

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**PROCESSUS DE DIFFUSION :  
OUTILS DE MODÉLISATION, DE PRÉVISION ET DE CONTRÔLE**

**RICHARD LABIB  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
FÉVRIER 2000**

**© Richard Labib, 2000.**



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53536-3

Canada

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**Cette thèse intitulée :**

**PROCESSUS DE DIFFUSION :  
OUTILS DE MODÉLISATION, DE PRÉVISION ET DE CONTRÔLE**

**présentée par : LABIB Richard**

**en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor**

**a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :**

**M. ROUSSELLE Jean, Ph.D., président**

**M. LEFEBVRE Mario, Ph.D., membre et directeur de recherche**

**M. ADJENGUE Luc D., Ph.D., membre**

**M. SAAD Maarouf, Ph.D., membre externe**

Aux joueurs de l'équipe de soccer du Québec,  
vainqueurs des championnats canadiens

## REMERCIEMENTS

Je tiens à souligner la contribution indéniable du CRSNG qui m'a accordé une bourse à incidence industrielle me permettant de mener à terme ma thèse de doctorat. Je tiens également à remercier monsieur Hau Ta Trung, représentant de la société Alcan, qui a cru en mes capacités et qui a accepté de me soutenir dans mon cheminement en contribuant généreusement à la bourse industrielle du CRSNG.

J'aimerais remercier particulièrement le docteur Jean Rousselle qui fut le principal artisan de l'octroi de ma bourse. Il a été constamment à mes côtés, toujours prompt à m'offrir ses services et m'épaulant tout au long de ma recherche en me prodiguant de judicieux conseils.

Je voudrais enfin rendre hommage à une personne très spéciale. Il arrive très rarement dans la vie d'un homme que l'on rencontre un être qui va marquer à jamais notre existence. Mon directeur de recherche, le docteur Mario Lefebvre fait partie de ces individus remarquables. Il a su, par son professionnalisme et sa rigueur au travail, m'inculquer les éléments pour devenir éventuellement un bon professeur d'université. Toujours présent et inlassablement disponible, il a été pour moi un modèle de premier plan, duquel j'ai constamment appris tant au niveau académique qu'au niveau humain. En effet, il est devenu au fil des ans, un ami sincère qui a su me reconforter dans les moments difficiles et m'encourager lors de périodes de recherche infructueuses. Je me sens extrêmement privilégié d'avoir eu monsieur Lefebvre comme tuteur et mentor, et j'espère sincèrement pouvoir dans le futur être à la hauteur de ses attentes.

## RÉSUMÉ

On considère des processus de diffusion définis par des systèmes d'équations différentielles stochastiques afin de modéliser, prévoir et contrôler divers phénomènes physiques.

On généralise, en premier lieu, des problèmes de contrôle optimal associé au processus d'usure d'une machine en envisageant un critère de performance qui tient compte du facteur de risque attribué à l'opérateur de la machine. La valeur du contrôle optimal est obtenue pour des modèles à deux et à trois dimensions à partir de l'espérance mathématique reliée à un processus non contrôlé. Des exemples explicites sont résolus.

Ensuite, des modèles mathématiques impliquant des processus de diffusion destinés à prévoir des débits d'eau sont évalués à partir de données recueillies sur le bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean situé au nord-est du Québec. Il s'ensuit qu'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré donne des prévisions de débits plus précises que le modèle déterministe présentement utilisé, et ce, pour des estimés à un jour d'avance.

Enfin, on évalue la validité d'une nouvelle structure neuronale destinée à être une partie intégrante de réseaux de neurones à plusieurs couches. Cette architecture originale est basée sur des hypothèses biologiques où l'on retrouve des processus de diffusion. On constate que ce nouvel élément est capable de distinguer des classes qui ne sont pas séparables linéairement. En particulier, seulement six paramètres suffiront à résoudre le problème célèbre du « *ou exclusif* ».

## ABSTRACT

Diffusion processes defined by systems of stochastic differential equations are considered to model, forecast and control different physical phenomena.

We begin by generalizing optimal control problems for wear models of a machine by considering a performance criterion that takes the risk sensitivity of the optimizer into account. The optimal control is obtained for two and three-dimensional models from a mathematical expectation for a related uncontrolled process. Explicit solutions are presented.

Next, in order to forecast drainage basin runoff, mathematical models involving diffusion processes are tested against hydrological data obtained from the hydrographic basin of the Saguenay-Lac-St-Jean, located in northeastern Quebec. An integrated Ornstein-Uhlenbeck process is found to give better results than a deterministic model presently in use for one-day ahead estimates.

Finally, we investigate the validity of a new structure for a single neuron, that will eventually be used in multilayer neural networks to perform nonlinear pattern recognition. This new architecture is inspired by biological assumptions involving diffusion processes. It is clearly established that only six parameters are sufficient to solve the *XOR* problem.

# TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS .....	v
RÉSUMÉ .....	vi
ABSTRACT .....	vii
TABLE DES MATIÈRES .....	viii
LISTE DES TABLEAUX .....	ix
LISTE DES FIGURES .....	x
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 : De l'usure et des hommes .....	9
1.1 Énoncé du problème .....	9
1.2 Contrôle optimal de processus d'usure .....	16
1.3 Solutions explicites .....	25
1.4 Généralisation .....	32
CHAPITRE 2 : Et la lumière fut .....	44
2.1 Énoncé du problème .....	44



2.2 Modèles de diffusion .....	45
2.3 Ornstein-Uhlenbeck intégré .....	51
2.4 Le modèle PREVIS .....	54
2.5 Résultats .....	57
2.6 Exemple de contrôle optimal .....	69
CHAPITRE 3 : Le quantron .....	75
3.1 Motivation .....	75
3.2 Nouveau neurone .....	82
3.3 Résolution de problèmes .....	91
CONCLUSION .....	98
BIBLIOGRAPHIE .....	101

## **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 2.1 : Définition des paramètres du modèle PREVIS .....	55
Tableau 2.2 : Critères de performance pour les modèles, 1993 .....	63
Tableau 2.3 : Critères de performance pour les modèles, 1994 .....	63
Tableau 2.4 : Critères de performance pour les modèles, 1995 .....	64

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Différences secondes des débits et diagramme de probabilité normale, Mistassibi, 1995.....	46
Figure 2.2 : Débits prévus vs débits observés, 1993.....	60
Figure 2.3 : Débits prévus vs débits observés, 1994.....	61
Figure 2.4 : Débits prévus vs débits observés, 1995.....	62
Figure 2.5 : Débits prévus vs débits observés pour un horizon de sept jours et critères de performance, Mistassibi, 1993.....	66
Figure 2.6 : Débits prévus vs débits observés pour un horizon de sept jours et critères de performance, Mistassibi, 1994.....	67
Figure 2.7 : Débits prévus vs débits observés pour un horizon de sept jours et critères de performance, Mistassibi, 1995.....	68
Figure 3.1 : La cellule neuronale et le perceptron correspondant.....	78
Figure 3.2 : Le problème du <i>XOR</i> et le perceptron à une couche.....	79
Figure 3.3 : Résolution du problème du <i>XOR</i> : pas moins de sept paramètres et une couche cachée.....	80
Figure 3.4 : Schéma illustrant les principaux éléments intervenant dans la transmission de l'information aux abords d'une synapse ..	82

Figure 3.5 : Représentation de la variation du niveau de polarisation survenant dans une synapse excitatrice ( $w$ positif) et inhibitrice ( $w$ négatif) résultant d'un seul potentiel d'action....	88
Figure 3.6 : Le quantron.....	91
Figure 3.7 : Configuration non linéaire identifiée par un seul quantron.....	93
Figure 3.8 : Domaine non connexe identifié par un seul quantron.....	94
Figure 3.9 : Variations non linéaires identifiées par un seul quantron.....	95
Figure 3.10 : Configuration non linéaire identifiée par un réseau de quantrons à deux couches comprenant un total de dix-huit paramètres.....	96

## INTRODUCTION

« *Prévoir* le futur... ». Ce simple énoncé résonne comme un écho dans l'esprit de la race humaine depuis la nuit des temps. Depuis que l'homme est homme, il n'a cessé de consulter oracles, augures et devins de toutes sortes afin de tenter, tant bien que mal, de connaître à l'avance sa destinée. Il semble évident que l'être qui sait ce que lui réserve l'avenir peut prendre des décisions plus éclairées sur tout ce qui le touche particulièrement. De nombreuses guerres ont été entamées car « les cieux semblaient cléments » à une éventuelle victoire, après avoir lu bien sûr dans les entrailles d'un animal. L'homme averti a donc la nette impression qu'il peut *contrôler* tous les aspects de sa vie.

« *Prévoir* le futur pour mieux *contrôler*... ». L'énoncé initial vient donc de se raffiner un peu plus. En effet, c'est ce désir de *contrôle*, synonyme de pouvoir aux yeux de l'homme, qui le pousse à en savoir plus sur son sort ultérieur. En sachant, par exemple, qu'au cours des jours à venir il y a un fort risque de gel au sol, l'agriculteur déploiera tous les efforts nécessaires afin de protéger ses récoltes et ainsi avoir le *contrôle* de sa production. Mais comment arriver à *prévoir* des événements avec une justesse relative? Puisque lire dans le marc de café est scientifiquement peu convaincant, il faut raisonner autrement. Le futur implique nécessairement une notion de temps. Les événements que l'on désire prévoir résultent directement de phénomènes physiques qui, eux, varient avec le temps. Donc, en analysant le plus rigoureusement possible ces phénomènes, l'homme pourrait facilement les *reconstituer* et en déduire leurs effets futurs.

« *Modéliser afin de prévoir le futur pour mieux contrôler!* ». L'énoncé qui décrit les desseins de notre recherche est maintenant complet. En effet, la base scientifique de toute prévision future est la *modélisation* des phénomènes à observer. Puisque ces phénomènes se déroulent dans le temps, cette dernière variable devient un élément essentiel devant se retrouver intrinsèquement dans notre *modèle*. La question est maintenant de savoir comment incorporer la variable temps dans un *modèle* mathématique pour en tirer des *prévisions* plausibles qui permettront à leur tour un *contrôle* plus efficace des phénomènes étudiés...

Afin de répondre à la question dans le cadre de notre recherche, un bref retour en arrière est nécessaire. À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, le botaniste anglais Robert Brown remarqua, sous microscope, que les minuscules particules de pollen suivaient une trajectoire aléatoire spécifique. Ainsi, le mouvement brownien, appelé aussi processus de Wiener, décrit la trajectoire d'une petite particule totalement immergée dans un liquide ou un gaz. En 1905, Albert Einstein montra que le mouvement brownien pouvait s'expliquer en supposant que la dite particule était sujette au bombardement des molécules présentes dans le milieu ambiant. Depuis ce temps, une multitude de nouveaux processus aléatoires ou stochastiques (car ils contiennent plusieurs variables aléatoires) ont vu le jour. Ces processus, qui contiennent le paramètre temps et dont les trajectoires sont des fonctions continues de la variable temps, sont regroupés sous le nom de processus de diffusion. On retrouve de nos jours ces processus dans des systèmes de communication avec bruit, dans les fluctuations du marché des actions boursières, dans l'évolution des gènes ou dans les activités neurophysiologiques du cerveau par exemple. L'objectif de notre recherche est de démontrer l'utilité des processus

de diffusion comme outils de *modélisation*, de *prévision* et de *contrôle* de phénomènes physiques.

Puisque les processus de diffusion sont la pierre angulaire de notre recherche, il est impératif, à ce stade-ci, de donner une brève description de la structure de ces processus qui vont plus particulièrement nous intéresser. En général, il existe deux façons d'étudier des événements qui se déroulent dans le temps : on peut représenter ces phénomènes de manière discrète ou de manière continue. La principale caractéristique des processus à temps discret est que dans un très petit intervalle de temps on observe un changement radical de l'état du système ou tout simplement aucun changement. Par contre, les processus à temps continu, qui vont nous concerner pour cette recherche, subissent des variations d'état à tout moment. De plus, si ces variations peuvent s'évaluer uniquement à l'aide des connaissances que l'on possède à l'état présent, on dit que le processus étudié est markovien. Un processus markovien qui ne subit uniquement que des changements d'états continus est appelé processus de diffusion. Une des représentations les plus usuelles des processus de diffusion est celle qui prend la forme d'équations différentielles stochastiques. Par exemple, l'équation différentielle suivante définit un mouvement brownien  $B(t)$  :

$$dB(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad . \quad (I.1)$$

On peut interpréter cette équation comme suit : la variation du mouvement brownien  $B(t)$  dans un intervalle de temps  $dt$  est normalement distribuée avec une moyenne infinitésimale  $\mu$  et une variance infinitésimale  $\sigma^2$  ( $W(t)$  étant défini comme un mouvement brownien standard). Tout au long de cette recherche nous

allons considérer des processus de diffusion à  $n$  dimensions qui peuvent être définis par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dx_1(t) = A_1 dt + B_1 dW_1(t) \\ dx_2(t) = A_2 dt + B_2 dW_2(t) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ dx_n(t) = A_n dt + B_n dW_n(t) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$  sont des fonctions qui dépendent de  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  donc du temps  $t$  (les fonctions  $B_i$  doivent être positives). Les expressions  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$  révèlent des mouvements browniens standards. Pour la suite de la recherche, on considèrera  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$  comme étant indépendants. Ce sont précisément les fonctions  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  qui vont représenter les phénomènes physiques que l'on voudra prévoir et éventuellement contrôler. Puis, en choisissant judicieusement les fonctions  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ , on examinera un processus de diffusion spécifique dans le but de déterminer certaines propriétés inhérentes au modèle alors mis en place. Par exemple, si on observe un événement essentiellement identifié par deux variables, on pourra considérer un modèle bidimensionnel de la forme :

$$\begin{cases} dx(t) = A dt + B dW_1(t) \\ dy(t) = C dt + D dW_2(t) \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

avec :



$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\alpha - 1}{2x(t)} \\ B = 1 \\ C = \frac{\alpha - 1}{2y(t)} \\ D = 1 \end{array} \right. \quad (I.4)$$

Ce système représentera alors un processus de diffusion appelé processus de Bessel de paramètre  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ). Il est à noter que le processus de Bessel est défini lorsque  $x(t)$  et  $y(t)$  sont, tous les deux, supérieurs ou égaux à zéro. On voit donc que le choix du processus de diffusion sera motivé par les caractéristiques du phénomène à étudier. On traitera plus spécifiquement du mouvement brownien tridimensionnel, du mouvement brownien géométrique et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré. Une fois que la sélection du processus sera faite, plusieurs propriétés pourront être calculées et estimées. Parmi celles-ci, on retrouvera, dans le cadre de notre recherche, le comportement selon les conditions initiales, les distributions stationnaires, le temps moyen d'absorption et le temps de premier passage. Nous verrons par la suite comment ces propriétés influenceront les variables étudiées.

Comme on l'a mentionné précédemment, notre recherche s'organise autour des trois termes *modélisation*, *prévision* et *contrôle*. Ces trois termes interchangeables pris deux à deux forment à leur tour trois thèmes qui formeront les trois parties principales de cet ouvrage.

Le premier chapitre s'intéressera au thème de la *modélisation* et du *contrôle*. En effet, on verra dans un premier temps comment les processus de diffusion servent à *modéliser* le processus d'usure d'une machine. Ce phénomène universellement répandu est particulièrement important dans les systèmes manufacturiers automatisés par ordinateur. Il est évident que si nous avons à notre disposition un outil qui modéliserait efficacement l'usure des différentes composantes d'une machine, on pourrait facilement imaginer des stratégies visant à optimiser sa production par rapport à sa durée de vie. Ainsi, dans un deuxième temps, on verra comment *contrôler* cette machine, soumise à des contraintes de coûts d'utilisation, entre autres, de manière à obtenir un rendement maximal. Pour ce faire, nous allons considérer un critère de performance qui tient compte du facteur de risque relié au comportement de l'opérateur de la machine. Afin de résoudre le problème, on reprendra des résultats prouvés uniquement pour certains cas particuliers et on les généralisera pour couvrir un plus grand nombre de processus ce qui confère à la recherche son originalité. De plus, des exemples spécifiques seront résolus et une généralisation, qui n'a jamais été faite auparavant, pour des processus d'usure impliquant  $n$  variables intrinsèques sera établie.

Le deuxième chapitre combinera les deux premiers termes pour se pencher sur le thème de la *modélisation* et de la *prévision*. L'utilisation des processus de diffusion sera alors envisagée comme alternative aux approches de modélisation conventionnelles, notamment le modèle déterministe PREVIS mis en place par l'Alcan, pour simuler les apports naturels du bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean. Puisque la société Alcan désire optimiser sa production d'électricité, elle désire pouvoir évaluer avec le plus de précision possible la quantité d'eau qui pourrait se déverser dans ses réservoirs dans une période future. Il est à noter qu'une revue de littérature exhaustive a montré qu'il n'existe pratiquement pas de

travaux portant sur l'usage de processus de diffusion pour prévoir des débits, ce qui prouve l'originalité de la recherche. Les processus de diffusion envisagés pour *modéliser* les débits de rivières et de bassins seront testés via différents critères de performance pour connaître leur validité en tant qu'outils de *prévision*. À la lumière des travaux effectués, il s'avère que les processus de diffusion présentent un potentiel particulièrement important pour des prévisions à court terme sans avoir à estimer des paramètres extérieurs, contrairement à tous les modèles déterministes.

Le troisième chapitre traitera du thème du *contrôle* et de la *prévision* dans un domaine tout à fait différent. En effet, il existe depuis quelques années un engouement évident dans la communauté scientifique pour l'intelligence artificielle. On tente, tant bien que mal d'imiter la manière de penser, de réagir et d'apprendre de l'être humain à l'aide d'un modèle artificiel que l'on appelle réseau de neurones. Les premières applications des réseaux neuronaux appartiennent au domaine de la reconnaissance des formes et du langage où ils sont utilisés comme classificateurs, mais on s'aperçoit très vite de leur utilité comme estimateur et donc comme outils de *prévision*. On cherche constamment à améliorer le degré de précision des prévisions des réseaux en augmentant leur taille, en modifiant leur algorithme d'apprentissage ou en introduisant des fonctions d'activation variables. Cependant très peu de travaux se penchent sur la structure interne des plus petits constituants d'un réseau, c'est-à-dire les neurones. En faisant appel encore une fois aux processus de diffusion, on démontre que l'on peut *contrôler* plus adéquatement la propagation de l'information à l'intérieur d'un simple neurone ce qui permet d'obtenir des prévisions plus proches de la réalité. Le résultat de la recherche est la création d'un tout nouveau type de réseau, que l'on a baptisé « le quantron », pouvant effectuer des tâches beaucoup

plus complexes et pouvant résoudre des problèmes de base en utilisant beaucoup moins de paramètres qu'auparavant.

Les différents aboutissements de la recherche tendent à démontrer la robustesse des processus de diffusion comme outils de modélisation, de prévision et de contrôle. Leur intérêt principal réside dans leur polyvalence à résoudre des problèmes sans connaître a priori tous les facteurs qui influencent un phénomène physique. On peut donc imaginer sans peine que les processus de diffusion jumelés à des modèles déterministes pourront aider indubitablement l'homme à prévoir le futur avec de plus en plus d'exactitude.

# CHAPITRE 1

## De l'usure et des hommes

### 1.1 Énoncé du problème

Tout membre des règnes animal, végétal ou minéral est victime, à mesure que le temps s'égrène, d'une dégradation de son état plus ou moins progressive. Ce phénomène universel est également très présent dans toute industrie manufacturière déployant une multitude de dispositifs, d'instruments et d'automates. Le fait de pouvoir analyser ce processus d'usure serait d'une aide précieuse pour les opérateurs de ces machines car ils pourraient alors les contrôler avec plus d'aisance.

Dans la littérature, il existe un grand nombre d'articles qui traitent de la théorie du contrôle en général. On trouve également un nombre important d'études concernant le contrôle optimal d'un processus stochastique sensible au risque de celui qui contrôle le processus. Le nombre d'articles qui se penchent plus spécifiquement sur le contrôle de processus d'usure qui se modélisent à l'aide de processus de diffusion est, par contre, très réduit. Dey et Moore (1997) ont innové en reformulant les problèmes de contrôle spécifiques à la théorie du risque. L'équation de programmation dynamique qu'ils obtiennent à l'aide de leur nouveau modèle leur permet de considérer une solution possible d'un problème dual de contrôle non linéaire. Campi et James (1996) s'intéressent aux relations qui peuvent s'établir entre diverses formulations de fonctions associées au risque et le contrôle optimal de processus stochastiques en temps discret. Ils montrent

que le fait de choisir judicieusement un paramètre pour la fonction de contrôle permet d'éliminer le risque. Brau-Rojas et al. (1998) s'efforcent au contraire de trouver des contre-exemples qui illustrent l'importance de ne pas négliger le facteur de risque. Runolfsson (1995) se rapproche de la formulation de contrôle optimal associé au risque en considérant un mouvement brownien pour évaluer la réponse de systèmes se rapportant à la théorie des jeux. Fleming et Hernandez-Hernandez (1997) utilisent le même raisonnement et l'appliquent à un modèle représentant les divers états d'une machine. Bien que l'usure de la machine ne soit pas modélisée en tant que tel, ils mentionnent que les fluctuations des états de la machine peuvent s'expliquer par un modèle stochastique approprié. Enfin, Chen et Elsayed (1993), Kopnov et Kanajev (1994), et Makis (1997) étudient tous diverses fonctions, le plus souvent quadratiques, pouvant modéliser l'usure d'une machine qu'ils désirent contrôler en supposant un facteur de risque associé à l'opérateur de la machine. Ils ne considèrent cependant pas des modèles de diffusion se contentant de résoudre des problèmes strictement linéaires. Les travaux de Rishel (1991) sont ceux qui ont le plus influencés la recherche. C'est à partir de sa formulation du problème de contrôle optimal que l'on a pu aller plus loin et découvrir de nouvelles modélisations et de nouvelles applications du phénomène d'usure.

Supposons alors que  $x(t)$  représente le degré d'usure d'une machine quelconque évalué à un certain instant  $t$ . On ne s'attardera pas aux unités de la variable  $x(t)$  car elles dépendent de l'application que l'on veut étudier. Étant donné que l'usure est un phénomène dont l'intensité ne peut pas, en général, diminuer au fur et à mesure que le temps s'écoule, Rishel (1991) conçoit alors  $x(t)$  comme la solution du système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = \rho(x(t), y(t))dt \\ dy(t) = f(x(t), y(t))dt + \sigma(x(t), y(t))dW(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\rho$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues et dérivables prenant des valeurs positives ou nulles dans le domaine qui nous intéresse ( $f$  étant également continue et dérivable), et où  $W(t)$  décrit un mouvement brownien standard quelconque (processus de Wiener). On est donc en présence d'une première représentation d'un processus de diffusion. Dans son modèle, Rishel conçoit  $y(t)$  comme une variable inhérente à l'environnement de la machine, qui a un effet direct sur la variation de l'usure de celle-ci en fonction du temps. On peut imaginer  $y(t)$  comme la température ambiante, le degré de viscosité ou la vitesse de roulement de la machine, par exemple. Le choix de  $y(t)$  est logiquement dicté par la variable qui a le plus d'effet sur la dégradation de la machine.

Ce modèle proposé par Rishel (qu'il a élaboré, à l'origine, en  $n$  dimensions avec  $n-1$  variables environnementales) est une nette amélioration par rapport aux modèles précédents (Conrad et McClamroch (1987) et Baxter et Lee (1987)) qui représentaient  $x(t)$  comme la solution d'une équation scalaire stochastique qui prenait simplement la forme :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t) \quad (1.2)$$

donnant ainsi à la variable d'usure la propriété douteuse de baisser d'intensité à un temps ultérieur! Désormais, puisque la dérivée de  $x(t)$  par rapport à  $t$  ne peut prendre de valeurs négatives (dû à la nature de  $\rho$ ), l'usure de la machine ne peut que croître avec le temps.

Il est intéressant de noter que la fonction  $\rho$  ne doit pas nécessairement prendre des valeurs positives ou nulles quelles que soient les valeurs du couple  $(x(t), y(t))$  sur tout l'ensemble  $\mathcal{R}^2$ . Tout dépend du domaine que l'on va considérer. En effet, si la variable  $y(t)$  est définie, par exemple, par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dy(t) = y(t)dt + \sqrt{2y^2(t)} dW(t) \quad (1.3)$$

on peut conclure que  $y(t) = \exp(B(t))$  (ou  $y(t) = -\exp(B(t))$ ), où  $B(t)$  est encore une fois un mouvement brownien standard quelconque. En fait, le processus représenté par  $y(t)$  est connu sous le nom de mouvement brownien géométrique. Ce processus possède la particularité d'avoir une frontière inaccessible à l'origine, c'est-à-dire que la valeur de  $y(t)$  ne pourra jamais atteindre zéro puisque, en effet,  $y(t) = \pm \exp(B(t))$ . Ainsi, si on décide de choisir, dans ce cas particulier  $\rho(x(t), y(t)) = y(t)$ , on est assuré que  $\rho$  restera toujours positif si, initialement,  $y(t)$  est positif, et ce, malgré le fait que le mouvement brownien géométrique puisse théoriquement prendre des valeurs négatives.

Rishel a ensuite supposé que les fonctions  $\rho$ ,  $f$  et  $\sigma$  définies précédemment étaient toutes dépendantes d'une variable de contrôle  $u$ , qu'il a supposé être la vitesse d'opération de la machine. Encore là, ce choix dépend de la situation que l'on étudie. De là, il a formulé un tout nouveau problème de contrôle optimal. On désire alors déterminer la valeur  $u^* = u^*(x, y)$  de la variable de contrôle qui maximiserait l'espérance mathématique du critère de performance suivant :



$$J(x, y) = \int_0^{T_B} \{r(u(x(t), y(t))) - c(x(t), y(t))\} dt \quad (1.4)$$

où  $r(u)$  représente le revenu par unité de temps obtenu en faisant fonctionner la machine à la vitesse  $u$ .  $c(x, y)$  est le coût par unité de temps associé à un niveau d'usure  $x$  et à une valeur  $y$  de la variable environnante.  $B$  est le niveau d'usure qui empêche tout fonctionnement de la machine et

$$T_B = T_B(x, y) = \inf \{t \geq 0 : x(t) = B | x(0) = x, y(0) = y\} \quad (1.5)$$

c'est-à-dire que  $T_B$  est le temps nécessaire pour atteindre un niveau d'usure inacceptable sachant qu'initialement la machine avait un niveau d'usure  $x$  (avec  $x \leq B$ ) pour une valeur  $y$  de la variable environnante.

Rishel a prouvé que si  $\rho(x, y, u) = u^2 \rho_1(x, y)$ ,  $f(x, y, u) = u^2 f_1(x, y)$ ,  $\sigma(x, y, u) = u \sigma_1(x, y)$  et  $r(u) = r_0 u$ , alors la valeur optimale de la variable de contrôle est donnée par :

$$u^*(x, y) = \frac{2c(x, y)}{r_0} \quad (1.6)$$

(moyennant certaines conditions relatives aux bornes et aux dérivées se rapportant aux fonctions  $\rho_1, f_1, \sigma_1$  et  $c$ ). Il a également réussi à exprimer  $u^*$  en fonction du profit maximum espéré  $V(x, y)$  évalué lorsque les conditions initiales sont  $x$  et  $y$ , et ce, lorsque les fonctions  $\rho$  et  $f$  sont de la forme  $\rho(x, y, u) = u \rho_1(x, y)$  et  $f(x, y, u) = u f_1(x, y)$ .

Par la suite, Lefebvre et Gaspo (1996, *Optimal control of wear processes*) ont repris les travaux de Rishel afin de généraliser certains résultats. Ils ont montré en effet que

$$u^*(x, y) = \frac{2n}{2n-1} \frac{c(x, y)}{r_0} \quad (1.7)$$

lorsque  $\rho(x, y, u) = u^{2n}\rho_1(x, y)$ ,  $f(x, y, u) = u^{2n}f_1(x, y)$  et  $\sigma(x, y, u) = u^n\sigma_1(x, y)$ , où  $n$  est un nombre entier. Ils ont également obtenu des solutions explicites pour exprimer  $u^*$  dans le second cas traité par Rishel (en fonction du profit maximum espéré  $V(x, y)$ ), en utilisant la méthode des similitudes. Cette méthode permet de réduire l'équation de programmation dynamique (qui est une équation aux dérivées partielles) satisfaite par  $V(x, y)$  à une équation différentielle ordinaire en supposant que

$$V(x, y) = V_1(z) \quad (1.8)$$

où  $z = z(x, y)$ .

De plus, Lefebvre et Gaspo (1996, *Controlled wear processes : a risk-sensitive formulation*) ont amélioré le critère de performance utilisé par Rishel en introduisant un facteur de risque. Ils ont donc considéré la fonction suivante :

$$C(\theta) (= C(x, y, \theta)) = -\frac{1}{\theta} \log E[\exp(-\theta J)] \quad (1.9)$$

où  $\theta$  est le paramètre qui tient compte du facteur de risque de l'opérateur de la machine. Ce critère a été proposé par Whittle (1982), qui a également spécifié que lorsque  $\theta > 0$  l'opérateur est plus enclin à favoriser le risque alors que la situation est le contraire lorsque  $\theta < 0$ . On note que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C(\theta) = E[J(x, y)] \quad (1.10)$$

ce qui est un résultat provenant directement de la définition du critère de risque. Cette nouvelle formulation du critère de performance permet non seulement de tenir compte de l'espérance de  $J(x, y)$  mais aussi de sa variance. Toutes ces améliorations raffinent de plus en plus le contrôle que l'on pourrait avoir de la machine.

Lefebvre et Gaspo ont montré que, dans le premier cas considéré par Rishel, le paramètre de risque  $\theta$  n'influence pas la valeur du contrôle optimal  $u^*$  qui est toujours donné par l'équation (1.6), quelle que soit la valeur de  $\theta$ . Cependant, ils ont étudié certains cas où le paramètre de risque  $\theta$  devient un facteur important dans le calcul de la valeur du contrôle optimal. Pour ces derniers cas, ils ont établi la valeur critique de  $\theta$ , c'est-à-dire la plus petite valeur que  $\theta$  peut prendre pour que le profit espéré demeure réel.

Ayant conscience de tous ces développements, il s'agit maintenant de pousser plus loin la recherche en essayant de trouver des exemples de modélisations de processus d'usure dont on pourra évaluer le contrôle optimal à l'aide de méthodes inexplorées auparavant. Une fois ces nouveaux cas étudiés, il serait bon de pouvoir généraliser certains résultats de manière à pouvoir résoudre certaines

catégories de problèmes. En particulier, nous allons démontrer une proposition qui permet d'évaluer la valeur du contrôle optimal en considérant simplement un processus non contrôlé. À partir de ce résultat de nouveaux processus seront étudiés et résolus.

## 1.2 Contrôle optimal de processus d'usure

Nous allons tout d'abord considérer le système suivant qui modélise le phénomène d'usure  $x(t)$  d'une machine :

$$\begin{cases} dx(t) = \rho_1(x(t), y(t))dt \\ dy(t) = f_1(x(t), y(t))dt + bu(t)dt + \sigma_1(x(t), y(t))dW(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $b$  est une fonction qui peut dépendre de  $x(t)$  et de  $y(t)$ . De plus, le critère de performance est donné par

$$J(x, y) = \int_0^{T_B} \left( \frac{1}{2} r_0 u^2(t) - c_0 \right) dt \quad (1.12)$$

où  $r_0$  et  $c_0$  ne sont évidemment pas négatifs. On cherche donc à déterminer la valeur du contrôle  $u^*$  qui maximise le critère de risque défini par  $C(\theta)$ .

Le cas particulier où  $b$ ,  $\sigma_1$  et  $r_0$  sont toutes des constantes est très intéressant car en utilisant un théorème (voir encadré à la page suivante) prouvé par Kuhn (1985) (voir également Whittle (1990)), on peut montrer que la valeur optimale  $u^*$  du

contrôle peut être évaluée en considérant simplement le processus non contrôlé  $(\xi(t), \eta(t))$  qui correspond au processus contrôlé  $(x(t), y(t))$ .

**Théorème de Kuhn**

*On considère le système d'équations différentielles stochastiques suivant représenté de manière vectorielle :*

$$d\bar{x}(t) = (\bar{a} + B\bar{u})dt + N^{1/2}d\bar{W}(t)$$

*où le vecteur  $\bar{a}$  et les matrices  $B$  et  $N$  dépendent de  $\bar{x}(t)$  et qui est soumis à la fonction de risque :*

$$C(\theta) = -\frac{1}{\theta} \log E[\exp(-\theta J)]$$

*impliquant la fonction de coût  $J$  suivante :*

$$J(\bar{x}) = \int_0^T (\frac{1}{2}\bar{u}'Q\bar{u} + \bar{h})dt + K(\bar{x}(T))$$

*où la matrice  $Q$  et le vecteur  $\bar{h}$  dépendent de  $\bar{x}(t)$  et  $K$  représente le coût associé au temps final  $T$ .*

*S'il existe un scalaire  $\alpha$  tel que la relation*

$$\alpha N = BQ^{-1}B' + \theta N$$

*est vérifiée et que le processus non contrôlé*

$$d\bar{x}(t) = \bar{a}dt + N^{1/2}d\bar{W}(t)$$

*est certain d'atteindre éventuellement un temps final  $\tau$ , alors*

$$\exp(-\alpha V(\bar{x}(t))) = E \left[ \exp \left( -\alpha \int_t^\tau \bar{h} dt - \alpha K(\bar{x}(\tau)) \right) \right]$$

*où  $V(\bar{x}(t))$  peut être interprété comme le profit maximum espéré.*

En fait,  $u^*$  est donné, dans ce cas, par :

$$u^* = -\frac{b}{r_0} V_y \quad (1.13)$$

où  $V_y = \partial V(x, y)/\partial y$  (dérivée partielle) et  $V(x, y)$  peut être obtenu à partir de l'équation suivante :

$$\exp(-\alpha V(x, y)) = E_{(x, y)} \left[ \exp \left( \alpha \int_0^{\tau_B} c_0 dt \right) \right] \quad (1.14)$$

Dans l'équation précédente,  $\alpha$  est une constante telle que :

$$\alpha \sigma_1^2 = \frac{b^2}{r_0} + \theta \sigma_1^2 \quad (1.15)$$

et  $\tau_B$  est au processus non contrôlé  $(\xi(t), \eta(t))$  ce que la variable aléatoire  $T_B$  est au processus contrôlé  $(x(t), y(t))$ . Finalement, afin que les résultats énumérés ci-dessus soient plausibles, la condition  $P[\tau_B < \infty] = 1$  doit être remplie.

Il est important de préciser qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions  $b$ ,  $\sigma_1$  et  $r_0$  soient des constantes à proprement parler. Cependant, il faut absolument que l'équation (1.15) qui relie  $\alpha$  et ces fonctions soit vérifiée afin que le résultat obtenu par Kuhn soit valide. Mais qu'en est-il lorsque la relation entre  $b$ ,  $\sigma_1$  et  $r_0$  n'est pas vérifiée?

Dans ce cas, il faut considérer l'équation de programmation dynamique satisfaite par le profit maximum espéré  $V(x, y)$ , c'est-à-dire (voir Kuhn (1985)) :

$$\inf_u \left[ \frac{1}{2} r_0 u^2 - c_0 + \rho_1 V_x + (f_1 + bu) V_y - \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 V_y^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_{yy} \right] = 0 \quad (1.16)$$

où  $u := u(x, y, 0)$  est soumis à la condition à la frontière suivante :

$$V(B, y) = 0. \quad (1.17)$$

En effet, lorsque la machine a atteint un niveau d'usure maximum, le profit espéré se doit d'être nul. L'expression pour le contrôle optimal est, comme auparavant :

$$u^* = -\frac{b}{r_0} V_y \quad (1.18)$$

ce qui permet de simplifier l'équation (1.16) de programmation dynamique :

$$-c_0 + \rho_1 V_x + f_1 V_y - \left( \frac{b^2}{2r_0} + \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 \right) V_y^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_{yy} = 0. \quad (1.19)$$

Afin d'obtenir la solution de cette équation différentielle, on va considérer un changement de variables. Plus précisément, on envisage la fonction  $\phi(x, y)$  qui est définie implicitement par l'équation suivante :

$$\frac{\phi_z}{\phi} = -K(z)V_z \quad (1.20)$$

où la variable  $z$  regroupe les variables du problème de contrôle, c'est-à-dire :

$$z := (x, y) \quad (1.21)$$

et  $K(z)$  est une expression qui va permettre d'alléger l'écriture, puisque

$$K(z) := \frac{b^2}{r_0 \sigma_1^2} + \theta \quad (1.22)$$

où l'on suppose  $K(z) \neq 0$ .

Il est important de remarquer que même si l'on a regroupé la variable d'usure et la variable environnementale, il n'en reste pas moins que l'équation différentielle définissant la fonction  $\phi$  peut se scinder en deux équations aux dérivées partielles, une impliquant  $V_x$  et l'autre  $V_y$ . Il est évident que pour que la fonction  $\phi$  soit proprement définie, il faut que les deux équations aux dérivées partielles soient compatibles. Cette condition se traduit par l'équation suivante :

$$\int^x \frac{1}{K(\xi, y)} \frac{\phi_\xi(\xi, y)}{\phi(\xi, y)} d\xi + \psi_1(y) = \int^y \frac{1}{K(x, \eta)} \frac{\phi_\eta(x, \eta)}{\phi(x, \eta)} d\eta + \psi_2(x). \quad (1.23)$$



Il est à noter que l'équation (1.23) est toujours vérifiée si la fonction  $K(x, y)$  est une constante, c'est-à-dire dans le cas où la relation dans Kuhn (1985) est vérifiée, puisque l'on peut choisir la fonction  $\phi(x, y)$  comme suit :

$$\phi(x, y) = \exp(-KV(x, y)). \quad (1.24)$$

En d'autres termes, les fonctions  $\psi_1(x)$  et  $\psi_2(y)$  pourront être choisies comme étant identiquement égales à zéro.

Revenant à l'équation (1.19) de programmation dynamique, on peut déduire que :

$$V_x = -K^{-1}(z) \frac{\phi_x}{\phi} \quad , \quad (1.25)$$

$$V_y = -K^{-1}(z) \frac{\phi_y}{\phi} \quad (1.26)$$

et

$$V_{yy} = K^{-2}(z) K_y(z) \frac{\phi_y}{\phi} - K^{-1}(z) \frac{\phi_{yy}}{\phi} + K^{-1}(z) \frac{\phi_y^2}{\phi^2} \quad . \quad (1.27)$$

En substituant les expressions précédentes dans l'équation (1.19) de programmation dynamique, on obtient :

$$-c_0 - \rho_1 K^{-1} \frac{\phi_x}{\phi} - f_1 K^{-1} \frac{\phi_y}{\phi} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left[ K^{-2} K_y \frac{\phi_y}{\phi} - K^{-1} \frac{\phi_{yy}}{\phi} \right] = 0 \quad (1.28)$$

qui devient :

$$c_0 K \phi + \rho_1 \phi_x + f_1 \phi_y - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{K_y}{K} \phi_y + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \phi_{yy} = 0. \quad (1.29)$$

En examinant de plus près cette équation, on se rend compte qu'il s'agit de l'équation différentielle de Kolmogorov (Cox et Miller (1965)) d'un processus de diffusion bidimensionnel dégénéré (i.e. une des composantes du processus n'est pas stochastique). L'équation de Kolmogorov possède la particularité d'être vérifiée par la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire  $T(x, y)$  (équation (1.31)) évoquant un instant de premier passage. On peut ainsi interpréter la fonction  $\phi(x, y)$  comme suit :

$$\phi(x, y) = E_{(x,y)} \left[ \exp \left( \int_0^{T(x,y)} c_0 K dt \right) \right] \quad (1.30)$$

où

$$T(x, y) := \inf \{ t \geq 0 : (X(t), Y(t)) \in D \subset \mathfrak{R}^2 \mid X(0) = x, Y(0) = y \} \quad (1.31)$$

représente la valeur du temps nécessaire pour atteindre pour la première fois un état du domaine  $D$ , qui est un sous-ensemble de  $\mathfrak{R}^2$ , en partant initialement d'un

état quelconque  $(x, y)$ , et ce, pour un processus de diffusion bidimensionnel  $(X(t), Y(t))$  défini par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} dX(t) = \rho_1 dt \\ dY(t) = \left( f_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{K_y}{K} \right) dt + \sigma_1 dW(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

Ce processus est obtenu tout simplement en considérant les valeurs des coefficients devant les dérivées partielles du premier et du second ordre dans l'équation de Kolmogorov et en les insérant à leur place correspondante dans le système d'équations différentielles.

On peut dès lors énoncer la proposition suivante :

**Proposition**

*Soit une fonction  $\phi(x, y)$  qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles*

$$c_0 K \phi + \rho_1 \phi_x + f_1 \phi_y - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{K_y}{K} \phi_y + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \phi_{yy} = 0,$$

*et telle que la fonction  $V(x, y)$  obtenue à l'aide de l'égalité*

$$\frac{\phi_z}{\phi} = -K(z)V_z$$

*soit bien définie, continue et vérifiant la condition à la frontière*

$$V(B, y) = 0.$$

*Alors, la valeur du contrôle optimal est donnée par*

$$u^* = -\left(\frac{b}{r_0}\right)V_y.$$

### Preuve

Étant donné que le processus bidimensionnel  $(x(t), y(t))$  est dégénéré, il s'ensuit que l'on doit se contenter d'un certain type de solution de l'équation de programmation dynamique appelé solution de viscosité (voir Fleming et Soner (1993)). De plus, si une solution trouvée est continue, on peut affirmer qu'il s'agit de l'unique solution de viscosité du système. Ainsi, si l'équation (1.30) permet d'obtenir une fonction  $\phi(x, y)$  telle que la fonction  $V(x, y)$  correspondante soit bien définie, continue et satisfaisant à la condition à la frontière énoncée précédemment, alors la valeur du contrôle optimal peut en être déduite directement.  $\square$

On vient donc de prouver une proposition qui permet d'évaluer la valeur du contrôle optimal à partir d'une espérance mathématique et ce, pour un processus stochastique non contrôlé. Afin d'illustrer ce résultat, voici deux exemples qui utilisent tantôt cette proposition tantôt le résultat de Kuhn.

### 1.3 Solutions explicites

Pour le premier cas que nous allons considérer, on va supposer que les paramètres infinitésimaux  $f_1(x(t), y(t))$  et  $\sigma_1(x(t), y(t))$  du processus stochastique sont égaux à  $y(t)$  et  $2^{1/2} y(t)$ , respectivement. Le processus non contrôlé devient donc un mouvement brownien géométrique :

$$dy(t) = y(t) dt + \sqrt{2y^2(t)} dW(t) \quad (1.33)$$

qui possède une frontière inaccessible à l'origine. Considérons alors le changement de variables suivant :

$$s(t) := B - x(t) \quad (1.34)$$

où  $s(t)$  représente, de façon plus pratique, la durée de vie résiduelle de la machine. Le modèle à étudier devient donc :

$$\begin{cases} ds(t) = y(t) dt \\ dy(t) = y(t) dt + b_0 y(t) u(t) dt + \sqrt{2y^2(t)} dW(t) \end{cases} \quad (1.35)$$

où  $b_0$  est une constante. Il est intéressant de noter que le fait de supposer que  $ds(t)/dt$  est proportionnel à  $y(t)$  est tout à fait réaliste comme en témoignent les travaux de Lin et Cheng (1989) et ceux de Hu et al. (1991). De plus, si  $y(0) = y$  est supposé négatif, alors  $ds(t)/dt$  sera toujours négatif (si  $u(t) = 0$ ) comme il se doit.

Le modèle étant choisi, supposons maintenant que l'on désire évaluer la valeur du contrôle qui maximise le critère de performance  $C(\theta)$  défini précédemment (équation (1.9)), avec :

$$J(x, y) = \int_0^{T_0(x, y)} \left( \frac{1}{2} r_0 u^2(t) - c_0 \right) dt \quad (1.36)$$

où  $r_0$  et  $c_0$  sont des constantes positives se rapportant toujours au revenu et au coût, respectivement, qui sont reliés à la machine, et

$$T_0(x, y) := \inf \{ t \geq 0 : s(t) = 0 \mid x(0) = x \geq 0, y(0) = y \} \quad (1.37)$$

Puisque la relation suivante :

$$\alpha(2y^2(t)) = \frac{(b_0 y(t))^2}{r_0} + \theta(2y^2(t)) \quad (1.38)$$

est vérifiée lorsque

$$\alpha = \frac{b_0^2}{2r_0} + \theta \quad (1.39)$$

on peut, dans ce cas, utiliser directement le théorème de Kuhn afin d'affirmer que la fonction  $V(x, y)$  est donnée par l'expression :

$$\exp(-\alpha V(x, y)) = E_{(x, y)} [\exp(\alpha c_0 \tau_0)] \quad (1.40)$$

Il faut mentionner que ce résultat est valide si  $P[\tau_0(x, y) < \infty] = 1$  où  $\tau_0$  représente la même chose que  $T_0$  mais pour le processus non contrôlé  $(s_1(t), y_1(t))$  correspondant au processus  $(s(t), y(t))$ . En utilisant maintenant les résultats prouvés par Lefebvre (1996) pour ce type d'équation, on trouve que si  $\alpha$  est négatif, alors :

$$\exp(-\alpha V(x, y)) = \frac{\Gamma(\sqrt{a}+1)}{\Gamma(2\sqrt{a}+1)} \left(\frac{y}{x-B}\right)^{\sqrt{a}} M\left(\sqrt{a}, 2\sqrt{a}+1, \frac{y}{(B-x)}\right) \quad (1.41)$$

où  $a := -\alpha c_0$  et  $M$  est une fonction confluyente hypergéométrique (voir Abramovitz et Stegun (1965, p.504)). En prenant la limite de cette expression lorsque  $a$  décroît vers zéro, on obtient que :

$$P[\tau_0(x, y) < \infty] = M\left(0, 1, \frac{y}{(B-x)}\right) = 1 \quad (1.42)$$

de telle sorte que l'expression exprimant  $V(x, y)$  est bel et bien valide.

Il est par la suite aisé de montrer que la fonction  $V(x, y)$  obtenue à partir de l'équation (1.41) est bien continue tout en satisfaisant à la condition à la frontière spécifiée plus haut. On peut donc énoncer que la valeur du contrôle optimal est donnée par :

$$u^* = \frac{b_0 \sqrt{a}}{\alpha r_0} \left[ 1 + \frac{y}{(2\sqrt{a}+1)(B-x)} \frac{M\left(\sqrt{a}+1, 2\sqrt{a}+2, \frac{y}{(B-x)}\right)}{M\left(\sqrt{a}, 2\sqrt{a}+1, \frac{y}{(B-x)}\right)} \right] \quad (1.43)$$

Il faut préciser cependant que l'expression obtenue pour la valeur de  $u^*$  n'est valide que lorsque  $\alpha$  est négatif; c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\theta < -\frac{b_0^2}{2r_0} < 0 \quad (1.44)$$

où l'on suppose alors que l'opérateur de la machine est peu enclin à favoriser le risque.

Dans le deuxième cas que nous allons considérer, dans lequel le théorème de Kuhn ne sera pas valide, on va supposer que le processus contrôlé  $(x(t), y(t))$  satisfait au système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = \rho_1(x(t), y(t)) dt \\ dy(t) = y(t) dt + b_0 y(t) u(t) dt + \sqrt{y^2(t)} dW(t). \end{cases} \quad (1.45)$$

Le critère de performance qui nous intéresse particulièrement est cette fois le même que défini à l'équation (1.9), et où :

$$J(x, y) = \int_0^{T_B} \left( \frac{1}{2} r_0 u^2(t) - c_0 \right) dt. \quad (1.46)$$

On peut alors se baser sur les résultats prouvés précédemment pour déduire que l'équation de programmation dynamique à résoudre est de la forme suivante :



$$c_0 K \phi + \rho_1 \phi_x + y \phi_y - \frac{1}{2} y^2 \frac{K_y}{K} \phi_y + \frac{1}{2} y^2 \phi_{yy} = 0 \quad (1.47)$$

où :

$$K(x, y) = \frac{b_0^2}{r_0} + \theta . \quad (1.48)$$

Pour cet exemple, on va supposer, pour plus de simplicité, que l'opérateur adopte une attitude neutre par rapport au risque, c'est-à-dire que  $\theta = 0$ .

À partir de ces hypothèses il est facile de vérifier que si :

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ c_0 = y(1 - e^{-y})(B - x)\exp(y(B - x)) \\ r_0 = \exp(y(B - x)) \end{cases} \quad (1.49)$$

et que :

$$\rho_1(x, y) = (B - x)e^{-y} \quad (1.50)$$

alors la fonction :

$$\phi(x, y) = \exp(-(B - x)y) \quad (1.51)$$

est solution de l'équation de programmation dynamique. Contrairement au cas traité précédemment, on suppose que  $y(0) = y$  est positif. Ceci implique que pour le processus non contrôlé la fonction  $\rho_1(x, y)$  demeurera toujours positive.

Il est important de remarquer que la fonction  $K$  est donnée par :

$$K(x, y) = \frac{1}{\exp(y(B-x))} \quad (1.52)$$

Puisque  $K(x, y)$  n'est pas une constante, il aurait été impossible d'utiliser le théorème de Kuhn afin d'obtenir la valeur du contrôle optimal dans ce cas. Notons également que les fonctions  $c_0$  et  $r_0$  ne peuvent être négatives (car  $y > 0$ ), ce qui est essentiel pour satisfaire les hypothèses de départ.

L'équation différentielle (1.20) qui rendait linéaire l'équation de programmation dynamique permet de déduire que :

$$\begin{pmatrix} y \\ -(B-x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\exp(y(B-x))} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

ce qui implique que :

$$V(x, y) = \exp(y(B-x)) + \psi_1(y) \quad (1.54)$$

et

$$V(x, y) = \exp(y(B-x)) + \psi_2(x). \quad (1.55)$$

Il s'ensuit donc que :

$$V(x, y) = \exp(y(B-x)) + \gamma \quad (1.56)$$

où  $\gamma$  est une constante. Afin de vérifier la condition à la frontière, la constante  $\gamma$  se doit d'être égale à  $-1$ , ce qui permet d'écrire que :

$$V(x, y) = \exp(y(B-x)) - 1. \quad (1.57)$$

Notons à présent que cette fonction est non négative et continue puisque l'on a supposé que  $y$  est positif. Ceci permet d'affirmer grâce à notre proposition prouvée précédemment que cette fonction représente l'unique solution de viscosité de l'équation de programmation dynamique soumise à la condition à la frontière donnée par l'équation (1.17). Finalement, pour le cas étudié la valeur du contrôle optimal est donnée par :

$$u^* = -(B-x)y. \quad (1.58)$$

Ce dernier cas, bien qu'essentiellement mathématique, illustre bien comment le problème de contrôle de l'équation non linéaire de la programmation dynamique s'est transformé en un problème de premier passage pour un processus de diffusion non contrôlé. Néanmoins, afin de tenter de se rapprocher de plus en plus de la réalité, il faut essayer de généraliser ces résultats. Tous les cas étudiés jusqu'à présent peuvent être considérés comme étant scalaires. En effet, la

variable environnementale  $y(t)$  a toujours été représentée par une seule composante. En considérant tous les résultats établis précédemment, rien ne nous empêche de raffiner notre modélisation des processus d'usure en traitant le cas multidimensionnel.

## 1.4 Généralisation

Nous allons, pour ce faire, nous attarder au cas tridimensionnel afin d'établir des résultats probants. La généralisation à  $n$  dimensions deviendra alors triviale.

Soit :

$$w(t) := (x(t), y(t), z(t)) \quad (1.59)$$

qui représente le vecteur d'états que peut prendre le système défini par :

$$\begin{cases} dx(t) = \rho_1(w(t))dt \\ dy(t) = \eta_1(w(t))dt \\ dz(t) = f_1(w(t))dt + bu(t)dt + \sigma_1(w(t))dW(t) \end{cases} \quad (1.60)$$

où  $x(t)$  représente encore le phénomène d'usure mais où les facteurs inhérents à l'environnement de la machine sont maintenant définis par le vecteur  $q(t)$  suivant :

$$q(t) := (y(t), z(t)). \quad (1.61)$$

Il s'agit ici du cas où le mouvement brownien est présent uniquement dans la deuxième composante du vecteur représentant les facteurs environnementaux. Afin de définir entièrement le problème de contrôle optimal, il faut bien spécifier le critère de performance que l'on va utiliser. Ainsi, on définit :

$$J(x, y, z) = \int_0^{T_B} \left( \frac{1}{2} r_0 u^2(t) - c_0 \right) dt \quad (1.62)$$

où toutes les variables exprimées sont en tous points semblables à celles du cas scalaire et définies auparavant. Encore une fois, en tenant compte du facteur de risque rattaché à l'opérateur de la machine, on obtient, en utilisant le résultat de Kuhn, l'équation de la programmation dynamique en fonction des dérivées du profit maximum espéré  $V(x, y, z)$  évalué à partir de l'état initial  $(x, y, z)$ . On peut donc écrire :

$$\inf_u \left[ \frac{1}{2} r_0 u^2 - c_0 + \rho_1 V_x + \eta_1 V_y + (f_1 + bu) V_z - \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 V_z^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_{zz} \right] = 0. \quad (1.63)$$

De plus, l'équation de programmation dynamique est sujette à la condition à la frontière suivante:

$$V(B, y, z) = 0. \quad (1.64)$$

En solutionnant cette équation en fonction de  $u := u(x, y, z, 0)$ , on obtient la valeur du contrôle optimal:

$$u^* = -\frac{b}{r_0} V_z. \quad (1.65)$$

En substituant cette expression dans l'équation originale, on obtient :

$$-c_0 + \rho_1 V_x + \eta_1 V_y + f_1 V_z - \left( \frac{b^2}{2r_0} + \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 \right) V_z^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_z = 0. \quad (1.66)$$

Afin de faciliter la résolution de cette équation non linéaire, une transformation vectorielle s'impose. On définit alors :

$$\frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(w) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2(w) & 0 \\ 0 & 0 & -K(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

où  $\phi(x, y, z)$  est une nouvelle fonction vectorielle qui remplace  $V(x, y, z)$  dans l'équation de programmation dynamique,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des fonctions quelconques appartenant à l'espace des états et  $K(w)$  est donné par :

$$K(w) := \frac{b^2}{r_0 \sigma_1^2} + \theta. \quad (1.68)$$

Il est important de noter encore une fois qu'afin d'obtenir une solution valide pour la fonction  $V(x, y, z)$ , il faut absolument que les trois équations différentielles obtenues à partir de la transformation soient compatibles entre elles. C'est pourquoi les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  doivent être choisies avec soin. On a :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ V_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{-1}(w) \frac{\phi_x}{\phi} \\ \psi_2^{-1}(w) \frac{\phi_y}{\phi} \\ -K^{-1}(w) \frac{\phi_z}{\phi} \\ K^{-2}(w) K_z(w) \frac{\phi_z}{\phi} - K^{-1}(w) \frac{\phi_{zz}}{\phi} + K^{-1}(w) \frac{\phi_z^2}{\phi^2} \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

L'équation de programmation dynamique devient alors :

$$\begin{aligned} -c_0 + \rho_1 \psi_1^{-1}(w) \frac{\phi_x}{\phi} + \eta_1 \psi_2^{-1}(w) \frac{\phi_y}{\phi} - f_1 K^{-1}(w) \frac{\phi_z}{\phi} \\ + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left[ K^{-2}(w) K_z(w) \frac{\phi_z}{\phi} - K^{-1}(w) \frac{\phi_{zz}}{\phi} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

où on a utilisé l'égalité :

$$\frac{b^2}{2r_0} + \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 K(w). \quad (1.71)$$

En réarrangeant les différents termes de l'équation et en omettant l'argument  $w$  pour fins de clarté de présentation, on obtient :

$$c_0\phi - \frac{\rho_1\phi_x}{\psi_1} - \frac{\eta_1\phi_y}{\psi_2} + \left(\frac{f_1}{K} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{K_z}{K^2}\right)\phi_z + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{K} \phi_{zz} = 0. \quad (1.72)$$

L'équation nouvelle obtenue à l'aide de la transformation est maintenant linéaire. Comme dans le cas scalaire, on peut maintenant reconnaître la forme de l'équation de Kolmogorov qui nous permet d'interpréter la fonction  $\phi(x, y, z)$  de la façon suivante :

$$\phi(x, y, z) = E_{(x,y,z)} \left[ \exp \left( \int_0^T c_0 dt \right) \right] \quad (1.73)$$

où :

$$T = T(x, y, z) := \inf \left\{ t \geq 0 : (X(t), Y(t), Z(t)) \in D \subset \mathbb{R}^3 \mid X(0) = x, Y(0) = y, Z(0) = z \right\} \quad (1.74)$$

Encore une fois, le temps  $T$  représente le temps de premier passage d'un processus stochastique. À partir de cette reformulation se basant sur le vecteur  $(X(t), Y(t), Z(t))$  définissant le nouvel espace des états, on retrouve le processus de diffusion tridimensionnel suivant :

$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{\rho_1}{\psi_1} dt \\ dY(t) = -\frac{\eta_1}{\psi_2} dt \\ dZ(t) = \left( \frac{f_1}{K} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{K_z}{K^2} \right) dt + \sigma_1 K^{-1/2} dW(t) \end{cases} \quad (1.75)$$



Ce modèle tridimensionnel représentant le phénomène d'usure est dégénéré. On peut donc pour ce cas utiliser également le résultat prouvé dans le cas scalaire concernant l'unicité de la solution de viscosité afin de retrouver la valeur du contrôle optimal donnée précédemment.

Afin d'améliorer notre généralisation du cas scalaire, nous allons maintenant considérer un autre modèle tridimensionnel dont, cette fois, les deux composantes du vecteur représentant les facteurs inhérents à l'environnement de la machine contiennent des termes stochastiques. On pourra ainsi étudier le modèle suivant modélisant un processus d'usure plus général :

$$\begin{cases} dx(t) = \rho_1(w(t))dt \\ dy(t) = f_1(w(t))dt + b_1u_1(t)dt + \sigma_1(w(t))dW_1(t) \\ dz(t) = f_2(w(t))dt + b_2u_2(t)dt + \sigma_2(w(t))dW_2(t) \end{cases} \quad (1.76)$$

où  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  sont des mouvements browniens standards indépendants. Le modèle est également sujet à être contrôlé en relation avec le critère de performance suivant :

$$J(x, y, z) = \int_0^{T_B} \left( \frac{1}{2} (r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t)) - c_0 \right) dt. \quad (1.77)$$

Pour ce cas, l'équation de programmation dynamique devient :

$$\inf_u \left[ \frac{1}{2} (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2) - c_0 + \rho_1 V_x + (f_1 + b_1 u_1) V_y + (f_2 + b_2 u_2) V_z - \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 V_y^2 - \frac{\theta}{2} \sigma_2^2 V_z^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_{yy} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 V_{zz} \right] = 0 \quad (1.78)$$

où la condition à la frontière reste inchangée. Le vecteur représentant les deux composantes des valeurs du contrôle optimal est donné par :

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{r_1} V_y \\ -\frac{b_2}{r_2} V_z \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

En considérant la même méthode que pour le cas précédent, on utilise la transformation suivante :

$$\frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(w) & 0 & 0 \\ 0 & -K_1(w) & 0 \\ 0 & 0 & -K_2(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

afin de rendre linéaire l'équation de programmation dynamique ci-dessous :

$$\begin{aligned} -c_0 + \rho_1 V_x + f_1 V_y + f_2 V_z - \left( \frac{b_1^2}{2r_1} + \frac{\theta}{2} \sigma_1^2 \right) V_y^2 - \left( \frac{b_2^2}{2r_2} + \frac{\theta}{2} \sigma_2^2 \right) V_z^2 \\ + \frac{1}{2} \sigma_1^2 V_{yy} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 V_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (1.81)$$

On a également :

$$\begin{bmatrix} K_1(w) \\ K_2(w) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{r_1 \sigma_1^2} + \theta \\ \frac{b_2^2}{r_2 \sigma_2^2} + \theta \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

En procédant de la même manière qu'auparavant, on se retrouve avec l'équation de Kolmogorov suivante qui inclut, tel que prévu, des termes contenant les dérivées secondes en  $y$  et  $z$  de la fonction  $\phi$ , qui représentent les effets stochastiques des facteurs environnementaux :

$$\begin{aligned} c_0 \phi - \frac{\rho_1 \phi_x}{\psi} + \left( \frac{f_1}{K_1} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{K_{1,y}}{K_1^2} \right) \phi_y + \left( \frac{f_2}{K_2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{K_{2,z}}{K_2^2} \right) \phi_z \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{K_1} \phi_{yy} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{K_2} \phi_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Le processus de diffusion tridimensionnel correspondant à cette équation est donné par :

$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{\rho_1}{\psi} dt \\ dY(t) = \left( \frac{f_1}{K_1} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{K_{1,y}}{K_1^2} \right) dt + \sigma_1 K_1^{-1/2} dW_1(t) \\ dZ(t) = \left( \frac{f_2}{K_2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{K_{2,z}}{K_2^2} \right) dt + \sigma_2 K_2^{-1/2} dW_2(t) \end{cases} \quad (1.84)$$

Les fonctions devant les mouvements browniens représentent les écarts-types infinitésimaux des processus stochastiques en considération et doivent donc être positives. Il est intéressant de noter que le premier modèle tridimensionnel considéré est en fait un cas particulier du second modèle d'usure en prenant les fonctions  $h_1$  et  $\sigma_1$  égales à zéro. Une fois ces résultats établis, il devient trivial de généraliser cette procédure de manière à pouvoir calculer la valeur du contrôle optimal pour un processus à  $n$  dimensions de la même forme.

Encore une fois, il est important de résoudre des problèmes de manière explicite, et ce, pour des cas où le théorème de Kuhn ne peut s'appliquer. Pour ce faire, nous allons tout d'abord considérer le modèle d'usure tridimensionnel initial avec :

$$dz(t) = z(t)dt + z(t)u(t)dt + (z^2(t))^{1/2} dW(t). \quad (1.85)$$

Il s'ensuit alors que la deuxième composante du vecteur représentant les facteurs environnementaux correspond à un mouvement brownien géométrique, qui possède une frontière inaccessible à l'origine. On va supposer que  $z(0) = z$  est négatif. De plus, afin de ne pas trop alourdir les expressions on va supposer que le paramètre de risque  $\theta$  est égal à zéro. En choisissant :

$$r_0 = -(B-x)yz \quad (1.86)$$

la valeur de  $K(w)$  se réduit tout simplement à  $(r_0)^{-1}$ . Si la dérivée de  $y(t)$  par rapport au temps donnée par  $\eta_1$  est choisie comme étant positive, alors il convient

de prendre  $y$  positif. Ceci implique que  $r_0$  est également positif tel qu'il se doit. On doit à présent résoudre l'équation différentielle linéaire suivante :

$$c_0\phi - \frac{\rho_1\phi_x}{\psi_1} - \frac{\eta_1\phi_y}{\psi_2} + \left( \frac{f_1}{K} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{K_z}{K^2} \right) \phi_z + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{K} \phi_{zz} = 0. \quad (1.87)$$

Afin d'obtenir une solution qui satisfait aux conditions aux frontières spécifiques à ce problème, on choisit les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  comme suit :

$$\begin{cases} \psi_1 = 2\rho_1 y^{-1} z^{-1} (B-x)^{-2} \\ \psi_2 = -2\eta_1 y^{-3} z^{-2} (B-x)^{-2} \end{cases} \quad (1.88)$$

Le coût rattaché à l'opération et au maintien de la machine par unité de temps doit être positif. On choisit alors :

$$c_0 = (B-x)^2 y^2 z^2 \quad (1.89)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\phi = \exp((B-x)yz). \quad (1.90)$$

À ce moment-ci, il est crucial de reconnaître que les inconnues  $\rho_1$  et  $\eta_1$  doivent être positives et telles que les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  soient compatibles entre elles dans le but d'obtenir une valeur appropriée pour  $V(x, y, z)$ , tel que spécifié auparavant. Le choix de la nature de ces fonctions est laissé au soin de l'opérateur de la machine qui motivera ce choix selon le type de processus d'usure que la

machine subit ( $\rho_1$  peut être proportionnel à  $y(t)$ , par exemple (voir Lin et Cheng (1989))).

Le même genre de raisonnement, doublé des mêmes conditions aux frontières, s'applique également au second modèle tridimensionnel. Le vecteur représentant les facteurs environnementaux est donné par :

$$\begin{cases} dy(t) = y(t) dt + y(t)u(t) dt + (y^2(t))^{1/2} dW(t) \\ dz(t) = z(t) dt + z(t)u(t) dt + (z^2(t))^{1/2} dW(t) \end{cases} \quad (1.91)$$

En prenant :

$$r_1 = r_2 = -(B-x)yz \quad (1.92)$$

et

$$\phi = \exp((B-x)yz) \quad (1.93)$$

on s'aperçoit qu'en choisissant :

$$c_0 = 3(B-x)^2 y^2 z^2 \quad (1.94)$$

on obtient :

$$\psi = \rho_1 y^{-2} z^{-2} (B-x)^{-3} \quad (1.95)$$

On voit bien que la résolution de ce dernier exemple s'est faite quelque peu artificiellement, puisque l'on a supposé dans un premier temps la solution  $\phi$  de l'équation de programmation dynamique pour ensuite obtenir la valeur de la fonction  $\psi$ . Néanmoins, le fait que l'on aboutisse à une solution valide satisfaisant à toutes les conditions du problème permet d'envisager que de nombreuses autres solutions plus réelles pourront servir à mieux contrôler certains types de machines.

Cette remarque permet de clore notre discussion sur le thème de la modélisation et du contrôle. On a voulu dévoiler à travers des exemples concrets comment les processus de diffusion pouvaient *modéliser* des processus d'usure d'une part, et comment plusieurs variables qui ont un effet significatif sur le bon fonctionnement d'une machine d'autre part, se trouvaient à être incorporées directement dans un modèle pouvant posséder  $n$  dimensions. Le fait de pouvoir *contrôler* de manière optimale les manœuvres d'opération de la machine et de s'ajuster par rapport à un facteur de risque dépendamment du taux d'usure initial de celle-ci, montre à quel point les processus de diffusion peuvent être efficaces pour définir et analyser un phénomène universel tel que celui de l'usure causé par le passage du temps.

## CHAPITRE 2

# Et la lumière fut

### 2.1 Énoncé du problème

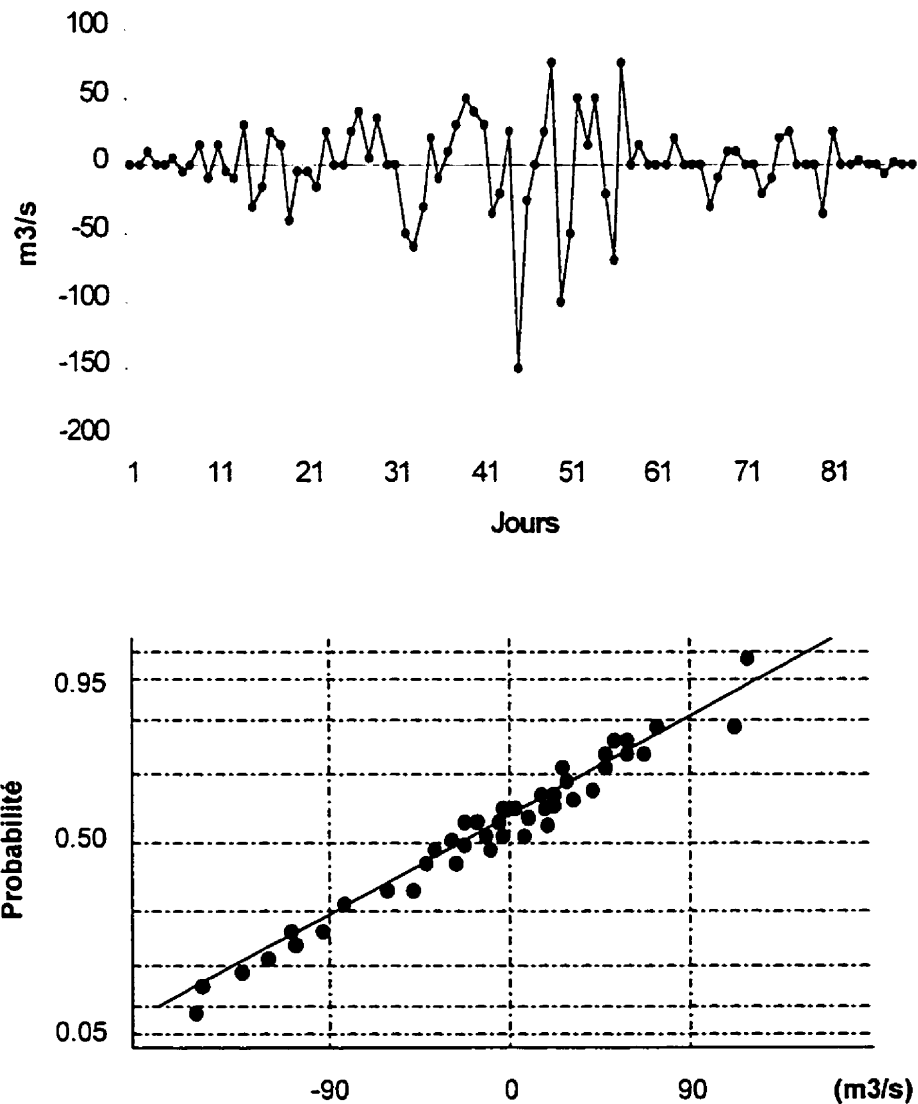
L'énergie hydroélectrique est une ressource naturelle essentielle au développement industriel du Québec en général et de la compagnie Alcan en particulier. Afin d'optimiser sa production d'électricité, la compagnie espère prévoir, avec un fort taux d'efficacité, le volume d'eau se déversant dans ses réservoirs provenant du bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean, et ce, pour au moins un jour à l'avance. Pour ce faire, elle a à sa disposition un modèle déterministe appelé PREVIS, qui tient compte de dix-huit paramètres, incluant la température, les précipitations et l'humidité. Ce modèle sert exclusivement à prédire la valeur des apports naturels et donc à estimer la production d'électricité de la compagnie.

L'objectif de cette partie de la recherche est de trouver une alternative au modèle PREVIS comme outil de prévision. Comme nous l'avons vu précédemment, les processus de diffusion peuvent se révéler très prometteurs pour ce genre de tâche. Cependant, en hydrologie, la revue de littérature a montré une aridité étonnante au niveau des travaux portant sur les processus de diffusion. Seuls, deux articles ont retenu notre attention. En particulier, Gottardi et Scarso (1994) ont montré l'importance des modèles de diffusion comme outils de prévision à court terme. Ils ont essentiellement démontré que leur performance est supérieure à celle des modèles statistiques de Box et Jenkins. Takasao et al. (1994) ont discrétisé un





où  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$  sont des fonctions qui dépendent de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et donc par conséquent sont dépendantes du temps  $t$ .  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$  sont définis comme des mouvements browniens standards. De plus, on suppose que  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$  sont indépendants comme dans le cas des processus d'usure.



**Figure 2.1 :** Différences secondes des débits (haut) et diagramme de probabilité normale (bas), Mistassibi, 1995.

Le premier modèle proposé pour prévoir le débit  $x(t)$  d'une rivière ou d'un bassin à l'instant  $t$  est inspiré par le fait que, lorsque que dérivée deux fois, la série temporelle du débit semble être stationnaire avec une distribution marginale qui suit une loi normale. À titre d'exemple, la figure 2.1 illustre la valeur des différences secondes de la série temporelle du débit de la rivière Mistassibi, ainsi que le diagramme de probabilité normale lui correspondant pour l'année 1995. Le modèle tridimensionnel considéré est le suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = y(t) dt \\ dy(t) = z(t) dt \\ dz(t) = m dt + \sigma dW(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $m$  et  $\sigma$  sont, respectivement, la moyenne infinitésimale et l'écart-type infinitésimal du mouvement brownien. On définit  $\xi(t)$  comme étant l'état du système à l'instant  $t$ , c'est-à-dire les valeurs du débit, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde :

$$\xi(t) = (x(t), y(t), z(t)). \quad (2.3)$$

On peut montrer à l'aide de la théorie des processus de diffusion (Cox et Miller (1965)) que :

$$[\xi(t) | \xi(0) = \xi] \sim N(\underline{\nu}, \underline{\Sigma}) \quad (2.4)$$

c'est-à-dire que si l'état initial  $\xi = (x, y, z)$  est connu ( $x = x(0)$ ,  $y = y(0)$ ,  $z = z(0)$ ), alors l'état du système à l'instant  $t$  suit une distribution multinormale de vecteur

moyen  $\underline{v}$  et de matrice de covariance  $\underline{\Sigma}$ . Ces paramètres de la distribution sont donnés par :

$$\underline{v}^T = \begin{pmatrix} x + yt + z \frac{t^2}{2} + m \frac{t^3}{6} \\ y + zt + m \frac{t^2}{2} \\ z + mt \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

et

$$\underline{\Sigma} = \sigma^2 t \begin{pmatrix} \frac{t^4}{20} & \frac{t^3}{8} & \frac{t^2}{6} \\ \frac{t^3}{8} & \frac{t^2}{3} & \frac{t}{2} \\ \frac{t^2}{6} & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

La première composante du vecteur moyen joue un rôle primordial dans la détermination de nos prévisions. En effet, elle représente une estimation ponctuelle du débit. C'est également à travers cette composante que la performance du modèle sera évaluée. La matrice de covariance, de son côté, est utilisée afin de déterminer des intervalles de confiance pour notre prévision. Cependant, cette procédure requiert l'estimation d'un nouveau paramètre qui risque d'ajouter un degré d'incertitude au modèle. Puisque l'objectif de la compagnie Alcan est d'évaluer avec le plus d'exactitude possible la valeur des débits afin de planifier son budget en conséquence, le calcul d'intervalles de confiance n'a pas retenu notre attention pour la planification à court terme.

En prenant  $m = 0$  pour fins de simplicité, et en tenant compte des conditions initiales, la dernière équation du système d'équations différentielles (2.2) de notre modèle permet d'obtenir une expression pour le débit espéré  $x(t)$  à l'instant  $t$ . Cette expression se déduit à partir de la première composante de  $\underline{v}$  :

$$\hat{x}(t) = x + yt + z \frac{t^2}{2} . \quad (2.7)$$

Ce résultat théorique n'est cependant pas très pratique pour nous permettre d'effectuer directement certaines estimations de débits. En effet, dans la vie de tous les jours, il est impossible de mesurer la variable  $x(t)$  de façon continue : nous n'avons que des valeurs discrètes échelonnées sur un intervalle de temps. Il faut donc discrétiser l'expression qui nous donne la valeur du débit recherché en temps continu. On obtient alors une équation aux différences à l'instar d'une équation aux dérivées. On a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{X(t) - X(t - \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $X(t)$  représente la valeur exacte du débit à l'instant  $t$ , (c'est-à-dire  $t$  unités de temps après la lecture initiale du débit à l'instant  $t = 0$ ). Ainsi, en prenant  $\Delta t$  comme étant égal à un jour pour le problème qui nous intéresse, on obtient la meilleure approximation de  $y(t)$  :

$$y(t) = X(t) - X(t - 1) \quad (2.9)$$

En procédant de la même manière, on a :

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta Y(t)}{\Delta t} \\
 &= Y(t) - Y(t-1) \\
 &= [X(t) - X(t-1)] - [X(t-1) - X(t-2)] \\
 &= X(t) - 2X(t-1) + X(t-2).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les équations précédentes permettent d'estimer le débit espéré  $(\hat{X}(t+k))$  pour  $k$  jours à l'avance. En effet, en utilisant à nouveau l'expression pour le débit en temps continu (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(t+k) &= X(t) + kY(t) + \frac{k^2}{2} Z(t) \\
 &= X(t) + k[X(t) - X(t-1)] + \frac{k^2}{2}[X(t) - 2X(t-1) + X(t-2)] \tag{2.11} \\
 &= \left(1 + k + \frac{k^2}{2}\right)X(t) - (k + k^2)X(t-1) + \frac{k^2}{2}X(t-2) .
 \end{aligned}$$

En regardant cette équation, on se rend compte que le modèle tridimensionnel basé sur des processus de diffusion peut évaluer le débit espéré après un laps de temps de  $k$  jours, sans avoir à estimer un seul paramètre physique relié aux caractéristiques du bassin hydrographique que l'on considère. Mieux encore, l'évaluation du débit se fait sans l'ajout de variables exogènes incorporées au modèle.

Il est, à ce point-ci, important de mentionner que le fait de discrétiser le modèle nous ramène à une équation qui ressemble étrangement à celle d'un processus auto-régressif. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que le modèle de diffusion, à la base, permet d'obtenir une évaluation du débit en temps continu. Donc, indépendamment du pas de temps utilisé lors de la discrétisation, qui est en réalité dicté par la fréquence des mesures des débits (heures ou jours), on obtiendra toujours les mêmes coefficients. Ceci est un résultat très puissant puisque contrairement aux processus auto-régressifs, il ne sera pas nécessaire d'ajuster constamment les coefficients de notre modèle par rapport à de nouvelles données temporelles. En utilisant la même démarche, mais en l'appliquant à un tout autre système d'équations différentielles stochastiques, on pourra obtenir de nouvelles expressions qui permettront d'évaluer le débit de différentes manières. Quel sera le « meilleur » système? Cette question nous amène directement à l'évaluation de la performance de nos modèles comme outils de prévision. Pour nous aider à trouver une réponse, plusieurs critères ont été choisis dans le but de comparer l'efficacité des différents modèles pouvant être mis en place.

### **2.3 Ornstein-Uhlenbeck intégré**

Après avoir étudié et analysé la performance de modèles stochastiques bidimensionnels, tridimensionnels et quadridimensionnels, tous basés sur différents processus de diffusion, on a obtenu les meilleurs résultats à l'aide d'un système bidimensionnel d'équations différentielles qui décrit un processus particulier appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré (Cox et Miller, 1965). Bien qu'il existe une multitude de processus de diffusion, on a constaté empiriquement que les données recueillies suivaient une distribution gaussienne, ce qui restreint le choix de modèles à tester. Un modèle à deux dimensions

semblait également plausible, puisque si la dérivée seconde suit une distribution gaussienne alors on peut supposer que la dérivée première en suit une aussi.

À la base, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck a été proposé comme modèle pour décrire la vitesse d'une particule immergée dans un liquide (Ross, 1993). Le système d'équations différentielles est donné par :

$$\begin{cases} dx(t) = y(t) dt \\ dy(t) = -my(t) dt + \sigma dW(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $m$  et  $\sigma$  sont des constantes strictement positives et  $W(t)$  définit encore un mouvement brownien standard. La théorie basée sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Cox et Miller, 1965) permet d'obtenir, après intégration, le vecteur moyen, essentiel à l'évaluation du débit :

$$\underline{v}^T = \begin{pmatrix} x + y \left[ \frac{1 - e^{-mt}}{m} \right] \\ ye^{-mt} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

où  $(x, y)$  est l'état initial du système. L'expression qui donne la valeur du débit  $x(t)$  est la suivante :

$$\hat{x}(t) = x + y \left( \frac{1 - e^{-mt}}{m} \right). \quad (2.14)$$



La discrétisation de l'équation (2.14) s'opère de la même façon que précédemment et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(t+k) &= X(t) + Y(t) \left[ \frac{1 - e^{-mk}}{m} \right] \\
 &= X(t) + [X(t) - X(t-1)] \left( \frac{1 - e^{-mk}}{m} \right) \\
 &= \left( \frac{1 + m - e^{-mk}}{m} \right) X(t) - \left( \frac{1 - e^{-mk}}{m} \right) X(t-1) \quad .
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ainsi, cette équation permet d'évaluer directement le débit espéré pour un jour à l'avance. On a :

$$\hat{X}(t+1) = \left( \frac{1 + m - e^{-m}}{m} \right) X(t) - \left( \frac{1 - e^{-m}}{m} \right) X(t-1) \quad . \tag{2.16}$$

On peut donc voir que la prévision du débit de demain dépend à la fois des débits observés aujourd'hui et hier. On s'aperçoit également que le seul paramètre inhérent au système qu'il faut évaluer est la constante positive  $m$ . Une des approches classiques pour déterminer un paramètre à l'intérieur d'un processus stochastique est d'utiliser la méthode de vraisemblance maximale. Malheureusement, pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la méthode de vraisemblance maximale amène à résoudre une équation transcendante qui demeure impossible à traiter de manière analytique. Puisque le paramètre  $m$  est sensé représenter une caractéristique sous-jacente au bassin hydrographique en considération, on a décidé d'évaluer sa valeur optimale en simulant de nombreuses séries de prévisions, et en les comparant ensuite avec les valeurs

réelles observées. En fait, pour une année en particulier (i.e., 1993), les séries de données des trois bassins ont servi de calibrage. Par la suite, les séries de données des deux autres années (i.e., 1994 et 1995) ont servi à valider la valeur obtenue pour le paramètre  $m$ . Finalement, ce processus a été réitéré deux fois, en se servant des autres années comme périodes de calibrage. On a remarqué que la « meilleure » valeur pour  $m$  oscillait entre 2,3 et 2,8 sans altérations significatives entre les valeurs prévues des débits et celles observées. On a donc décidé d'établir une valeur optimale empirique de 2,5 pour le paramètre  $m$  propre au bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean.

## 2.4 Le modèle PREVIS

Afin de comparer adéquatement les processus de diffusion établis précédemment avec le modèle déterministe PREVIS, il semble important de décrire en quelques mots le fonctionnement de ce dernier modèle, déjà en place chez Alcan. PREVIS est, à l'origine, un modèle conceptuel de type global se basant sur une approche classique de modélisation des précipitations par rapport aux débits qui en découlent. Son implantation initiale s'est faite en 1979, après avoir été introduit par Kite (1978), et a été constamment amélioré par la suite. Ce modèle est constitué de 18 paramètres dont la détermination se fait durant la période de calibrage. Ces paramètres, énumérés dans le tableau 2.1 (Lauzon et al., 1997), servent essentiellement à la prévision du débit approprié pour l'application désirée. Le débit  $R_t$ , prévu à l'instant  $t$ , est donné par l'équation suivante :

$$R_t = \frac{A_{bas}}{86,4} \left[ \sum_{i=t-d_{UH}+1}^t (RSM_i + RP_i + RPS_i + RSTOR_i) UH_{t-i+1} + RGW_t \right] \quad (2.17)$$

où  $A_{bas}$  est la superficie du bassin, 86,4 est un facteur de conversion ( $\text{km}^2\text{mmd}^{-1}$  aux  $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ),  $d_{UH}$  est la valeur de l'effet de durée de l'hydrogramme unitaire,  $RSM$  est le débit dû à la fonte des neiges,  $RP$  est le ruissellement de surface,  $RPS$  est le ruissellement de surface saturé,  $RSTOR$  est le débit hypodermique,  $UH$  est la valeur de l'hydrogramme unitaire et  $RGW$  est l'équivalent du débit souterrain.

**Tableau 2.1 : Définition des paramètres du modèle PREVIS.**

<b>X<sub>1</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement dans les couches intermédiaires du sol</b>
<b>X<sub>2</sub></b>	<b>Coefficient de fonte de neige due à la chaleur</b>
<b>X<sub>3</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement de l'écoulement de surface</b>
<b>X<sub>4</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement de l'eau de fonte de neige</b>
<b>X<sub>5</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement de l'écoulement souterrain</b>
<b>X<sub>6</sub></b>	<b>Seuil pour le calcul de l'énergie due à la chaleur</b>
<b>X<sub>7</sub></b>	<b>Quantité d'eau souterraine au début de la simulation</b>
<b>X<sub>8</sub></b>	<b>Dénominateur pour l'atténuation du coefficient de fonte de neige due à la chaleur</b>
<b>X<sub>9</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement par percolation</b>
<b>X<sub>10</sub></b>	<b>Coefficient multiplicatif pour le calcul de l'évapotranspiration</b>
<b>X<sub>11</sub></b>	<b>Exposant pour la température moyenne dans l'équation du calcul de l'évapotranspiration</b>
<b>X<sub>12</sub></b>	<b>Valeur de l'évapotranspiration journalière en hiver</b>
<b>X<sub>13</sub></b>	<b>Coefficient de fonte de neige due à la pluie</b>
<b>X<sub>14</sub></b>	<b>Dénominateur pour l'atténuation du coefficient de fonte de neige due à la pluie</b>
<b>X<sub>15</sub></b>	<b>Seuil de précipitation journalière déterminant le début de l'écoulement de surface en régime saturé</b>
<b>X<sub>16</sub></b>	<b>Coefficient de ruissellement de l'écoulement de surface en régime saturé</b>
<b>X<sub>17</sub></b>	<b>Temps de pointe de l'hydrogramme unitaire du bassin</b>
<b>X<sub>18</sub></b>	<b>Pointe de l'hydrogramme unitaire du bassin</b>

Les 18 paramètres du modèle déterministe sont utilisés directement pour l'évaluation du débit prévu (Lauzon, 1995).

Ce modèle, comme on peut s'en douter, est très coûteux à implanter et à maintenir, puisque les variables associées à PREVIS doivent être observées et notées sur une base journalière. La première amélioration majeure apportée au modèle afin d'obtenir une meilleure prévision est la conception d'un algorithme de mise à jour. On a observé (Bouchard et Salesse, 1986) que les résidus (erreurs de prévision) du modèle déterministe initial possédaient une dépendance dans leur structure inhérente qui pouvait s'expliquer à travers une forte corrélation. C'est pourquoi une procédure de mise à jour a été incorporée au modèle, impliquant une modification des valeurs prévues du débit  $R_t$  du jour  $t$ , ou des débits des jours suivants  $R_{t+i}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), en ajoutant un terme de correction de la manière suivante :

$$R_{t+i}^n = R_{t+i} + (R_{t-1}^0 - R_{t-1}) \quad (2.18)$$

où  $R_{t+i}^n$  est la valeur modifiée ou « nouvelle » valeur du débit et  $R_{t-1}^0$  est la valeur observée du débit du jour précédent. Cette procédure est basée sur l'hypothèse que le modèle déterministe génère une erreur plus ou moins constante en réponse aux fluctuations du phénomène physique étudié. Bien sûr, cette supposition est bien loin de la réalité pour des prévisions à très long terme, mais elle semble valide pour des prévisions jusqu'à sept jours à l'avance (Bouchard et Salesse, 1986).

La seconde amélioration majeure a été l'implantation d'un filtre de Kalman. En étant capable de reformuler les caractéristiques du modèle PREVIS sous forme d'un vecteur d'états, l'ajout d'un filtre, qui initie à son tour un réajustement itératif des paramètres du vecteur d'états, permet d'obtenir un raffinement non négligeable des prévisions du débit désiré. Tous les détails concernant l'élaboration de ces équations sont donnés par Lauzon et al. (1997).

## 2.5 Résultats

Tout est maintenant en place afin de pouvoir effectuer des comparaisons entre le processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré et le modèle déterministe PREVIS d'une part, et les processus de diffusion tridimensionnels d'autre part. Le bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean peut être divisé en cinq sous-bassins importants, trois réservoirs majeurs et six centrales hydroélectriques (Lauzon et al., 1997). On s'intéressera plus particulièrement aux données appartenant aux réservoirs Chute du Diable et Lac-St-Jean ainsi qu'à la rivière Mistassibi. De plus, seules les données provenant des 90 jours de printemps (du 1<sup>er</sup> avril au 30 juin) seront utilisées pour évaluer les différents modèles stochastiques. Cette période de l'année est la plus critique car c'est à ce moment que la fonte des neiges s'effectue et que par conséquent de fortes crues peuvent survenir. Cette période engendre donc de grandes fluctuations dans les débits, ce qui rend les prévisions plus difficiles. Les modèles de diffusion seront testés en fonction des printemps des années 1993, 1994 et 1995, inclusivement.

L'évaluation de l'efficacité des différents modèles se fait à l'aide de quatre critères de performance. Le premier critère considéré est celui qui donne l'erreur standard (*STD*) :

$$STD = \sqrt{\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (\hat{X}_i(t) - X_i(t))^2} \quad (2.19)$$

où  $p$  est le nombre de journées de prévisions (90),  $X_i(t)$  est le débit observé au jour  $i$ , et  $\hat{X}_i(t)$  est le débit prévu correspondant. Il est évident que la valeur idéale de l'erreur standard est zéro.

Le second critère est le coefficient de corrélation ( $\rho$ ), qui est donné par l'expression suivante :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^p (\hat{X}_i(t) - \bar{\hat{X}}(t))(X_i(t) - \bar{X}(t))}{\sqrt{\sum_{i=1}^p (\hat{X}_i(t) - \bar{\hat{X}}(t))^2 \sum_{i=1}^p (X_i(t) - \bar{X}(t))^2}} \quad (2.20)$$

où  $\bar{\hat{X}}(t)$  et  $\bar{X}(t)$  sont les moyennes arithmétiques des débits prévus et observés, respectivement. Plus le coefficient de corrélation s'approche de la valeur 1, plus le modèle est efficace.

Ensuite, le critère de Nash ( $NC$ ) a pour but de comparer les prévisions données par le modèle mathématique avec la valeur moyenne des observations. Sa valeur est déterminée par l'équation suivante :

$$NC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^p (\hat{X}_i(t) - X_i(t))^2}{\sum_{i=1}^p (X_i(t) - \bar{X}(t))^2} \quad (2.21)$$

Lorsque le coefficient de Nash est situé entre zéro et un, le modèle prévoit plus efficacement que de simplement prendre comme valeur prévue la moyenne des observations. Encore une fois, plus le coefficient est proche de 1, meilleure est la prévision.

Finalement, le quatrième critère de performance utilisé pour évaluer chaque modèle est le critère de pointe (*PC*) :

$$PC = \frac{\left[ \sum_{i=1}^N (\hat{X}_i(t) - X_i(t))^2 X_i(t)^2 \right]^{1/4}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N X_i(t)^2}} \quad (2.22)$$

où  $N$  représente le nombre de données qui ont une valeur supérieure au tiers de la valeur moyenne des débits durant la crue. Ce critère permet de mesurer la qualité des prévisions de nos modèles durant la période critique de crue. L'objectif idéal serait d'obtenir une valeur du critère de pointe le plus proche possible de zéro.

Les figures 2.2, 2.3 et 2.4 comparent les valeurs réelles des débits observés pour les trois bassins qui nous intéressent, c'est-à-dire Chute du Diable, Lac-St-Jean et

Mistassibi, durant les printemps de 1993, 1994 et 1995 respectivement, par rapport aux valeurs des débits prévus pour une journée à l'avance par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré.

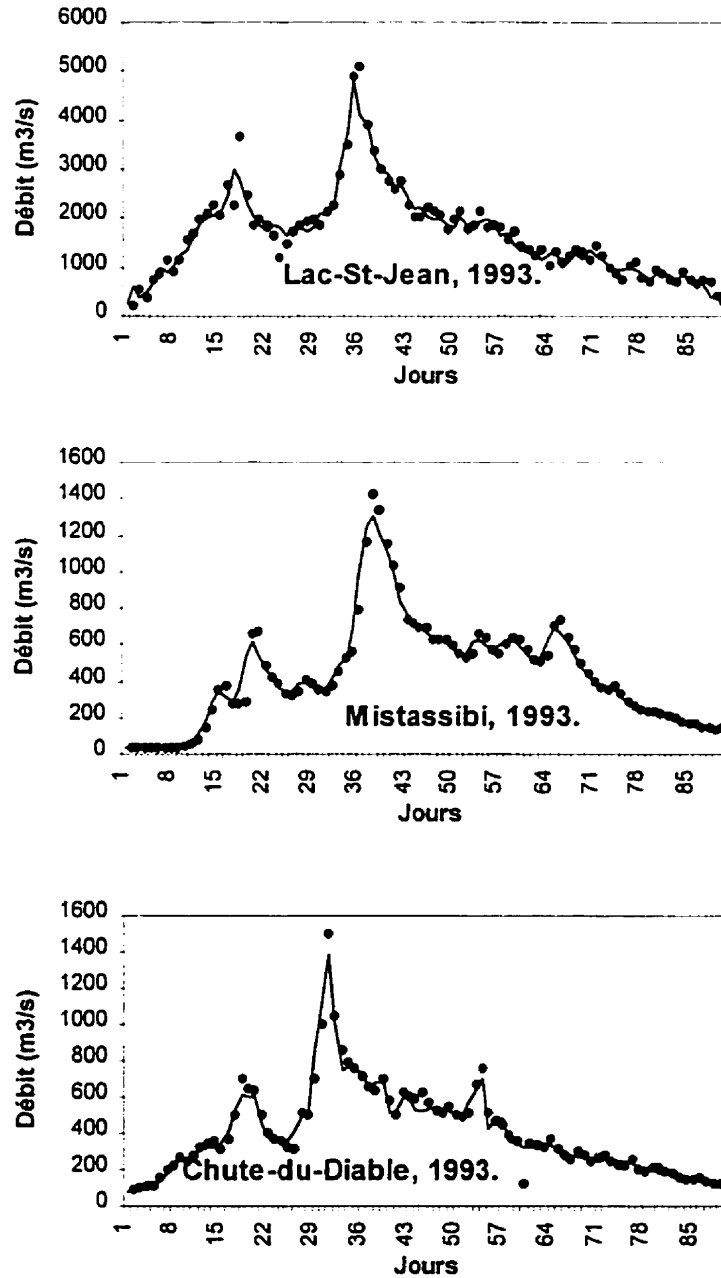


Figure 2.2 : Débits prévus (points •) vs débits observés (ligne pleine —), 1993.



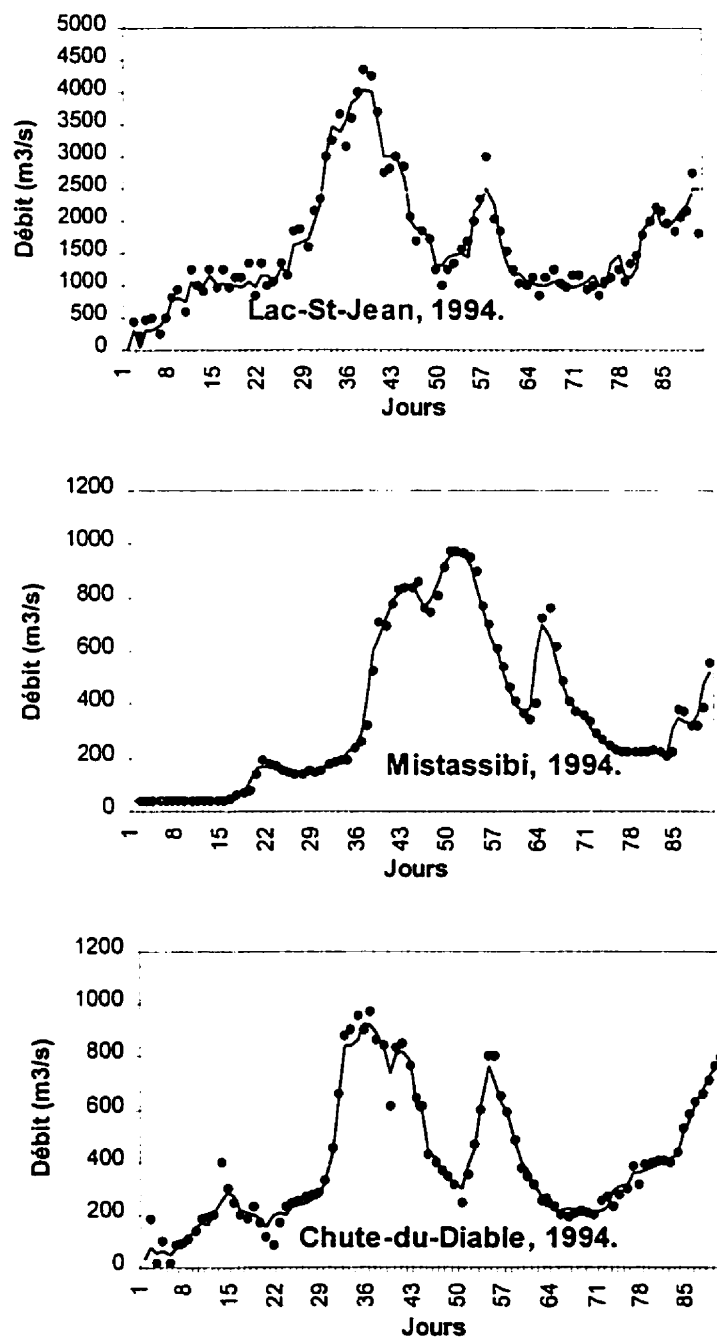


Figure 2.3 : Débits prévus (points •) vs débits observés (ligne pleine —), 1994.

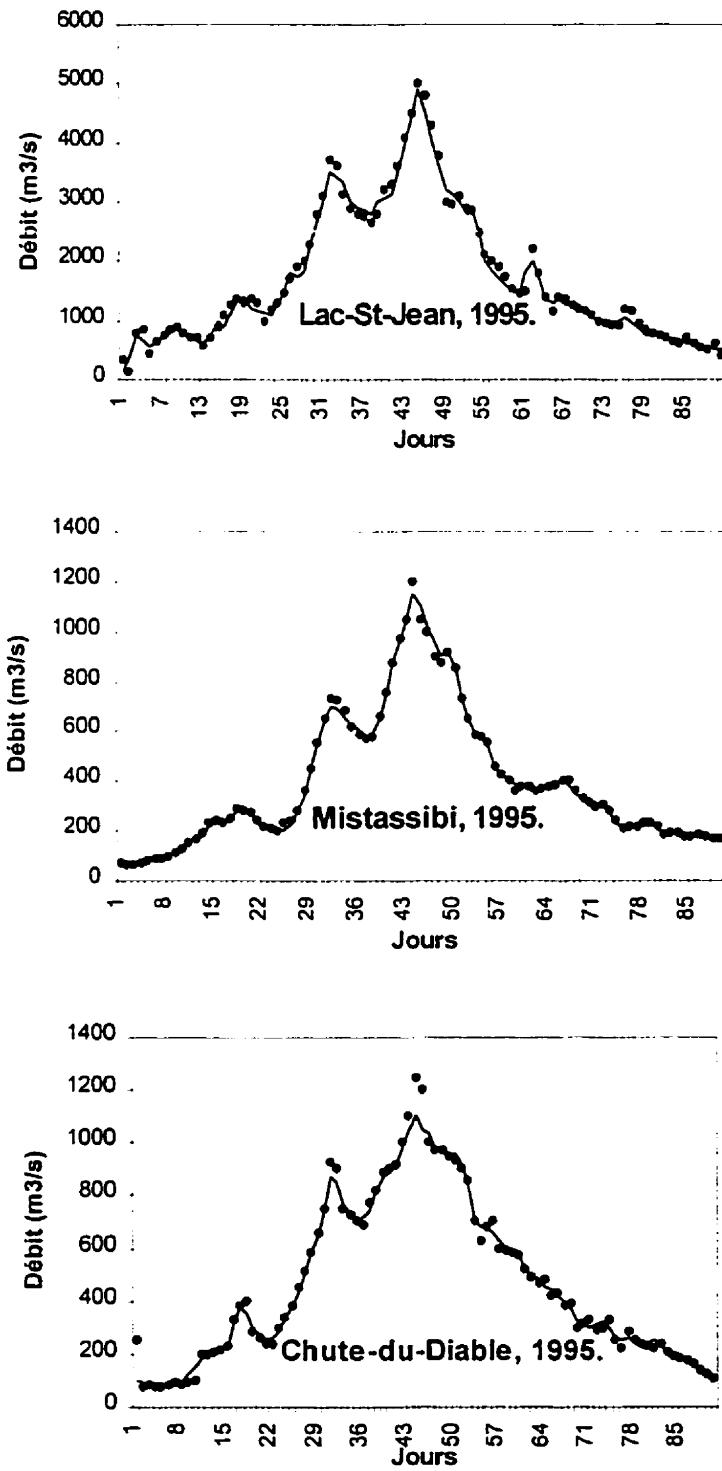


Figure 2.4 : Débits prévus (points •) vs débits observés (ligne pleine —), 1995.

Afin de corroborer par des chiffres ce qui se remarque aisément à l'œil nu, les valeurs des quatre critères de performance ont été calculées et répertoriées dans les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 pour les trois années qui nous intéressent. De plus, on retrouve dans ces tableaux, pour fins de comparaison, les valeurs des critères de performance pour le processus de diffusion tridimensionnel initialement étudié et pour le modèle déterministe PREVIS utilisé par l'Alcan.

**Tableau 2.2** : Critères de performance pour les modèles, 1993 (O-U :Ornstein-Uhlenbeck; 3-D : mouvement brownien; PVS : PREVIS).

	Chute du Diable				Mistassibi				Lac-St-Jean			
	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>
<b>O-U</b>	91 *	0,94 *	0,85 *	0,25	43 *	0,99 *	0,88 *	0,18 *	448 *	0,88 *	0,76 *	0,32
<b>3-D</b>	136	0,89	0,71	0,66	48	0,99	0,86	0,19	914	0,74	0,26	0,89
<b>PVS</b>	118	0,90	0,82	0,23 *	100	0,94	0,88	0,19	480	0,87	0,76	0,24 *

**Tableau 2.3** : Critères de performance pour les modèles, 1994 (O-U :Ornstein-Uhlenbeck; 3-D : mouvement brownien; PVS : PREVIS).

	Chute du Diable				Mistassibi				Lac-St-Jean			
	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>
<b>O-U</b>	52 *	0,97 *	0,95 *	0,17 *	37 *	0,99 *	0,97 *	0,09 *	329 *	0,95 *	0,90 *	0,20
<b>3-D</b>	80	0,95	0,89	0,28	44	0,98	0,97	0,12	514	0,89	0,64	0,56
<b>PVS</b>	99	0,94	0,87	0,19	88	0,96	0,90	0,17	375	0,94	0,88	0,18 *

**Tableau 2.4** : Critères de performance pour les modèles, 1995 (O-U :Ornstein-Uhlenbeck; 3-D : mouvement brownien; PVS : PREVIS).

	Chute du Diable				Mistassibi				Lac-St-Jean			
	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>	<i>STD</i> m <sup>3</sup> /s	$\rho$	<i>NC</i>	<i>PC</i>
<b>O-U</b>	38 *	0,99 *	0,98 *	0,05 *	20 *	0,99 *	0,99 *	0,02 *	298	0,97 *	0,95 *	0,15
<b>3-D</b>	71	0,97	0,95	0,07	23	0,99	0,98	0,03	514	0,92	0,82	0,37
<b>PVS</b>	74	0,98	0,96	0,14	54	0,99	0,97	0,13	287 *	0,97	0,95	0,14 *

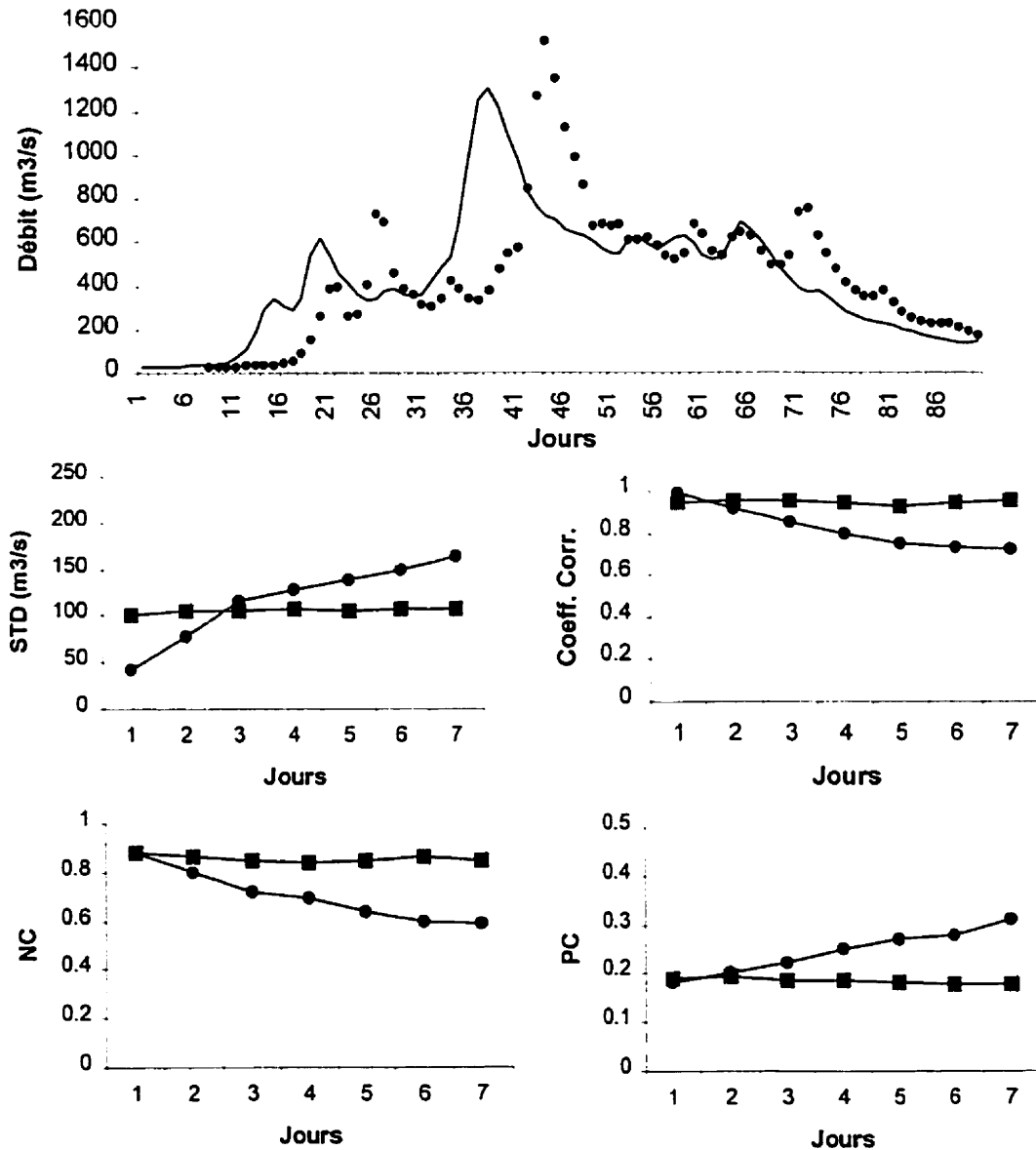
Les astérisques dispersés dans les colonnes des tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 indiquent les modèles mathématiques qui donnent le meilleur résultat pour chacun des critères de performance. On s'aperçoit très vite au premier coup d'œil que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré est systématiquement plus efficace que le modèle déterministe utilisé par la société Alcan. Il est de plus beaucoup moins coûteux à implanter, puisqu'aucun paramètre ne doit être évalué afin d'effectuer une prévision. Avec ces chiffres à l'appui, on note que le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck intégré donne une erreur moyenne de 20% inférieure (en valeur absolue) à celle du modèle PREVIS. Ces résultats sont tout à fait remarquables pour des prévisions à un jour d'avance, d'autant plus qu'aucune variable exogène n'est venue se greffer à notre modèle. Il est à noter également que bien que le modèle tridimensionnel donne des résultats encourageants, il est bien loin de la performance du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck intégré.

Il est aussi important de mentionner que, pour les trois années qui nous intéressent, les erreurs moyennes du processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré ont été calculées et semblaient osciller autour de l'origine, ce qui nous indique que le

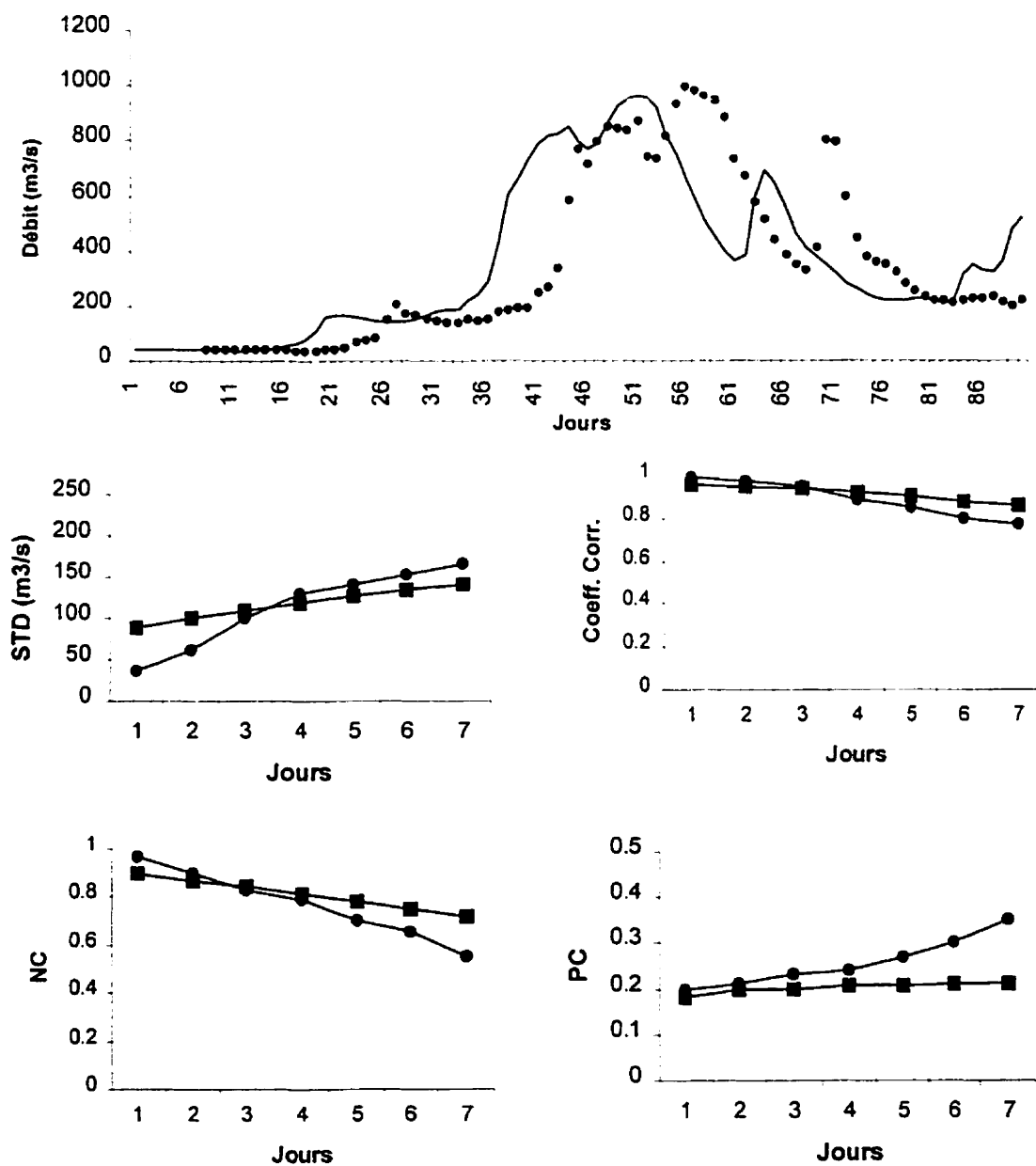
modèle utilisé n'est pas biaisé. Il est clair que la force de notre modèle réside dans le fait qu'il est beaucoup plus fiable que le modèle déterministe pour des prévisions à un jour, et beaucoup moins coûteux dû à l'absence presque totale de paramètres à estimer.

Cependant, les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 indiquent clairement que le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck intégré n'est pas nettement supérieur au modèle déterministe PREVIS en ce qui a trait au critère de pointe (*PC*). En effet, cinq fois sur neuf, PREVIS prévoit avec plus de précision les débits critiques de crues que son équivalent stochastique. Ceci peut s'expliquer par le fait que les modèles basés sur les précipitations, s'ils sont soigneusement mis à jour, tiennent compte intrinsèquement des phénomènes physiques reliés à l'écoulement des eaux, et donc sont plus enclins à prévoir plus efficacement des événements qui sortent de l'ordinaire. On voit bien que, même si l'absence de paramètres à évaluer dans notre modèle bidimensionnel diminue le coût d'implantation, il n'en reste pas moins que cela va affecter le degré de précision de nos prévisions d'événements critiques comme les débits en période de crues. Pour des raisons similaires, les prévisions à long terme (plusieurs journées à l'avance) seront également entachées d'imprécisions notables. Les figures 2.5, 2.6 et 2.7 montrent les valeurs des débits réellement observés pour la rivière Mistassibi, pour les trois années qui nous intéressent, versus les prévisions correspondantes avec sept jours d'avance en utilisant le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck intégré. Les graphiques donnant les valeurs des quatre différents critères de performance obtenues avec le modèle PREVIS et le modèle stochastique pour chaque journée des prévisions à sept jours sont également tracés. On voit clairement qu'après deux jours de prévision le modèle aux dix-huit paramètres se comporte plus efficacement que notre

modèle. Il semble donc évident que la prochaine étape essentielle à l'amélioration de nos prévisions serait d'incorporer des variables exogènes à notre modèle.



**Figure 2.5 :** Débits prévus (points ●) vs débits observés (ligne —) pour un horizon de sept jours et critères de performance (Ornstein-Uhlenbeck intégré : points ● ; PREVIS : carrés ■), Mistassibi, 1993.



**Figure 2.6 :** Débits prévus (points ●) vs débits observés (ligne —) pour un horizon de sept jours et critères de performance (Ornstein-Uhlenbeck intégré : points ●; PREVIS : carrés ■), Mistassibi, 1994.

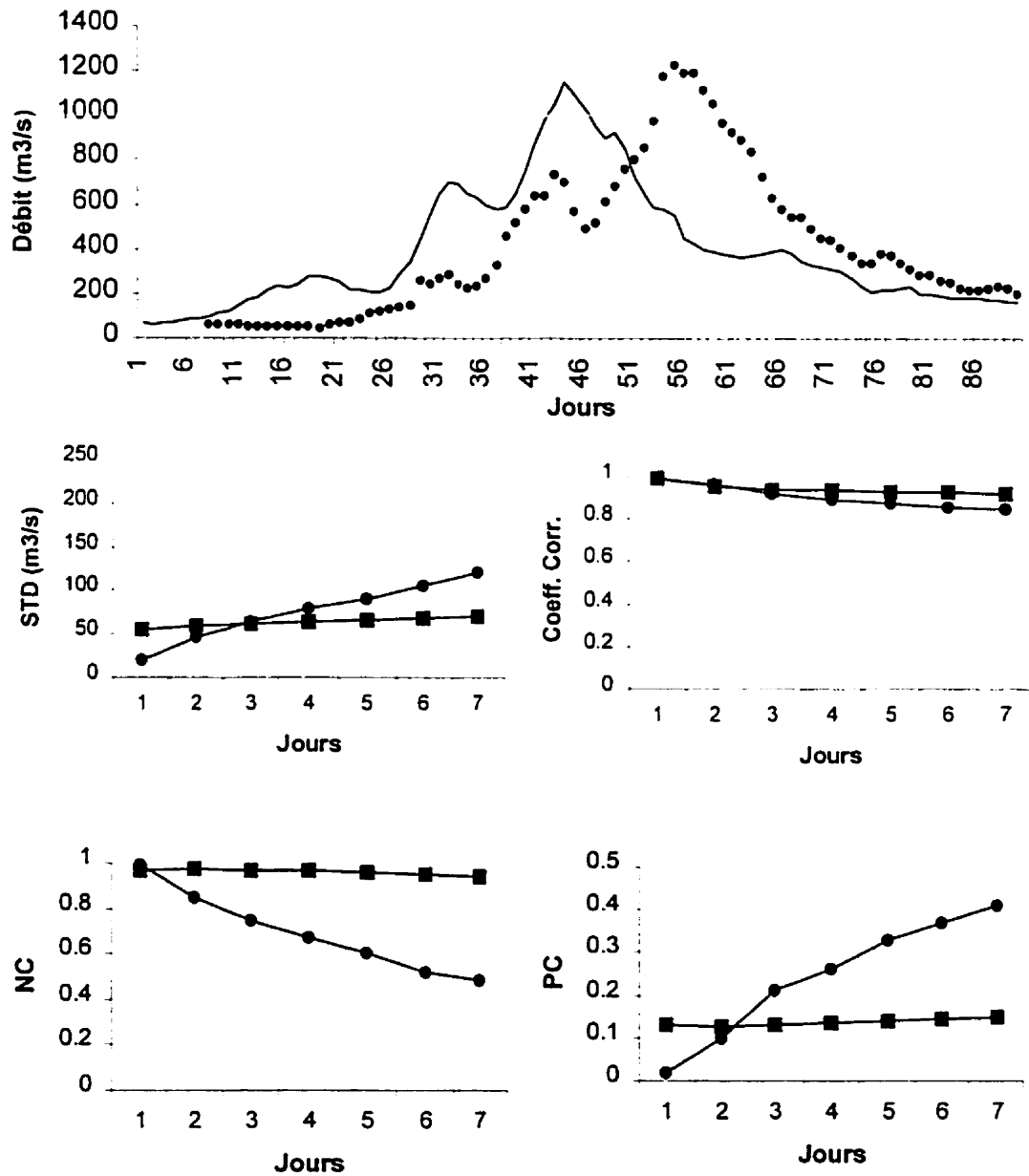


Figure 2.7 : Débits prévus (points •) vs débits observés (ligne —) pour un horizon de sept jours et critères de performance (Ornstein-Uhlenbeck intégré : points • ; PREVIS : carrés ■), Mistassibi, 1995.



## 2.6 Exemple de contrôle optimal

Avant de conclure la recherche sur ce thème, il est très intéressant de constater que les travaux entrepris dans le premier chapitre sur les processus d'usure peuvent également être utilisés pour cette application de prévision des débits. En effet, considérons  $x(t)$  comme étant le débit à l'instant  $t$  et incorporons cette variable dans un système bidimensionnel qui est censé représenter un processus d'usure. À prime abord cela semble un peu ridicule puisque l'on sait que le débit peut fluctuer à la hausse ou à la baisse et donc ne serait sûrement pas un candidat pour être modélisé par un processus d'usure qui est toujours grandissant. Cependant, si l'on se situe en période de crue, l'expérience montre que pendant un certain laps de temps le débit ne fait pratiquement qu'augmenter de façon globale. Donc, pourquoi ne pas considérer le problème de contrôler de manière optimale le débit qui entre dans les réservoirs de la société Alcan?

On peut donc étudier le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = y(t) dt \\ dy(t) = -y(t) dt + bu(t) dt + dW(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

où un terme de contrôle ( $bu(t)$ ) a été ajouté à la composante définissant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck normalisé. Cette variable de contrôle peut s'interpréter comme suit : une valeur négative du contrôle signifie que l'on utilise de l'eau afin de produire de l'électricité ou que l'on relâche un trop-plein d'eau dans les réservoirs, tandis qu'une valeur positive indique que l'on fait des efforts pour essayer de renflouer ces mêmes réservoirs (en s'approvisionnant ailleurs en

eau, par exemple (Lefebvre (1995))). L'objectif est bien sûr de minimiser le critère de coût suivant :

$$C(\theta) = -\frac{1}{\theta} \log E[\exp(-\theta J)] \quad (2.24)$$

où la formulation est la même que pour un processus d'usure, avec

$$J(x, y) = \int_0^{T(x, y)} \left[ \frac{1}{2} q u^2(t) + \lambda \right] dt + K[x(T), y(T)] \quad (2.25)$$

pour lequel  $q = q(x(t), y(t))$  est positif et  $\lambda$  est une constante. En d'autres termes, on suppose que les coûts liés au contrôle prennent une forme quadratique. Le coût terminal (coût d'arrêt)  $K[x(T), y(T)]$  est choisi de manière à empêcher que le débit de la rivière atteigne un point culminant où le risque d'inondation est important. Cet objectif s'accomplit en prenant :

$$T(x, y) (= T(y)) = \inf \{ t \geq 0 : y(t) = 0 \mid y(0) = y > 0 \} \quad (2.26)$$

et

$$K[x(T), y(T)] = \beta x(T) \quad (2.27)$$

où  $\beta$  est une constante positive. Si on choisit  $\lambda$  également positive, l'objectif se raffine et on cherche aussi à minimiser le temps qu'il faut à la variable  $y(t)$  pour atteindre zéro, tout en tenant compte du coût de contrôle quadratique. Puisque

l'on a supposé  $y(0)$  positif, le choix du temps d'arrêt  $T(x, y)$  implique que le débit ne cessera d'augmenter entre les instants  $t = 0$  et  $t = T(x, y)$ . Cette hypothèse, encore une fois, est très réaliste en temps de crue.

En reprenant les résultats du premier chapitre et en utilisant le théorème de Kuhn, le contrôle optimal pour ce problème est donné par :

$$u^* = -\frac{b}{q} F_y \quad (2.28)$$

où  $F = F(x, y)$  peut être obtenu à partir de l'équation suivante :

$$\exp(-\alpha F(x, y)) = E_{(x, y)}[\exp(-\alpha \lambda \tau - \alpha \beta x_1(\tau))]. \quad (2.29)$$

Dans la formule précédente, la variable  $x_1$  est associée à  $y_1$  afin de considérer le processus non contrôlé  $(x_1(t), y_1(t))$  qui correspond au processus  $(x(t), y(t))$ ,  $\tau (= \tau(y))$  est l'équivalent de la variable  $T$  mais pour le processus non contrôlé, et  $\alpha$  est une constante telle que :

$$\alpha = \frac{b^2}{q} + \theta. \quad (2.30)$$

Si on suppose que les expressions  $b(x(t), y(t))$  et  $q(x(t), y(t))$  sont des constantes positives, alors la relation précédente est bien sûr vérifiée. Comme nous l'avons mentionné pour les processus d'usure, il faut s'assurer que  $P[\tau(y) < \infty] = 1$  pour avoir le droit d'utiliser le résultat de Kuhn.

L'évaluation de la fonction génératrice des moments correspondant à l'instant de premier passage  $x_1(\tau)$  a été déjà réalisée par Lefebvre (1989) pour des hypothèses similaires, et son résultat peut être généralisé pour obtenir la fonction génératrice des moments conjointe de  $\tau$  et de  $x_1(\tau)$  :

$$E_{(x,y)}[\exp(-\alpha\tau - cx_1(\tau))] = \exp\left(-cx + \frac{y^2}{2}\right) \frac{U(d, \sqrt{2}(y+c))}{U(d, \sqrt{2}c)} \quad (2.31)$$

où  $U(\cdot, \cdot)$  désigne une fonction parabolique cylindrique (Abramowitz et Stegun (1965, p.687)). Le paramètre  $d$  est donné par :

$$d := a - \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2} \quad (2.32)$$

où le paramètre  $a$  est supposé être positif ou nul.

Ainsi, si on admet que le facteur de risque  $\theta$  est plus grand que ou égal à  $-b^2/q$ , on peut écrire :

$$\exp(-\alpha F(x, y)) = \exp\left(-\alpha\beta x + \frac{y^2}{2}\right) \frac{U(\delta, \sqrt{2}(y+\alpha\beta))}{U(\delta, \sqrt{2}\alpha\beta)} \quad (2.33)$$

où

$$\delta := \alpha\lambda - \frac{(\alpha\beta)^2}{2} - \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

Un petit calcul nous permet d'obtenir :

$$F_y = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) y + \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha\beta) - \frac{U(\delta - 1, \sqrt{2}(y + \alpha\beta))}{U(\delta, \sqrt{2}(y + \alpha\beta))} \right\} \quad (2.35)$$

qui est nécessaire à l'évaluation du contrôle optimal  $u^*$ . Afin de bien s'assurer que  $P[\tau(y) < \infty] = 1$ , on choisit  $c$  égal à zéro et on prend la limite quand  $a$  décroît vers zéro dans l'expression de l'espérance mathématique. On a :

$$\lim_{a \downarrow 0} e^{y^2/2} \frac{U(a - 1/2, \sqrt{2}y)}{U(a - 1/2, 0)} = e^{y^2/2} \frac{e^{-y^2/2}}{1} = 1 \quad (2.36)$$

tel que désiré.

Voilà qui conclut le thème de la modélisation et de la prévision. Les processus de diffusion se sont avérés de remarquables outils de *prévision* à court terme pour le débit des rivières du bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean. Ces prévisions ont été effectuées sans l'assistance de paramètres inhérents à la situation observée. Cette propriété frappante laisse présager que d'aussi bons résultats pourraient être obtenus pour d'autres bassins hydrographiques et par extension pour d'autres phénomènes physiques. Bien sûr le choix du processus *modélisant* le plus fidèlement possible un phénomène en particulier reste encore proche du domaine de l'essai et de l'erreur. Néanmoins les résultats probants viennent confirmer le potentiel des processus de diffusion comme outils de modélisation et de prévision. Les travaux futurs de recherche pourraient se

pencher vers des moyens d'améliorer ces modèles en y incorporant des variables exogènes ou en y ajoutant des filtres par exemple.

## CHAPITRE 3

# Le quantron

### 3.1 Motivation

- « Combien font deux fois trois? »
- « Six! », répond fièrement l'élève qui a étudié par cœur ses tables de multiplication la veille.
- « Tu pourrais alors me dire combien font vingt-deux fois trois? »
- « Je ne sais pas maîtresse, je ne connais pas la table de vingt-deux, et la table de trois que vous nous avez donnée à apprendre s'arrête à trois fois neuf. »

Bien qu'il ait tous les outils nécessaires pour trouver le résultat, l'élève ne peut le donner puisqu'on ne lui a pas encore expliqué les principes du processus de multiplication. Après quoi, l'élève saura exécuter n'importe quelle multiplication quelle qu'elle soit. Telle est la splendeur de l'esprit humain. Pour venir à bout d'un problème, le cerveau, ce puissant général du corps humain a à sa disposition une formidable armée de cellules que l'on nomme : neurones. Ces mystérieux représentants de l'infiniment petit nous ont permis de bâtir les pyramides, de scinder l'atome, de marcher sur la lune. Mais, ironiquement, comprendre comment le cerveau fonctionne demeure encore un point d'interrogation. Une énigme qui soulève bien des passions chez les neurologues en particulier. Ces derniers, grands explorateurs de notre matière grise, s'acharment à vouloir découvrir les mécanismes de la pensée. Car un principe scientifique veut que

lorsque l'on comprend entièrement un phénomène, on est capable de le reproduire et donc de le contrôler.

Reproduire la pensée, créer une « intelligence artificielle », construire une machine capable de réfléchir. voilà le rêve que caresse l'homme depuis longtemps. Depuis quelques années, il y a effervescence dans le milieu scientifique. Elle est due au fait que l'on soupçonne l'être humain d'apprendre et de raisonner en modifiant progressivement les connexions entre ses neurones. On peut imaginer le cerveau au repos comme étant constitué d'un enchevêtrement complexe de fils électriques. Ce sont eux qui sont responsables de transporter le courant, c'est-à-dire l'information nécessaire à l'apprentissage et à la réflexion. Ces fils sont attachés ensemble par des nœuds qui représentent les neurones. Ceux-ci vont filtrer l'information. En effet, le courant qui rencontre un nœud trop serré ne pourra continuer son chemin. Par contre, un nœud moins serré laissera passer une certaine quantité de courant, donc d'informations. Lorsque l'interrupteur est en marche, c'est-à-dire lorsque le cerveau est en train de fonctionner, on assiste à une surprenante opération : l'action de penser consisterait à serrer et à desserrer petit à petit ces nœuds de manière à obtenir, une fois le parcours terminé, la réponse ou la solution désirée en bout de ligne.

En imitant le cerveau (Wu, 1995), des scientifiques ont composé virtuellement un entrelacement de fils noués qu'ils ont baptisé réseau de neurones artificiel. Les premières applications des réseaux de neurones appartiennent au domaine de la reconnaissance des formes et du langage (Lippmann, 1987) où ils sont utilisés comme classificateurs. Par la suite, on s'aperçoit de leur utilité comme estimateurs et donc comme outils de prévision. On les retrouve dans les domaines les plus insolites comme en analyse de mortalité (Telfer et al., 1993), pour prédire



le trafic routier (Yu et Chen, 1993) ou bien pour prévoir le taux de succès des étudiants diplômés (Hardgrave et al., 1994).

Quelle que soit l'application, il faut bien comprendre que le réseau neuronal opère comme une boîte noire possédant des entrées représentant les données du problème, et des sorties exprimant les solutions ou les prévisions désirées. Tout ce qui relie ces deux extrêmes est un enchevêtrement de connexions duquel on ne peut tirer de règles analytiques, comme on pourrait le faire avec un modèle statistique par exemple. C'est pourquoi les réseaux de neurones souffrent régulièrement de problèmes de convergence. Ainsi, si on pouvait contrôler plus efficacement les opérations se déroulant à l'intérieur de cette boîte noire, on aboutirait sûrement à de bien meilleures prévisions. Mais comment procéder? On peut évaluer la solidité d'une chaîne à partir de la vigueur de son maillon le plus faible. De la même façon, on peut mesurer l'efficacité d'un réseau en étudiant les éléments les plus fondamentaux qui le composent : les neurones.

Plus spécifiquement, McCulloch et Pitts (1943) ont étudié la structure interne d'un neurone, comprenant le corps de la cellule, l'axone et les dendrites, afin de créer son équivalent artificiel : le perceptron. La figure 3.1 illustre le principe de la structure du perceptron. Les entrées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  du réseau se propagent jusqu'au corps du neurone tout en étant influencées par les poids  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Là, toutes ces valeurs pondérées sont sommées et l'ajout d'un biais  $\theta$  permet d'amplifier ou de diminuer l'apport de ces contributions. Le résultat qui s'ensuit sera propagé à travers l'axone pour être ensuite modifié par une fonction d'activation  $\phi$  qui attribuera une valeur de sortie au perceptron. Mais Minsky et Papert (1988) ont montré les inconvénients et surtout les limites d'une telle représentation rudimentaire. Par exemple, en ce qui concerne la reconnaissance d'images, le perceptron, dont la sortie est linéaire, est tout simplement incapable

de distinguer des formes qui ne sont pas linéairement séparables. En particulier, les auteurs précédents ont établi, sans le vouloir, un test qui a été repris par une multitude de chercheurs pour évaluer la puissance de leurs propres réseaux de neurones.

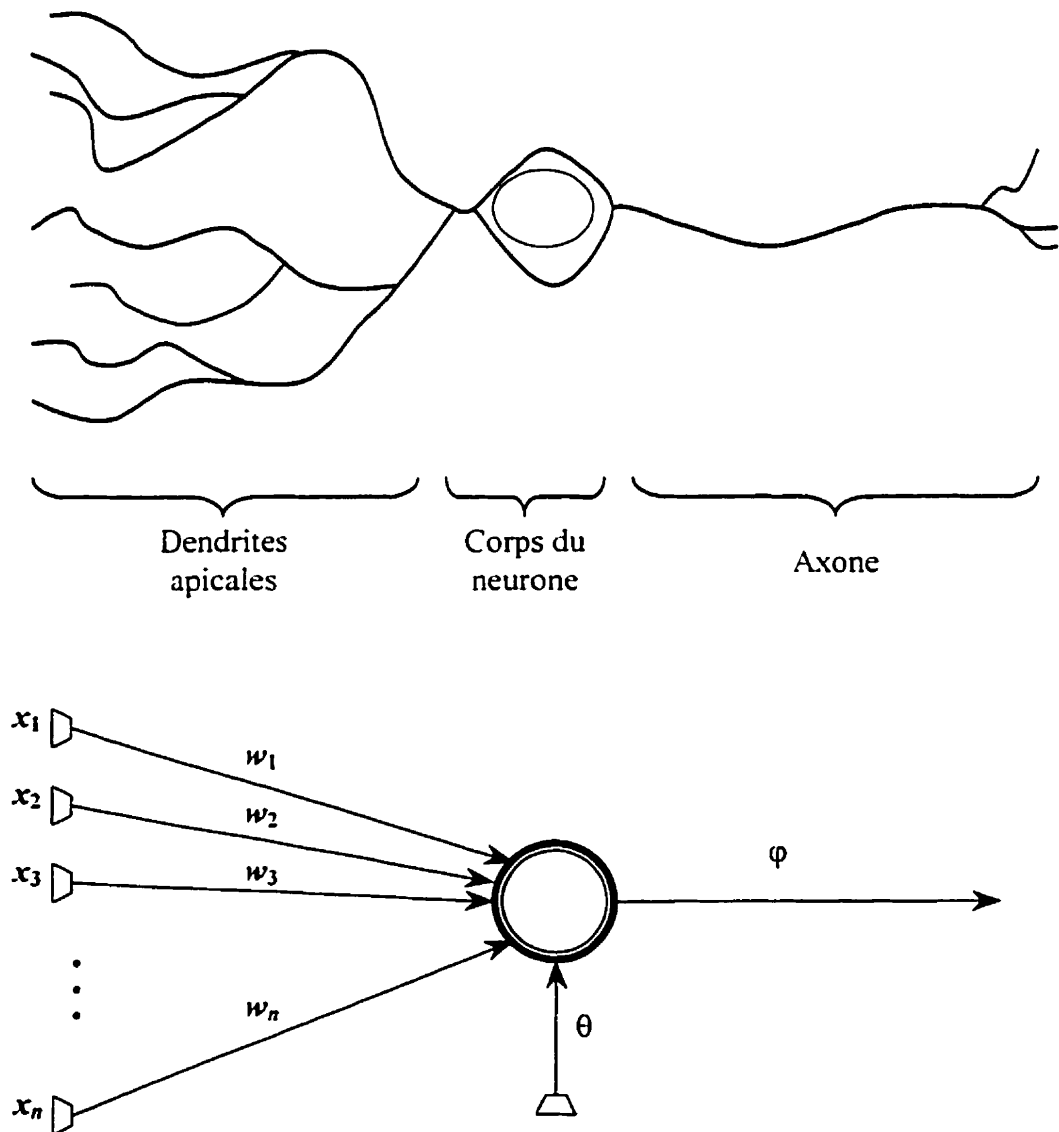
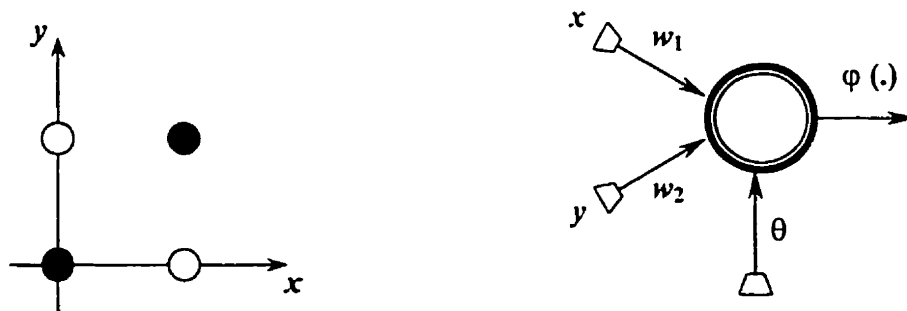
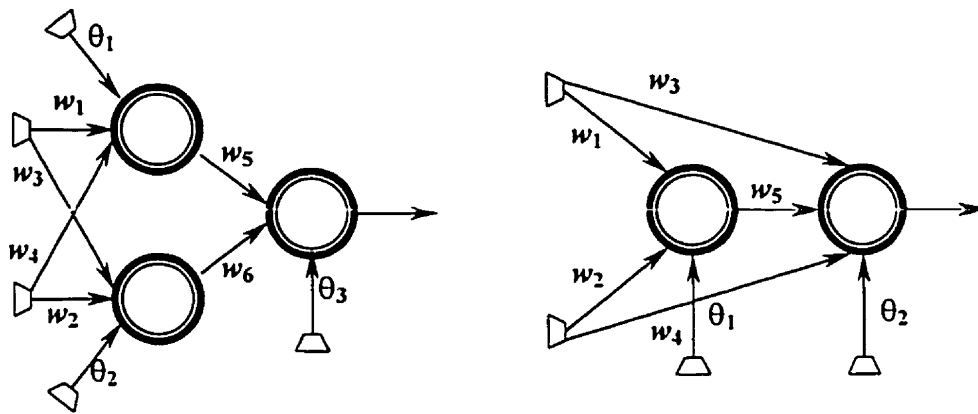


Figure 3.1 : La cellule neuronale et le perceptron correspondant.

Le test en question revêt un caractère purement géométrique. Il s'agit d'évaluer la performance d'un réseau appelé à résoudre un problème de séparation de deux classes différentes baptisé « problème du *ou exclusif* » ou plus communément « problème du *XOR* ». Nous allons, pour la suite de la recherche, nous attarder sur le problème du *XOR* à deux dimensions tel qu'illustré à la figure 3.2. Il s'agit donc pour le réseau de pouvoir séparer ou distinguer les disques blancs des disques noirs. Le fait que l'on ne puisse dissocier les disques de couleurs différentes à l'aide d'une simple ligne droite, nous permet de constater qu'il est impossible qu'un perceptron à une seule couche fasse l'affaire. Connaissant les coordonnées  $(x, y)$  des centres des disques, il s'ensuit que la résolution de ce problème ne peut s'effectuer qu'avec l'ajout d'une couche cachée de neurones. Deux architectures différentes de réseau capable de résoudre le problème du *XOR* sont présentées à la figure 3.3. On constate alors que la première configuration ne comprend pas moins de neuf paramètres et que la seconde nécessite un minimum de sept paramètres pour venir à bout de ce problème non linéaire. De plus, dans le second cas, les entrées communiquent avec tous les neurones ce qui rend l'analyse de ce réseau plus compliquée.



**Figure 3.2** : Le problème du *XOR* et le perceptron à une couche.



**Figure 3.3 :** Résolution du problème du *XOR* : pas moins de sept paramètres et une couche cachée.

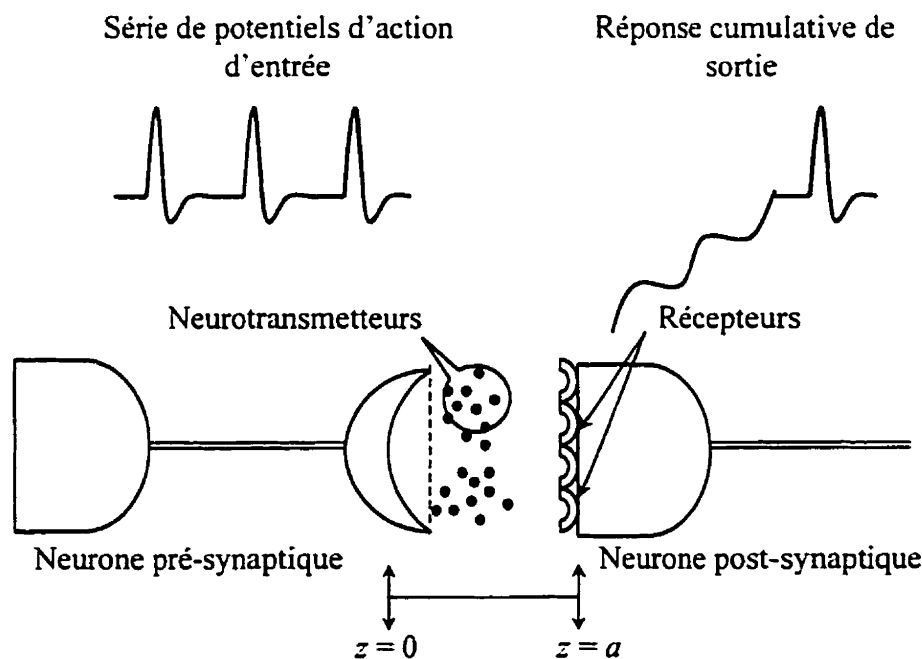
Il ne faut pas oublier, qu'à la base, tous ces paramètres ont été inspirés par des considérations biologiques. En effet, l'ensemble des poids  $w_n$  qui sont pour ainsi dire des multiplicateurs des signaux situés à l'entrée du neurone, peuvent être positifs ressemblant à des synapses (région de contact entre deux neurones) excitatrices, ou négatifs représentant alors le travail de synapses inhibitrices que l'on retrouve partout dans le système nerveux. Les biais  $\theta_n$  qui ont pour fonction de diminuer ou d'augmenter la somme des valeurs pondérées des entrées correspondent à la dépolarisation ou, respectivement, à l'hyperpolarisation de la membrane de l'axone. La fonction d'activation  $\varphi(\cdot)$  qui modifie la sortie du neurone a été suggérée initialement par Rumelhart et al. (1986) afin d'imiter les caractéristiques du processus de réponse d'un neurone biologique. Il faut néanmoins se rendre à l'évidence que toutes ces observations résultent au bout du compte en une pâle copie du fonctionnement du cerveau humain.

Mais comment améliorer ce modèle? Comment augmenter ses capacités sans trop alourdir sa complexité? Il est intéressant de noter que pour aboutir à l'objectif d'augmenter le potentiel de prévision des réseaux de neurones artificiels, les chercheurs ont mis à l'écart les motivations biologiques au profit d'algorithmes mathématiques beaucoup plus sophistiqués qui ont pour seul but de résoudre les problèmes spécifiques à l'application désirée. On constate que diverses subtilités ont été employées pour tenter de contrecarrer le problème du *XOR* plus efficacement. comme par exemple, des modifications importantes apportées à la fonction d'activation (Zhang et Sarhadi (1993), Nakagawa (1995), Wu et al. (1996)), l'application de fonctions transcendantes intrinsèques au processus d'apprentissage (Rosen et al. (1990)), et la troncature de la frontière de décision du perceptron (Ashenayi et Vogh (1990)). Bien que ces nouveaux réseaux soient plus performants, il faut bien comprendre que leur structure interne est basée sur la tâche à accomplir ce qui fait que ces innovations s'éloignent progressivement du caractère plastique d'un neurone biologique.

Or, une prémisse de base du domaine de l'intelligence artificielle veut qu'une meilleure compréhension du fonctionnement du cerveau humain devrait se traduire par la création d'une machine neuronale artificielle plus robuste. À l'instar de cette affirmation, la recherche nous a amené à élaborer un nouvel élément inhérent à la structure d'un réseau que l'on a désigné sous le nom de QUANTRON et qui est basé sur des signaux oscillants qui sont induits par une accumulation de molécules biologiques propres au fonctionnement du système nerveux. L'appellation de ce nouveau neurone vient du fait que sa structure évoque la combinaison corpusculaire et ondulatoire de la composition de la lumière qui a permis la découverte de la mécanique quantique.

### 3.2 Nouveau neurone

La transmission de l'information entre les cellules du système nerveux survient à un endroit spécifique de celles-ci : la synapse. Tout se joue précisément à cette connexion. L'arrivée d'un potentiel d'action (un potentiel d'action désigne un signal électrique représentant de l'information) à cette jonction déclenche la libération d'une myriade de minuscules messagers chimiques appelés neurotransmetteurs qui se diffusent à travers la fente synaptique. Un certain pourcentage d'entre eux se fixent alors à des récepteurs qui sont situés sur la membrane de la cellule post-synaptique tel qu'illustré à la figure 3.4. À partir de là, la combinaison neurotransmetteur-récepteur agit de manière à accroître ou à réduire la possibilité qu'un potentiel d'action soit généré dans le neurone post-synaptique (Vander et al. (1990)).



**Figure 3.4 :** Schéma illustrant les principaux éléments intervenant dans la transmission de l'information aux abords d'une synapse.

La modélisation de ce phénomène de diffusion est la première étape dans le développement de l'élaboration du quantron. Comme on l'a vu précédemment, les processus de diffusion ont été initialement créés pour décrire le mouvement intermittent, rapide et irrégulier de petites particules suspendues dans un fluide. Le modèle tridimensionnel général que nous avons étudié tout au long de cette recherche est donné par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dz_1(t) = A_1 dt + B_1 dW_1(t) \\ dz_2(t) = A_2 dt + B_2 dW_2(t) \\ dz_3(t) = A_3 dt + B_3 dW_3(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  sont des fonctions qui dépendent de  $z_1, z_2, z_3$  et donc dépendent également du temps  $t$ . De plus,  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  sont définis comme des mouvements browniens standards indépendants.

Afin de simplifier les calculs, nous allons supposer que les neurotransmetteurs se déplacent essentiellement dans une direction. Cette hypothèse est tout à fait réaliste étant donné que la fente synaptique est infiniment petite. Nous allons également supposer que ces minuscules particules sont confinées à se mouvoir entre les membranes extracellulaires et intracellulaires. De plus, Hall (1992) montre que ces neurotransmetteurs sont libérés à l'intérieur de la zone active par exocytose. Ce phénomène physique qui est l'équivalent d'une poussée extracellulaire indique que ces molécules chimiques débutent leur processus de diffusion légèrement plus loin que les terminaisons nerveuses pré-synaptiques qui servent d'origine (voir figure 3.4). L'ensemble de tous ces principes nous

amène à examiner le comportement des neurotransmetteurs lorsqu'ils sont soumis au processus suivant :

$$dz(t) = \frac{1}{2} z(t)dt + z(t)dW(t) \quad (3.2)$$

qui a été vu auparavant et qui est connu sous le nom de mouvement brownien géométrique. Ce processus satisfait à toutes les conditions énumérées précédemment. En effet, il est toujours positif, il commence à  $z = 1$  (en supposant qu'un mouvement brownien est nul initialement) et il possède une frontière inaccessible à l'origine. Il faut maintenant comprendre que, pour un nombre suffisamment grand de particules, chacune commençant son trajet à  $z(0)$ , et chacune soumise indépendamment au même processus de diffusion, l'expression  $f(z, t)\Delta z$  représente approximativement la proportion de particules se trouvant dans l'intervalle  $(z, z+\Delta z)$  à l'instant  $t$ .

On considère donc  $f(z, t)$  comme étant la fonction de densité représentant les probabilités de transition du processus étudié et qui satisfait aux équations de Kolmogorov correspondantes. Mais, on peut écrire que :

$$f(z, t)\Delta z \approx F(z + \Delta z, t) - F(z, t) \quad (3.3)$$

où

$$F(z, t) = \int_{-\infty}^z f(\omega, t)d\omega \quad (3.4)$$



représente la fonction de répartition. On s'intéresse plus particulièrement au nombre de particules qui s'accumulent sur les récepteurs situés sur la membrane post-synaptique. Puisque cette membrane est localisée à  $a$  unités par rapport à l'origine du problème, le nombre total de neurotransmetteurs qui arrivent à bon port au bout de  $t$  unités de temps est donné par :

$$\int_a^{+\infty} f(\omega, t) d\omega = 1 - F(a, t) \quad (3.5)$$

où  $F(a, t)$  peut être interprétée comme étant la probabilité que l'absorption des molécules par les récepteurs biologiques situés à  $a$  n'a pas encore eu lieu après l'instant  $t$ . En conditionnant sur l'instant de premier passage  $T_a$  du processus de diffusion  $z(t)$  au point  $a$  (Ross (1993), p.460), on obtient :

$$2F(a, t) - 1 = P(T_a \geq t) \quad (3.6)$$

où

$$T_a = \inf \{t > 0 : z(t) = a > 1 \mid z(0) = 1\}. \quad (3.7)$$

Puisque cette application de temps de premier passage implique uniquement un rapport de distances, on peut faire un simple changement de variables pour se ramener à un mouvement brownien standard (Karlin et Taylor (1981)). En effet, en prenant le logarithme du processus de diffusion  $z(t)$ , on peut réécrire l'expression donnant  $T_a$  :

$$T_a = \inf\{t > 0 : W(t) = \ln a \mid W(0) = 0\}. \quad (3.8)$$

La fonction de répartition de l'instant de premier passage  $T_a$  pour le mouvement brownien standard est donnée par (Cox et Miller (1965)) :

$$P(T_a \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\ln a}^{\infty} e^{-x^2/2t} dx. \quad (3.9)$$

On sait que, biologiquement, la valeur d'un potentiel d'action local positif ou négatif est proportionnelle au nombre de neurotransmetteurs rattachés aux différents récepteurs. Cette propriété permet alors d'exprimer comme suit le voltage  $V(t)$  qui est induit dans la membrane post-synaptique :

$$V(t) = \frac{2w}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\ln a}^{\infty} e^{-x^2/2t} dx = 2w \left( 1 - \Phi \left( \frac{\ln a}{\sqrt{t}} \right) \right) \quad (w \in \mathfrak{R}) \quad (3.10)$$

où  $w$  est une constante de proportionnalité qui serait l'équivalent d'un poids qui dose la valeur des entrées dans un perceptron classique. La fonction  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Afin d'établir une expression complète donnant la variation du niveau de polarisation présent dans la membrane d'intérêt, il est primordial d'introduire à ce stade-ci un temps d'interruption  $S$  empirique qui tient compte du fait que seulement une fraction des neurotransmetteurs complètent leurs périodes. Cette

observation représente fort bien ce qui se passe en réalité et on peut donc définir la variation du voltage initial (*V.V.I.*) intrinsèque à la membrane comme suit :

$$V.V.I. \equiv V(t)(1 - u(t - S)) \quad (3.11)$$

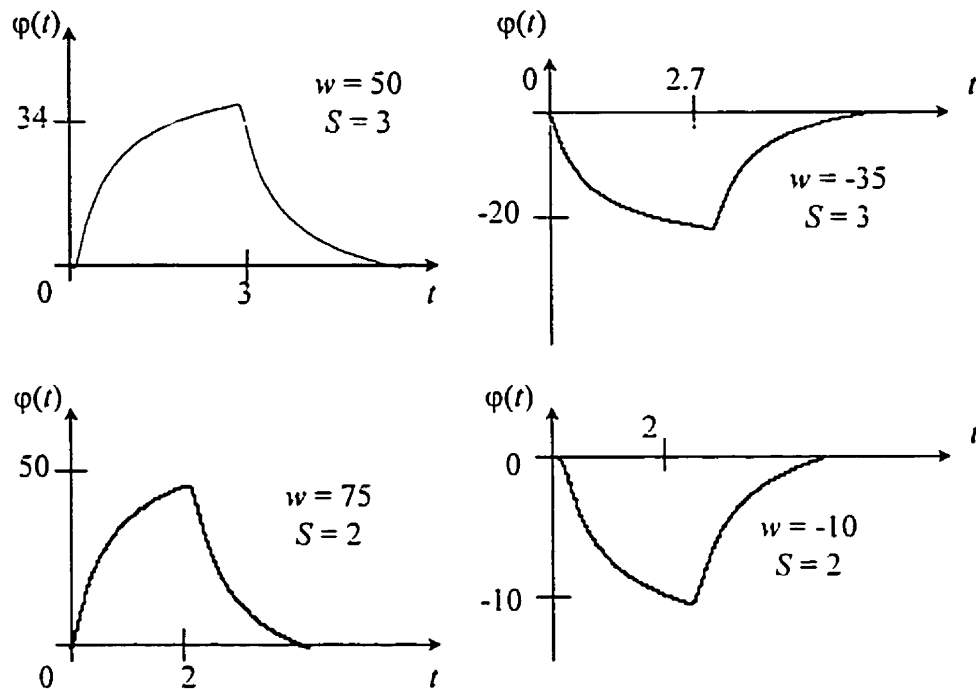
où  $u(\cdot)$  est la fonction échelon (aussi appelé fonction de Heaviside). Les données empiriques indiquent que lorsque  $S$  unités de temps se sont écoulées, la valeur du voltage dans la membrane réintègre son état initial et ce, de façon symétrique. En prenant, conséquemment, le temps  $S$  comme étant aussi égal à la durée de vie de l'association neurotransmetteur-récepteur, on peut en déduire la valeur de la variation du voltage final (*V.V.F.*) :

$$V.V.F. \equiv -V(t - S)(u(t - S) - u(t - 2S)) + V(S)(u(t - S) - u(t - 2S)). \quad (3.12)$$

Ces étapes intermédiaires servent de tremplin pour pouvoir exprimer le niveau de variation globale de la polarisation dans le neurone post-synaptique. Cette fonction dépendante du temps et notée  $\varphi(t)$  est donnée par :

$$\varphi(t) = V(t) + (V(S) - V(t) - V(t - S))u(t - S) + (V(t - S) - V(S))u(t - 2S) \quad (3.13)$$

Curieusement, la fonction  $\varphi(t)$  nouvellement créée devient le parallèle de la fonction d'activation qui joue un rôle prépondérant dans le perceptron usuel. La figure 3.5 montre l'allure de la fonction  $\varphi(t)$  pour différentes valeurs du poids  $w$  et du temps d'interruption  $S$ .



**Figure 3.5 :** Représentation de la variation du niveau de polarisation survenant dans une synapse excitatrice ( $w$  positif) et inhibitrice ( $w$  négatif) résultant d'un seul potentiel d'action.

La deuxième étape essentielle au développement du quantron est d'entrevoir la manière dont une réponse potentielle se propagera de cellule en cellule à travers le système. Tel qu'illustré (figure 3.4) et expliqué précédemment, la libération des messagers chimiques dans la fente synaptique est due uniquement à la présence d'un potentiel d'action. Par contre, et c'est là la grande différence entre le quantron et le perceptron et autres réseaux du même type, il est faux de croire que plus le potentiel d'action est élevé, plus le total de neurotransmetteurs relâchés est

grand. En réalité, on observe que les potentiels d'action surviennent pleinement ou ne surviennent tout simplement pas (Zubay (1993)).

En conséquence, tel qu'illustré à la figure 3.4, c'est la fréquence d'arrivée des potentiels d'action et non leur amplitude qui détermine s'il y aura éventuellement une réponse sous forme de dépolarisation ou d'hyperpolarisation dans le neurone post-synaptique. En termes mathématiques, la sommation temporelle de la fonction  $\phi$  sera suffisamment grande de manière à atteindre le seuil  $\Gamma$  nécessaire au déclenchement d'un potentiel d'action post-synaptique, ou tout simplement insuffisamment élevée causant une absence de transmission du signal d'arrivée et résultant en une impossibilité de propagation de l'information au-delà de la synapse.

Soit  $x (>0)$  le temps s'écoulant entre deux arrivées successives de potentiels d'action, c'est-à-dire que  $x^{-1}$  est la fréquence pré-synaptique des signaux d'entrée. Cette interprétation nous permet alors d'exprimer la variation de voltage cumulative (*V.V.C.*) survenant à l'intérieur de la membrane en fonction du temps de la façon suivante :

$$V.V.C. \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \phi(t - ix). \quad (3.14)$$

En ajoutant un délai  $\theta$  qui représente le temps qui s'est écoulé avant que le premier potentiel d'action ne survienne, on obtient la réponse totale  $R(t)$  du neurone post-synaptique :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi(t - \theta - ix). \quad (3.15)$$

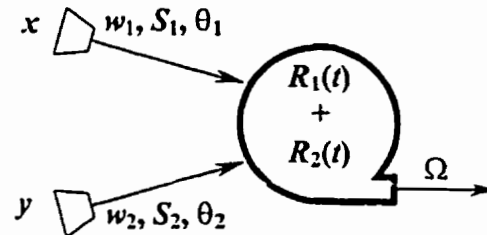
Finalement, la valeur de sortie  $\Omega$  du quantron qui a été stimulé par une valeur  $x$  d'entrée dépendra, tel que précisé auparavant, si oui ou non le seuil  $\Gamma$  a été atteint. On obtient alors :

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } R(t) < \Gamma \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (3.16)$$

où

$$\alpha = \inf \{t > 0 : R(t) = \Gamma\}. \quad (3.17)$$

On est donc arrivé à modéliser, à l'aide des processus de diffusion, le trajet des neurotransmetteurs chimiques qui diffusent de l'information à l'intérieur du système nerveux. À partir de ce modèle, nous avons réussi à quantifier cette information. Il reste maintenant à savoir si cette information peut se contrôler de manière à ce que le quantron puisse résoudre des problèmes qui sont irréalisables pour le perceptron. En d'autres termes, après avoir spécifié les valeurs des constantes  $a$  (longueur de la fente synaptique) et  $\Gamma$  (seuil à atteindre), la tâche qui nous attend est de déterminer correctement les paramètres  $w$ ,  $S$ , et  $\theta$ , correspondant à une certaine entrée, de manière à résoudre des problèmes spécifiques. La figure 3.6 montre un quantron à une couche et deux entrées qui sera utilisé pour résoudre le problème du *XOR*.



**Figure 3.6 :** Le quantron : seulement six paramètres et une couche unique pour résoudre le problème du *XOR*.

### 3.3 Résolution de problèmes

Pour résoudre le problème du *XOR*, un perceptron conventionnel a besoin d'un minimum de sept paramètres et d'une couche cachée de neurones, comme on l'a vu à la figure 3.3. Le perceptron utilise une fonction de type échelon comme fonction d'activation. Afin de comparer les capacités du quantron avec celles du perceptron, nous allons nous limiter à choisir la fonction  $\varphi(t)$ , qui représente le niveau de variation globale de polarisation dans le neurone post-synaptique, comme étant égale à une simple fonction de Heaviside tronquée. On peut donc écrire que :

$$\varphi(t) = w(1 - u(t - S)). \quad (3.18)$$

Le perceptron arrive à distinguer les éléments appartenant à deux classes différentes en examinant si la valeur de sortie correspondant à ces données est positive ou négative. Le critère de discrimination du nouveau neurone est tout aussi simple : si la réponse caractéristique d'un élément à la sortie du quantron

dépasse le seuil critique  $\Gamma$ , alors celui-ci appartiendra à une certaine classe (les disques blancs, par exemple) et dans le cas contraire on pourra assigner cet élément à l'autre classe (les disques noirs).

Il s'ensuit qu'un seul quantron muni de seulement six paramètres et démuné de couche cachée, tel qu'illustré à la figure 3.6, est suffisant pour résoudre le problème du *XOR*. En effet, nous allons considérer l'ensemble des coordonnées générales de quatre points représentant un « *ou exclusif* » quelconque:

$$\{(x, x); (y, y); (x, y); (y, x)\}. \quad (3.19)$$

On peut constater qu'un exemple d'ensemble de valeurs des six paramètres qui satisfait à toutes les conditions établies précédemment et qui sépare avec succès les disques blancs des disques noirs est donné par :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ S_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ S_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Gamma/2 \\ \min(x, y)/2 \\ 0 \\ \Gamma/2 \\ \min(x, y)/2 \\ \min(x, y)/2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où on a supposé que les fréquences pré-synaptiques  $x^{-1}$  et  $y^{-1}$  sont toutes les deux supérieures à un. En observant la forme de l'exemple solution, on s'aperçoit qu'il existe une multitude de réponses pouvant faire l'affaire, autant diverses qu'hétéroclites, ce qui confirme la souplesse ou la faculté d'adaptation du quantron, rappelant ainsi la plasticité des neurones biologiques.



Les figures 3.7 à 3.9 illustrent la capacité d'un seul quantron à distinguer deux classes différentes qui sont linéairement non séparables. Ces exemples de formes ont été obtenues en choisissant au hasard des valeurs pour les paramètres du quantron.

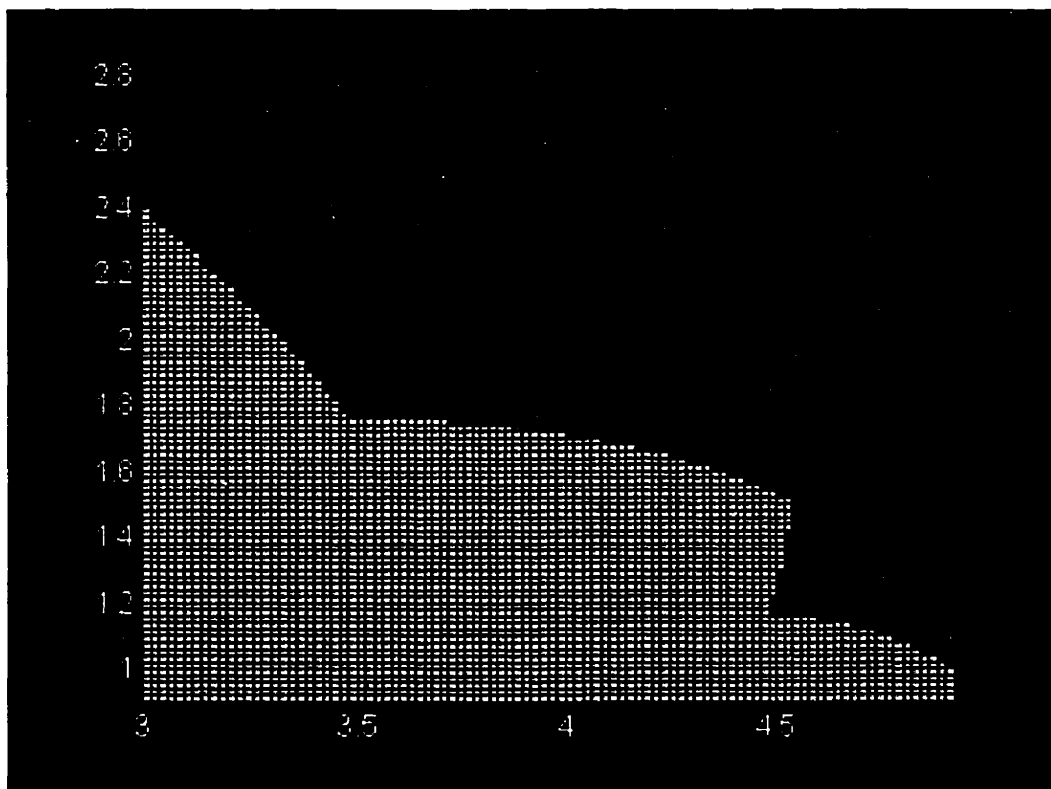


Figure 3.7 : Configuration non linéaire identifiée par un seul quantron.

Il est évident que pour aspirer à reconnaître le même type de configurations, il faudrait un grand nombre de perceptrons assemblés en plusieurs couches, incluant des couches cachées, à l'intérieur d'un même réseau. Rappelons encore que ces trois figures ont été obtenues uniquement à l'aide de six paramètres. Il semble donc évident que le quantron possède une structure très puissante au niveau de la reconnaissance d'images.

On peut également affirmer, de manière heuristique, que le quantron dispose d'une plus grande versatilité que le perceptron ou tout autre forme de réseau usuel. En effet, en comparant les figures 3.7 et 3.9, on se rend compte que le même nombre de paramètres est nécessaire au quantron pour accomplir des tâches de complexité très disparates, alors qu'il faudrait des réseaux de perceptrons de tailles différentes pour discerner les deux configurations en question.

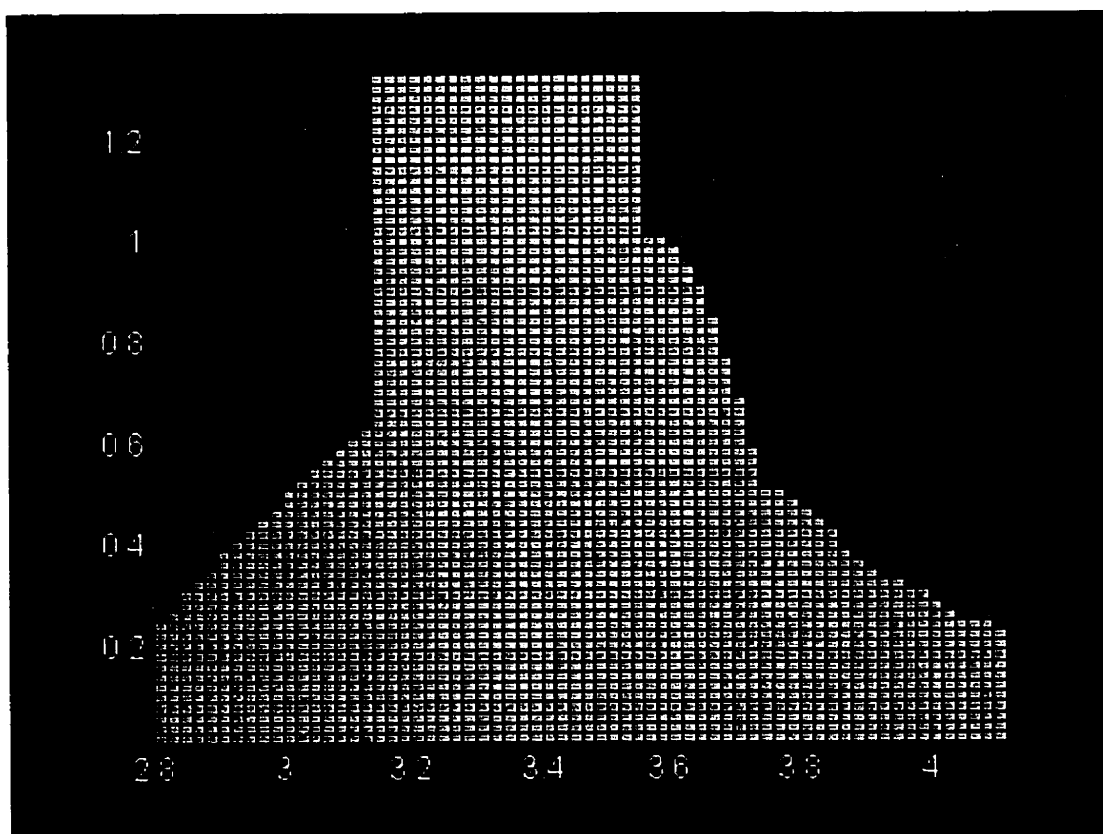


Figure 3.8 : Domaine non connexe identifié par un seul quantron.

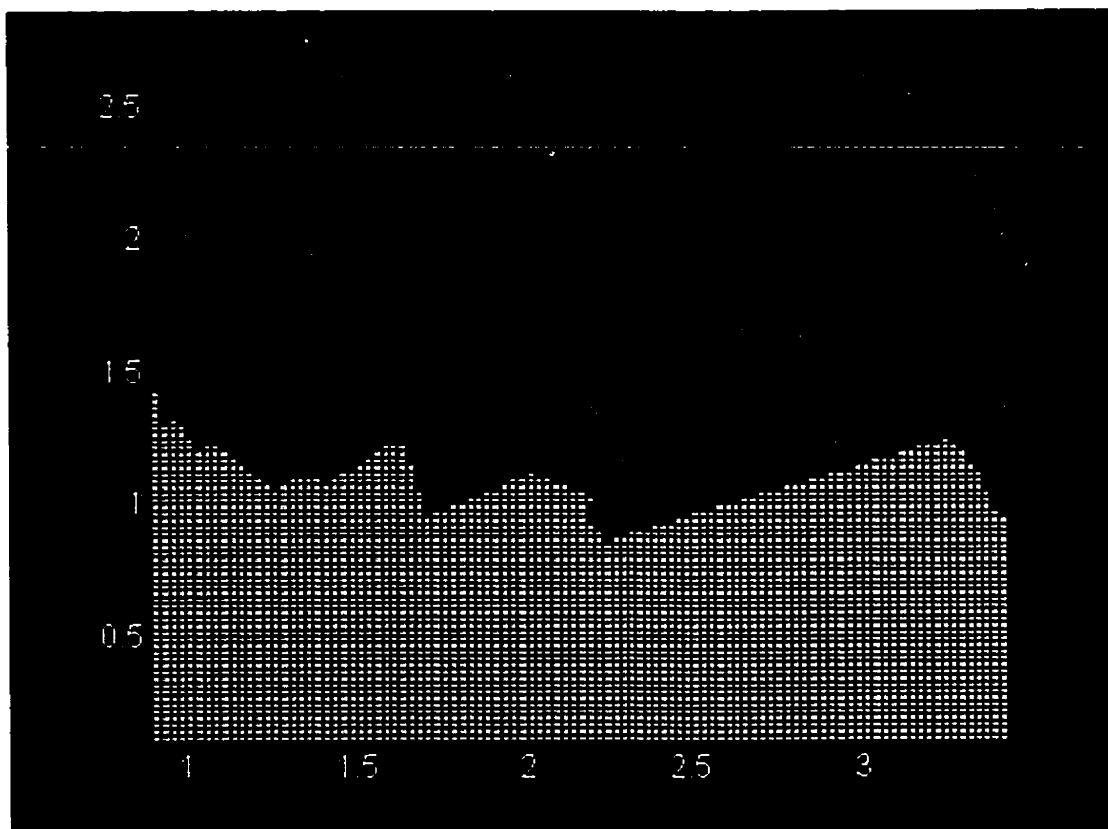
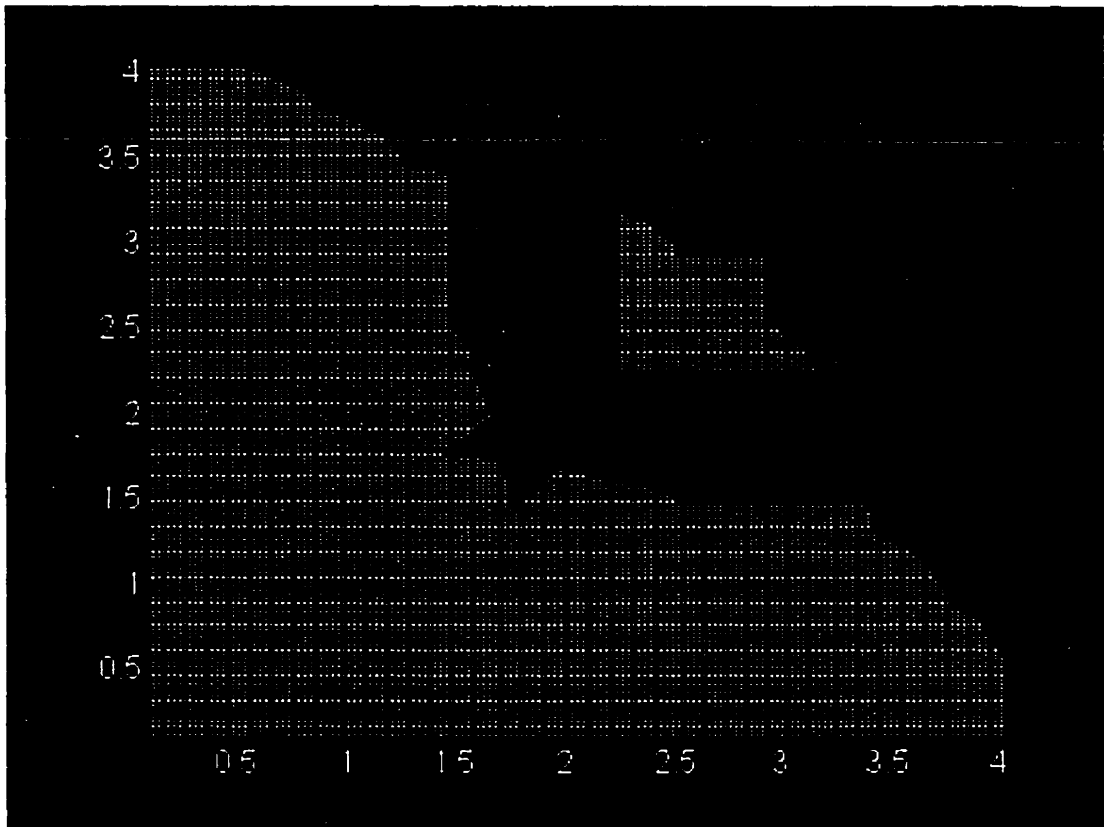


Figure 3.9 : Variations non linéaires identifiées par un seul quantron.

La figure 3.10 représente la sortie d'un réseau de quantrons à plusieurs couches (*MLQ*) dont l'architecture est la suivante : une couche cachée constituée de deux quantrons et une couche de sortie possédant un quantron unique. Ce réseau contient donc un total de dix-huit paramètres. On n'ose penser au nombre de paramètres nécessaires à un réseau de perceptrons à plusieurs couches (*MLP*) pour réaliser une figure similaire.



**Figure 3.10** : Configuration non linéaire identifiée par un réseau de quantrons à deux couches comprenant un total de dix-huit paramètres.

Ces derniers exemples graphiques laissent présager un avenir très prometteur pour le quantron comme élément intrinsèque important de réseaux de neurones, et on peut donc penser qu'il pourrait devenir un outil de prévision efficace. Les processus de diffusion ont donc encore une fois démontré qu'ils sont capables de s'adapter à des situations très diverses et à résoudre les problèmes qui s'y rattachent. Dans le cadre de cette partie importante de notre recherche, les processus de diffusion ont permis d'élaborer une structure tout à fait originale de

réseau de neurones. Il est très important de mentionner cependant que nous avons rempli une des deux conditions essentielles à l'obtention d'un nouveau type de réseau. Afin de s'assurer de la validité globale de notre réseau, il va falloir, et c'est là où réside le futur de la recherche, implanter un algorithme d'apprentissage pour le quantron. Des efforts ont déjà été entrepris à ce niveau pour un simple quantron à deux entrées avec des résultats très satisfaisants. La généralisation à un quantron à  $n$  entrées reste encore à déterminer.

## CONCLUSION

Tout au long de cette recherche, on a voulu justifier le potentiel des processus de diffusion comme outils de *modélisation*, de *prévision* et de *contrôle* de phénomènes physiques.

Dans un premier temps, nous avons considéré le problème de contrôler de façon optimale le processus d'usure d'une machine modélisé à l'aide des processus de diffusion. Nous avons utilisé un critère de performance qui prenait en considération le risque qu'envisageait de prendre l'opérateur de la machine. Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir la valeur exacte du contrôle optimal à partir de l'espérance mathématique d'un processus non contrôlé. Ce résultat se veut une généralisation d'un théorème prouvé par Kuhn (1985). Cependant, nous avons poussé plus loin la recherche en trouvant des exemples explicites pour lesquels la relation de Kuhn entre les variables de bruit et de contrôle n'était pas vérifiée. Nous avons, par la suite, généralisé ces résultats en considérant des modèles tridimensionnels afin de transformer à nouveau des processus contrôlés en problèmes de temps de premier passage dégénérés. Le futur de la recherche consisterait alors à trouver de nouvelles solutions pour des systèmes d'équations différentielles stochastiques de forme différente de ceux que nous avons examinés.

Dans un deuxième temps, un processus de diffusion bidimensionnel appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré a été utilisé pour estimer à un jour d'avance la valeur des débits de trois sous-bassins du bassin hydrographique du Saguenay-Lac-St-Jean. Afin d'évaluer les capacités de ce processus comme outil

de prévision par rapport à différents modèles de diffusion et au modèle déterministe déjà mis en place à la société Alcan, nous avons eu recours à quatre critères de performance. Il s'est avéré que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck prévoit les débits à un jour d'avance de manière plus efficace que le modèle PREVIS possédant dix-huit paramètres. Néanmoins, on constate que ce dernier fait beaucoup mieux lorsqu'il s'agit d'effectuer des prévisions à plus long terme. Mais les résultats encourageants obtenus pour des prévisions à court terme démontrent le potentiel des processus de diffusion dans ce domaine et ouvrent la porte à de nouvelles améliorations comme l'étude de nouveaux processus de diffusion ou l'ajout de variables exogènes. Il est à noter que cette partie de la recherche est très innovatrice puisque l'on constate une absence quasi-totale de travaux portant sur le même sujet dans la littérature.

Dans un troisième et dernier temps, un mouvement brownien géométrique a servi de fondation à l'élaboration tout à fait inédite, de la structure d'un neurone artificiel que l'on a baptisé le quantron. Ce nouvel élément, qui peut s'implanter facilement à l'intérieur d'un réseau de neurones plus complexe, est constitué de six paramètres et sa composition est basée sur des considérations biologiques. En effet, on s'est intéressé à la variation de voltage dans la membrane post-synaptique provoquée par la diffusion de neurotransmetteurs chimiques. Des résultats remarquables ont été obtenus quant aux capacités du quantron à résoudre des problèmes non linéaires. En particulier, nous avons vu que ce dernier était capable de résoudre à lui seul le problème du *XOR*, alors qu'il faut plus d'un perceptron pour accomplir la même tâche. De plus, divers exemples de configurations complexes séparant deux classes différentes ont montré la versatilité du quantron, par rapport aux réseaux de neurones classiques à discerner des formes non linéaires. Les développements futurs associés au quantron

consisteront essentiellement à élaborer un algorithme d'apprentissage qui permettra à celui-ci d'ajuster ses paramètres de façon itérative jusqu'à ce qu'il soit en mesure de produire à sa sortie la réponse désirée à un problème quelconque.

Il est indéniable que l'originalité de la recherche réside dans le fait que nous avons démontré sans l'ombre d'un doute que les processus de diffusion sont des modèles mathématiques très puissants pouvant accomplir des tâches très diversifiées. On a clairement établi des solutions exprimant le contrôle optimal d'une machine soumise à un processus d'usure que personne n'avait étudié auparavant. Nous avons également montré l'efficacité des processus de diffusion en matière de prévision hydrologique. C'est la première fois, à notre connaissance et après avoir effectué une revue de littérature exhaustive, que de tels modèles servent à de telles applications. Enfin, nous avons créé de toutes pièces un tout nouveau modèle de réseau de neurones basé sur la diffusion des neurotransmetteurs chimiques à travers la fente synaptique. Ce réseau inédit portant le nom de « quantron » a prouvé qu'il possède des capacités fort intéressantes de résolution de problèmes non linéaires. L'ensemble de ces résultats montre à quel point les aboutissements de notre recherche sont originaux.



## BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I.A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.

ASHENAYI, K. et VOGH, J. (1990), Influence of different non-linearity functions on perceptron performance, *SPIE Applications of Optical Engineering : Proceedings of OE, Midwest*, 1396, 215-225.

BAXTER, L. et LEE, Y. (1987), A diffusion model for a system subject to continuous wear, *Probability Eng. Informat. Sci.*, 1.

BOUCHARD, S. et SALESSE, L. (1986), *Amélioration et structuration du système de prévision hydrologique à court terme PRÉVIS*, Rapport RH-86-01, Groupe de ressources hydriques. ÉÉQ. SÉCAL, Jonquière, Qué., Canada, 1-31.

BRAU-ROJAS, A., CAVAZOS-CADENA, R. et FERNANDEZ-GAUCHERAND, E. (1998), Controlled Markov chain with risk-sensitive criteria : Some (counter) examples, *Proc. of the 1998 37<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, 2, 1853-1858.

CAMPI, M.C. et JAMES, M.R. (1996), Nonlinear discrete-time risk-sensitive optimal control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6 (1), 1-19.

CHEN, A. et ELSAYED, E.A. (1993), Control of linear wear processes under random shocks, *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Ind. Engrng. Research Conf.*, 569-573.

CONRAD, C. et McCLAMROCH, N.H. (1987), The drilling problem : A stochastic modeling and control example in manufacturing, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-32.

COX, D.R. et MILLER, H.D. (1965), *The theory of stochastic processes*, Methuen, Londres.

DEY, S. et MOORE, J.B. (1997), Risk-sensitive dual control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7 (12), 1047-1055.

FLEMING, W.H. et HERNANDEZ-HERNANDEZ, D. (1997), Risk sensitive control of finite state machines on an infinite horizon, *Proc. of the 1997 36<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, 4, 3407-3412.

FLEMING, W.H. et SONER, H.M. (1993), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York.

GOTTARDI, G. et SCARSO, E. (1994), Diffusion models in forecasting : A comparison with the Box-Jenkins approach, *Eur. J. Operational Res.*, 75 (3), 600-616.

HALL, Z.W. (1992), *An introduction to molecular neurobiology*, Sinauer Associates, Inc., Sunderland MA.

HARDGRAVE, B.C., WILSON, R.L. et WALSTROM, K.A. (1994), Predicting graduate student success : a comparison of neural networks and traditional techniques, *Computers and Operations Research*, 21 (3), 249-263.

HU, Y.Z., LI, N. et TØNDER, K. (1991), A dynamic system for lubricated sliding wear and running-in, *ASME J. Tribology*, 113, 499-505.

KARLIN, S. et TAYLOR, H.M. (1981), *A second course in stochastic processes*, Academic Press, Inc., San Diego.

KITE, G.W. (1978), Development of a hydrological model for a Canadian watershed, *Can. J. Civ. Engrg.*, Ottawa, 5, 126-134.

KOPNOV, V.A. et KANAJEV, E.I. (1994), Optimal control limit for degradation process of a unit modelled as a Markov chain, *Reliability Engrng and System Safety*, 43 (1), 29-35.

KUHN, J. (1985), The risk-sensitive homing problem, *J. Appl. Probab.*, 22, 796-803.

LAUZON, N. (1995), *Méthodes de validation et de prévision à court terme des apports naturels*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.

LAUZON, N., BIRIKUNDAVYI, S., GIGNAC, C. et ROUSSELLE, J. (1997), Comparaison de deux procédures d'amélioration des prévisions à court terme des apports naturels d'un modèle déterministe, *Can. J. Civ. Engrg.*, Ottawa, 24 (5), 723-725.

LEFEBVRE, M. (1989), Moment generating function of a first hitting time for the integrated Ornstein-Uhlenbeck process, *Stochastic Process. Appl.*, 32, 281-287.

LEFEBVRE, M. (1995), Optimal control of a reservoir, *Control and Computers*, 23, 44-47.

LEFEBVRE, M. (1996), First-passage problems involving processes with lognormal density functions, *Rendiconti dell'Istituto Lombardo (Scienze – Serie A)*, 130, 63-78.

LEFEBVRE, M. (1996), Reducing a nonlinear programming equation to a Kolmogorov equation, *Optimization*, 42, 125-137.

LEFEBVRE, M. et GASPO, J. (1996), Optimal control of wear processes, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41, 112-115.

LEFEBVRE, M. et GASPO, J. (1996), Controlled wear processes : a risk-sensitive formulation, *Eng. Optimization*, 26, 187-194.

LIN, J.-Y., et CHENG H.S. (1989), An analytical model for dynamic wear, *ASME J. Tribology*, 111, 468-474.

LIPPMANN, R.P. (1987), An introduction to computing with neural nets, *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Magazine*, 4-22.

MAKIS, V. (1997), Optimal control policy for a tool-wear process subject to shocks and random failures, *International J. of Production Econom.*, 60, 613-621.

McCULLOCH, W.S. et PITTS, W. (1943), A logical calculation of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.

MINSKY, M.L. et PAPERT, S.A. (1988), *Perceptrons*, Expanded Edition, MIT Press, Cambridge MA.

NAKAGAWA, M. (1995), An artificial neuron model with a periodic activation function, *Journal of the Physical Society of Japan*, 64 (3), 1023-1031.

RISHEL, R. (1991) Controlled wear processes : Modeling optimal control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36, 1100-1102.

ROSEN, B.E., GOODWIN, J.M. et VIDAL, J.J. (1990), Transcendental functions in backward error propagation, *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 239-241.

ROSS, S.M. (1993), *Introduction to probability models*, Fifth edition, Academic Press, Inc., San Diego.

RUMELHART, D.E., HINTON, G.E. et WILLIAMS, R.J. (1986), Learning internal representations by error propagation, *Parallel Distributed Processing : Explorations in the Microstructure of Cognition*, MIT Press, Cambridge MA.

- RUNOLFSSON, T. (1995), Risk-sensitive control of stochastic hybrid systems, *Proc. of the 1995 34<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, 2, 1032-1033.
- TAKASAO, T., SHIIBA, M. et TACHIKAWA, Y. (1994), Development of a real-time stage prediction system and its application to the upstream Kizu river basin, *Proc., Japan Soc. Of Civ. Engrs.*, Tokyo, 503, 19-27.
- TELFER, B.A., SZU, H.H., RENNERT, P. et RUMPEL, C. (1993), Neural network prediction of mortality, *Proc. of the IJCNN*, 1, 963-966.
- VANDER, A.J., SHERMAN, J.H. et LUCIANO, D.S. (1990), *Human Physiology*, Fifth Edition, McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- WHITTLE, P. (1982), *Optimization over Time*, 1, John Wiley, Chichester.
- WHITTLE, P. (1990), *Risk-Sensitive Optimal Control*, John Wiley, Chichester.
- WU, S. (1995), Mirroring our thought processes, *IEEE Potentials*, 14 (5), 36-41.
- WU, Y., ZHAO, M. et DING, X. (1996), A new perceptron model with tunable activation function, *Chinese Journal of Electronics*, 5 (2), 55-62.
- YU, E.S. et CHEN, C.Y.R. (1993), Traffic prediction using neural networks, *IEEE Global Telecommunications Conference*, 2, 991-995.
- ZHANG, Z. et SARHADI, M. (1993), A modified neuron activation function which enables single layer perceptrons to solve some linearly inseparable

problems, *Proceedings of the 1993 International Joint Conference on Neural Networks*, 2723-2726.

ZUBAY, G. (1993), *Biochemistry, Volume Three :Genetics and Physiology*, Third Edition, Wm. C. Brown Communications, Inc., Dubuque IA.