement dans [34]. L'idée consiste à faire une construction polynômiale quadratique de q^* , composante de $\mathbf{q}^* = \nabla C^*$, sur un groupe d'éléments Ω_S à partir de q_h , composante de $\mathbf{q}_h = \nabla C_h$. Pour un élément quadratique, q_h est linéaire et discontinue à l'interface des éléments. Le sous-domaine Ω_S est constitué des éléments entourant un sommet P, tel que montré à la figure 4.1.



(a) P situé à l'intérieur du domaine.



(b) P situé sur la frontière.

Figure 4.1: Sous-domaine Ω_S autour du sommet P

La technique de projection utilise donc la discontinuité des gradients de la solution éléments finis à l'interface des éléments[†] pour obtenir, par une méthode de moindres carrés, une estimation (projection) de la distribution des composantes du gradient de la solution exacte. La construction polynômiale quadratique des composantes de \mathbf{q}^* est la suivante:

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{P} \mathbf{a} \quad (4.11)$$

$$\text{avec la base:} \quad \mathbf{P} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (4.12)$$

$$\text{et les coefficients:} \quad \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}^T \quad (4.13)$$

On obtient un vecteur \mathbf{a} pour chacune des composantes de \mathbf{q}^* en résolvant le problème de moindres carrés suivant:

$$\min \frac{1}{2} \int_{\Omega_S} (\mathbf{P} \mathbf{a} - q_h)^2 d\Omega_S \quad (4.14)$$

[†]La composante $D_{\theta\theta} = v/r$ du tenseur du taux de déformation $D(\mathbf{u})$ (2.20), quantité continue à l'interface des éléments, n'est pas incluse dans le calcul des normes en coordonnées cylindriques.

qui conduit au système d'équations linéaires pour les coefficients a_i :

$$\left[\int_{\Omega_S} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \, d\Omega_S \right] \{ \mathbf{a} \} = \left[\int_{\Omega_S} \mathbf{P}^T q_h \, d\Omega_S \right] \quad (4.15)$$

À partir des expressions de q^* obtenues pour chacun des sommets du maillage, on récupère la distribution unique de q^* . Pour ce faire, on trouve d'abord les valeurs nodales q_j^* . Pour un noeud situé au sommet d'un élément, q_j^* est calculée directement avec le polynôme associé à ce sommet. Pour les noeuds au milieu des arêtes, on prend la moyenne des deux projections associées aux deux sommets du segment puis on calcule q_j^* avec cette projection moyenne. Sur chaque élément, on obtient six valeurs nodales q_j^* qui permettent de définir la variation quadratique de q^* :

$$q^* = \sum_{j=1}^6 q_j^* \phi_j^e \quad (4.16)$$

4.1.2 Opérateur de transition

Les normes estimées de l'erreur (4.4) à (4.9) sont utilisées pour redéfinir les caractéristiques du maillage. La stratégie consiste à modifier la fonction de distribution de taille des éléments du maillage $\gamma(x, y)$ de façon à réduire l'erreur globale par un facteur η et à répartir également l'erreur globale sur tous les éléments du maillage. Pour une variable quelconque C , la norme de l'erreur globale $\|err^C\|$ est calculée à partir des normes de l'erreur estimées sur chaque élément:

$$\|err^C\| = \left[\sum_{i=1}^{N_e} (\|err^C\|_e^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

où N_e est le nombre d'éléments du maillage. En réduisant l'erreur globale par un facteur η , on obtient une erreur globale $\|err_{cible}^C\|$ pour le nouveau maillage:

$$\|err_{cible}^C\| = \eta \|err^C\| \quad (4.18)$$

$$\text{avec } 0 \leq \eta \leq 1$$

Puisque l'erreur doit être répartie également sur tous les N_e éléments, l'équation (4.17) permet d'écrire:

$$\|err_{cible}^C\|_e = \frac{\|err_{cible}^C\|}{\sqrt{N_e}} \quad (4.19)$$

Il s'agit maintenant de relier l'erreur cible élémentaire $\|err_{cible}^C\|_e$ à la fonction de taille du nouveau maillage. Pour ce faire, on utilise la notion de taux de convergence asymptotique qui relie l'erreur à la taille h_e de l'élément. Pour l'élément de Crouzeix-Raviart et les normes définies par les équations (4.4) à (4.9), on a la relation suivante sur le maillage courant [28]:

$$\|err^C\|_e^* \approx \|err^C\|_e = c h_e^2 \quad (4.20)$$

où c est une constante. Pour le nouveau maillage, on a aussi:

$$\|err_{cible}^C\|_e = c (\gamma_e^C)^2 \quad (4.21)$$

On résout les équations (4.18) à (4.21) pour trouver la taille du nouveau maillage sur l'élément "e":

$$\gamma_e^C = \left(\frac{\eta \|err^C\|}{\|err^C\|_e^* \sqrt{N_e}} \right)^{\frac{1}{2}} h_e \quad (4.22)$$

Dans le cas où l'erreur sur plusieurs variables servirait à redéfinir le maillage, on retient le critère le plus exigeant, c'est-à-dire la plus petite fonction de taille élémentaire. Par exemple:

$$\gamma_e = \min \{ \gamma_e^u, \gamma_e^T, \gamma_e^K, \gamma_e^E, \gamma_e^P, \gamma_e^{\mu_t} \} \quad (4.23)$$

L'union des N_e valeurs de γ_e définit la fonction de taille $\gamma(x, y)$ pour tout le domaine. Celle-ci est utilisée par le mailleur lors de la construction du nouveau maillage.

4.2 Validation d'un modèle de simulation

L'utilisation du modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec des lois de parois connaît bon nombre de détracteurs. Certains résultats [21] exposent en effet les faiblesses de cette approche. Par contre, de très bons résultats ont aussi été obtenus dans plusieurs applications [35]. L'article présenté au chapitre cinq vise deux objectifs. Tout d'abord, démontrer que la qualité des résultats obtenus avec le modèle $k - \epsilon$ et les lois de paroi ne dépend pas tant du modèle lui-même que de l'utilisation qu'on en fait à l'intérieur du modèle de simulation. Ensuite, démontrer qu'on ne peut porter un jugement sur les performances du modèle de simulation tant que la solution change avec le raffinement du maillage.

Dans cette section, nous montrons comment la définition du modèle de simulation influence les résultats pour un écoulement turbulent sur une plaque plane. En particulier seront étudiés les effets du nombre de Reynolds de turbulence, du type de lois de paroi, de la géométrie de la plaque et du nombre de Reynolds de l'écoulement. La dépendance de la solution par rapport au maillage est mise en évidence et nous montrons que le remaillage adaptatif permet d'éliminer cette dépendance.

4.2.1 Effet de Re_t

L'imposition des conditions frontières sur k et ϵ à l'entrée du domaine de calcul pose souvent problème. Bien que parfois des valeurs expérimentales de k soient disponibles, ce n'est pas le cas pour ϵ car celle-ci n'est pas une quantité mesurable. On peut alors poser, un peu arbitrairement, le nombre de Reynolds de turbulence qui est défini par l'inverse de la viscosité turbulente sans dimension:

$$Re_t = \frac{1}{\mu_t} = \frac{\epsilon}{\rho C_\mu k^2} \quad (4.2-1)$$

Cette quantité caractérise l'écoulement. À partir d'une valeur de k mesurée ou estimée, on ajuste la valeur de ϵ de façon à obtenir le Re_t souhaité. C'est une approche très empirique mais il est généralement possible de choisir le Re_t approprié pour un écoulement donné. Deux simulations d'écoulement sur une plaque plane infiniment mince ont été faites: dans un cas avec $Re_t = 1\,000$ et dans l'autre avec $Re_t = 20\,000$. Les conditions frontières au problème sont présentées au tableau 4.1. Dans les deux cas on utilise une loi de paroi à deux échelles de vitesse. Seules les valeurs de k et $\epsilon^{\dagger\dagger}$ à l'entrée du domaine sont modifiées. Le cas (a) correspond à $Re_t = 1\,000$ tandis que le cas (b) correspond à $Re_t = 20\,000$. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est 2×10^5 .

La figure 4.2 montre les iso-valeurs de k . La décroissance de l'énergie cinétique de la turbulence à l'extérieur de la couche limite pour le cas $Re_t = 1\,000$ (fig. 4.2(a)) est une conséquence des effets visqueux de la turbulence. C'est le phénomène de turbulence de grille. Les trop fortes valeurs de k et ϵ créent également un effet secondaire non-physique: la valeur de μ_t est plus faible dans la couche limite que

^{††}Bien que nous résolvions les variables \mathcal{K} et \mathcal{E} , il est plus naturel de poser des conditions frontières pour k et ϵ .

Tableau 4.1: Conditions frontières pour l'écoulement sur une plaque plane

	u	v	k	ϵ
entrée [†]	1	0	(a) 10^{-2}	(a) 9×10^{-3}
			(b) 10^{-6}	(b) 1.8×10^{-9}
sortie	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$
écoulement libre	1	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$
condition de symétrie	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	0	$\frac{\partial k}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$
plaque	lois de paroi			

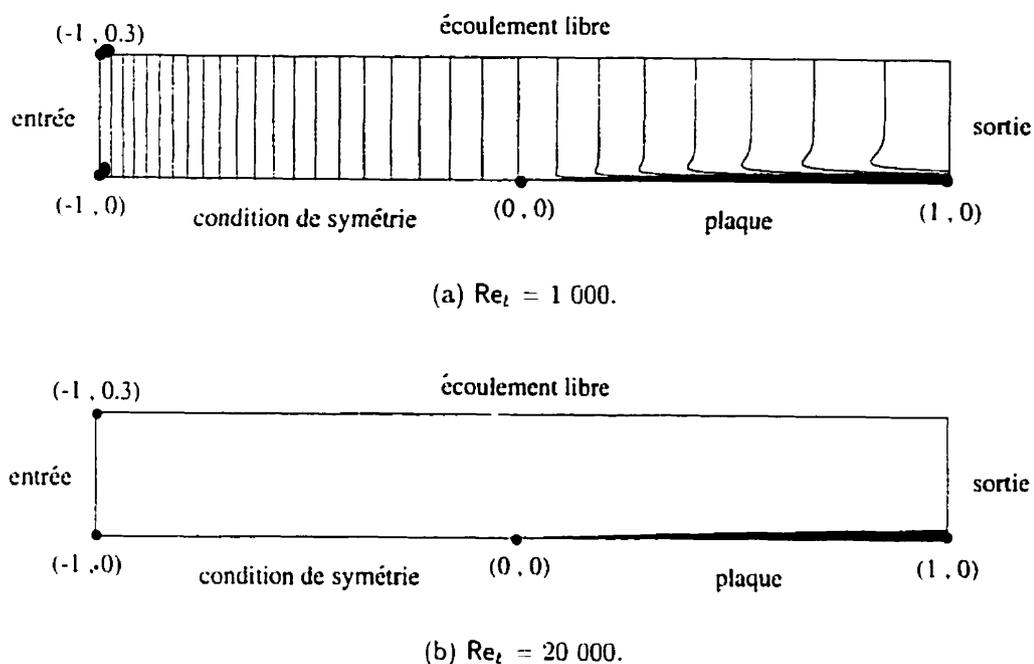
dans l'écoulement libre. Il faut donc réduire la viscosité turbulente à l'entrée, c'est-à-dire augmenter la valeur de Re_t . Avec $Re_t = 20\,000$, le niveau de k est constant à l'extérieur de la couche limite (fig. 4.2(b)) et μ_t est plus élevée dans la couche limite que dans l'écoulement libre. Le nombre de Reynolds de la turbulence définit donc toute la structure de l'écoulement et il faudra s'assurer de faire un choix approprié. En général, on prendra une valeur de Re_t égale à 10% de Re .

4.2.2 Effet du type de lois de paroi

L'effet du type de lois de paroi est mesuré en comparant les prédictions du coefficient de friction local $C_f(x)$:

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \quad (4.25)$$

[†]La nomenclature des frontières est en accord avec la figure 4.2.

Figure 4.2: Iso-valeurs de k

avec la corrélation de White [36]:

$$C_f(x) = \frac{0.455}{\ln^2(0.06Re_x)} \pm 2\% \text{ sur toute l'étendue du régime turbulent.} \quad (4.26)$$

Des équations (4.25), (3.21) et (3.34), on a:

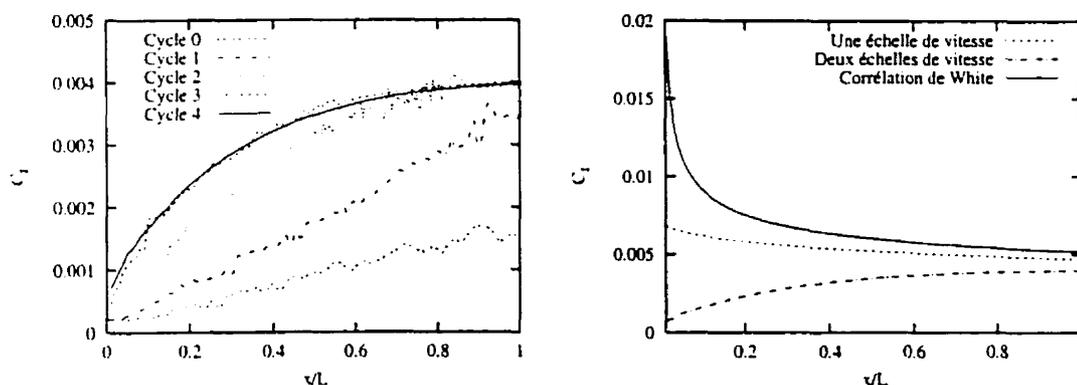
$$\cdot \text{ pour une échelle de vitesse:} \quad C_f(x) = 2 \frac{u_*^2}{U_\infty^2}; \quad (4.27)$$

$$\cdot \text{ pour deux échelles de vitesse:} \quad C_f(x) = 2 \frac{u_k u_{**}}{U_\infty^2}. \quad (4.28)$$

On utilise toujours l'écoulement sur une plaque infiniment mince avec $Re = 2 \times 10^5$ et les conditions frontières du tableau 4.1. On prend $Re_t = 20\ 000$.

La figure 4.3(a) montre de façon assez éloquent l'évolution de la distribution de $C_f(x)$ avec le maillage pour le cas 'deux échelles de vitesse'. Quatre cycles adaptatifs

sont requis pour obtenir une solution indépendante du maillage. Cette solution est tracée à la figure 4.3(b) pour fins de comparaison avec la solution indépendante du maillage du cas 'une échelle de vitesse' et la corrélation de White.



(a) Évolution de $C_f(x)$ avec le maillage pour le cas 'deux échelles de vitesse'.

(b) Comparaison de $C_f(x)$ avec les corrélations.

Figure 4.3: Distributions de $C_f(x)$ sur une plaque infiniment mince.

Les deux types de lois de paroi prédisent des distributions très différentes de la corrélation, en particulier la loi de paroi à deux échelles de vitesse, avec laquelle le C_f au bord d'attaque ($x/L = 0$) est inférieur à celui du bord de fuite ($x/L = 1$). Cette prédiction est bien sûr incompatible avec la réalité et une explication s'impose. À l'approche de la plaque, le fluide ralentit et on observe un point de stagnation au bord d'attaque de la plaque. Les gradients de vitesse sont donc importants à cet endroit et puisqu'ils sont responsables de la production de l'énergie cinétique de la turbulence (2.10), on devrait s'attendre à un pic de k au bord d'attaque, avec comme résultat un pic de $C_f(x)$ (3.30 et 4.28). Or, ce pic n'est pas reproduit (fig. 4.3(b)) parce que le modèle de plaque infiniment mince ne génère pas de point de stagnation.

4.2.3 Effet de la géométrie de la plaque

En incorporant au modèle de simulation une plaque avec une épaisseur équivalente à 1% de sa longueur, il est possible de générer un point de stagnation et ainsi obtenir des prédictions de $C_f(x)$ réalistes. Deux géométries de bord d'attaque ont été testées: carrée et ronde. L'écoulement a toujours un nombre de Reynolds égal à 2×10^5 et les conditions frontières du tableau 4.1 sont imposées avec $Re_t = 20\ 000$. Sur la plaque, les lois de paroi à une et deux échelles de vitesse sont utilisées tour à tour.

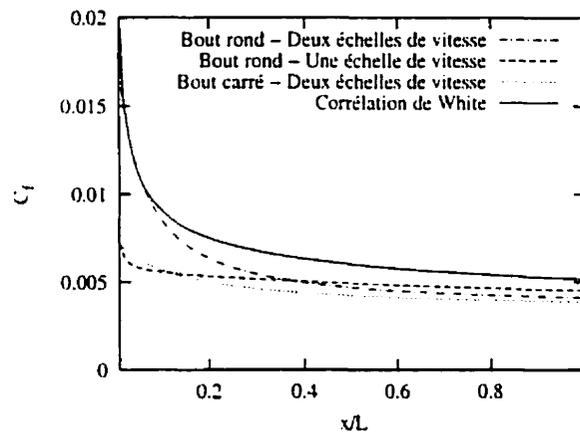


Figure 4.4: Distributions de $C_f(x)$ sur une plaque avec épaisseur.

Les prédictions de $C_f(x)$ indépendantes du maillage sont présentées à la figure 4.4. La prédiction pour le modèle de géométrie carrée avec une échelle de vitesse n'est pas montrée puisqu'une solution indépendante du maillage n'a pu être obtenue en raison de difficultés de convergence. Avec deux échelles de vitesse, le modèle de géométrie carrée génère des valeurs de $C_f(x)$ au bord d'attaque bien en deçà de la corrélation et il doit donc être rejeté. Le modèle de géométrie ronde avec deux échelles de vitesse est le seul à reproduire le pic de $C_f(x)$ attendu au bord d'attaque. Tel que prévu, la présence du point de stagnation à cet endroit déclenche la production d'énergie cinétique de la turbulence et la valeur de $C_f(x)$ s'en trouve augmentée. Ce

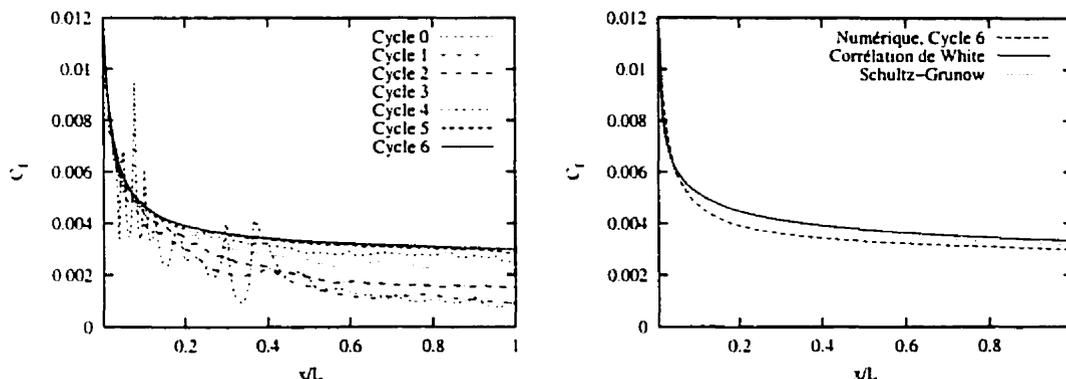
phénomène ne peut être reproduit par la loi de paroi à une échelle de vitesse qui exclut les effets de la turbulence. On en arrive donc à la conclusion que la loi de paroi à une échelle de vitesse, bien que d'utilisation fort répandue, est inappropriée pour ce type de problèmes.

4.2.4 Effet du nombre de Reynolds de l'écoulement

Jusqu'à maintenant, nous avons simulé un écoulement avec $Re = 2 \times 10^5$. Cette valeur se situe à la limite inférieure du régime turbulent sur une plaque plane [30]. En l'augmentant, il sera possible d'améliorer les prédictions de $C_f(x)$. On pose donc maintenant $Re = 2 \times 10^6$ sur une plaque à bout arrondi. Le nombre de Reynolds de la turbulence est fixé à 10% de Re , soit $Re_t = 2 \times 10^5$, avec les valeurs $k = 10^{-6}$ et $\epsilon = 1.8 \times 10^{-8}$ à l'entrée du domaine. On utilise une loi de paroi à deux échelles de vitesse.

La figure 4.5(a) montre que six cycles adaptatifs sont requis pour obtenir une distribution de $C_f(x)$ indépendante du maillage. L'indépendance de la solution par rapport au maillage est plus difficile à atteindre avec un nombre de Reynolds élevé parce que la couche limite sur la plaque est plus mince. La distribution de $C_f(x)$ obtenue sur le maillage final (cycle 6) est tracée à la figure 4.5(b) et comparée à la corrélation de White et à une corrélation tirée des résultats expérimentaux de Schultz-Grunow [37].

L'écart entre la prédiction numérique et la corrélation de White est d'au maximum 13% sur toute la longueur de la plaque. Pour $0.02 < x/L \leq 1$, l'écart entre la prédiction et les résultats de Schultz-Grunow ne dépasse pas 10%.

(a) Évolution de $C_f(x)$ avec le maillage.(b) Comparaison de $C_f(x)$ avec les corrélations.Figure 4.5: Distributions de $C_f(x)$ pour le cas $Re = 2 \times 10^6$

4.2.5 Conclusion

La qualité des résultats obtenus avec le modèle de turbulence $k - \epsilon$ et les lois de paroi repose sur la définition du modèle de simulation. Celle-ci doit permettre de reproduire les caractéristiques propres à l'écoulement. La spécification du nombre de Reynolds de turbulence, du type de lois de paroi, de la géométrie de la plaque et du nombre de Reynolds de l'écoulement sont autant de facteurs faisant partie de la définition du modèle de simulation et dont dépend la réussite de la simulation. Il importe alors de connaître la structure et les caractéristiques du modèle $k - \epsilon$ et des lois de paroi afin de faire les choix appropriés.

Les résultats ont aussi démontré que la qualité des prédictions de $C_f(x)$ dépend de l'utilisation de maillages suffisamment raffinés. Le ramailage adaptatif permet de générer des maillages raffinés seulement aux endroits requis par la solution. Il est alors possible d'obtenir des solutions indépendantes du maillage et les différences entre les diverses prédictions numériques ne sont attribuables qu'aux choix faits lors de la définition du modèle de simulation.

4.3 Simulation d'un écoulement séparé

L'effet combiné d'un gradient de pression défavorable et de la friction près de la paroi détermine s'il y a ou non séparation de la couche limite [4]. La simulation d'un écoulement séparé sur une surface lisse constitue un défi de taille pour tout modèle de turbulence, mais en particulier pour le modèle $k - \epsilon$ avec les lois de paroi. L'article présenté au chapitre 6 montre qu'il est possible de relever ce défi. L'algorithme de remaillage adaptatif est d'abord vérifié sur un problème avec une solution connue. On étudie ensuite le cas particulier d'un écoulement axisymétrique dans une conduite annulaire coudée à 180 degrés.

4.3.1 Vérification de l'algorithme de remaillage adaptatif

Avec **n'importe qu'elle** solution analytique connue, on vérifie que l'algorithme de remaillage adaptatif piloté par l'estimateur d'erreur permet la convergence de la solution numérique vers la solution analytique. On choisit la solution analytique d'un jet turbulent axisymétrique telle qu'obtenue par Schlichting [4] et pour laquelle les composantes de la vitesse sont:

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{c}{\mu_o x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \quad (4.29)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4}\eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \quad (4.30)$$

où: $\eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c} r}{\mu_o x}$ avec $\frac{\mu_o}{\sqrt{c}} = 0.0161$.

Le domaine de calcul est constitué de la surface rectangulaire $[0.2 \leq x \leq 1, 0 \leq r \leq 1]$ avec l'axe de symétrie $r = 0$. L'expression de la pression est choisie de façon à ce qu'une condition de traction radiale nulle (Neumann homogène) puisse être imposée exactement sur la composante radiale de la vitesse (v) en périphérie du jet, c'est-à-dire:

$$2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} - p = 0 \quad \text{à} \quad r = 1$$

$$\Rightarrow p = 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (4.31)$$

Les expressions pour les variables de la turbulence sont:

$$k = 4 \times 10^{-3} \frac{e^{-\frac{r^3}{5}}}{x^2} + 10^{-4} \quad (4.32)$$

$$\mu_t = 5 \times 10^{-4} e^{-\frac{r^3}{5}} + 5 \times 10^{-5} \quad (4.33)$$

$$\epsilon = \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_t}. \quad (4.34)$$

En substituant (4.29) à (4.34) dans les équations de Navier-Stokes et les équations de transport de k et ϵ , on obtient les termes source nécessaires pour que la solution des équations corresponde aux expressions choisies. Les équations sont résolues sur le domaine de calcul avec des conditions de symétrie pour toutes les variables sur la frontière $r = 0$, des tractions radiales nulles sur v à $r = 1$ et des conditions de Dirichlet (valeurs exactes selon les expressions 4.29 à 4.34) partout ailleurs.

La figure 4.6 montre la trajectoire des normes de l'erreur réelle et estimée pour chacune des variables^{††}. Les erreurs décroissent avec le raffinement du maillage et la solution numérique converge vers la solution exacte. L'adaptivité améliore donc la

^{††}Puisque les équations de la turbulence sont résolues en variables logarithmiques, on présente les normes d'erreur pour \mathcal{K} et \mathcal{E} .

précision de la solution numérique.

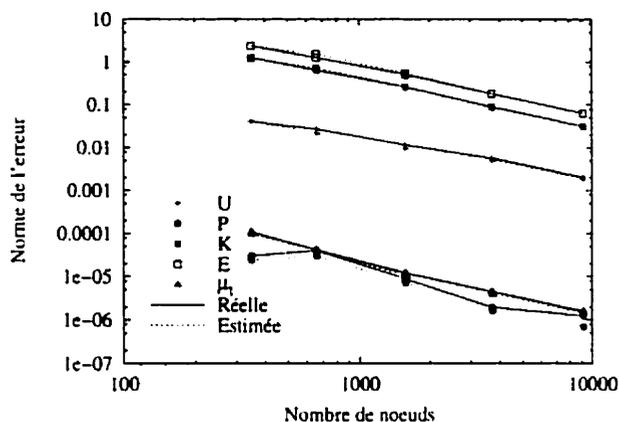


Figure 4.6: Normes réelles et estimées de l'erreur.

L'efficacité de l'estimateur d'erreur est définie comme le ratio des normes estimée et exacte de l'erreur. Cette quantité est un bon indicateur de la précision et de la fiabilité de l'estimateur d'erreur. La figure 4.7 montre que la précision de l'estimateur d'erreur croît avec le raffinement du maillage. Le remaillage adaptatif permet non seulement d'obtenir des solutions numériques précises, mais aussi des solutions dont la précision peut être quantifiée à l'aide d'une estimation fiable de l'erreur.

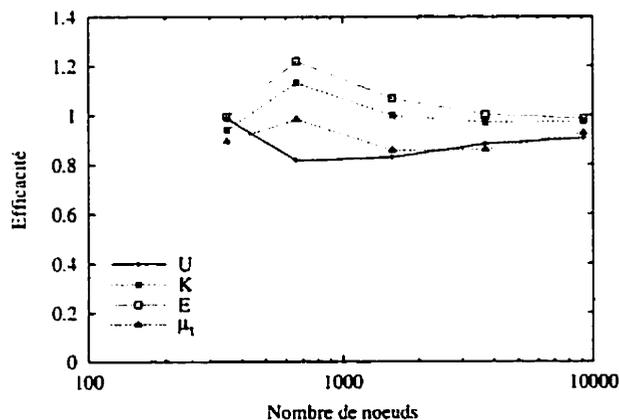


Figure 4.7: Efficacités de l'estimateur d'erreur.

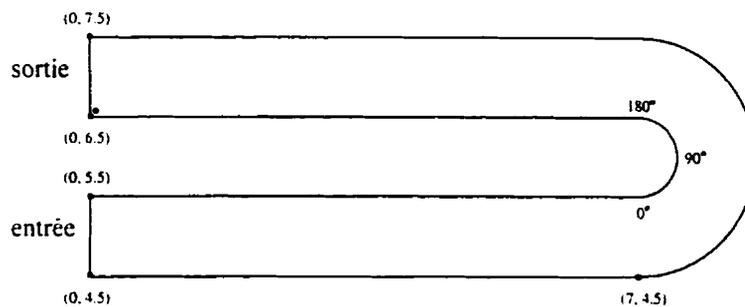


Figure 4.8: Conduite annulaire coudée à 180 degrés.

4.3.2 Écoulement dans une conduite annulaire coudée à 180 degrés

Le domaine de calcul est présenté à la figure 4.8. Il s'agit d'une conduite annulaire symétrique autour de l'axe $r = 0$. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est de 10^5 (basé sur la hauteur de la conduite et la vitesse du fluide à l'entrée). Les conditions frontières sans dimension à l'entrée du domaine sont $u = 1$, $v = 0$, $k = 10^{-3}$ et $\epsilon = 9 \times 10^{-4}$. Il en résulte un nombre de Reynolds de turbulence de 10^4 . À la sortie, la vitesse radiale et les tractions normales sont nulles, de même que les dérivées axiales de k et ϵ . Des lois de paroi à deux échelles de vitesse sont utilisées sur les autres frontières.

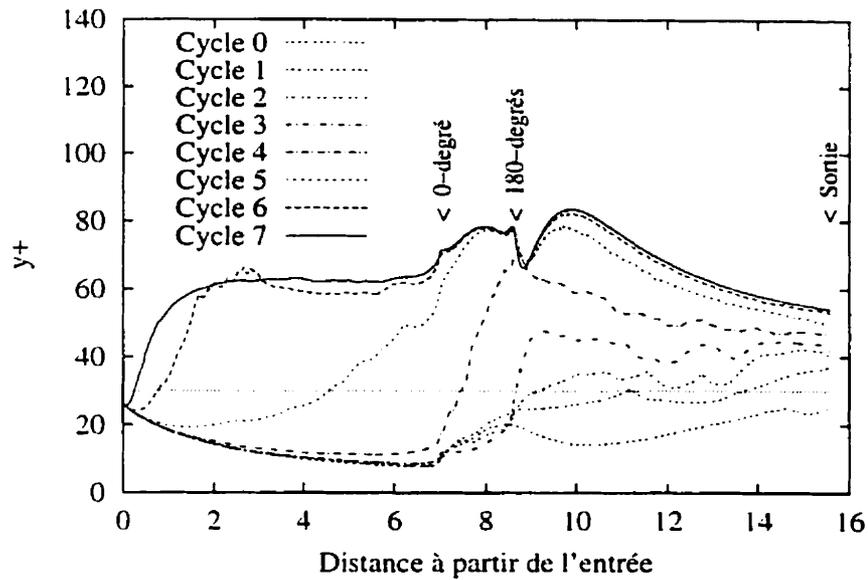
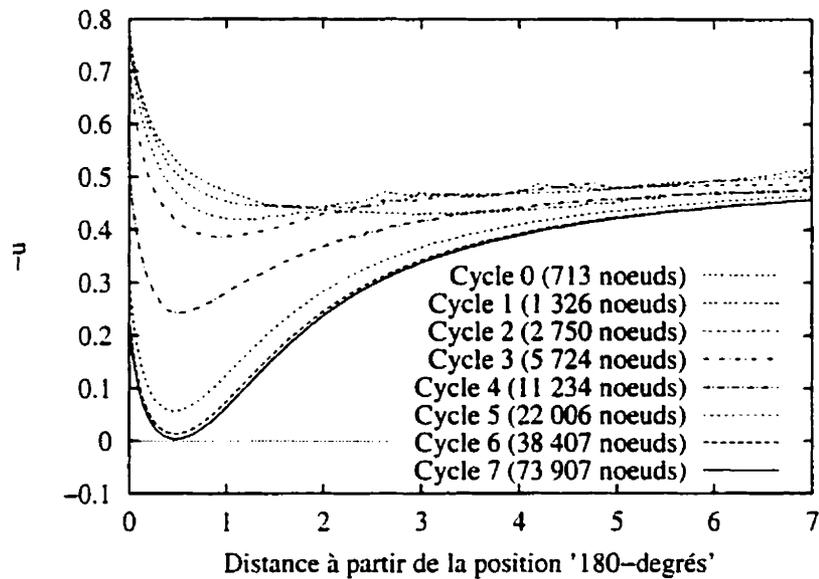
Selon les résultats expérimentaux de Sharma et Ostermier [38], il y a séparation de la couche limite à l'intérieur du virage près de la position '180 degrés'. La séparation peut être prédite numériquement si la distance d entre la paroi à l'intérieur du virage et le domaine de calcul (voir section 3.2) est ajustée de façon à maintenir les valeurs de y^+ (3.32) sur la frontière proches de 30. Deux valeurs de d ont été utilisées: $d = 0.015$, et ensuite $d = 0.01$. Pour la paroi à l'extérieur du virage, $d = 0.02$.

Les valeurs de y^+ et de la vitesse de glissement à l'intérieur du virage pour le cas $d = 0.015$ sont présentées à la figure 4.9. La vitesse de glissement est définie comme la composante de la vitesse tangentielle à la paroi sur la frontière du domaine de

calcul. Sur une paroi horizontale, par exemple, la vitesse de glissement correspond à la composante u de la vitesse. La figure 4.9(a) montre l'évolution frappante de y^+ avec le maillage. Sept cycles adaptatifs sont requis pour obtenir une distribution de y^+ indépendante du maillage en aval de la position '0 degré'. Sur le dernier maillage (cycle 7), les valeurs de y^+ se maintiennent entre 60 et 90 à peu près partout.

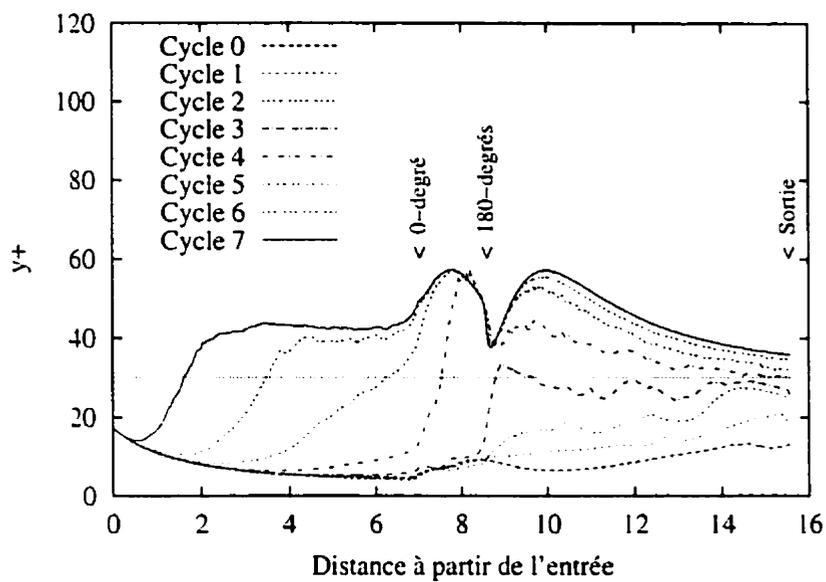
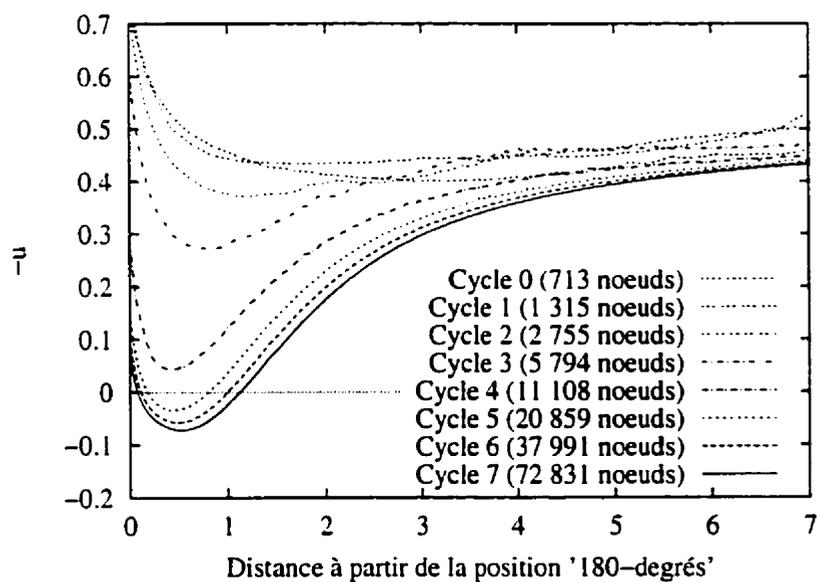
Les changements de y^+ d'un maillage à l'autre se repercutent sur la condition frontière pour la vitesse (3.35). La figure 4.9(b) montre que la vitesse de glissement change considérablement entre le maillage initial et le maillage final. Sur ce dernier, on voit qu'elle décroît à la sortie du virage pour atteindre sa valeur minimale à une distance d'environ 0.5 en aval de la position '180 degrés'. Cependant, la couche limite ne sépare pas puisque le signe de la vitesse de glissement reste le même. Ceci contredit les résultats expérimentaux.

La distance d à l'intérieur du virage est ensuite réduite à 0.01. Les valeurs de y^+ et de la vitesse de glissement pour ce cas sont présentées à la figure 4.10. Une fois de plus, les changements de y^+ d'un cycle à l'autre sont très importants, comme en témoigne la figure 4.10(a), et sept cycles adaptatifs sont requis pour obtenir des valeurs indépendantes du maillage en aval du '0 degré'. Sur le maillage final, les valeurs de y^+ se maintiennent cette fois entre 40 et 60. La vitesse de glissement est également réduite par rapport au cas $d = 0.015$. La séparation de la couche limite est maintenant prédite, comme le montre la figure 4.10(b), mais seulement avec un maillage suffisamment raffiné. Cinq cycles adaptatifs sont en effet nécessaires pour obtenir la finesse de maillage requise pour que la séparation se manifeste.

(a) y^+ 

(b) Vitesse de glissement

Figure 4.9: y^+ et la vitesse de glissement pour le cas $d = 0.015$

(a) y^+ 

(b) Vitesse de glissement

Figure 4.10: y^+ et la vitesse de glissement pour le cas $d = 0.01$

4.3.3 Conclusion

La vérification de l'algorithme de remaillage adaptatif sur un problème avec une solution connue a permis de démontrer la capacité de la méthode à produire des solutions précises et indépendantes du maillage. L'estimateur d'erreur est un outil d'approximation de l'erreur réelle pouvant servir à contrôler la qualité de la solution. Sa précision augmente également avec le raffinement du maillage.

La simulation d'un écoulement dans une conduite annulaire axisymétrique coudée à 180 degrés avec le modèle $k-\epsilon$ et les lois de paroi a montré que les conditions frontières sur les parois dépendent fortement du maillage. Jusqu'à sept cycles adaptatifs furent nécessaires pour obtenir une distribution indépendante du maillage de la vitesse de glissement à l'intérieur du virage. La séparation de la couche limite de la paroi à l'intérieur du virage est prédite près de la position '180 degrés' seulement si la distance d entre la paroi et le domaine de calcul est ajustée de façon à maintenir les valeurs de y^+ près de 30 et si le maillage est suffisamment raffiné. L'importance d'obtenir des solutions indépendantes du maillage est une fois de plus mise en évidence alors que la séparation de la couche limite n'est pas prédite sur des maillages grossiers, même avec une valeur de d adéquate.

CHAPITRE 5

ON THE JUDICIOUS USE OF THE $k - \epsilon$ MODEL, WALL
FUNCTIONS AND ADAPTIVITY •David Lacasse**, Éric Turgeon** et Dominique Pelletier[§]

5.1 Abstract

This paper shows that accurate predictions of skin friction and Stanton number can be achieved with the $k - \epsilon$ model of turbulence with wall functions. Success hinges on the judicious use of the model. Turbulent flow and heat transfer over a flat plate are used as test cases. Predictions of the local skin friction coefficient on the plate were obtained for Reynolds numbers of 2×10^5 and 2×10^6 . In the case $Re = 2 \times 10^5$, the effects of inlet boundary turbulence Reynolds number, geometry of the plate and type of wall functions are assessed. It is found that an inlet turbulence Reynolds number equal to 10% of the Reynolds number yields realistic results. Significant improvements are achieved if the plate thickness is included in the computational model. Two-velocity scale wall functions prove to be superior to the more popular one-velocity scale wall functions. For the case $Re = 2 \times 10^6$, predictions of the local skin friction coefficient ($C_f(x)$) and the local heat transfer coefficient ($St(x)$) are in excellent agreement with experimental correlations.

*Soumis pour publication à l'*AIAA Journal*.

**Étudiants aux cycles supérieurs.

[§]Professeur.

5.2 Introduction

Previous work has shown that adaptive remeshing is a powerful tool to achieve grid independent CFD predictions. [19, 20, 23, 39] The effectiveness of the approach was demonstrated in two ways. First, the methodology was verified on problems with closed form solutions [18, 40] generated with the method of manufactured solutions [41]. In these studies, the error estimate (both global and local) is computed and compares well with the true error. Results indicate that adaptive remeshing is a cost effective means of controlling the accuracy of CFD simulations (*i.e.* generating numerically exact solutions). In a second step, the methodology was validated on problems for which experimental data is available. In all cases, grid independent solutions were obtained. Predictions of turbulent flows were achieved with the $k - \epsilon$ model of turbulence. Comparisons of grid independent solutions with measurements were very good for some test cases [35] and poor for others [21] thus confirming the strengths and weaknesses of the $k - \epsilon$ model.

The objective of the present work is to show that:

1. obtaining physically realistic predictions with the $k - \epsilon$ model and wall functions depends on a good understanding and use of the model's structure and characteristics;
2. assessment of the validity of the model against measurements can only be achieved with grid independent solutions.

Turbulent flow on a flat plate will serve as an example.

The paper is organized as follows. The equations modeling the problem of interest are presented first. Then, we study isothermal flow on a flat plate. The accuracy of

results is assessed by looking at the skin friction coefficient along the plate. White's correlation [36] is used as a reference because of its accuracy and reliability. The effects of the turbulence Reynolds number, the type of wall functions and the geometry of the plate are studied in turn for a Reynolds number of 2×10^5 to show their impact on the accuracy of predictions.

A heat transfer variant of the flow is then presented, for a Reynolds number of 2×10^6 . Predictions of the local skin friction coefficient and Stanton number along the plate are presented and compared to White's correlation [36] and the Kays-Crawford's correlation [33].

5.3 Modeling of the Problem

5.3.1 Reynolds-averaged Navier-Stokes equations

The problem of interest in the present study is modeled by the time-averaged continuity, momentum and energy equations:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \\ \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t)\nabla T]\end{aligned}$$

where ρ is the density, \mathbf{u} the velocity, p the pressure, μ the viscosity, μ_t the eddy viscosity, c_p the specific heat, T the temperature, λ the conductivity and λ_t the eddy conductivity. This system of equations is closed with the $k - \epsilon$ turbulence model [6].

5.3.2 The standard $k - \epsilon$ turbulence model

The eddy viscosity and conductivity are expressed in terms of two turbulence variables, the turbulence kinetic energy k and its rate of dissipation ϵ :

$$\begin{aligned}\mu_t &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \\ \lambda_t &= \frac{c_p \mu_t}{Pr_t}\end{aligned}$$

The turbulent Prandtl number Pr_t is equal to unity.

The turbulence quantities are governed with the following transport equations:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \quad (5.1)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.2)$$

The production of turbulence $P(\mathbf{u})$ is defined as:

$$P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

The constants C_1 , C_2 , C_μ , σ_k , and σ_ϵ are set to the values recommended by Launder and Spalding [6]. See Table 5.1.

Tableau 5.1: Constants for the $k - \epsilon$ model

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

5.3.3 Wall boundary conditions

The standard $k - \epsilon$ turbulence model is not valid for low values of the turbulence Reynolds number. The near-wall region is such an instance. The strategy adopted here uses wall functions which describe the solution in the near wall region. This section describes several such wall functions which are used as boundary conditions.

5.3.3.1 One-velocity scale wall function

A wall function describes a relationship between u , the velocity tangent to the solid wall, and τ_w , the wall shear stress, at a given distance y from the wall:

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ && \text{for } y^+ < y_c^+ \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) && \text{for } y^+ \geq y_c^+ \end{aligned}$$

where κ is the Kármán constant and E is a roughness parameter. For smooth walls we take $\kappa = 0.42$ and $E = 9.0$. The dimensionless variables u^+ and y^+ are defined as follows:

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u}{u_*}, \\ y^+ &= \frac{y\rho u_*}{\mu}. \end{aligned}$$

The critical value y_c^+ separating the linear and logarithmic velocity profiles is approximately 10.8 [33]. The wall shear stress appears in the definition of the velocity scale u_* (also known as the friction velocity):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

The specific value of y where the wall function is applied is chosen so that y^+ lies within the range of validity of the function, that is $30 < y^+ < 300$ [30]. The normal velocity is set to zero.

Once the velocity distribution is known throughout the domain, the distribution of the turbulence kinetic energy and its dissipation rate are computed by solving equations (5.1) and (5.2) with the following Dirichlet boundary conditions [6]:

$$k = \frac{u_*^2}{C_\mu},$$

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa y}.$$

5.3.3.2 Two-velocity scale wall function

The above wall function predicts zero heat flux near a reattachment point because the friction velocity u_* is not the appropriate scale (it vanishes at a stagnation point) [19, 32, 42]. This contradicts observations. Near a stagnation point, turbulence fluctuations are responsible for heat transfer. The following definition provides a velocity scale based on the turbulence kinetic energy: [31]

$$u_k = C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}.$$

The definition of y^+ becomes:

$$y^+ = \frac{y \rho u_k}{\mu}.$$

The k -equation is solved with a zero gradient ($\partial k / \partial n = 0$) wall boundary condition. The distribution of u_k is then computed and used to determine the velocity boundary

condition. Finally, the boundary condition for ϵ is given by :

$$\epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa y}$$

The use of the velocity scale u_k enables physically realistic predictions of the heat flux near stagnation points where the shear stress is zero but the heat flux is not.

5.3.3.3 Thermal wall function

Boundary conditions at a wall for the energy equation are enforced through a temperature wall function similar to that used for the momentum equations. For constant wall temperature, the effective heat flux in the wall function is computed as

$$q_w = \frac{\rho c_p C_\mu^{1/4} k^{1/2} (T_w - T)}{T^+}$$

where T and k are respectively the temperature and TKE of computational boundary points. T_w is the wall temperature and T^+ satisfies the following relations [32]:

$$T^+ = \begin{cases} \text{Pr } y^+ & \text{for } y^+ < y_1^+ \\ a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2a_1(y^+)^2} & \text{for } y_1^+ \leq y^+ < y_2^+ \\ \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(y^+) + \beta & \text{for } y_2^+ \leq y^+ \end{cases}$$

with the following definitions:

$$y_1^+ = \frac{10}{\text{Pr}^{1/3}} \quad , \quad y_2^+ = \left(\frac{\kappa}{a_1} \right)^{1/2} \quad ,$$

$$a_1 = 10^{-3} \text{Pr}_t \quad , \quad a_2 = 15 \text{Pr}^{2/3} \quad ,$$

$$\beta = a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2\kappa} \left[1 + \ln \left(\frac{\kappa}{a_1} \right) \right]$$

5.3.4 Turbulence equations in logarithmic form

While mathematically correct, the turbulence equations (5.1) and (5.2) may cause numerical difficulties. For example, the eddy viscosity may become negative if ϵ becomes negative, causing the solver to breakdown. Also, several source terms contain division by a turbulence variable. Negative or small values of the denominator can cause improper sign or overly large values of the source terms. Enhanced robustness of the algorithm is achieved if one can ensure that turbulence variables remain positive throughout the domain and the course of iterations.

One way to preserve positivity of the dependent variables consists in solving for their logarithms [23]. This can be viewed as using the following change of dependent variables:

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon)$$

Solving for \mathcal{K} and \mathcal{E} guarantees that k and ϵ will remain positive throughout the computations. Hence, the eddy viscosity μ_T will always remain positive. This approach is referred to as solving for *logarithmic variables*. Furthermore, turbulence quantities often present very steep fronts which are difficult to resolve accurately.

Logarithmic variables \mathcal{K} and \mathcal{E} present smoother variations than those of k and ϵ because the logarithm varies more slowly than its argument. Thus, more accurate solutions are obtained when logarithmic variables are used.

The transport equations for the logarithmic variables are:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) (\nabla \mathcal{K})^2 + \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) - \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}}$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) (\nabla \mathcal{E})^2 + C_1 \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}}$$

Note that the equations for logarithmic variables are equivalent to the original equations of the turbulence model. Hence, the turbulence model is unchanged. Only the computational variables are different.

5.3.5 Finite element formulation and adaptive remeshing

The Navier-Stokes and energy equations, along with the logarithmic form of the turbulence equations are solved by a finite element method. The equations are multiplied by a test function and integrated over the domain. Integration by parts of diffusion terms and pressure gradients leads to the Galerkin variational formulation. Because the equations are dominated by convection, the standard Galerkin discretization of such equations may lead to non-physical oscillations and convergence difficulties. These situations are mitigated by using one of the following stabilized

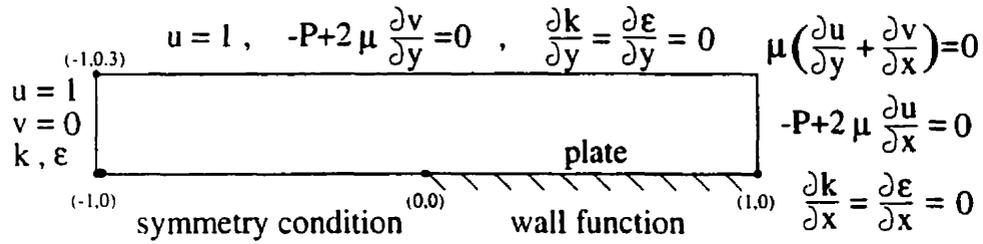


Figure 5.1: Domain and boundary conditions.

formulations: SU [24], SUPG [25], or GLS [26]. The equations are discretized using the seven-node triangular element [27], which uses an enriched quadratic velocity field, a linear discontinuous pressure and a quadratic interpolant for the temperature and the logarithms of turbulence variables.

Mesh independent solutions of the equations are obtained with an adaptive finite element algorithm [39]. Error estimates are obtained by a local least squares reconstruction of the solution derivatives for the velocity field, the temperature and the logarithms of turbulence variables. An error estimate for the eddy viscosity is also constructed since slowly varying fields of \mathcal{K} and \mathcal{E} may result in rapid variation of μ_t [23]. The adaptive methodology is set to reduce the error by a factor of two at each cycle of adaptation.

5.4 Isothermal Flat Plate

The domain and the boundary conditions for an infinitely thin plate are defined as shown in Fig. 5.1. Computations are performed in dimensionless form using the plate length and inlet velocity as reference quantities. The Reynolds number is set to 200 000, selected as viable while at the same time minimizing meshing requirements. A two-velocity scale wall function is used along the plate.

5.4.1 Effect of the turbulence Reynolds number

This section shows that proper selection of inflow values of turbulence variables is critical to achieving physically realistic predictions. The inlet turbulence Reynolds number characterises the flow and is defined as:

$$Re_t = \frac{\epsilon}{\rho C_\mu k^2}$$

Following previous success in the prediction of internal flows [35], the turbulence Reynolds number at the inflow was set to 1 000 with the values of k and ϵ given in Table 5.2. This low value of the inlet Re_t results in a large eddy viscosity which dissipates the TKE.

Tableau 5.2: Inlet values of k and ϵ

Re_t	k	ϵ
1000	10^{-2}	9×10^{-3}
20 000	10^{-6}	1.8×10^{-9}

Contours of TKE for $Re_t = 1\,000$ are shown in Figure 5.2(a). The decay of grid turbulence outside of the boundary layer is clearly seen. The high values of inflow boundary conditions of k and ϵ also have a significant non-physical side effect: the value of μ_t is lower in the boundary layer than in the free stream flow, as illustrated in Fig. 5.3(a). Note that grid independent results are easily achieved on the first adapted mesh.

Thus, a higher turbulence Reynolds number must be specified in order to make the problem more realistic. Re_t is now set to 20 000 (10% of Re) with the values of k and ϵ given in Table 5.2. The freestream turbulence is very low compared to the levels

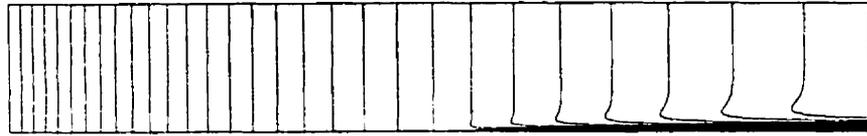
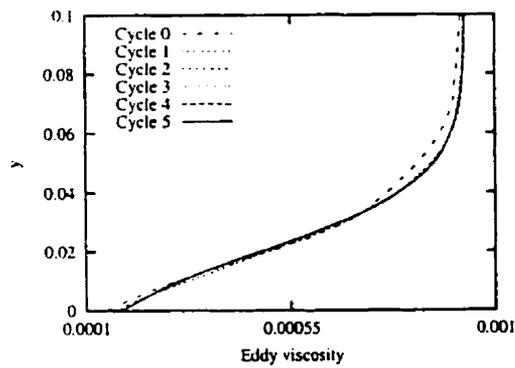
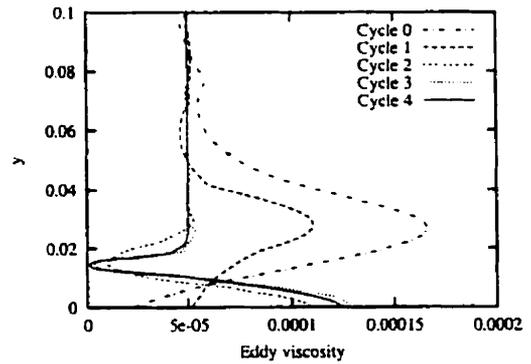
(a) $Re_t = 1\ 000.$ (b) $Re_t = 20\ 000.$

Figure 5.2: Contours of TKE

(a) $Re_t = 1\ 000.$ (b) $Re_t = 20\ 000.$ Figure 5.3: Variation of μ_t in the boundary layer at $x/L = 0.5$

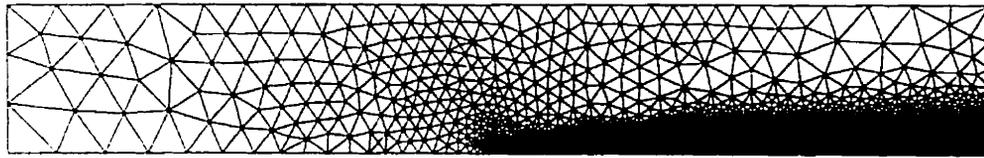
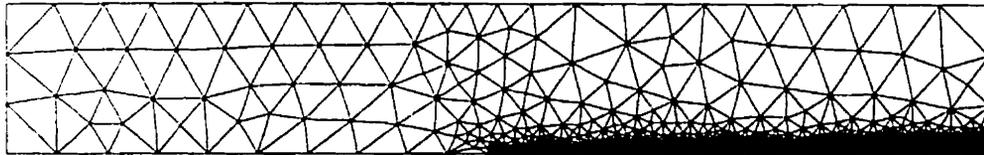
(a) $Re_t = 1\,000$.(b) $Re_t = 20\,000$.

Figure 5.4: Final meshes of the adaptive remeshing procedure

of TKE in the boundary layer that the decay of grid turbulence does not show on Fig. 5.2(b).

Figure 5.3(b) is a very good example of the importance of achieving grid independent solutions. The behavior of the eddy viscosity (μ_t) changes dramatically between the initial and the final mesh, where it is more along expected trends. Note that four cycles of adaptive remeshing are needed to achieve grid independence. The final meshes for the cases $Re_t = 1\,000$ and $Re_t = 20\,000$ are shown in Fig. 5.4. Overall lower values of the eddy viscosity yield a thinner boundary layer. Figure 5.4 shows that the meshes are adapted accordingly.

We now make a more quantitative assessment of predictions by looking at skin friction predictions.

5.4.2 Effect of the type of wall functions

One and two velocity wall functions are used in turn to predict skin friction over an infinitely thin plate (zero thickness). The local skin friction coefficient, defined as:

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad \text{where} \quad \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_w$$

is used to assess the predictions.

Following on results from the previous sections, the turbulence Reynolds number is set to 20 000. The predicted values of $C_f(x)$ are compared to White's correlation which is accurate to $\pm 2\%$ over the entire turbulent range [36]:

$$C_f(x) = \frac{0.455}{\ln^2(0.06\text{Re}_x)}$$

5.4.2.1 One velocity scale

The distribution of $C_f(x)$ along the plate is computed from the wall function boundary condition for k :

$$C_f(x) = \frac{k\sqrt{C_\mu}}{\frac{1}{2}U_\infty^2}. \quad (5.3)$$

Figure 5.5(a) shows distributions of $C_f(x)$ obtained for each one of the adaptive cycles. Numerical instabilities have necessitated the use of different stabilization formulations (SU, SUPG, GLS) for the turbulence equations. Converged solutions could not be achieved with the same formulation for all adaptive cycles. This may explain why we do not see a clear evolution of the distribution of $C_f(x)$ towards a grid

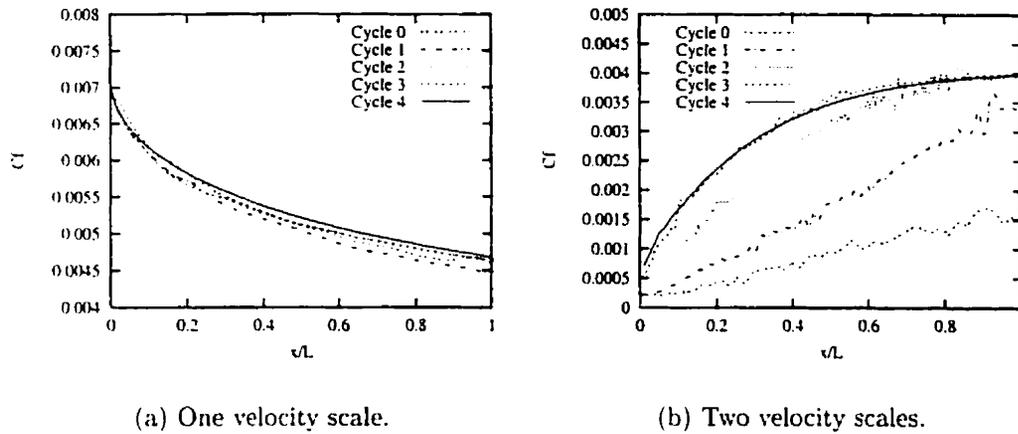


Figure 5.5: Evolution of the distributions of $C_f(x)$ with adaptive cycles

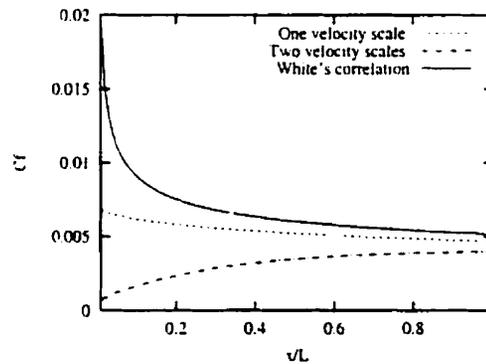


Figure 5.6: Distributions of $C_f(x)$ on an infinitely thin plate.

independent solution, even though the differences between cycles are small. However, predictions are so smooth that we believe they are useful in assessing the results. The 'Cycle 4' solution is plotted in Fig. 5.6. The slightly higher values near the leading edge are caused by the change in boundary condition for the u -momentum equation, which goes from $\partial u/\partial y = 0$ (symmetry condition) to $\partial u/\partial y \neq 0$ (wall function). As can be seen on Figs. 5.5(b) and 5.6, the trend predicted by the two velocity scales wall function is very different and requires some explanation.

5.4.2.2 Two velocity scales

With two velocity scales, the local skin friction coefficient is computed in the following manner:

$$C_f(x) = \frac{u_k u}{\frac{1}{2} U^2 u^+}$$

$$\Rightarrow C_f(x) = \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}} u}{\frac{1}{2} U_\infty^2 \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{d\rho C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}}{\mu} \right)} \quad (5.4)$$

The evolution of the distribution of $C_f(x)$ with adaptive cycles is illustrated in Fig. 5.5(b) where grid convergence is clearly achieved. The distributions obtained on the final meshes are plotted in Fig. 5.6. Results are poor when compared to White's correlation, especially near the leading edge of the plate where the model apparently fails to reproduce an observed peak of $C_f(x)$ and TKE. The level of k is very low at the inflow boundary of the domain and remains low because the computational velocity gradients near the leading edge of the plate remain small. Hence, the value of u_k is very low at the leading edge of the plate so that equation (5.4) predicts low values of τ_w and $C_f(x)$.

Realistic distributions of $C_f(x)$ can only be achieved if the expected levels of TKE can be generated by the computational model. It is the velocity gradients in the production term of the k -equation that are responsible for generating this turbulence and they are most important where the flow meets the plate. This explains the measured large peak in the value of $C_f(x)$ at $x/L = 0$. Such a peak is not observed in the present computations because there is no stagnation point in the computational model of the leading edge of the plate as illustrated in Fig. 5.7. The two curves of interest are labeled as 'Inf.thin' (infinitely thin plate). One way around this problem

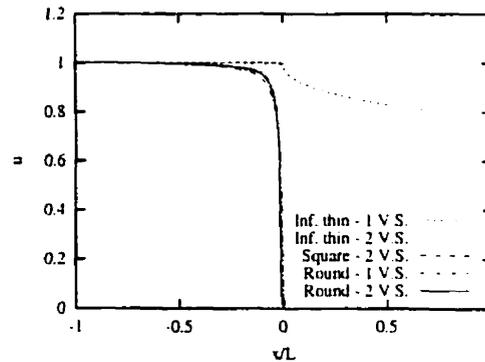


Figure 5.7: Horizontal velocity at $y = 0$.

is to modify the geometry to reproduce the physically observed stagnation point. This is the subject of the next section.

5.4.3 Effect of the plate geometry

When the thickness of the plate is included in the geometry of the model, the physically observed stagnation point at the leading edge of the plate is reproduced in the simulation (Fig. 5.7). In this figure the labels ‘Square’ and ‘Round’ correspond to two geometries of the leading edge shown in Fig. 5.8. With these geometries, the production of k , which depends on the velocity gradients, is triggered in this region. As will be shown, the behavior of the shear stress is improved. In our model, we set the half-thickness of the plate to 1% of its length.

5.4.3.1 Square edge - 1 velocity scale

In this attempt, the plate exhibits a square leading edge, as shown in Fig. 5.8(a). A one-velocity scale wall function is used on the horizontal and vertical portions of the

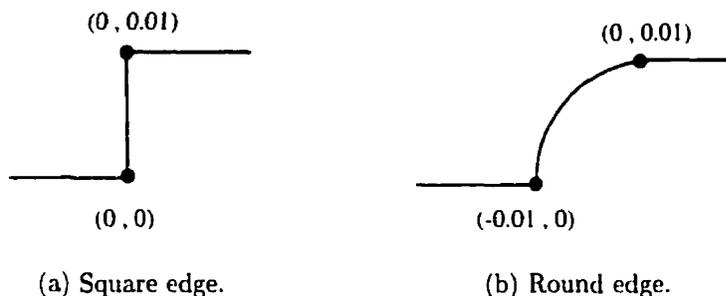


Figure 5.8: Enlargement of the plate leading edge

plate. Unfortunately, a solution could not be achieved due to convergence difficulties. A distribution of $C_f(x)$ for this particular case is therefore not presented. It is believed that the high non-linearity of the wall functions, combined with the singularity located at the plate corner, where the two wall functions meet, are responsible for the difficulties encountered.

5.4.3.2 Square edge - 2 velocity scales

Wall functions with two velocity scales are used on both portions of the plate surface. This time, it was possible to obtain a mesh independent solution. Two-velocity scale wall functions yield an explicit linear relation between u and τ_w since u_k is known *a priori*. The wall function then takes the form:

$$u = \tau_w f(u_k)$$

As expected, a peak of turbulence kinetic energy is generated at the leading edge of the plate, as shown in Fig. 5.9. Plots of $C_f(x)$ are presented in Fig. 5.10(a) along with White's correlation. This figure indicates that several cycles of adaptation are required to achieve a grid converged distribution of skin friction. The square

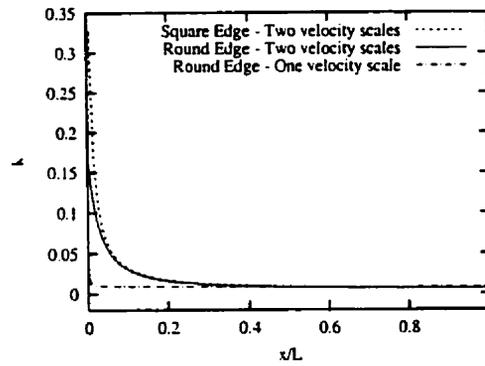
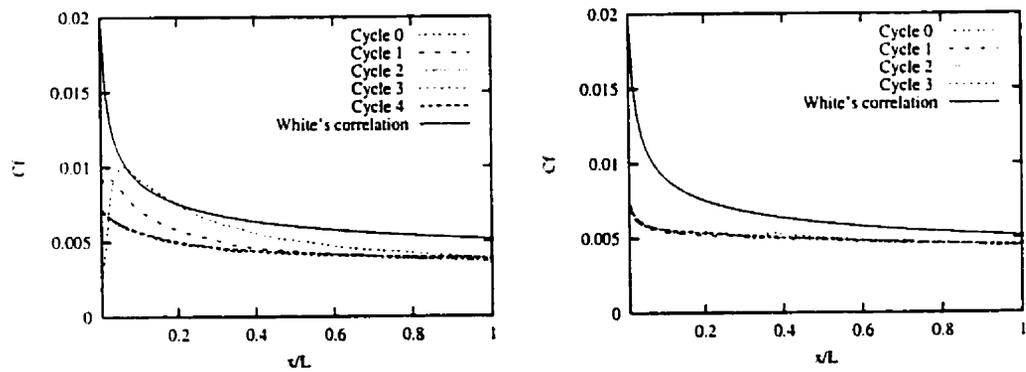
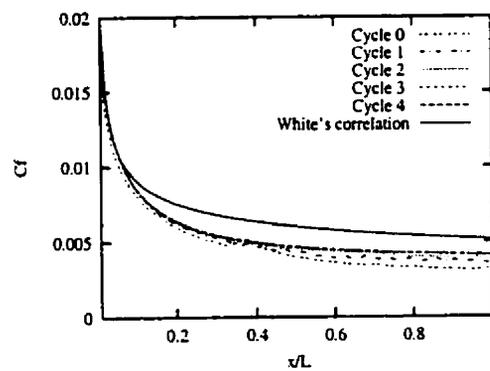


Figure 5.9: Variation of TKE along the plate.



(a) Square leading edge, 2 velocity scales.

(b) Round leading edge, 1 velocity scale.



(c) Round leading edge, 2 velocity scales.

Figure 5.10: Distributions of $C_f(x)$ along a plate with a finite thickness for $Re = 2 \times 10^5$.

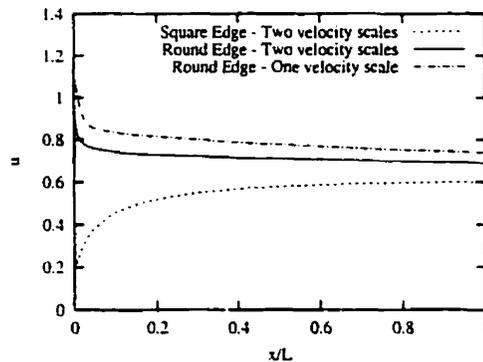


Figure 5.11: Slip velocity along the plate.

edge produces the highest level of turbulence. However, this does not automatically translate into higher values of skin friction. After the flow reaches the leading edge of the plate, it is deflected upwards, away from the horizontal surface. As a consequence, the horizontal component of the velocity on the plate surface will be low near the leading edge. Figure 5.11 shows plots of the slip velocity along the plate. The slip velocity is the tangential component of the velocity at the computational boundary. Low values of the slip velocity yield low wall shear so that the effect of the turbulence peak is cancelled. As a result, the distribution of $C_f(x)$ obtained on the final mesh does not compare well with White's correlation (Fig. 5.10(a)).

By rounding off the plate leading edge, we will see that:

1. the problem is easier to solve due to the elimination of the singularity, and
2. the component of the velocity tangent to the plate is increased, resulting in higher values of $C_f(x)$.

5.4.3.3 Round edge - 1 velocity scale

An enlarged view of the round edge is shown in Fig. 5.8(b). The local skin friction coefficient is calculated on the horizontal surface, between the points (0.0.01) and (1.0.01). The discrepancy with White's correlation is large, as seen in Fig. 5.10(b), because the peak of turbulence kinetic energy is too low (Fig. 5.9 and equation (5.3)). The one-velocity scale wall function thus appears to be inappropriate for this problem.

5.4.3.4 Round edge - 2 velocity scales

As seen in Fig. 5.10(c), the use of two velocity scales yields better results. At last, the peak at the leading edge is reproduced and the values of $C_f(x)$ come within 13% of the values predicted with White's correlation. Elsewhere on the plate, the maximum discrepancy with White's correlation is approximately 25%. This level of discrepancy is unacceptable in practice and may be due to the fact that the Reynolds number of 200 000 is too low for comparing with the correlations. Indeed, authors such as Schultz-Grunow [37] and Smith *et al.* [43] have reported experimental values of $C_f(x)$ over a flat plate in a turbulent incompressible flow for a range of higher Reynolds numbers. For instance, Smith *et al.*, who have conducted their experiments on a plate with an elliptic leading edge, present results for the range $1.5 \times 10^6 < \text{Re}_x < 5 \times 10^8$. Thus, the present Reynolds number of 2×10^5 is at the low end of the turbulent range, which may partly explain the previously observed discrepancies. In fact, Ref. 30 suggests that $(\text{Re}_x)_{trans} \approx 2.5 \times 10^6$ for a flow with a low level of turbulence (0.1%). Hence, we increase the Reynolds number to 2×10^6 . The next section shows improved agreement between numerical predictions and correlations.

5.5 Heated Flat Plate

Turbulent heat transfer on a heated flat plate with a round leading edge is now solved using the k - ϵ model and two-velocity scale wall functions. The flow conditions are as follows: $Re = 2 \times 10^6$, $Re_t = 2 \times 10^5$, $T_\infty = 0$, $T_w = 1$.

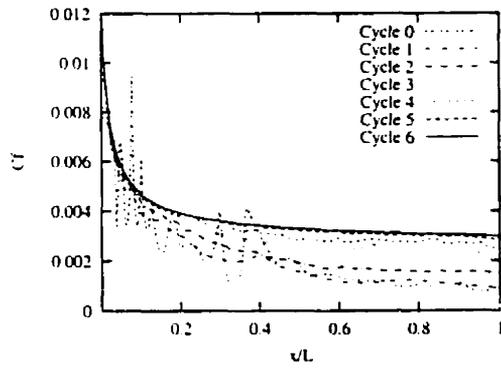
5.5.1 Prediction of $C_f(x)$

The evolution of the distributions of $C_f(x)$ with adaptive cycles is shown in Fig. 5.12(a). Once again, the importance of adaptive remeshing is clearly illustrated. The grid independent distribution (Cycle 6) is plotted in Fig. 5.12(b) along with White's correlation and another obtained from Schultz-Grunow's experimental results [37]. The maximum discrepancy between the numerical results and White's correlation is 13%. At the leading edge, for example, the discrepancy is 11%. The agreement is even better when comparing with Schultz-Grunow's results. A difference of approximately 17% is observed at the leading edge but on 98% of the plate length ($0.02 < x/L \leq 1$), the discrepancy never exceeds 10%. This is a noticeable improvement compared to the case $Re = 2 \times 10^5$ of Fig. 5.10(c).

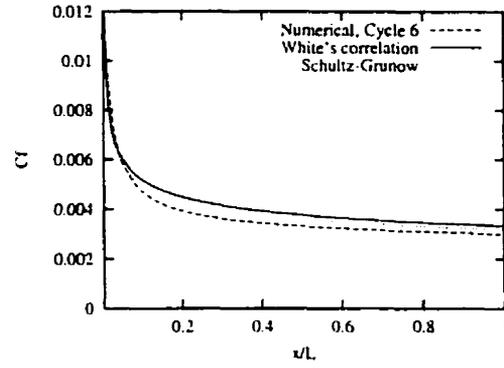
5.5.2 Prediction of $St(x)$

The local heat transfer coefficient is reported in dimensionless form using the Stanton number:

$$St(x) = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{q_w x}{\lambda(T_w - T_\infty) Re_x Pr}$$

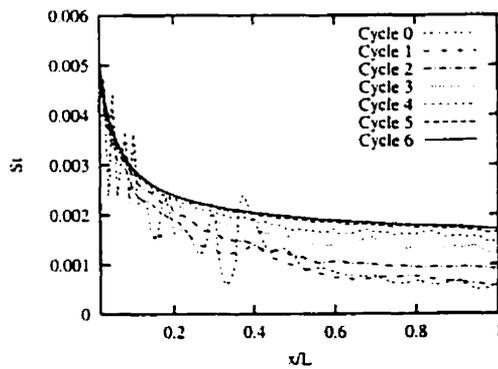


(a) Evolution of $C_f(x)$ with adaptive cycles.

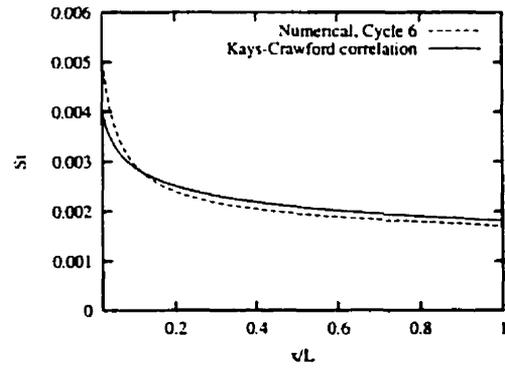


(b) Comparison of $C_f(x)$ with correlations.

Figure 5.12: Distributions of $C_f(x)$ for $Re = 2 \times 10^6$.

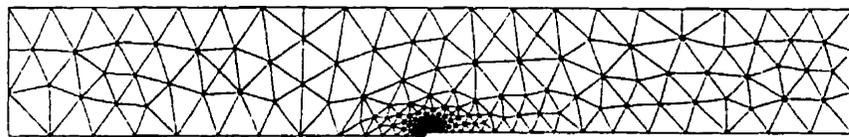


(a) Evolution of $St(x)$ with adaptive cycles.

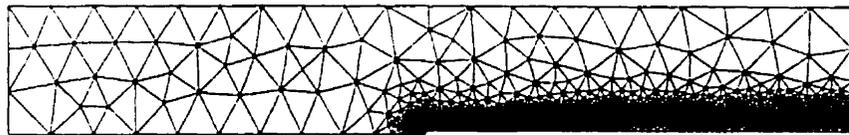


(b) Comparison of $St(x)$ with correlation.

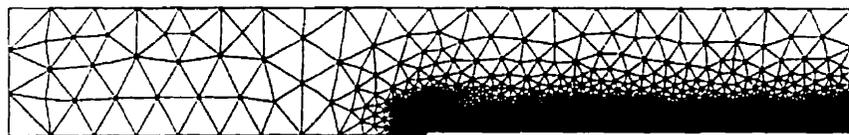
Figure 5.13: Distributions of $St(x)$ for $Re = 2 \times 10^6$.



(a) Initial mesh (Cycle 0: 818 nodes).



(b) Intermediate mesh (Cycle 3: 6 542 nodes).



(c) Final mesh (Cycle 6: 37 375 nodes).

Figure 5.14: Meshes obtained with the adaptive remeshing procedure.

Predictions of the $St(x)$ distribution are computed with the effective value of the heat flux (q_w) used in the temperature wall function:

$$St(x) = \frac{\rho c_p C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}} (T_w - T)}{T^+ (T_w - T_\infty)}$$

Fig. 5.13(a) shows the evolution towards a grid independent prediction (Cycle 6). The latter is plotted in Fig. 5.13(b) and compared to the Kays-Crawford correlation [33]:

$$St(x) = \frac{0.0287}{Pr^{0.4} Re_x^{0.2}} \text{ with } Pr = 0.7$$

which is valid within the ranges $0.5 < Pr < 1.0$ and $5 \times 10^5 < Re_x < 5 \times 10^6$. The comparison between the correlation and the grid independent prediction of $St(x)$ is excellent within the range of validity of the correlation ($0.25 < x < 1$) where the discrepancy never exceeds 7%. This confirms that $Re = 2 \times 10^6$ is in the range of validity of both the computational model and correlations.

Fig. 5.14 shows three meshes of the remeshing procedure: the initial coarse mesh (818 nodes), an intermediate mesh (6 542 nodes) and the final mesh (37 375 nodes). As can be seen, refinement is required near and upstream of the leading edge, near the wall and also near the edge of the boundary layer in order to capture all features of this flow.

5.5.3 Evolution of y^+ with the mesh

An other important feature of the adaptive remeshing algorithm is that it allows achieving grid independence of boundary conditions for wall functions. Fig. 5.15 shows that the value of y^+ depends not only on the distance between the wall and the computational boundary, but also on the mesh. Both the velocity and temperature

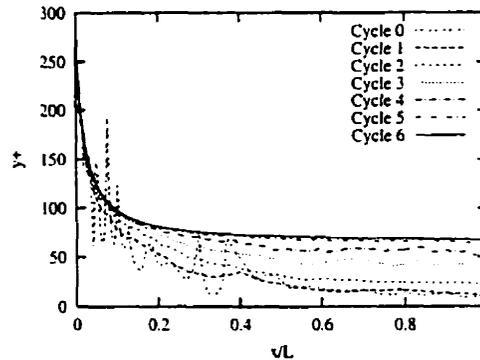


Figure 5.15: Evolution of y^+ with the mesh.

wall functions depend on y^+ and hence on u_* or u_k , which in turn depend on the flow solution. Thus, achieving grid independent solutions is critical to ensure accurate wall function boundary conditions.

5.6 Conclusion

This paper has shown that, in many cases, surprisingly good results may be achieved with the $k - \epsilon$ model and wall functions. Success hinges on ensuring that the computational model is specified so as to ensure that key features of the turbulent flow are reproduced. Among these, the turbulence Reynolds number must be sufficiently high to reflect the true physics of the flow.

It was also shown that the choice of wall functions plays a key role in the realism of predictions. A two-velocity scale wall function usually produces better predictions because one of its velocity scales is directly determined by the level of turbulence. This has a direct impact on the accuracy of the skin friction and heat transfer coefficient predictions.

A good understanding of the model's structure and characteristics also helps in defin-

ing the appropriate geometry of the computational domain. For the flow over a flat plate, TKE production is triggered by strong velocity gradients that can only be generated by including the thickness of the plate in the computational model.

Results also indicate that accuracy of predictions $(C_f(x), St(x))$ is critically dependent on the use of sufficiently fine meshes. Adaptive remeshing proves to be a simple tool to achieve appropriate meshes and to guarantee mesh independent results. The differences between numerical predictions and measurements are then only due to mathematical modeling choices.

5.7 Acknowledgments

This work was supported in part by NSERC, FCAR and AFOSR grant F49620-96-1-0329.

CHAPITRE 6

PREDICTION OF TURBULENT SEPARATED FLOW IN A TURNAROUND DUCT USING WALL FUNCTIONS AND ADAPTIVITY •

David Lacasse**, Éric Turgeon** et Dominique Pelletier[§]

6.1 Abstract

This paper presents an application of adaptive remeshing to the prediction of turbulent separated flows. The paper shows that the $k - \epsilon$ model with wall functions can predict separated flows along smooth curved surfaces. Success is achieved if the wall functions exhibit values of y^+ close to 30 and if meshes are fine enough to guarantee that wall function boundary conditions are grid converged. Adaptive remeshing proves to be a very cost effective tool in this context. The methodology is demonstrated on a problem possessing a closed form solution to establish the performance and reliability of the proposed approach. The method is then applied to prediction of turbulent flow in an annular, axisymmetric turnaround duct (TAD). Predictions from two computational models of the TAD are compared with experimental measurements. The importance of appropriate meshes to achieve grid independent solutions is demonstrated in both cases. Better agreement with mea-

*Soumis pour publication au *International Journal for CFD*.

**Étudiants aux cycles supérieurs.

[§]Professeur.

surements is obtained when partially developed profiles of u , k , and ϵ are specified at the TAD inlet.

6.2 Introduction

Axisymmetric turbulent flows are frequently encountered in industrial applications (*e.g.* impinging jets, flows in circular ducts, diffusers, *etc.*). Numerical methods have become an essential tool to predict, analyze and optimize such flows. Unfortunately, some authors report results from a single mesh computation without performing any grid refinement studies. Hence, the accuracy of their predictions cannot be assessed. Adaptive methods provide a powerful approach to control and maximize the accuracy of the numerical solutions. The error estimator quantifies the error and the adaptivity becomes a simple means of automating systematic grid refinement studies. The adaptive methodology has been verified on problems with closed form solutions [18, 40] generated with the method of manufactured solutions [41]. It has been applied successfully by the authors to achieve grid independent CFD predictions [19, 20, 23, 39].

The objectives of the present paper are to:

1. verify the adaptive methodology on a turbulent axisymmetric problem with a closed form solution;
2. extend the applications of the method to the simulation of turbulent separated flows using the $k - \epsilon$ model with wall functions.

The paper is organized as follows. The equations modeling the problem of interest and the numerical solution procedure are presented first. It is followed by a grid

refinement study for a turbulent axisymmetric problem with a closed form solution. This verifies the accuracy and the reliability of the adaptive remeshing methodology. We finally use the methodology to simulate a turbulent flow in an annular, axisymmetric 180-degree turnaround duct with the $k-\epsilon$ model of turbulence and wall functions. Numerical predictions are validated by comparing them with experimental results obtained by Sharma and Ostermier [38].

6.3 Modeling of the Problem

6.3.1 Reynolds-averaged Navier-Stokes equations

The problems of interest in the present study are modelled by the time-averaged continuity and momentum equations:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot \{(\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)\}\end{aligned}$$

where ρ is the density, \mathbf{u} the velocity, p the pressure, μ the viscosity, μ_t the eddy viscosity, and c_p the specific heat. For axisymmetric flows (*i.e.* flows that are symmetric around the horizontal x -axis), the equations reduce to the following expressions:

Continuity:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

Axial movement:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

Radial movement:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} \right] - 2(\mu + \mu_t) \frac{v}{r^2} \end{aligned}$$

This system of equations is closed with the $k - \epsilon$ model of turbulence [6].

6.3.2 The standard $k - \epsilon$ turbulence model

The eddy viscosity is expressed in terms of two turbulence variables, the turbulence kinetic energy (TKE) k and its rate of dissipation ϵ :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6.1)$$

They are governed by the following transport equations:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k &= \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon \\ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon &= \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned}$$

The production of turbulence $P(\mathbf{u})$ is defined as:

$$P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

The constants C_1 , C_2 , C_μ , σ_k and σ_ϵ are set to the values recommended by Launder and Spalding [6] given in Table 6.1.

Tableau 6.1: Constants for the $k - \epsilon$ model

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

In the axisymmetric case, the turbulence equations take the form:

$$\rho \left(u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \mu_t P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

with:

$$P(\mathbf{u}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2$$

6.3.3 Turbulence equations in logarithmic form

While mathematically correct, the turbulence equations may cause numerical difficulties. For example, the eddy viscosity may become negative if ϵ becomes negative, causing the solver to breakdown. Also, several source terms contain division by a turbulence variable. Negative or small values of the denominator can cause improper sign or overly large values of the source terms. Enhanced robustness of the algorithm is achieved if one can ensure that turbulence variables remain positive throughout the domain and the course of iterations.

One way to preserve positivity of the dependent variables consists in solving for their logarithms [23]. This can be viewed as using the following change of dependent variables:

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon)$$

Solving for \mathcal{K} and \mathcal{E} guarantees that k and ϵ will remain positive throughout the computations. Hence, the eddy viscosity μ_t will always remain positive. This approach is referred to as solving for *logarithmic variables*. Furthermore, turbulence quantities often present very steep fronts which are difficult to resolve accurately. Logarithmic variables \mathcal{K} and \mathcal{E} present smoother variations than those of k and ϵ because the logarithm varies more slowly than its argument. Thus, more accurate solutions are obtained when logarithmic variables are used.

The transport equations for the logarithmic variables are:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) (\nabla \mathcal{K})^2 \\ + \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) - \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) (\nabla \mathcal{E})^2 \\ + C_1 \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \end{aligned}$$

Note that the equations for logarithmic variables are equivalent to the original equations of the turbulence model. Hence, the turbulence model is unchanged. Only the computational variables are different.

6.3.4 Wall boundary conditions

The standard $k - \epsilon$ turbulence model is not valid when the turbulence Reynolds number is low. The near-wall region is such an instance. The strategy adopted here uses wall functions which describe a relationship between u , the velocity tangent to the solid wall, and τ_w , the wall shear stress, at a given distance y from the wall:

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ && \text{for } y^+ < y_c^+ \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) && \text{for } y^+ \geq y_c^+ \end{aligned}$$

where κ is the Kármán constant and E is a roughness parameter. For smooth walls we take $\kappa = 0.42$ and $E = 9.0$. The dimensionless variables u^+ and y^+ are defined as follows:

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u}{u_{*}}, \\ y^+ &= \frac{y\rho u_k}{\mu}. \end{aligned}$$

The critical value y_c^+ separating the linear and logarithmic velocity profiles is approximately 10.8 [33]. The wall shear stress is given by:

$$\tau_w = \rho u_{*} u_k$$

where u_{*} is a friction velocity and u_k is a velocity scale based on the TKE:

$$u_k = C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}.$$

Quantities that depend on the TKE, such as the skin friction coefficient or the heat transfer coefficient, require the use of two velocity scales in order to be accurately predicted. It was also found that convergence is more easily achieved when two

velocity scales are used. The value of d , the dimensionless distance between the solid wall and the computational boundary, is chosen so that y^+ lies within the range of validity of the function, which is $30 < y^+ < 300$ [30]. The normal velocity is set to zero. The k -equation is solved with a zero normal derivative ($\partial k / \partial n = 0$) boundary condition. Finally, the boundary condition for ϵ is given by :

$$\epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa y}.$$

6.3.5 Finite element formulation and adaptive remeshing

The Navier-Stokes and the logarithmic form of the turbulence equations are solved by a finite element method. The equations are multiplied by a test function and integrated over the domain. Integration by parts of diffusion terms and pressure gradients leads to the Galerkin variational formulation. Because the equations are dominated by convection, the standard Galerkin discretization of such equations may lead to non-physical oscillations and convergence difficulties. These situations are mitigated by using one of the following stabilized formulations: SU [24], SUPG [25], or GLS [26]. The equations are discretized using the seven-node triangular element [27], which uses an enriched quadratic velocity field, a linear discontinuous pressure and a quadratic interpolant for the logarithms of turbulence variables.

Mesh independent solutions of the equations are obtained with an adaptive finite element algorithm [39]. Error estimates are obtained by a local least-squares reconstruction of the solution derivatives for the velocity field and the logarithms of turbulence variables. An error estimate for the eddy viscosity is also constructed since slowly varying fields of \mathcal{K} and \mathcal{E} may result in rapid variation of μ_t [23]. The adaptive methodology is set to reduce the error by a factor of two at each cycle of adaptation.

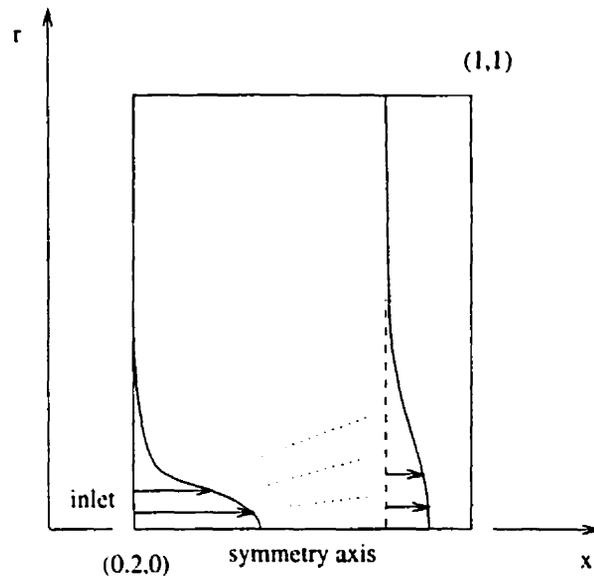


Figure 6.1: Computational domain for free turbulent jet

6.4 Verification

The methodology is verified with the method of manufactured solutions [41]. The idea is to solve a problem for which an analytical solution is known. This makes it possible to verify that the numerical solution converges towards the exact (analytical) solution with adaptive mesh refinement.

We use the solution for a free turbulent jet, as provided by Schlichting [4]. The computational domain is illustrated in Fig. 6.1. The exact solution for the velocity components is given by:

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{c}{\mu_o x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2}$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4}\eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2}$$

where:
$$\eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c} r}{\mu_o x}$$

The ratio $\frac{\mu_0}{\sqrt{c}}$ is constant and equal to 0.0161. The parameter c represents the strength of the jet. It is adjusted so that the value of the velocity (u) is equal to one at (0.2,0), yielding $c = 7.277 \times 10^{-4}$. The expression for the pressure is chosen so that a zero radial traction boundary condition can be imposed exactly at $r = 1$:

$$2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} - p = 0 \quad \text{at} \quad r = 1$$

$$\Rightarrow p = p(x) = 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

The expressions for k , μ_t , and ϵ are:

$$k = 4 \times 10^{-3} \frac{e^{-\frac{r^3}{5}}}{x^2} + 10^{-4}$$

$$\mu_t = 5 \times 10^{-4} e^{-\frac{r^3}{5}} + 5 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon = \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_t}$$

Although they could have been chosen arbitrarily, the previous expressions reproduce the general trends observed in a turbulent free jet. The value of the TKE on the symmetry axis decreases as x increases while μ_t is constant on the axis. Both the TKE and μ_t decrease exponentially with increasing radial distance from the axis. A constant is added to both expressions in order to avoid an ill posed problem due to very small values of k and μ_t . The expression for ϵ is deduced from the definition of μ_t (eq. (6.1)).

Appropriate source terms are obtained by substituting the above expressions for u , v , p , k , ϵ , and μ_t into the Navier-Stokes and turbulence equations. These equations are solved on the domain shown in Fig. 6.1. A symmetry condition is applied on the axis for all variables (note that there is no interpolant for the eddy viscosity). Radial tractions are set to zero at $r = 1$. Dirichlet boundary conditions (exact values) are

imposed everywhere else.

Figure 6.2 shows the evolution of the global error norms (true and estimated) during the adaptive process (since the turbulence variables are solved in logarithmic form, we present the results for the logarithmic variables \mathcal{K} and \mathcal{E}). The errors decrease with mesh refinement and the numerical solution converges towards the exact solution. Furthermore, Figure 6.2 shows that the error estimate approaches the true error with mesh refinement. This indicates that adaptation improves the accuracy of both the solution and the error estimator. The norm of the true error in pressure behaves differently than the other norms on the last adaptive cycle. This is because we do not account for errors in pressure during the remeshing process. In problems such as this one, where the variation of the pressure is minimal throughout the domain, errors in pressure are several orders of magnitude smaller than errors in other variables. Since the adaptive strategy attempts a reduction of the error in each variable, adaptation on pressure increases the number of nodes in regions where the other variables are not “sensitive” to mesh refinement, thus resulting in a waste of computer resources.

The relative error (ratio of the norm of the true error over the norm of the solution) is less than 1% for all variables except the pressure, as shown in Fig. 6.3. The relative error for the pressure is almost equal to one for all adaptive cycles. This is caused by the fact that the exact solution (P_{exact}) is very close to zero. Hence, the error is approximately equal to the numerical solution ($P_h - P_{exact} \approx P_h$) and the relative error is approximately one ($(P_h - P_{exact})/P_h \approx 1$). The efficiency (ratio of the estimated error to the true error) is a good indicator of the accuracy and reliability of the error estimator. Fig. 6.4 shows that the accuracy of the error estimator increases as the mesh is refined. For the last cycle, the efficiency for all variables is superior to 0.9. Hence, not only does adaptive remeshing yield highly accurate numerical solutions, but the accuracy can be quantified with a very reliable estimate of the true error.

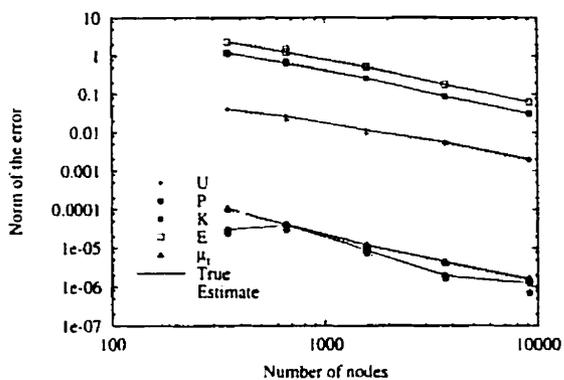


Figure 6.2: True and estimated error norms

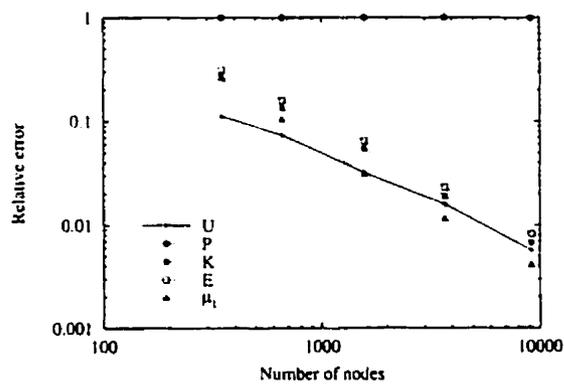


Figure 6.3: Relative errors

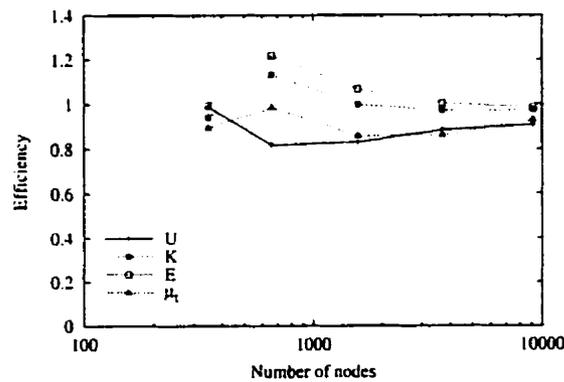


Figure 6.4: Efficiencies

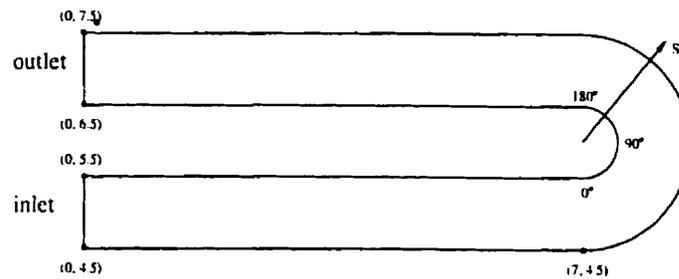
6.5 Flow in a Turnaround Duct

The $k - \epsilon$ model with wall functions using two velocity scales is used to compute the flow of air in an annular, axisymmetric 180-degree turnaround duct. This problem presents the characteristics of cases for which the $k - \epsilon$ model with wall functions are believed to be inadequate, namely:

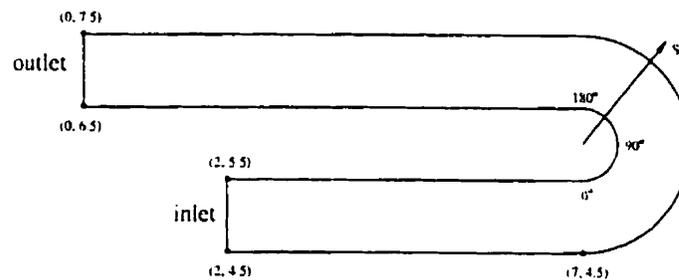
- strong streamline curvature:
- adverse pressure gradients leading to boundary layer separation.

Simulations were performed on two different computational models as shown in Fig. 6.5. Inlet boundary conditions for model #1 correspond to a flat streamwise velocity profile and constant values of turbulence variables. The inlet section is longer than that of model #2 to allow for some development of the flow upstream of the bend. In model #2, the boundary conditions correspond to a partly developed flow. Hence, the inlet section is shorter. These conditions are closer to those observed experimentally. Complete details concerning boundary conditions are provided in the following sections. As will be seen, the inlet conditions have a strong influence on the flow.

It is known from experimental observations [38] that the boundary layer separates from the inner wall somewhere close to the 180-degree location. We show on computational model #1 that separation can be predicted only when the distance between the inner wall of the duct and the computational boundary is adjusted so that the values of y^+ are close to 30. Separation of the boundary layer is also predicted with model #2 but the change of inlet boundary conditions yields a flow that exhibits a very different behavior than what is observed with model #1. The two models



(a) Computational model #1



(b) Computational model #2

Figure 6.5: Computational models for flow in a turnaround duct.

are validated by comparing predictions with experimental observations of tangential velocity profiles at different locations in the bend.

6.5.1 Computational model #1

6.5.1.1 Domain and boundary conditions

Computational model #1 is shown in Fig. 6.5(a). The duct is axisymmetric (*i.e.* symmetric around the x -axis). The flow has a Reynolds number of 10^5 based on the inlet velocity and duct height. The dimensionless inlet boundary conditions are $u = 1$, $v = 0$, $k = 10^{-3}$ and $\epsilon = 9 \times 10^{-4}$. The resulting inlet turbulence Reynolds

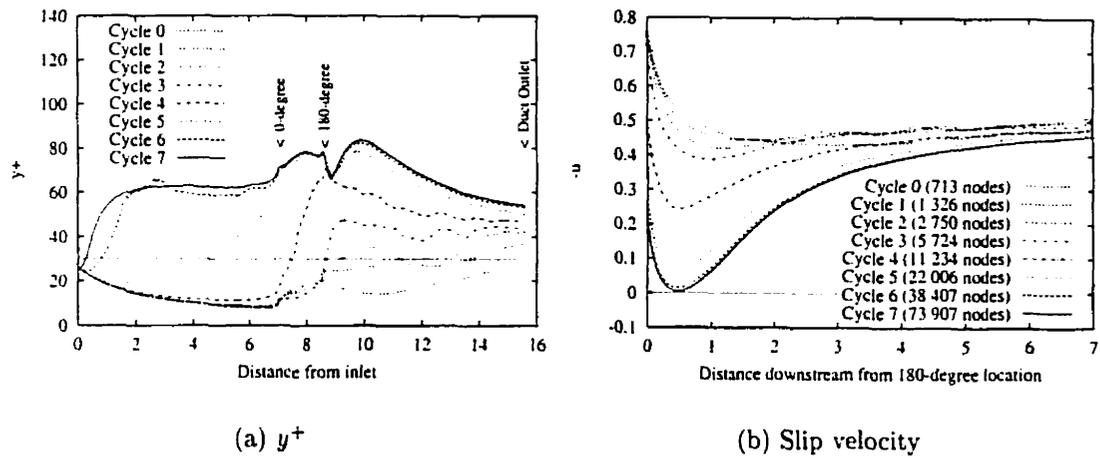


Figure 6.6: y^+ and slip velocity on inner wall for $d = 0.015$ with computational model #1.

number is 10^4 . At the outlet, both v and the normal traction are set to zero. Zero streamwise gradients are imposed on k and ϵ . Wall functions are set with $d = 0.02$ on outer wall.

6.5.1.2 Wall functions with $d = 0.015$ on inner wall

The distance d between the inner wall and the computational boundary is set to 0.015. The resulting values of y^+ for each cycle of the remeshing procedure are plotted in Fig. 6.6(a). As can be seen, dramatic changes occur between cycle 0 and cycle 7. Mesh independence is reached downstream the 0-degree location with cycle 7. Since we are mostly interested in the flow in the bend region, results obtained with cycle 7 can be assessed with confidence. Elsewhere values of y^+ for this cycle remain within the range $30 < y^+ < 100$, with the exception of a short section near the duct inlet. Mesh dependence of y^+ implies that the boundary conditions for the velocity also depend on the mesh since u^+ , and consequently the slip velocity, are also functions of y^+ . The slip velocity is the tangential component of the velocity at the computational

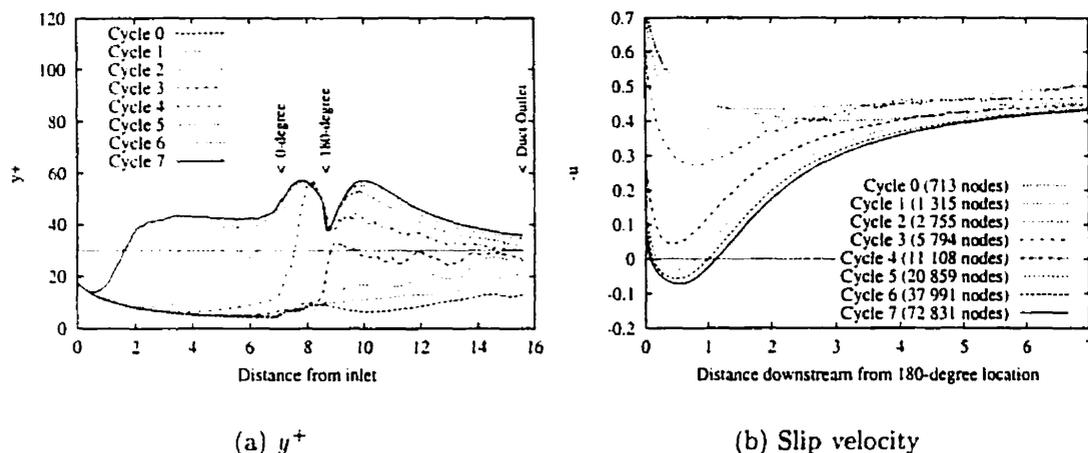
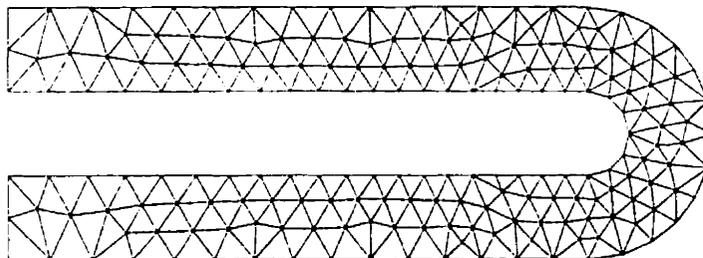


Figure 6.7: y^+ and slip velocity on inner wall for $d = 0.01$ with computational model $\neq 1$.

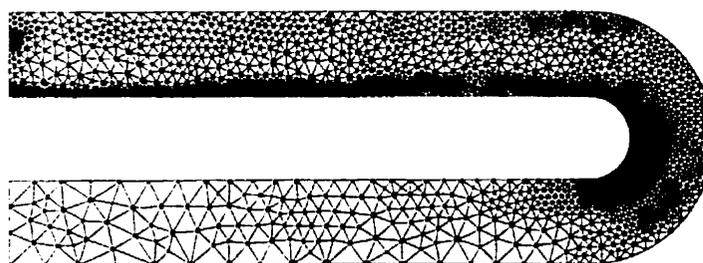
boundary. Plots of the slip velocity on the inner wall boundary downstream the bend are shown in Fig. 6.6(b). Once again, we see that grid independence is only achieved with cycle 7. Downstream of the bend, the slip velocity decreases until it reaches its minimum value at a distance of approximately 0.5 downstream the 180-degree location. However, we observe no separation of the boundary layer (the sign of the slip velocity remains unchanged). This contradicts experimental observations. By reducing the distance between the wall and the computational boundary, it is possible to predict separation, as shown in the next section.

6.5.1.3 Wall functions with $d = 0.01$ on inner wall

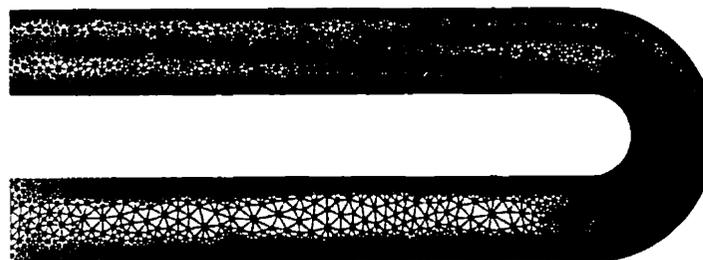
The distance d is now reduced to 0.01. The values of y^+ are lower than in the previous case ($d = 0.015$) but remain above 30 in regions where the solution is grid independent (downstream the 0-degree location), as shown in Fig. 6.7(a). Once again, a strong dependence of y^+ on the mesh is observed. Three meshes of the adaptive process are shown in Fig. 6.8: the initial mesh (cycle 0: 713 nodes), an intermediate



(a) Cycle 0: 713 nodes



(b) Cycle 4: 11 108 nodes



(c) Cycle 7: 72 831 nodes

Figure 6.8: Three meshes of the adaptive process for $d = 0.01$ on inner wall with computational model #1.

mesh (cycle 4: 11 108 nodes), and the final mesh (cycle 7: 72 831 nodes). Note the coarseness of the initial mesh (Fig. 6.8(a)): only two to four elements are found across the duct height. Due to the size of the elements, the geometry of the model is not well reproduced in the bend. However, after four adaptive remeshings, there are very fine elements along the inner wall in the bend, as shown in Fig. 6.8(b). Steep variations of \mathcal{K} , and especially \mathcal{E} , are responsible for mesh refinement in this region. Contours of \mathcal{K} , k , \mathcal{E} , ϵ , and μ_t are shown in Fig. 6.9. Variations of the velocity components are small compared to those of the turbulence variables. Hence, contours of u and v are not presented. Gradients of μ_t (see Fig. 6.9(e)), are responsible for mesh refinement that is starting to take place along the inner wall downstream of the bend. The mesh upstream of the 0-degree location is still very coarse. With the seventh adaptive cycle, trends of the solution can be deduced by looking at the mesh (Fig. 6.8(c)). Because flat profiles of u , k , and ϵ are imposed at the inlet, gradients are weak near the inlet and little error is detected there. Hence, mesh refinement is less pronounced. Contours of \mathcal{K} and \mathcal{E} (Figs. 6.9(a) and 6.9(c)) show the growth of the boundary layers. They occupy approximately 30% of the duct height at the 0-degree location. The location of the edge of the boundary layers is also visible in the mesh. Mesh refinement along the outer wall in the bend and downstream of it is mostly due to the variations of the eddy viscosity (Fig. 6.9(e)). Comparisons of Fig. 6.9(a) and 6.9(b) show that k and its logarithm \mathcal{K} exhibit sharp gradients in different locations. Logarithmic variables provide better resolution of the boundary layer upstream of the bend. They also better capture the variations across the front of μ_t in the bend. This is to be expected as the logarithm discriminates more easily between small values of its argument. This is especially true for very small values, say for k or $\epsilon \ll 1$. This behavior is even more pronounced for the dissipation rate ϵ . Detailed examination of Fig. 6.9(d) revealed that 90 % of the changes in ϵ occur in the first layer of elements along the inner wall in the bend. The variations of \mathcal{E} are much smoother, occurring across 5 to 10 element layers. This is a good example of

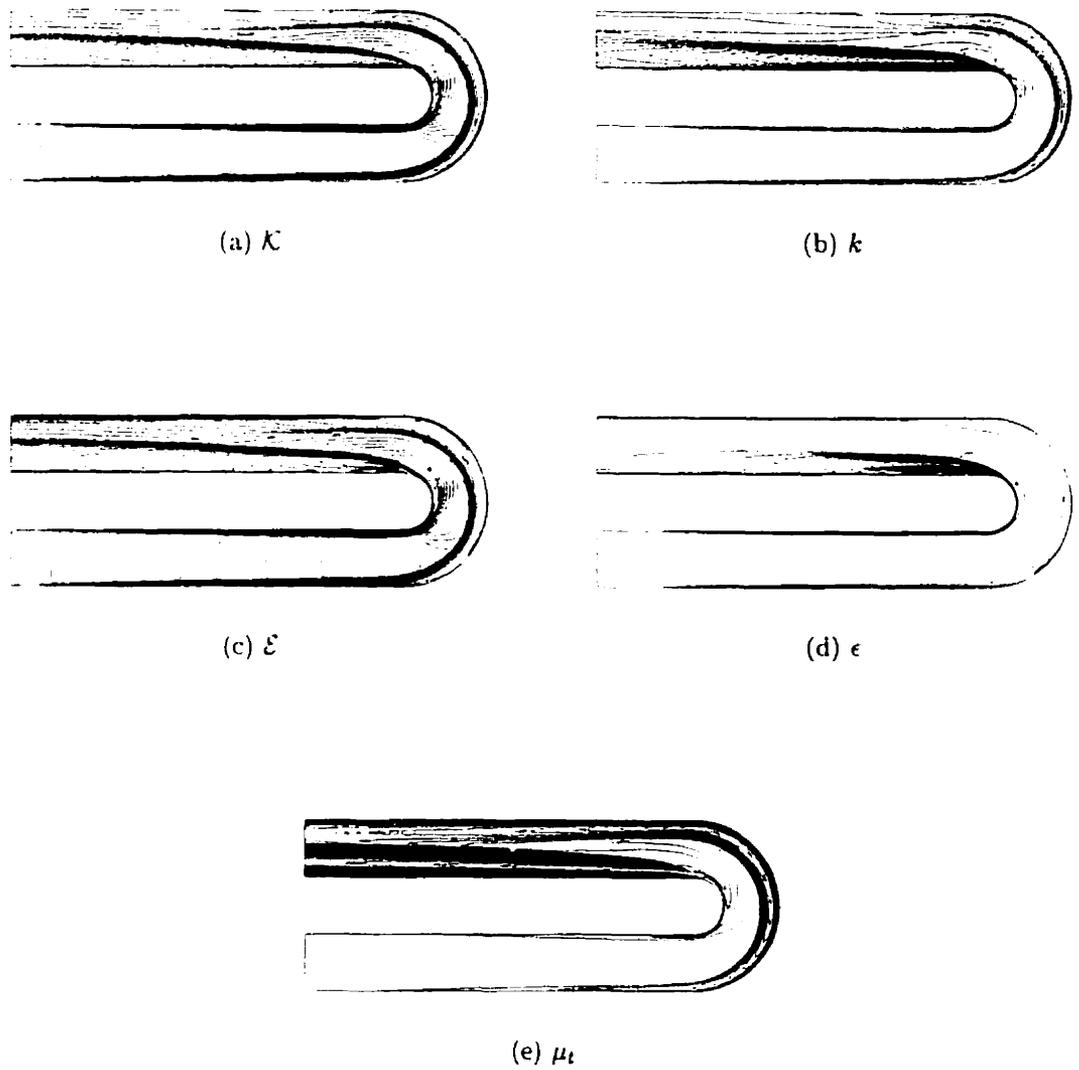


Figure 6.9: Contours for computational model #1 with $d = 0.01$ on inner wall.

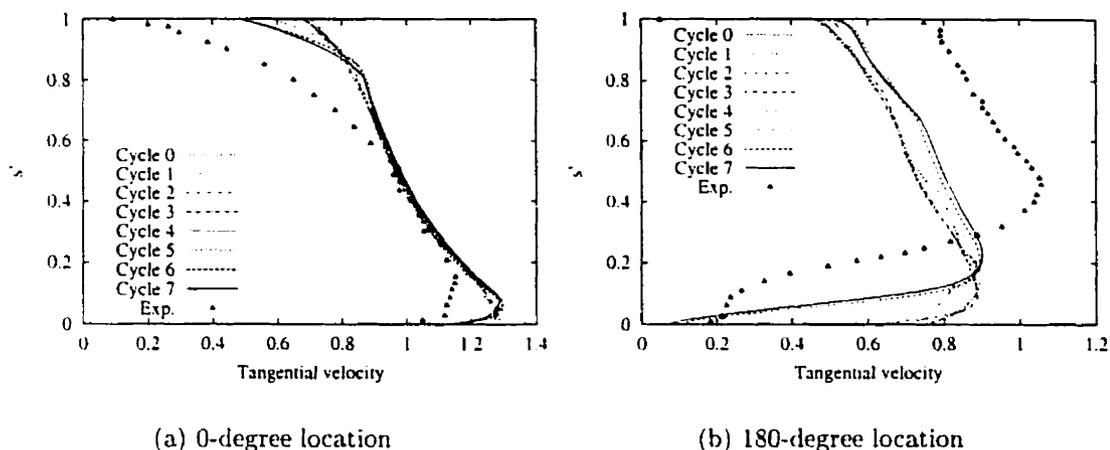


Figure 6.10: Tangential velocity profiles for $d = 0.01$ on inner wall with computational model #1.

the advantages of solving for logarithmic variables. Prohibitively fine meshes would be required to achieve equivalent solutions if one were to solve for k and ϵ directly.

Slip velocity distributions along the inner wall downstream of the bend are presented in Fig. 6.7(b). Besides the evolution of the solution with the mesh, this figure shows that separation is predicted, but only on a sufficiently refined mesh. In other words, an appropriate choice of d allows to predict the separation but on a fine mesh only. Figure 6.10 shows tangential velocity profiles at the 0- and 180-degree locations. Values of the tangential velocity are presented against s' , a dimensionless coordinate which is defined as:

$$s' = \frac{s - s_i}{s_e - s_i}$$

so that $s' = 0$ on inner wall and 1 on outer wall computational boundaries. The experimental values are non-dimensionalized using a reference velocity given by the ratio of the nominal experimental flow rate (5140 cfm) to the duct's inlet section. The evolution of the predictions with adaptive remeshing is clearly seen, especially at the 180-degree location (Fig. 6.10(b)). The variation of the slip velocity on the inner wall

boundary ($s' = 0$) between the first and the last cycle is very significant. This further emphasizes the importance of achieving grid independent boundary conditions. Finally, even though predictions seem to improve with remeshing, the discrepancies with experimental values remain large. In order to improve the agreement between the predictions and the measured values, computational model #2 is used.

6.5.2 Computational model #2

Sharma and Ostermier [38] made the following observation: at a distance equal to five duct heights upstream of the 0-degree location, the velocity and turbulence intensity profiles indicate the presence of boundary layers which cover 40% of the duct height. This observation is used to define the inlet boundary conditions of computational model #2.

6.5.2.1 Domain and boundary conditions

Computational model #2 is shown in Fig. 6.5(b). The inlet is now located at $x/H = 2$. Inlet boundary conditions for u , k , and ϵ are generated numerically by solving the flow in a straight annular duct having the same radii as the inlet of the turnaround duct. Computations are performed with the same inlet boundary conditions as computational model #1. Profiles of u , k , and ϵ are taken at a location downstream the inlet where the boundary layers cover 40% of the duct height. These profiles are used as inlet boundary conditions in computational model #2, and are in agreement with Sharma and Ostermier's observation. Elsewhere boundary conditions are identical to computational model #1. The distance d in wall functions is set to 0.01 on inner wall and 0.02 on outer wall.

6.5.2.2 Results

Distributions of y^+ and of the slip velocity are plotted in Fig. 6.11.

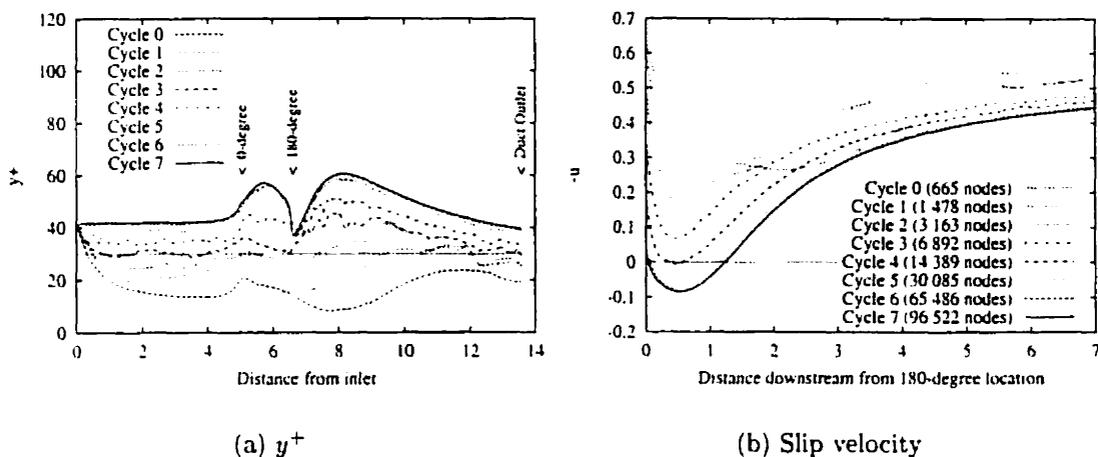


Figure 6.11: y^+ and slip velocity on inner wall for computational model #2.

Grid independence is achieved on the last cycle and the values of y^+ (Fig. 6.11(a)) are everywhere above 30, even at the duct inlet. The evolution of the slip velocity with the mesh (Fig. 6.11(b)) follows a pattern quite similar to that obtained with computational model #1 (Fig. 6.7(b)). Once again, separation is predicted at the exit of the bend. Grid independence of the solution is confirmed by the fact that the slip velocity distributions for cycle 6 and cycle 7 are superimposed. Tangential velocity distributions at the 0- and 180-degree locations are shown in Fig. 6.12. As with computational model #1 (Fig. 6.10(b)), the effect of the wall boundary conditions is very important at the 180-degree location (Fig. 6.12(b)). However, it appears that the tangential velocity profiles obtained with computational model #2 are in better agreement with experimental observations. This topic will be discussed in more detail in the next section. We now examine the overall effect of the modification of the inlet boundary conditions on the solution.

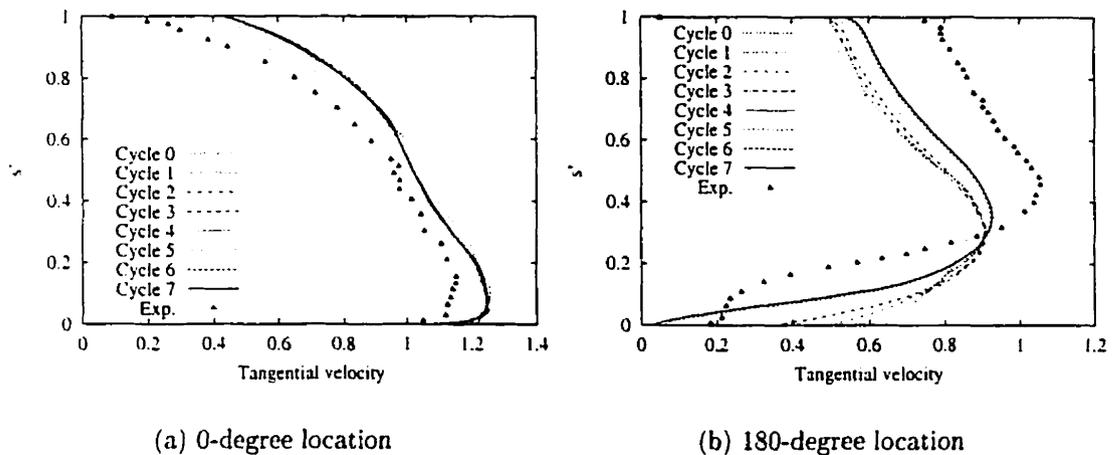
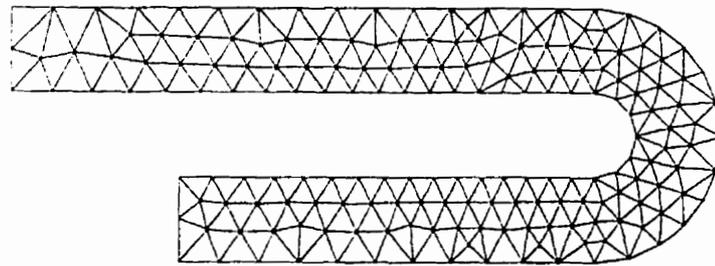
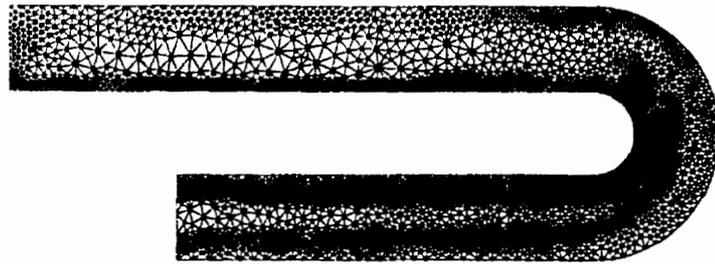


Figure 6.12: Tangential velocity profiles for computational model #2.

Figure 6.13 presents meshes obtained for computational model #2. They are contrasted with those of Fig. 6.8. While the meshes for cycle 0 are very similar, marked differences are observed on cycles 4 and 7. Model #2 results in more refinement near the edges of the wall boundary layers upstream of the bend. Furthermore, the band of refinement in the core of the bend has shifted closer to the center of the bend. Finally, the bands of refinement downstream of the bend are less pronounced. These differences in the meshes can be directly linked to changes in the solution field. Figure 6.14(a) shows tight concentration of contours of \mathcal{K} in the core of the flow upstream of the bend. This is due to the boundary layer explicitly incorporated in the inlet boundary conditions. The gradients of velocity triggers the production of TKE which result in the clustering of contours. Gradients of \mathcal{K} are also smaller downstream of the bend. Similar trends are observed for \mathcal{E} . Significant differences are observed in the contours of the eddy viscosity. Again, the effect of the inlet boundary layer results in clustering of contours upstream of the bend. In the bend itself, we observe the presence of larger gradients of μ_t near the inner wall while the front in the core has shifted closer to the center of the duct. Downstream of the bend, gradients of μ_t are stronger near the outer wall. The diagonal band of μ_t



(a) Cycle 0: 665 nodes



(b) Cycle 4: 14 389 nodes



(c) Cycle 7: 96 522 nodes

Figure 6.13: Three meshes of the adaptive process for computational model #2.

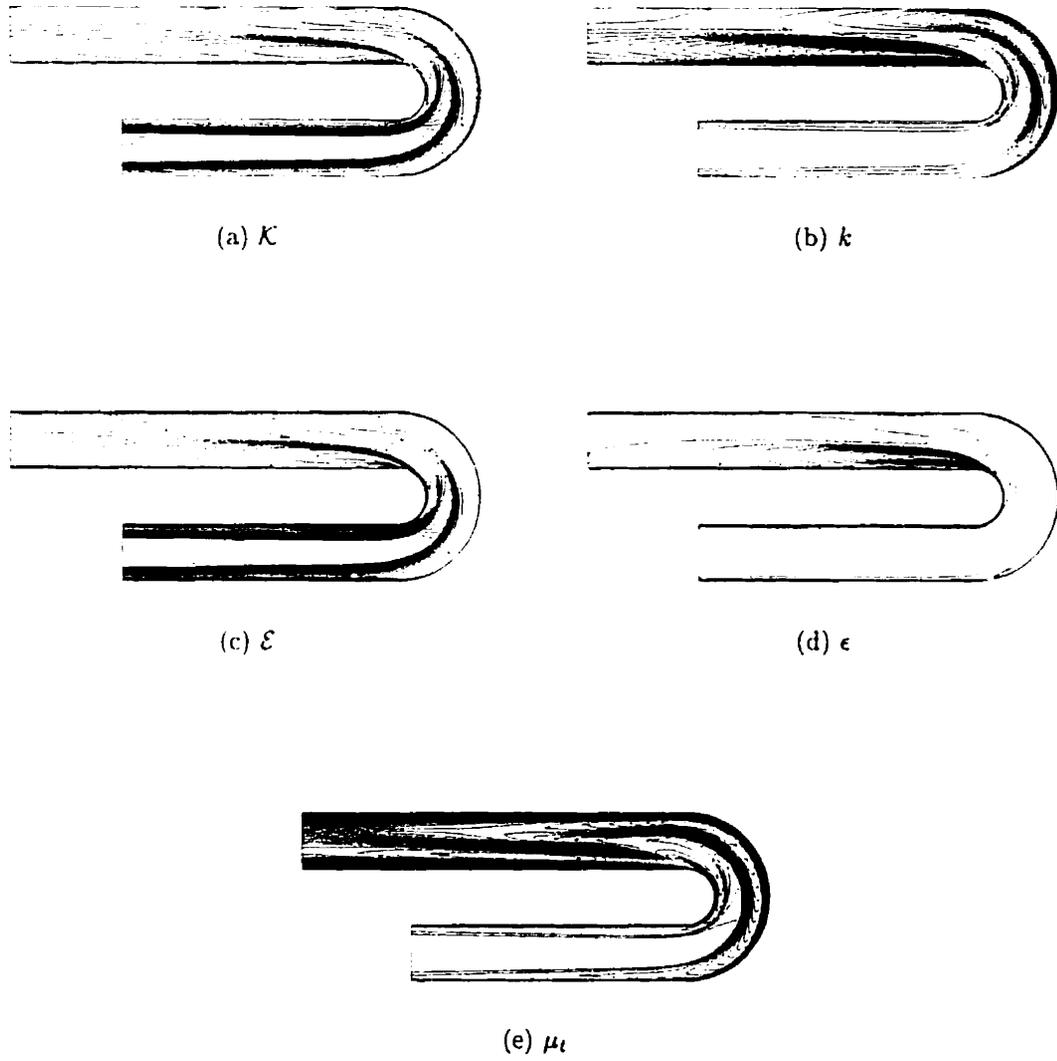
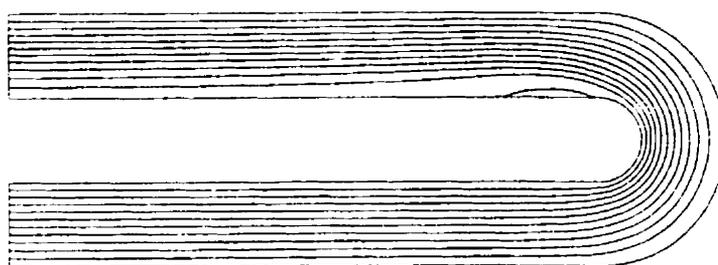


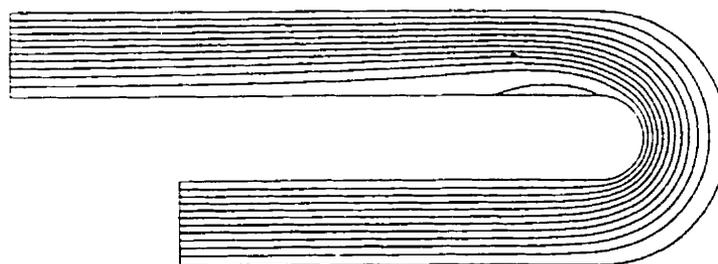
Figure 6.14: Contours for computational model #2.

in model #1 has nearly disappeared, resulting in a smoother distribution of eddy viscosity near the outflow.

Finally, streamlines for both models are shown in Fig. 6.15. The extent of the separation bubble is clearly illustrated in both cases. With model #2, the bubble is bigger and separation occurs closer to the 180-degree location. The distribution of the streamlines also indicates the distribution of the flow. At the inlet of model #2, the streamlines are closer together in the center of the duct where the core of the flow is located. In the bend, the core of the flow is closer to the inner wall with model #2 than with model #1.



(a) Computational model #1



(b) Computational model #2

Figure 6.15: Streamlines.

6.5.3 Validation

Tangential velocity profiles were measured by Sharma and Ostermier [38] at six locations in the duct: at $x/H = 2$ and in the bend at the 0-, 51-, 103-, 154-, and 180-degree locations. The experimental results are used to assess the computational models.

6.5.3.1 Experimental flow rates

Before comparing our predictions to the experimental results, we verified the flowrates measured at each station. In theory, the flowrates should be equal. Table 6.2 shows that they differ by as much as 12% from the nominal flow rate of 5140 cfm given by the authors.

Tableau 6.2: Experimental flow rates

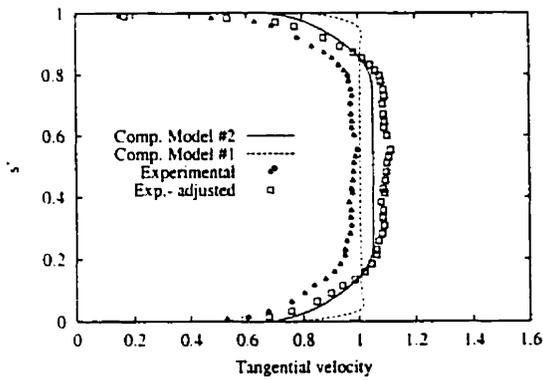
Location	Flow rates (cfm)
$x/H = 2$	4592
0-degree	4513
51-degree	4813
103-degree	4987
154-degree	5269
180-degree	5629

Since experiments were performed at a low Mach number ($Ma = 0.1$), the effects of compressibility should be negligible and do not explain the inconsistency of the flow rates presented in Table 6.2. We took it upon ourselves to adjust the measured data of Sharma and Ostermier to ensure that the flow rate is the same at all locations. This was achieved by multiplying the measured values of the velocity at a given station by

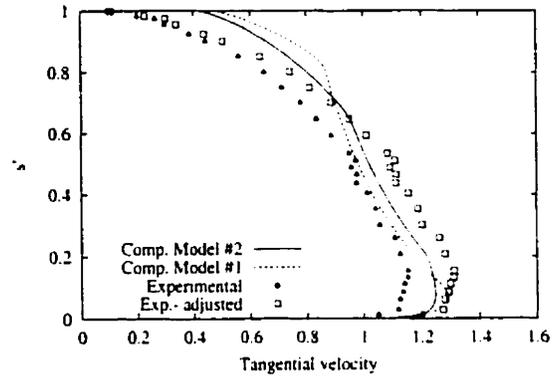
the ratio of the nominal flow rate (5140 cfm) to the flow rate for that particular station (taken from Table 6.2). This guarantees that the adjusted velocity profiles all result in a flow rate of 5140 cfm. The adjusted velocity values are then non-dimensionalized by dividing them by the reference velocity. The latter is given by the ratio of the nominal flow rate to the duct's inlet section. The average value of the velocity at the duct's inlet is thus equal to one for both the dimensionless experimental observations and the numerical predictions. For completeness, predictions are compared to both adjusted and unadjusted measurements.

6.5.3.2 Assessment of the computational models

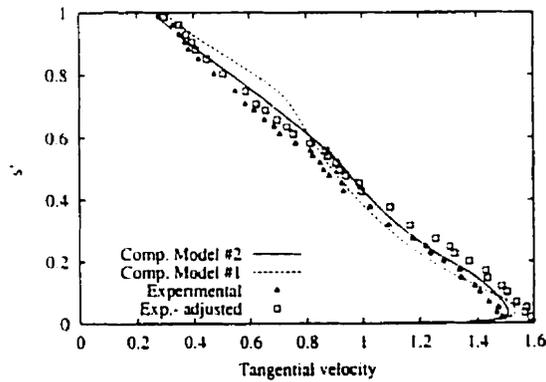
Grid independent numerical predictions of the tangential velocity obtained on cycle 7 with computational models #1 and #2 are presented in Fig. 6.16. The overall impression is that predictions obtained with model #2 are in better agreement with adjusted experimental results than those obtained with model #1. Even though the velocity profile imposed as a boundary condition for model #2 is very close to experimental data (Fig. 6.16(a)), there is a noticeable difference close to the outer wall where the slip velocity is high compared to the experimental value. An attempt to reduce it was made by setting $d = 0.012$ in the wall functions for the outer wall. This change resulted in lower values of y^+ along the outer wall but the effect on the values of the slip velocity was insignificant. For example, the slip velocity at the outer wall at $x/H = 2$ was reduced to approximately 0.6 and at the 180-degree location, profiles of the tangential velocity profiles obtained with $d = 0.02$ and $d = 0.012$ were almost identical. It was not possible to further reduce the value of d without lowering y^+ to values below 30 along the outer wall. At the 51-degree location, the first station in the bend (Fig. 6.16(c)), predictions obtained with computational model #2 are in excellent agreement with the experimental values. At the 103- and 154-degree



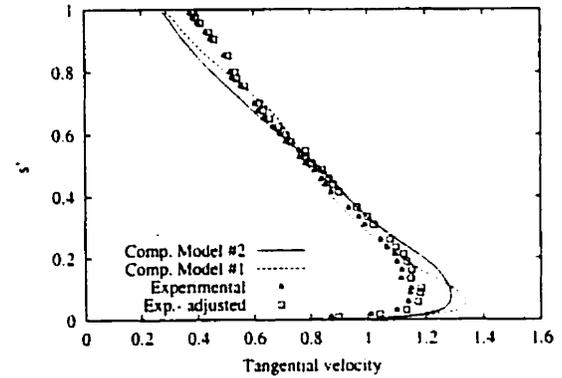
(a) $x/H = 2$.



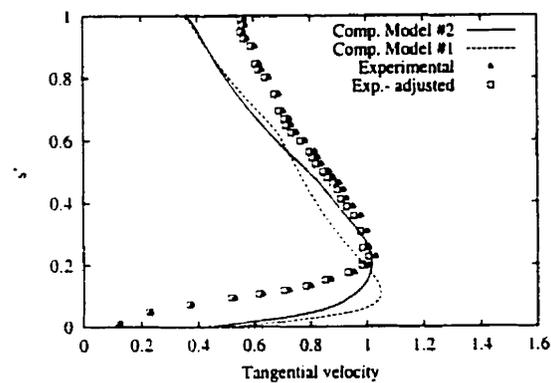
(b) 0-degree location.



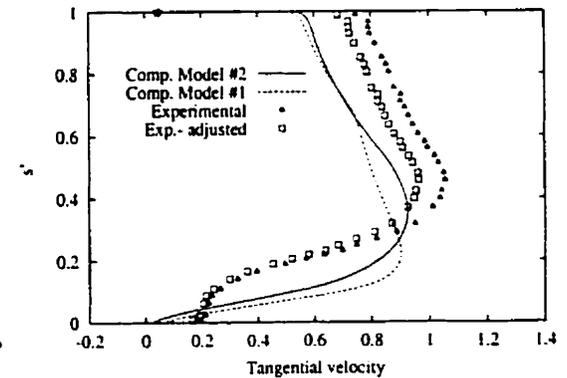
(c) 51-degree location.



(d) 103-degree location.



(e) 154-degree location.



(f) 180-degree location.

Figure 6.16: Experimental and predicted tangential velocity profiles.

locations (Fig. 6.16(d) and 6.16(e)), the models underestimate the velocity tangent to the outer wall and overestimate the velocity tangent to the inner wall. At the 180-degree location (Fig. 6.16(f)), the main difference between the predictions of the two models is the location of the maximum velocity. With computational model #2, the maximum tangential velocity is located farther away from the inner wall and closer to experimental values than with computational model #1. This trend was already visible at the 154-degree location. Both models show incipient separation from inner wall ($s' = 0$) at the 180-degree location. Even though Sharma and Ostermier provide no details concerning the location and the length of the recirculation zone, it is stated that:

“There is definite indication that the flow has separated at the 180-degree measurement location. This occurs at the inner wall and is observed as an insignificant change in the velocity with distance from the inner wall. Since the hot-wire technique is unable to resolve recirculating flows, it is quite possible that the probe is in fact in its own probe-support-generated wake.” [38]

The last statement certainly adds uncertainty to the accuracy of the experimental data.

6.6 Conclusion

This paper has presented an application of adaptive remeshing to predict turbulent flow in a turnaround duct using the $k - \epsilon$ model with wall functions. The adaptive remeshing algorithm was verified on an axisymmetric problem with a closed form solution. It was shown that adaptivity yields highly accurate and grid independent solutions. The error estimator, whose accuracy improves with mesh refinement, provides a very reliable estimate of the true error.

Simulations of the flow in an annular axisymmetric turnaround duct with the $k - \epsilon$ model of turbulence and wall functions have shown the strong dependence of the wall function boundary conditions on the mesh. As many as seven adaptive cycles were required in order to achieve mesh independence of the slip velocity. Separation of the boundary layer from the inner wall of the duct at the exit of the bend can be predicted only if the distance d in the wall functions on the inner wall is chosen so that the resulting values of y^+ are close to 30 and if the mesh is sufficiently fine near the wall. The importance of achieving grid independent solutions is demonstrated here again as separation is not predicted on coarse meshes, even if d is chosen appropriately: four to five adaptive cycles are required before separation is observed.

Simulations from two computational models of the turnaround duct were validated by comparing grid independent predictions of the tangential velocity profiles with experimental data. The first model uses flat profiles of u , k , and ϵ at the inlet while the second uses partially developed profiles. The inflow boundary conditions have a considerable effect on the solution. Noticeable changes in the structure of the flow were observed when the second model was used. In this case, the core of the flow was closer to the inner wall in the bend, resulting in higher gradients of the solution near the inner wall. Results obtained with the second model are in better agreement with experimental data, although the accuracy of the latter may be questionable.

6.7 Acknowledgments

This work was supported in part by NSERC, FCAR and AFOSR grant F49620-96-1-0329.

CONCLUSION

La contribution de ce mémoire se situe au niveau de l'application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements turbulents. Tous les calculs ont été faits en utilisant le modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec des lois de paroi comme conditions frontières sur les surfaces solides.

Nous avons d'abord étudié le cas d'un écoulement externe sur une plaque plane avec et sans transfert thermique. Les prédictions du coefficient de friction local $C_f(x)$ et du nombre de Stanton le long de la plaque ont été soumis pour publication sous le titre "On the judicious use of the $k - \epsilon$ Model, Wall Functions and Adaptivity". Nous nous sommes ensuite intéressés à un écoulement interne dans une conduite annulaire axisymétrique coudée à 180 degrés pour lequel des données expérimentales sont disponibles. Les résultats d'intérêt ont été soumis pour publication sous le titre "Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity". Les deux articles montrent que le remaillage adaptatif est un outil efficace de contrôle de la qualité des solutions. La vérification de l'algorithme de remaillage adaptatif sur un problème possédant une solution analytique démontre que cette technique permet d'obtenir des résultats précis et indépendants du maillage. L'estimateur d'erreur, dont la précision augmente avec le raffinement du maillage, procure une estimation très juste de l'erreur réelle. Avec des solutions indépendantes du maillage et une estimation fiable de l'erreur, il est possible de porter un jugement éclairé quant à la validité des résultats et du modèle de simulation choisi.

L'utilisation d'un modèle de turbulence simple avec des lois de paroi permet d'obtenir des résultats d'une surprenante qualité. Il importe cependant que le modèle de simulation soit défini de façon à faire ressortir les caractéristiques propres à l'écoulement

turbulent. La définition correcte du modèle de simulation implique d'abord le choix judicieux du nombre de Reynolds de la turbulence. Celui-ci doit être suffisamment élevé afin de refléter la vraie nature de l'écoulement turbulent. Le type de lois de paroi retenu joue également un rôle prépondérant dans la qualité des prédictions. Les lois de paroi à deux échelles de vitesse permettent d'obtenir de meilleurs résultats parce qu'une des échelles est déterminée directement à partir du niveau de turbulence. Les prédictions du coefficient de friction local et du nombre de Stanton s'en trouvent grandement améliorées.

Lors de la définition de la géométrie du domaine de calcul, les caractéristiques et la structure du modèle de turbulence doivent être prises en considération. Le modèle $k - \epsilon$ contient un terme de production d'énergie cinétique de la turbulence dont l'importance augmente en présence de forts gradients de vitesse. Les prédictions de $C_f(x)$ et $St(x)$ sur une plaque plane se comparent favorablement aux meilleures corrélations disponibles dans la littérature lorsqu'on incorpore l'épaisseur de la plaque dans le modèle de simulation. Dans ce cas, le point de stagnation observé au bord d'attaque est reproduit par le modèle, déclenchant ainsi la production d'énergie cinétique de turbulence. Les niveaux de k prédits près du bord d'attaque sont alors réalistes.

Pour l'écoulement complexe dans une conduite annulaire coudée à 180 degrés, plusieurs cycles de remaillage adapté sont nécessaires pour produire des conditions frontières indépendantes du maillage le long des parois. La séparation de la couche limite de la paroi à l'intérieur du virage peut être prédite **seulement si** la distance d dans la loi de paroi est ajustée pour que les valeurs de y^+ résultantes soient proches de 30 et si le maillage est suffisamment raffiné près de la paroi. L'importance d'obtenir des solutions indépendantes du maillage est une fois de plus mise en évidence.

Tout le concept de solution indépendante du maillage ouvre une possible avenue

de recherche: la validation de modèles de turbulence. Ayant à notre disposition un moyen pour contrôler et quantifier les erreurs de discrétisation, il devient possible d'évaluer avec assurance la performance de différents modèles sur un problème donné. Avec des solutions indépendantes du maillage, les différences observées entre les résultats numériques et expérimentaux ne sont attribuables qu'aux choix de modélisation. Une autre voie de recherche possible et pertinente consisterait à simuler des écoulements tridimensionnels et transitoires. Nous avons d'ailleurs débuté le premier chapitre du mémoire par: "Les écoulements turbulents sont de nature non-stationnaire et tridimensionnelle". Les exigences en termes de ressources informatiques seraient évidemment beaucoup plus grandes mais pas nécessairement hors de portée. Des techniques comme la résolution en variables logarithmiques permettent d'obtenir des solutions précises sur des maillages grossiers. La génération de maillages étirés permettrait également de réduire significativement les ressources informatiques nécessaires. Cette technique n'est pas implantée en ce moment et l'investigation des possibles façons de le faire représente assurément un autre sujet de recherche intéressant.

RÉFÉRENCES

- [1] REDDY, J. N. et GARTLING, D. (1994). *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, Inc.
- [2] HINZE, J. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill.
- [3] TENNEKES, H. et LUMLEY, J. (1972). *A First Course in Turbulence*. MIT Press.
- [4] SCHLICHTING, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Inc., seventh edition.
- [5] RODI, W. (1993). *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A State of the Art Review*. IAHR Monograph. A.A. Balkema Publishers, third edition.
- [6] LAUNDER, B. E. et SPALDING, D. B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flows. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 3, 269-289.
- [7] ARPACI, V. S. (1997). *Microscales of Turbulence: Heat and Mass Transfer Correlations*. Gordon & Breach Publishing Group.
- [8] BATCHELOR, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- [9] CURRIE, I. G. (1993). *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, second edition.
- [10] REDDY, J. N. et ODEN, J. T. (1982). *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer-Verlag, second edition.

- [11] GUNZBURGER, M. D. (1989). *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: A Guide to Theory, Practice & Algorithms, Computer science & Scientific Computing*. Academic Press.
- [12] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D. (1992). Adaptive Remeshing for Viscous Incompressible Flows. *AIAA Journal*, 30(8), 1986–1992.
- [13] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D. (1992). A Fast Adaptive Finite Element Scheme for Viscous Incompressible Flows. *AIAA Journal*, 30(11), 2677–2682.
- [14] PELLETIER, D. et HÉTU, J.-F. (1993). An Adaptive Finite Element Method for Thermal Hydraulics Problems. Dans *AIAA 31st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, January 11-14 1993. AIAA Paper 93-0920.
- [15] HÉTU, J.-F. (1991). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [16] ILINCA, F. (1996). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [17] TURGEON, É. (1997). *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques*. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [18] PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1997). Adaptive Remeshing for the $k - \epsilon$ Model of Turbulence. *AIAA Journal*, 35(4), 640–646.
- [19] IGNAT, L., PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1998). Adaptive Computations of Turbulent Forced Convection. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 34, 847–871.
- [20] ILINCA, F., PELLETIER, D. et IGNAT, L. (1998). Adaptive Finite Element Solution of Compressible Turbulent Flows. *AIAA Journal*, 36(12), 2187–2194.

- [21] TURGEON, É. et PELLETIER, D. (1998). Computation of Jet Impingement Heat Transfer by an Adaptive Finite Element Algorithm. Dans *7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference*, Albuquerque, NM. June 15-18 1998. AIAA Paper 98-2585.
- [22] HAROUTUNIAN, V. (1989). *Turbulent Flows with FIDAP*. Fluid Dynamics International. Seminar Notes.
- [23] ILINCA, F. et PELLETIER, D. (1998). Positivity Preservation and Adaptive Solution for the $k - \epsilon$ Model of Turbulence. *AIAA Journal*, 36(1), 44-51.
- [24] HUGHES, T. J. R. et BROOKS, A. N. (1979). A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion. Dans HUGHES, T. J. R., editor. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, volume 34. pages 19-35. ASME.
- [25] BROOKS, A. N. et HUGHES, T. J. R. (1982). Streamline Upwind / Petrov - Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 32, 199-259.
- [26] HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. et HULBERT, G. M. (1989). A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin / Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 73, 173-189.
- [27] CROUZEIX, M. et RAVIART, P. (1973). Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O.*, 3, 77-104.
- [28] FORTIN, A. et GARON, A. (1998). *Les éléments finis: de la théorie à la pratique*. Notes du cours MTH6207, École Polytechnique de Montréal.

- [29] PELLETIER, D. (1999). Notes du cours MEC6210. École Polytechnique de Montréal.
- [30] SCHETZ, J. A. (1993). *Boundary Layer Analysis*. Prentice-Hall Inc.
- [31] CHABARD, J. P. (1991). *Projet N3S de Mécanique des Fluides - Manuel Théorique de la version 3*. Technical Report EDF HE-41/91.30B. Électricité de France.
- [32] ARPACI, V. et LARSEN, P. (1984). *Convection Heat Transfer*. Prentice-Hall.
- [33] KAYS, W. et CRAWFORD, M. (1980). *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill Book Company, second edition.
- [34] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The Superconvergent Patch Recovery and *a posteriori* Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique. *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **33**, 1331-1364.
- [35] TURGEON, É., PELLETIER, D. et IGNAT, L. (1998). Effects of Adaptivity on Various Finite Element Schemes for Turbulent Heat Transfer and Flow Predictions. Dans *AIAA 36th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 12-15 1998. AIAA Paper 98-0853.
- [36] WHITE, F. M. (1974). *Viscous Flow*. McGraw-Hill Inc.
- [37] SCHULTZ-GRUNOW, F. (1941). *New Frictional Resistance Law for Smooth Plates*. NACA TM 986.
- [38] SHARMA, L. K. et OSTERMIER, B. J. (1987). Flowfield Characteristics of an Axisymmetric 180-degree Turnaround Duct. Dans *AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, Honolulu, Hawaii, June 8-10 1987. AIAA Paper 87-1357.

- [39] PELLETIER, D. (1999). Adaptive Finite Element Computations of Complex Flows. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 31, 189–202.
- [40] TURGEON, É., PELLETIER, D. et IGNAT, L. (1999). Compressible Heat Transfer Computations by an Adaptive Finite Element Method. Dans *AIAA 37th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 11-14 1999. AIAA Paper 99-0875.
- [41] ROACHE, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers.
- [42] LAUNDER, B. E. (1991). Current Capabilities for Modeling Turbulence in Industrial Flows. *Applied Scientific Research*, 48, 247–269.
- [43] SMITH, D. W. et WALKER, J. H. (1959). *Skin-Friction Measurements in Incompressible Flow*. Technical Report R-26, NASA.