

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CAPACITÉ ET BORNES DE PERFORMANCES DES CANAUX À ENTRÉES-
SORTIES MULTIPLES ET DIVERSITÉ SPATIO-TEMPORELLE

CHRISTIAN LEFEBVRE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLOME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
JUN 1999



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-46636-1

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

CAPACITÉ ET BORNES DE PERFORMANCES DES CANAUX À ENTRÉES-
SORTIES MULTIPLES ET DIVERSITÉ SPATIO-TEMPORELLE

présentée par: LEFEBVRE Christian

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., président

M. CONAN Jean, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SÉGUIN Gérald, Ph.D., membre

M. DESPINS Charles, Ph.D., membre

DÉDICACE

À Joana

REMERCIEMENTS

Je remercie en tout premier lieu mon directeur de recherche, le professeur Jean Conan, pour ses idées, encouragements et conseils qui ont rendu cette thèse possible. Je suis également reconnaissant envers le D^r Charles Despins et le professeur Roland Malhamé pour leurs enseignements et commentaires qui m'ont amené à explorer de nouvelles avenues de recherche. Je remercie PRISM Systems inc., le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada pour leur soutien financier ainsi que Pierre Samson de CAE électronique ltée pour avoir fait preuve de flexibilité dans la gestion de mes horaires de travail. Finalement, une pensée toute spéciale va à ma compagne de vie, Joana.

RÉSUMÉ

Une des caractéristiques essentielles partagées par l'ensemble des systèmes de transmission numérique peut s'exprimer par l'existence d'une dépendance entre le débit maximum des données qu'il est possible de transporter et les contraintes physiques auxquelles ils sont soumis, les trois principales formes de contraintes étant d'ordre spatial, temporel et fréquentiel. Afin d'évaluer simultanément l'impact et les interactions respectives de ces trois types de contraintes, il est possible d'utiliser le modèle général du canal multivariable gaussien coloré où M entrées sont transmises au récepteur par l'intermédiaire d'un canal multivariable linéaire muni de N sorties affectées de bruit coloré de distribution gaussienne.

Cette thèse propose une méthode permettant d'évaluer l'impact de la diversité spatiale et temporelle, ainsi que des contraintes fréquentielles sur les taux de transmission admissibles dans un contexte pragmatique d'égalisation linéaire et idéale basée sur la borne du filtre adapté pour le canal multivariable gaussien et de comparer les résultats obtenus à ceux de la capacité de Shannon. Pour arriver à nos fins, nous présentons l'expression d'une borne supérieure sur le taux d'erreur dans le cas d'un égaliseur linéaire à combinaison optimale. Une dépendance explicite entre cette borne et les paramètres du système, ainsi que son comportement en regard des bornes supérieures obtenues avec un filtre adapté (matched filter) ou correspondant à la capacité (au sens de la Théorie de l'Information) est alors obtenue.

Cette méthode sert à évaluer les performances du canal radiomobile numérique soumis à des évanouissements sélectifs en fréquence et reliant N mobiles à un récepteur muni de M antennes déployées en diversité d'espace. Du fait des caractéristiques du canal variable dans le temps, la borne est utilisée de pair avec des simulations numériques permettant d'émuler les réalisations du canal et d'évaluer le taux de coupure correspondant. Nos

résultats montrent qu'en général l'égalisation seule ne réussit pas à exploiter le plein potentiel du gain de codage disponible sur un canal caractérisé par des évanouissements de type sélectif en fréquence, ce qui est particulièrement marqué pour l'égaliseur linéaire. Dans ce dernier cas cependant, nos résultats suggèrent également que toute augmentation de la largeur de bande du transmetteur égale au taux de transmission des symboles permet de supprimer les interférences d'un mobile cocanal supplémentaire, ce qui tend à confirmer l'extension de résultats précédents au cas des canaux radiomobiles numériques caractérisés par des évanouissements sélectifs en fréquence.

Le second type de canal de communication considéré est celui du système d'enregistrement magnétique multivariable où les données binaires sont enregistrées par saturation longitudinale des N pistes d'un médium magnétique plan (e.g. ruban magnétique, disque dur, etc.), la lecture s'effectuant par le biais de M têtes de lecture magnéto-inductives. Nos résultats tendent à confirmer l'existence de configurations géométriques (têtes-pistes) optimales qui maximisent la valeur de la capacité lorsque les pistes et les têtes sont suffisamment rapprochées pour engendrer d'importantes interférences entre les symboles des pistes adjacentes. Dans les mêmes conditions d'utilisation, l'égaliseur linéaire et le filtre adapté voient cependant leurs performances réduites de façon significative. Les interférences entre symboles peuvent alors s'interpréter comme le résultat d'une redondance implicite au canal qui améliore la valeur de la capacité mais dégrade les performances des égaliseurs qui semblent incapables d'exploiter le gain de codage disponible.

ABSTRACT

One of the main characteristics shared by all communication channels is the dependence between the maximum data rate they can support and the physical constraints to which they are subjected, the main constraints being of spatial, temporal and frequential order. A general model allowing for the simultaneous evaluation of the impact and respective interactions of these constraints is the multivariable gaussian channel where N inputs are transmitted through a multivariate linear channel having M outputs affected by colored gaussian noise sources.

This thesis proposes a method to evaluate the impact of spatial and temporal diversity and of frequency constraints on the admissible data rate in the context of linear equalization and matched filter bounds for the multivariable gaussian channel and to compare the corresponding results to the Shannon capacity of the channel. To achieve these objectives, we present the expression of an upper bound on the bit error rate for a linear equalizer using optimum combining. An explicit dependency of the performance bound on the system parameters is then obtained together with its relationship with the so-called "optimum" bounds corresponding to the matched filter and the information theoretic Shannon's capacity.

These analytical results are used to evaluate the performance of the digital radiomobile channel operating on a frequency selective channel linking N mobiles to an M^{th} order space diversity receiver. Because of the time varying nature of this channel, the bound is used in conjunction with a Monte-Carlo simulation to emulate the time varying realizations of the channel and evaluate the corresponding outage rate. Our results seem to indicate that, in general, equalization alone falls short of exploiting the full potential of the time diversity coding gain available with such time dispersive channels, which is particularly true for the linear equalizer. In this case however, our results tend to show that

every transmitter bandwidth increment equal to the symbol transmission rate allows the interference suppression of one additional cochannel mobile, which is an extension of previous results to the frequency selective fading case.

The second application considered is the multivariable magnetic recording system where the N binary input data streams are longitudinally recorded by saturation over the corresponding number of tracks of a planar magnetic recording medium (e.g. magnetic tape, hard disk, etc.), the output streams being taken as the output of M magneto-inductive read heads. Our results tend to confirm the existence of optimal geometric configurations (heads-tracks) maximizing the capacity when the heads and tracks are sufficiently close to generate substantial intersymbol interferences from adjacent tracks. In the same operating conditions however, a significant performance degradation is seen for the linear equalizer and the matched filter bound. In this context, the interferences can be interpreted as the result of implicit redundancy within the channel which improve the value of the capacity but also shows the inability of the equalizers to exploit the available coding gain.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
LISTE DES TABLEAUX	xv
LISTE DES FIGURES	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xx
LISTE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES ET DES NOTATIONS	xxii
CHAPITRE I: INTRODUCTION	1
1.1 Problématique	1
1.2 Revue de la littérature	4
1.3 Organisation de la thèse	7
CHAPITRE II: LE CAS GÉNÉRAL DU CANAL MULTIVARIABLE	
GAUSSIEN COLORÉ	8
2.1 Notations mathématiques et conventions	8
2.2 Modèle du canal gaussien	10
2.3 Le canal multivariable gaussien dans le cadre des communications numériques .	12
2.4 Évaluation de la capacité du canal gaussien	16
2.5 Dérivation des bornes de performance	19
2.5.1 Borne de Saltzberg sur le taux d'erreur	20
2.5.2 Estimation du taux de transmission admissible pour un taux d'erreur fixé.	27
2.5.3 Discussion sur le resserrement possible des bornes.	29

CHAPITRE III: APPLICATION AU CANAL RADIOMOBILE

NUMÉRIQUE	33
3.1 Introduction aux systèmes linéaires à variations temporelles (systèmes LTV) ...	34
3.1.1 Variations à grande et petite échelle, le canal Quasi-WSSUS.	42
3.1.2 Caractérisation du canal WSSUS.	44
3.2 Modélisation d'un canal à évanouissements sélectifs en fréquence	51
3.2.1 Modèle à profil continu	52
3.2.2 Modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires	53
3.2.3 Modèle en salves de Saleh et Valenzuela	54
3.2.4 Modèle mathématique du canal de communication.	56
3.3 Expression de la capacité	59
3.4 Expression des bornes de performances	61
3.5 Présentation des paramètres de simulation	63
3.5.1 Caractérisation du taux de coupure	63
3.5.2 Forme du filtre de mise en forme.	64
3.5.3 Discussion sur la simulation du modèle à profil continu.	66
3.5.4 Modèle considérant la présence d'une liaison directe mobiles-base	68
3.6 Résultats numériques	70
3.7 Discussion du compromis entre diversités spatiale et temporelle	77
3.7.1 Le cas du canal muni de deux mobiles, une antenne et une raie	85

CHAPITRE IV: APPLICATION AU CANAL D'ENREGISTREMENT

MAGNÉTIQUE	87
4.1 Modélisation du canal d'enregistrement magnétique	88
4.1.1 Mécanisme d'écriture.	89
4.1.2 Mécanisme de lecture	92
4.2 Modélisation des bruits	95
4.2.1 Paramètres de bruit et rapport signal sur bruit équivalent	98
4.3 Expression de la capacité du modèle du canal d'enregistrement magnétique ...	101

4.4	Détermination des bornes d'égalisation	105
4.5	Résultats numériques et discussion	107
4.5.1	Détermination des constantes de bruit	108
4.5.2	Présentation des valeurs des paramètres généraux de simulation	109
4.5.3	Influence de la distance de séparation entre les pistes	110
4.5.4	Influence du nombre total de pistes et de têtes	111
4.5.5	Influence de la largeur des pistes et des têtes	112
4.5.6	Influence de la valeur du rapport signal sur bruit ρ_0	117
4.5.7	Influence du facteur de désalignement entre les têtes et les pistes	118
4.5.8	Influence de la fraction de bruit impartie au bruit électronique	120
4.5.9	Influence de la configuration géométrique des têtes et des pistes	121
4.6	Analyse du cas de têtes de lecture surplombant l'ensemble des pistes	126
4.6.1	Le cas de pistes de même largeur	132
CHAPITRE V: CONCLUSION		137
5.1	Contributions de la thèse	138
5.1.1	Le cas général du canal multivariable gaussien coloré	138
5.1.2	Le cas du canal radiomobile	138
5.1.3	Le cas du canal d'enregistrement magnétique	141
5.2	Extensions et nouvelles voies de recherche	142
BIBLIOGRAPHIE		144
ANNEXE A: ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE LA CAPACITÉ		155
ANNEXE B: ÉVALUATION DÉTAILLÉE DE L'EQM MINIMALE		157
B.1	Le cas de l'égaliseur linéaire	157
B.2	Le cas de la borne du filtre adapté	163
B.3	Calcul de la matrice de l'égaliseur	164

ANNEXE C: DÉTERMINATION DU NOMBRE DE NIVEAUX L	166
ANNEXE D: DÉTERMINATION DU RAPPORT SNR POUR LE CANAL RADIOMOBILE	168
ANNEXE E: ÉVALUATION DES CONSTANTES DE NORMALISATION DE PUISSANCE	171
E.1 Résumé des résultats	171
E.1.1 Modèle à profil continu	171
E.1.2 Modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires	172
E.1.3 Modèle à arrivées par salves	173
E.2 Preuve pour le modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires	174
E.2.1 Le cas du profil uniforme	177
E.2.2 Le cas du profil exponentiel	178
E.2.3 Le cas du profil gaussien	178
E.3 Preuve dans le cas du modèle à arrivées par salves	178
ANNEXE F: DÉTERMINATION D'UN INDICATEUR SUR LA PRÉCISION DES RÉSULTATS RELATIFS AU CANAL RADIOMOBILE	184
ANNEXE G: GÉNÉRATION DES NOMBRES ALÉATOIRES	187
ANNEXE H: EFFET DU PARAMÈTRE τ SUR LA CAPACITÉ DU CANAL RADIOMOBILE MUNI DE DEUX RAIES	189
ANNEXE I: AUTRES RÉSULTATS NUMÉRIQUES RELATIFS AU CANAL RADIOMOBILE	193
I.1 Résultats relatifs au modèle à profil continu	193
I.1.1 Évaluation de l'influence du taux d'arrivée des raies	194

I.1.2	Évaluation de l'influence de la valeur efficace du retard	196
I.1.3	Évaluation de l'influence de la forme du profil	197
I.1.4	Évaluation de l'influence du rapport signal sur bruit.	197
I.1.5	Évaluation de l'influence du taux d'erreur maximal	200
I.1.6	Évaluation de l'influence du facteur d'expansion de bande	200
I.2	Évaluation de l'influence de la puissance relative de la raie directe	201
I.3	Résultats relatifs au modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires	204
I.3.1	Évaluation de l'influence du taux d'arrivée des raies	204
I.3.2	Évaluation de l'influence de la valeur efficace du retard	206
I.4	Résultats relatifs au modèle à arrivées par salves	207
I.5	Comparaison entre les modèles à arrivées discrètes et par salves	208

ANNEXE J: DÉTERMINATION DU RAPPORT SNR POUR LE CANAL D'ENREGISTREMENT MAGNÉTIQUE	210
---	------------

ANNEXE K: MAXIMISATION DE LA FONCTION Z	212
K.1 Preuve de la solution donnée en (K.5) à la maximisation de (K.4)	214

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Capacité et bornes d'égalisation pour différentes configurations géométriques des têtes d'un système muni de 21 pistes	123
Tableau 4.2	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes pour $W_{\min}=10^{-5}\text{m}$	131
Tableau 4.3	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes et de a pour des pistes de largeur identique	133
Tableau 4.4	Capacité et bornes d'égalisation lorsque la largeur totale des pistes est $W_{\text{tot}}=10^{-4}\text{m}$ pour différentes configurations géométriques des têtes et des pistes, $W_{\min}=10^{-6}\text{m}$	136

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Modèle du canal gaussien multivariable	10
Figure 2.2	Modèles équivalents du canal gaussien multivariable avec sources de bruit blanc	12
Figure 2.3	Modèle du système de communication numérique gaussien	12
Figure 2.4	Modèles équivalents du système de communication numérique gaussien avec sources de bruit blanc	13
Figure 2.5	Problème du remplissage de N réservoirs	18
Figure 2.6	Borne sur le taux d'erreur BER en fonction du nombre de niveaux L lorsque $K_n < 1$	29
Figure 2.7	Illustration de la borne de Saltzberg	31
Figure 2.8	Canal affecté par un bruit additif	31
Figure 2.9	Fonction $Q(x)$ et deux bornes supérieures	32
Figure 3.1	Illustration des sources physiques d'évanouissements radioélectriques ...	35
Figure 3.2	Relation entre les fonctions descriptives d'un système LTV	37
Figure 3.3	Relations entre les fonctions d'autocorrélation des fonctions descriptives des systèmes LTV	40
Figure 3.4	Relations entre les fonctions d'autocorrélation du canal WSSUS	41
Figure 3.5	Profil multivoies typique	46
Figure 3.6	Profil multivoies de forme exponentielle	46
Figure 3.7	Fonction de corrélation d'enveloppe typique	47
Figure 3.8	Effets de la sélectivité des évanouissements sur une suite de symboles ...	49
Figure 3.9	Relations entre les fonctions de corrélation du canal WSSUS, quelques cas particuliers	50
Figure 3.10	Modélisation de la réponse impulsionnelle	51
Figure 3.11	Distribution de Rayleigh	52
Figure 3.12	Réalisation du modèle de canal avec arrivées des raies en salves	55

Figure 3.13	Forme des profils uniforme, exponentiel et gaussien pour $\tau_{rms} = 1$	59
Figure 3.14	Spectre de l'impulsion élémentaire	66
Figure 3.15	Forme de l'impulsion élémentaire, facteur d'expansion de bande $\alpha = 0.35$	66
Figure 3.16	Approximation des profils continus uniforme, exponentiel et gaussien pour $\tau_{rms} = 1$	68
Figure 3.17	Profil de puissance multivoies uniforme avec raie directe	69
Figure 3.18	Taux par mobile en fonction de la valeur efficace du retard normalisé pour 3 antennes réceptrices	71
Figure 3.19	Taux par mobile en fonction du taux d'erreur sur les bits pour 3 antennes réceptrices	72
Figure 3.20	Taux par mobile en fonction du rapport signal sur bruit pour 3 antennes réceptrices	73
Figure 3.21	Taux par mobile en fonction du facteur d'expansion de bande pour trois mobiles, SNR=40dB	75
Figure 3.22	Taux total en fonction du facteur d'expansion de bande pour une antenne réceptrice, SNR=40dB	75
Figure 3.23	Taux de coupure vs. nombre d'antennes et de mobiles	76
Figure 3.24	Transformations du canal muni de 2 antennes	79
Figure 3.25	Transformations du canal muni de deux raies	81
Figure 3.26	Compensation requise au rapport signal sur bruit pour obtenir une capacité identique pour les canaux munis de deux antennes ou de deux raies	82
Figure 3.27	Densité de probabilité de la capacité des canaux munis de deux antennes ou de deux raies pour différentes valeur du rapport signal sur bruit ρ , avec compensation de 3dB	83
Figure 3.28	Densité de probabilité de la capacité des canaux munis de R raies ou M antennes, $\rho = 20$ dB	84
Figure 4.1	Système d'enregistrement magnétique à pistes et têtes multiples et modèle correspondant du système de communication multivarié	89

Figure 4.2	Illustration du processus d'enregistrement magnétique numérique	90
Figure 4.3	Géométrie des têtes de lectures et des pistes	92
Figure 4.4	Modèle mathématique du système d'enregistrement magnétique multivarié	95
Figure 4.5	Valeur de la capacité en fonction de différentes contraintes	104
Figure 4.6	Capacité et bornes d'égalisation en fonction de la distance inter-piste . . .	110
Figure 4.7	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes et de têtes	112
Figure 4.8	Capacité par unité de surface en fonction de la largeur et du nombre de pistes	113
Figure 4.9	Capacité par unité de surface en fonction de la largeur totale et du nombre de pistes	115
Figure 4.10	Bornes d'égalisation en fonction de la largeur et du nombre de pistes . . .	116
Figure 4.11	Bornes d'égalisation en fonction de la largeur totale occupée par les pistes et de leur nombre	116
Figure 4.12	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du rapport signal sur bruit de référence	117
Figure 4.13	Capacité normalisée et bornes d'égalisation en fonction de la largeur des pistes et des têtes et du rapport signal sur bruit de référence	118
Figure 4.14	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du facteur de désalignement ε	119
Figure 4.15	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du pourcentage de bruit électronique β_0 du système de référence, $\rho_0=60\text{dB}$	120
Figure 4.16	Capacité et bornes d'égalisation en fonction du pourcentage de bruit électronique β_0 du système de référence, $\rho_0=40\text{dB}$	121
Figure 4.17	Capacité en fonction de la largeur des pistes pour différentes valeurs de la largeur totale occupée par les pistes	134
Figure E.1	Illustration de la troncation dans le cas du modèle à arrivées par salves .	182
Figure F.1	Projection de l'intervalle de confiance	185

Figure H.1	Fonction à intégrer dans l'équation (H.9)	191
Figure I.1	Taux de coupure vs. taux d'arrivée, modèle à profil continu	195
Figure I.2	Taux de coupure vs. valeur efficace du retard, modèle à profil continu . .	196
Figure I.3	Taux de coupure vs. forme du profil	198
Figure I.4	Taux de coupure vs. rapport signal sur bruit	199
Figure I.5	Taux de coupure vs. taux d'erreur maximal	201
Figure I.6	Taux de coupure vs. facteur d'expansion de bande	202
Figure I.7	Taux de coupure vs. puissance relative de la raie directe	203
Figure I.8	Taux de coupure vs. taux d'arrivée, modèle à arrivées discrètes	205
Figure I.9	Taux de coupure vs. valeur eff. du retard, modèle à arrivées discrètes . . .	206
Figure I.10	Taux de coupure vs. valeur eff. du retard, modèle à arrivées par salve . . .	208
Figure I.11	Comparaison entre le modèle à arrivées discrètes et par salves	209
Figure K.1	Fonction Z_{\max} en fonction de N	214

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

AMRC	Accès multiple par répartition par code
AMRF	Accès multiple par répartition fréquentielle
AMRT	Accès multiple par répartition temporelle
BER	Bit error rate (taux d'erreur sur les bits)
bit	Binary digit (unité élémentaire d'information), bits au pluriel
cm	centimètre
dB	Décibel
D ^r	Docteur
e	Notation exponentielle, e.g. $2e-3 = 2 * 10^{-3} = 0.002$
EQM	Erreur quadratique moyenne
EQMM	Erreur quadratique moyenne minimum
GWSSUS	Gaussian wide-sense stationary uncorrelated scattering (gaussien stationnaire au sens large et à fluctuations non-corrélées)
Hz	Hertz (un cycle par seconde)
IES	Interférences entre symboles
k	kilo (mille)
kbits	kilobits (mille bits)
LTV	Linear time variant (linéaire à variations temporelles)
m	mètre
M	Mega (un million)
MAQ	Modulation d'amplitude en quadrature
max	Maximum
Mbits	Megabits (un million de bits)
MF	Modulation de fréquence
min	Minimum
mm	millimètre (un millième de mètre)

Ph.D.	Philosophiae Doctor
rad	radian
RMS	Root mean square (valeur efficace)
s	Secondes
SNR	Signal to noise ratio (rapport signal sur bruit)
tot	Total
W	Watts
WSSUS	Wide-sense stationary uncorrelated scattering (stationnaire au sens large et à dispersion non-corrélée)
μ	micro (un millionième)
μm	micromètre (un millionième de mètre)
(n.m)	Équation numéro n au chapitre ou annexe n

LISTE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES ET DES NOTATIONS

LISTE DES NOTATIONS

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
A ou a	Variables, en caractères italiques	10
\mathbf{A}	Matrices, en caractères majuscules gras et italiques	10
A_{ij}	Composante i, j de la matrice A	20
\mathbf{a}	Vecteurs colonnes, en caractères minuscules gras et italiques	10
a_i	Composante i du vecteur \mathbf{a}	20
\mathbf{A}^\dagger	Complexe conjugué transposé	161
\mathbf{A}^*	Complexe conjugué	160
\mathbf{A}^{-1}	Inverse	26
\mathbf{A}^T	Transposé	n.a.
\hat{A}	Valeur optimale de A , selon le contexte	160
$ \mathbf{A} ^2$	$ \mathbf{A} ^2 = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$	26
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Trace de la matrice \mathbf{A}	25
$\text{VP}(\mathbf{A})$	Valeurs propres de la matrice \mathbf{A}	86
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$	n.a.
$ k $	Amplitude du scalaire k (réel ou complexe)	96
\mathbf{I}	Matrice identité	60
P_E	Probabilité d'erreur	21
i, j, k, l, m, n	Indices (entiers)	18, 20
$x^{(mn)}$	Variable aléatoire x associée à la composante m, n d'une matrice	56
j	$\sqrt{-1}$	93
$\text{atan}(x)$	Arctangente, définie dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$	91
$\text{atan2}(y, x)$	Arctangente, définie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$	188
$\ln(x)$	Logarithme naturel	166

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
$\log_a(x)$	Logarithme en base a de x	17
$\max_a(x)$	Maximum de x , en fonction du paramètre variable a	17
$\min_a(x)$	Minimum de x , en fonction du paramètre variable a	157
$\cosh(x)$	Cosinus hyperbolique	23
$\sinh(x)$	Sinus hyperbolique	n.a.
$\operatorname{Re}(x)$	Partie réelle de x	160
$\operatorname{Im}(x)$	Partie imaginaire de x	160
$x \bmod y$	Fonction modulo (reste de la division de x par y)	187
e^x	Fonction exponentielle, $e = 2.71828\dots$	25
$\operatorname{sgn}(x)$	Signe de x , $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = 0$ si $x = 0$	93
\otimes	Convolution	10
$k!$	Factoriel de k , $0! \equiv 1$	176
$A \vee B$ ou $A + B$	Union des événements A et B	21
$A \wedge B$ ou AB	Intersection des événements A et B	21
$\{ \}$	Ensemble d'objets	86
\approx	Approximativement égal à	135
\propto	Proportionnel à	50
«	Beaucoup plus petit que	44
»	Beaucoup plus grand que	190
\equiv	Définit comme	98
\rightarrow	Tends vers	135, 190
∞	Infini	91, 190
f	Fréquence en Hz	17
ω	Fréquence en rad/sec	26
k	Fréquence en rad/m, $k = \omega/v$ où v est la vitesse en m/s	91

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
z	Fréquence normalisée, $z = fT$ où T est la période entre les symboles	17
$M \times N$	Dimensions d'une matrice, M est le nombre de lignes, N , le nombre de colonnes	10
$s^{(k)}$	s évaluée au temps $t = kT$, $s^{(k)} = s(kT)$	14
$\tilde{H}(\omega)$	La transformée de Fourier de la variable $H(t)$	9, 12
$(j, l) \neq (n, 0)$	La pair d'indices j, l tel que $j \neq n$ et $l \neq 0$	24
$E[x]$	Espérance mathématique de x	69
N_0	Densité spectrale bilatérale du bruit blanc	60
\bar{a}	Valeur moyenne de a	53
$f_X(x)$	Distribution de probabilité de la variable aléatoire X	172
$F_X(x)$	Distribution de probabilité cumulative de la variable aléatoire X	184
$\{z f(z)\}$	Valeurs de z qui répondent à la condition $f(z)$ (tel que...)	18
R_r	Taux de coupure à (100 r)%	64
$P[A]$	Mesure de probabilité de l'événement A	21
Δx	Différence entre deux valeurs de x , e.g. $\Delta x = x_2 - x_1$	82, 84
σ_x^2	Variance associée à x	15
$\delta(t)$	Fonction impulsionnelle unitaire (impulsion de Dirac)	56
$\lim_a(x)$	Limite de x soumis à la condition a	168
$[a, b]$	Intervalle sur la ligne réelle, $a \leq x \leq b$	15
$[0]_{nm}$	matrice $N \times M$ ayant la valeur zéro en position n, m	160
$\binom{M}{i}$	Fonction binomiale $\binom{M}{i} = \frac{M!}{i!(M-i)!}$	n.a.
$\sum_{i=1}^N a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_N$	17
$\prod_{i=1}^N a_i$	$a_1 a_2 \dots a_N$	22

<i>Notation</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
\int_{Ω}	Intégrale sur Ω , $\int_{\Omega} = \int_a^b$ si $\Omega = [a, b]$	17
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à x	160
$F[x(t)]$	Transformée de Fourier $x(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	41
$F^{-1}[x(\omega)]$	Transformée inverse de Fourier, $x(t) = F^{-1}[x(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	41
$\text{erf}(x)$	Fonction d'erreur gaussienne, $\text{erf}(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} dy$	94
$\text{erfc}(x)$	Fonction d'erreur gaussienne complémentaire, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$	94
$Q(x)$	Fonction d'erreur, $Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right]$	30

LISTE DES SYMBOLES ROMANS (MINUSCULES)

Symbole roman (minuscule)	Signification	Exemples (pages)
a	Facteur de largeur de piste pour des pistes de largeur uniforme	132
a_x	Longueur de la zone de transition de l'impulsion élémentaire du canal d'enregistrement magnétique	91
$\mathbf{a}^{(l)}$	Vecteur des séquence complexes de données d'entrée au temps $t = lT$	14
d_W	Distance entre les piste (d'une piste à l'autre)	93
d_H	Distance entre les têtes de lecture (d'une tête à l'autre)	93
d_ε	distance latérale séparant le centre de la première tête du centre de la piste correspondante	108
$\mathbf{d}(t)$	Vecteur des signaux d'entrée du système numérique	14
e	Base des logarithmes népériens $e = 2.71828\dots$	25
f	Variable fréquentielle exprimée en Hz	17
$f_{nm}(\tau)$	Fonction quelconque utilisées lors du calcul des variations sur $\hat{W}(\tau)$	159
$\hat{f}_{nm}(\tau)$	Matrice dont la composante n, m est égale à $f_{nm}(\tau)$ et dont toutes les autres composantes sont nulles	160
$g(t)$ ou $\bar{g}(f)$	Filtre de mise en forme au transmetteur	12
g_1, g_2	Distances associées respectivement à W_{s1} et W_{s2}	93
$h(t)$	Réponse impulsionnelle	51
h_1 ou h_2	Valeurs quelconques inférieures à H	215
k	Variable fréquentielle exprimée en rad/m, $k = \omega/\nu$	91
m	Pente de $F_R(r)$ pour $r = \hat{R}_{0,01}$	185
m_2	Second moment d'une variable aléatoire	175
$\mathbf{m}(t)$	Vecteur des signaux à la sortie de $\mathbf{H}(t)$	10
n	Nombre de simulation utilisé dans l'estimé de $F_R(r)$	185
$n_{\text{magn}}(x)$	Bruit d'origine magnétique	96
$n_{\text{électr}}(x)$	Bruit d'origine électronique	97

<i>Symbole roman (minuscule)</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
$n(x)$	Vecteur de bruit coloré du canal d'enregistrement magnétique	95
$n(t)$	Vecteur de bruit complexe coloré	10
$p(\tau)$	Profil multivoies	53
$p_n(\tau)$	Profil multivoies de puissance normalisée unitaire	58
$\bar{p}(\omega, \alpha)$	Impulsion de Nyquist, non normalisée	65
r, r_1 ou r_2	Valeur d'une fonction à optimiser	212, 215
r_{\max}	Valeur maximum de r	212
r_ϕ	Valeur de r pour un système optimale modifiée	216
s	Constante associée à l'évaluation de $A(\tau)$	94
s_n	Puissance moyenne pour l'entrée n lors du calcul de la capacité	17
$s(t)$	Vecteur des signaux de sortie de l'égaliseur	15
$s^{(k)}$	Vecteur des signaux de sortie de l'égaliseur	16
t	Variable du temps	n.a.
u	Niveau de confiance	185
u_i	Variable aléatoire de distribution uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$	175
u_{ij}	Variable aléatoire de distribution uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$	180
$u(t)$	Vecteur contenant une ligne quelconque de la matrice $U(t)$	20
v	Vitesse de défilement du support magnétique	90
$v(t)$	Vecteur de bruit ramené à la sortie de l'égaliseur	16
$w(t)$	Vecteur de bruit complexe blanc et de densité spectrale de puissance unitaire	12
x	Position de la tête de lecture par rapport à une référence fixe	90
x	Variable de travail	191
$x(t)$	Vecteur des signaux d'entrée du système de communication	10
$y(t)$	Vecteur des signaux de sortie du système de communication	10
z	Variable fréquentielle normalisée, $z = fT$ où T est la période entre les symboles	17

<i>Symbole roman (minuscule)</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
z_1 et z_2	Variables aléatoire de bruits et d'interférences totales	21
z_u	Variable	185
z_n	Suite récurrente de nombres aléatoires	187
$z(\tau_r)$	Variable auxiliaire	175

LISTE DES SYMBOLES ROMANS (MAJUSCULES)

<i>Symbole roman (majuscule)</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
$A(\tau)$	Fonction associée à l'évaluation de $G_s(k)$	94
A_i	Amplitude de la raie i d'une liaison mobile-antenne réceptrice	79
$B(a_x, W_k, H)$	Fonction associée à l'évaluation de SNR (canal magnétique)	99
BER	Taux d'erreur sur les bits	27
C	Capacité	17
C_1 ou C_2	Valeur de la capacité	78
C_x	Capacité exprimée en bits/m	101
$C(t)$ ou $\tilde{C}(f)$	Matrice du canal de communication	12
$D1_{tot}$	Délai de tronquation associé aux salves du profil multivoies	173
$D2_{tot}$	Délai de tronquation associé aux raies d'une salve particulière	173
D_{tot}	Délai de tronquation du profil multivoies	58
$D^{(mn)}$	Amplitude relative de la raie directe du modèle de Rice associée à la composante m, n d'une matrice	68
$D(\alpha)$	Fonction associée à l'évaluation de $G(y, H, k)$	97
E_s	Énergie moyenne d'un symbole pour un intervalle de temps T	61, 170
EQM_n	Erreur quadratique moyenne correspondant à l'entrée n	24
$EQMM$	Erreur quadratique moyenne minimale totale	25
$EQMM^{linéaire}$	EQMM totale associée à l'égaliseur linéaire	26
$EQMM^{idéal}$	EQMM totale associée au filtre adapté	26
F ou F'	Intervalle d'intégration	191
$\hat{F}_R(r)$	Estimé de la distribution $F_R(r)$ obtenu par simulation	184
$\tilde{G}(k)$	Fonction de transfert du processus de lecture d'un médium magnétique par une tête de lecture inductive	93
$\tilde{G}_d(k)$	Partie de $\tilde{G}(k)$ correspondant au couplage direct entre une tête et une piste	93

Symbole roman (majuscule)	Signification	Exemples (pages)
$\tilde{G}_s(k)$	Partie de $\tilde{G}(k)$ correspondant au couplage indirect entre une tête et une piste	93
$\tilde{G}(y, H, k)$	Fonction de transfert associée à l'évaluation du spectre du bruit magnétique	96
$G(x)$ ou $\tilde{G}(k)$	Matrice correspondant au processus de lecture du canal d'enregistrement magnétique	94
H	Largeur d'une tête du système d'enregistrement magnétique	93
H_i	Largeur de la $i^{\text{ème}}$ tête du système d'enregistrement magnétique	98
$H(t)$ ou $\tilde{H}(f)$	Matrice équivalente du canal de commun. $\tilde{H}(f) = \tilde{g}(f) \tilde{C}(f)$	12, 12
$\tilde{H}'(f)$	Matrice modifiée du canal de communication	13
K	Constant de normalisation de puissance des profils multivoies	57
K_n	Variable	28
$K(\Omega)$	Fonction $K(\Omega) = \int_{\Omega} dz$	190
L	Nombre de niveaux de la MAQ	14
M	Nombre de sorties du système de communication	5, 10
M_{\max}	Valeur maximale de M (dans le contexte de maximisation de Z)	129
N	Nombre d'entrées du système de communication	5, 10
N_0	Densité spectrale bilatérale du bruit blanc	26
$N(t)$ ou $\tilde{N}(f)$	Matrice diagonale des spectres de bruit complexes et colorés	12
$\tilde{N}(k)$	Matrice diagonale des spectres de bruit colorés	101
P_m	Puissance moyenne reçue par l'antenne m	168
\tilde{P}	Puissance moyenne totale reçue par les antennes	170
$\tilde{P}_n(f)$	Filtre de mise en forme pour l'entrée n lors du calcul de la capacité	17
$P(x)$ ou $\tilde{P}(k)$	Matrice correspondant au processus d'écriture/lecture du canal d'enregistrement magnétique	94
$P'(x)$, $\tilde{P}'(k)$	Matrice $\tilde{P}(k)$ normalisée	100
Q	Nombre de salves du modèle de Saleh et Valenzuela	179

<i>Symbole roman (majuscule)</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
$Q(x)$ ou $\tilde{Q}(k)$	Forme ou spectre de l'impulsion élémentaire du canal d'enregistrement magnétique	91
R	Taux de transmission	14
R	Nombre de raies du modèle de canal radiomobile	56
R_i	Nombre de raies dans la $i^{\text{ème}}$ salve du modèle de Saleh et Valenzuela	179
$R_{0.01}$	Taux de coupure à 1%	63
$\hat{R}_{0.01}$	Estimé de $R_{0.01}$	185
$\tilde{R}(\omega)$	Spectre replié de la matrice de canal équivalent	26
S	Puissance moyenne totale à l'entrée du système de commun.	15
S_1 ou S_2	Points quelconques sur un hyperplan	215
$\tilde{S}_{\text{électr}}(k)$	Spectre du bruit électronique à la sortie du canal d'enregistrement magnétique	97
$\tilde{S}_n(f)$	Spectre de la $i^{\text{ème}}$ source de bruit coloré du canal gaussien	11
$\tilde{S}_m(k)$	Spectre du bruit magnétique à la surface du médium	96
$\tilde{S}_{\text{magn}}(k)$	Spectre du bruit magnétique ramené à la sortie de la tête de lecture	97
$\tilde{S}_n(k)$	Spectre du bruit global capté par une tête de lecture inductive	97
T	Période entre les symboles	14
T_i	Temps d'arrivées des salves (modèle de Saleh et Valenzuela)	55
T_x	Longueur de ruban entre les symboles $T_x = \nu T$	90
$U(t)$ ou $\tilde{U}(f)$	Matrice équivalente totale du système de communication	12, 16
V_0	Constante de conception d'une tête de lecture inductive	94
$V(x)$	Tension induite dans une tête de lecture	93
W_f	Largeur de bande de fréquence en Hz	14
W_k	Largeur de bande de fréquence en rad/m	98
W_z	Largeur de bande de fréquence normalisée par la période T (en unité de z)	17

<i>Symbole roman (majuscule)</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
W	Largeur d'une piste du système d'enregistrement magnétique	93
W_l	Largeur de la piste l	127
\hat{W}_l	Valeur optimale de W_l	213
W_d	Largeur d'une piste produisant un couplage direct avec une tête	93
W_{s1}, W_{s2}	Largeur d'une piste produisant un couplage indirect avec une tête	93
W_{\min}	Largeur minimale des pistes (contrainte de ...)	129
W_{\max}	Largeur maximale des pistes (contrainte de ...)	129
W_{tot}	Largeur totale qu'occupe les pistes incluant les bandes de garde	135
$\hat{W}(\tau)$	Matrice $W(\tau)$ optimale (dans le sens de l'EQM minimale)	159
$W(t)$ ou $\tilde{W}(f)$	Matrice de l'égaliseur au récepteur	12
$\tilde{W}'(f)$	Matrice modifiée d'égalisation au récepteur	13
W_N	Largeur de bande de Nyquist $W_N = 1/T$ Hz	200
Z	Puissance moyenne totale équivalente lors du calcul de la capacité	128
Z_{\max}	Valeur maximale de Z	129
Z'_{\max}	Valeur maximale modifiée de Z	212
Z_n	Intervalles d'intégration pour la $n^{\text{ième}}$ entrée	17
Z_n^i	Suite des valeurs de Z_n lors d'une évaluation itérative	156

LISTE DES SYMBOLES GRECS

<i>Symbole grec</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
α	Facteur d'expansion de largeur de bande associée au filtre de mise en forme $\tilde{g}(\omega)$	65
α_n	Niveaux d'amplitude admissibles des données en MAQ	14
β_n	Niveaux d'amplitude admissibles des données en MAQ	14
$\beta_j, j = 1 \dots M$	Contribution relative du bruit électrique à ρ_j	99
β_0	Contribution relative du bruit électrique à ρ_0	98, 99
γ	Constante de temps de l'enveloppe des raies (modèle de Saleh et Valenzuela)	54
γ_k	$k^{\text{ième}}$ valeur possible de α_n et β_n	23
δ_r	Temps différentielle d'arrivée des raies	172
δ_{nm}	Réels utilisées lors du calcul des variations sur $\hat{W}(\tau)$	159
ε	Désalignement relatif de la première tête de lecture par rapport à la première piste	109
ε	Vecteur d'erreur entre l'entrée du système de communication et la sortie de l'égaliseur	24
ε_α	Événement "la lettre $\alpha_n^{(0)}$ est en erreur"	21
ε_β	Événement "la lettre $\beta_n^{(0)}$ est en erreur"	21
ζ	Facteur de confiance	185
$\eta_r^{(mn)}$	Variable aléatoire représentant l'amplitude de la $r^{\text{ième}}$ raie pour la liaison reliant le mobile n à l'antenne m	56
θ_i	Phase de la raie i d'une liaison mobile-antenne réceptrice	79
$\theta_r^{(mn)}$	Variable aléatoire représentant la phase de la $r^{\text{ième}}$ raie pour la liaison reliant le mobile n à l'antenne m	56
λ	Multiplicateur de Lagrange ou variable d'optimisation de la borne de Chernoff	17, 22
λ	Taux moyen d'arrivée des raies (processus de poisson)	53
λ'	Multiplicateur de Lagrange	61, 128

<i>Symbole grec</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
λ^i	Suite des valeurs du multiplicateur de Lagrange λ lors d'une évaluation itérative	156
λ_c	Nombre de raies par unité de retard efficace pour la simulation du modèle à profil continu	67
λ_{\min}	Valeur minimale sur n et z des valeurs propres $\lambda_n(z)$	155
$\lambda_n(f)$	$n^{\text{ième}}$ valeur propre du canal de communication	17
$\lambda'_n(z)$	$n^{\text{ième}}$ valeur propre du canal de communication	61
$\lambda'_1(k)$	Valeur propre associé au canal d'enregistrement magnétique utilisant une tête de lecture unique	128
μ	Un réel, $\mu > 1$	215
$v_r^{(mn)}$	Variable aléatoire représentant l'amplitude non-normalisée de la $r^{\text{ième}}$ raie pour la liaison reliant le mobile n à l'antenne m	57
π	Pi, $\pi = 3.1415927\dots$	26
ρ	Rapport signal sur bruit moyen au récepteur	60, 170
ρ_0	Rapport signal sur bruit moyen au récepteur pour le système de référence à tête unique	98, 99
$\rho_j, j = 1 \dots M$	Rapport signal sur bruit moyen au récepteur pour la sortie j	98
ρ_{tot}	Rapport signal sur bruit moyen totale	170
σ_a^2	Variance des données d'entrée	15
σ_α^2	Variance des composantes en quadrature (α_n et β_n) des données d'entrée	15
σ_n^2	Variance des sources de bruit colorées	16
σ_r^2	Variance du bruit ramené à la sortie de l'égaliseur	16
σ_{vr}^2	Variance de la partie réelle du bruit ramené à la sortie de l'égaliseur	16, 23
σ_{IES}^2	Variance de l'interférence entre symboles	32
τ_k	Délai associé à la $k^{\text{ième}}$ raie du canal radiomobile	53
τ_{rms}	Valeur efficace du retard	53
τ	Valeur moyenne du retard	53

<i>Symbole grec</i>	<i>Signification</i>	<i>Exemples (pages)</i>
τ_{ij}	Délai d'arrivée de la $j^{\text{ième}}$ raie de la $i^{\text{ième}}$ salve du modèle de Saleh et Valenzuela	55
$\tau_r^{(mn)}$	Variable aléatoire représentant le délai de la $r^{\text{ième}}$ raie pour la liaison reliant le mobile n à l'antenne m	56
υ	Petite valeur arbitraire $\upsilon > 0$	156
φ_i	Petite valeur arbitraire, $\varphi_i \geq 0$	216
ψ	Réel quelconque utilisé dans la borne de Saltzberg	23
ω	Variable fréquentielle exprimée en rad/sec $\omega = 2\pi f$	26
Γ	Constante de temps de l'enveloppe des salves du modèle de Saleh et Valenzuela	54
Λ	Taux moyen d'arrivée des salves (processus de Poisson) du modèle de Saleh et Valenzuela	54
Π_m	Constante associée au spectre du bruit magnétique	96
Π_e	Densité spectrale de puissance du bruit blanc (W/(rad/m))	97
Π'_e	Densité spectrale de puissance Π_e normalisée	100
Ω	Intervalle d'intégration	191
Ω_i	Intervalles d'intégration lors de l'évaluation de la capacité	101

CHAPITRE I INTRODUCTION

1.1 Problématique

Cette fin de siècle a vu la demande en moyens de transport et de stockage des données numériques croître de façon accélérée et rien n'indique que la tendance actuelle ira en s'amenuisant. Selon le type de système considéré, l'implantation des techniques visant à accroître le débit numérique présentera un degré de difficulté variable mais dans tous les cas, des contraintes physiques de natures diverses viendront toujours limiter l'utilisation qu'on peut faire des équipements ou configurations existantes.

Par exemple, dans le cas des communications numériques par modem sur un canal téléphonique conventionnel, l'accroissement du débit d'information est limité par le bruit et la largeur de bande de fréquence fixe du canal. La contrainte fréquentielle engendre des interférences entre les symboles lorsque le débit d'information numérique dépasse un certain seuil¹ ce qui, de pair avec le bruit, limite éventuellement le taux de transmission ultime et oblige le récepteur à se munir d'une forme quelconque d'égalisation. Évidemment l'utilisation de la fibre optique jusqu'au foyer des usagers permettrait le transport d'un débit d'information numérique très supérieur à celui supporté par les lignes téléphoniques conventionnelles mais les impératifs économiques rendent cette perspective peu réaliste dans un avenir rapproché. On cherchera plutôt dans ce cas à utiliser le canal existant aux limites de ses possibilités (Humphrey et Freeman, 1997), les contraintes majeures demeurant dans ce cas la largeur restreinte de la bande de fréquence disponible et le passage 2-fils/4-fils nécessaire à la transmission bidirectionnelle simultanée.

Dans le cas des communications radiomobiles où l'on considère N mobiles qui transmettent simultanément dans une bande de fréquence commune vers un récepteur

1. Réciproquement, l'augmentation du nombre de symboles dans un intervalle de temps donné force le rapprochement des signaux correspondants et éventuellement leur superposition partielle à cause de la largeur de bande de fréquence limitée.

supposé muni de M antennes déployées en diversité d'espace, le problème d'interférence entre les symboles s'accroît par rapport au cas où il n'y a qu'un mobile puisque le signal reçu par les antennes de la base est alors formé de la superposition des signaux de tous les mobiles. Dans ce cas, l'interférence entre les symboles trouve son origine non seulement dans la contrainte de largeur de bande mais aussi dans la contrainte spatiale qui est à l'origine des interférences entre les signaux des mobiles qui évoluent alors dans une région géographique commune. Par surcroît, du fait de la mobilité des émetteurs, les caractéristiques du canal évoluent dans le temps et donnent naissance au phénomène d'évanouissement. De ce fait, le débit d'information ultime du canal évolue dans le temps et devient alors une fonction aléatoire.

Un second exemple de canal multivariable dont on cherche à augmenter le débit d'information est le canal d'enregistrement magnétique où les données numériques sont enregistrées sur les N pistes d'un médium plan tel qu'un ruban magnétique ou un disque magnétique dur ou souple, les données étant éventuellement lues par l'intermédiaire d'un réseau de M têtes de lectures magnéto-inductives. Alors que par le passé, les informations étaient enregistrées sur des pistes suffisamment éloignées les unes des autres pour éviter les interférences entre les pistes adjacentes, il est maintenant envisageable à l'aide des techniques d'égalisation et de traitement numérique des signaux (Goodenough, 1993), de les rapprocher et d'augmenter ainsi la densité d'information par unité de surface (e.g. en bits/cm^2 , le débit d'information par seconde augmentant aussi via la vitesse de défilement du médium). Dans ce cas, la densité ultime d'information est en partie fonction de la contrainte spatiale imposée par la surface du médium et de la contrainte fréquentielle qui dépend des caractéristiques du médium magnétique et du type des têtes de lecture/écriture employées.

Il est possible de ramener ces divers types de canaux de communications numériques en apparence très différents au cas général d'un canal de communication multivariable gaussien muni de N entrées et M sorties affectées par diverses sources de bruit, coloré ou non, la réponse en fréquence du canal étant de façon générale variable dans le temps (à

condition qu'une approche quasi-statique soit adéquate pour représenter les variations du canal de communication), le canal invariant n'étant qu'un cas particulier de ce dernier. L'objectif de cette recherche est de déterminer la capacité informationnelle de Shannon de ces canaux et de comparer les résultats numériques ainsi obtenus aux taux de transmissions, en bits/sec/Hz ou en bits/cm², que peuvent engendrer l'utilisation de divers types d'égaliseurs pour un système utilisant la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ). Les résultats obtenus permettront éventuellement d'étudier l'impact et les interactions des contraintes d'ordre fréquentielle, spatiale et temporelle auxquelles les canaux sont soumis.

Nous limiterons notre recherche aux 2 types principaux de canaux de communications mentionnés précédemment: le canal radiomobile à évanouissements sélectifs en fréquence de type Rayleigh et le canal d'enregistrement magnétique multi-pistes/multi-têtes magnéto-inductives. Dans les deux cas, nous évaluerons les performances d'un égaliseur linéaire et d'un filtre adapté¹ (i.e. un égaliseur fournissant la performance ultime de tout détecteur de type symbole par symbole) et comparerons ces résultats à la capacité correspondante du canal. Notons que puisque le canal radiomobile est variable dans le temps, la capacité et de façon générale les taux de transmissions sont des variables aléatoires. Dans ce cas, nous utiliserons le taux de coupure² comme indicateur statistique des taux de transmissions pour l'évaluation des performances. Notons également que nous ne nous préoccupons pas dans ce travail de l'implantation physique des égaliseurs ni des algorithmes utilisés pour en effectuer l'adaptation dynamique aux caractéristiques du canal, nous nous intéressons plutôt aux performances ultimes qu'ils peuvent occasionner.

-
1. Aussi appelé "matched filter bound"
 2. Le taux de coupure à $x\%$, $0 \leq x \leq 100$ dénoté $R_{(x/100)}$ correspond au taux de transmission minimal en bits/sec/Hz supporté par le canal $(1 - x/100)\%$ du temps. Dans le cas des égaliseurs, ce taux assure également une probabilité d'erreur maximum donnée. Par exemple, en supposant que l'on désire un taux d'erreur maximum sur les bits de 0.1%, un taux de coupure à 1% de 3.5 signifie qu'il est possible de transmettre sur le canal 3.5 bits/sec/Hz tout en ayant l'assurance qu'en moyenne le taux d'erreur sur les bits sera inférieur à 0.1% et ce, 99% du temps.

La section suivante donne une brève revue des travaux sur lesquelles se base notre recherche en plus de fournir de plus amples détails quant à la façon dont la capacité et les bornes de performance des égaliseurs seront ultérieurement obtenues.

1.2 Revue de la littérature

Les fondements mathématiques de la théorie de l'information sont évidemment dus à Shannon (1948). De nombreux chercheurs ont par la suite contribué au développement de cette théorie dont Holsinger (1964) qui est à l'origine des équations de la capacité du canal filtré et affecté de bruit gaussien et Gallager (1968) qui en a fourni une preuve analytique plus explicite. L'extension de ce résultat au cas du canal multivariable (i.e. un canal muni de N entrées et M sorties) filtré et affecté de bruit gaussien est due à Brandenburg et Wyner (1974). Une méthode numérique efficace permettant l'évaluation de la capacité dans le cas particulier d'une matrice de canal 2×2 et d'un bruit blanc a par la suite été proposée par Amitay et Salz (1984) qui ont pour ce faire utilisé une dérivation analytique de la capacité différente de leurs prédécesseurs. Une extension de cette méthode au cas général d'une matrice de canal $M \times N$ et d'un bruit blanc gaussien est donnée par Conan, Despins, Loundu (1997) qui ont également démontré de façon formelle la convergence du calcul itératif numérique.

Le calcul des bornes sur les taux de transmissions de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté dans le cas de la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ) se base en partie sur l'extension au cas multivariable des travaux originaux de Foschini et Salz (1983). Les auteurs donnent dans ce travail l'expression d'une borne supérieure sur la probabilité d'erreur pour un canal radiomobile muni d'une entrée et d'une sortie ($N = M = 1$) et caractérisé par des évanouissements sélectifs en fréquence pour divers types d'égalisation (e.g. les égaliseurs linéaire et récursif ainsi que le filtre adapté). Cette borne permet de relier explicitement l'erreur quadratique moyenne minimum (EQMM) à la probabilité d'erreur et elle trouve son origine dans les des travaux de Saltzberg (1968) dans le cadre général du calcul de probabilité d'erreur en présence d'interférences entre symboles.

Foschini et Salz utilisent la dépendance explicite ainsi obtenue afin de calculer une borne sur le taux de transmission maximum (qu'ils dénomment l'indice d'efficacité, "efficiency index") en bits/sec/Hz que supporte le canal égalisé tout en garantissant une valeur de probabilité d'erreur maximale donnée. En se basant sur ces travaux, Amitay et Salz (1984) ont procédé à l'extension au cas des communications radio-numériques à double polarisation (i.e. $N = M = 2$) tandis que Salz (1985) en permet une extension partielle pour l'égaliseur linéaire grâce à la détermination de l'expression de l'EQMM dans le cas d'un canal $N \times N$. Balaban et Salz (1992) ont finalement étudié le cas où le signal d'un seul émetteur est reçu par M antennes déployées en diversité d'espace (i.e. $N = 1, M \geq 1$). Dans ce cas, les auteurs évaluent les performances des égaliseurs linéaire, récursif et adapté pour un canal radiomobile à évanouissements sélectifs composé de 2 raies¹ Rayleigh. Notons que les performances des égaliseurs linéaire et non-linéaire ainsi que la capacité du canal radiomobile ont été étudiées par Winters (1987) dans le cas d'un système muni de M transmetteurs et M antennes réceptrices déployées en diversité d'espace. Le modèle étudié ne tenait toutefois compte que des évanouissements non-sélectifs en fréquence (flat fading).

Notre travail ayant pour objectif d'évaluer la capacité et les performances des égaliseurs dans le cadre général des canaux de communications multivariables gaussiens, nous procéderons à l'extension de la borne de Saltzberg et des travaux de Amitay, Balaban Foschini et Salz au cas du canal multivariable général $N \times M$ affecté de bruit coloré de distribution gaussienne.

Nous étudierons le comportement de la capacité de Shannon ainsi que des bornes d'égalisation dans le cas du canal radiomobile $N \times M$ caractérisé par des évanouissements sélectifs en fréquence et composé d'un nombre variable de raies dont la distribution statistique dépendra des modèles utilisés. Nous comptons également comparer nos

1. Une raie dans ce contexte fait référence à la réponse impulsionnelle du canal, cette dernière étant souvent définie dans le cas des communications radiomobiles comme une série de R raies de Dirac à intervalles fixes ou aléatoires dont l'amplitude suit une distribution de Rayleigh et la phase une distribution uniforme.

résultats à ceux de travaux antérieurs notamment ceux de Falconer et Petersen (1994) sur les canaux sans évanouissement et qui démontrent la possibilité de supprimer partiellement l'interférence des mobiles cocanaux dans le cas de l'égalisation linéaire sur une large bande.

Nous appliquerons ensuite les mêmes méthodes à l'étude du canal d'enregistrement magnétique multivariable. Dans ce cas, nous utiliserons le modèle de canal relativement simplifié proposé par Voois et Cioffi (1994) où l'enregistrement des bits sur les N pistes s'effectue par saturation longitudinale du milieu magnétique et la lecture par le biais de M têtes magnéto-inductives. Le modèle de Lindholm (1978) y est utilisé pour la modélisation des têtes tandis que le modèle de Baugh (1983) y approxime le spectre du bruit d'enregistrement magnétique. Dans ce travail, Voois et Cioffi évaluent les performances de l'égaliseur récursif et du filtre adapté par le biais de l'EQMM pour diverses configurations simples de pistes et de têtes de lecture en vue de déterminer dans quelle mesure l'égalisation permet de réduire les interférences entre pistes adjacentes.

La capacité du canal d'enregistrement magnétique a été étudiée par plusieurs auteurs dont Howell et Feig (1986), French et Wolf (1988), Bar-David et Shamai (1989), Feig (1989), Shamai, Ozarow et Wyner (1991), Heegard et Ozarow (1992), O'Sullivan et al. (1992), McLaughlin et Neuhoff (1993) et Voois et Cioffi (1997). Aucun ne s'est toutefois penché sur le cas du canal d'enregistrement magnétique muni de N pistes et de M têtes magnéto-inductives; la plupart des auteurs s'attachent à évaluer soit la capacité du médium sans égard aux méthodes d'enregistrement et de lecture soit la capacité d'un système muni d'une piste unique et d'une seule tête de lecture. Comme nous le verrons lors de la discussion, l'expression de la capacité du canal d'enregistrement magnétique que nous proposons peut s'interpréter comme une borne soit inférieure soit supérieure sur la valeur exacte qui n'est d'ailleurs pas définie au sens mathématique strict. Elle nous permettra cependant d'évaluer numériquement et analytiquement dans certains cas des configurations géométriques de têtes et de pistes permettant d'atteindre l'optimum estimé.

1.3 Organisation de la thèse

L'organisation générale de la thèse peut se résumer comme il suit. Nous présentons en première partie du chapitre II un bref résumé des notations et conventions qui seront utilisées ainsi qu'une description du modèle de canal multivariable gaussien à la base de notre travail de recherche. Par la suite, nous évaluons la capacité, au sens de la Théorie de l'Information de Shannon, associée à ce modèle général et présentons la méthode de dérivation de deux bornes de performance, l'une basée sur l'utilisation d'un égaliseur de type linéaire et l'autre sur celle du filtre adapté ("matched filter"). Nous spécialisons par la suite ces résultats généraux à deux systèmes d'importance dans le contexte technique actuel; les chapitres III et IV considèrent d'une part l'étude du canal radiomobile soumis aux évanouissements sélectifs en fréquence et d'autre part le canal d'enregistrement magnétique. Dans les deux cas nous discutons abondamment de l'impact des résultats obtenus en fonction des paramètres de ces canaux. Enfin, au chapitre V nous concluons la thèse en explicitant clairement les contributions qu'elle apporte et en présentant nos remarques finales ainsi que les extensions envisageables dans un futur proche.

CHAPITRE II

LE CAS GÉNÉRAL DU CANAL MULTIVARIABLE GAUSSIEN COLORÉ

Nous présentons dans ce chapitre le modèle de canal multivariable gaussien coloré à la base de la thèse et en déterminons la capacité, au sens de Shannon, ainsi que deux bornes de performance correspondant à l'utilisation d'un égaliseur linéaire et d'un filtre adapté. De façon à alléger le texte, nous utiliserons par la suite l'expression "canal gaussien" pour désigner le canal multivariable affecté de bruit coloré additif de distribution gaussienne. L'organisation spécifique du chapitre est la suivante: À la section 2.1, nous présentons en préambule les diverses notations mathématiques et conventions qui seront utilisées par la suite. Nous abordons le sujet principal à la section 2.2 où nous introduisons le modèle général du canal de communication gaussien. Son utilisation effective dans le cadre des problèmes de communications numériques considérées dans cette thèse fait l'objet de la section 2.3. L'expression de la capacité du canal, au sens de Shannon, est présentée à la section 2.4 et finalement des bornes supérieures sur le taux d'erreur (BER, bit error rate) et sur le taux de transmission R (en bits/sec/Hz) qui s'expriment en fonction de l'erreur quadratique moyenne entre l'entrée et la sortie du système sont développées à la section 2.5. Nous discuterons également dans cette section du resserrement possible des différentes bornes intermédiaires utilisées dans les développements.

2.1 Notations mathématiques et conventions

Cette section présente un résumé des principales notations et permettra au lecteur de s'y référer le cas échéant¹. De façon générale, les variables seront en caractères italiques et nous différencierons les scalaires (réels ou complexes) des vecteurs et matrices par l'utilisation de caractères gras pour ces derniers (le scalaire a , le vecteur x et la matrice H). Les vecteurs seront identifiés par des lettres minuscules alors que les matrices le seront par des majuscules. La $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur x de dimension $N \times 1$ est notée x_i et l'élément i, j de la matrice H de dimension $M \times N$ s'écrit H_{ij} , les indices

1. Une liste exhaustive des notations utilisées peut être consultée en page xxii.

$i = 1 \dots M$, et $j = 1 \dots N$ représentant respectivement les indices de lignes et de colonnes, les vecteurs étant par convention des colonnes.

Dans le cas général, les variables scalaires et les composantes des vecteurs et matrices prendront leur valeur dans le corps des nombres complexes. Nous utiliserons les notations H^\dagger et H^* pour représenter respectivement les matrices complexe conjuguée-transposée et complexe conjuguée de H . Rappelons la notation matricielle suivante qui exprime “le carré du module” de la matrice H .

$$|H|^2 = H^\dagger H \quad (2.1)$$

où en général $H^\dagger H \neq H H^\dagger$. En plus des opérateurs habituels sur les vecteurs et matrices, nous utiliserons l’opérateur convolution matricielle \otimes défini comme

$$H(t) \otimes G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) G(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

où $H(t)$ et $G(t)$ sont des matrices (vecteurs) de dimensions compatibles et où l’opérateur d’intégration s’applique individuellement sur les composantes de la matrice résultante. Les formes

$$H_{ij}^{(k)} \leftrightarrow H_{ij}(kT) \quad (2.3)$$

représentent l’élément i, j de la matrice H évalué à l’instant $t = kT$ où T est la période entre les symboles. Lorsqu’il sera nécessaire d’exprimer une variable dans le domaine des fréquences plutôt que dans celui du temps, nous la surmonterons du symbole “tilde”

$$H(t) \leftrightarrow \tilde{H}(\omega) \quad (2.4)$$

Notons que dans les figures nous utiliserons de façon interchangeable ces deux représentations, i.e. $H(t)$ et $\tilde{H}(\omega)$ (ou $\tilde{H}(f)$), les deux étant reliées par la transformée (transformée inverse) de Fourier et le contexte indiquant laquelle utiliser dans les équations. Rappelons finalement que la transformée de Fourier d’une matrice est définie comme la matrice des transformées de Fourier de ses composantes.

2.2 Modèle du canal gaussien

Le modèle du canal gaussien utilisé dans nos recherches est représenté à la figure 2.1. On y voit que le vecteur $\mathbf{x}(t)$ de dimension N des signaux d'entrées est transmis par l'intermédiaire du canal $\mathbf{H}(t)$ (ou $\tilde{\mathbf{H}}(f)$) de dimensions $M \times N$ dont la sortie est un vecteur $\mathbf{m}(t)$ de dimension M . La relation unissant ces variables peut s'écrire comme

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \quad (2.5)$$

où \otimes est l'opérateur de convolution matricielle. Nous supposons ici que $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{H}(t)$ sont limitées en fréquence par une largeur de bande de fréquence W_f Hz finie. Nous supposons de plus que les composantes de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{H}(t)$ sont des fonctions appartenant à L_2 , l'espace Hilbertien des fonctions complexes dont l'intégrale du carré du module est finie (i.e. les fonctions complexes d'énergie finie).

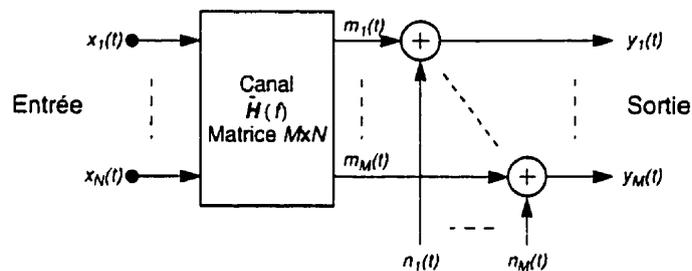


Figure 2.1 Modèle du canal gaussien multivariable

Un vecteur bruit complexe $\mathbf{n}(t)$ de dimension M vient ensuite modifier de façon additive le vecteur signal avant sa saisie au récepteur. Chacune des composantes du vecteur bruit est supposée indépendante des autres, ce qui doit être vérifié individuellement pour ses parties réelle et imaginaire. Toutes les distributions de ces sources de bruit sont gaussiennes de valeur moyenne nulle et les densités spectrales correspondantes pourront être de façon générale colorées. Nous supposons cependant que l'ensemble des fréquences où elles sont nulles est de mesure de Lebesgue zéro¹. Le signal de sortie observé peut donc s'exprimer comme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.6)$$

Il est possible de transformer ce modèle en un modèle équivalent utilisant des sources de bruit additif blanc généralement plus facile à étudier. Pour ce faire, on remplace les M sources de bruit coloré par M sources indépendantes de bruit blanc $\bar{w}_i(f)$, $i = 1 \dots M$ de densité spectrale unitaire et une matrice filtre diagonale $\bar{N}^{1/2}(f)$ dont chacune des composantes non-nulles $\bar{N}_{ii}(f)$, $i = 1 \dots M$ est égale au spectre $\bar{S}_{n_i}(f)$ de la $i^{\text{ème}}$ source de bruit coloré $\bar{n}_i(f)$ (Gallager, 1968). La représentation équivalente est illustrée à la figure 2.2a où il est possible de constater que la relation entrée-sortie du système peut dès lors s'écrire comme

$$\bar{y}(f) = \bar{H}(f)\bar{x}(f) + \bar{N}^{1/2}(f)\bar{w}(f) \quad (2.7)$$

Cette transformation est primordiale puisqu'elle facilite la conversion éventuelle de résultats développés dans le contexte d'utilisation de sources de bruit blanc. La transformation finale la plus versatile est obtenue en prémultipliant (2.7) par $\bar{N}^{-1/2}(f)$, i.e.

$$\begin{aligned} \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{y}(f) &= \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{H}(f)\bar{x}(f) + \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{N}^{1/2}(f)\bar{w}(f) \\ \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{y}(f) &= \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{H}(f)\bar{x}(f) + \bar{w}(f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

En définissant le nouveau canal comme $\bar{H}'(f) = \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{H}(f)$ et la nouvelle sortie comme $\bar{y}'(f) = \bar{N}^{-1/2}(f)\bar{y}(f)$, on obtient

$$\bar{y}'(f) = \bar{H}'(f)\bar{x}(f) + \bar{w}(f) \quad (2.9)$$

dont la représentation équivalente apparaît sur la figure 2.2b. On vérifie aisément l'équivalence d'un point de vue mathématique entre la relation entrée-sortie du canal de la figure 2.2b et celles des figures 2.2a et 2.1.

1. Cette supposition est en fait une condition imposée par les transformations et manipulations que nous effectuerons ultérieurement. D'un point de vue intuitif cependant, on comprendra que si la densité spectrale du bruit est nulle sur certains intervalles, il est possible d'utiliser cette portion du spectre pour transmettre un signal sans aucun bruit, ce qui théoriquement permet de transmettre une quantité infinie d'information.

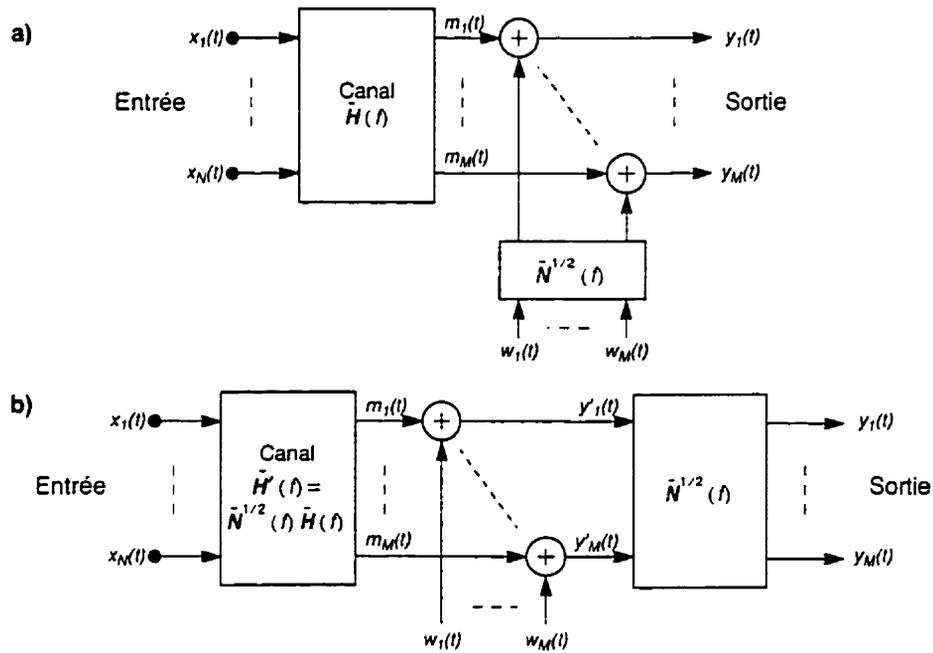


Figure 2.2 Modèles équivalents du canal gaussien multivariable avec sources de bruit blanc

2.3 Le canal multivariable gaussien dans le cadre des communications numériques

La figure 2.3 illustre l'utilisation du canal gaussien comme modèle des communications numériques considérées dans cette thèse. En comparant ce système à celui de la figure 2.1, on note la présence de la matrice de l'égaliseur/récepteur $\tilde{W}(f)$ (suivie d'un système d'échantillonnage) à la sortie ainsi que la présence dans l'organe de transmission du filtre de mise en forme des signaux $\tilde{g}(f)$.

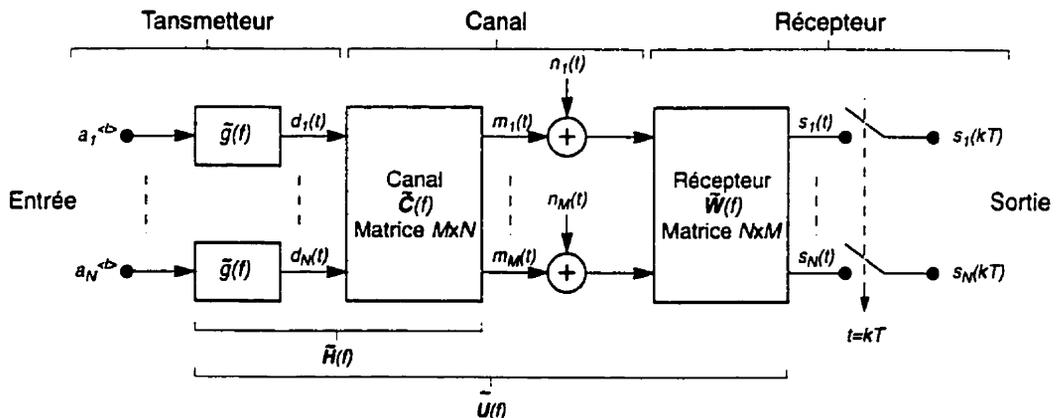


Figure 2.3 Modèle du système de communication numérique gaussien

Les sources de bruit $n_i(t)$ étant de façon générale colorées, il est préférable de procéder comme précédemment en transformant ce modèle en un équivalent mathématique (au sens de la relation entrée-sortie) faisant intervenir des sources de bruit blanc. Les modèles résultants sont montrés aux figures 2.4a et 2.4b où nous avons utilisé les définitions suivantes.

$$\begin{aligned}\bar{H}'(f) &= \bar{N}^{-1/2}(f) \bar{H}(f) \\ \bar{W}'(f) &= \bar{W}(f) \bar{N}^{1/2}(f)\end{aligned}\quad (2.10)$$

On constate que le système de communication obtenu à la figure 2.4b est analogue à celui de la figure 2.3 à l'exception de la présence de sources de bruit blanc de densité spectrale

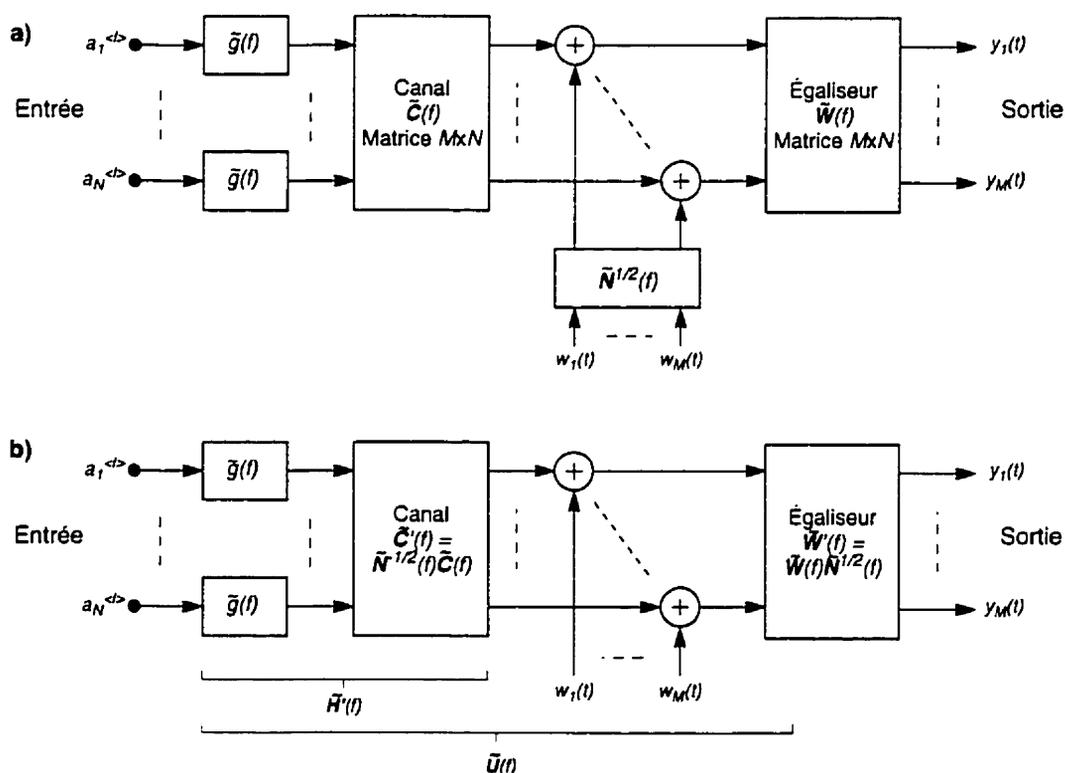


Figure 2.4 Modèles équivalents du système de communication numérique gaussien avec sources de bruit blanc

bilatérale unitaire. La relation entrée-sortie des deux systèmes étant identique, l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'entrée et la sortie, telle que nous la calculerons

ultérieurement, est préservée. Il s'ensuit que si l'on dispose des expressions donnant l'EQM et $\bar{W}(f)$ relatives à un système de communication perturbé par des sources de bruit blanc de densité spectrale bilatérale unitaire, il est possible de calculer l'EQM et $\bar{W}(f)$ pour un système affecté de sources de bruit coloré en substituant $\bar{N}^{-1/2}(f)\bar{H}(f)$ pour la matrice de canal et en calculant

$$\bar{W}(f) = \bar{W}'(f)\bar{N}^{-1/2}(f) \quad (2.11)$$

Pour pouvoir poursuivre dans un cadre assez général, nous sommes amenés à limiter notre étude aux systèmes importants de communications numériques utilisant la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ). Le vecteur de dimension N relatifs aux signaux d'entrée s'écrira donc en bande de base comme (voir la figure 2.3)

$$d(t) = \sum_l a^{(l)} g(t-lT) \quad (2.12)$$

où $g(t)$ est le filtre de mise en forme des impulsions élémentaires, T l'intervalle de signalisation et $a^{(l)}$ le vecteur des séquences complexes de données au temps $t = lT$. Chacun des éléments

$$a_n^{(l)} = \alpha_n^{(l)} + j\beta_n^{(l)} \quad (2.13)$$

est un symbole complexe où $\alpha_n^{(l)}$ et $\beta_n^{(l)}$ peuvent prendre L (supposée paire) valeurs différentes, i.e. $\alpha_n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(L-1)$, $\beta_n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(L-1)$. La variable $a_n^{(l)}$ définit donc une constellation de L^2 signaux telle que si l'on suppose que les symboles d'entrée sont équiprobables et indépendants, le taux de transmission respectif de chacune des entrées est

$$R = \frac{\log_2(L^2)}{TW_f} \text{ bits/sec/Hz} \quad (2.14)$$

où W_f est la largeur de bande en Hz utilisée par le système ($W_f = 1/T$ correspondant à la bande minimale de Nyquist¹). On définira la variance des données par

$$E[|a_n|^2] = \sigma_a^2 \quad (2.15)$$

$$E[\alpha_n^2] = E[\beta_n^2] = \sigma_\alpha^2 = \sigma_a^2/2 \quad (2.16)$$

En MAQ, la valeur de σ_a^2 est

$$\sigma_a^2 = \frac{2}{3}(L^2 - 1) \quad (2.17)$$

alors que la puissance moyenne totale à l'entrée du système est donnée par

$$S = N\sigma_a^2 \quad (2.18)$$

En se rapportant à la figure 2.3, le vecteur $\mathbf{a}^{(i)}$ de dimension N est transmis par le canal équivalent $\mathbf{H}(t)$ obtenu par la cascade du filtre de mise en forme $g(t)$ et de la matrice de canal $\mathbf{C}(t)$ pour produire le vecteur $\mathbf{m}(t)$ selon la relation

$$\mathbf{m}(t) = \sum_l \mathbf{H}(t-lT) \mathbf{a}^{(i)} \quad (2.19)$$

où le canal équivalent $\mathbf{H}(t)$ est défini comme

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}(t) \otimes g(t) \quad (2.20)$$

Un vecteur bruit complexe $\mathbf{n}(t)$ de dimension M est par la suite ajouté à ce signal avant sa saisie par le récepteur. Chaque élément du vecteur bruit est supposé indépendant, de distribution gaussienne à moyenne nulle et de variance

$$\sigma_n^2 = E[|n_i(t)|^2], \quad i = 1 \dots M \quad (2.21)$$

Le signal $\mathbf{m}(t)$ additionné de bruit est ensuite traité par la matrice $M \times N$ du récepteur $\mathbf{W}(t)$ pour fournir le signal de sortie $\mathbf{s}(t)$ donné par

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{W}(t) \otimes [\mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t)] \quad (2.22)$$

1. En général, la bande minimale de Nyquist définie comme $W_f = 1/(2T)$ fait référence à l'intervalle de fréquence unilatéral $[0, 1/(2T)]$ et correspond à l'utilisation de signaux réels. Comme nous utiliserons plutôt un modèle complexe en bande de base, nous définirons la largeur de bande de façon bilatérale, i.e. la largeur de bande $W_f = 1/T$ correspond à l'intervalle de fréquences $[-1/(2T), 1/(2T)]$.

et qu'on peut récrire comme

$$s(t) = \sum_l U(lT-t) \mathbf{a}^{(l)} + v(t) \quad (2.23)$$

où nous définissons le canal équivalent global $U(t)$ entre l'entrée et la sortie comme la cascade de $H(t)$ et de $W(t)$

$$U(t) = W(-t) \otimes H(-t) \quad (2.24)$$

(le signe négatif devant la variable t simplifiera la notation lors de l'évaluation de l'EQMM à l'annexe B) et où le bruit équivalent à la sortie de l'égaliseur ainsi que sa variance sont donnés par

$$v(t) = W(t) \otimes n(t) \quad (2.25)$$

$$E[|v_i(t)|^2] = \sigma_v^2, \quad i = 1 \dots N \quad (2.26)$$

$$E[|\text{Im}[v_n]|^2] = E[|\text{Re}[v_n]|^2] = \sigma_{vr}^2 = \sigma_v^2/2 \quad (2.27)$$

Le signal $s(t)$ est finalement échantillonné à $t = kT$ et passé dans un détecteur qui détermine les symboles de sortie. L'échantillon à la sortie de l'égaliseur au temps $t = kT$ est

$$\begin{aligned} s^{(k)} &= s(t = kT) = \sum_l U[(l-k)T] \mathbf{a}^{(l)} + v^{(k)} \\ s^{(k)} &= \sum_l U^{(l-k)} \mathbf{a}^{(l)} + v^{(k)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.4 Évaluation de la capacité du canal gaussien

La capacité que nous considérons ici est la capacité informationnelle de Shannon considérée en "Théorie de l'Information". Elle est définie comme la quantité maximale d'information qui peut être transmise sans erreur sur un canal par unité de temps, la maximisation s'effectuant sur le contenu fréquentiel des signaux à l'entrée du canal. Dans le cas qui nous intéresse, la capacité normalisée par la largeur de bande du canal¹ de la figure 2.3 peut être calculée à l'aide de l'expression suivante donnée par Amitay et Salz

(1984) et qui est une généralisation au cas multivariable de l'expression donnée à l'origine par Holsinger (1964) et Gallager (1968)

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\bar{P}_n(f), s_n} \left[\frac{1}{W_f} \sum_{n=1}^N \int_{W_f} \log_2 \left[1 + s_n |\bar{P}_n(f)|^2 \lambda_n(f) \right] df \right] \text{ bits/s/Hz} \quad (2.29)$$

avec les contraintes

$$\begin{aligned} |\bar{P}_n(f)|^2 &\geq 0 \\ \sum_{n=1}^N s_n \int_{W_f} |\bar{P}_n(f)|^2 df &= S \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ici, $\lambda_n(f)$, $n = 1 \dots N$ sont les N valeurs propres de la matrice $|\bar{N}(f)^{-1/2} \bar{H}(f)|^2$, s_n est la puissance moyenne du signal de l'entrée n , $\bar{N}(f)$ est la matrice de la densité spectrale du bruit (gaussien, additif et de moyenne nulle), W_f est la bande de fréquence en Hz, $\bar{P}_n(f)$ est le filtre de mise en forme du côté du transmetteur¹ pour l'entrée n et S est la puissance moyenne totale à l'entrée. Dans ces expressions, les variables s_n ainsi que les filtres $\bar{P}_n(f)$ sont des inconnues dont la valeur reste à déterminer. Aux fins de calculs numériques, cette expression peut être simplifiée sous la forme (Bradenburg et Wyner 1974; Amitay et Salz, 1984; Loundu, 1994)

$$C = \frac{1}{W_z} \sum_{n=1}^N \int_{Z_n} \log_2 \left(\frac{\lambda_n(z)}{\lambda} \right) dz \quad \text{bits/s/Hz} \quad (2.31)$$

$$S = \sum_{n=1}^N \int_{Z_n} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_n(z)} \right) dz \quad (2.32)$$

-
1. Notons qu'aux fins de l'évaluation de la capacité, le filtre de mise en forme du transmetteur $\bar{g}(f)$ ainsi que le filtre de réception $\bar{W}(f)$ de la figure 2.3 ne sont pas pris en compte puisque nous désirons uniquement évaluer la capacité C du canal, sans égard aux caractéristiques d'émission et de réception.
 1. Notons que les filtres $\bar{P}_n(f)$ ainsi que les variables s_n correspondent au calcul de la capacité d'un canal équivalent constitué des valeurs propres $\lambda_n(z)$. Dans ce contexte, $\bar{P}_n(f)$ et s_n ne correspondent donc pas directement aux valeurs qui devraient être utilisées à l'entrée du système pour atteindre la capacité mais à celles d'un canal équivalent.

où on utilise la variable de fréquence normalisée $z = fT$ et où N est le nombre d'entrées, S est la puissance moyenne totale des signaux d'entrée, $\lambda_n(z)$ sont les N valeurs propres de la matrice hermitienne $|\tilde{N}(z)^{-1/2} \tilde{H}(z)|^2$, λ est un multiplicateur de Lagrange, W_z est la bande de fréquence¹ (en unité de z) et Z_n sont les intervalles d'intégration à l'intérieur de W_z et définis par

$$Z_n = \left\{ z \mid \frac{1}{\lambda_n(z)} < \frac{1}{\lambda} \right\} \quad n = 1 \dots N \quad (2.33)$$

La figure 2.5 donne une interprétation des équations (2.31) à (2.33) lorsque $W_z = 1$ (bande de Nyquist) comme un problème d'optimisation qui se réduit au remplissage au même niveau (i.e. les réservoirs sont communicants) de N réservoirs distincts à l'aide d'une quantité d'eau déterminée S . L'inconnue est alors la hauteur $1/\lambda$ qui sera atteinte par l'eau dans tous les réservoirs une fois le remplissage terminé.

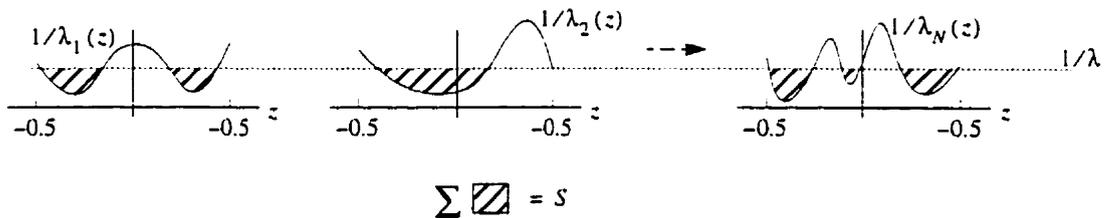


Figure 2.5 Problème du remplissage de N réservoirs

On voit que la forme du fond des N réservoirs correspond aux N fonctions des valeurs propres $1/\lambda_n(z)$ et que les parties hachurées correspondent à l'intégrale de (2.32) là où la condition (2.33) est remplie. Une fois ce problème résolu, la valeur de la capacité (2.31) est proportionnelle à l'intégrale (sur les parties hachurées) du logarithme du rapport entre le niveau atteint par l'eau et le fond des différents réservoirs.

À l'aide de cette interprétation, il est possible de déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange λ par la méthode des intervalles. Il suffit de fixer premièrement le niveau d'eau

1. On suppose en général une largeur de bande légèrement supérieure à la bande de Nyquist pour tenir compte du facteur de mise en forme des impulsions.

$1/\lambda$ à une valeur quelconque. On détermine ensuite les intervalles où il y a présence d'eau (2.33) ce qui permet d'en calculer la quantité (2.32). Si cette dernière est trop élevée, il faut diminuer le niveau $1/\lambda$ et vice-versa. En procédant de la sorte de façon itérative, on obtient éventuellement la valeur optimale de $1/\lambda$ recherchée. La procédure itérative similaire que nous utiliserons est reproduite à l'annexe A (Conan, Despins et Loundu, 1997). Elle a l'avantage de fonctionner avec un taux de convergence plus rapide.

Remarquons que dans le cas général, toutes les valeurs propres sont positives (i.e. $\lambda_n(z) \geq 0$) puisqu'elles proviennent d'une matrice hermitienne (Strang, 1980). Il pourra toutefois arriver qu'une ou plusieurs d'entre elles soient nulles (e.g. si $M < N$ ou si le rang de $|\tilde{N}(f)^{-1/2} \tilde{H}(f)|^2$ est inférieur à N). En utilisant l'analogie précédente, ces valeurs propres nulles correspondent à des réservoirs dont le fond est à un niveau $1/\lambda_n(z) = \infty$, ce qui empêche l'eau d'y pénétrer. La valeur de la capacité est alors indépendante des valeurs propres nulles qui peuvent donc être ignorées lors de son évaluation.

2.5 Dérivation des bornes de performance

Cette section est consacrée à la dérivation d'un certain nombre de bornes portant sur les paramètres de performance liés au modèle de canal gaussien multivarié. Nous considérons tout d'abord une borne supérieure sur le taux d'erreur (BER, bit error rate) exprimée en fonction de l'erreur quadratique moyenne entre l'entrée et la sortie du système. Cette borne, évaluée en considérant en premier lieu l'utilisation d'un égaliseur linéaire et ensuite celle d'un filtre adapté, nous permettra de déterminer ensuite la valeur correspondante d'une borne supérieure sur le taux de transmission en bits/sec/Hz que supporte le canal lorsqu'une limite sur la probabilité d'erreur maximale admissible est imposée. L'utilisation de bornes intermédiaires dans ces développements nous conduira finalement à en étudier le resserrement, ce qui permettra d'estimer la précision des résultats qui en dépendent.

2.5.1 Borne de Saltzberg sur le taux d'erreur

Dans cette section nous dérivons une borne sur la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur du système de communication de la figure 2.3. Remarquons qu'il s'agit d'une généralisation au cas de N entrées et M sorties de la borne introduite par Saltzberg (1968) et reliée à l'expression de l'EQMM par Balaban et Salz (1992). Considérons d'après (2.28) pour un échantillon représentatif à la sortie de l'égaliseur au temps $t = 0$ (sans perte de généralité)

$$s^{(0)} = \sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} \quad (2.34)$$

qu'on peut récrire comme

$$s^{(0)} = U^{(0)} a^{(0)} + \sum_{l \neq 0} U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} \quad (2.35)$$

Ici, nous nous intéressons uniquement à la probabilité d'erreur associée à une seule des N entrées. Afin de simplifier la notation, nous définissons le vecteur u comme équivalent à la rangée de la matrice U correspondant à une entrée quelconque n (sans perte de généralité), i.e.

$$u_i(t) = U_{ni}(t) \quad i = 1 \dots N \quad (2.36)$$

À l'aide de cette notation et en effectuant explicitement le produit matriciel de (2.35), le signal s associé à l'entrée n peut s'écrire

$$s_n^{(0)} = u_n^{(0)} a_n^{(0)} + \sum_{j \neq n} u_j^{(0)} a_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j u_j^{(l)} a_j^{(l)} + v_n^{(0)} \quad (2.37)$$

où le terme $u_n^{(0)}$ correspond au $n^{\text{ième}}$ élément de la diagonale de $U^{(0)}$. En séparant les parties réelle et imaginaire (voir (2.13)), et en sachant que $u_n^{(0)}$ est réelle¹, on trouve

1. Nous verrons dans la suite (à l'annexe B) que la preuve de cette affirmation découle de (B.30) donnant l'expression de $U^{(0)}$. Dans cette équation, $\bar{R}(\omega)$ est une matrice hermitienne et dans ce cas les composantes de la diagonale de $U^{(0)}$ appartiennent aux réels (i.e. $U_{nn}^{(0)} = u_n^{(0)}$ est réel).

$$\operatorname{Re}[s_n^{(0)}] = u_n^{(0)} \alpha_n^{(0)} + \sum_{j \neq n} u_j^{(0)} \alpha_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Re}[u_j^{(l)}] \alpha_j^{(l)} - \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Im}[u_j^{(l)}] \beta_j^{(l)} + \operatorname{Re}[v_n^{(0)}] \quad (2.38)$$

$$\operatorname{Im}[s_n^{(0)}] = u_n^{(0)} \beta_n^{(0)} + \sum_{j \neq n} u_j^{(0)} \beta_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Re}[u_j^{(l)}] \beta_j^{(l)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Im}[u_j^{(l)}] \alpha_j^{(l)} + \operatorname{Im}[v_n^{(0)}] \quad (2.39)$$

Posons

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{j \neq n} u_j^{(0)} \alpha_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Re}[u_j^{(l)}] \alpha_j^{(l)} - \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Im}[u_j^{(l)}] \beta_j^{(l)} + \operatorname{Re}[v_n^{(0)}] \\ z_2 &= \sum_{j \neq n} u_j^{(0)} \beta_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Re}[u_j^{(l)}] \beta_j^{(l)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j \operatorname{Im}[u_j^{(l)}] \alpha_j^{(l)} + \operatorname{Im}[v_n^{(0)}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

où la distribution des variables aléatoires z_1 et z_2 est symétrique puisque $\operatorname{Re}[v_n^{(0)}]$ et $\operatorname{Im}[v_n^{(0)}]$ sont gaussiens de moyenne nulle et les variables α_j et β_j sont distribuées symétriquement autour d'une moyenne nulle. À l'aide de ces définitions, les signaux $\operatorname{Re}[s_n^{(0)}]$ et $\operatorname{Im}[s_n^{(0)}]$ peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[s_n^{(0)}] &= u_n^{(0)} \alpha_n^{(0)} + z_1 \\ \operatorname{Im}[s_n^{(0)}] &= u_n^{(0)} \beta_n^{(0)} + z_2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dans le but de déterminer la probabilité d'erreur par symbole à la sortie de l'égaliseur, nous définissons respectivement ε_α et ε_β comme les événements "la lettre $\alpha_n^{(0)}$ est en erreur" et "la lettre $\beta_n^{(0)}$ est en erreur". La probabilité d'erreur par symbole P_E peut alors s'écrire comme

$$\begin{aligned} P_E &= P[\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta] \\ P_E &= P[\varepsilon_\alpha] + P[\varepsilon_\beta] - P[\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta] \\ P_E &\leq P[\varepsilon_\alpha] + P[\varepsilon_\beta] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Il reste maintenant à déterminer les expressions de $P[\varepsilon_\alpha]$ et $P[\varepsilon_\beta]$. Lorsque $\alpha_n^{(0)}$ prend la valeur $-L+1$, il y aura erreur sur cette lettre si $z_1 > u_1^{(0)}$. De façon similaire, si $\alpha_n^{(0)}$ prend la valeur $L-1$, il y aura erreur si $z_1 < -u_1^{(0)}$. Comme la distribution de z est symétrique, la probabilité de ces événements est identique. Pour toutes les autres valeurs

de $\alpha_n^{(0)}$, il y aura erreur dans les deux cas. En supposant que les valeurs de $\alpha_n^{(0)}$ sont équiprobables, la probabilité d'erreur sur $\alpha_n^{(0)}$ est

$$\begin{aligned} P[\varepsilon_\alpha] &= \frac{1}{L} \{ P(z_1 > u_n^{(0)}) + P(z_1 < -u_n^{(0)}) + (L-2) [P(z_1 > u_n^{(0)}) + P(z_1 < -u_n^{(0)})] \} \\ P[\varepsilon_\alpha] &= \frac{2(L-1)}{L} P(z_1 > u_n^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Par symétrie, le même raisonnement s'applique pour le calcul de $\beta_n^{(0)}$

$$P[\varepsilon_\beta] = \frac{2(L-1)}{L} P(z_2 > u_n^{(0)}) \quad (2.44)$$

En substituant ces expressions dans (2.42) et en constatant que z_1 et z_2 ont chacun une distribution de probabilité identique (en effet, dans (2.40) α_j et β_j ainsi que $\text{Re}[v_n^{(0)}]$ et $\text{Im}[v_n^{(0)}]$ sont distribuées respectivement de façon identique) on obtient finalement

$$\begin{aligned} P_E &\leq P[\varepsilon_\alpha] + P[\varepsilon_\beta] = 2P[\varepsilon_\alpha] \\ P_E &\leq \frac{4(L-1)}{L} P(z_1 > u_n^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le calcul numérique exact de l'expression de droite est possible. Cependant pour les cas réalistes l'effort de calcul devient exorbitant compte tenu des ressources disponibles à ce jour. Nous aurons donc recours à l'utilisation de bornes aux fins d'estimation. En appliquant la borne de Chernoff (Gallager, 1968) à (2.45) où z_1 est donnée par (2.40), on obtient

$$P_E \leq \frac{4(L-1)}{L} e^{-\lambda u_n^{(0)}} E \left[e^{\lambda \text{Re}[v_n^{(0)}]} \right] \left(\prod_{j \neq n} E \left[e^{\lambda u_j^{(0)} \alpha_j^{(0)}} \right] \right) \left(\prod_{j, l \neq 0} E \left[e^{\lambda \text{Re}[u_j^{(0)}] \alpha_j^{(0)}} \right] \right) \left(\prod_{j, l \neq 0} E \left[e^{\lambda \text{Im}[u_j^{(0)}] \beta_j^{(0)}} \right] \right) \quad (2.46)$$

pour toutes les valeurs de λ satisfaisant

$$\lambda > 0 \quad (2.47)$$

Cette condition découle de la borne de Chernoff qui peut prendre deux formes différentes dépendant de la valeur de λ (une borne supérieure ou inférieure). La valeur exacte de λ sera choisie ultérieurement de façon à resserrer la borne. On évalue l'espérance

mathématique à l'aide des distributions de α_j et β_j et on regroupe les termes exponentiels deux à deux afin de les remplacer par la fonction $\cosh ()$. Il vient

$$P_E \leq \frac{4(L-1)}{L} e^{-\lambda u_n^{(0)}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sigma_{vr}^2} \left(\prod_{j \neq n} \frac{2}{L} \sum_{k=\frac{L}{2}+1}^L \cosh(\lambda u_j^{(0)} \gamma_k) \right) \left(\prod_{j \neq 0} \frac{2}{L} \sum_{k=\frac{L}{2}+1}^L \cosh(\lambda \operatorname{Re}[u_j^{(l)}] \gamma_k) \right) \left(\prod_{j \neq 0} \frac{2}{L} \sum_{k=\frac{L}{2}+1}^L \cosh(\lambda \operatorname{Im}[u_j^{(l)}] \gamma_k) \right), \quad \lambda > 0 \quad (2.48)$$

où $\gamma_k = 2k - L - 1, k = 1 \dots L$ sont les différentes valeurs que peuvent prendre α_j et β_j , λ est la variable de resserrement de la borne que nous évaluerons ultérieurement et σ_{vr}^2 est la variance de la partie réelle du bruit équivalent à la sortie de l'égaliseur donnée en (2.27). Pour simplifier davantage nous utilisons une seconde borne donnée par Saltzberg (1968). Cette dernière s'exprime par la forme générale suivante:

$$\frac{2}{L} \sum_{k=\frac{L}{2}+1}^L \cosh(\lambda \psi \gamma_k) < e^{\frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 \lambda^2 \psi^2} \quad (2.49)$$

où σ_α^2 est la variance des données définie en (2.16) et ψ un réel. Nous discuterons plus en détails de cette borne dans une section subséquente. En appliquant cette dernière à (2.48) et en regroupant les termes exponentiels, on obtient

$$P_E < \frac{4(L-1)}{L} e^{\left[-\lambda u_n^{(0)} + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma_{vr}^2 + \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 \lambda^2 \left(\sum_j \sum_l |u_j^{(l)}|^2 - u_n^{(0)2} \right) \right]}, \quad \lambda > 0 \quad (2.50)$$

La valeur de λ se calcule alors en annulant la dérivée de (2.50) par rapport à λ et s'obtient comme

$$\lambda = \frac{u_n^{(0)}}{\sigma_{vr}^2 + \sigma_\alpha^2 \left[\sum_{(j,l) \neq (n,0)} |u_j^{(l)}|^2 \right]} \quad (2.51)$$

On vérifie que cette expression de λ est toujours strictement positive. En effet, son dénominateur est strictement positif alors que $u_n^{(0)}$ qui représente un des éléments de la diagonale de $U_{nn}^{(0)}$ est également toujours strictement positif¹. La substitution de cette expression dans (2.50), donne

$$P_E < \frac{4(L-1)}{L} e \left[\frac{1}{2} \frac{u_n^{(0)2}}{\sigma_{vr}^2 + \sigma_a^2 \sum_j \sum_{(j,l) \neq (n,0)} |u_j^{(l)}|^2} \right] \quad (2.52)$$

Rapportons-nous maintenant à la figure 2.3 afin de faire le lien entre cette expression et celle de l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'entrée et la sortie du système. L'erreur quadratique moyenne entre $s^{(0)}$ et $a^{(0)}$ est

$$EQM = E[\varepsilon^\dagger \varepsilon] = E[|\varepsilon|^2] \quad (2.53)$$

où (voir (2.34))

$$\varepsilon = s^{(0)} - a^{(0)} = \sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v_n^{(0)} - a^{(0)} \quad (2.54)$$

En évaluant (2.53) pour l'entrée n , on obtient (voir également (2.36) et (2.37))

$$\begin{aligned} EQM_n &= E\left[|s_n^{(0)} - a_n^{(0)}|^2\right] = E\left[\left|\sum_j u_j^{(0)} a_j^{(0)} + \sum_{l \neq 0} \sum_j u_j^{(l)} a_j^{(l)} + v_n^{(0)} - a_n^{(0)}\right|^2\right] \\ EQM_n &= \sigma_a^2 [1 - u_n^{(0)}]^2 + \sigma_a^2 \sum_j \sum_{(j,l) \neq (n,0)} |u_j^{(l)}|^2 + \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

où σ_v^2 est la variance du bruit $v_n^{(0)}$ à la sortie de l'égaliseur, i.e. $\sigma_v^2 = E\left[|v_n^{(0)}|^2\right]$.

Remarquons que nous l'avons précédemment définie de façon différente en (2.26) (i.e.

1. La note au bas de la page 20 indique que $U_{nn}^{(0)}$ est une matrice hermitienne. Dans ce cas les éléments de sa diagonale seront positifs et non-nuls si au moins un des éléments de la rangée n de la matrice de canal $H'(\tau - lT)$ (voir (B.24)) est non-nul. Ceci revient à dire que la sortie n du canal doit être reliée à au moins une des entrées, ce que nous supposons.

$\sigma_v^2 = E[|v_n(t)|^2]$). Ces deux définitions sont cependant compatibles puisque $v_n(t)$ est un processus gaussien relié à $n(t)$ par la relation (2.25). Dans ce cas $v_n(t)$ est ergodique (pour la variance¹) et on a

$$\sigma_v^2 = E[|v_n(t)|^2] = E[|v_n^{(0)}|^2] \quad (2.56)$$

Puisque $\sigma_a^2 = 2\sigma_\alpha^2$ et que $\sigma_v^2 = 2\sigma_{vr}^2$ (voir (2.16) et (2.27)), il est possible de récrire (2.55) comme

$$\sum_j \sum_{l \neq (n,0)} |u_j^{(l)}|^2 = \frac{EQM_n}{2\sigma_\alpha^2} \frac{\sigma_{vr}^2}{\sigma_\alpha^2} (1 - u_n^{(0)})^2 \quad (2.57)$$

qui, substituée dans (2.52), donne

$$P_E < \frac{4(L-1)}{L} e^{\left[\frac{-u_n^{(0)2}}{EQM_n - 2\sigma_\alpha^2(1 - u_n^{(0)})^2} \right]} \quad (2.58)$$

Afin de simplifier davantage cette expression, nous devons faire appel au calcul de l'EQM minimale (EQMM) du canal, i.e. la minimisation de (2.53) à l'aide du filtre de réception $W(t)$. Le détail de ces calculs est présenté à l'annexe B² où l'EQMM du canal est déterminée pour un égaliseur linéaire et un filtre adapté. Nous en présentons maintenant les principaux résultats: L'EQMM totale (i.e. la somme des EQMM associées à chacune des entrées) pour les N mobiles est donnée par

$$EQMM = \sigma_a^2 \text{tr}[\mathbf{I} - \mathbf{U}^{(0)}] \quad (2.59)$$

dont l'évaluation donne respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté

1. Pour que ce soit le cas, il suffit que le spectre de $v_n(t)$ ne contienne aucune impulsion de Dirac (Papoulis, 1991), ce que nous supposons dans la suite.
2. Cette annexe présente également le calcul de la matrice de l'égaliseur à partir des paramètres du système dans le cas de l'égaliseur linéaire et celui du filtre adapté.

$$EQMM^{\text{linéaire}} = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \text{tr} [\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega)]^{-1} d\omega \quad (2.60)$$

$$EQMM^{\text{idéal}} = \sigma_a^2 \text{tr} \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega)) d\omega \right]^{-1} \quad (2.61)$$

où

$$\bar{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_l \left| \tilde{N}^{-1/2} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \tilde{\mathbf{H}} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \right|^2 \quad (2.62)$$

L'EQMM individuelle associée à l'entrée n s'identifie en isolant l'élément correspondant de la trace dans (2.59), (2.60) et (2.61)

$$EQMM_n = \sigma_a^2 [1 - U_{nn}^{(0)}] \quad (2.63)$$

$$EQMM_n^{\text{linéaire}} = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega)]^{-1} \right]_{nn} d\omega \quad (2.64)$$

$$EQMM_n^{\text{idéal}} = \sigma_a^2 \left[\left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega)) d\omega \right]^{-1} \right]_{nn} \quad (2.65)$$

Mentionnons que dans le cas particulier où les sources de bruit sont identiques et de densité spectrale bilatérale N_0 , on a $\tilde{N}(f) = N_0 \mathbf{I}$ et (2.62) se simplifie comme

$$\bar{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{1}{N_0 T} \sum_l \left| \tilde{\mathbf{H}} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \right|^2 \quad (2.66)$$

Si nous revenons à la simplification de la borne de l'équation (2.58), on constate qu'il suffit maintenant de remplacer $u_n^{(0)}$ par son expression donnée par (2.63) (voir également (2.36)), i.e.

$$u_n^{(0)} = U_{nn}^{(0)} = 1 - \frac{EQMM_n}{\sigma_a^2} \quad (2.67)$$

ce qui donne finalement

$$P_E < \frac{4(L-1)}{L} e^{\left[\frac{1 - EQMM_n / \sigma_d^2}{EQMM_n} \right]} \quad (2.68)$$

Pour obtenir la probabilité d'erreur par bit, on supposera un codage de Gray (qui assure que les symboles codés associés à des niveaux adjacents ne diffèrent que par un seul bit) et on négligera les transitions de plus d'un bit, i.e. les erreurs produites lorsque le bruit et l'interférence entre symboles font en sorte que deux bits ou plus soient en erreur, ce qui correspond à des cas relativement rares lorsque le taux d'erreur est raisonnablement faible (Bic, Duponteil et Imbeaux, 1991). Il suffit alors de diviser (2.68) par le nombre de bits par symbole de la MAQ $2 \log_2(L)$ pour obtenir finalement la borne désirée sur le taux d'erreur (BER, bit error rate)

$$BER < \frac{2(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[\frac{1 - EQMM_n / \sigma_d^2}{EQMM_n} \right]} \quad (2.69)$$

où l'EQMM est donnée par (2.64) et (2.65) dans le cas respectivement de l'égalisation linéaire et du filtrage adapté. Nous mentionnerons cependant que la borne de Saltzberg donnée par (2.49) fait en sorte que (2.69) n'est valable que lorsque le taux d'erreur est suffisamment faible (voir la section 2.5.3 pour une discussion plus élaborée sur le domaine d'application de la borne de Saltzberg). Nous contournerons toutefois cette difficulté puisque nous n'évaluerons pas directement le taux d'erreur mais plutôt le fixerons et évaluerons ensuite le taux de transmission admissible. La réponse à cette question fait d'ailleurs l'objet de la section qui suit.

2.5.2 Estimation du taux de transmission admissible pour un taux d'erreur fixé

Dans cette section, nous désirons estimer les taux de transmission de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté compatibles avec un taux d'erreur fixé. Pour ce faire, revenons à la borne sur la probabilité d'erreur donnée en (2.69)

$$BER < \frac{2(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[\frac{1 - EQMM_n / \sigma_a^2}{EQMM_n} \right]} \quad (2.70)$$

où l'EQMM s'exprime par les équations (2.64) et (2.65) respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté. En divisant l'EQMM par σ_a^2 , on constate que ces équations deviennent indépendantes du nombre de niveaux L et de la valeur de σ_a^2 et ne sont alors fonction que des caractéristiques du canal. Posons

$$K_n = \frac{EQMM_n}{\sigma_a^2} \quad (2.71)$$

où K_n est une constante liée à une réalisation particulière du canal. En substituant cette valeur dans (2.70), on a

$$BER < \frac{2(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[\frac{1 - K_n}{\sigma_a^2 K_n} \right]} \quad (2.72)$$

où il est maintenant possible remplacer σ_a^2 par sa valeur donnée en (2.17) pour obtenir

$$BER < \frac{2(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[\frac{1 - K_n}{\frac{2}{3}(L^2 - 1)K_n} \right]} \quad (2.73)$$

Cette expression démontre que la probabilité d'erreur est une fonction du nombre L de niveaux utilisés. Si on fixe le taux d'erreur BER , il devient alors possible de déterminer la valeur de L (qui n'est pas nécessairement entière) satisfaisant l'équation à la frontière. En insérant cette valeur dans (2.14), on trouvera le taux de transmission R que supporte le canal tout en garantissant une valeur maximum BER . Un examen plus approfondi de (2.73) permet de conclure que le taux de transmission calculé de cette façon sera un maximum puisque la pente de la fonction BER en fonction de L est positive dans la région de validité de l'équation, cette région étant délimitée par les conditions $K_n \leq 1$ et $BER \leq 1$. La première condition découle de (2.71) où la valeur maximum de $EQMM_n$ est

atteinte lorsque la sortie de l'égaliseur est constamment en erreur et dans ce cas $EQMM_n$ est égale à la variance des données d'entrée, i.e. $EQMM_n = \sigma_a^2$. La seconde, i.e. $BER \leq 1$, découle du fait que BER est apparentée à une mesure de probabilité dont la valeur maximum ne peut dépasser l'unité. La figure 2.6 illustre la valeur de BER en fonction du nombre de niveaux L lorsque $K_n < 1$. On y voit que pour une valeur déterminée de $BER < 1$, il existe deux valeurs de L satisfaisant l'équation. Comme nous avons supposé que la valeur du taux d'erreur est faible, nous utiliserons la valeur la plus faible de L , la valeur supérieure devenant astronomique lorsque BER est faible (ceci peut s'interpréter comme un effet secondaire dû aux bornes intermédiaires utilisées dans les développements). Une procédure itérative permettant de calculer la valeur de L satisfaisant (2.73) est développée à l'annexe C.

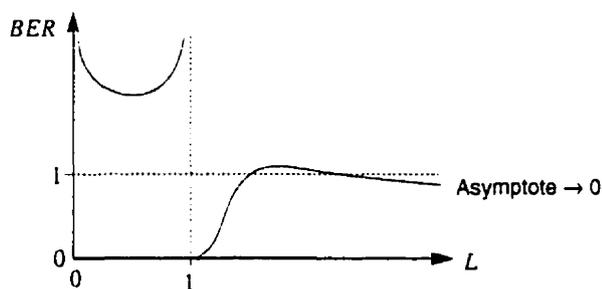


Figure 2.6 Borne sur le taux d'erreur BER en fonction du nombre de niveaux L lorsque $K_n < 1$

2.5.3 Discussion sur le resserrement possible des bornes

La borne supérieure sur la probabilité d'erreur de l'équation (2.68) provient de l'utilisation successive des bornes de Chernoff et de Saltzberg. La borne de Chernoff est efficace sur les queues d'une distribution de probabilité et s'applique donc à des événements rares. Dans notre cas elle s'applique aux variables z_1 et z_2 de l'équation (2.40). Comme la queue de la distribution correspond à la présence d'un bruit élevé (peu probable) où d'une grande interférence entre symboles elle est donc assez bien représentative des phénomènes que l'on veut étudier (i.e. des systèmes de communications fiables caractérisés par de faibles taux d'erreur)

La borne de Saltzberg, apparaissant à l'équation (2.49), est illustrée à la figure 2.7 pour différentes valeurs du nombre L de niveaux utilisés par la MAQ. Comme on le voit, cette borne est plus serrée pour de faibles valeurs de L et $|\lambda\psi|$ où λ est la variable d'optimisation de la borne de Chernoff et ψ représente les variables aléatoires $u_x^{(y)}$.

On peut également rapprocher la borne (2.52) de la borne classique sur la queue de la distribution gaussienne. Si on pose $L = 2$ (i.e. pour un signal binaire), on obtient pour la partie réelle du signal (voir les équations (2.42) à (2.45))

$$P[\varepsilon_\alpha] < e^{-\left[\frac{1}{2} \frac{[u_n^{(0)}]^2}{\sigma_{vr}^2 + \sigma_\alpha^2 \sum_{j, l \neq (n, 0)} |u_j^{(l)}|^2} \right]} \quad (2.74)$$

On voit que cette borne correspond à la partie exponentielle d'une distribution normale où l'interférence entre symboles a été considérée comme un bruit additionnel. En effet, pour un canal affecté seulement par du bruit blanc gaussien additif de moyenne nulle tel que celui de la figure 2.8, la probabilité d'erreur pour un signal (binaire équiprobable d'amplitude $\pm u_0$) reçu par un récepteur à maximum de vraisemblance est donnée par

$$Pe = Q\left(\frac{u_0}{\sigma_n}\right) \quad (2.75)$$

où la fonction $Q(x)$ est définie comme

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (2.76)$$

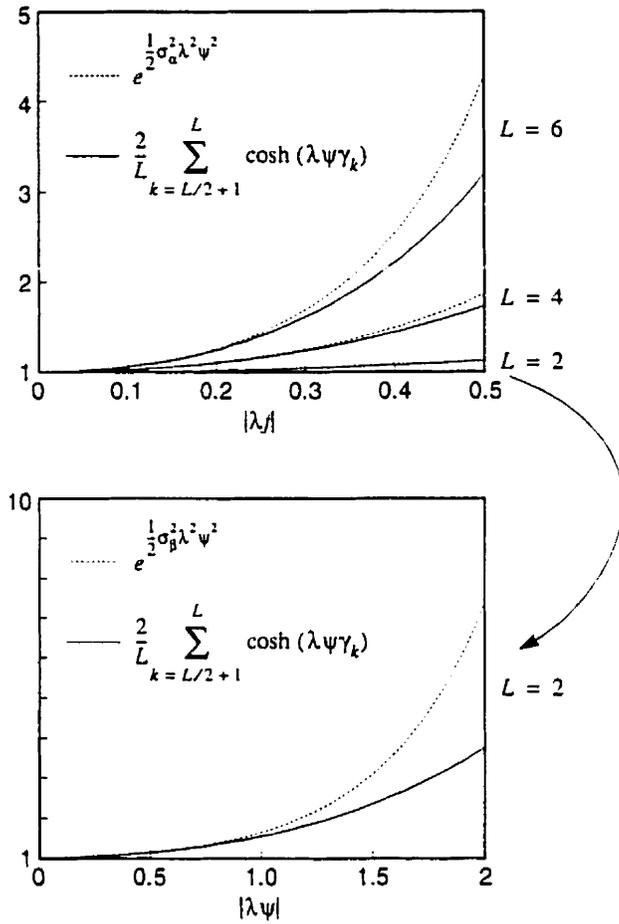


Figure 2.7 Illustration de la borne de Saltzberg

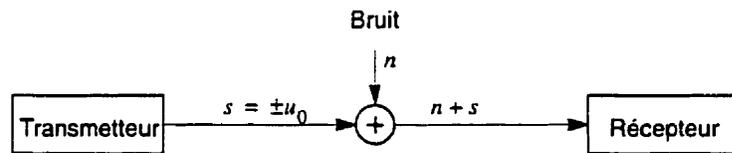


Figure 2.8 Canal affecté par un bruit additif

Il est bien connu (Wozencraft et Jacobs, 1965) qu'on peut borner la fonction $Q(x)$ par les fonctions exponentielles suivantes illustrées à la figure 2.9

$$Q(x) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} < e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.77}$$

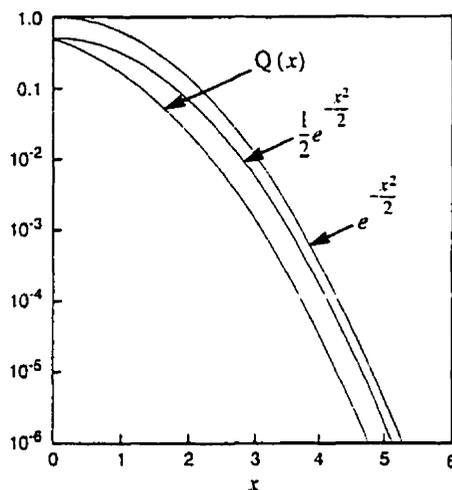


Figure 2.9 Fonction $Q(x)$ et deux bornes supérieures

En utilisant la seconde borne de droite, l'équation (2.75) devient

$$Pe < e^{-\frac{1}{2} \frac{u_0^2}{\sigma_n^2}} \quad (2.78)$$

En comparant cette dernière avec (2.74), on constate qu'il y a équivalence si on néglige pour l'instant l'interférence entre symboles (IES) représentée par les termes au temps $t \neq 0$

$$\sigma_{IES}^2 = \sigma_a^2 \sum_j \sum_{l \neq (n,0)} |u_j^{(l)}|^2 \quad (2.79)$$

Si on associe maintenant l'IES à un bruit additif, on peut alors l'ajouter au bruit gaussien représenté par σ_n^2 et il y a alors équivalence complète. La borne que nous avons trouvée peut donc s'interpréter comme une approximation de l'interférence entre symboles par une distribution normale dont la variance est donnée par (2.79) et l'utilisation de la borne exponentielle pour évaluer la queue de la distribution gaussienne.

CHAPITRE III

APPLICATION AU CANAL RADIOMOBILE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre nous utilisons les résultats généraux dérivés précédemment pour évaluer les performances associées au canal radiomobile numérique telles que mesurées par la capacité et les valeurs admissibles de taux de transmission en égalisation linéaire ou filtrage adapté. Comme nous le verrons une des principales caractéristiques du canal radiomobile est la variation temporelle de ses paramètres caractéristiques. Par conséquent, la capacité du canal mesurée sur un intervalle de temps relativement court par rapport au taux de variation évoluera également dans le temps. Dans ce contexte, la capacité peut s'interpréter comme une variable aléatoire, tout comme d'ailleurs les taux de transmissions associés aux différents types d'égaliseurs. En utilisant une approche quasi-statique¹, nous évaluerons par conséquent la capacité et les bornes d'égalisation pour les réalisations individuelles du canal et présenterons comme indice de performance statistique, le taux de coupure du canal (la définition en est donnée à la note de bas de page 2 qui apparaît sur la page 3).

Pour situer la modélisation des canaux radiomobiles dans un cadre plus général, nous débuterons le chapitre par la section 3.1 qui introduit le concept du système linéaire à variations temporelles (systèmes LTV). Cette introduction nous conduira à définir le canal WSSUS et le profil multivoies et le lecteur déjà familier avec ces concepts pourra donc l'omettre en première lecture. Ayant introduit ces concepts de base, nous aborderons à la section 3.2 la modélisation effective du canal (variable dans le temps) qui nous permettra éventuellement d'effectuer des simulations sur ses réalisations individuelles. Nous y verrons que le concept de profil multivoies est en général insuffisant pour permettre de simuler les réalisations du canal radiomobile puisqu'il n'en reflète que l'espérance mathématique et non les réalisations individuelles. Trois modèles particuliers basés sur un

1. L'approche quasi-statique consiste à découper l'horizon temporel en fenêtres successives disjointes stationnaires balayant les variations temporelles du milieu. Les valeurs calculées dans chacune des fenêtres sont donc des réalisations de la variable aléatoire qui permettent d'évaluer sa distribution.

profil multivoies donné mais modélisant également les réalisations individuelles du canal seront présentés (les modèles à profil continu, à arrivées discrètes à intervalles aléatoires et à arrivées en salves de Saleh et Valenzuela). Une représentation mathématique suffisante pour englober les trois modèles précédents sera enfin introduite à la section 3.2.4. Munis de cette représentation, nous verrons aux sections 3.3 et 3.4 comment les méthodes d'évaluation de la capacité et des bornes d'égalisation développées dans le cadre général des chapitres 2.5 et 2.4 s'appliquent au cas du canal radiomobile. Nous présentons finalement à la section 3.5 les paramètres qui seront utilisés lors des simulations et concluons sur la section 3.6 où nous présentons et discutons un ensemble de résultats numériques.

3.1 Introduction aux systèmes linéaires à variations temporelles (systèmes LTV)

Les canaux radiomobiles sont utilisés de plus en plus fréquemment pour transmettre des signaux numériques de voix ou de données quelconques. Malheureusement, en se rapportant au schéma de principe d'un lien radiomobile représenté dans la figure 3.1, ils sont souvent perçus comme peu fiables à cause des perturbations importantes dues aux multiples réflexions, diffractions et diffusions que subit le signal avant d'arriver au récepteur. Cette figure illustre de façon conceptuelle l'ensemble des phénomènes physiques à la source des évanouissements dits sélectifs en fréquence qui caractérisent de tels canaux. Le système qui y est représenté est formé de N émetteurs mobiles se déplaçant chacun selon une direction et une vitesse propres. Chacun de ces mobiles est muni d'une antenne émettant vers une base fixe formée de M antennes réceptrices déployées en diversité d'espace. Le déplacement relatif combiné des mobiles et des obstacles fait en sorte que les ondes radioélectriques échangées sont réfléchies ou diffractées à de multiples reprises en plus d'être affectées par l'effet Doppler avant d'atteindre les antennes de la base. Les variations temporelles aléatoires de l'amplitude du signal reçu constituent le phénomène d'évanouissement. De façon plus générale ces effets sont sensibles à la fréquence du signal de sorte qu'on qualifie de sélectifs en fréquence les évanouissements affectant de façon variable le contenu fréquentiel du signal.

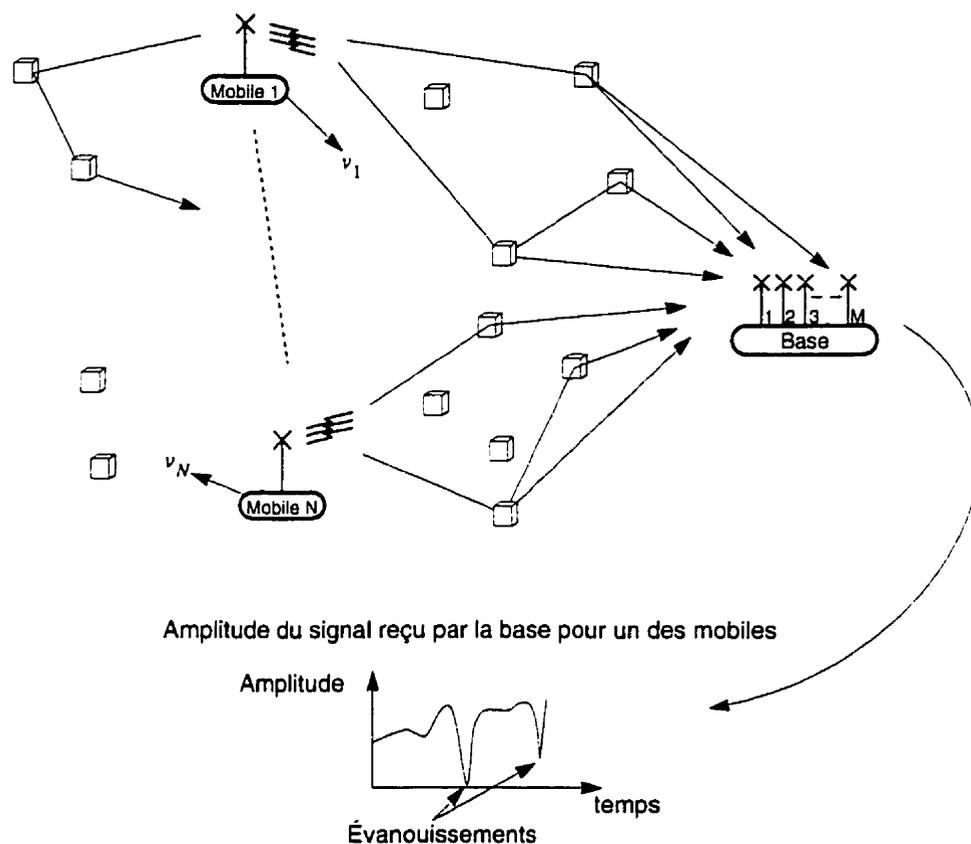


Figure 3.1 Illustration des sources physiques d'évanouissements radioélectriques

Les canaux radiomobiles se prêtent bien à une modélisation linéaire dont les paramètres sont variables dans le temps. Dans ce contexte, nous présenterons donc les diverses fonctions descriptives (la réponse impulsionnelle en est un exemple) des systèmes LTV ainsi que leurs inter-relations. Nous développerons par la suite les propriétés du second ordre et les diverses fonctions d'autocorrélation qui leur correspondent. Ces fonctions sont importantes puisqu'il est possible de les utiliser pour définir des paramètres physiques. Nous spécialisons ensuite notre présentation au cas important des canaux dits stationnaires au sens large (Wide Sense Stationary) et à diffusions non-corrélées (Uncorrelated Scattering) ce qui nous amènera au concept du profil multivoies.

Afin de simplifier la notation, nous omettrons systématiquement de spécifier les bornes d'intégration sous les intégrales qui correspondront implicitement à l'intervalle $[-\infty, \infty]$,

le domaine spécifique des variables sous l'intégrale venant éventuellement le réduire. Nous utiliserons également la convention F (F^{-1}) pour désigner l'opérateur de Fourier (son inverse).

De façon générale et en se limitant volontairement au cas scalaire¹, on peut uniquement caractériser un système LTV par sa réponse impulsionnelle (ou percussionnelle) $h(t, \tau)$ que nous définirons comme la valeur de la réponse du système à l'instant t lorsqu'on lui applique à l'entrée une impulsion à l'instant $t - \tau$ (i.e. $h(t, t - \tau) = H(\delta(t - \tau))$). Dans ces conditions, la relation dite "entrée-sortie" du domaine temporel qui relie l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ peut s'écrire comme une convolution.

$$\begin{aligned} y(t) &= H\left[\int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] \\ y(t) &= \int x(\tau) H[\delta(t - \tau)] d\tau \\ y(t) &= \int x(\tau) h(t, t - \tau) d\tau = \int x(t - u) h(t, u) du \end{aligned} \quad (3.1)$$

La représentation précédente fait appel à la réponse impulsionnelle $h(t, \tau)$ du canal, une fonction doublement temporelle. Il est également possible de représenter le canal sous forme fréquentielle en appliquant la transformée de Fourier à $h(t, \tau)$. Comme il y a deux paramètres temporels, t et τ , on peut appliquer la transformée une fois ou deux fois, ce qui donne naissance à trois autres fonctions descriptives (Bello, 1963). Ces dernières sont données dans la partie gauche de la figure 3.2 tandis que la partie droite illustre la dualité temps-fréquence des fonctions de la partie de gauche lorsqu'on pose

$$g(t, \tau) = h(t + \tau, \tau) \quad (3.2)$$

et qu'on applique de nouveau les transformées de Fourier à deux reprises.

1. Le cas multivarié se traite aisément par la notation matricielle.

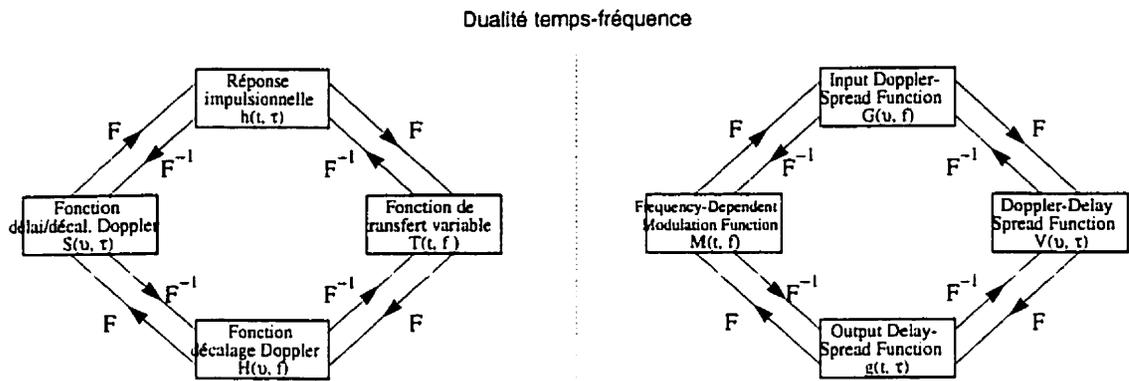


Figure 3.2 Relation entre les fonctions descriptives d'un système LTV

Ces fonctions descriptives sont en général des processus stochastiques dans le cas des systèmes LTV à variations aléatoires. Pour les caractériser complètement, il faudrait connaître la densité de probabilité conjointe de toutes les fonctions entrant en ligne de compte échantillonnées à des instants en nombre indéfini, ce qui est impossible en pratique. On peut toutefois contourner ce problème en utilisant le fait que, dans le cas des processus gaussiens, la connaissance de la fonction de corrélation et de la moyenne suffit à caractériser complètement le processus aléatoire. Sous cette hypothèse justifiable en pratique, nous étudierons donc les fonctions d'autocorrélation de chacune des fonctions descriptives développées précédemment. Nous supposons que les moyennes d'ensemble de chacune de ces fonctions descriptives sont nulles, en les définissant comme l'écart par rapport à la valeur moyenne. Ceci simplifie la discussion et fait également ressortir le fait que nous ne nous intéressons qu'à la partie aléatoire des fonctions, la partie moyenne étant généralement déterministe. Dans le cas où le processus n'est pas gaussien, l'utilisation seule des fonctions d'autocorrélation ne fournit bien sûr qu'une analyse de deuxième ordre des phénomènes. En général, tout signal radio $x(t)$ modulé peut s'exprimer comme un signal passe bande de la forme

$$x(t) = \text{Re} [z(t) e^{j2\pi f_c t}] \quad (3.3)$$

où f_c est la fréquence de la porteuse et

$$z(t) = z_r(t) + jz_i(t) \quad (3.4)$$

est l'enveloppe complexe de $x(t)$. Cette dernière expression nous permet de récrire (3.3) comme

$$x(t) = z_r(t) \cos(2\pi f_c t) - z_i(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.5)$$

où il est plus facile de reconnaître le processus de modulation à porteuses orthogonales. Si on calcule la fonction d'autocorrélation de ce signal vu comme un processus réel en bande passante, on obtient:

$$E[x(t)x^*(s)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[E[z(t)z^*(s)] e^{j2\pi f_c (s-t)} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[E[z(t)z(s)] e^{j2\pi f_c (s+t)} \right] \quad (3.6)$$

Cette expression montre que l'on doit utiliser deux fonctions d'autocorrélation pour décrire le processus réel, i.e.

$$R_z(t, s) = E[z(t)z^*(s)] \quad (3.7)$$

$$R'_z(t, s) = E[z(t)z(s)] \quad (3.8)$$

Dans la plupart des cas il s'avère que les processus à bande étroite d'intérêt sont tels que leurs composantes en quadrature sont statistiquement indépendantes et caractérisées par des fonctions d'autocorrélation identiques. Dans ce cas nous avons

$$E[z_r(t)z_i(s)] = 0 \quad (3.9)$$

et

$$E[z_r(t)z_r(s)] = E[z_i(t)z_i(s)] \quad (3.10)$$

de sorte que (3.8) devient

$$R'_z(t, s) = E[z(t)z(s)]$$

$$R'_z(t, s) = E[z_r(t)z_r(s)] + jE[z_i(t)z_r(s)] + jE[z_r(t)z_i(s)] - E[z_i(t)z_i(s)]$$

$$R'_z(t, s) = 0$$

(3.11)

Remarquons que la condition $R'_z(t, s) = 0$ est également nécessaire pour que $x(t)$ soit stationnaire au sens large. En effet, ces processus sont tels qu'ils doivent vérifier $E[x(t)x^*(s)] = R(s-t)$, i.e. la fonction d'autocorrélation ne doit dépendre que de la différence $s-t$. On vérifie aisément qu'en posant $E[z(t)z(s)] = R'_z(t, s) = 0$ dans (3.6), le terme comportant l'expression $s+t$ est éliminé et l'équation ne dépend plus alors que de $s-t$ et $R_z(t, s)$. Ceci justifiera dans les développements qui vont suivre que nous n'utiliserons que les fonctions d'autocorrélation faisant intervenir le complexe-conjugué sous l'opérateur d'espérance mathématique. Dans ce cas les fonctions d'autocorrélation correspondant aux quatre fonctions descriptives de canal sont données par:

$$\begin{aligned}
 R_h(t, s; \tau, \eta) &= E[h(t, \tau)h^*(s, \eta)] \\
 R_S(v, \mu; \tau, \eta) &= E[S(v, \tau)S^*(\mu, \eta)] && \text{Variables fréquentielles: } f, m, v, \mu \\
 R_H(v, \mu; f, m) &= E[H(v, f)H^*(\mu, m)] && \text{Variables temporelles: } t, \tau, s, \eta \\
 R_T(t, s; f, m) &= E[T(t, f)T^*(s, m)]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

On vérifie aisément que ces fonctions d'autocorrélation sont reliées entre elles par des transformées (transformées inverses) doubles de Fourier. Par exemple, en appliquant deux fois la transformée de Fourier à $R_h(t, s; \tau, \eta)$ par rapport à t et s on obtient $R_S(v, \mu; \tau, \eta)$. Les relations diverses existant entre les fonctions d'autocorrélation sont explicitées à la figure 3.3 où DF et DF^{-1} représentent respectivement les opérateurs de transformée double et transformée inverse double de Fourier.

Lorsqu'on suppose que le canal est stationnaire au sens large, les fonctions d'autocorrélation ne dépendent plus indépendamment des variables temporelles t et s mais plutôt de leur différence $\varepsilon = s-t$ (i.e. la fonction d'autocorrélation ne change pas lors d'une translation dans le temps). On obtient alors le modèle de canal stationnaire au sens large (WSS, wide sense stationary).

Sous l'hypothèse supplémentaire que les contributions individuelles d'un continuum d'obstacles différentiels sont non-corrélées lorsque les délais de transmissions associés

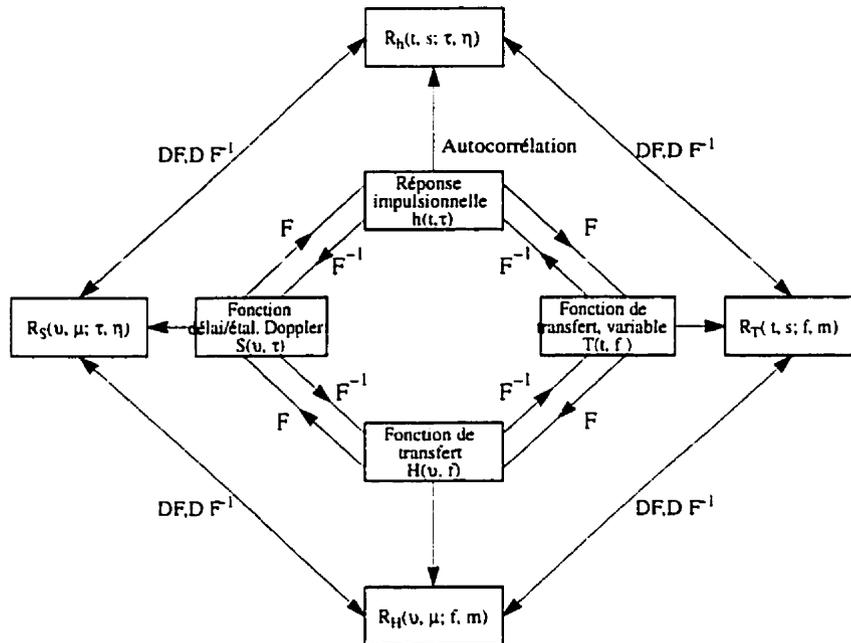


Figure 3.3 Relations entre les fonctions d'autocorrélation des fonctions descriptives des systèmes LTV

sont différents, les fonctions d'autocorrélation ne dépendront plus indépendamment des fréquences f et m mais plutôt de leur différence $\Omega = m - f$ (ceci peut s'interpréter comme une condition duale de celle présentée au paragraphe précédent). On obtient alors le modèle de canal à diffusions non-corrélées (US, uncorrelated scattering) souvent utilisé dans l'étude des transmissions troposphériques (Parsons, 1992).

En combinant les propriétés des canaux WSS et US on obtient le canal WSSUS, largement rencontré dans le cadre de l'étude des canaux de communications stochastiques. Les fonctions d'autocorrélation (après l'évaluation et la simplification de (3.12)) pour un tel canal sont (Bello, 1963; Parsons, 1992)

$$\begin{aligned}
 R_S(v, \mu; \tau, \eta) &= \delta(\eta - \tau) \delta(v - \mu) P_S(v; \tau) \\
 R_H(v, \mu; f, m) &= \delta(v - \mu) P_H(v; \Omega) \\
 R_h(t, s; \tau, \eta) &= \delta(\eta - \tau) P_h(\varepsilon; \tau) \\
 R_T(t, s; f, m) &= R_T(\varepsilon, \Omega)
 \end{aligned}$$

(3.13)

où

$$\begin{aligned} \varepsilon &= s - t \\ \Omega &= m - f \end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned} P_S(\nu; \tau) &= P_S(\nu; \tau, \eta) \Big|_{\eta = \tau} = \int R_h(\varepsilon; \tau, \eta) e^{j2\pi\nu\varepsilon} d\varepsilon, & \eta &= \tau \\ P_H(\nu; \Omega) &= P_H(\nu; f, m) \Big|_{\Omega = m - f} = \int R_T(\varepsilon; f, m) e^{j2\pi\nu\varepsilon} d\varepsilon, & \Omega &= m - f \\ P_h(\varepsilon; \tau) &= P_h(t, s; \tau) \Big|_{\varepsilon = s - t} = \int R_T(t, s; \Omega) e^{j2\pi\tau\Omega} d\Omega, & \varepsilon &= s - t \end{aligned} \tag{3.15}$$

sont les densités spectrales associées. La figure 3.4 spécifie l'équivalent de la figure 3.3 pour le canal WSSUS et identifie les nomenclatures couramment utilisées pour désigner les fonctions d'autocorrélation qui lui sont associées.

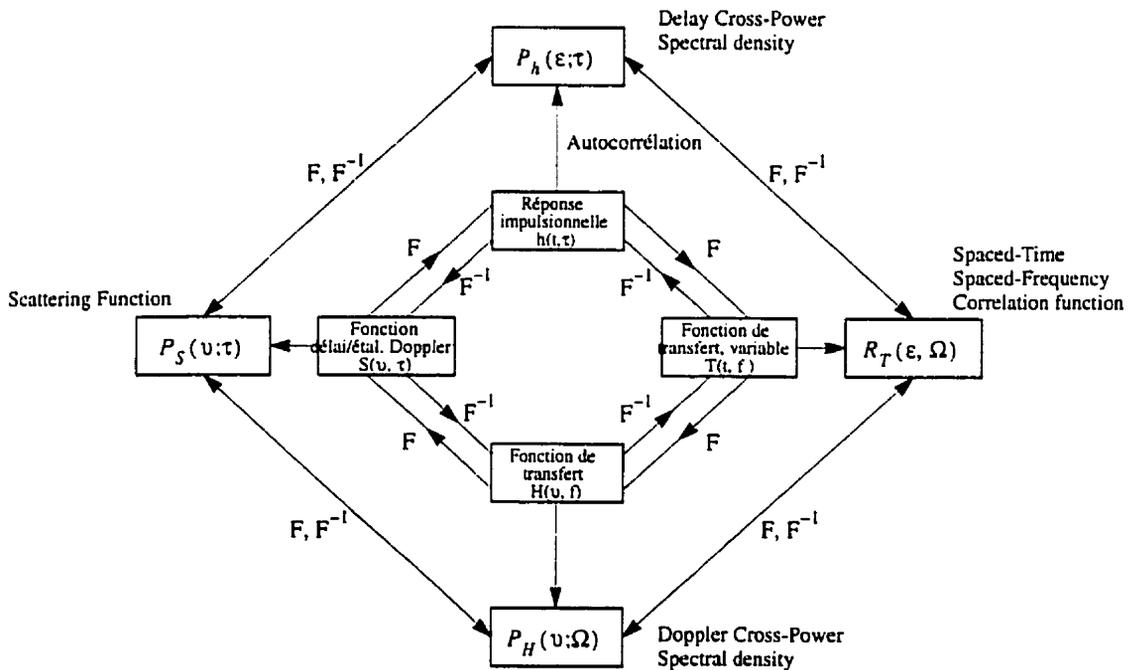


Figure 3.4 Relations entre les fonctions d'autocorrélation du canal WSSUS

3.1.1 Variations à grande et petite échelle, le canal Quasi-WSSUS

La discussion précédente sur les systèmes LTV en général nous a permis de développer plusieurs variantes qui nous ont mené en fin de parcours au canal WSSUS. Mentionnons le fait que l'hypothèse de stationnarité dans ce modèle de canal simplifie la caractérisation des canaux radiomobiles puisque par exemple, pour calculer la probabilité d'erreur lors de la transmission d'un signal numérique à travers un tel canal, il suffit de la calculer sur un intervalle de temps quelconque, la stationnarité assurant que le résultat sera statistiquement le même sur tout autre intervalle. La plupart des canaux radiomobiles ne sont malheureusement pas stationnaires. En effet, un obstacle important (e.g. le flanc d'une montagne) mais éloigné du mobile affectera ce dernier de façon différente lors de ses déplacements de sorte que la puissance moyenne du signal reçu, qui est relativement constante sur les intervalles de temps correspondant à de petits déplacements peut varier de façon importante entre deux instants correspondant à des positions du mobile très éloignées l'une de l'autre. Ce phénomène appelé effet d'ombrage fait en sorte que le processus est non-stationnaire et qu'il n'est alors pas possible d'utiliser tel-quel le modèle de canal WSSUS. Le comportement des canaux radiomobiles peut cependant se visualiser suivant deux échelles temporelles distinctes. La première, relative à des instants relativement espacés, correspond à des variations lentes dues à l'effet d'ombrage ainsi qu'aux variations macroscopiques de la topographie du terrain conduisant à des fluctuations de l'affaiblissement de parcours. La seconde correspond quant à elle à des instants rapprochés où les variations beaucoup plus rapides apparaissent de façon quasi-stationnaire relativement aux intervalles de fréquence et de temps utilisés pour la signalisation numérique. Ces variations rapides appelées variations à petite échelle et provenant le plus souvent de sources indépendantes peuvent de façon générale se modéliser par le canal WSSUS vu précédemment. De plus elles sont souvent telles qu'il est possible de les décrire par un processus gaussien, ce qui permet alors de caractériser complètement le processus lorsque la fonction de corrélation est connue.

Une telle décomposition de l'échelle du temps est primordiale en pratique puisqu'elle permet par exemple de calculer la probabilité d'erreur du canal (stationnaire) sur de petits intervalles de temps et ensuite d'en faire la moyenne à moyen terme selon les statistiques des variations à grande échelle pour obtenir une description globale probabiliste du taux d'erreur. Le canal Quasi-WSSUS (QWSSUS) définit sous quelles conditions cette décomposition est valable. Pour en comprendre les principes, nous devons retourner à la fonction de transfert variable dans le temps $T(t, f)$ (voir la figure 3.3) qui représente l'enveloppe complexe de la réponse du canal au signal d'entrée $\cos(2\pi(f_c + f)t)$ où f_c est la fréquence de la porteuse. La fonction stochastique $T(t, f)$ met en évidence la sélectivité des évanouissements dans les domaines du temps et des fréquences; les évanouissements correspondent aux variations de $T(t, f)$ selon la variable t et leur sélectivité en fréquence¹ correspond à ses variations selon la variable f . D'un point de vue statistique, la façon la plus simple de décrire la sensibilité de $T(t, f)$ aux variations des variables t et f est d'utiliser la fonction d'autocorrélation correspondante $R_T(t, s, f, m)$ (voir la figure 3.4). Pour des valeurs de t et f fixées, nous définissons $R_{t,f}(\varepsilon, \Omega)$ comme

$$R_{t,f}(\varepsilon, \Omega) \equiv R_T\left(t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2}, f - \frac{\Omega}{2}, f + \frac{\Omega}{2}\right) = \overline{T^*\left(t - \frac{\varepsilon}{2}, f - \frac{\Omega}{2}\right) T\left(t + \frac{\varepsilon}{2}, f + \frac{\Omega}{2}\right)} \quad (3.16)$$

Dans ce contexte, $R_{t,f}(\varepsilon, \Omega)$ décrit dans quelle mesure la fonction de transfert devient décorrélée pour des intervalles de temps ε et de fréquence Ω centrés autour de t et f . Si on définit θ_{\max} Hz et γ_{\max} sec comme les taux respectifs maximaux de fluctuation de $R_{t,f}(\varepsilon, \Omega)$ selon les axes t et f , i.e.

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &= \max \left[\frac{\partial}{\partial t} R_{t,f}(\varepsilon, \Omega) \right] \\ \gamma_{\max} &= \max \left[\frac{\partial}{\partial f} R_{t,f}(\varepsilon, \Omega) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

1. Notons qu'il est possible d'interpréter la sélectivité comme l'équivalent d'évanouissements en fréquence, un concept dual des évanouissements conventionnels qui évoluent en fonction du temps.

alors les inégalités suivantes fournissent les conditions nécessaires pour que l'approche QWSSUS soit valide (Bello, 1963)

$$\begin{aligned} W &\ll \frac{1}{\gamma_{\max}} \\ T + \Delta &\ll \frac{1}{\theta_{\max}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

où W et T sont respectivement la largeur de bande et la durée du signal d'entrée et Δ est l'étalement du retard du canal défini comme la différence entre la durée du signal d'entrée et celui de sortie, i.e. $\Delta = T_2 - T$ où T_2 est la durée du signal de sortie. Un canal dont les paramètres obéissent à ces conditions verra sa fonction d'autocorrélation $R_{t,f}(\epsilon, \Omega)$ devenir indépendante des valeurs de t et f . Dans ce cas on peut écrire $R_{t,f}(\epsilon, \Omega) = R(\epsilon, \Omega)$ et la fonction d'autocorrélation est alors égale à $R_T(\epsilon, \Omega)$, la fonction d'autocorrélation du canal WSSUS donnée en (3.13). Les inégalités (3.18) fournissent donc les conditions nécessaires pour qu'un canal quelconque approche le comportement d'un canal WSSUS, ce qui permet d'en faire la décomposition à petite et grande échelles énoncée plus haut. Dans la suite, nous ne considérerons que les variations à petite échelle, l'étude des modèles de propagation conduisant aux variations à grande échelle constitue en soit un sujet important qui sort du cadre de notre étude actuelle et la complète.

3.1.2 Caractérisation du canal WSSUS

Pour caractériser le canal WSSUS relativement aux variations à petite échelle, il est possible d'utiliser n'importe laquelle des fonctions de corrélation données en (3.13). En pratique cependant l'interprétation physique du phénomène d'évanouissements conduit à utiliser le plus souvent la fonction "Input delay spread" $R_h(t, s; \tau, \eta) = \delta(\eta - \tau) P_h(\epsilon; \tau)$. Dans ce cas, la corrélation du signal de sortie $y(t)$ peut s'écrire comme (Papoulis, 1991)

$$R_y(t, t + \epsilon) = \iint x(t - \tau) x^*(t + \epsilon - \eta) \delta(\eta - \tau) P_h(\epsilon; \tau) d\tau d\eta \quad (3.19)$$

où $x(t)$ est le signal d'entrée. Cette fonction de deux variables est en général difficile à évaluer en pratique. On lui préfère l'approximation où $\varepsilon = 0$ (i.e. la différence des temps d'observation est nulle). On peut alors définir

$$P_h(\tau) \equiv P_h(0, \tau) \quad (3.20)$$

d'où

$$\begin{aligned} R_y(t, t + \varepsilon) &= \iint x(t - \tau) x^*(t - \eta) \delta(\eta - \tau) P_h(\tau) d\tau d\eta \\ R_y(t, t + \varepsilon) &= \int x(t - \tau) x^*(t - \tau) P_h(\tau) d\tau \\ R_y(t, t + \varepsilon) &= \int |x(t - \tau)|^2 P_h(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si $|x(t)|^2$ est une impulsion de Dirac alors

$$R_y(t, t + \varepsilon) = P_h(t) \quad (3.22)$$

Pour que ce résultat soit valide il faut que $|x(t)|^2$ apparaisse comme un impulsion par rapport à $P_h(t)$ (Parsons, 1992), i.e. la durée de $|x(t)|^2$ doit être beaucoup plus faible que celle de $P_h(t)$. On appelle $P_h(t)$ "le profil multivoies" et il peut s'interpréter comme l'étalement temporel de la puissance du signal transmis dû aux différents délais de parcours associés aux obstacles. En général, on redéfinira l'origine de $P_h(t)$ de façon à ce que le temps d'arrivée t_0 du signal correspondant au trajet le plus court se retrouve à $\tau = 0$ où τ est appelé "excess time delay"

$$P_h(\tau) = P_h(t - t_0) \quad (3.23)$$

Un profil multivoies typique est montré à la figure 3.5. Notons qu'en normalisant la surface sous $P_h(\tau)$ à l'unité, on peut interpréter le profil multivoies comme une densité de probabilité, i.e. la probabilité de recevoir une certaine puissance à un temps donné lorsqu'une impulsion est appliquée à l'entrée. En première approximation, on caractérise souvent le profil multivoies par ses deux premiers moments. Le premier moment est le délai moyen qui s'écrit

$$D = \frac{\int_0^{\infty} \tau P_h(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} P_h(\tau) d\tau} \quad (3.24)$$

Le second moment centré est appelé “valeur efficace du retard” et s’écrit

$$\tau_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} (\tau - D)^2 P_h(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} P_h(\tau) d\tau}} \quad (3.25)$$

L’étalement total du retard T_m correspond quant à lui à la valeur maximale de τ pour laquelle $P_h(\tau) \neq 0$. Un grand nombre de travaux se sont attachés à étudier la modélisation du profil multivoies pour différents types d’environnement (immeubles, villes...). Un des modèles le plus souvent utilisé est le profil de forme exponentiel montré à la figure 3.6. Notons cependant que plusieurs autres modèles existent.

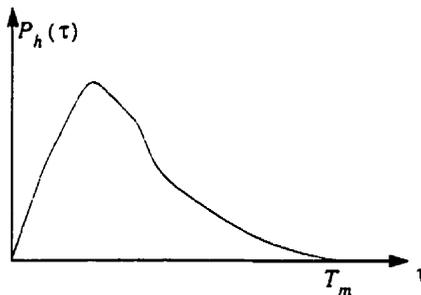


Figure 3.5 Profil multivoies typique

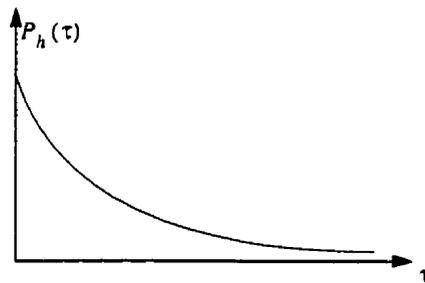


Figure 3.6 Profil multivoies de forme exponentielle

En se basant sur le fait que les fonctions de corrélation du canal WSSUS sont reliées entre elles par des transformées de Fourier (voir la figure 3.4), on peut calculer la fonction d'autocorrélation $R_T(\varepsilon, \Omega)$ de la fonction de transfert variable dans le temps à partir de la fonction d'autocorrélation $P_h(\varepsilon, \tau)$ comme

$$R_T(\varepsilon, \Omega) = \int P_h(\varepsilon, \tau) e^{-j2\pi\Omega\tau} d\tau \quad (3.26)$$

Lorsqu'on s'intéresse au cas plus simple précédent, on pose à nouveau $\varepsilon = 0$ (i.e. la différence des temps d'observation est nulle) et la fonction

$$R_T(\Omega) = \int P_h(\tau) e^{-j2\pi\Omega\tau} d\tau \quad (3.27)$$

est la corrélation d'enveloppe qui n'est que la transformée de Fourier de $P_h(\tau)$. Elle indique dans quelle mesure les enveloppes de deux signaux sinusoïdaux aux fréquences ω_1 et ω_2 ($\Omega = \omega_2 - \omega_1$) sont corrélées. Cette fonction traduit mathématiquement le phénomène physique dû aux temps de parcours différents et qui fait en sorte que deux porteuses à des fréquences proches auront des comportements semblables tandis que plus ces fréquences seront éloignées l'une de l'autre plus leur comportement deviendra non corrélé. Une fonction de corrélation d'enveloppe typique est montrée à la figure 3.7.

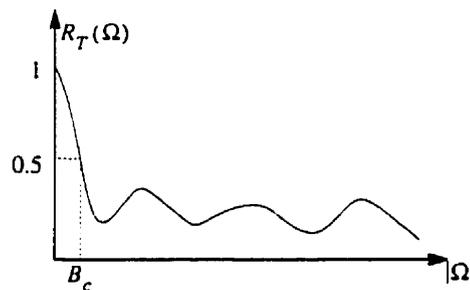


Figure 3.7 Fonction de corrélation d'enveloppe typique

On définit la bande de cohérence B_c comme la valeur minimale de Ω pour laquelle $R_T(\Omega)$ est égale à une valeur adéquatement choisie (typiquement la moitié de sa valeur maximale). Notons que les propriétés générales de la transformée de Fourier font en sorte que la bande de cohérence varie de façon inversement proportionnelle à la longueur du profil multivoies, i.e.

$$B_c \propto \frac{1}{T_m} \quad (3.28)$$

Ainsi, plus la longueur du profil multivoies sera faible, plus la largeur de la bande de cohérence sera élevée. À la limite, si T_m tend vers zéro, la bande de cohérence tend vers l'infini et le profil multivoies correspondant est composé seulement d'une impulsion. Dans ce cas le canal ne possède qu'un seul trajet significatif et toutes les fréquences se comporteront de la même façon. Il s'agit donc d'un canal à évanouissement non-sélectif en fréquence (flat fading). Dans le cas contraire, il y aura sélectivité fréquentielle des évanouissements et la figure 3.8 en démontre les effets sur un signal numérique. On y voit que lorsque les évanouissements ne sont pas sélectifs en fréquence (partie gauche de la figure 3.8.a), l'amplitude de toutes les fréquences est modifiée de la même façon. Si on applique à l'entrée une impulsion dont la largeur de bande est inférieure à la bande de cohérence, la forme de l'impulsion est préservée et seul son facteur d'échelle est modifié (figure 3.8.b). Si on applique plutôt un train d'impulsions correspondant à un message quelconque, sa forme demeure inchangée et il est donc relativement facile de récupérer les composantes individuelles (i.e. il n'y a pas d'interférence entre symboles).

Par contre, lorsque les évanouissements sont sélectifs en fréquence (partie droite de la figure 3.8.a), toutes les fréquences ne sont pas atténuées de la même façon et une impulsion appliquée à l'entrée du canal subira une déformation. Ceci entraîne en particulier un étalement dans le temps qui fait en sorte que si un train d'impulsions successives est envoyé, il y aura interférence entre les impulsions et il sera par conséquent plus difficile de récupérer le message original (figure 3.8.c). Ce phénomène d'interférences entre symboles (ou de brouillage entre symboles) est à la base de l'utilisation des égaliseurs dont l'objectif est d'en supprimer les effets pour récupérer le message original sans distorsion.

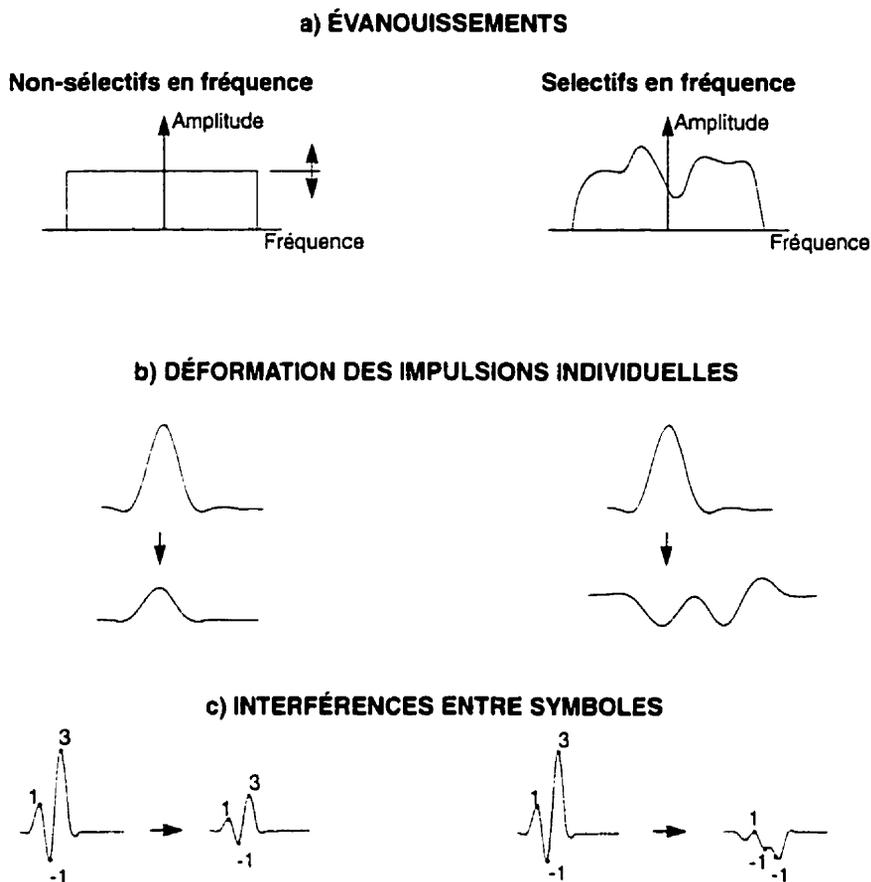


Figure 3.8 Effets de la sélectivité des évanouissements sur une suite de symboles

Nous avons étudié jusqu'à présent deux des quatre fonctions de corrélation de la figure 3.4, à savoir: $P_h(\epsilon; \tau)$ et $R_T(\epsilon, \Omega)$ dans le cas particulier où $\epsilon = 0$. La figure 3.9 illustre qu'en plus de ces cas particuliers, d'autres possibilités peuvent aussi être considérées, ce qui est le cas dans la littérature (Bello, 1963; Parsons, 1992). En posant par exemple $\Omega = 0$ dans $R_T(\epsilon, \Omega)$ on obtient la "Spaced-time correlation function" $R_T(\epsilon)$ qui indique l'échelle de temps où les paramètres du canal peuvent être considérés comme constants. Le temps de cohérence Δt_c est égal à la durée de $R_T(\epsilon)$ et plus sa valeur est grande plus les paramètres du canal varieront lentement.

En prenant la transformée de Fourier de $R_T(\epsilon)$ par rapport à ϵ (Ω restant nulle), on trouve sur la figure 3.9 que la fonction correspondante est le spectre de puissance Doppler

$P_H(\nu)$ qui traduit de quelle manière la fréquence d'un signal transmis dans le canal sera étalée à cause de l'effet Doppler. La valeur B_d pour laquelle la valeur de $P_H(\nu)$ reste supérieure à une valeur donnée (e.g. -40dB) porte le nom d'étalement Doppler. On note encore que les propriétés de la transformée de Fourier font en sorte que le temps de cohérence sera inversement proportionnel à l'étalement Doppler

$$\Delta t_c \propto \frac{1}{B_d} \quad (3.29)$$

Il est évidemment possible de définir d'autres fonctions correspondant aux autres cas particuliers. Nous nous limiterons toutefois à mentionner en conclusion que la fonction de diffusion $P_S(\nu;\tau)$ ("scattering function") est largement utilisée en radar. Cette fonction représente la puissance moyenne reçue en fonction de la fréquence Doppler ν et du retard τ . Elle correspond assez bien au modèle physique du phénomène de réflexion d'un signal par des cibles mobiles non-corrélées produisant à la fois un retard et un décalage Doppler.

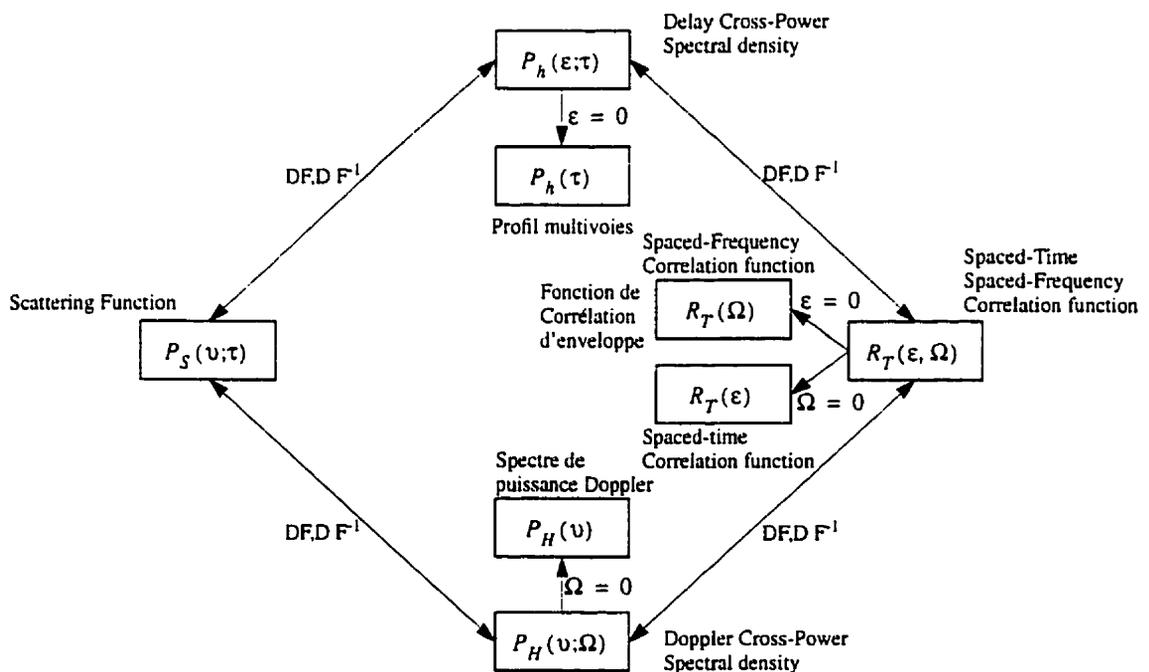


Figure 3.9 Relations entre les fonctions de corrélation du canal WSSUS, quelques cas particuliers

3.2 Modélisation d'un canal à évanouissements sélectifs en fréquence

Conformément à la discussion au début du chapitre, le signal que reçoit une des antennes de la base en provenance d'un des mobiles est composé de la superposition d'un certain nombre de signaux dus à diverses réflexions, diffractions et diffusions causées par les obstacles entre le mobile émetteur et la base. Nous utiliserons dans cette recherche le modèle de canal faisant appel au profil multivoies, tel qu'il a été défini à la section 3.1.2. Ce dernier ne représentant que l'espérance des réalisations du canal, il ne fournit pas d'informations sur ses réalisations individuelles et il est donc nécessaire de raffiner le modèle aux fins de simulations numériques. Nous utiliserons ici les trois modèles fréquemment utilisés qui font de plus appel à la réponse impulsionnelle du canal que l'on approximera par une série de raies (représentées par des impulsions de Dirac) réparties sur l'axe du temps (voir la figure 3.10.). L'espérance quadratique de l'amplitude des raies correspond dans tous les cas à la forme du profil multivoies choisi, les caractéristiques statistiques de l'amplitude et de la phase de ces raies étant choisies de façon à reproduire le plus fidèlement la réalité.

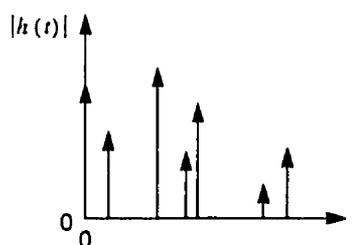


Figure 3.10 Modélisation de la réponse impulsionnelle

Nous présentons aux sections suivantes les trois modèles qui seront utilisés dans les simulations conduisant aux résultats numériques: le modèle à profil continu, le modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires et le modèle de Saleh et Valenzuela. Une expression mathématique adéquate pour les représenter globalement et qui nous servira dans la suite du chapitre fera finalement l'objet de la dernière section traitant de la modélisation.

3.2.1 Modèle à profil continu

La réponse impulsionnelle du canal est dans ce cas formée d'une suite continue de raies, leur amplitude obéissant à la loi de Rayleigh et leur phase à une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ce modèle peut s'expliquer physiquement en s'appuyant sur l'hypothèse que chacune des raies composant le signal est en fait la somme de raies distinctes ayant suivi des chemins distincts et donc soumises à des retards aléatoires. En invoquant le théorème de la limite centrale, on obtient un processus gaussien complexe qui conduit à une distribution de Rayleigh pour caractériser l'amplitude des raies et à une distribution uniforme pour caractériser la phase (Saleh et Valenzuela, 1987). Un graphique illustrant la distribution de Rayleigh est donnée à la figure 3.11.

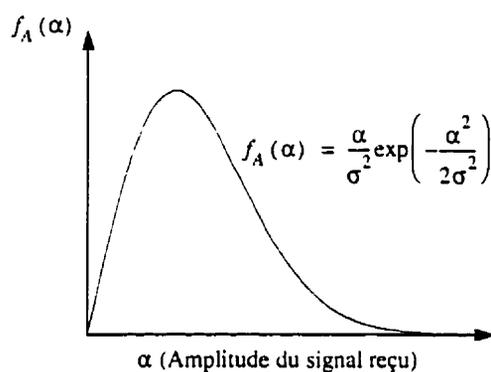


Figure 3.11 Distribution de Rayleigh

Notons que le taux d'arrivée des raies¹ est déterminé par l'environnement; ce taux sera différent si le canal est dans un immeuble ou en milieu urbain. Le modèle continu n'est donc valide que pour certains types d'environnements (i.e. où le taux d'arrivée des raies est élevé).

Le modèle à profil continu se prête assez bien aux calculs analytiques ainsi qu'aux simulations qu'on peut réaliser en utilisant une approximation qui consiste à discrétiser le profil à l'aide de raies disposées à des intervalles de temps fixes mais suffisamment

1. Le taux d'arrivée des raies est défini comme le nombre moyen de raies reçues dans un intervalle de temps correspondant à une seconde.

rapprochés. L'écart maximum entre les raies étant en général fonction du système étudié, nous évaluerons l'effet de ce paramètre lors de la présentation des résultats. L'amplitude de chacune des raies est alors aléatoire et caractérisée par une distribution de Rayleigh dont la valeur quadratique moyenne correspond à l'amplitude du profil évaluée à la valeur du retard correspondant à celui des raies.

3.2.2 Modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires

Lorsque le taux d'arrivée réel des raies est trop faible, le modèle précédent ne tient plus et on doit alors recourir à un modèle discret qui représente plus fidèlement la réalité mais qui s'avère souvent plus difficile à utiliser analytiquement (il est par contre relativement facile à simuler). Le plus simple des modèles discrets consiste à modéliser l'arrivée des raies par un processus de Poisson caractérisé par un taux moyen d'arrivée des raies λ arrivées/sec (Sexton et Pahlavan, 1989). L'amplitude des raies est encore ici caractérisée par une distribution de Rayleigh dont la valeur quadratique moyenne correspondra à l'amplitude du profil évaluée à la valeur correspondante du retard des raies. La phase suit quant à elle une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Notons que dans le cas du modèle discret, la valeur efficace du retard τ_{rms} est une variable aléatoire puisque pour chaque réalisation du canal, les raies sont distribuées aléatoirement sur l'axe du temps (dans le cas du modèle à profil continu, les raies étant retardées par valeur fixe, la valeur efficace du retard était une constante). Pour une réalisation particulière du canal composée de L raies dont le retard est $\tau_k, k = 0 \dots L-1$, la valeur efficace du retard est (Sexton et Pahlavan, 1989)

$$\tau_{rms}^2 = \frac{\sum_{k=0}^{L-1} (\tau_k - \bar{\tau})^2 p(\tau_k)}{\sum_{k=0}^{L-1} p(\tau_k)}$$

$$\bar{\tau} = \sum_{k=0}^{L-1} \tau_k p(\tau_k)$$

(3.30)

Pour cette raison, lorsqu'il sera question de la valeur efficace du retard dans le cas du modèle discret, elle correspondra à celle de l'enveloppe du profil et non pas à la véritable valeur qui elle, est variable d'une réalisation à l'autre. Notons aussi que l'hypothèse qui consiste à faire tendre λ vers l'infini conduit au modèle à profil continu.

3.2.3 Modèle en salves de Saleh et Valenzuela

Bien que plus fidèle à la réalité que le modèle à profil continu lorsque le taux d'arrivée des raies est faible, le modèle discret ne tient pas compte du phénomène observé en pratique voulant que les raies aient tendance à arriver regroupées en salves successives (Turin et al., 1972; Saleh et Valenzuela, 1987). Cette tendance s'explique physiquement par le fait que la première salve est formée des signaux ayant suivi un chemin diffus autour du chemin direct entre l'émetteur et le récepteur alors que les salves subséquentes proviennent des diffusions autour des chemins de réflexions et diffractions des signaux sur des obstacles majeurs formés par la structure des bâtiments, des portes métalliques, etc. Chacune des salves individuelles est composée d'un essaim plus ou moins diffus correspondant à des réflexions parasites provenant d'obstacles secondaires divers tels que les murs, l'ameublement, etc. Un des modèles proposé pour tenir compte de ces arrivées en salves consiste à utiliser une chaîne de Markov dans laquelle l'arrivée d'une raie et son amplitude dans un intervalle de temps dépendent de la présence ou de l'absence d'une raie et de son amplitude dans l'intervalle précédent (Suzuki, 1977). Bien que ce modèle semble correspondre assez bien à la réalité, il est relativement complexe et difficile à utiliser. Pour cette raison, Saleh et Valenzuela (1987) ont proposé un modèle plus simple pour lequel l'arrivée des salves de raies est contrôlée par un processus de Poisson de taux d'arrivée Λ alors que l'arrivée des raies individuelles dans chacune des salves est modélisée par un processus de Poisson de taux d'arrivée différent λ . L'amplitude moyenne de chacune des salves est déterminée par une enveloppe exponentielle décroissante de constante de temps Γ alors que l'amplitude moyenne des raies individuelles est modélisée par une enveloppe exponentielle de constante de temps différente γ . L'amplitude des raies individuelles obéit à une loi de Rayleigh dont la valeur

quadratique moyenne est égale à l'amplitude du produit des deux enveloppes et leur phase suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ Une illustration de ce modèle est donnée à la figure 3.12 pour une réalisation particulière du canal. Sur cette figure, les temps d'arrivées des salves sont notés T_i et les temps d'arrivées des raies individuelles sont notés τ_{ij} . Remarquons que le temps d'arrivée de la première salve est toujours fixé à $T_0 = 0$ et que la première raie de chaque salve possède un délai différentiel nul $\tau_{i0} = 0$.

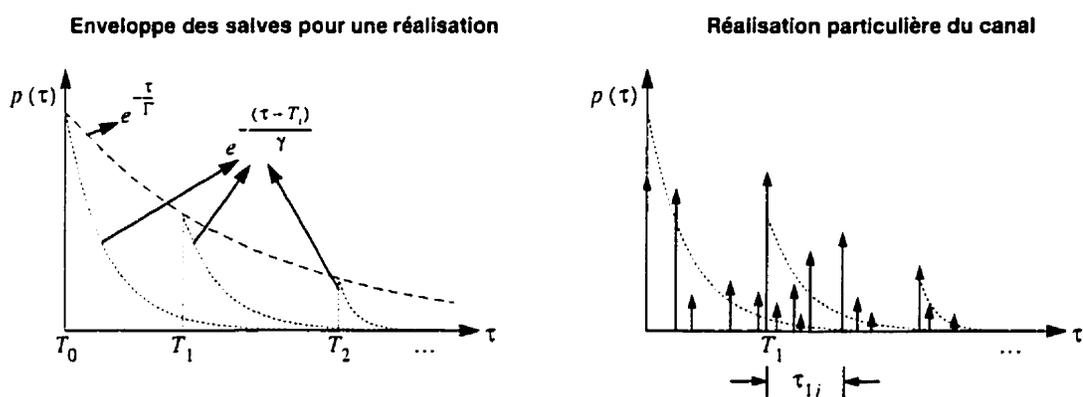


Figure 3.12 Réalisation du modèle de canal avec arrivées des raies en salves

On peut remarquer qu'en prenant l'espérance des enveloppes des réalisations du canal par rapport aux temps d'arrivées des raies et des salves on obtient un profil multivoies de forme exponentielle dont la constante de temps est égale à la constante de temps des salves Γ (i.e. l'espérance de toutes les réalisations du canal donne un profil exponentiel de constante de temps Γ). Malgré cela, on ne peut relier directement le modèle discret (de profil exponentiel) au modèle à arrivées par salves car les statistiques reliant les raies entre elles sont différentes d'un à l'autre.

Notons également que si le taux d'arrivée des salves de raies tend vers l'infini, le modèle à arrivées par salves est équivalent au modèle continu de profil exponentiel. D'un autre côté, si on fait tendre le taux d'arrivée des raies individuelles dans les salves vers zéro, il n'y aura qu'une raie par salve (la première) et le modèle par salves est alors équivalent au modèle discret de profil exponentiel. En général par contre, lorsqu'on utilise des valeurs moyennes, le modèle par salves reflète mieux les conditions qu'on retrouve dans les

immeubles et est par conséquent probablement plus fidèle que le modèle discret dans ces conditions.

3.2.4 Modèle mathématique du canal de communication

Conformément à ce qui a été proposé à la section 3.1.1, nous utiliserons une approche quasi-statique dans les calculs numériques de sorte que les caractéristiques du canal $C(t)$ (ou $\tilde{C}(f)$) de la figure 2.3 varient suffisamment lentement dans le temps pour être invariantes lors d'une réalisation particulière. Cette hypothèse conduit à effectuer les calculs sur chacune des réalisations supposées stationnaires et à collecter les statistiques sur l'ensemble des réalisations.

La matrice de canal $C(t)$ représentée sur la figure 2.3 possède des composantes pour chacune des liaisons entre les mobiles et les antennes réceptrices. Comme nous supposons que les signaux reçus aux antennes sont indépendants et que les mobiles se déplacent de façon indépendante, chacune des composantes de cette matrice sera représentée par une réponse impulsionnelle $C_{mn}(t)$ indépendante des autres composantes. L'environnement dans lequel se situe le système étant uniforme, chacune des réponses impulsionnelles de cette matrice sera identique et choisie parmi les modèles soit à profil continu, à arrivées discrètes à intervalles aléatoires ou à arrivées par salves. De façon générale, l'expression suivante permet de représenter la réponse impulsionnelle de chacun de ces modèles

$$C_{mn}(t) = \sum_{r=0}^{R^{(mn)}-1} \eta_r^{(mn)} e^{j\theta_r^{(mn)}} \delta(t - \tau_r^{(mn)}) \quad \begin{array}{l} m = 1 \dots M \\ n = 1 \dots N \end{array} \quad (3.31)$$

Ici, R représente le nombre de raies de la réponse impulsionnelle et η_r , τ_r et θ_r en représentent respectivement l'amplitude, le retard et la phase. Pour tous les modèles utilisés, la phase θ_r est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[-\pi, \pi]$. L'amplitude η_r , le retard τ_r et le nombre de raies R sont des variables aléatoires dont la distribution conjointe dépend du modèle utilisé (voir la section 3.2). Notons que toutes les variables aléatoires sont indépendantes d'une composante de la matrice à l'autre, ce que

nous faisons ressortir par l'utilisation de la notation $x^{(mn)}$. Pour fin de normalisation, nous imposerons une contrainte d'énergie moyenne totale unitaire sur toutes les réalisations du canal

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^2 \right] = 1 \quad (3.32)$$

où l'espérance est prise par rapport à l'ensemble des variables aléatoires. Remarquons que le nombre de raies R peut varier d'une réalisation à l'autre en fonction du modèle utilisé¹ et pour cette raison, l'espérance doit être prise également en fonction de cette variable. Afin de normaliser à une énergie moyenne totale unitaire des canaux caractérisés par des raies d'amplitude $v_r^{(mn)}$, on peut utiliser la relation

$$\eta_r^{(mn)} = K v_r^{(mn)} \quad (3.33)$$

où K est un réel. En substituant ceci dans (3.32), on a

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} K^2 v_r^2 \right] = 1 \quad (3.34)$$

d'où on tire

$$K = \frac{1}{\sqrt{E \left[\sum_{r=0}^{R-1} v_r^2 \right]}} \quad (3.35)$$

Donc pour normaliser une réalisation de canal non-normalisée, il suffit d'appliquer la transformation (3.33) où K est donné par (3.35).

Pour les modèles à temps continu et discret, l'amplitude des raies η_r obéit à la loi de Rayleigh et la valeur quadratique moyenne est donnée par l'amplitude du profil évalué à la valeur du retard des raies par rapport à la référence. Dans le cas du modèle à profil

1. La durée de la réponse impulsionnelle pouvant être infinie, on doit toujours procéder à sa troncature lors des simulations. D'autre part, le processus d'arrivée des raies est habituellement de type Poisson et de ce fait le nombre de raies dans un certain intervalle est une variable aléatoire.

continu, les raies sont positionnées à des instants multiples d'une valeur fixée alors que dans le cas du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires, les raies sont distribuées sur l'axe du temps selon un processus de Poisson. Pour chacun des modèles, il existe plusieurs types caractéristiques de profils et nous étudierons plus particulièrement les performances du système en fonction de trois d'entre eux, à savoir: uniforme, exponentiel et gaussien. Ces derniers sont couramment employés en radiocommunications mobiles et ils sont définis comme il suit:

Profil uniforme

$$p_n(\tau) = \frac{1}{D_{tot}} \quad 0 \leq \tau \leq D_{tot}$$

$$\tau_{rms} = \frac{D_{tot}}{2\sqrt{3}}$$

$D_{tot} \equiv$ Délai total du profil uniforme

(3.36)

Profil exponentiel

$$p_n(\tau) = \frac{1}{\tau_{rms}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{rms}}} \quad \tau \geq 0$$
(3.37)

Profil gaussien

$$p_n(\tau) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} \quad \tau \geq 0$$

$$\tau_{rms} = \sigma\sqrt{1 - 2/\pi}$$
(3.38)

La forme de ces profils pour $\tau_{rms} = 1$ est illustrée à la figure 3.13.

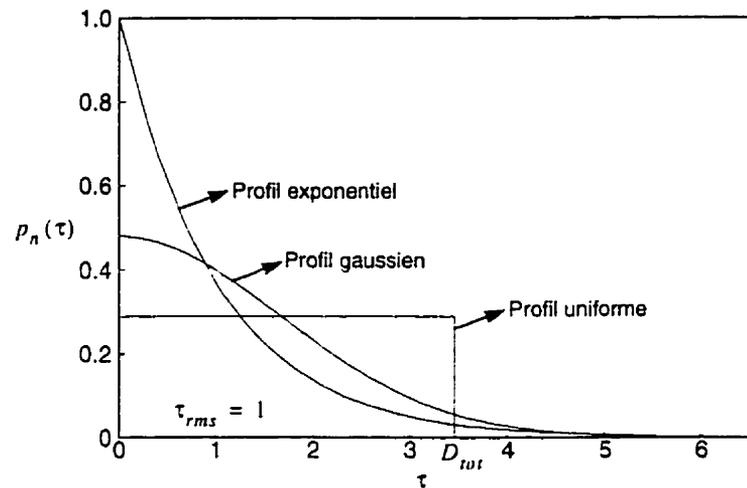


Figure 3.13 Forme des profils uniforme, exponentiel et gaussien pour $\tau_{rms} = 1$

Le détail des calculs relatifs à la détermination de la valeur de K pour les différents modèles à profils continu, à arrivées discrètes à intervalles aléatoires et à arrivées par salves en fonction des diverses formes de profils considérés est donné à l'annexe E. Notons que dans le modèle par salves de Saleh et Valenzuela (1987), l'enveloppe du profil est de forme uniquement exponentielle. Rien du point de vue théorique ne semble empêcher l'utilisation d'autres formes de profil mais les résultats expérimentaux de Saleh et Valenzuela semblent privilégier ce dernier. Pour cette raison, nous avons décidé de limiter nos analyses pour ce modèle au profil de forme exponentielle.

3.3 Expression de la capacité

La capacité que nous considérons ici est la capacité de Shannon telle que définie en "Théorie de l'Information" et que nous avons étudiée dans le cadre général du canal multivarié gaussien considéré au chapitre 2.4. Le cas du canal radiomobile est cependant un peu différent puisque ses caractéristiques varient dans le temps. En utilisant une approche quasi-statique, il est toutefois possible d'en évaluer la capacité pour une réalisation particulière. En répétant ce calcul pour un grand nombre de réalisations du canal, un relevé statistique de la distribution de la capacité devient alors possible. Dans ce

contexte il est relativement facile de spécialiser les équations du chapitre 2.4 au cas du canal radiomobile. La capacité du canal multivariable gaussien est donnée dans le cas général par (2.31), (2.32) et (2.33) où $\lambda_n(z)$ sont les N valeurs propres de la matrice¹

$$|\tilde{N}(f)^{-1/2} \tilde{C}(f)|^2 \quad (3.39)$$

$\tilde{C}(f)$ étant la matrice de canal et $\tilde{N}(f)$ une matrice diagonale dont les éléments non nuls correspondent aux spectres des M sources de bruit gaussien. Dans le cas du canal radiomobile, $\tilde{C}(f)$ est définie par (3.31) et nous supposons que les bruits sont indépendants, gaussiens et blancs de densité spectrale bilatérale N_0 . Dans ce cas, la matrice diagonale des spectres de bruit $\tilde{N}(f)$ peut s'écrire

$$\tilde{N}(f) = N_0 \mathbf{I} \quad (3.40)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité. Les résultats seront exprimés en fonction du paramètre ρ représentant le rapport signal sur bruit moyen par mobile mesuré à la sortie des antennes. Sa valeur s'obtient en divisant le rapport signal sur bruit total ρ_{tot} par le nombre de mobiles N (i.e. $\rho = \rho_{tot}/N$) où ρ_{tot} est définie comme le rapport entre l'espérance \bar{P} (calculée par rapport aux paramètres aléatoires du canal variable dans le temps) de la puissance moyenne du signal utile reçu par une des antennes de la base et la puissance du bruit dans la bande de Nyquist $W = 1/T$ Hz (correspondant à $\pm 1/(2T)$ en bande de base), i.e.

$$\rho_{tot} = \frac{\bar{P}}{N_0 W} \quad (3.41)$$

Le détail des calculs relatifs à la détermination de ρ et ρ_{tot} est donné à l'annexe D. On obtient.

$$\rho = \frac{\sigma_a^2}{N_0} \quad (3.42)$$

1. Mentionnons que nous utiliserons par la suite la fréquence normalisée $z = fT$, où T est la période de signalisation ($1/T$ la bande de Nyquist).

où σ_a^2 est la variance des données d'entrée (voir (2.15)). Remarquons que le rapport signal sur bruit défini de cette façon peut également s'interpréter comme le rapport E_s/N_0 où E_s est l'énergie moyenne d'un symbole (l'énergie moyenne du signal dans un intervalle de temps T). En isolant N_0 dans (3.42) et en substituant ensuite l'expression obtenue dans (3.40), on obtient

$$\tilde{N}(f) = \frac{\sigma_a^2}{\rho} \mathbf{I} \quad (3.43)$$

qu'il suffit de substituer dans (3.39), (2.31), (2.32) et (2.33) pour obtenir la dépendance désirée de la capacité relativement à la variable ρ . En utilisant finalement la relation (2.18) (i.e. $S = N\sigma_a^2$), on obtient après simplifications l'expression suivante pour la capacité d'une réalisation particulière du canal radiomobile

$$C = \frac{1}{W_z} \sum_{z_n=1}^N \int_{Z_n} \log_2 \left(\frac{\lambda'_n(z)}{\lambda'} \right) dz \quad \text{bits/sec/Hz} \quad (3.44)$$

$$N\rho = \sum_{n=1}^N \int_{Z_n} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda'_n(z)} \right) dz \quad (3.45)$$

où λ' est un multiplicateur de Lagrange à déterminer (λ' est reliée à λ par la relation $\lambda' = \lambda\sigma_a^2/\rho$), $\lambda'_n(z)$, $n = 1 \dots N$ sont les N valeurs propres de la matrice $|\bar{C}(f)|^2$, N est le nombre d'entrées, ρ est le rapport signal sur bruit moyen par mobile, W_z est la largeur bande de fréquence (en unité de z) et Z_n , $n = 1 \dots N$ sont les intervalles d'intégration à l'intérieur de W_z et définis par

$$Z_n = \left\{ z \mid \frac{1}{\lambda'_n(z)} < \frac{1}{\lambda'} \right\} \quad n = 1 \dots N \quad (3.46)$$

3.4 Expression des bornes de performances

Les bornes de performance de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté sont exprimées par (2.70) dans le cas général du canal gaussien multivariable où l'EQMM est calculée au

moyen des équations (2.64) et (2.65) respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté, i.e.

$$BER < \frac{2(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[\frac{1 - EQMM_n / \sigma_a^2}{EQMM_n} \right]} \quad (3.47)$$

où

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega)]^{-1} \right]_{nn} d\omega \quad (3.48)$$

et

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \left[\left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left(\mathbf{I} + \sigma_a^2 \bar{\mathbf{R}}(\omega) \right) d\omega \right]^{-1} \right]_{nn} \quad (3.49)$$

respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté et où $\bar{\mathbf{R}}(\omega)$ est donné par

$$\bar{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_l \left| N^{-1/2} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \tilde{\mathbf{H}} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \right|^2 \quad (3.50)$$

Comme dans le cas de la capacité de la section précédente, nous utiliserons ici aussi une approche quasi-statique afin de calculer les bornes de performance pour les réalisations individuelles du canal radiomobile ce qui permettra éventuellement une étude statistique des performances. Pour spécialiser les équations donnant les bornes de performances et y introduire la notion de rapport signal sur bruit, nous procédons de façon similaire à la section précédente. En substituant (3.43) dans (3.50) et en simplifiant ensuite dans (3.48) et (3.49), on obtient que les bornes de performances sont données par (3.47) où l'EQMM est dévaluée comme

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[[\mathbf{I} + \rho \bar{\mathbf{R}}'(\omega)]^{-1} \right]_{nn} d\omega \quad (3.51)$$

et

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \left[\left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (\mathbf{I} + \rho \bar{\mathbf{R}}'(\omega)) d\omega \right]^{-1} \right]_{nn} \quad (3.52)$$

respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté et où

$$\bar{\mathbf{R}}'(\omega) = \frac{1}{T} \sum_l \left| \bar{\mathbf{H}}\left(\omega - \frac{2\pi l}{T}\right) \right|^2 \quad (3.53)$$

$\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ étant définie comme le produit de la matrice de canal $\bar{\mathbf{C}}(f)$ et du filtre de mise en forme $\bar{g}(f)$ (voir la figure 2.3). Dans le cas du canal radiomobile, $\bar{\mathbf{C}}(f)$ est donnée par (3.31) alors que la forme particulière de $\bar{g}(f)$ sera introduite à la section 3.5.2.

3.5 Présentation des paramètres de simulation

Pour déterminer le taux de coupure à 1% $R_{0,01}$ ainsi que la probabilité d'erreur sur l'ensemble des réalisations du canal, nous aurons recours à une méthode de Monte-Carlo (i.e. nous allons générer un grand nombre de réalisations du canal et évaluer les performances à partir de ces réalisations). À cet effet, nous présentons tout d'abord la définition du taux de coupure et ensuite les différents paramètres nécessaires à la caractérisation des réalisations du canal.

3.5.1 Caractérisation du taux de coupure

La mesure statistique par laquelle sont exprimée la majorité de nos résultats de simulation est le taux de coupure à 1% $R_{0,01}$ qui est défini comme le taux de transmission admissible et tel que seulement 1% des canaux ne pourront supporter ce taux. Autrement dit, ceci signifie que pour une réalisation particulière de canal prise au hasard, 1% du temps le canal ne pourra supporter une telle valeur du taux de transmission (i.e. le taux sera garanti 99% du temps). Notons que dans les deux cas correspondant à l'égaliseur linéaire et au filtre adapté, une valeur maximum de BER (e.g. 10^{-3}) doit être fixée pour la détermination du taux de transmission. Dans le cas de la capacité, la valeur du taux d'erreur n'intervient pas puisque la capacité correspond au taux de transmission maximal

que supporte le canal avec une probabilité d'erreur aussi faible que désirée (qui peut être obtenue par codage). Ceci ne veut pas dire qu'on ne puisse pas transmettre plus rapidement sur le canal mais plutôt que si on le fait, alors le taux d'erreur ne pourra avoir une valeur aussi faible que désirée puisque bornée inférieurement par une valeur non nulle. C'est pour cette raison que dans nos résultats, il pourra arriver que les valeurs du taux de transmission de l'égaliseur linéaire ou du filtre adapté soient supérieures à la valeur de la capacité, indiquant qu'il est possible (car nous utilisons des bornes et non des valeurs exactes) que le codage ne puisse faire tendre cette probabilité vers zéro. Notons que les propriétés de la "capacité" ne s'applique qu'aux réalisations particulières des canaux et de ce fait doivent s'interpréter de façon plus circonspecte lorsqu'étendues au taux de coupure. Mathématiquement le taux de coupure à 1%, $R_{0.01}$, est défini comme

$$R_{0.01} = \text{valeur de } r \text{ telle que } (F_R(r) = 0.01) \quad (3.54)$$

où $F_R(r)$ est la distribution de probabilité cumulative du taux de transmission R pour l'égaliseur linéaire, le filtre adapté ou la capacité (dans le cas de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté, le taux d'erreur est fixé à $BER = 10^{-3}$). Afin de s'assurer d'une certaine fiabilité en ce qui a trait à la valeur des résultats obtenus par les différentes simulations, nous présentons à l'annexe F un estimé statistique de la précision sur $R_{0.01}$ de façon à garantir qu'un nombre adéquat de réalisations à été utilisé pour assurer la précision désirée.

3.5.2 Forme du filtre de mise en forme

Dans l'étude des performances de l'égaliseur, nous utiliserons comme fonction de mise en forme $\tilde{g}(f)$ (voir la figure 2.3) une extension pour $\alpha > 1$ de la racine carrée d'une impulsion de Nyquist (Bic, Duponteil et Imbeaux, 1991; Petersen et Falconer, 1994).

$$\tilde{g}'(\omega, \alpha) = \begin{cases} \tilde{p}(\omega, \alpha), & \alpha \leq 1 \\ \tilde{p}\left(\frac{\omega}{(1+\alpha)/2}, 1\right) \\ \frac{\quad}{\sqrt{(1+\alpha)/2}}, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

où

$$\bar{p}(\omega, \alpha) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{T}(1 - \alpha) \\ \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \left[\frac{T}{2\alpha} \left(\frac{\pi}{T} - |\omega| \right) \right] \right]} & \frac{\pi}{T}(1 - \alpha) \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T}(1 + \alpha) \\ 0 & \frac{\pi}{T}(1 + \alpha) \leq |\omega| \end{cases} \quad (3.56)$$

Cette impulsion répond au critère d'énergie unitaire et sa largeur de bande est donnée par $W_f = (1 + \alpha)/T$ Hz. Le paramètre α est le facteur d'expansion de largeur de bande et représente la fraction de la bande de fréquence qui excède la bande de Nyquist dont la valeur nominale est $W_f = 1/T$. Notons qu'en utilisant cette impulsion, nous supposons la présence d'un filtre identique au récepteur afin que la réponse combinée des deux filtres soit une impulsion de Nyquist (sans la présence de l'opérateur de racine carrée dans (3.56)). Le spectre correspondant à (3.56) est représenté à la figure 3.14 pour différentes valeurs de α . Rappelons que ce spectre obéit au premier critère de Nyquist qui assure que des impulsions individuelles transmises à chaque T secondes n'interféreront pas entre elles.

Dans ce travail, nous utiliserons principalement la valeur $\alpha = 0.35$, ce qui correspond à celle du standard américain pour l'AMRT (TIA/EIA interim standard IS-54-B, 1992). La portée de nos résultats ne se limitera toutefois pas à ce standard puisque nous étudierons l'influence particulière de ce paramètre de façon séparée. La forme de l'impulsion correspondant à cette valeur de α est montrée à la figure 3.15. On remarquera que puisqu'il s'agit de la racine carrée de l'impulsion totale, l'impulsion ne coupe pas l'axe du temps exactement aux multiples de T . Par contre, par convolution de l'impulsion avec elle-même, on obtient une impulsion de forme très similaire mais coupant l'axe du temps exactement aux multiples de T , ce qui est le résultat désiré afin de supprimer le plus possible l'interférence entre les différents symboles.

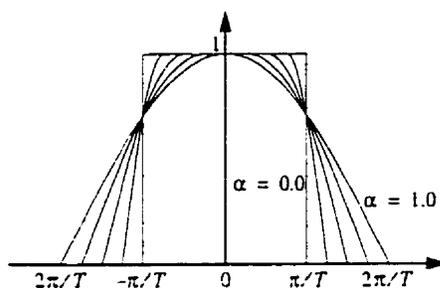
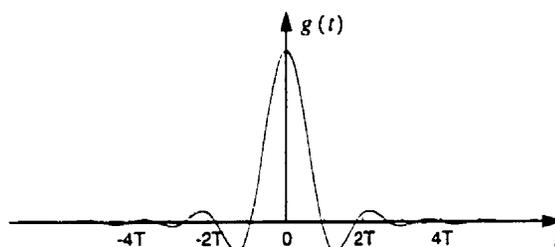


Figure 3.14 Spectre de l'impulsion élémentaire

Figure 3.15 Forme de l'impulsion élémentaire, facteur d'expansion de bande $\alpha = 0.35$

Notons que la séparation en deux parties de la mise en forme des impulsions, une à la transmission et une à la réception, rend le système optimal (au sens de la minimisation de la probabilité d'erreur) lorsque le canal n'est perturbé que par du bruit blanc gaussien additif puisqu'elle correspond à la réception par filtre adapté ("matched filter") de l'impulsion transmise. Par analogie nous avons supposé que la mise en forme à l'émission était identique. Évidemment l'égaliseur tient compte de cette mise en forme préalable et l'ajout du filtre de mise en forme à la réception n'est pas nécessaire.

3.5.3 Discussion sur la simulation du modèle à profil continu

Afin de simuler le modèle à profil continu de façon adéquate, on doit utiliser un nombre suffisant de raies par unité de valeur efficace du retard. À la section traitant des résultats, nous démontrerons que pour les cas qui nous intéressent, un minimum de deux raies par unité de valeur efficace du retard est suffisant pour assurer une approximation adéquate du

modèle à profil continu. Partant de cette hypothèse, nous allons maintenant déterminer le nombre de raies nécessaire à la simulation des différentes formes de profil. Pour s'assurer d'un minimum de deux raies par unité de retard efficace, on doit avoir

$$\frac{\tau_{rms}}{\tau} \geq 2 \quad (3.57)$$

en utilisant (E.1), on obtient

$$R \geq 2 \frac{D_{tot}}{\tau_{rms}} \quad (3.58)$$

Pour le profil uniforme de (3.36), cette équation devient

$$\begin{aligned} R &\geq 4\sqrt{3} = 6.93 \\ R &\geq 7 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dans nos simulations, nous avons choisit $R = 10$. Dans ce cas, le nombre de raies par unité de retard efficace λ_c est donné par

$$\lambda_c = \frac{\tau_{rms}}{\tau} = \frac{D_{tot}/(2\sqrt{3})}{D_{tot}/R} = \frac{10}{2\sqrt{3}} = 2.88 \text{ raies par unité efficace du retard} \quad (3.60)$$

Afin d'assurer une certaine cohésion entre les résultats obtenus à l'aide des différents profils, on choisira le nombre de raies pour les profils exponentiel et gaussien de façon à avoir également 2.88 raies par unité de valeur efficace du retard. Ainsi, on choisira le délai entre les raies pour ces deux profils de façon à ce que l'espacement entre les raies soit le même

$$\tau = \frac{\tau_{rms}}{2.88} \quad (3.61)$$

Le nombre de raies nécessaire dépend alors de D_{tot} selon la relation (E.1). Trois exemples de profils continus simulés à l'aide du délai donné par (3.61) et dont la valeur efficace du retard est $\tau_{rms} = 1$ sont montrés à la figure 3.16.

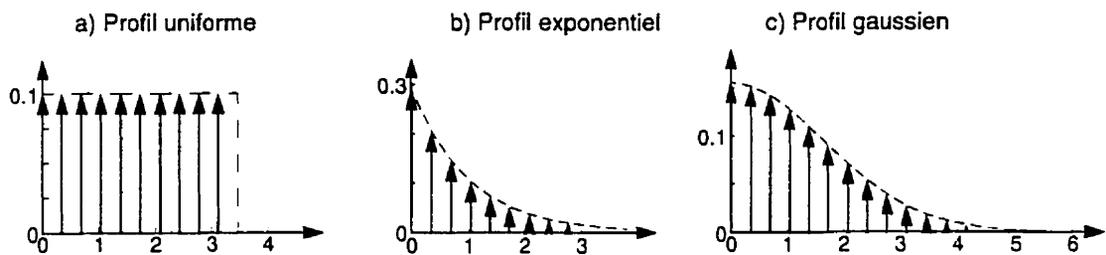


Figure 3.16 Approximation des profils continus uniforme, exponentiel et gaussien pour $\tau_{rms} = 1$

La valeur de D_{tot} pour les profils exponentiel et gaussien dépend de la précision désirée. Par exemple, si on utilise $R = 20$ et 2.88 raies par unité de retard efficace, la partie du profil négligée compte pour seulement environ 0.1% de l'énergie totale du profil exponentiel et environ 0.004% de l'énergie totale du profil gaussien.

3.5.4 Modèle considérant la présence d'une liaison directe mobiles-base

Le type de canal que nous avons utilisé jusqu'à maintenant considère un modèle de réception diffus qui conduit à une distribution de Rayleigh pour la représentation des phénomènes d'évanouissements. Ce modèle suppose implicitement un mobile "encaissé" tel que la puissance reçue provienne de réflexions et de diffractions multiples et dont le trajet direct entre le mobile et la base est bloqué. Si le mobile n'est pas encaissé alors une onde directe forte parviendra à la base et les performances du système de communication seront modifiées. Un tel type de canal est usuellement appelé canal de Rice dans la littérature (Proakis, 1989; Parsons, 1992). C'est ce phénomène dont nous désirons tenir compte en ajoutant une raie d'amplitude constante D au temps $t = 0$ dans l'équation (3.31)

$$C_{mn}(t) = D^{(mn)} \delta(t) + \sum_{r=0}^{R^{(mn)}-1} \eta_r^{(mn)} e^{j\theta_r^{(mn)}} \delta(t - \tau_r^{(mn)}) \quad (3.62)$$

Une illustration de la présence d'une liaison directe en plus d'un profil uniforme est montrée à la figure 3.17. Remarquons que la vue directe représente en général le trajet le

plus court entre le mobile et la base. C'est pour cette raison que cette raie est reçue la première par la base, avant les raies indirectes. Notons aussi que la valeur des délais τ_r doit maintenant tenir compte de la présence de la raie directe. En effet, il faut maintenant tenir compte du délai τ_0 entre la raie directe et la première raie indirecte (le début du profil). Auparavant, la première raie indirecte se produisait par convention à $\tau_0 = 0$.

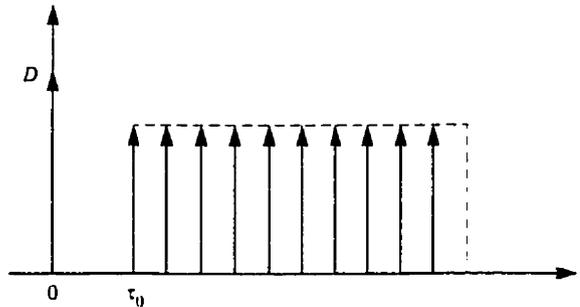


Figure 3.17 Profil de puissance multivoies uniforme avec raie directe

Ici, nous négligerons aux fins de simplification ce retard initial et supposerons que la première raie indirecte arrive simultanément avec la raie directe à $\tau_0 = 0$. Ceci est une hypothèse raisonnable puisqu'il est improbable que les premières raies indirectes arrivent avec un retard de beaucoup supérieur à la raie directe puisque le début du profil multivoies correspond au temps minimum de propagation. La contrainte de normalisation à l'unité (3.32) de l'énergie devient dans ce cas

$$D^2 + E \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^2 \right] = 1 \quad (3.63)$$

Puisque l'énergie ne peut être négative, le paramètre D^2 sera compris dans l'intervalle $[0,1]$ et peut donc s'interpréter comme la fraction d'énergie reçue en direct. La fraction d'énergie indirecte (i.e. qui représente exclusivement le profil) s'écrit

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^2 \right] = 1 - D^2 \quad (3.64)$$

Lorsque la raie directe était absente, nous avons

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^2 \right] = 1 \quad (3.65)$$

Pour tenir compte de l'addition de l'onde directe au profil multivoies, il suffit donc de multiplier simplement le second moment des variables de Rayleigh représentant les raies indirectes par un facteur $1 - D^2$ et d'ajouter une raie d'amplitude D , $0 \leq D \leq 1$ à $\tau = 0$.

3.6 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section un échantillonnage des résultats de simulations effectuées en fonction des différents paramètres du système de communication considéré. Le lecteur trouvera à l'annexe I de nombreux résultats auxiliaires qui considèrent les différents types de modèles de canal présentés aux sections précédentes. Nous n'utiliserons ici que le modèle à profil continu uniforme et les résultats numériques seront exprimés sous la forme de taux de coupure à 1% dont la précision est d'environ 1%, 95% du temps (à ce propos, voir l'annexe F). Le profil uniforme est simulé à l'aide de $R = 10$ raies à intervalles fixes dont le délai est donné par

$$\begin{aligned} \tau_r &= r\tau \quad r = 0 \dots 9 \\ \tau &= \frac{2\sqrt{3}}{R} (\tau_{RMS}/T) \end{aligned} \quad (3.66)$$

où τ_{RMS}/T est la valeur efficace du retard normalisé du profil uniforme. Tel que discuté à la section 3.5.2, le spectre du filtre de mise en forme correspondra à l'impulsion de Nyquist de facteur d'expansion de bande α .

La figure 3.18 donne la valeur de la capacité et des taux de transmissions de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté en fonction de la valeur efficace du retard normalisé pour un système muni de 3 antennes réceptrices où le rapport signal sur bruit est $\rho = 10\text{dB}$, le taux d'erreur sur les bits est $BER = 10^{-3}$ et le facteur d'expansion de bande est $\alpha = 0.35$. Les courbes sont présentées pour $N = 1$ et $N = 3$ mobiles. Tel qu'il est possible de le constater, la différence entre les taux de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté augmente

lorsque la valeur efficace du retard normalisé τ_{RMS}/T croit et se stabilise asymptotiquement pour de grandes valeurs de τ_{RMS}/T . Elle devient également plus importante lorsque le nombre de mobiles passe de 1 à 3. Ceci tend à confirmer le fait que l'égaliseur linéaire est incapable de tirer avantage de la diversité temporelle intrinsèque tel que le démontre les courbes correspondantes du filtre adapté. Lorsque le nombre de mobiles augmente, la dégradation des performances de l'égaliseur linéaire vis à vis de celle du filtre adapté devient plus évidente à cause des interférences supplémentaires dans ce cas.

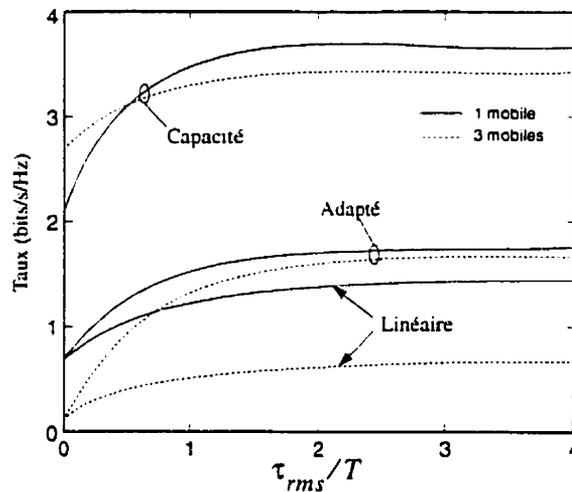


Figure 3.18 Taux par mobile en fonction de la valeur efficace du retard normalisé pour 3 antennes réceptrices

On remarque également sur cette figure que les courbes de la capacité pour un mobile et trois mobiles se croisent aux environs de $\tau_{RMS}/T = 0.5$. Évidemment ces courbes représentent le taux moyen par mobile et aucun croisement ne se produit lorsqu'on utilise plutôt le taux total (i.e. le taux moyen multiplié par le nombre de mobiles). Le croisement des courbes fait toutefois ressortir que la diversité temporelle (i.e. lorsque τ_{RMS}/T augmente) n'engendre pas des gains aussi importants pour le système à trois mobiles que pour celui n'en ayant qu'un. En effet, pour une diversité temporelle nulle (i.e. $\tau_{RMS}/T = 0$), le taux moyen par mobile est plus élevé pour le système à 3 mobiles, ce qui suggère que la diversité spatiale créée par la présence de plusieurs mobiles (le nombre de

liens mobile-base augmente, d'où une diversité spatiale accrue) augmente la valeur de la capacité. Lorsque la diversité temporelle (i.e. τ_{RMS}/T) augmente cependant, la capacité du système à un mobile augmente plus rapidement que celle correspondant aux mobiles de l'autre système. Il semble donc que l'augmentation du nombre de mobiles, et donc de la diversité spatiale, fasse en sorte de diminuer l'efficacité de la diversité temporelle dans ce cas.

La figure 3.19 illustre l'influence du taux maximum d'erreur BER sur les performances du modèle précédent lorsque $\tau_{RMS}/T = 1$. On constate que les courbes restent sensiblement parallèles entre elles, ce qui fait ressortir l'insensibilité des performances relatives des égaliseurs aux variations de BER ; la différence de performance entre l'égaliseur linéaire et le filtre adapté demeurant sensiblement égale lorsque BER varie. On remarque que la capacité est évidemment constante en fonction de BER puisqu'elle ne dépend en aucune manière de ce paramètre.

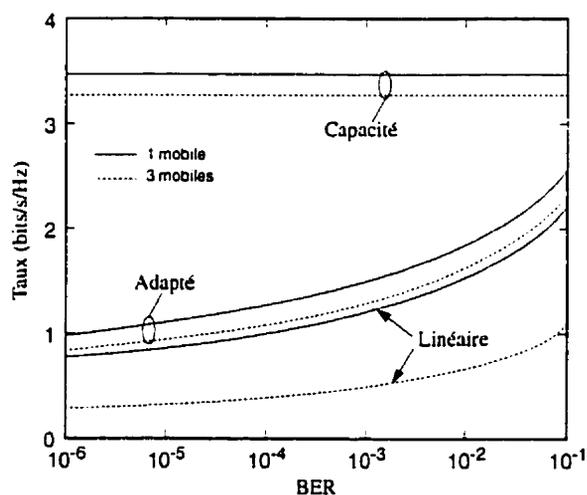


Figure 3.19 Taux par mobile en fonction du taux d'erreur sur les bits pour 3 antennes réceptrices

À la figure 3.20, nous faisons varier la valeur du rapport signal sur bruit SNR . Dans ce cas, lorsqu'il n'y a qu'un mobile, les taux de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté restent parallèles lorsque SNR varie. Cependant, lorsque le nombre de mobiles augmente à 3, il devient évident que le taux de l'égaliseur linéaire n'augmente plus aussi rapidement que

celui du filtre adapté pour des valeurs croissantes de SNR . Il apparaît donc que les interférences supplémentaires causées par l'ajout de mobiles empêchent l'égaliseur linéaire de tirer avantage du gain potentiel engendré par l'augmentation du rapport SNR et donc par la diminution du bruit.

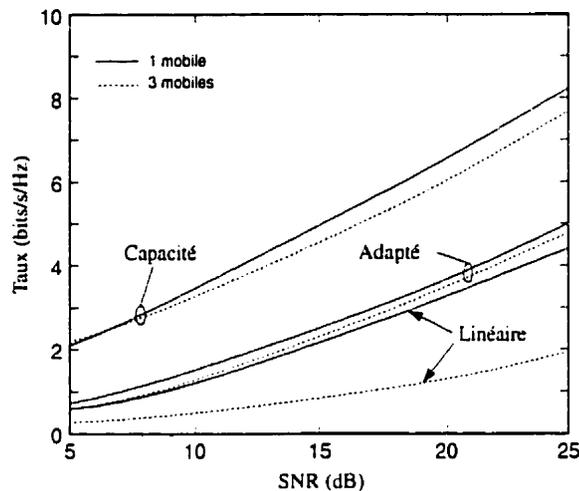


Figure 3.20 Taux par mobile en fonction du rapport signal sur bruit pour 3 antennes réceptrices

Les figures 3.21 et 3.22 illustrent l'influence du facteur d'expansion de bande α sur les bornes d'égalisation et la capacité pour le modèle précédent lorsque $\tau_{RMS} = 1$, $BER = 10^{-3}$ et $SNR = 40\text{dB}$. Pour la figure 3.21, le nombre de mobiles est fixé à 3 tandis que le nombre d'antennes réceptrices varie de 1 à 3. On constate qu'une augmentation de la largeur de bande améliore dans certaines limites les performances de l'égaliseur linéaire. Un comportement similaire est observé à la figure 3.22 lorsque seulement 1 antenne est disponible à la réception des signaux en provenance des mobiles dont le nombre varie de 1 à 3. Il est important de souligner que dans ce cas nous utilisons le taux total (nous définissons le taux total comme le taux moyen par mobile multiplié par le nombre de mobiles N) de façon à démontrer que toute augmentation approximativement unitaire du facteur d'expansion de bande permet d'éliminer les interférences produites par la présence d'un mobile supplémentaire dans le cas de l'égaliseur linéaire. Ces résultats

sont en accord avec ceux obtenus par Petersen et Falconer (1994) dans le cas de canaux sans évanouissement.

On remarquera aux figures 3.21 et 3.22 que la valeur de la capacité diminue en fonction d'un élargissement de la largeur de bande. Intuitivement on pourrait s'attendre à un comportement inverse mais il faut cependant se souvenir que le rapport $\rho = \sigma_a^2/N_0$ en (3.42) demeure constant. Dans ce cas, la puissance (constante) du signal est distribuée dans une largeur de bande de plus en plus grande alors que la densité spectrale du bruit reste inchangée. Il en résulte que la capacité exprimée en bits/sec augmente vers une valeur asymptotique (Gallager, 1968) alors que si on l'exprime plutôt en bits/sec/Hz, elle diminue. Autrement dit, la transmission des données devient de moins en moins efficace avec l'élargissement de la largeur de bande. Une situation plus intéressante à étudier consiste à comparer la capacité totale en bits/sec pour deux systèmes utilisant une largeur de bande $W_z = 2$, une antenne réceptrice et deux mobiles. Dans un premier cas les deux mobiles utilisent une largeur de bande individuelle $W_{z1} = W_{z2} = 1$ ($W_z = W_{z1} + W_{z2} = 2$) alors que dans le second les deux mobiles partagent la même largeur de bande totale $W_z = 2$. À l'aide de la figure 3.22, on calcule que dans le premier cas (cas (a) sur la figure) la capacité totale pour les deux mobiles est de $C = 2 \cdot 10 = 20$ bits/sec (ici 2 est le nombre de mobiles) alors que dans le second (cas (b)) on obtient $C = 2 \cdot 13 = 26$ bits/sec (ici 2 est la largeur de bande de fréquence $W_z = 1 + \alpha$). Il semble donc que l'utilisation commune d'une bande de fréquence par plusieurs mobiles soit plus efficace que sa division en un nombre égal de bandes de fréquence plus étroites.

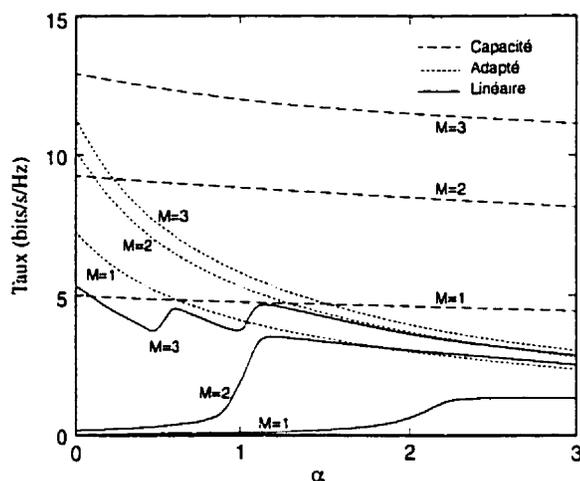


Figure 3.21 Taux par mobile en fonction du facteur d'expansion de bande pour trois mobiles, SNR=40dB

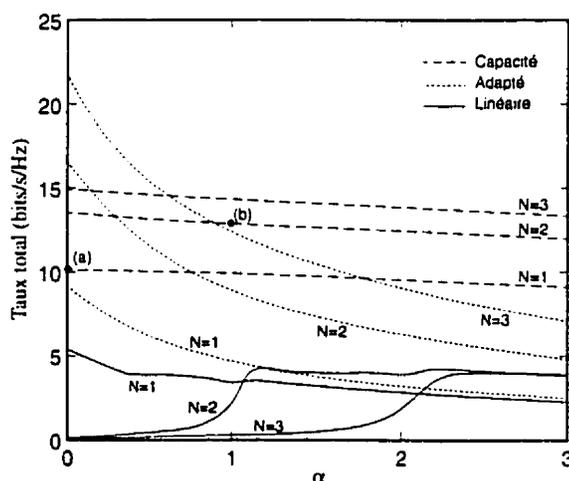


Figure 3.22 Taux total en fonction du facteur d'expansion de bande pour une antenne réceptrice, SNR=40dB

Finalement la figure 3.23 présente finalement de quelle façon la valeur des taux de coupure évolue en fonction du nombre d'antennes M et de mobiles N lorsque $\alpha = 0.35$, $BER = 10^{-3}$ et $SNR = 10\text{dB}$. On y voit que la valeur du taux de coupure de la capacité a tendance à augmenter premièrement en fonction du nombre d'antennes et ensuite en fonction du nombre de mobiles lorsque le retard efficace est faible. Par contre, lorsque le retard efficace devient plus important, la capacité augmente en fonction du nombre

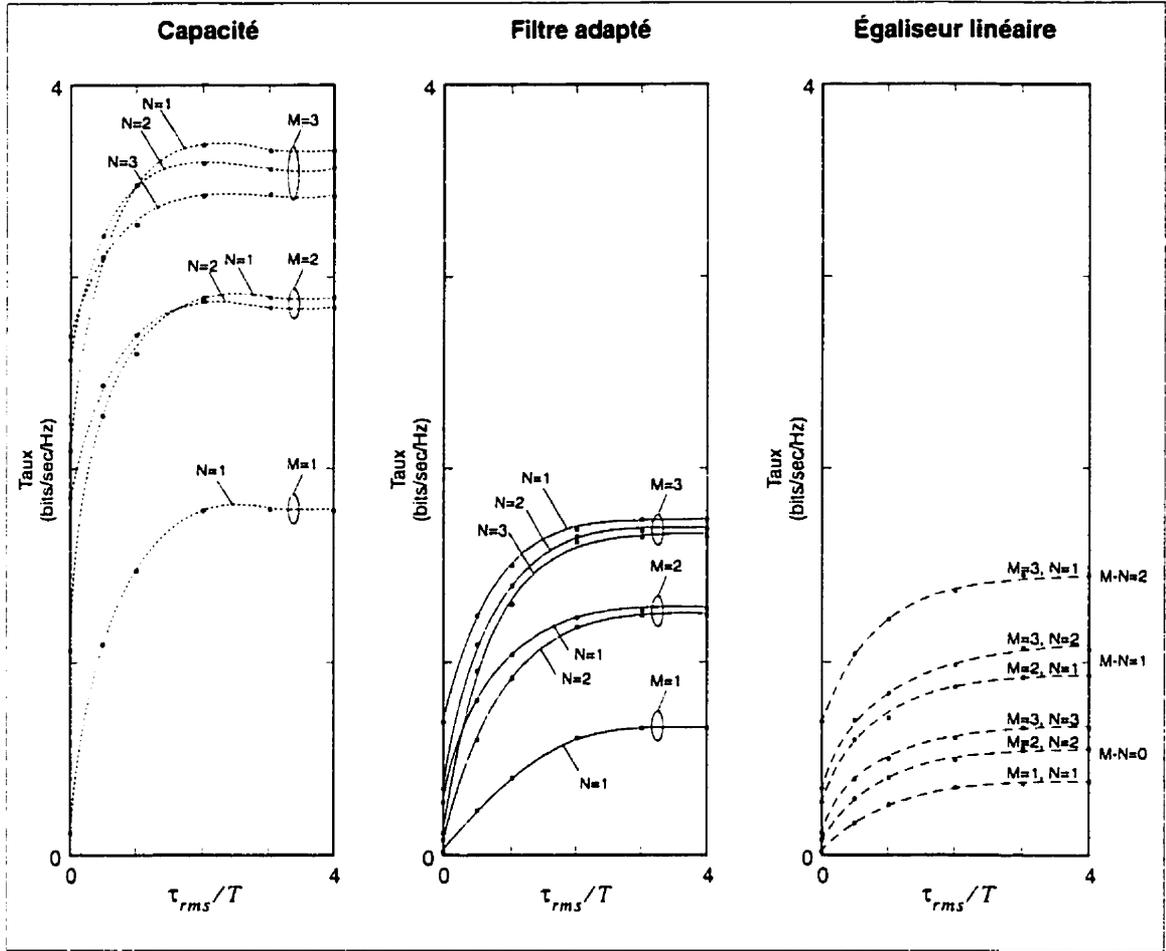


Figure 3.23 Taux de coupe vs. nombre d'antennes et de mobiles

d'antennes mais diminue lorsque le nombre de mobiles augmente. Ceci indique simplement que l'ajout d'un mobile supplémentaire fait en sorte d'augmenter la capacité totale¹ mais qu'il augmente également le brouillage (ce dernier étant plus important lorsque la valeur efficace du retard est grande) faisant en sorte de diminuer la capacité individuelle. Lorsque la valeur du retard efficace est faible, le brouillage supplémentaire

1. En effet, en supposant que la capacité totale diminue avec l'ajout d'un mobile, il suffirait de ne pas utiliser le nouveau mobile pour se retrouver dans le cas précédent et ainsi augmenter la capacité, ce qui contredit la définition même de la capacité comme étant la valeur maximale. Ce raisonnement s'applique évidemment à la valeur de la capacité pour une réalisation de canal et doit s'interpréter avec circonspection lorsqu'il est plutôt question du taux de coupeure.

n'est pas aussi important que l'augmentation de capacité engendrée par les nouvelles liaisons mobiles-antennes, ce qui se traduit globalement par une augmentation de la capacité en fonction du nombre de mobiles.

Pour ce qui est du taux de coupure du filtrage adapté, on constate qu'il se comporte de façon similaire à la capacité pour de grandes valeurs du retard efficace, i.e. une augmentation en fonction du nombre d'antennes mais une diminution en fonction du nombre de mobiles. Ceci tend à démontrer que la valeur du taux de coupure du filtre adapté suit assez bien l'évolution de la celle de la capacité. Lorsque la valeur efficace du retard est par contre faible, le taux de coupure augmente surtout en fonction de la différence entre le nombre d'antennes et de mobiles ($M - N$). Le même comportement se rencontre également en égalisation linéaire mais cette fois pour toutes les valeurs du retard efficace. On remarque aussi qu'en fixant M , le taux de coupure devient alors proportionnel à $-N$, ce qui explique la baisse importante du taux de coupure lorsqu'on augmente le nombre de mobiles en égalisation linéaire.

Ce comportement en fonction de $M - N$ a déjà été remarqué par Winters, Salz et Gitlin (1992) pour un modèle de canal dispersif plus simple et démontre que la diversité d'espace à combinaison optimale des M signaux des antennes réussit à annuler l'effet de $M - 1$ brouilleurs, i.e. pour un système muni de $K + N$ antennes, la combinaison optimale réussit à annuler l'effet de $N - 1$ brouilleurs en plus de fournir une diversité d'espace équivalente de $K + 1$ pour tous.

3.7 Discussion du compromis entre diversités spatiale et temporelle

Nous nous penchons dans cette section sur la valeur de la capacité de systèmes dont la caractéristique principale est d'être munis d'une diversité spatiale ou temporelle double (soit $M = 2$, $N = 2$ ou $R = 2$). Nous débutons en démontrant qu'un canal muni de deux antennes réceptrices dont la réponse impulsionnelle est formée d'une seule raie (il n'y a toujours qu'un seul transmetteur) peut être transformé en un canal muni de deux raies et

une seule antenne réceptrice, l'unique opération affectant la capacité lors de la transformation étant l'ajout d'un additionneur. Dans cette discussion, nous ne tenons pas compte des déphasages θ associés aux raies ni du retard relatif τ entre elles. En effet, nous démontrerons dans ce qui suit que la capacité du canal muni de deux antennes est indépendante de ces paramètres alors que nous démontrons à l'annexe H que la capacité du canal muni de deux raies devient indépendante de ces paramètres lorsque $\tau \rightarrow \infty$, ce que nous supposons pour la discussion.

La figure 3.24-a illustre le modèle d'un canal de communication radiomobile muni de deux antennes réceptrices en présence d'un mobile et de liaisons radioélectriques formées d'une seule raie (par liaison) et affectées par des bruit blancs, gaussiens et de variance σ_n^2 . Les quantités A_1 , A_2 , θ_1 et θ_2 sont dans ce cas des variables aléatoires dont la distribution dépend du modèle de canal considéré. La capacité entre l'entrée et la sortie du canal est dénotée C_1 et se calcule à l'aide des équations (3.44) à (3.46). Dans ce cas, la matrice de canal s'écrit comme

$$\tilde{\mathbf{H}}_{M2}(\omega) = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\theta_1} \\ A_2 e^{j\theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

et la valeur propre correspondante est (voir la section 3.3)

$$\lambda_{M2} = |\tilde{\mathbf{H}}_{M2}(\omega)|^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad (3.68)$$

Comme cette valeur propre est indépendante des déphasages θ_1 et θ_2 et que le paramètre τ n'intervient pas, la capacité du canal muni de deux antennes est donc indépendante de ces paramètres, ce que nous avons déjà suggéré au début de la section.

Effectuons à présent une série de transformations sur ce canal afin d'en permettre le rapprochement avec le canal muni de deux antennes. Nous ajoutons en premier lieu à la figure 3.24-b un délai τ (i.e. $\delta(t - \tau)$) à la deuxième branche du canal. Comme ce délai correspond à une opération mathématiquement réversible, la capacité du canal y est

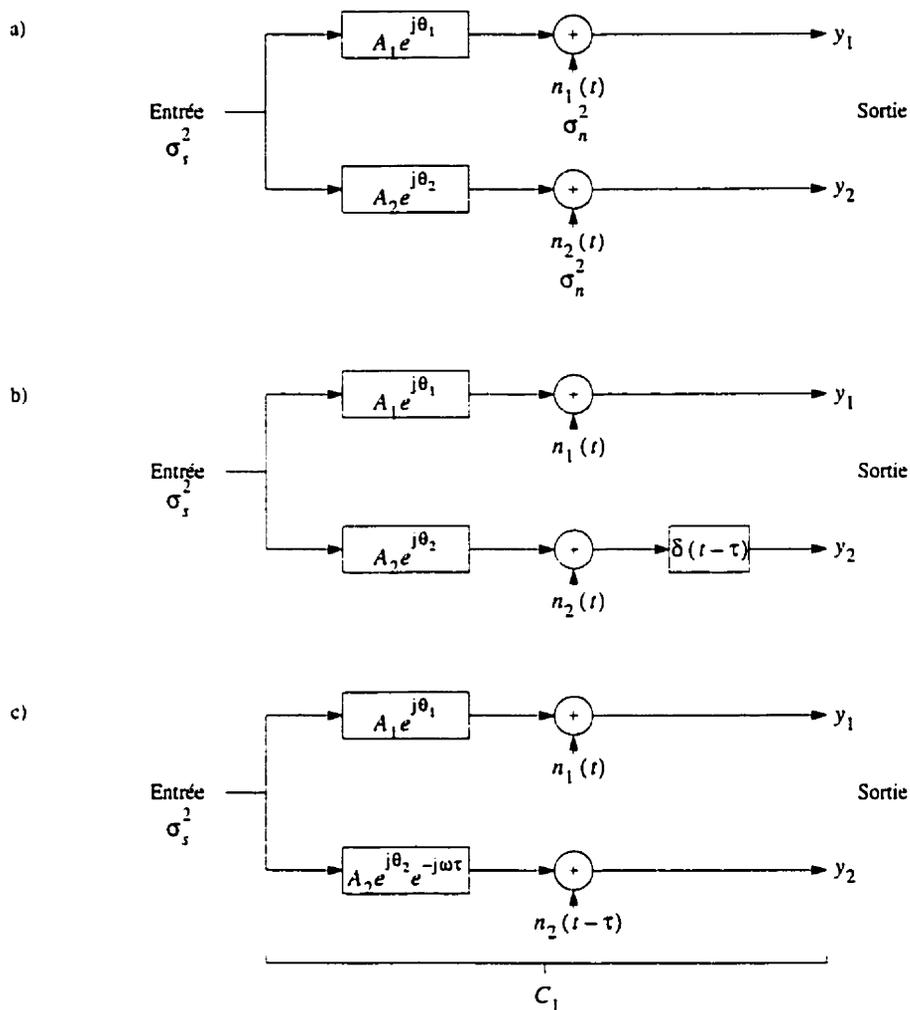


Figure 3.24 Transformations du canal muni de 2 antennes

insensible (Gallager, 1968) et sa valeur demeure donc C_1 . La seconde transformation est illustrée à la figure 3.24-c et il est facile de vérifier que ce canal est mathématiquement équivalent à celui de la figure 3.24-b. La valeur de la capacité y est donc également de C_1 . Relions à présent la sortie des deux antennes, tel que montré à la figure 3.25-a. Comme cette opération est de façon générale non-réversible (Gallager, 1968), la capacité C_2 du nouveau canal sera moindre, i.e. $C_2 \leq C_1$. Or, en effectuant quelques transformations réversibles sur ce canal, on obtient l'équivalent mathématique de la figure 3.25-b qui

représente le modèle d'un canal radiomobile muni d'une antenne, un mobile et deux raies, affecté par un bruit blanc gaussien de variance $2\sigma_n^2$ et dont la capacité est $C_2 \leq C_1$.

Évaluons à présent le rapport signal sur bruit moyen pour les canaux des figures 3.24-a et 3.25-c où nous supposons que $E[|A_1|^2] = E[|A_2|^2] = 1$. Dans le premier cas nous avons

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\sigma_s^2}{2\sigma_n^2} \quad (3.69)$$

alors que dans le cas de la figure 3.25-c on obtient

$$\bar{\rho}_2 = \frac{2\sigma_s^2}{2\sigma_n^2} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \quad (3.70)$$

C'est à dire que le rapport signal sur bruit moyen est le même dans les deux cas. Nous en concluons que pour un même rapport signal sur bruit, une réalisation du canal muni de deux antennes et une raie (figure 3.24) aura une capacité supérieure ou égale à une réalisation correspondante d'un canal muni d'une antenne et deux raies (figure 3.25). Il est de plus possible d'isoler la cause de cette différence puisque la seule opération ayant affecté cette variable lors des transformation successives est l'ajout d'un additionneur à la sortie du canal (voir les figures 3.24-c et 3.25-a).

Comme il est possible d'appliquer ce raisonnement à l'ensemble des réalisations du canal de la figure 3.24, il devient évident que la capacité du canal muni de deux raies sera toujours inférieure ou égale à celle du canal correspondant muni de deux antennes, lorsque le rapport signal sur bruit moyen est identique dans les deux cas. Comme à chacune des réalisations du canal muni de deux antennes correspond une réalisation du canal muni de deux raies dont la capacité est inférieure ou égale (et vice-versa), le taux de coupure associé au canal muni de deux raies sera aussi inférieur ou égal à celui du canal muni de deux antennes.

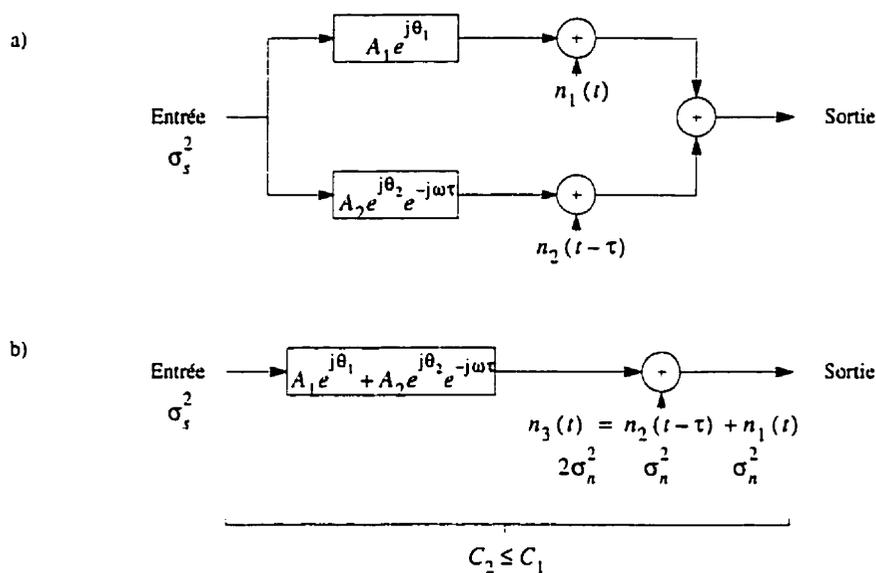


Figure 3.25 Transformations du canal muni de deux raies

Afin de compenser cette perte de capacité, il peut être tentant d'augmenter simplement le rapport signal sur bruit de ce dernier et espérer que toutes les réalisations aient dès lors une capacité identique à celle du canal muni de deux antennes. Commençons cependant par analyser quelques cas simples correspondant à des réalisations particulières des deux types de canaux.

1) $A_2 = 0$. Dans ce cas, la deuxième branche du canal de la figure 3.24-a peut être éliminée et on retrouve le cas d'un canal muni d'une antenne et une raie avec $\rho_1 = \sigma_s^2 / \sigma_n^2$. Dans le cas du canal de la figure 3.25-b, on retrouve également le cas d'un canal muni d'une antenne et une raie mais ici $\rho_2 = \sigma_s^2 / 2\sigma_n^2 = \rho_1 / 2$. La capacité des deux canaux sera donc identique si nous doublons le rapport signal sur bruit du canal muni de deux raies (ce qui correspond à une augmentation de 3dB). Ce raisonnement conduit également à une bonne approximation lorsque l'amplitude d'une des deux raies est beaucoup plus importante que l'autre.

2) $A_1 = A_2$ et A_1, A_2 sont très petits par rapport à ρ . On calcule de façon numérique que la capacité des deux canaux est pratiquement identique pour un même rapport signal sur

bruit. Si on applique cependant la correction de 3dB de l'exemple précédent au rapport signal sur bruit, la capacité du canal muni de deux antennes sera environ deux fois plus faible que celle du canal muni de deux raies (le comportement de la capacité étant pratiquement linéaire dans cette région).

3) $A_1 = A_2$ et A_1, A_2 sont très grands par rapport à ρ . On calcule de façon numérique que la capacité des deux canaux est pratiquement identique si le rapport signal sur bruit du canal muni de deux raies est de 6 dB supérieur à celui du canal muni de deux antennes. Si on ne fait cependant que doubler le rapport signal sur bruit, la capacité du canal muni de deux antennes sera légèrement supérieure à la capacité du canal muni de deux raies.

Il s'ensuit que si nous décidons de compenser les différences intrinsèques des deux types de canaux par une augmentation du rapport signal sur bruit de 3dB, l'effet se fera ressentir de façon différente selon les valeurs de A_1 , A_2 et ρ . La figure 3.26 illustre la

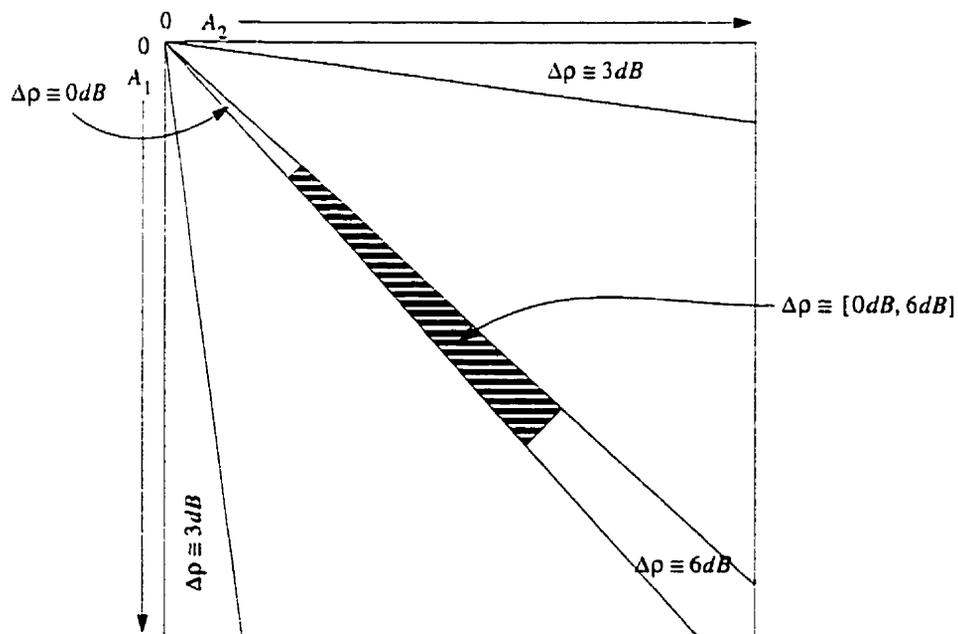


Figure 3.26 Compensation requise au rapport signal sur bruit pour obtenir une capacité identique pour les canaux munis de deux antennes ou de deux raies

compensation du rapport signal sur bruit requise à l'obtention de la même valeur de la

capacité pour les deux canaux, en fonction de l'amplitude de A_1 et A_2 . La partie hachurée de la figure est la zone où la compensation passe graduellement de 0dB à 6dB. Selon la valeur du rapport signal sur bruit moyen, cette région se déplacera vers l'infini (faible rapport signal sur bruit moyen) ou vers 0 (rapport signal sur bruit élevé). Il semble raisonnable de conclure que si la valeur du rapport signal sur bruit moyen est faible, la région se déplacera vers l'infini et la compensation moyenne devrait se situer entre 0dB et 3 dB (la région correspondant à une compensation de 6dB devenant extrêmement improbable). Au contraire, lorsque la valeur du rapport signal sur bruit moyen est élevée, la zone hachurée se déplacera vers 0 et la compensation de 6dB occupera tout l'espace. Dans ce cas, la compensation moyenne devrait se situer entre 3dB et 6dB. Notons que les zones intermédiaires pour lesquelles aucune compensation n'est indiquée sur la figure correspondent à des valeurs se situant entre 3 et 6dB.

Afin d'illustrer numériquement ces conclusions, la figure 3.27 donne la densité de probabilité de la capacité pour les canaux muni de deux antennes ou de deux raies pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit lorsqu'une compensation de 3dB est

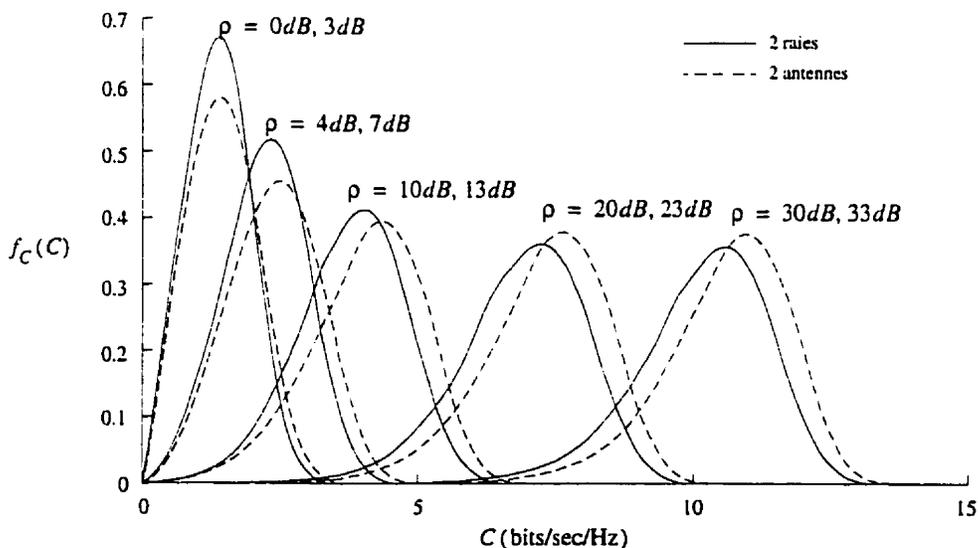


Figure 3.27 Densité de probabilité de la capacité des canaux munis de deux antennes ou de deux raies pour différentes valeur du rapport signal sur bruit ρ , avec compensation de 3dB

appliquée, i.e. le rapport signal sur bruit pour le canal muni de deux raies est de 3dB supérieur à celui du canal muni de deux antennes. On constate que pour de faibles valeurs du rapport signal sur bruit, les courbes pour les canaux munis de deux antennes ou deux raies sont relativement près les unes des autres. Pour de grandes valeurs du rapport signal sur bruit (e.g. 30dB) les courbes des deux types de canaux sont cependant décalées. On calcule que pour obtenir une bonne superposition des courbes il faudrait augmenter le rapport signal sur bruit du canal muni de deux raies à environ 34.5dB. Ceci correspond à une compensation totale de 4.5dB se situant bien dans l'intervalle de 3 à 6dB que nous avons trouvé précédemment.

La figure 3.28 illustre la densité de probabilité de la capacité pour des canaux munis de 1, 2, 5 ou 10 raies (la valeur du délai τ entre les raies est infinie) et une seule antenne ainsi que pour des canaux munis de 1, 2, 5 ou 10 antennes et une seule raie. Dans le cas du canal muni d'une antenne, on constate que lorsque le nombre de raies augmente, la densité de probabilité reste sensiblement centrée au même endroit (i.e. la moyenne varie très peu), alors que la variance diminue. L'ajout de raies supplémentaires n'augmente donc pas la capacité moyenne du canal. Dans le cas du canal muni d'une raie cependant, l'ajout

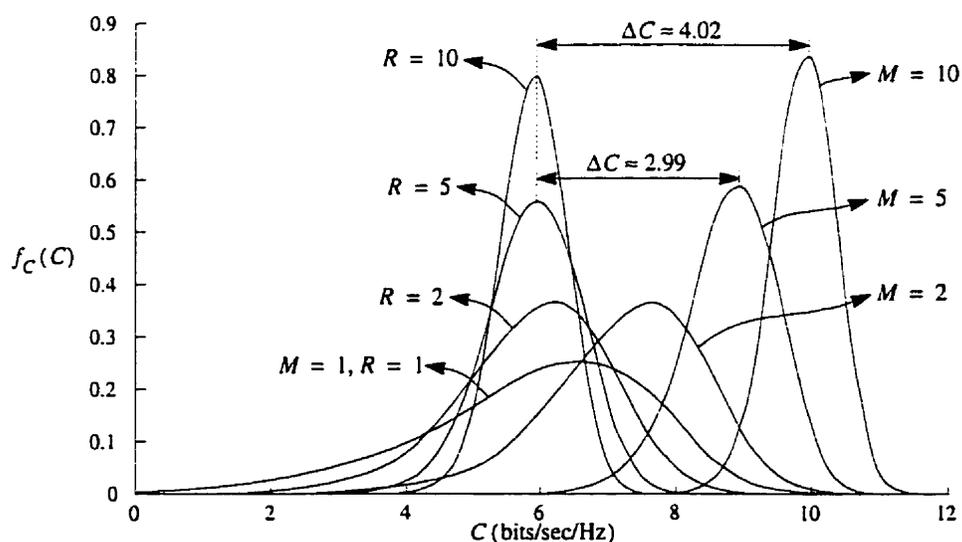


Figure 3.28 Densité de probabilité de la capacité des canaux munis de R raies ou M antennes, $\rho = 20\text{dB}$

d'antennes supplémentaires augmente la capacité moyenne, comme le montre la figure lorsque M passe de 1 à 10. On calcule que la capacité moyenne augmente d'environ 1 bit/sec/Hz à chaque fois que le nombre d'antennes double. Il apparaît donc que la diversité spatiale soit plus efficace que la diversité temporelle pour combattre les évanouissements.

Intuitivement on comprend que la présence de M antennes réceptrices dans le cas de la diversité spatiale permet de recevoir M signaux affectés de sources de bruit indépendantes. En prenant par exemple simplement la moyenne des signaux reçus, on obtient un signal moyen affecté d'un bruit dont la variance (et donc la puissance) est diminuée par un facteur M . Dans le cas de la diversité temporelle, les R signaux correspondants aux R raies ne sont disponibles au récepteur que sous la forme de leur somme additionnée d'une source unique de bruit. Il n'est donc pas possible de diminuer la variance du bruit en fonction de R dans ce cas. Autrement dit, le fait de n'avoir accès qu'à la somme des signaux affectée d'une source unique de bruit plutôt que sur une base individuelle avec des sources de bruit indépendantes fait perdre M degrés de liberté, ce qui se traduit par une capacité moindre. Pour compenser cette différence, il serait nécessaire d'accéder aux signaux correspondants aux diverses raies sur une base individuelle, ce qui n'est évidemment pas le cas.

3.7.1 Le cas du canal muni de deux mobiles, une antenne et une raie

Dans la section précédente, nous avons comparé les deux situations où nous avons soit une diversité temporelle double (le nombre de raies est $R = 2$ et $M = 1$, $N = 1$) soit une diversité spatiale double (le nombre d'antennes réceptrices est $M = 2$ et $R = 1$, $N = 1$). Il existe cependant une autre configuration menant à une diversité spatiale double et qui consiste à ajouter un mobile supplémentaire au niveau de la transmission (le nombre de mobiles est dans ce cas $N = 2$ et $R = 1$, $M = 1$). En considérant l'émetteur comme l'union des deux mobiles, on peut interpréter ce cas comme le réciproque de celui où nous avons deux antennes réceptrices et un mobile. Ici, les deux antennes sont simplement situées à l'émetteur plutôt qu'au récepteur. Procédons à l'évaluation comparative de la

capacité dans ces deux cas. Dans le cas du canal muni de deux antennes, la matrice de canal s'écrit (voir (3.31))

$$\tilde{\mathbf{H}}_{M2}(\omega) = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\theta_1} \\ A_2 e^{j\theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Alors que dans le cas du canal muni de deux mobiles, nous avons

$$\tilde{\mathbf{H}}_{N2}(\omega) = \begin{bmatrix} A_1 e^{j\theta_1} & A_2 e^{j\theta_2} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Les valeurs propres correspondantes de ces deux matrices de canal sont (voir la section 3.3)

$$\lambda_{M2} = |\tilde{\mathbf{H}}_{M2}(\omega)|^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad (3.73)$$

$$\lambda_{N2} = \text{VP} \left[|\tilde{\mathbf{H}}_{N2}(\omega)|^2 \right] = \{0, A_1^2 + A_2^2\} \quad (3.74)$$

Le canal muni de deux mobiles possède donc deux valeurs propres, l'une étant égale à celle du canal muni de deux antennes et l'autre étant nulle. Dans ce cas, la capacité peut se calculer à l'aide de (3.44) mais en utilisant seulement la valeur propre non-nulle et en fixant $N = 1$ (voir la section 2.4). Comme cette valeur propre du canal muni de deux mobiles est égale à celle du canal muni de deux antennes, la capacité sera identique dans les deux cas (à l'exception peut être d'une correction du rapport signal sur bruit moyen par mobile de 3dB). Du point de vue de la capacité, l'utilisation de deux antennes pour la transmission est donc équivalente à utiliser deux antennes réceptrices.

CHAPITRE IV

APPLICATION AU CANAL D'ENREGISTREMENT MAGNÉTIQUE

Dans le contexte de la transmission des données numériques, les ingénieurs s'intéressent surtout à concevoir des systèmes à la fois fiables et performants dans le but de transporter l'information d'un point géographique à un autre. Dans le cas des systèmes d'enregistrement magnétique, c'est l'archivage de l'information sur une période de temps indéfinie qui devient le but principal. En évaluant de façon plus approfondie ces deux objectifs à priori distincts, il apparaît qu'une dualité frappante existe entre les deux systèmes. Dans un cas on enregistre l'information sur un support magnétique pour une période de temps indéfinie avant de la récupérer à un instant donné à l'aide d'une unité de lecture tandis que dans l'autre, l'information est transmise avec un certain retard au récepteur par l'intermédiaire d'un médium de transport électromagnétique. Dans les deux cas cependant, le système est perturbé par des interférences déterministes et aléatoires liées à la nature physique du support (de stockage ou de transport) et responsables de la dégradation du contenu informationnel. Pour être plus précis on cherche avant tout, dans le cas des communications de données, à maximiser le débit de transmission tout en garantissant un taux de fiabilité donné. Par opposition, dans le cas d'enregistrement de données, l'objectif est surtout d'accroître la densité (par unité de surface ou de volume) des données sur le médium magnétique tout en garantissant leur intégrité lors de la lecture. Les premiers systèmes d'enregistrements numériques ont utilisé principalement des techniques analogiques faisant appel à l'utilisation de "détecteurs de crêtes" (Bertram, 1986; Immink, 1991). De nos jours cependant, l'avènement des nouvelles techniques numériques qui amalgament des méthodes de traitement de signal et de codage, ont amené les techniques d'enregistrement à inclure simultanément les détecteurs de crêtes et à maximum de vraisemblance de séquences (Kobayashi, 1971; Cioffi et al, 1991; Marcellin et Weber, 1992; Orcutt et Marcellin, 1993a; Orcutt et Marcellin, 1993b) ce qui a permis d'améliorer considérablement l'efficacité d'enregistrement. Dans ce contexte particulier, il devient important d'évaluer les limites théoriques qui sont permises d'après les lois de la

Théorie de l'Information et qui peuvent s'exprimer par la capacité d'un canal de transmission équivalent. Il devient alors possible de comparer cette limite aux performances que l'on peut atteindre par de simples techniques d'égalisation. Dans ce chapitre nous nous attardons donc à spécialiser au cas du canal d'enregistrement magnétique les résultats généraux obtenus aux sections 2.4 et 2.5 et exprimant la capacité et les différentes bornes d'égalisation en fonction des paramètres du système. Ceci nous permettra par la suite de présenter des résultats numériques correspondant à différents scénarios d'utilisation.

L'organisation de ce chapitre est la suivante: la section 4.1 présente un modèle de "canal" magnétique basé sur des travaux antérieurs (Voois et Cioffi, 1994; Lindholm, 1978) et adéquat pour décrire le mécanisme de lecture-écriture dans le cas des têtes de lecture magnéto-inductives. Nous étudions ensuite à la section 4.2 les sources de bruit affectant le système et définissons des paramètres permettant de les relier à la notion de rapport signal sur bruit. Aux sections 4.3 et 4.4, nous spécialisons les résultats des sections 2.4 et 2.5 en utilisant le modèle développé pour déterminer une borne supérieure (ou inférieure selon l'interprétation qu'on en fait) sur la capacité du système ainsi que des bornes supérieures sur les performances de divers dispositifs d'égalisation. Nous présentons à la section 4.5 un ensemble de résultats numériques correspondant à des scénarios multiples d'utilisation et finalement nous concluons par la présentation à la section 4.6 de développements analytiques permettant la détermination de la configuration géométrique des pistes menant à la valeur maximum de la capacité lorsqu'une seule tête de lecture surplombe l'ensemble des pistes d'enregistrement.

4.1 Modélisation du canal d'enregistrement magnétique

Nous considérons ici le schéma général d'un système à plusieurs têtes de lecture opérant sur un milieu d'enregistrement à pistes multiples tel qu'illustré à la figure 4.1. Remarquons que dans le cas général, le nombre de pistes et de têtes n'est pas nécessairement identique et que nous ne tenons pas compte du délai relatif entre l'écriture

et la lecture des données puisque ce facteur n'affecte pas la qualité du canal. Dans ce contexte le canal d'enregistrement magnétique peut être vu comme un système de communication à N entrées et M sorties qui amalgame à la fois les fonctions d'écriture et de lecture ainsi que les propriétés physiques du milieu d'enregistrement magnétique.

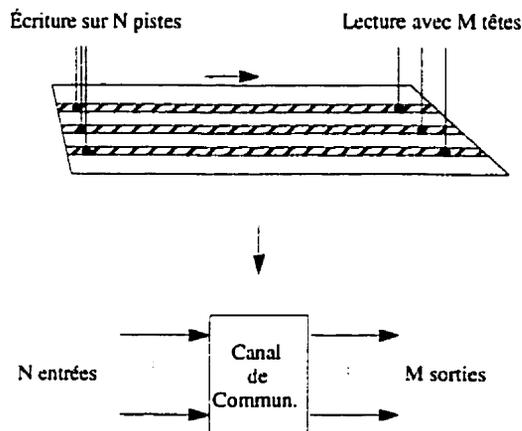


Figure 4.1 Système d'enregistrement magnétique à pistes et têtes multiples et modèle correspondant du système de communication multivarié

Dans les sections qui suivent, nous présentons les principes de modélisation des processus d'écriture et de lecture qui sont à la base du modèle de canal de communication équivalent au système d'enregistrement magnétique. Ce modèle sera ensuite utilisé pour déterminer à partir des expressions développées au chapitre II dans le cadre général du canal gaussien, la capacité et les bornes d'égalisation du processus d'enregistrement magnétique.

4.1.1 Mécanisme d'écriture

L'écriture des données sur le support magnétique peut s'effectuer soit au moyen d'une tête unique opérant sur une piste à la fois soit par un réseau de têtes écrivant simultanément sur plusieurs pistes. Nous supposons donc que l'écriture d'une piste n'interfère pas avec les données enregistrées sur les autres pistes. La figure 4.2 illustre les diverses transformations que subissent les données binaires (± 1) depuis l'entrée jusqu'à la sortie du canal d'enregistrement magnétique. Les bits sont enregistrés sur le médium par

saturation longitudinale positive ou négative du support magnétique pour la durée de la période T d'enregistrement en secondes. Dans la suite nous utiliserons de préférence la longueur de médium T_x correspondant à l'enregistrement d'un symbole où $T_x = \nu T$, ν étant la vitesse de défilement du support magnétique. Nous supposons que la distance de séparation inter-symboles T_x est constante pour toutes les pistes.

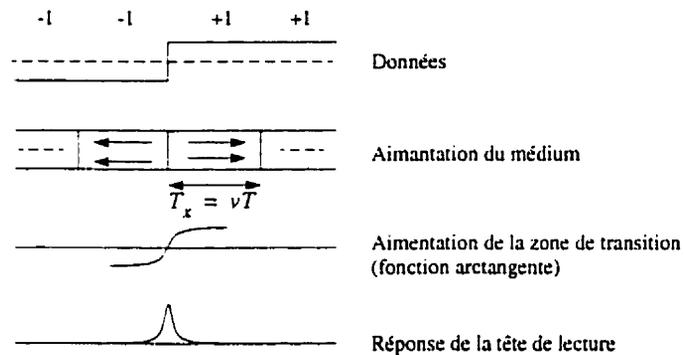


Figure 4.2 Illustration du processus d'enregistrement magnétique numérique

Il est important de mentionner dès maintenant que nous utiliserons ici les variables x et k plutôt que t et ω pour représenter les variables "temporelle" et "fréquentielle", x étant la position de la tête sur le milieu d'enregistrement (i.e. la distance linéaire de la tête par rapport à une référence longitudinale fixe sur les pistes) et k la fréquence exprimée en rad/m¹. Ces deux systèmes de référence sont d'ailleurs liés par la vitesse de défilement du support magnétique selon les relations $x = \nu t$ et $k = \omega/\nu$. Notons que l'utilisation de ces nouvelles variables permet d'éliminer des équations la vitesse de défilement du support magnétique ν lorsqu'on désire étudier uniquement les interactions entre les têtes de lecture et le médium, cette interaction étant de façon générale indépendante de la vitesse de défilement du support. Les transformées de Fourier dans le système x, k s'écrivent

1. k dans ce contexte est généralement appelée le "numéro de fréquence" ("frequency number") ce qui fait référence au nombre de radians d'une onde sinusoïdale de fréquence k sur une distance d'un mètre (le long d'une piste).

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(k) e^{jkx} dk$$

$$\bar{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jkx} dx \quad (4.1)$$

Si on se reporte au schéma d'enregistrement des données numériques illustré à la figure 4.2, on voit que la variation longitudinale de magnétisation entre deux bits consécutifs de signe opposé crée une zone de transition où la magnétisation passe graduellement de la polarité (+, -) à son inverse (-, +) (en effet, la physique du processus d'enregistrement magnétique ne permet pas les transitions abruptes de changement de polarité). On peut, en se basant sur le modèle le plus répandu pour représenter le processus d'écriture numérique (Voois et Cioffi, 1994), utiliser la fonction arctangente illustrée sur la figure 4.2 pour approximer la fonction de magnétisation dans la zone de transition. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle correspondant à l'écriture d'un "1" au temps $x = 0$ et sa transformée de Fourier s'écrivent (l'impulsion correspondant dans ce cas à la suite de bits 000000...0100000...)

$$Q(x) = \frac{2}{\pi} \left[\text{atan} \left[\frac{x}{a_x} \right] - \text{atan} \left[\frac{x - T_x}{a_x} \right] \right]$$

$$\bar{Q}(k) = \frac{2}{jk} e^{-|k|a_x} \left(1 - e^{-jkT_x} \right) \quad (4.2)$$

où a_x est la longueur de la zone de transition définie comme la valeur correspondant au point $Q(a_x) = 0.5$. Notons qu'afin de rendre négligeable les non-linéarités du processus d'enregistrement, il est préférable de maintenir $a_x > T_x/3.5$ (Barndt et Wolf, 1992). Il est cependant important de mentionner que malgré cette condition le processus d'enregistrement n'est généralement pas linéaire puisque nous supposons la saturation du milieu magnétique. Nous reviendrons ultérieurement sur les conséquences théoriques de ce point important.

L'allure générale de la réponse de la tête de lecture au changement de magnétisation longitudinale est illustrée sur la figure 4.2. Ceci conclut notre description du mécanisme

d'écriture. À la section suivante, nous abordons de façon systématique la modélisation du processus de lecture.

4.1.2 Mécanisme de lecture

Nous restreindrons notre étude au cas des têtes magnéto-inductives, excluant ainsi les autres systèmes magnéto-resistif ou magnéto-optique¹ possibles. Dans ce cas, la tension induite dans chacune des têtes est la somme des tensions induites par l'aimantation de chacune des pistes. Nous utilisons les résultats de Lindholm (1978) pour modéliser le couplage entre les pistes et les têtes en fonction des paramètres géométriques représentés sur la figure 4.3. Ce modèle suppose une distance infiniment petite entre la tête et la piste sans couplage par le biais d'un milieu intermédiaire, un milieu magnétique plan et d'épaisseur négligeable ainsi qu'une aimantation uniquement longitudinale des pistes. Ces suppositions et simplifications permettent d'effectuer des calculs numériques relativement simples tout en restant proche de la réalité physique.

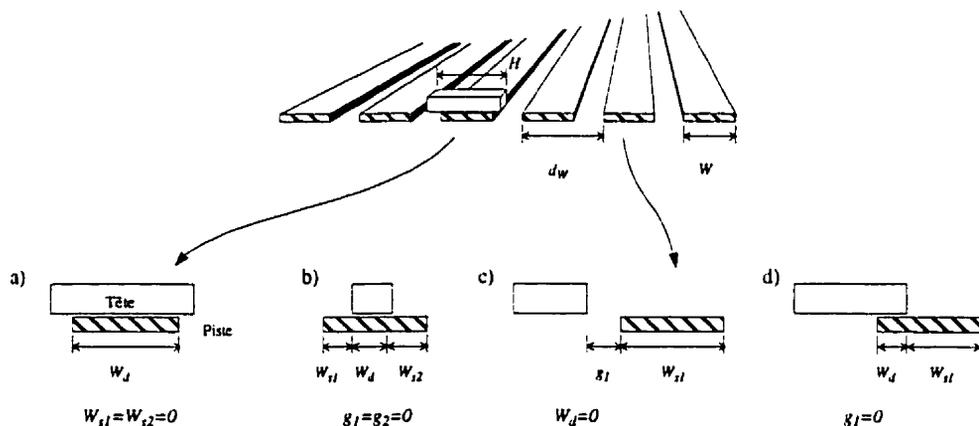


Figure 4.3 Géométrie des têtes de lectures et des pistes

1. De façon générale, les techniques développées dans ce travail sont applicable à ces autres cas moyennant l'utilisation d'un modèle physique approprié.

Le modèle de Lindholm (Lindholm, 1978) utilise une fonction de transfert complexe pour relier l'aimantation d'une piste de largeur W (voir la figure 4.3) à la tension induite dans une tête de lecture de largeur H selon la relation

$$V(x) = \bar{G}(k) e^{jkx} \quad (4.3)$$

L'expression de $\bar{G}(k)$ donnée par Lindholm s'exprime comme la somme de deux termes $\bar{G}_d(k)$ et $\bar{G}_s(k)$ représentant respectivement les couplages direct et de proximité.

$$\bar{G}(k) = \bar{G}_d(k) + \bar{G}_s(k) \quad (4.4)$$

Le terme de couplage direct $\bar{G}_d(k)$ correspond au couplage provoqué par la partie de la piste se trouvant directement sous la tête de lecture alors que le terme de proximité $\bar{G}_s(k)$, aussi appelé "side fringing", correspond au couplage entre la tête et le reste de la piste. La figure 4.3 (a,b,c,d) illustre la relation géométrique existant entre une tête de largeur H et une piste de largeur W pour quelques cas typiques. La piste illustrée peut être soit celle qu'on désire lire, soit une piste adjacente agissant comme source d'interférence. Dans cette figure W_d est la largeur de piste produisant un couplage direct et W_{s1} et W_{s2} sont les valeurs de la largeur des pistes éventuellement à l'origine du couplage de proximité, g_1 et g_2 étant leur distance respective par rapport à la tête de lecture. Suivant les cas, on notera que les termes de couplage direct ou de proximité pourront être nuls ou, qu'inversement, il pourra y avoir deux termes de couplage de proximité provenant d'une même piste. Nous définissons également d_W comme le pas de répétition spatial des pistes et d_H (non montré) comme le pas de répétition spatial des têtes. Remarquons que les paramètres d_W et d_H ne s'appliquent que lorsque les pistes et les têtes sont régulièrement espacées. Dans le cas contraire, il serait nécessaire d'utiliser un vecteur pour représenter leur position relative. À l'aide de ces paramètres, nous sommes à présent en mesure d'exprimer les termes dans (4.4) comme (Lindholm, 1978)

$$\begin{aligned} \bar{G}_d(k) &= jV_0 k W_d \\ \bar{G}_s(k) &= jV_0 \operatorname{sgn}(k) [A(|k|(W_{s1} + g1)) + A(|k|(W_{s2} + g2)) - A(|k|g1) - A(|k|g2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

où V_0 est une constante de conception de la tête qui dépend de facteurs tels que l'épaisseur du médium, le nombre de tours de la bobine d'induction et la vitesse de défilement du support magnétique. La fonction $A(\tau)$ de (4.5) s'exprime comme

$$A(\tau) = \frac{1}{2} \left[1 - e^{-\tau} + \frac{1}{1-s} \left[1 - \sqrt{s} \operatorname{erf}(\sqrt{\tau}) - e^{-\tau(1-s)} \operatorname{erfc}(\sqrt{s\tau}) \right] \right] \quad \text{où } s = 2 \left[\frac{3}{4} \right]^3 \quad (4.6)$$

On vérifie que lorsque la tête est parfaitement alignée sur la piste et que $W \leq H$, le terme $\bar{G}_s(k)$ est nul et $\bar{G}_d(k)$ représente l'action d'un différentiateur pur. Puisque la relation entrée-sortie entre la magnétisation du médium et la tension induite dans une tête de lecture est linéaire, la réponse de la tête de lecture j à une impulsion de longueur T_x sur la piste i est donnée par

$$P_{ij}(x) = F^{-1} [\bar{G}_{ij}(k) \bar{Q}(k)] \quad (4.7)$$

où F^{-1} est l'opérateur de la transformée inverse de Fourier et $\bar{G}_{ij}(k)$ et $\bar{Q}(k)$ s'expriment respectivement par (4.4) et (4.2). La linéarité du processus de lecture nous permet d'exprimer la relation entrée-sortie du système à N entrées et M sorties par une application linéaire $C^N \rightarrow C^M$ (i.e. une matrice complexe) où chacun des éléments de la matrice est une fonction prenant la forme donnée par (4.4). Nous pouvons donc exprimer la réponse impulsionnelle du système multivariable ainsi que sa transformée de Fourier comme

$$\begin{aligned} P(x) &= F^{-1} [\bar{G}(k) \bar{Q}(k)] \\ \bar{P}(k) &= \bar{G}(k) \bar{Q}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $\bar{G}(k)$ est une matrice $M \times N$ dont chacun des éléments $\bar{G}_{ij}(k)$ représente la fonction de transfert reliant le signal à la sortie de la tête de lecture i à la magnétisation de la piste j . Les fonctions $\bar{G}_{ij}(k)$ s'expriment par (4.4), (4.5) et (4.6) selon la position relative de la tête et de la piste.

$$\bar{G}(k) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(k) & \bar{G}_{12}(k) & \dots & \bar{G}_{1N}(k) \\ \bar{G}_{21}(k) & \dots & \bar{G}_{ij}(k) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{G}_{M1}(k) & \dots & \dots & \bar{G}_{MN}(k) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Fonction de transfert reliant} \\ \text{le signal à la sortie de la tête} \\ \text{de lecture } i \text{ à la magnétisation} \\ \text{de la piste } j. \end{array} \quad (4.9)$$

La figure 4.4 illustre le modèle général du système d'enregistrement magnétique comportant la matrice $G(x)$ associée au processus de lecture ainsi que la fonction $Q(x)$ vue à la section précédente et qui modélise le processus d'écriture-aimantation. La relation entrée-sortie de la figure 4.4 peut alors simplement s'écrire comme

$$y(x) = \sum_l P(x - lT_x) x^{(l)} + n(x) \quad (4.10)$$

si $x^{(l)}$ est le vecteur des séquences binaires des données d'entrée au "temps" $x = lT_x$ (attention de ne pas confondre la variable "temporelle" x et le vecteur des données d'entrée $x^{(l)}$).

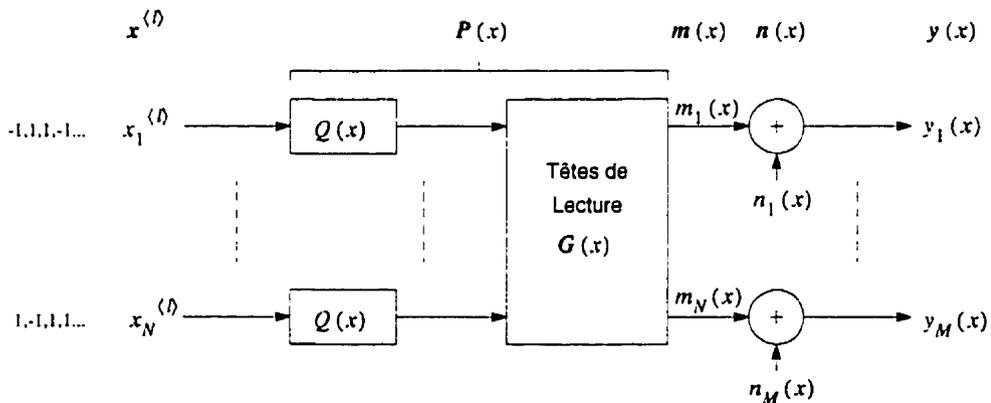


Figure 4.4 Modèle mathématique du système d'enregistrement magnétique multivarié

4.2 Modélisation des bruits

Les processus de bruit associés au mécanisme physique d'enregistrement sont très complexes et comportent de façon générale des effets qui sont additifs et multiplicatifs. La nature granulaire des phénomènes magnétiques est la source principale de bruit. En effet,

la réponse de la tête de lecture est formée par la superposition des effets individuels d'un très grand nombre de micro-cellules aimantées. Il s'ensuit que la nature granulaire de ce phénomène fait en sorte que, même en l'absence d'enregistrement particulier, il existe une aimantation désordonnée au sein du matériau qui cause des fluctuations aléatoires dans la tête de lecture dont l'effet macroscopique global est nul. Ce bruit de granulation magnétique est clairement additif bien que son spectre ne soit pas blanc. De façon générale, le bruit magnétique est le plus important aux voisinage des transitions de polarisation longitudinales. Il en résulte que le bruit magnétique dépendra des données enregistrées et sera non-stationnaire, des conditions très difficiles à considérer en pratique. En forçant l'hypothèse de stationnarité à s'appliquer sur une plage suffisamment grande par rapport à la période des symboles, il est possible d'approximer son comportement par celui d'un bruit additif $n_{\text{magn}}(x)$ dont le spectre est coloré. Baugh (Baugh, Murdock et Natarajan, 1983) donne l'expression simple suivante pour approximer le spectre du bruit magnétique

$$\bar{S}_m(k) = \Pi_m e^{-2|k|\alpha_x} \quad (4.11)$$

où α_x est la longueur des transitions (voir (4.2)) et Π_m une constante en $W/(\text{rad}/\text{m})$. Cette expression représente le bruit à la surface du support magnétique. Comme nous nous intéressons plutôt à obtenir le bruit à la sortie de la tête magnétique, nous devons calculer le bruit équivalent en ce point. En se basant sur des résultats dus à Lindholm (1978), le couplage tête magnétique - bruit magnétique pour une source de bruit filiforme longitudinale située à une distance y du centre de la tête de lecture se fait par le biais de la fonction de transfert

$$\bar{G}(y, H, k) = \begin{cases} jV_0k & |y| \leq H/2 \\ jV_0kD[|k|(|y| - H/2)] & |y| > H/2 \end{cases} \quad (4.12)$$

où V_0 est la même constante que celle qui apparaît en (4.5) et

$$D(\alpha) = \frac{1}{2}e^{-\alpha} \left[1 + e^{s\alpha} \operatorname{erfc}(\sqrt{s\alpha}) \right] \text{ où } s = 2 \left[\frac{3}{4} \right]^3 \quad (4.13)$$

Le spectre total s'obtient en sommant les carrés des contributions de chaque source filiforme selon

$$\bar{S}_{\text{magn}}(k, H) = \bar{S}_m(k) \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{G}(y, H, k)|^2 dy \quad (4.14)$$

Substituant (4.12) et évaluant de façon numérique on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{magn}}(k, H) &= \bar{S}_m(k) (k) V_0^2 \left[k^2 H + 2|k| \int_0^{\infty} |D(\alpha)|^2 d\alpha \right] \\ \bar{S}_{\text{magn}}(k, H) &= \bar{S}_m(k) (k) V_0^2 \left[k^2 H + 0.6498|k| \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Outre ce bruit d'aimantation additif, le bruit global capté par une tête de lecture comporte également une composante additive thermique due aux fluctuations d'induction dans la tête et aux bruits dans la chaîne d'amplification. On modélise l'ensemble des bruits thermiques (ou électroniques) par une composante stationnaire additive $n_{\text{électr}}(x)$ indépendante des autres têtes et des données. Sa densité spectrale de puissance s'écrit

$$\bar{S}_{\text{électr}}(k) = \Pi_e \quad \text{W/(rad/m)} \quad (4.16)$$

Combinant (4.11) (4.15) et (4.16), nous obtenons l'expression suivante pour la densité spectrale du bruit global $n(x)$ capté par tête

$$\begin{aligned} \bar{S}_n(k, H) &= \bar{S}_{\text{électr}}(k) + \bar{S}_{\text{magn}}(k, H) \\ \bar{S}_n(k, H) &= \Pi_e + V_0^2 \Pi_m e^{-2|k|a_x} \left[k^2 H_i + 0.6498|k| \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

En définissant $H_i, i = 1 \dots M$ comme la largeur de la $i^{\text{ème}}$ tête de lecture, on peut finalement écrire

$$\bar{S}_{n_i}(k) = \Pi_e + V_0^2 \Pi_m e^{-2|k|a_x} \left[k^2 H_i + 0.6498|k| \right] \quad (4.18)$$

Comme cette expression dépend de la largeur de tête H_i , ce spectre pourra être différent d'une tête de lecture à l'autre si leur largeur diffère. Notons que le bruit de magnétisation tel que calculé en (4.14) s'évalue en intégrant sur une largeur de médium infinie. Comme notre système comporte plusieurs têtes de lecture en parallèle, ceci laisse sous-entendre que le bruit d'origine magnétique sera corrélé d'une tête à l'autre puisque provenant de sources communes de bruit granulaire, surtout au bord des têtes. Pour fins de simplifications nous avons négligé cette corrélation dans tous les calculs ultérieurs.

4.2.1 Paramètres de bruit et rapport signal sur bruit équivalent

Conformément aux discussions précédentes, le bruit de lecture est caractérisé par une composante électronique Π_e , une composante magnétique Π_m et une constante V_0 qui dépend de la tête de lecture selon la relation (4.18). Cette description du bruit n'est malheureusement pas usuelle et nous lui substituerons plutôt une description au moyen de deux paramètres additionnels: ρ_0 et β_0 . Le paramètre ρ_0 est défini comme le rapport signal sur bruit à la sortie d'un système de référence à tête de lecture unique (que nous définirons ultérieurement) tandis que β_0 mesure le rapport entre la puissance du bruit électronique et la puissance totale du bruit de ce même système.

Considérons en premier lieu un système à tête de lectures multiples pour lequel nous définissons le rapport signal sur bruit ρ_j comme le rapport entre la puissance moyenne du signal et la puissance moyenne du bruit mesurée à la sortie de la tête j , $j = 1 \dots M$. Son expression, pour une largeur de bande de fréquence W_k , est donnée comme

$$\rho_j \equiv \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \int_{-\lambda T_x}^{\lambda T_x} |m_j(x)|^2 dx \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} \int_{W_k} \tilde{S}_{n_j}(k) dk} \quad j = 1 \dots M \quad (4.19)$$

où $\tilde{S}_{n_j}(k)$ est donnée par (4.18), $m_j(x)$ correspond au signal de sortie $y_j(x)$ mesuré avant le bruit (voir la figure 4.4) et où l'espérance est prise sur l'ensemble des symboles d'entrée $x^{(i)}$. Le paramètre β_j sera défini pour sa part comme la contribution relative du bruit

électronique à la valeur de ρ_j . Ainsi, l'expression de β_j correspond au rapport entre la puissance du bruit électronique et la puissance totale du bruit utilisée lors de l'évaluation de (4.19) (le dénominateur de cette expression). On a alors

$$\beta_j \equiv \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{W_k} \Pi_e dk}{\frac{1}{2\pi} \int_{W_k} \tilde{S}_{n_j}(k) dk} \quad j = 1 \dots M \quad (4.20)$$

Définissons à présent un système d'enregistrement de référence utilisant une tête de lecture unique de largeur H . Dans ce cas, nous avons $M = 1$ et les variables ρ_j et β_j ne sont plus définies que pour $j = 1$. Posons

$$\begin{aligned} \rho_0 &\equiv \rho_1 & M &= 1 \\ \beta_0 &\equiv \beta_1 & M &= 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les variables ρ_0 et β_0 correspondent donc respectivement au rapport signal sur bruit et à la contribution relative du bruit électronique pour un système de référence n'utilisant qu'une seule tête de lecture. À partir de (4.19) et (4.20), nous désirons à présent isoler les valeurs de Π_e et Π_m lorsque ρ_0 et β_0 sont fixées. Pour ce faire, évaluons premièrement l'équation (4.19) dans le cas d'un système à tête de lecture unique. Les détails relatifs à cette évaluation sont fournis à l'annexe J qui donne la valeur de ρ_0 comme

$$\rho_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{W_k} |\tilde{P}_{ji}(k)|^2 dk}{\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H)} \quad j = 1, \quad M = 1 \quad (4.22)$$

où

$$B(a_x, W_k, H) = \left[\frac{H}{2a_x^3} + \frac{0.6498}{2a_x^2} - e^{-W_k a_x} \left[H \left[\frac{W_k^2}{4a_x} + \frac{W_k}{2a_x^2} + \frac{1}{2a_x^3} \right] + 0.6498 \left[\frac{a_x W_k + 1}{2a_x^2} \right] \right] \right] \quad (4.23)$$

Afin d'éliminer le paramètre V_0 des équations, nous définissons les variables auxiliaires suivantes

$$\begin{aligned}\Pi'_e &= \Pi_e / V_0^2 \\ \bar{P}'_{ji}(k) &= \bar{P}_{ji}(k) / V_0\end{aligned}\quad (4.24)$$

En substituant ces dernières dans (4.22) on obtient

$$\rho_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{W_k} |\bar{P}'_{ji}(k)|^2 dk}{\Pi'_e W_k + \Pi'_m B(a_x, W_k, H)} \quad j = 1, \quad M = 1 \quad (4.25)$$

L'évaluation du paramètre β_0 en (4.20) lorsque $j = 1$ et $M = 1$ donne de son côté

$$\beta_0 = \frac{\Pi'_e W_k}{\Pi'_e W_k + \Pi'_m B(a_x, W_k, H)} \quad (4.26)$$

À partir des équations de ρ_0 et β_0 en (4.25) et (4.26), on trouve que Π'_e et Π'_m s'expriment finalement comme

$$\Pi'_e = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^N \int_{W_k} |\bar{P}'_{ji}(k)|^2 dk}{\rho_0 W_k} \quad j = 1, \quad M = 1 \quad (4.27)$$

$$\Pi'_m = \frac{(1-\beta_0) \sum_{i=1}^N \int_{W_k} |\bar{P}'_{ji}(k)|^2 dk}{\rho_0 B(a_x, W_k, H)} \quad j = 1, \quad M = 1 \quad (4.28)$$

Pour fins de calculs numériques nous fixerons donc les valeurs de ρ_0 et β_0 pour un système de référence à tête de lecture unique (nous définirons ultérieurement les autres paramètres) et exprimerons les valeurs correspondantes de Π'_e et Π'_m suivant (4.27) et (4.28). Ces valeurs de Π'_e et Π'_m pourront ensuite être utilisées pour effectuer tous les calculs numériques où les paramètres de bruit sont constants. En effet, Π'_e et Π'_m doivent être vues comme des constantes physiques qui ne dépendent d'aucun des paramètres dont nous étudierons l'influence. Notons aussi qu'en utilisant les variables auxiliaires en (4.24),

la constante V_0 se simplifie dans toutes les équations et n'intervient plus dans les calculs (voir (4.5) et (4.15)).

4.3 Expression de la capacité du modèle du canal d'enregistrement magnétique

Dans le cas général du canal multivarié gaussien, le mode de calcul de la capacité de Shannon a été explicité à la section 2.4. Pour obtenir l'équivalent dans le cas du modèle multivarié du canal d'enregistrement magnétique, il suffit de substituer $f = \omega / (2\pi) = \nu k / (2\pi)$ dans (2.31), (2.32) et (2.33). En exprimant ensuite la capacité en bits/m (la capacité linéique s'obtient en divisant la capacité en bits/s par la vitesse de défilement du support magnétique ν), on obtient

$$C_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \log_2 \left[\frac{\lambda_i(k)}{\lambda} \right] dk \text{ bits/m} \quad (4.29)$$

$$S = \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i(k)} \right] dk \quad (4.30)$$

où λ_i sont les N valeurs propres de la matrice $|\bar{N}(k)^{-1/2} \bar{P}(k)|^2$ ($\bar{P}(k)$ est obtenue de (4.8) alors que $\bar{N}(k)$ est une matrice diagonale ayant pour composante $\bar{N}_{ii}(k)$ le spectre de puissance de la source de bruit $\bar{n}_i(k)$ exprimée par (4.18)) et où λ est un multiplicateur de Lagrange, S est la puissance moyenne totale des signaux d'entrée et $\Omega_i, i = 1 \dots N$ représentent les intervalles d'intégration à l'intérieur d'une bande de fréquence W_k définis par

$$\Omega_i = \{k \mid \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i(k)} > 0\} \quad i = 1 \dots N \quad (4.31)$$

Remarquons que pour notre application, la valeur exacte de la puissance moyenne totale des signaux d'entrée S importe peu puisqu'il sera possible de contrôler ce paramètre indirectement par l'intermédiaire de la puissance des sources de bruits, ce que nous ferons. En effet, si nous définissons

$$\tilde{N}'(k) = \frac{\tilde{N}(k)}{S} \quad (4.32)$$

les équations (4.29) et (4.30) deviennent

$$C_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \log_2 \left[\frac{\lambda'_i(k)}{\lambda'} \right] dk \text{ bits/m} \quad (4.33)$$

$$1 = \frac{\nu}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda'_i(k)} \right] dk \quad (4.34)$$

où $\lambda' = S\lambda$ est un multiplicateur de Lagrange et $\lambda'_i(k) = S\lambda_i(k)$ sont les N valeurs propres de la matrice $|\tilde{N}'(k)^{-1/2} \tilde{P}(k)|^2$. On voit donc qu'il est possible de contrôler la valeur de S par l'intermédiaire de la nouvelle matrice de bruit $\tilde{N}'(k)$. Pour cette raison nous choisirons arbitrairement et aux fins de simplifications ultérieures la valeur $S = N$. Celle-ci peut alors s'interpréter comme la puissance moyenne totale associée aux symboles d'entrée lorsque ces derniers sont binaires (i.e. ± 1) et que la forme des impulsions élémentaires correspond à un échelon.

Notons que dans ces équations nous utilisons comme matrice de canal $\tilde{P}(k)$ (équation (4.8)), cette dernière étant le produit de la matrice $\tilde{G}(k)$, représentant la lecture et du filtre de mise en forme $\tilde{Q}(k)$, représentant l'écriture. Ce dernier n'est habituellement pas utilisé lors du calcul de la capacité mais nous l'avons inclus ici parce qu'il fait partie intégrante du canal d'enregistrement magnétique. Nous discutons ci-dessous des implications de ces contraintes sur l'interprétation qu'on peut faire de la capacité dans ce cas.

Les expressions précédentes supposent que les signaux d'entrée possèdent une puissance moyenne totale S et une énergie finie lorsque mesurée sur un intervalle de temps T , i.e.

$$\sum_{i=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} |x_i(t)|^2 dt \leq ST \quad (4.35)$$

où on suppose que $T \rightarrow \infty$ lors de l'évaluation de la capacité. De tels signaux font partie de l'espace fonctionnel Hilbertien et sont notés $L_2(0, T)$ ou plus simplement L_2 lorsque $T \rightarrow \infty$. Dans le cas particulier du canal d'enregistrement magnétique, les signaux d'entrée correspondent à la magnétisation des pistes et dans ce cas, les contraintes sur le processus d'écriture (les champs de démagnétisation, la saturation du milieu, etc.) font en sorte qu'ils forment plutôt une sous-classe des fonctions L_2 . Par surcroît, l'équation (4.18) exprimant le spectre du bruit dans le cas de la signalisation binaire fait ressortir que ce dernier est fonction de la forme de la signalisation (par le biais du paramètre α_x). De fait, le calcul de la capacité présenté ci-haut ne tient pas compte de ces contraintes. On peut donc se demander à juste titre quelle est la signification de la capacité calculée à l'aide de (4.29)?

La figure 4.5 jette un peu de lumière sur cette question. Lorsqu'on désire calculer la capacité d'un canal, on doit tout d'abord fixer les contraintes auxquelles le canal sera soumis. Plus elles sont serrées et plus la valeur de la capacité correspondante sera faible. La figure 4.5 illustre le comportement de la capacité en fonction des contraintes imposées au système. À la gauche (cas 1), la valeur la plus élevée correspond à un système dont l'espace admissible des signaux d'entrée est L_2 et leur puissance moyenne totale S . Notons que dans le cas le plus général, le spectre du bruit associé à ce système pourra être fonction de la forme des signaux d'entrée¹. La capacité calculée dans ces conditions représentera alors une borne sur la valeur correspondant au système d'enregistrement magnétique réel. Si maintenant on restreint la classe des signaux d'entrée aux seuls signaux qui puissent être admis par le support magnétique, la capacité diminuera, ce qui est représenté sur la figure par le cas 2. Ces signaux représenteront en effet seulement une sous-classe de l'espace L_2 , ce qui peut s'interpréter comme une contrainte supplémentaire. Il est possible d'accroître encore plus les conditions de contrainte en forçant cette fois le signal d'entrée à ne prendre que la forme de la fonction de

1. Dans ce cas, le calcul de la capacité consistera à optimiser la valeur de l'information mutuelle à l'aide des degrés de liberté disponibles sur la forme des signaux d'entrée. Comme le bruit dépend de ces derniers, il sera donc variable lors de l'optimisation. D'un point de vue plus global, la capacité dans ce cas consiste à déterminer quelle paire "signal d'entrée + bruit correspondant" produira l'information mutuelle maximale.

magnétisation donnée en (4.2). La capacité résultante sera alors encore plus faible, tel

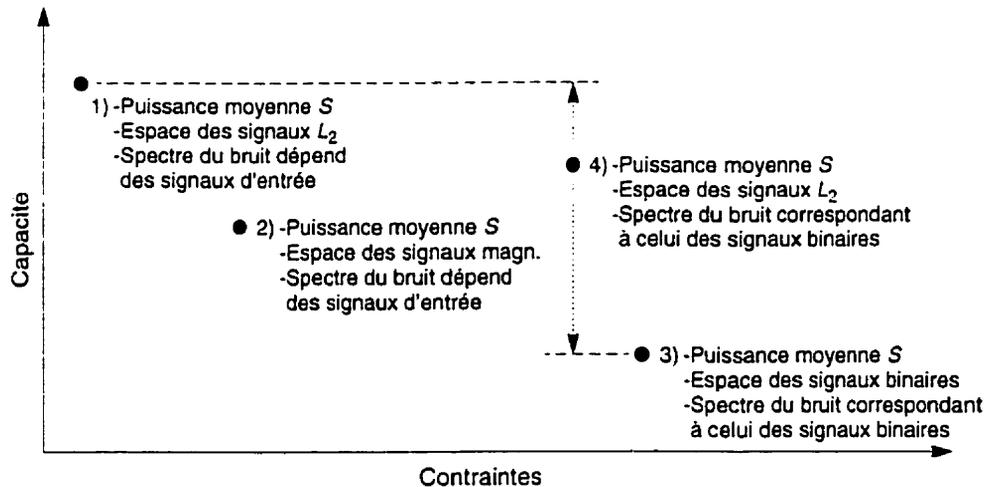


Figure 4.5 Valeur de la capacité en fonction de différentes contraintes

qu'indiqué par le cas 3 de la figure 4.5. Dans ce cas, le spectre du bruit est connu et fixe (voir (4.18)) et il est donc possible de calculer la capacité puisqu'il s'agit alors d'une optimisation dans l'espace de probabilité des signaux d'entrée. La complexité de ce calcul est toutefois exponentiellement complexe avec N et on ne peut l'envisager que pour de faibles valeurs de cette variable; il fait effectivement intervenir des intégrales à N dimensions sur des régions complexes de l'espace des signaux, la frontière de ces régions étant variable lors de l'optimisation. Le dernier cas, numéroté 4 sur la figure, correspond au calcul de la capacité utilisant (4.29) et pour lequel le spectre du bruit est donné par (4.18). Ce cas peut s'interpréter comme une relaxation des contraintes imposées au cas 3 puisque le spectre du bruit ainsi que le filtre $\tilde{Q}(k)$ correspondant à l'écriture sont préservés tandis que les signaux d'entrées ne sont plus contraints à suivre la forme donnée en (4.2). Les signaux font plutôt partie de la classe plus large des signaux de l'espace hilbertien L_2 . Le cas 4 représente donc une borne supérieure au cas 3. Une seconde interprétation à donner au cas 4 est de le percevoir comme une borne inférieure au cas 1 puisque par rapport à ce dernier, une contrainte supplémentaire sur le spectre du bruit a été introduite et le filtre $\tilde{Q}(k)$ a été ajouté.

Remarquons finalement que les expressions (4.29), (4.30) et (4.31) donnant la capacité du canal d'enregistrement magnétique ne tiennent aucunement compte de la saturation du milieu magnétique (si ce n'est qu'indirectement et incomplètement par l'intermédiaire du filtre $\tilde{Q}(k)$). De fait, ces équations supposent plutôt un canal linéaire, ce qui n'est évidemment pas le cas d'un canal fonctionnant à la saturation. C'est pourquoi la capacité calculée en (4.29) reste une approximation surtout valide lorsque le système d'enregistrement opère dans une région approchant le mode linéaire (i.e. en mode non-saturé).

4.4 Détermination des bornes d'égalisation

Les bornes de performance dérivées à la section 2.5 dans le cadre de l'analyse de l'égalisation et du filtrage adapté supposaient l'utilisation de la modulation d'amplitude en quadrature. Dans le cas du canal d'enregistrement magnétique, la signalisation s'effectue plutôt par l'intermédiaire d'une modulation binaire simple. Il est heureusement relativement facile d'adapter les résultats de la section 2.5 au cas présent puisque la signalisation binaire est en fait une modulation d'amplitude à 2 niveaux, sans signal en quadrature.

Examinons tout d'abord l'impact de cette contrainte sur la borne de Saltzberg développée à la section 2.5.1 et qui suppose la présence d'une composante d'entrée en quadrature. L'équation (2.45) à la base de l'évaluation de cette borne donne la probabilité d'erreur par symbole comme

$$P_E \leq P[\varepsilon_\alpha] + P[\varepsilon_\beta] = 2P[\varepsilon_\alpha] \quad (4.36)$$

où $P[\varepsilon_\alpha]$ et $P[\varepsilon_\beta]$ sont respectivement les probabilités d'erreur sur les lettres α_j et β_j des symboles complexes d'entrée $a_j = \alpha_j + j\beta_j$. Si on élimine la composante en quadrature β_j , la probabilité d'erreur de (2.45) et (4.36) est simplement réduite de moitié. Il s'ensuit que la valeur de la borne de Saltzberg correspondant à une signalisation binaire

est la moitié de celle correspondant à une signalisation avec signal en quadrature. L'équation (2.69) devient alors

$$BER < \frac{(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[-\frac{1 - EQMM_n / \sigma_a^2}{EQMM_n} \right]} \quad (4.37)$$

Il reste à déterminer l'expression de l'EQMM dans cette équation. L'annexe B donne les détails relatifs à l'évaluation de l'EQMM dans le cas général. Comme aucune supposition quant à la présence ou l'absence d'une composante en quadrature n'y est utilisée, les équations (2.64) et (2.65) donnant l'EQMM respectivement pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté s'appliquent également ici. Évidemment, dans le cas de signaux binaires la variance des symboles d'entrée de (2.17) est $\sigma_a^2 = 1$.

Comme dans le cas de la capacité, nous devons substituer $f = \omega / (2\pi) = \nu k / (2\pi)$ et exprimer ensuite le taux de transmission en bits/m (en divisant le taux de transmission en bits/s par la vitesse de défilement du support magnétique ν). On obtient finalement les expressions suivantes exprimant la borne supérieure sur le taux de transmission¹

$$R = \frac{\log_2[L^2]}{T_x} \quad \text{bits/m} \quad (4.38)$$

où L est calculée à partir de l'équation

$$BER < \frac{(L-1)}{L \log_2(L)} e^{\left[-\frac{1 - EQMM_n / \sigma_a^2}{EQMM_n} \right]} \quad (4.39)$$

selon la méthode élaborée à la section 2.5.2 et où l'EQMM est donnée pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté par

1. Pour une signalisation sans signal en quadrature, le taux de transmission est $R = \log_2(L) / T_x$. Le fait d'utiliser plutôt (4.38) ne fait que multiplier cette valeur par 2 et n'affecte en rien le comportement du taux de transmission, sa valeur exacte n'étant pas de prime importance dans ce travail.

$$EQMM_n^{\text{linéaire}} = \frac{T_x}{2\pi} \int_{-\pi/T_x}^{\pi/T_x} [[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}(k)]^{-1}]_{nn} dk \quad (4.40)$$

$$EQMM_n^{\text{idéal}} = \left[\left[\frac{T_x}{2\pi} \int_{-\pi/T_x}^{\pi/T_x} (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}(k)) dk \right]^{-1} \right]_{nn} \quad (4.41)$$

où

$$\tilde{\mathbf{R}}(k) = \frac{1}{T_x} \sum_l \left| \tilde{\mathbf{N}}^{-1/2} \left(k - \frac{2\pi l}{T_x} \right) \tilde{\mathbf{P}} \left(k - \frac{2\pi l}{T_x} \right) \right|^2 \quad (4.42)$$

et $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ est donnée par (4.8) tandis que $\tilde{\mathbf{N}}(k)$ est une matrice diagonale ayant pour composante $\tilde{N}_{ii}(k)$ le spectre de puissance de la source de bruit $\tilde{n}_i(k)$ dont l'expression se trouve en (4.18)

4.5 Résultats numériques et discussion

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats numériques en fonction des différents paramètres du système d'enregistrement magnétique. Ces résultats ont été obtenus à l'aide de l'équation (4.29) donnant une borne sur la valeur de la capacité linéique en bits/m et de l'équation (4.38) donnant une borne supérieure sur le taux de transmission en bits/m de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté. La majorité des résultats seront cependant exprimés sous la forme de taux surfaciques en bits/m² (ou bits/cm²) qui s'obtiennent en divisant les taux en bits/m par la largeur totale occupée par l'ensemble des pistes.

Conformément à la discussion de la section 4.2.1, nous devons au préalable déterminer la valeur des constantes physiques de bruit Π_e' et Π_m qui seront utilisées dans la suite, ce qui fait l'objet de la section suivante.

4.5.1 Détermination des constantes de bruit

En se reportant au développement de la section 4.2.1, l'évaluation des constantes physiques de bruits Π_e' et Π_m passe par l'utilisation d'un système de référence à tête de lecture unique dont on fixe un certain nombre de paramètres en plus de fixer la valeur du rapport signal sur bruit ρ_0 et de la contribution relative du bruit électronique β_0 correspondante. La valeur des paramètres définissant le système de référence que nous utiliserons se base en partie sur le prototype de système d'enregistrement sur bande magnétique à haute densité et en partie sur le système utilisé par Cioffi et al. (1991). Le tableau suivant donne un résumé de la valeur de ces paramètres pour notre système de référence

$$\begin{aligned}
 & 1 \text{ tête, } 1 \text{ piste } (N = 1, M = 1) \\
 & \rho_0 = 60 \text{ dB} \\
 & \beta_0 = 50 \% \\
 & a_x = 50 \text{ } \mu\text{m} \\
 & T_x = 50 \text{ } \mu\text{m} \\
 & v = 3.1 \text{ cm/s} \\
 & d_H = d_W = 0.2 \text{ mm} \\
 & H = W = 0.2 \text{ mm} \\
 & W_k = 2 \cdot (2\pi/T_x) \text{ rad/m} \\
 & \varepsilon = 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

La plupart d'entre eux ont été définis dans les sections précédentes à l'exception de ε que nous définissons ici comme le facteur de désalignement entre les têtes et les pistes. Le paramètre ε se calcule dans le cas général d'un système multivarié comme le rapport entre la distance latérale d_ε séparant le centre de la première tête (la tête d'indice $i = 1$ lorsque $i = 1 \dots M$) du centre de la piste correspondante et le pas de répétition spatial des pistes d_W (voir la figure 4.3), i.e.

$$\varepsilon = \frac{d_\varepsilon}{d_W} \tag{4.44}$$

La valeur $\varepsilon = 0$ représente un alignement parfait tandis que $\varepsilon = 1$ indique que les têtes de lectures sont décalées latéralement d'une distance égale à la largeur de séparation des pistes d_W . Chacune se retrouve alors à surplomber la piste qui lui était adjacente (pour un système où le pas de répétition spatial des pistes est constant).

En évaluant (4.27) et (4.28) à l'aide de ces valeurs, on obtient de façon numérique $\Pi_e' = 2.54647e-15 \text{ W/(rad/m)}$ et $\Pi_m = 7.65191e-22 \text{ W/(rad/m)}$. À moins d'indications contraires, les résultats numériques des sections suivantes supposeront l'utilisation de ces valeurs.

4.5.2 Présentation des valeurs des paramètres généraux de simulation

Afin d'éviter les répétitions, nous indiquons dans cette section la valeur de certains paramètres de base qui, à moins d'indications contraires, seront constants dans la plupart des scénarios de simulation que nous présenterons.

Le système d'enregistrement magnétique à l'étude comportera le même nombre de pistes et de têtes (i.e. $M = N$) de largeur uniforme et identique (i.e. $H = W$). Le pas de répétition spatial des pistes et des têtes sera égal à la largeur des pistes ($d_H = d_W = W$, ce qui sous-entend l'absence de bande de garde) et le facteur de désalignement sera nul (i.e. $\varepsilon = 0$). Les autres paramètres du système seront comme il suit:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 = 60 \text{ dB} \\ \beta_0 = 50 \% \\ a_x = 50 \text{ } \mu\text{m} \\ T_x = 50 \text{ } \mu\text{m} \\ v = 3.1 \text{ cm/s} \\ W_k = 1 \cdot (2\pi/T_x) \text{ rad/m} \\ BER = 5e-7 \end{array} \right\} \rightarrow \Pi_e' = 2.54647e-15, \quad \Pi_m = 7.65191e-22$$

(4.45)

où BER est le taux maximum d'erreur sur le bits utilisé dans l'évaluation des bornes d'égalisation. La valeur de W_k représente la largeur de bande de fréquence utile puisqu'il

a été vérifié qu'une valeur supérieure de W_k n'affecte pas de façon significative les résultats (lorsque la longueur de la zone de transition des symboles binaires a_x est constante, ce paramètre affectant éventuellement la largeur de bande utile W_k). Notons qu'à la dernière sous-section traitant des résultats numériques nous étudions de façon plus précise l'influence que peut avoir l'utilisation de différentes configurations géométriques des têtes et des pistes.

4.5.3 Influence de la distance de séparation entre les pistes

La figure 4.6 illustre de quelle façon la capacité et les bornes d'égalisation varient en

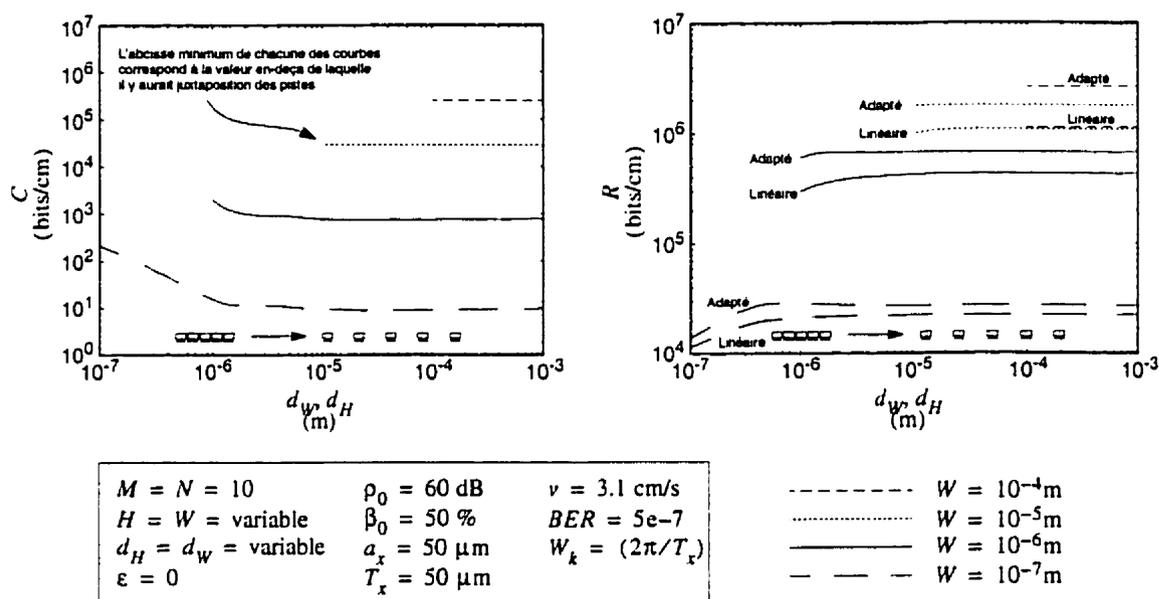


Figure 4.6 Capacité et bornes d'égalisation en fonction de la distance inter-piste

fonction du pas de répétition spatial des pistes $d_W = d_H$ pour différentes valeurs de la largeur des pistes (le système est muni de $N = M = 10$ pistes). Ce que nous désirons mettre en évidence à l'aide de ces figure est l'existence d'un pas de répétition spatial minimum en deçà duquel les phénomènes d'interférences entre pistes adjacentes se font ressentir. Lorsque les pistes sont suffisamment éloignées les unes des autres, i.e. la valeur de d_W est élevée, les têtes de lecture ne sont sensibles qu'au signal provenant de la piste

sous-jacente puisque les pistes adjacentes sont trop éloignées pour que leur effet soit perceptible. Chacun des sous-système formé d'une piste et de la tête correspondante est alors indépendant des autres de sorte que la valeur des taux de transmissions des égaliseurs et de la capacité en bits/m est constante et indépendante de d_w . Notons par contre que les mêmes taux d'égalisation et de capacité exprimés en bits/cm² verront leur valeur diminuer en fonction de d_w puisque la largeur totale occupée par les pistes est proportionnelle à cette variable.

Lorsqu'on diminue la valeur du pas de répétition spatial des pistes, ce qui correspond au rapprochement des pistes, il vient un point en deçà duquel la valeur des taux de transmissions n'est plus constante; la valeur de la capacité augmente alors que les taux de transmissions de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté diminuent. Ce phénomène s'explique par l'augmentation des interférences induites dans les têtes de lecture par la magnétisation des pistes adjacentes lorsqu'on augmente leur proximité. On constate que la valeur de d_w correspondant à ce point minimum dépend de la largeur des pistes W . Pour des pistes relativement larges $W > 10^{-5}$ m, les taux sont très peu affectés par les interférences puisque même pour des pistes très rapprochées ($d_w = W$), ils restent constants. Dans ce cas, le signal des pistes adjacentes n'est pas suffisant pour affecter le signal total reçu par les têtes, ce dernier étant d'autant plus fort que la piste est large. Cette figure suggère également que l'interférence entre les pistes a un effet bénéfique sur la valeur de la capacité (effet de redondance intrinsèque) alors qu'elle a plutôt un effet négatif sur les bornes d'égalisation de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté, probablement à cause des l'interférences supplémentaires que ces derniers sont incapables de traiter convenablement. On constate finalement que l'égaliseur linéaire semble plus affecté par ce phénomène que le filtre adapté.

4.5.4 Influence du nombre total de pistes et de têtes

Si on augmente de façon considérable le nombre de pistes et de têtes de lecture du système d'enregistrement magnétique, on pourrait s'attendre à ce que la valeur de la capacité et des

bornes d'égalisation associée à une tête particulière tendent vers une valeur asymptotique, les effets de bord devenant de plus en plus négligeable (i.e. les taux associés aux pistes et aux têtes se situant aux extrémités du système). C'est ce que confirme les résultats de la figure 4.7 où nous présentons les taux de transmissions en fonction du nombre de pistes, pour différentes largeurs de pistes. On y observe que pour des pistes large (i.e. $W \geq 10^{-5}$ m), la valeur asymptotique des taux est atteinte pour un nombre restreint de pistes alors que dans le cas de pistes plus étroites (e.g. $W = 10^{-7}$ m), 40 pistes semblent à peine suffire. Dans la suite nous utiliserons généralement des systèmes munis de 10 pistes, ce qui représente une limite acceptable en regard de la précision et du temps de calcul numérique et nous place le plus souvent dans la zone asymptotique pour $W \geq 10^{-6}$ m.

4.5.5 Influence de la largeur des pistes et des têtes

La figure 4.8 illustre l'évolution de la valeur de la capacité en fonction de la largeur des pistes, pour un nombre variable de pistes. On y constate que la capacité (par unité de surface) est identique pour tous les systèmes lorsque la largeur des pistes est élevée (i.e. $W > 10^{-5}$ m). Les interférences induites dans une tête de lecture par les pistes adjacentes

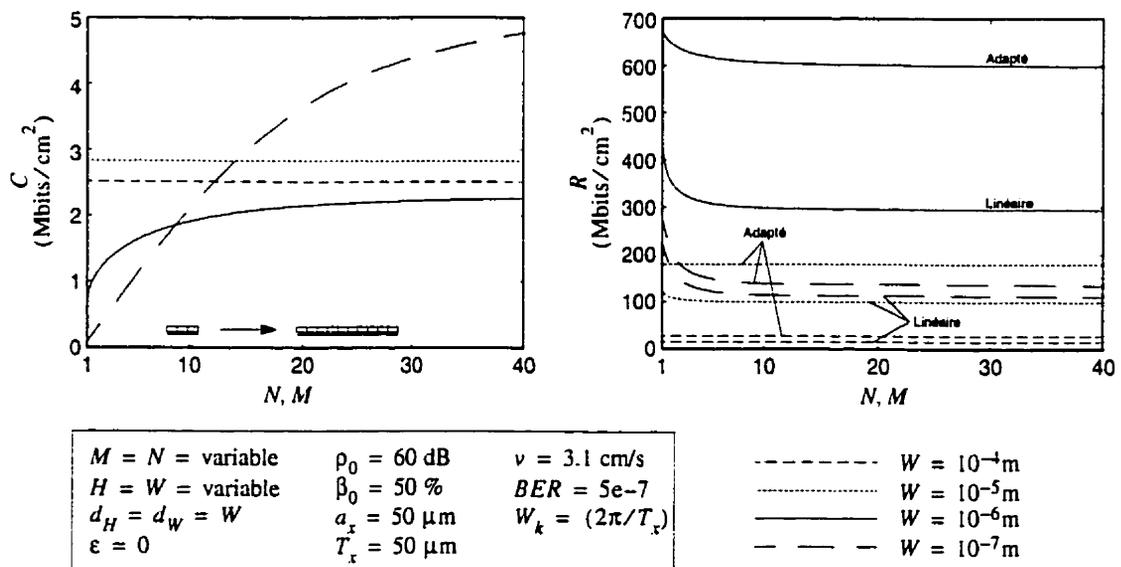


Figure 4.7 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes et de têtes

deviennent dans ce cas négligeables par rapport au signal induit par la piste sous-jacente, la zone d'influence des pistes adjacentes se limitant à une mince région se situant autour du bord des pistes. Il s'ensuit que la valeur de la capacité exprimée en bits par unité de surface est constante, i.e. un système muni d'une tête et une piste résultant en une capacité 40 fois plus faible qu'un système muni de 40 têtes et 40 pistes mais occupant également une surface 40 fois moindre.

Lorsque la largeur des pistes est par contre plus faible, la valeur de la capacité pour les systèmes munis d'un nombre peu élevé de pistes décroît rapidement alors qu'au contraire elle s'accroît pour ceux munis d'un plus grand nombre de pistes. Les interférences supplémentaires causées par le rapprochement des pistes¹ peuvent alors s'interpréter comme une redondance (i.e. la magnétisation d'une même piste induit un signal dans plusieurs têtes de lecture) conduisant à une augmentation de la capacité du système. Cet

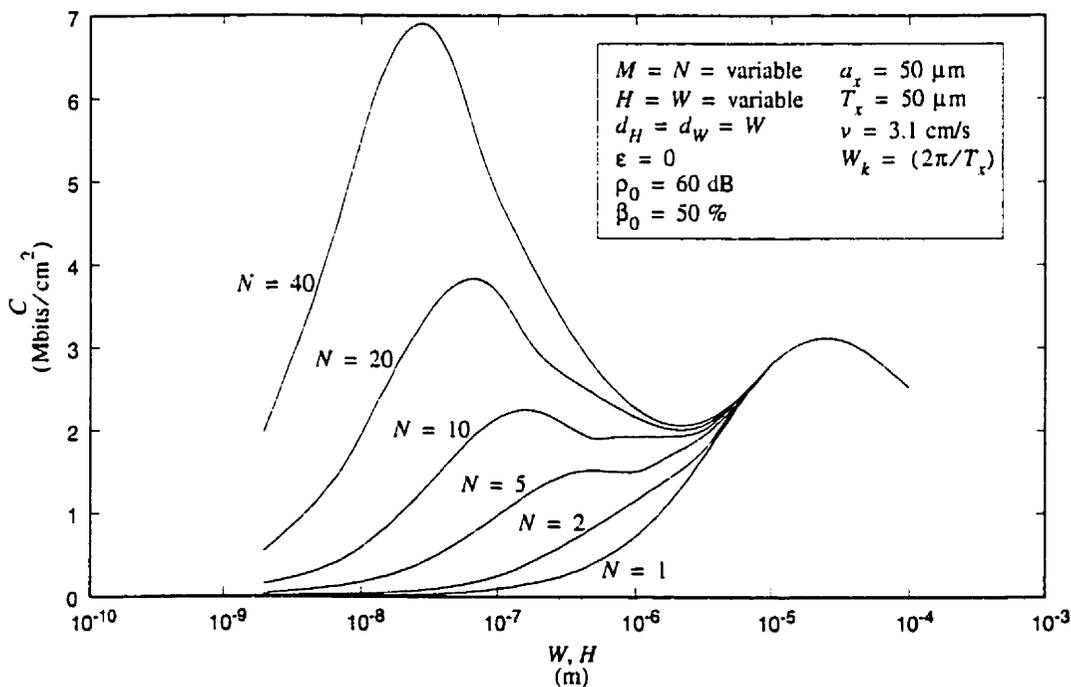


Figure 4.8 Capacité par unité de surface en fonction de la largeur et du nombre de pistes

1. Rappelons qu'en l'absence de bande de garde, des pistes plus étroites sont également plus près les unes des autres.

effet est surtout mis en évidence lorsque le nombre de pistes est élevé et que leur proximité est maximale puisque dans ces conditions, les interférences (et par voie de conséquence, la redondance implicite) sont les plus importantes. Cet effet bénéfique engendré par le rapprochement des pistes et la diminution de leur largeur est cependant tempéré par la diminution de l'amplitude du signal induit dans les têtes de lecture (la fonction de transfert (4.5) étant proportionnelle à la largeur des pistes). Comme de plus la composante électronique du bruit global demeure constante dans les mêmes conditions¹, on assiste à une diminution nette du rapport signal sur bruit, ce qui affecte de façon négative la valeur de la capacité. Il résulte de ces deux phénomènes antagonistes (augmentation de la redondance et diminution du rapport signal sur bruit), une largeur de piste optimale pour laquelle la valeur de la capacité exprimée en bits par unité de surface est maximale. La figure indique que pour un système muni de 40 pistes, ce maximum est atteint lorsque $W = 3e-8$ m. De façon générale, il apparaît que la valeur de W correspondant à ce maximum variera en fonction du nombre de têtes.

La figure 4.9 montre qu'en traçant les mêmes courbes en fonction de la largeur totale occupée par l'ensemble des pistes $N \cdot W$ plutôt qu'en fonction de W , l'abscisse correspondant à la valeur maximum de la capacité tend vers une valeur commune pour toutes les courbes lorsque le nombre de pistes N est élevé. Autrement dit, la valeur maximum de la capacité est atteinte pour une largeur de médium utilisé $N \cdot W$ donnée, cette largeur étant de $N \cdot W = 1 \mu\text{m}$ dans le cas présent. Ces résultats doivent cependant s'interpréter avec circonspection puisque dans cette région, les têtes de lecture sont de largeur extrêmement réduite et que les hypothèses formulées au début de ce chapitre ne tiennent peut-être plus. Nous avons en effet supposé une distance infiniment petite entre la tête de lecture et la piste ainsi qu'un médium magnétique d'épaisseur négligeable, ces deux conditions étant relatives à la largeur des têtes. Il serait utile de refaire éventuellement ces calculs à l'aide d'un modèle plus complet (mais également plus

1. Voir l'équation (4.18). Remarquons par contre que la composante magnétique du bruit diminue en fonction de la largeur des têtes.

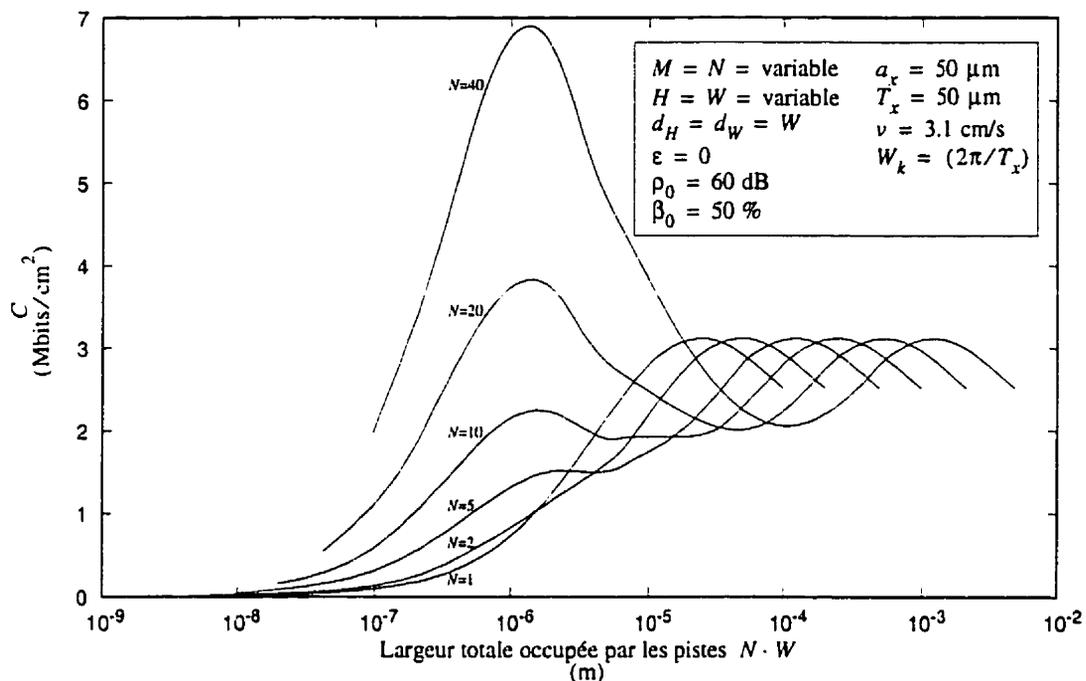


Figure 4.9 Capacité par unité de surface en fonction de la largeur totale et du nombre de pistes

difficile à évaluer) suggéré par Lindholm (1978) et tenant compte de la valeur exacte de ces paramètres.

Les courbes correspondant aux bornes d'égalisation apparaissent sur les figures 4.10 et 4.11 qui représentent respectivement les taux de transmissions en fonction de la largeur W et de la largeur totale NW occupée par les pistes. On y observe un phénomène semblable à celui observé dans le cas de la capacité, i.e. une légère augmentation des taux pour $NW = 10^{-7}$ m lorsque le nombre de piste est élevé et que leur largeur est faible. Cet accroissement de valeur est cependant nettement insuffisant pour surpasser les taux de transmissions correspondant à des largeurs de pistes supérieures. On y observe de plus que les taux de transmissions correspondant à des systèmes munis d'un nombre restreint de pistes sont significativement plus élevés que ceux de systèmes munis d'un plus grand nombre de pistes. La redondance introduite par le rapprochement des pistes n'est donc pas exploitée par les égaliseurs et semble même leur être nuisible.

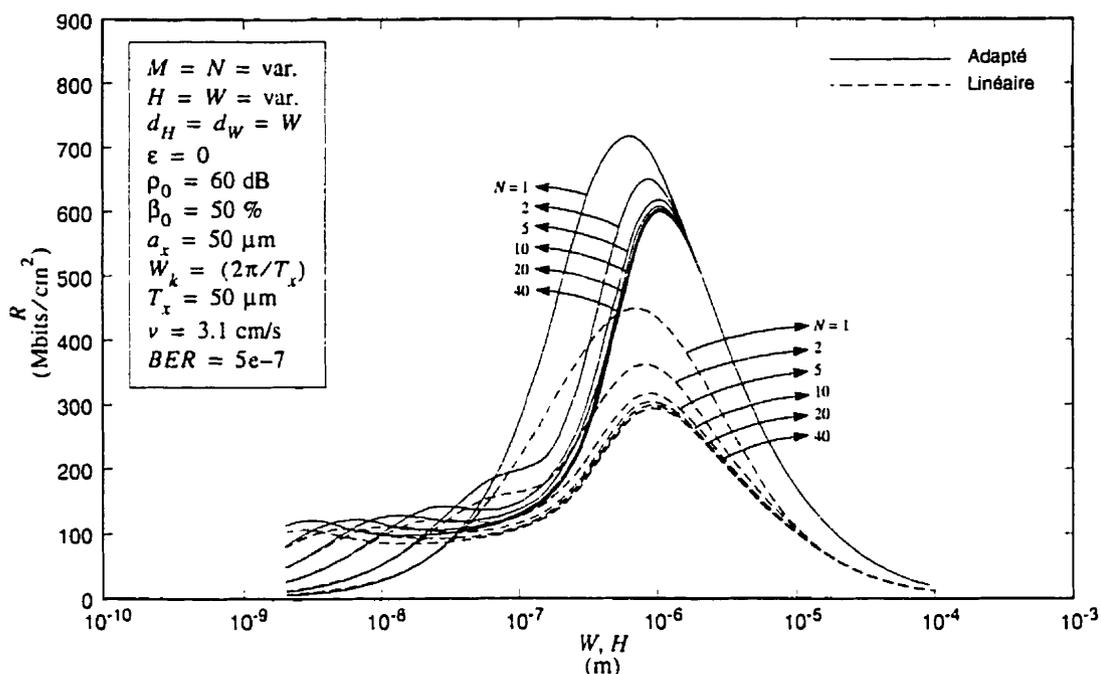


Figure 4.10 Bornes d'égalisation en fonction de la largeur et du nombre de pistes

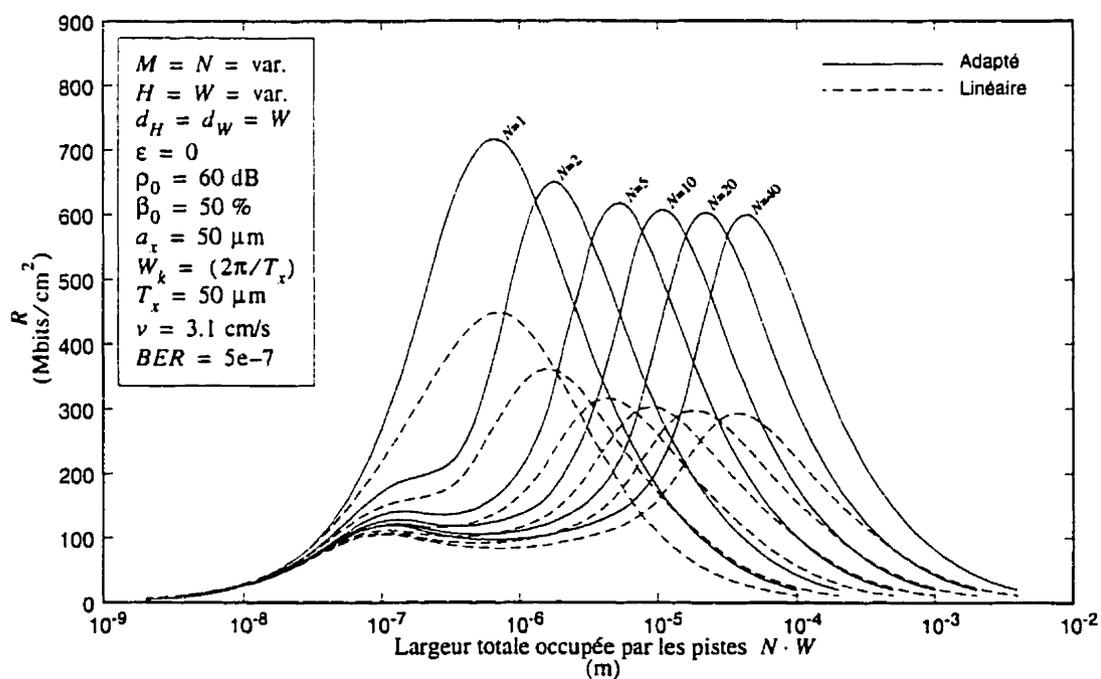


Figure 4.11 Bornes d'égalisation en fonction de la largeur totale occupée par les pistes et de leur nombre

4.5.6 Influence de la valeur du rapport signal sur bruit ρ_0

La figure 4.12 illustre de quelle façon la valeur de la capacité et des bornes d'égalisation varie en fonction du rapport signal sur bruit ρ_0 du système de référence¹. Comme il est possible de le constater, le logarithme des taux est une fonction pratiquement linéaire de ρ_0 lorsque ce dernier est exprimé en dB et que sa valeur n'est pas trop élevée. Comme les courbes sont pratiquement toutes parallèles entre elles dans cette région, on pourrait s'attendre à ce que la forme des courbes des figures 4.8 et 4.10 soit préservée lorsqu'on fait varier ρ_0 tout en restant dans une plage de valeurs relativement faibles. C'est ce que confirme la figure 4.13 où nous reproduisons les courbes des figures 4.8 et 4.10 pour $N = 10$ mais où le paramètre ρ_0 est cette fois variable (pour les figures 4.8 et 4.10, nous avions $\rho_0 = 60\text{dB}$). Notons qu'en raison de la grande dispersion des valeurs de la capacité, les courbes du graphique de gauche sur la figure 4.13 correspondent à la capacité normalisée par la valeur du rapport signal sur bruit ρ_0 .

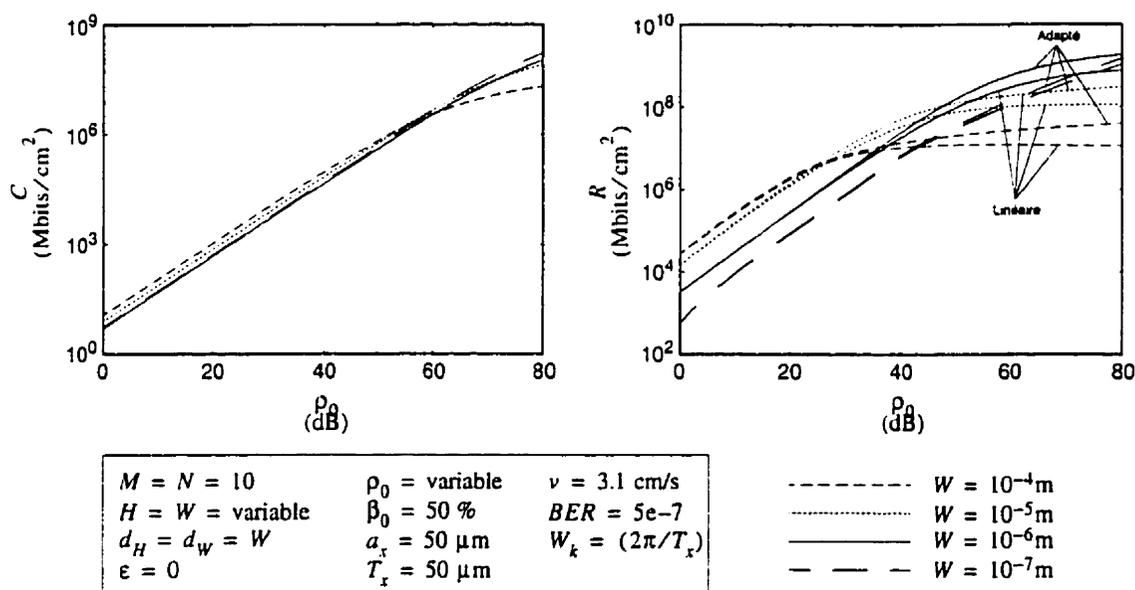


Figure 4.12 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du rapport signal sur bruit de référence

1. Pour une valeur donnée de ρ_0 , on calcule Π_e et Π_m pour le système de référence de (4.43) et les valeurs obtenues sont utilisées pour évaluer les performances du système considéré.

Fait intéressant à noter, lorsque le rapport signal sur bruit ρ_0 est faible, la valeur de la capacité est maximum pour des valeurs élevées de W alors que c'est l'inverse quand ρ_0 est élevée (i.e. la capacité est maximum pour de faibles valeurs de W).

4.5.7 Influence du facteur de désalignement entre les têtes et les pistes

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le facteur de désalignement entre les têtes et les pistes ε était nul, ce qui se traduit par un alignement parfait des têtes et des pistes. Dans un système réel cependant l'alignement des têtes est rarement parfait et ceci est d'autant plus problématique que les pistes sont étroites. La figure 4.14 illustre la variation de la valeur de la capacité et des bornes d'égalisation en fonction du facteur de désalignement ε (un désalignement de 100% indiquant que les têtes de lectures sont décalées latéralement d'une distance égale au pas de répétition spatial des pistes d_w de sorte que chacune se retrouve alors à surplomber la piste qui lui était adjacente).

Pour des pistes dont la largeur est $W = 10^{-5}$ m, la figure indique que la valeur de la capacité subit une baisse de l'ordre de 50% par rapport à un alignement parfait (i.e.

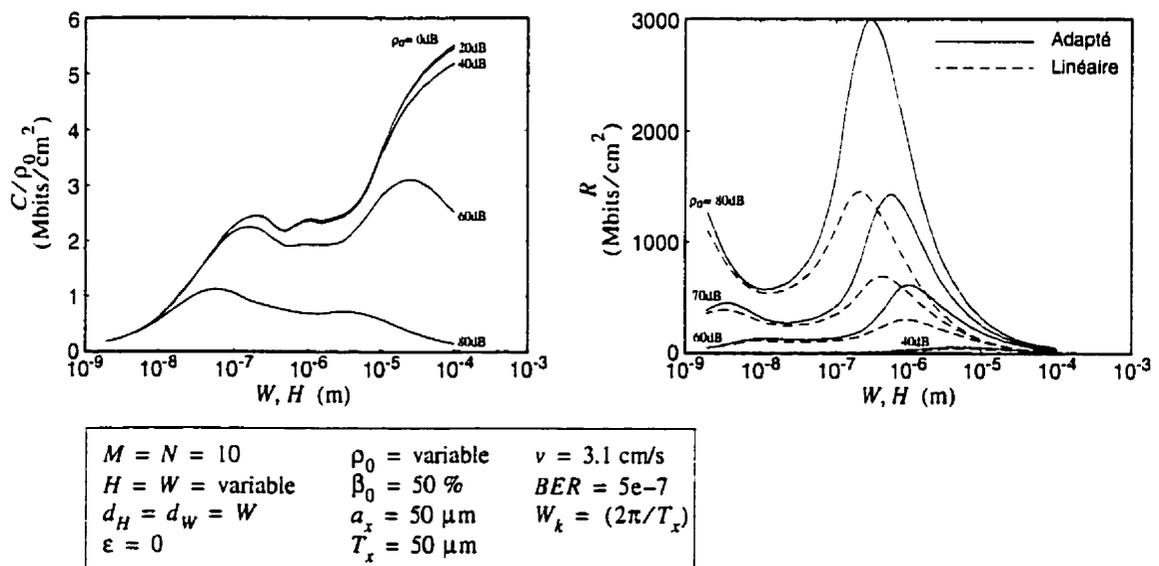


Figure 4.13 Capacité normalisée et bornes d'égalisation en fonction de la largeur des pistes et des têtes et du rapport signal sur bruit de référence

$\varepsilon = 0$) lorsque le désalignement est d'environ $\varepsilon = 50\%$, chacune des têtes de lecture étant alors située à mi-chemin entre deux pistes. Les taux de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté subissent également une baisse pour $\varepsilon = 50\%$ mais on remarque que ces derniers semblent moins sensibles à de faibles pertes d'alignement comparativement à la capacité. La pente des courbes au voisinage de la valeur $\varepsilon = 0$ est en effet presque nulle dans le cas

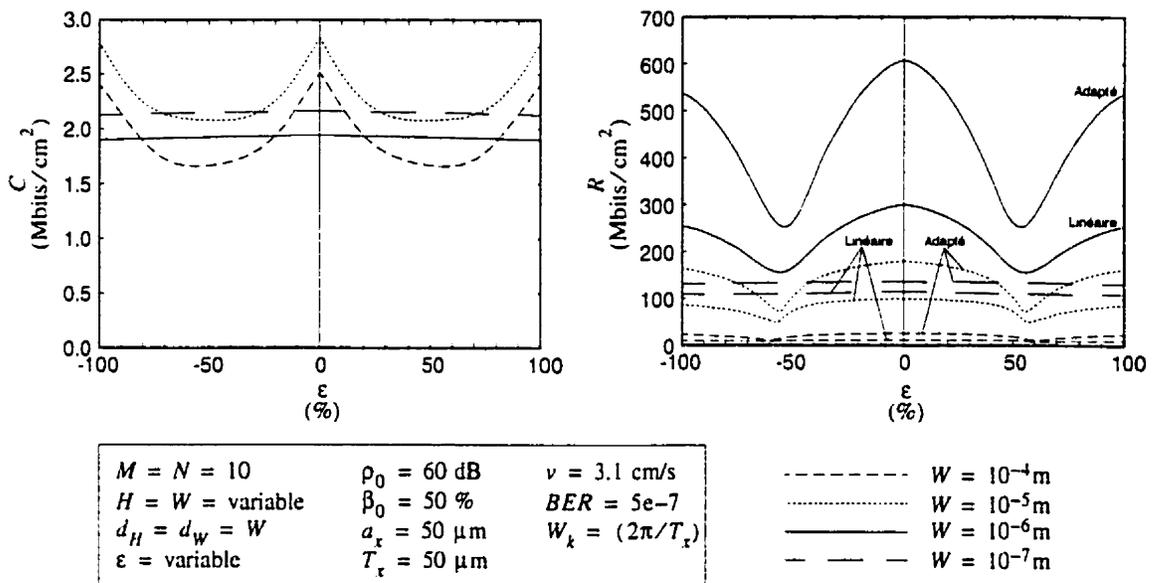


Figure 4.14 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du facteur de désalignement ε

des égaliseurs alors que celle correspondant aux courbes de la capacité est relativement élevée dans les mêmes conditions.

Il est intéressant de constater que lorsque la largeur des pistes et des têtes devient extrêmement faible (i.e. $W = 10^{-7} \text{ m}$), le désalignement n'a pratiquement plus d'effet sur la capacité et les bornes d'égalisation. Le signal total reçu par une tête de lecture est dans ce cas non-seulement composé du signal induit par la piste sous-jacente mais provient également des pistes adjacentes qui fournissent un signal d'amplitude non-négligeable. Ainsi, lorsqu'il y a désalignement et que la tête se retrouve entre deux pistes, le signal total

reçu par une tête ne change pas de façon significative puisque cette dernière est toujours dans la zone d'influence des pistes.

4.5.8 Influence de la fraction de bruit impartie au bruit électronique

Jusqu'à maintenant, nous supposons que les sources de bruit du système de référence étaient composées à parts égales de bruit d'origine électronique et magnétique, i.e. $\beta_0 = 50\%$ ¹. La figure 4.15 démontre que l'effet de ce paramètre est appréciable sur la valeur de la capacité et des bornes d'égalisation (dans ce dernier cas, on notera que les courbes sont tracées à l'échelle logarithmique). On y constate que lorsque le bruit est uniquement d'origine magnétique, i.e. $\beta_0 = 0\%$, la capacité des systèmes munis de pistes de faible largeur est plus élevée que celle de ceux dont les pistes sont plus larges alors que l'inverse est vrai pour un bruit d'origine uniquement électronique, i.e. $\beta_0 = 100\%$. Du côté de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté, on constate une tendance similaire puisque les taux correspondant aux pistes étroites diminuent en fonction de β_0 alors que l'inverse

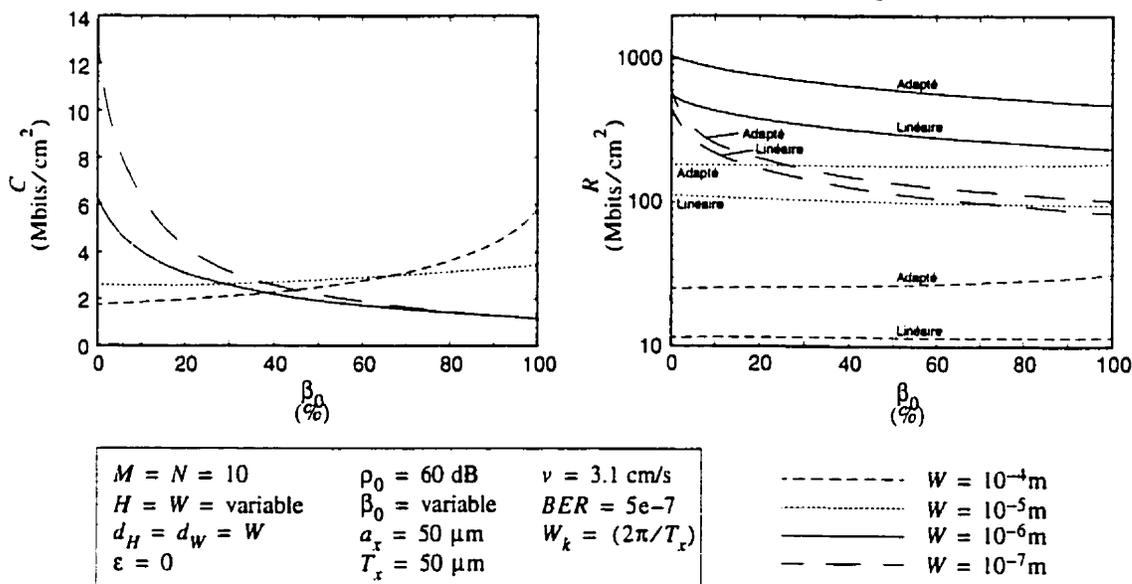


Figure 4.15 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du pourcentage de bruit électronique β_0 du système de référence, $\rho_0=60\text{dB}$

1. Rappelons que ce paramètre représente la contribution de puissance relative du bruit d'origine électronique à la puissance totale du bruit pour le système de référence.

se produit pour des pistes de largeur plus élevée. La figure 4.16 reproduit les mêmes courbes que celles de la figure 4.15 mais pour un rapport signal sur bruit $\rho_0 = 40\text{dB}$ plutôt que $\rho_0 = 60\text{dB}$. On y constate que les tendances relevées sur la figure 4.15 y sont présentes et même accentuées pour de grandes valeurs de β_0 .

4.5.9 Influence de la configuration géométrique des têtes et des pistes

Les résultats numériques présentés aux sections précédentes considèrent l'utilisation d'un système d'enregistrement magnétique où les têtes de lecture et les pistes sont en nombre égal et de même largeur. Évidemment, de telles configurations géométriques ne représentent qu'un échantillonnage très restreint de toutes les possibilités disponibles. Nous nous attarderons donc dans cette section à évaluer de façon numérique les performances de systèmes d'enregistrement magnétique dont la configuration géométrique des têtes de lecture est différente. Par contraste, nous utiliserons à la section subséquente une approche analytique pour déterminer la configuration géométrique optimale des pistes dans un cas particulier.

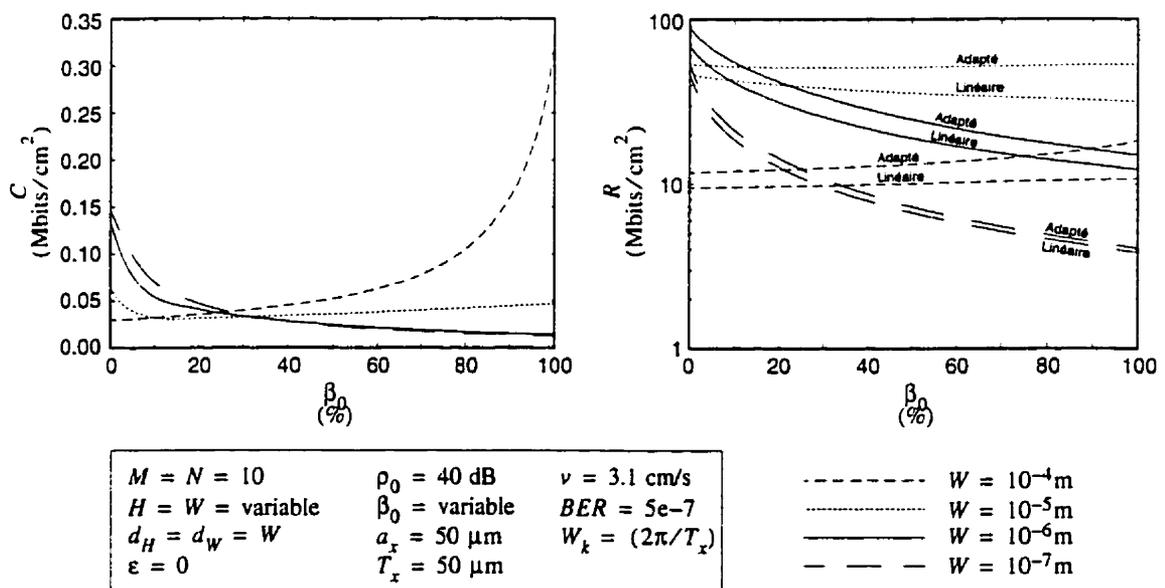


Figure 4.16 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du pourcentage de bruit électronique β_0 du système de référence, $\rho_0=40\text{dB}$

Alors que dans les sections précédentes toute l'information disponible (i.e. les signaux des M têtes de lecture) servait à l'évaluation de la capacité et des bornes d'égalisation, l'utilisation d'un nombre restreint de têtes pour la lecture d'une piste déterminée permet de réduire la complexité du détecteur/égaliseur en vue de sa mise en oeuvre éventuelle, un système complet de lecture utilisant plusieurs de ces systèmes simplifiés en parallèle. Nous présentons donc au tableau 4.1 les résultats numériques, *par ordre croissant de capacité*, correspondant à la lecture de la piste centrale suivant différentes configurations géométriques des têtes de lecture pour un système muni de 21 pistes de même largeur $W = 1\mu\text{m}$ dont le pas de répétition spatial est $d_w = 1\mu\text{m}$ (il y a absence de bande de garde). Le rapport signal sur bruit du système de référence est $\rho_0 = 60\text{ dB}$, la part de bruit électronique est $\beta_0 = 50\%$ et tous les autres paramètres sont identiques à ceux utilisés jusqu'à maintenant (voir (4.45)).

Dans le cas de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté, les valeurs présentées sont celles du taux R associé à la piste centrale (i.e. la 11^{ème} piste du système muni de 21 pistes) tels qu'évaluées de façon numérique à l'aide de la valeur de l'EQMM donnée en (2.64) et (2.65) lorsque $n = 11$. On remarque qu'une augmentation du nombre de pistes au delà de 21 n'affecte pas de façon significative les valeurs présentées puisque les pistes se situant aux extrémités ne contribuent pas de façon significative au signal induit dans les têtes de lecture se situant à proximité de la 11^{ème} piste. Il s'ensuit que le taux de transmission total d'un système comportant un grand nombre de piste N_2 dont la lecture s'effectue par un nombre équivalent de constellations indépendantes de têtes de lecture (les constellations étant identiques entre elles mais chacune étant centrée au-dessus d'une piste différente) se calcule approximativement comme $N_2 R$.

Dans le cas de la capacité où nous n'avons pas accès sur une base individuelle à la valeur correspondant à la piste centrale, le tableau fournit plutôt la valeur de la capacité totale du système divisée par le nombre de pistes, i.e. la capacité moyenne par piste. Lorsque la distribution des têtes de lecture sur les pistes est cependant uniforme (les cas "n" à "t" du tableau) et que le nombre de pistes est élevé, la valeur de la capacité moyenne par piste

Tableau 4.1 Capacité et bornes d'égalisation pour différentes configurations géométriques des têtes d'un système muni de 21 pistes

Configuration ⁽¹⁾	Taux par piste (bits/cm)			
	Position des têtes (5 pistes sur 21 montrées)	M	Capacité moy	Égaliseur linéaire
a) 	1	40	8 439	24 332
b) 	1	65	13 657	36 421
c) 	1	77	12 555	30 987
d) 	3	95	26 720	58 380
e) 	5	99	28 231	59 330
f) 	3	104	25 488	57 565
g) 	5	111	27 883	59 468
h) 	3	115	24 131	53 263
i) 	3	127	21 415	51 300
j) 	2	143	13 183	39 511
k) 	6	171	32 355	75 738
l) 	10	180	34 636	77 388
m) 	3	200	13 413	45 101
n) 	21	217	28 955	59 802
o) 	1	312	152	152
p) 	42	334	35 901	76 369
q) 	42	394	36 223	78 084
r) 	2	535	152	153
s) 	63	552	40 472	89 251
t) 	21	2 227	153	153

Largeur des têtes

- H = W/8
- ▨ H = W/4
- ▧ H = W/2
- ◻ H = W/1

Décisions basées sur un nombre limité de têtes autour de la piste centrale

Décisions basées sur toutes les têtes du système complet

(1) Le positionnement longitudinal des têtes sur les pistes n'affecte pas la capacité ou les taux de transmission

tend vers celle de la capacité par piste, le grand nombre de pistes faisant en sorte d'éliminer les effets de bord.

Un examen du tableau montre que dans le cas d'une tête de lecture unique centrée au-dessus de la piste centrale (i.e. les cas a), b) et c)), les bornes d'égalisation sont maximales lorsque la largeur de la tête correspond à environ 0.7 fois la largeur de la piste, une tête de largeur supérieure ou inférieure menant à des performances moindres. Dans ce cas, deux phénomènes antagonistes entrent en ligne de compte. L'équation (4.5) démontre dans un premier temps que l'amplitude du signal induit dans la tête de lecture par la piste sous-jacente est principalement tributaire de la largeur de contact directe W_d entre les deux. Comme la puissance du bruit blanc est constante dans tous les cas, la valeur du rapport signal sur bruit sera supérieure lorsque la tête de lecture sera la plus large possible. Notons à cet égard qu'il est inutile d'augmenter la largeur de la tête au delà de la largeur de la piste puisque W_d est maximum lorsque la tête et la piste sont de largeur identique. On remarque dans un deuxième temps qu'une augmentation de la largeur de la tête conduit à un accroissement de la puissance du bruit magnétique (voir (4.18)) et des interférences provenant des pistes adjacentes, ce qui tend à diminuer la valeur des bornes. La largeur optimale de la tête de lecture mentionnée précédemment représente donc le point d'équilibre entre ces deux phénomènes opposés. Pour ce qui est de la valeur de la capacité, le tableau indique simplement qu'elle augmente en fonction de la largeur de la tête, ce qui est mis en évidence par le cas o) où une seule tête de lecture surplombe l'ensemble des pistes.

Le tableau démontre également que l'ajout d'une tête supplémentaire de chaque côté de la tête centrale (i.e. les cas d), f), h) et i)), permet d'augmenter la valeur des bornes d'égalisation. Il semble donc que les interférences induites dans la tête centrale par les pistes adjacentes puissent être en partie éliminées grâce à l'information recueillie par les têtes adjacentes. Nos résultats montrent aussi que la valeur maximale des bornes d'égalisation est atteinte lorsque les têtes adjacentes sont centrées au-dessus des pistes et que leur largeur est de $W/4$ (i.e. le cas d)). Notons que le cas h) où les deux têtes de

lecture périphériques sont directement adjacentes à la tête centrale (plutôt que centrées au-dessus des pistes) et de largeur $W/2$ est celui étudié par Voois et Cioffi (1994). L'ajout de têtes supplémentaires de chaque côté des trois têtes existantes (i.e. les cas e), g) et n)) permet d'augmenter encore plus la valeur de la capacité et des bornes d'égalisation mais dans une moindre mesure. Notons que les résultats de nos simulations montrent qu'en général la largeur optimale (pour les bornes d'égalisation) des pistes adjacentes est une fonction complexe de leur nombre et de leur position par rapport aux pistes. On remarque cependant qu'elle tend vers la largeur des pistes lorsque le nombre de têtes adjacentes est élevé.

Dans le cas des configuration présentées en j), k), l) et q), nous avons dédoublé les constellations de têtes correspondant respectivement aux cas c), d), e) et n). Les signaux induits dans chacune des têtes sont ainsi échantillonnés à deux reprises et seules les source de bruit, supposées indépendantes d'une tête à l'autre, les différencient. Évidemment, le simple ajout de têtes supplémentaires ne peut entraîner la baisse des valeurs de la capacité et des bornes d'égalisation puisqu'il suffirait d'ignorer les signaux provenant des têtes supplémentaires pour atteindre les valeurs obtenues en leur absence. Les résultats indiquent cependant que le gain obtenu à l'aide de cet ajout est plus important dans le cas de la capacité que celui des bornes d'égalisation. Dans ce dernier cas, le gain semble également plus important pour des configurations munies d'un plus grand nombre de têtes de lecture adjacentes à la tête centrale. Le gain engendré par le dédoublement des constellations ne semble donc accessible aux égaliseurs que lorsque les interférences provenant des pistes adjacentes sont bien maîtrisées par la présence de têtes de lectures adjacentes. Les configurations m), p) et s) démontrent qu'une augmentation supplémentaire des taux est possible lorsque les constellations sont dédoublées à plusieurs reprises. Dans ce cas le gain supplémentaire est cependant moindre que précédemment. Notons que dans le cas p), les têtes de lecture appartenant à la constellation dédoublée sont de largeur différente de celle de la constellation originale.

Nous présentons finalement en o) un système pour lequel une tête de lecture unique surplombe l'ensemble des pistes (i.e. la largeur de la tête de lecture est donnée par $H = 21W$ où W représente la largeur des pistes), les cas r) et t) étant respectivement munis de 2 et 21 de ces têtes de lecture. On constate que la valeur de la capacité augmente de façon importante par rapport au cas n) qui utilisait plutôt 21 têtes de lecture étroites pour couvrir l'ensemble des pistes. Évidemment, les interférences engendrées par la superposition des signaux induits dans la tête de lecture par les 21 pistes ne peuvent être traitées de façon convenable par l'égaliseur linéaire et le filtre adapté, ce qui se traduit par une chute dramatique de la valeur des taux pour ces derniers. On constate que l'ajout de constellations supplémentaires dans les cas r) et t) n'améliore guère la valeur des bornes d'égalisation mais contribue de façon remarquable à l'augmentation de la valeur de la capacité.

Fait intéressant à remarquer pour ces systèmes (i.e. des systèmes munis de têtes de lecture, unique ou multiple, de largeur $H = NW$ où W représente la largeur des pistes), la valeur de la capacité ne dépend que de la largeur totale H occupée par les pistes. Ainsi, pour une largeur H donnée, la capacité d'un système muni de N_1 pistes de largeur W_1 sera la même que celle d'un système muni de N_2 pistes de largeur W_2 lorsque l'égalité $N_1W_1 = N_2W_2 = H$ est respectée. Nous nous attardons à la section suivante à prouver cette affirmation dans le cadre plus général de l'étude de la configuration géométrique optimale des pistes pour de tels systèmes.

4.6 Analyse du cas de têtes de lecture surplombant l'ensemble des pistes

Nous déterminons dans cette section la configuration géométrique des pistes menant à la valeur maximale de la capacité dans le cas particulier d'un système d'enregistrement magnétique muni d'une ou de plusieurs têtes de lecture surplombant l'ensemble des pistes (i.e. toutes les pistes se situent entièrement sous l'ensemble des têtes de lecture). Nous démontrons de plus que lorsque N pistes de largeur constante W occupent une largeur totale $NW \leq H$ constante, la valeur de la capacité est indépendante de N et W .

Pour le système considéré, les N pistes de largeur W_l , $l = 1 \dots N$ se retrouvent directement sous les M têtes de lecture de largeur H . Le terme de couplage de proximité $\tilde{G}_s(k)$ dans (4.4) est dans ce cas nul pour toutes les composantes de la matrice de canal $\tilde{G}(k)$ (voir (4.9)) qui peut alors s'écrire comme

$$\tilde{G}_{ml}(k) = jV_0kW_l \quad m = 1 \dots M, \quad l = 1 \dots N \quad (4.46)$$

où nous imposons la condition suivante sur la largeur totale occupée par les pistes

$$\sum_{l=1}^N W_l \leq H \quad (4.47)$$

Lors de l'évaluation de la capacité (voir (4.29)), le calcul de l'unique valeur propre non nulle¹ de la matrice $|\tilde{N}(k)^{-1/2}\tilde{P}(k)|^2$ de dimensions $M \times N$ donne (rappelons que $\tilde{P}(k) = \tilde{Q}(k)\tilde{G}(k)$)

$$\lambda_1(k) = \frac{|\tilde{Q}(k)|^2}{\tilde{S}_n(k)} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N |\tilde{G}_{ml}(k)|^2 \quad (4.48)$$

qu'on peut récrire à l'aide de (4.46) comme

$$\lambda_1(k) = \frac{|\tilde{Q}(k)|^2}{\tilde{S}_n(k)} k^2 V_0^2 M \sum_{l=1}^N W_l^2 \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

En substituant cette valeur dans les expressions (4.29) et (4.30) donnant la capacité, on obtient

$$C_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \log_2 \left[\frac{|\tilde{Q}(k)|^2 k^2 V_0^2 M \sum_{l=1}^N W_l^2}{\lambda \tilde{S}_n(k)} \right] dk \quad \text{bits/m} \quad (4.51)$$

et

1. Comme toutes les lignes de $\tilde{G}(k)$ sont identiques, le rang de cette matrice est unitaire et il n'y a alors qu'une seule valeur propre non-nulle.

$$N = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{\bar{S}_n(k)}{|\bar{Q}(k)|^2 k^2 V_0^2 M \sum_{l=1}^N W_l^2} \right] dk \quad (4.52)$$

où, souvenons-nous, nous avons $S = N$. Si on pose à présent

$$Z = V_0^2 M N \sum_{l=1}^N W_l^2$$

$$\lambda' = \frac{N\lambda}{Z}$$

$$\lambda'_1(k) = \frac{N\lambda_1(k)}{Z} = \frac{|\bar{Q}(k)|^2}{\bar{S}_n(k)} k^2 \quad (4.53)$$

on peut récrire (4.51) et (4.52) comme

$$C_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \log_2 \left[\frac{\lambda'_1(k)}{\lambda'} \right] dk \quad \text{bits/m} \quad (4.54)$$

et

$$Z = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda'_1(k)} \right] dk \quad (4.55)$$

Il est à présent possible d'interpréter cette paire d'équations comme l'expression permettant d'évaluer la capacité d'un système dont l'unique valeur propre $\lambda'_1(k)$ est indépendante de M , N , W_l et H , et où la contrainte de puissance moyenne totale est donnée par Z . La valeur maximale de la capacité que l'on cherche à déterminer sera évidemment atteinte lorsque la puissance moyenne totale Z sera maximale (Gallager, 1968). On cherche donc

$$Z_{\max} = \max [Z] = \max \left[V_0^2 M N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H \quad (4.56)$$

Les paramètres variables de cette équation étant $M, N, W_l, l = 1 \dots N$ et H on peut écrire

$$Z_{\max} = \max_{\substack{M, N, \\ W_l, H}} \left[V_0^2 M N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H \quad (4.57)$$

En effectuant la maximisation en premier lieu par rapport à la variable M , on peut récrire cette expression comme

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} \max_{\substack{N, W_l, \\ H}} \left[N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H \quad (4.58)$$

où M_{\max} est le nombre maximum de têtes de lecture disponibles. Notons que des contraintes physiques liées à la granulation du milieu magnétique font en sorte que la largeur des pistes ne peut tendre vers zéro. En pratique, le problème se réduit donc à trouver Z_{\max} sous des conditions supplémentaires quant à la largeur minimale et maximale des pistes. La largeur maximale est déjà bornée par $W_{\max} = H$ par l'intermédiaire de la condition (4.47), i.e. $\sum_{l=1}^N W_l \leq H$. Si nous définissons W_{\min} comme la largeur minimale des pistes, (4.58) devient

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} \max_{\substack{N, W_l, \\ H}} \left[N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H, \quad W_{\min} \leq W_l \quad (4.59)$$

Il est possible d'effectuer la maximisation de cette équation en deux temps. Fixons en premier lieu la valeur de H et procédons à la maximisation en fonction des autres paramètres, i.e. W_l et N . Le détail des calculs de cette maximisation est donné à l'annexe K et nous en reproduisons ci-après les principaux résultats. La valeur maximum de Z pour une valeur de H donnée est

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} \frac{(H + 2W_{\min})^2 (4H - W_{\min})}{27W_{\min}} \quad (4.60)$$

Cette valeur est atteinte lorsque le nombre de pistes ainsi que leur largeur respective sont donnés par

$$N = \frac{H + 2W_{\min}}{3W_{\min}}$$

$$W_l = \begin{cases} H - (N - 1)W_{\min} = (2H + W_{\min})/3 & l = 1 \\ W_{\min} & l \neq 1 \end{cases} \quad (4.61)$$

Dans la réalité, la valeur de N ne peut être qu'entière et on choisira donc évidemment comme valeur pratique la partie entière conduisant à la valeur maximum de Z_{\max} . En substituant (4.60) dans (4.55) on obtient

$$V_0^2 M_{\max} \frac{(H + 2W_{\min})^2 (4H - W_{\min})}{27W_{\min}} = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda'_1(k)} \right] dk \quad (4.62)$$

Notons que lorsque $W_{\min} \rightarrow 0$, la partie gauche de l'équation (qui correspond à la puissance moyenne totale lors du calcul de la capacité) tend vers l'infini et la valeur de la capacité est alors également infinie, ce cas correspondant à celui d'un système muni d'un nombre infini de pistes dont une est de largeur $2H/3$ et $N-1$ sont de largeur infinitésimale. On constate également que la capacité tend vers l'infini lorsque le nombre de têtes $M_{\max} \rightarrow \infty$, ce qui représente l'effet que produit l'échantillonnage multiple (la seule différence entre les signaux des têtes de lecture se réduisant à l'indépendance de leur source respective de bruit).

Le tableau 4.2 confirme ces résultats alors qu'on y donne la valeur de la capacité et des bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes N d'un système dont les paramètres sont identiques à ceux utilisés au tableau 4.1 et dont l'unique tête de lecture est de largeur $H = 10e-5m$, la largeur des pistes étant déterminée à l'aide de la seconde expression donnée en (4.61). On y constate que la valeur maximum de la capacité est atteinte lorsque

$N = 4$ et $W_1 = 7e-5m$, ce qui correspond effectivement à ce qu'on calcule à l'aide de la première expression donnée en (4.61).

Tableau 4.2 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes pour $W_{\min}=10^{-5}m$

N	W_1 (m)	C (bits/cm)	$R_{\text{linéaire}}$ (bits/cm)	$R_{\text{adapté}}$ (bits/cm)
1	10e-5	25 130	114 140	266 451
2	9e-5	33 838	61 914	66 211
3	8e-5	37 566	41 785	43 355
4	7e-5	38 576	28 804	29 656
5	6e-5	37 771	19 498	19 812
6	5e-5	35 654	12 743	12 876
7	4e-5	32 643	8 033	8 086

Si on pose plutôt $W_{\min} = 0.17e-5m$, (4.61) donne $N = 20$ et $W_1 = 0.677e-5m$ et la valeur correspondante de la capacité est $C = 74\,357$ bits/cm. Cet accroissement substantiel de la valeur optimale de la capacité lorsque W_{\min} diminue et N augmente confirme la discussion précédente, à savoir: la valeur maximale de la capacité est atteinte pour un nombre de pistes $N \rightarrow \infty$ de largeur $W_{\min} \rightarrow 0$.

Rappelons que ces résultats supposent constante la largeur H de la tête de lecture. Afin de déterminer la valeur maximale de Z en fonction de cette variable, procédons à présent à la maximisation de l'équation (4.60) en fonction de H , i.e.

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} \max_H \left[\frac{(H + 2W_{\min})^2 (4H - W_{\min})}{27W_{\min}} \right] \quad (4.63)$$

La dérivée de cette expression par rapport à H est

$$\frac{dZ_{\max}}{dH} = V_0^2 M_{\max} \frac{(H + 2W_{\min})(2H + W_{\min})}{9W_{\min}} \quad (4.64)$$

Comme nous avons $H \geq W_{\min} > 0$, cette dérivée sera toujours strictement supérieure à zéro et il s'ensuit que Z_{\max} est une fonction strictement croissante en fonction de H . La valeur maximum de Z_{\max} et de la capacité sera donc atteinte pour une valeur maximum H_{\max} de H .

4.6.1 Le cas de pistes de même largeur

Étudions à présent le cas où la largeur de toutes les pistes est la même, i.e. $W_l = W = aH/N$ où $0 < a \leq 1$, la largeur totale occupée par les pistes étant de $NW = aH$ (a représente donc la fraction de l'espace utilisé sous la tête de lecture). Sous ces conditions, l'équation (4.59) devient

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} (aH)^2 \quad (4.65)$$

que l'on peut substituer dans (4.55) pour obtenir

$$V_0^2 M_{\max} (aH)^2 = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda'_1(k)} \right] dk \quad (4.66)$$

de sorte que la partie gauche de l'expression représente la puissance moyenne totale. Cette expression indique que la valeur de la capacité donnée en (4.51) est indépendante du nombre de pistes N mais dépend de la largeur totale aH qu'elles occupent. La valeur maximum de la capacité est atteinte pour $a = 1$ (i.e. pour des pistes de largeur H/N). Le tableau 4.2 illustre ce résultat pour un système dont les paramètres sont identiques à ceux du tableau 4.2. On y constate que lorsque $a = 1$, la valeur de la capacité est la même pour les systèmes munis de 1, 4 ou 20 pistes à condition que la largeur totale occupée par ces dernières soit ajustée de telle façon que $H = 10e-5$ m. On y constate également que la valeur de la capacité diminue lorsque la fraction de l'espace utilisé sous la tête de lecture passe à $a = 0.4$, en accord avec (4.66), et reste constante pour différentes valeurs de N , comme il se doit.

Ce tableau démontre une fois de plus l'incapacité des égaliseur à traiter les interférences puisqu'on y constate une chute importante des taux lorsque le nombre de pistes N est

supérieur à 1. On peut se demander à juste titre si l'augmentation de la largeur de bande permettrait d'améliorer la performance des égaliseurs comme dans le cas du canal radiomobile. La largeur de bande est cependant dictée principalement par le type de signalisation utilisé et dans le cas présent, le spectre des impulsions élémentaires donné en (4.2) montre qu'un élargissement de la largeur de bande requiert un changement de la valeur du paramètre α_x . Nos résultats numériques montrent que ce paramètre n'affecte toutefois pas de façon substantielle la valeur des bornes d'égalisation. Contrairement au canal radiomobile, la largeur de bande du canal d'enregistrement magnétique est surtout limitée par les contraintes physiques imposées par le médium, ce qui n'est pas le cas du canal radiomobile dont la largeur de bande est pratiquement illimitée par rapport à la fréquence de la porteuse.

Tableau 4.3 Capacité et bornes d'égalisation en fonction du nombre de pistes et de a pour des pistes de largeur identique

N	a	W (m)	C (bits/cm)	$R_{\text{linéaire}}$ (bits/cm)	$R_{\text{adapté}}$ (bits/cm)
1	1	10e-5	25 130	114 140	266 451
4	1	2.5e-5	25 130	4 001	4 012
20	1	0.5e-5	25 130	3 205	3 212
1	0.4	4e-5	6 508	113 184	213 116
4	0.4	1e-5	6 508	3 999	4 011

Cette discussion sur la configuration géométrique optimale des pistes dans le cas d'un système muni d'une seule tête de lecture laisse entrevoir que la recherche de la configuration optimale dans le cas général (i.e plusieurs têtes et pistes) est un problème ardu. Il peut s'énoncer comme suit. Étant donnée une largeur maximale de médium disponible et une condition sur les largeurs minimale et maximale des pistes et des têtes de lecture, quelle est la configuration géométrique menant à la valeur maximale de la capacité? Nous ne nous attarderons pas ici à résoudre ce problème général mais nous considérerons plutôt une approche intuitive simple faisant appel aux résultats précédents

et qui s'avère malheureusement insuffisante. Cette approche consiste à choisir à partir de la figure 4.9 le nombre de têtes de lecture de largeur uniforme donnant la valeur maximale de la capacité lorsqu'on dispose d'une largeur donnée de médium. On choisit ensuite la configuration optimale des pistes sous chacune de ces têtes à l'aide de (4.61). Nous donnons ci-dessous un exemple des résultats qu'elle fournit en plus de démontrer que d'autres configurations mènent en fait à une valeur de capacité plus élevée.

Si on se rapporte pour un instant à la figure 4.9, on constate qu'en fixant la largeur totale occupée par les pistes (e.g. $NW = 10^{-5}$ m) et en cherchant le nombre N de têtes de lecture permettant d'atteindre la valeur maximale de la capacité, on obtient une valeur de N qui varie selon la valeur de NW choisie. Par exemple, lorsque $NW = 10^{-5}$ m, la valeur maximale de la capacité est atteinte pour $N = 40$ (la largeur des pistes est alors $(NW)/N = 2.5e-7$ m). Lorsque $NW = 10^{-4}$ m, le maximum est cependant atteint pour $N = 4$ ($W = 2.5e-5$ m, notons que la courbe correspondant à $N = 4$ n'est pas montrée sur la figure, la courbe la plus près étant celle où $N = 5$). Il est possible de mieux observer les variations en se reportant à la figure 4.17 où la valeur de la capacité est explicitée en fonction de la largeur des pistes pour différentes valeurs de la largeur totale NW occupée par ces dernières.

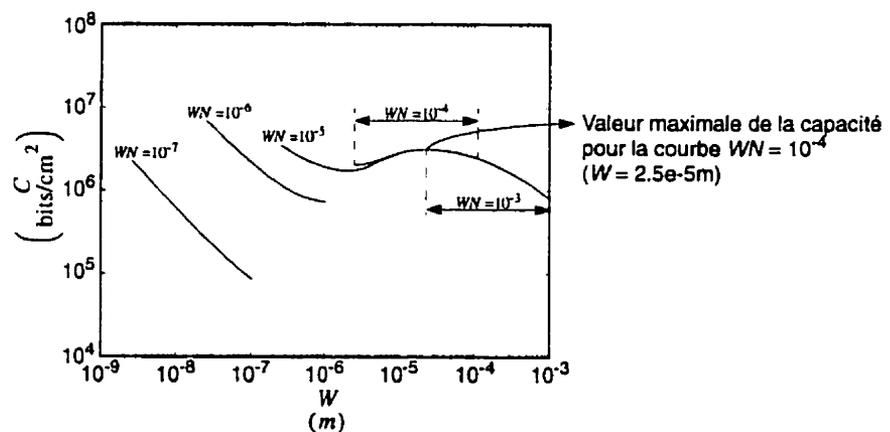


Figure 4.17 Capacité en fonction de la largeur des pistes pour différentes valeurs de la largeur totale occupée par les pistes

Si on reprend l'exemple précédent où $NW = 10^{-4} \text{ m}$ on constate que la valeur maximale de la capacité est atteinte lorsque $W \approx 2.5e-5 \text{ m}$ ($N = NW/W = 4$) sur la courbe, ce qui confirme la valeur donnée précédemment. Notons que les courbes sont tracées uniquement pour des valeurs de N variant de 1 à 40 mais on peut anticiper qu'elles tendraient toutes à l'infini si elles étaient tracées pour des valeurs $W \rightarrow 0$. Dans ce cas la valeur maximale de la capacité pour NW donnée tend toujours vers l'infini. Ce résultat est en accord avec le précédent dans le cas d'un système d'enregistrement muni d'une tête de lecture unique. On se souviendra cependant que nous avons alors imposé des contraintes supplémentaires quant à la largeur minimum des pistes. En posant la même condition dans le cas présent, la valeur maximum de la capacité dépendra dès lors de la largeur minimum des pistes. Par exemple, lorsque $NW = 10^{-4} \text{ m}$, la valeur maximum de la capacité sans cette condition tend vers l'infini (en extrapolant la courbe pour $W \rightarrow 0$ petit) tandis qu'en ajoutant la condition $W_{\min} = 10^{-5} \text{ m}$, le maximum est atteint pour $W \approx 2.5e-5 \text{ m}$.

Il peut être tentant d'utiliser le point optimum ainsi obtenu afin de déterminer le nombre de têtes d'un système utilisant une largeur donnée de médium et d'utiliser ensuite (4.61) individuellement pour chacune des têtes et trouver ainsi la configuration correspondante des pistes. Ce faisant, nous négligeons cependant les interférences produites entre pistes adjacentes. Le tableau 4.2 donne à la ligne $N = 36$, $M = 4$ la capacité d'un système construit de cette façon et pour lequel la largeur totale occupée par les pistes est $W_{\text{tot}} = 10^{-4} \text{ m}$ et leur largeur minimum est $W_{\min} = 10^{-6} \text{ m}$. Malheureusement, les autres lignes du tableau montrent que d'autres configurations approchent et même dépassent la valeur obtenue par cette approche intuitive, ce qui indique tout simplement que la configuration conduisant à la valeur maximale de la capacité doit être déterminée à l'aide d'une approche plus systématique. On remarque qu'elle permet néanmoins des gains appréciables par rapport à la configuration $N = 4$, $M = 4$ où les pistes et les têtes sont régulièrement espacées et de largeur uniforme.

Tableau 4.4 Capacité et bornes d'égalisation lorsque la largeur totale des pistes est $W_{\text{tot}}=10^{-4}\text{m}$ pour différentes configurations géométriques des têtes et des pistes, $W_{\text{min}}=10^{-6}\text{m}$

N	M	C (bits/cm)	$R_{\text{linéaire}}$ (bits/cm)	$R_{\text{adapté}}$ (bits/cm)	Commentaire
1	1	25 130	114 140	266 451	La plus simple configuration, une piste et une tête de largeur W_{tot}
4	4	59 546	312 055	541 642	Configuration optimale de la figure 4.17 pour des têtes et pistes de la même largeur et espacées régulièrement
34	1	87 876	72 965	80 078	Configuration optimale donnée par (4.61) pour 1 tête de largeur W_{tot}
36	4	88 457	175 526	227 768	Nombre de têtes choisi à l'aide de la figure 4.17 et pistes optimisées pour chacune à l'aide de (4.61)
34	2	100 438	118 398	125 146	2 têtes d'égale largeur $W_{\text{tot}}/2$ et pistes optimisées pour chacune à l'aide de (4.61)

CHAPITRE V CONCLUSION

L'objectif du travail rapporté dans cette thèse était d'évaluer l'impact de la diversité spatiale et temporelle ainsi que celui des contraintes fréquentielles sur les taux de transmissions admissibles dans un contexte pragmatique d'égalisation linéaire et idéale basée sur la borne du filtre adaptée pour le canal multivariable gaussien coloré et de comparer les résultats obtenus à ceux de la capacité de Shannon. Pour atteindre cet objectif, nous avons présenté l'expression d'une borne supérieure sur le taux d'erreur dans le cas d'un égaliseur linéaire à combinaison optimale dont le critère d'optimisation est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre l'entrée et la sortie d'un système utilisant la modulation d'amplitude en quadrature. Une dépendance explicite entre cette borne et les paramètres du système ainsi que son comportement en regard des bornes dites optimales du filtre adapté (matched filter) et de la capacité (au sens de la Théorie de l'Information) de Shannon est alors obtenue.

Ces résultats, dérivés dans le cadre général du canal gaussien coloré, ont ensuite été spécialisés à deux types distincts de systèmes de communications. Dans un premier temps, nous avons étudié le modèle du canal radiomobile numérique caractérisé par des évanouissements sélectifs en fréquence reliant N mobiles à un récepteur muni de M antennes déployées en diversité d'espace. Comme ce canal est variable dans le temps, une approche quasi-statique a permis l'utilisation de simulations numériques afin d'émuler les réalisations du canal et d'évaluer le taux de coupure correspondant. Dans un deuxième temps, nous avons spécialisé nos résultats généraux au cas du canal d'enregistrement magnétique multi-têtes multi-pistes et étudié l'influence des divers paramètres physiques et géométriques du système sur les taux d'égalisation et la capacité. Nous présentons maintenant un résumé des principaux résultats obtenus dans cette thèse.

5.1 Contributions de la thèse

Les sections qui suivent présentent les principales contributions de cette thèse à l'avancement de nos connaissances selon les trois axes qui la composent. L'importance de ces contributions relève principalement de l'hypothèse voulant que les canaux de transport et de stockage des données numériques se révèlent être une ressource limitée dont l'utilisation efficace est primordiale pour le développement de systèmes à haute performance. Nous pensons que cette étude théorique qui concerne l'impact des techniques de diversité sur les performances ultimes que ces canaux sont en mesure de supporter contribue efficacement à cet important objectif technique.

5.1.1 Le cas général du canal multivariable gaussien coloré

Nous avons présenté une extension de la borne de Saltzberg (1968) au cas multivarié général et montré comment elle pouvait être utilisée pour extrapoler des résultats préliminaires dus à Foschini et Salz (1983). Nos résultats permettent de relier explicitement le taux de transmission maximum que supporte un canal multivariable gaussien coloré au taux d'erreur maximum imposé au système par l'intermédiaire de l'erreur quadratique moyenne minimum (EQMM) dans le contexte de l'égalisation linéaire et du filtrage adapté. L'évaluation de ces bornes supérieures et de la capacité, au sens de la théorie de l'information de Shannon, permet de mieux cerner les effets de contraintes diverses sur les performances de l'égalisation et de la capacité de systèmes qui peuvent être modélisés à l'aide de ce type de canal.

5.1.2 Le cas du canal radiomobile

Nous avons en premier spécialisé ces résultats généraux au cas du canal radiomobile numérique affecté par des évanouissements sélectifs en fréquence reliant N mobiles à un récepteur muni de M antennes déployées en diversité d'espace. Plusieurs résultats numériques ont été présentés (dans le texte principal et à l'annexe D) pour 3 types de modélisation statistique du canal variable dans le temps et pour 3 formes de profil

multivoies. Ces simulations, auxquelles se sont ajoutés quelques analyses mathématiques, ont permis de confirmer dans le cas général du canal multivariable soumis à des évanouissements sélectifs en fréquence les résultats suivants:

- La valeur de la capacité et celle des bornes d'égalisation semblent peu affectées par la forme du profil multivoies utilisé pour modéliser le canal, l'étalement efficace du retard se révélant être le facteur le plus important.
- L'étude d'un cas particulier montre que lorsque le taux moyen d'arrivée des raies est le même pour les modèles à arrivées discrètes et par salves, les taux de coupure de la capacité, de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté sont relativement semblables pour les deux modèles.
- Lorsqu'on fait varier le nombre d'antennes et de mobiles, nos résultats numériques montrent que le taux de coupure de la capacité moyenne par mobile augmente selon le nombre d'antennes réceptrices M . Ceci est également vérifié par la borne du filtre adapté lorsque la valeur efficace du retard τ_{rms} est grande. Lorsque τ_{rms} est faible, le taux de coupure de ce filtre augmente plutôt en fonction de la différence entre le nombre d'antennes et de mobiles $M - N$. Ce comportement pour de faibles valeurs efficaces du retard se rencontre également pour l'égaliseur linéaire mais cette fois pour toutes les valeurs efficaces du retard. Dans ce contexte, on peut interpréter une augmentation de la valeur efficace du retard comme contribuant à l'amélioration des performances du filtre adapté qui passe d'un comportement en fonction de $M - N$ à un comportement en fonction de M . Cette augmentation de τ_{rms} n'aide toutefois pas la cause de l'égaliseur linéaire. L'élargissement de la bande de fréquence influence cependant les performances de ce dernier, ce qui fait l'objet du point suivant.
- Il ressort de l'ensemble des résultats numériques que l'égalisation seule ne réussit pas à exploiter le plein potentiel du gain de codage disponible (telle que la valeur de la capacité le démontre) sur un canal caractérisé par des évanouissements de type sélectif en

fréquence, ce qui est particulièrement marqué pour l'égalisation linéaire qui voit ses performances réduites significativement lorsque les interférences augmentent. Le point suivant montre cependant qu'il est possible de compenser partiellement cette baisse par un élargissement de la largeur de bande.

- Les résultats numériques tendent à confirmer l'extension des résultats de Petersen et Falconer (1994) au cas des canaux radiomobiles numériques à évanouissements sélectif en fréquence. Ces résultats suggèrent que toute augmentation de la largeur de bande à l'émission égale au taux de transmission des symboles permet dans le cas de l'égalisation linéaire de supprimer les interférences d'un mobile cocanal supplémentaire lorsque le nombre d'antennes réceptrices est inférieur au nombre de mobiles. On note cependant que dans le cas de la borne du filtre adapté, cet élargissement de la largeur de bande n'est pas nécessaire puisque par hypothèse, le filtre adapté réussit à éliminer totalement l'interférence entre symboles.

- L'analyse du cas particulier d'un canal muni de deux raies et une antennes réceptrice (diversité temporelle) comparativement à un canal muni d'une raie et deux antennes (diversité d'espace) a démontré que la différence du point de vue de la capacité pouvait s'expliquer mathématiquement par la présence ou l'absence d'un additionneur à la sortie du canal opérant avec deux raies. Ce résultat montre clairement que toute mesure statistique de la capacité du canal utilisant la diversité temporelle sera inférieure à la mesure correspondante du canal utilisant la diversité spatiale.

- L'analyse mathématique d'un canal muni de deux raies (diversité temporelle) a permis de démontrer que la capacité devient indépendante des déphasages θ impartis aux raies et du retard relatif τ entre elles lorsque $\tau \rightarrow \infty$. Ceci montre que la capacité tend vers une valeur asymptotique lorsque la séparation entre les raies devient suffisante (i.e. lorsque la valeur efficace du retard est grande). L'extension de ce résultat au cas général du canal à N raies est anticipée mais reste à démontrer.

5.1.3 Le cas du canal d'enregistrement magnétique

Nous avons ensuite étendu les résultats généraux du canal gaussien multivarié au cas du canal d'enregistrement magnétique multi-entrées/multi-sorties magnéto-inductif. Dans le cas de la capacité, nous démontrons que cette dernière représente une borne supérieure sur la capacité vraie du système utilisant la représentation binaire.

Nos résultats suggèrent que les interférences supplémentaires engendrées par le rapprochement des pistes et des têtes de lecture peut s'interpréter comme une redondance implicite (i.e. le signal d'une même piste est reçu par plusieurs têtes de lecture) qui fait en sorte d'augmenter la capacité globale du système, ce qui est particulièrement marqué lorsque le nombre de pistes est grand et que ces dernières sont suffisamment près les unes des autres pour qu'une tête de lecture puisse en recevoir les signaux. Les bornes sur les taux de transmission de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté dans des conditions similaires suggèrent que ces derniers sont incapables de tirer avantage de cette diversité intrinsèque qui leur est plutôt nuisible.

L'étude de différentes configurations géométriques des têtes et des pistes a montré que dans les cas étudiés, une augmentation substantielle de la valeur de la capacité est possible lorsqu'une tête de largeur suffisante pour couvrir un grand nombre de pistes est utilisée. Ceci nous a conduit à étudier analytiquement la configuration géométrique optimale des pistes en fonction d'une tête de lecture de largeur H donnée. Nous en présentons maintenant les principaux résultats:

- Pour un système d'enregistrement magnétique muni d'un nombre quelconque de pistes de largeur minimum W_{\min} surplombées de M têtes de lecture identiques et dont la largeur individuelle H est telle qu'elle suffit à couvrir l'ensemble des pistes, notre borne sur la capacité du canal d'enregistrement magnétique atteindra son maximum lorsque le nombre de pistes N et leur largeur respective $W_p, l = 1 \dots N$ sont donnés par

$$N = \frac{H + 2W_{\min}}{3W_{\min}}$$

$$W_l = \begin{cases} H - (N-1)W_{\min} & l = 1 \\ W_{\min} & l \neq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Sous ces conditions, toute augmentation du nombre de têtes de lecture M ou de leur largeur H aura pour effet d'augmenter la valeur de la capacité.

- En imposant la condition supplémentaire suivante au cas précédent

$$W_l = aH/N, \quad 0 < a \leq 1 \quad (5.2)$$

(i.e. les pistes sont toutes de la même largeur), la borne sur la capacité devient indépendante du nombre de pistes N et ne dépend plus que de la largeur totale aH qu'elles occupent. Dans ce cas, la capacité sera maximale pour $a = 1$ (i.e. pour des pistes de largeur H/N).

Mentionnons aussi que les taux d'égalisation correspondant à l'égaliseur linéaire et au filtre adapté chutent de façon dramatique lorsque le nombre de pistes sous une tête de lecture est supérieur à un. Ceci traduit l'incapacité des égaliseurs à éliminer les interférences produites par la réception sur une seule tête des signaux en provenance de plusieurs pistes. La borne sur la capacité montre cependant qu'un gain de codage important est disponible pour une telle configuration.

5.2 Extensions et nouvelles voies de recherche

Dans le cas du canal d'enregistrement magnétique, nous avons déterminé analytiquement la configuration géométrique des pistes et des têtes de lecture menant à la valeur maximum de la capacité dans le cas particulier de têtes de lecture surplombant individuellement l'ensemble des pistes. L'extension de ce résultat au cas général (i.e. plusieurs têtes de lecture adjacentes) permettrait d'évaluer dans quelle mesure la capacité de la configuration optimale se démarque des configurations simples présentées dans cette

thèse. Évidemment, le problème le plus général se résume à déterminer la configuration géométrique optimale des pistes et des têtes lorsque la largeur disponible du médium est fixée.

Notre borne sur la capacité a permis l'étude de nombreux résultats numériques et analytiques dans le cas du système d'enregistrement magnétique multivarié. Il serait intéressant de les comparer à ceux de la capacité du médium indépendamment de la façon dont l'écriture et la lecture s'effectue (Voois et Cioffi, 1997). D'autre part, il pourrait s'avérer également intéressant de développer une expression plus précise de la capacité du système multivarié à l'aide de conditions supplémentaires quant à la saturation du milieu, au spectre du bruit magnétique et à des conditions supplémentaires sur les taux de variation maximum des signaux sur le médium magnétique (Shamai, Ozarow et Wyner, 1991; Heegard et Ozarow, 1992; Bar-David et Shamai, 1989).

BIBLIOGRAPHIE

AMITAY, N. ET SALZ, J. (1984). Linear equalization theory in digital data transmission over dually polarized fading radio channels, *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, vol. 63, no. 10, 2215-2259.

AMITAY, N. ET GREENSTEIN, L. J. (1984). Multipath outage performance of digital radio receivers using finite-tap adaptive equalizers, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-32, no. 5, 597-608.

BAILEY, C. C. ET LINDENLAUB, J. C. (1968). Further results concerning the effect of frequency-selective fading on differentially coherent matched filter receivers, *IEEE Trans. on Commun. Tech.*, vol. COM-16, 749-751.

BALABAN, P. (1985). Statistical model for amplitude and delay of selective fading, *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, vol. 64, no. 10, 2525-2550.

BALABAN, P. ET SALZ, J. (1991). Dual diversity combining and equalization in digital cellular mobile radio, *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, vol. 40, no. 2, 342-354.

BALABAN, P. ET SALZ, J. (1992). Optimum diversity combining and equalization in digital data transmission with applications to cellular mobile radio, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 40, no. 5, 885-907.

BAR-DAVID, I. ET SHAMAI, S. (1989). Information rates for magnetic recording channels with peak- and slope limited magnetization, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 35, septembre, 956-962.

BARNDT, R. D. ET WOLF, J. K. (1992). Nonlinear intersymbol destruction versus linear intersymbol interference on high density disk drives, *Proc. GLOBECOM '92*.

BAUGH, R. A., MURDOCK, E. S. ET NATARAJAN, B. R. (1983). Measurement of noise in magnetic media, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 19, septembre, 1722-1724.

BELFIORE, C. A. ET PARK, J. H. JR. (1979). Decision feedback equalization, *Proc. IEEE*, vol. 67, août, 1143-1156.

BELLO, P. A. (1963). Characterization of randomly time-variant linear channels, *IEEE Trans. on Commun. Systems*, vol. CS-11, 4-37.

BELLO, P. A. (1969). A troposcatter channel model, *IEEE Trans. on Commun. Tech.*, vol. COM-17, no. 2, 130-137.

BELLO, P. A. ET NELIN, B. D. (1963). The effect of frequency selective fading on the binary error probability of incoherent and differentially coherent matched filter receivers, *IEEE Trans. on Commun. Systems*, vol. CS-11, 170-186.

BERTRAM, H. N. (1986). Fundamentals of the Magnetic Recording Process, *Proc. of the IEEE*, vol. 74, novembre, 1494-1512.

BIC, J.C., DUPONTEIL, D. ET IMBEAUX, J.C. (1991). *Elements of Digital Communication*, Wiley, Chichester.

BRANDENBURG, L. H. ET WYNER, A. D. (1974). Capacity of the gaussian channel with memory: the multivariate case, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol.53, no. 5, 745-778.

BURSH, T.P. ET AL. (1993). Digital radio for mobile applications, *AT&T Tech. J.*, vol. 72, no. 4, 19-26.

CHANG, J. J. C., MISKA, R. A. ET SHOBER, R. A. (1993). Wireless systems and technologies: an Overview, *AT&T Tech. J.*, vol. 72, no. 4, 11-18.

CHUANG, J. C-I. (1987). The effects of time delay spread on portable radio communications channels with digital modulation, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, vol. SAC-5, no. 5, 879-889.

CIOFFI, J. M., ABBOTT, W. L., THAPAR, H. K., MELAS C. L. ET FISHER, K. D. (1991). Adaptive Equalization in Magnetic-Disk Recording, *IEEE Commun. Mag.*, decembre.

CONAN, J., DESPINS, C. L. ET LOUNDU, M. D. (1997). Estimating the capacity of a frequency selective fading radio channel using diversity, *École Polytechnique de Montréal, en cours d'édition*, 26 p.

COVER, T.M. ET THOMAS, J. A. (1991). *Elements of Infomation Theory*, Wiley, New-York.

COX, D. C. ET LECK, R.P. (1975a). Distributions of multipath delay spread and average excess delay for 910 MHz urban mobile radio channels, *IEEE Trans. on Ant. Propag.*, vol. AP-23, 206-213.

COX, D. C. ET LECK, R.P. (1975b). Correlation bandwidth and delay spread multipath propagation statistics for 910-MHz urban mobile radio channels, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-23, 1271-1280.

COX, D. C. (1972). Delay Doppler characteristics of multipath propagation at 910MHz in a suburban mobile radio environment, *IEEE Trans. on Ant. Propag.*, vol. AP-20

COX, D. C. (1972). Time and frequency domain characterizations of multipath propagation at 910 MHz in a suburban mobile radio environment, *Radio Sci.*, 1069-1077.

COX, D. C. (1972). 910 MHz urban mobile radio propagation: Multipath characteristics in New York City, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-21, 1188-1194.

COX, D. C. (1977). Multipath delay spread and path loss correlation for 910-MHz urban mobile radio propagation, *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, vol. VT-26, no. 2, 340-344.

D'ARIA, G., PIERMARINI, R. ZINGARELLI, V. (1991). Fast adaptive equalizers for narrow-band TDMA mobile radio, *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, vol. 40, mai, 392-404.

DUTTWEILER, D. L., MAZO, J. E. ET MESSERSCHMITT, D. G. (1974). An upper bound on the error probability in decision-feedback equalization, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-20, août, 490-497.

FALCONER, D. D. ET MAGEE, F. R. (1973). Adaptive channel memory truncation for maximum likelihood sequence estimation, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, décembre, 1541-1562.

FEIG, E. (1989). Linear methods for high density magnetic recording of data, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 25, mai, 2769-2779.

FORNEY JR., G. D. (1973). The Viterbi Algorithm, *Proc. of the IEEE*, vol. 61, no. 3, 268-278.

FOSCHINI, G. J. ET SALZ, J. (1983). Digital communications over fading radio channels, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 62, no. 2, 429-457.

FRENCH, C. A. ET WOLF, J. K. (1988). Bounds on the capacity of a peak power constrained Gaussian channel, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, septembre, 2247-2262.

GALLAGER, R. G. (1968). *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley & Sons, New-York.

GARDNER, W. A. (1984). Learning characteristics of stochastic-gradient descent algorithms: a general study, analysis and critique, *Signal Processing*, vol. 6, avril, 113-133.

GITLIN, R. D. ET WEINSTEIN, S. B. (1981). Fractionally-spaced equalization: an improved digital transversal equalizer, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 60, no. 2, 275-298.

GITLIN, R. D., SALZ, J. ET WINTERS, J. H. (1992). The capacity of wireless communication systems can be substantially increased by the use of antenna diversity, *Proc. of the 1st Intern. Conf. on Univ. Pers. Comun., Dallas, Texas*, 28-32.

GLANCE, B. ET GREENSTEIN, L. J. (1983). Frequency selective fading effects in digital mobile radio with diversity combining, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-31, 1085-1094.

GOODENOUGH, F. (1993). DSP technique nearly doubles disk capacity, *Electronic Design, February 1993*, 53-58.

HENRY, P.S. ET GLANCE, B. (1981). A new approach to high-capacity digital mobile radio, *Bell System Tech. J.*, vol. 60, 1891-1904.

HEEGARD, C.D. ET OZAROW, L. (1992). Bounds on the capacity of saturation recording, *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 10, janvier, 145-156.

HOLSINGER, J.L. (1964). Digital communication over fixed time-continuous channels with memory with special application to telephone channels, *MIT Research Lab. of Electronics, Tech. Rept. 430*.

HOWELL, T. D. ET FEIG, E. (1986). The capacity of a magnetic recording system as a function of track width, *IEEE symp. on Inform. Theory, Ann Arbor, Octobre*.

HSU, F. M. (1982). Square root Kalman filtering for high-speed data received over fading dispersive HF channels, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-28, no. 5, 753-763.

HUMPHREY, M. ET FREEMAN, J. (1997). How xDSL supports broadband services to the home, *IEEE Network*, vol. 11, no. 1, 14-23.

IMMINK, K. A. S. (1991). *Coding Techniques for Digital Recorders*, Prentice Hall, UK.

JAKES JR., W. C. (1974). *Microwave Mobile Communications*, John Wiley & Sons, New-York.

KAVEHRAD, M. ET MCLANE, P. J. (1985). Performance of low-complexity channel coding and diversity for spread spectrum in indoor, wireless communication, *AT&T Tech. J.*, vol. 64, no. 8, 1927-1065.

KOBAYASHI, H. (1971). A survey of Coding Schemes for Transmission or Recording of Digital Data, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-19, décembre, 1087-1099.

LEE, W. C. Y. ET YEH, Y. S. (1972). Polarization diversity system for mobile radio, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-20, 912-923.

LEFEBVRE, C. ET CONAN, J. (1995). Linear Equalization of Frequency Selective Channels Using Space Diversity, *Proc. of the Intern. Conf. on Univ. Pers. Commun.*, Tokyo, Japan.

LEFEBVRE, C. ET CONAN, J. (1998). Evaluation of the Shannon capacity of multi-track/Multi-head magnetic recording schemes, *Proc. of the 19th Biennial Symp. on Commun.*, Kingston, Ontario, 197-201.

LINDHOLM, D. A. (1978). Spacing losses in finite track width reproducing systems, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. MAG-14, no. 2, juin, 55-59.

LJUNG, S. ET LJUNG, L. (1985). Error propagation properties of recursive least squares adaptation algorithms, *Automatica*, vol. 21, 159-167.

LOUNDU, M. D. (1994). *Estimation numérique de la capacité d'un canal radio-mobile dispersif*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

- MARCELLIN, M. W. ET WEBER, H. J. (1992). Two Dimensional Modulation Codes, *IEEE J. of Sel. Areas on Commun.*, vol. SAC-10, no. 1, janvier, 254-266.
- MAZO, J.E. (1991). Exact matched filter bound for two-beam rayleigh fading, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 39, no. 7, 1027-1030.
- MCLAUGHLIN, S. W. ET NEUHOFF, D. L. (1993). Upper bounds on the capacity of the digital magnetic recording channel, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 29, janvier, 59-66.
- MESSERSCHMITT, D. G. (1974). Design of a finite impulse response for the Viterbi algorithm and decision feedback equalizer, *International Conf. on Commun.*, 37D-1-5.
- MONSEN, P. (1984). MMSE equalization of interference on fading diversity channels, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-32, 5-12.
- MUELLER, M. S. ET SALZ, J. (1981). A unified theory of data-aided equalization, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 60, no. 9, 2023-2038.
- NAKAGAMI, M. (1947). Statistical studies on fading, diversity effects and characteristics of diversity receiving systems, *Shukyo-sha, Kobe*.
- O'SULLIVAN, J. A. ET AL. (1992). A physically based approach to information theory for thin film magnetic recording, *Proc. 30th Annual Allerton Conf. Commun. Contr. Comput.*, 792-798.
- OKUMURA, Y. ET AL. (1968). Field strength and its variability in VHF and UHF land-mobile radio service, *Rev. Electr. Commun. Lab.*, vol. 16.
- ORCUTT, E. K. ET MARCELLIN, M. W. (1993a). Redundant Multi-track (d,k) Codes, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-39, no. 5, septembre, 1744-1750.

ORCUTT, E. K. ET MARCELLIN, M. W. (1993b). Enumerable Multi-track (d,k) Codes, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-39, no. 5, septembre, 1738-1744.

OTT, G. D. ET PLITKINS, A. (1978). Urban path-loss characteristics at 820 MHz, *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, vol. VT-27, no. 12, 189-197.

OZAROW, L. H., SHAMAI, S. ET WYNER, A. D. (1994). Information Theoretic Considerations for Cellular Mobile Radio, *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 43, mai, 359-378.

PAHLAVAN, K. ET MATTHEWS, J. W. (1990). Performance of adaptive matched filter receivers over fading multipath channels, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 38, no. 12, 2106-2113.

PAPOULIS, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Third Edition, McGraw-Hill, New-York.

PARSONS, D. (1992). *The mobile radio propagation channel*, Halstead Press (Wiley).

PETERSEN, B. R. ET FALCONER, D. D. (1994). Suppression of adjacent-channel, cochannel, and intersymbol interference by equalizers and linear combiners, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 42, no. 12, 3109-3118.

PROAKIS, J. G. (1989). *Digital Communications*, McGraw-Hill, New-York.

QURESHI, S. U. H. (1985). Adaptive equalization, *Proc. of the IEEE*, vol. 73, no. 9, 1349-1387.

QURESHI, S. U. H. ET NEWHALL, E. E. (1973). An adaptive receiver for data transmission over time-dispersive channels, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-19, juillet, 448-457.

RUMMLER, W. D. (1979). A new selective fading model: application to propagation data, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, no. 7, 1037-1071.

RUMMLER, W. D. (1981). More on the multipath fading channel model, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-29, 346-352.

SALEH, A.A.M ET VALENZUELA, R.A. (1987). A statistical model for indoor multipath propagation, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, vol. SAC-5, no. 2, 128-137.

SALEH, A.A.M, RUSTAKO JR., A.J. ET ROMAN, R. S. (1987). Distributed antennas for indoor radio communications, *IEEE trans. on Commun.*, vol. COM-35, no. 12, 1245-1251.

SALZ, J. (1985). Digital transmission over cross-coupled linear channels, *AT&T Tech. J.*, vol. 64, no. 6, 1147-1159,

SALZ, J. (1973). Optimum mean-square decision feedback equalization, *The Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, 1341-1373.

SALTZBERG, B. R. (1968). Intersymbol interference error bounds with application to ideal bandlimited signaling, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-14, no. 4, 563-568.

SESHADRI, N., SUNDBERG, C. E. W. ET WEERACKODY, V. (1993). Advanced techniques for modulation, error correction, channel equalization, and diversity, *AT&T Tech. J.*, vol. 72, no. 4, 48-63.

SEXTON, T.A. ET PAHLAVAN, K. (1987). Effect of multi-cluster delay spectrum on wireless indoor communications, *Proc. of the CISS, The John Hopkins Univ.*

SEXTON, T.A. ET PAHLAVAN, K. (1989). Channel modeling and adaptive equalization of indoor radio channels, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, vol. 7, no. 1, 114-121.

SHAMAI, S., OZAROW, L. H. ET WYNER, A. D. (1991). Information rates for a discrete-time Gaussian channel with intersymbol interference and stationary inputs, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 37, novembre, 1527-1539.

STRANG, G. (1980). *Linear Algebra and its applications*, Academic Press inc., Orlando.

SUZUKI, H. (1977). A statistical model for urban radio propagation, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-25, no. 7, 673-680.

TELECOMMUNICATIONS INDUSTRY ASSOCIATION/ ELECTRONIC INDUSTRIES ASSOCIATION INTERIM STANDARD IS-54-B (1992). Dual-mode mobile station-base station compatibility standard.

TURIN, G. L. (1956). Communication through noisy, random-multipath channels, *IRE Nat. Conv. Rec.*, pt. 4, 154-166.

TURIN, G. L., CLAPP, F.D., JOHNSTON, T. L., FINE, S.B. ET LAVRY, D. (1972). A statistical model of urban multipath propagation, *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, vol. VT-21, no. 1, 1-9.

VANDERGRAFT, J. S. (1983). *Introduction to Numerical Computations*, Deuxième édition, Academic Press inc., Orlando.

VOOIS, P. A. ET CIOFFI, J. M. (1994). Multichannel signal processing for multiple-head digital magnetic recording, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 30, no. 6, novembre, 5100-5113.

VOOIS, P. A. ET CIOFFI, J. M. (1997). Upper bounds on achievable storage density: a two-dimensional approach, *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 33, no. 1, january, 844-854.

WEERACKODY, V. (1993). Characteristics of a simulated fast fading indoor radio channel, *Proc. of the IEEE Vehic. Tech. Conf.*, Secaucus, New Jersey, 231-235.

WEERACKODY, V. (1993). Diversity for the direct-sequence spread spectrum system using multiple transmit antennas, *Proc. of the ICC Conf., Genève, Suisse*, 1775-1779.

WINTERS, J. H. (1987). On the capacity of radio communication systems with diversity in a rayleigh fading environment, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, vol. SAC-5, no. 5, 871-878.

WINTERS, J. H. ET YEH, Y. S. (1985). On the performance of wide-band digital radio transmission within buildings using diversity, *Proc. of the IEEE GLOBCOM*.

WINTERS, J. H., SALZ, J. ET GITLIN, R. D. (1992). Adaptive antennas for digital mobile radio, *Proc. of Adaptive Ant. Syst. Symp.*.

WOZENCRAFT, J. M., JACOBS, I. M. (1965). *Principles of Communication Engineering*, Waveland Press inc., Prospect Heights, Illinois.

YEH, Y. S. ET REUDINK, D. O. (1982). Efficient spectrum utilization for mobile radio using space diversity, *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-30, 447-455.

YOUNG, W. R. (1979). Advanced mobile phone service: introduction, background and objectives, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, no. 1, 1-14.

YOSHIDA, S. ET MIZUNO, M. (1993). The realities and myths of multipath propagation, *IEICE Trans. on Commun.*, vol. E76-B, no. 2, 90-97.

ANNEXE A ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE LA CAPACITÉ

Cette annexe présente une méthode permettant l'évaluation numérique de la capacité donnée aux équations (2.31), (2.32) et (2.33). Pour ce faire, déterminons en premier lieu la valeur minimum des valeurs propres dans l'intervalle de fréquence considéré W_z

$$\lambda_{\min} = \min_n \left[\min_{z \in W_z} [\lambda_n(z)] \right] \quad n = 1 \dots N \quad (\text{A.1})$$

À cette valeur propre correspond le niveau minimum d'eau (voir la section 2.4) pour lequel tous les réservoir sont submergés et donc pour lequel les intervalles d'intégration sont

$$Z_n = W_z, \quad n = 1 \dots N \quad (\text{A.2})$$

Si la quantité d'eau est à ce moment inférieure à S , la quantité totale désirée, on doit augmenter le niveau $1/\lambda$. Comme tous les réservoir sont submergés, les intervalles d'intégration restent constants et sont donnés par $Z_n = W_z$. On trouve dans ce cas la valeur de λ en l'isolant dans (2.32). En résumé nous avons

$$\text{si} \quad \sum_{n=1}^N \int_{W_z} \left(\frac{1}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{\lambda_n(z)} \right) dz \leq S$$

alors

$$\lambda = \frac{NW_z}{S + \sum_{n=1}^N \int_{W_z} \frac{1}{\lambda_n(z)} dz} \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas contraire, on doit diminuer le niveau d'eau $1/\lambda$ et ajuster en conséquence les intervalles d'intégration. λ peut alors s'évaluer comme la limite de la séquence $\{\lambda^i\}$ définie comme (Conan, Despins et Loundu, 1997)

$$Z_n^i = \{z \in W_z \mid \frac{1}{\lambda_n(z)} < \frac{1}{\lambda^i}\} \quad n = 1 \dots N$$

$$\lambda^{i+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{Z_n^i} dz}{S + \sum_{n=1}^N \int_{Z_n^i} \frac{1}{\lambda_n(z)} dz} \quad (\text{A.4})$$

avec comme valeur initiale

$$\lambda^0 = \lambda_{\min} \quad (\text{A.5})$$

Aux fins du calcul numérique, la procédure itérative peut être interrompue lorsque pour une valeur arbitraire ν (e.g. 10^{-10}), on a

$$\frac{|\lambda^i - \lambda^{i-1}|}{\lambda^i} \leq \nu \quad (\text{A.6})$$

ANNEXE B ÉVALUATION DÉTAILLÉE DE L'EQM MINIMALE

Cette annexe présente le détail des calculs de l'évaluation de l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'entrée et la sortie du système de communications de la figure 2.3 et sa minimisation à l'aide des coefficients de l'égaliseur pour obtenir l'erreur quadratique moyenne minimum (EQMM) pour l'égaliseur linéaire. Le cas du filtre adapté ainsi que le calcul de la matrice de l'égaliseur sont aussi considérés.

Afin de simplifier les calculs par l'utilisation d'un modèle faisant intervenir des sources de bruit blanc, nous calculerons en premier lieu l'EQMM de l'équivalent mathématique (du point de vue de la relation entrée-sortie) du système de communication donné à la figure 2.4 et transformerons ensuite les résultats obtenus afin de les ramener au modèle de la figure 2.3, en accord avec la discussion de la section 2.3.

B.1 Le cas de l'égaliseur linéaire

L'objectif est de minimiser l'EQM pour chacun des N signaux en provenance des entrées en ajustant les coefficients du filtre de réception $W'(t)$ de la figure 2.4. Comme il s'agit d'un filtre matriciel $N \times M$, chacune des lignes $\{W'_{nx}(t), x = 1 \dots M\}$ peut s'interpréter comme un filtre dédié à une des N entrées. Si on veut minimiser l'EQM totale à la sortie (la somme des N EQM individuelles), il y aura N degrés de liberté (les N filtres) et donc, ceci revient à minimiser l'EQM individuellement pour chacune des entrées et à en faire ensuite la somme, i.e.

$$\min_w \left(\sum_{n=1}^N EQM_n \right) = \sum_{n=1}^N \min_{w_{nx}} (EQM_n) \quad (\text{B.1})$$

En conséquence nous pouvons limiter notre approche au cas global (minimiser la somme) et lorsque nous aurons besoin d'isoler l'EQM correspondant à une seule des entrées, il suffira d'isoler le terme correspondant dans la solution finale, tel que nous le verrons

ultérieurement. Procédant à l'analyse et sans perte de généralité puisqu'il y a stationnarité, l'échantillon à la sortie de l'égaliseur au temps $t = 0$ est (voir la figure 2.4)

$$s(0) = s^{(0)} = \sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} \quad (\text{B.2})$$

où

$$U^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} W'(-\tau) H'(\tau - lT) d\tau \quad (\text{B.3})$$

et le bruit à la sortie de l'égaliseur est

$$v^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} W'(-\tau) w(\tau) d\tau \quad (\text{B.4})$$

L'erreur quadratique moyenne entre $s^{(0)}$ et $a^{(0)}$ est

$$EQM = E[\varepsilon^\dagger \varepsilon] = \text{tr}\{E[\varepsilon \varepsilon^\dagger]\} \quad (\text{B.5})$$

où

$$\varepsilon = s^{(0)} - a^{(0)} = \sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} - a^{(0)} \quad (\text{B.6})$$

En évaluant de façon explicite l'EQM, on obtient

$$EQM = \text{tr}\{E\left[\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} - a^{(0)}\right)\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)} + v^{(0)} - a^{(0)}\right)^\dagger\right]\} \quad (\text{B.7})$$

$$EQM = \text{tr}\left\{ \begin{array}{l} E\left[\left|\sum_l U^{(l)} a^{(l)}\right|^2\right] + E\left[|v^{(0)}|^2\right] + E\left[|a^{(0)}|^2\right] \\ + E\left[\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)}\right)v^{(0)\dagger}\right] + E\left[v^{(0)}\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)}\right)^\dagger\right] \\ - E\left[v^{(0)}a^{(0)\dagger}\right] - E\left[a^{(0)}v^{(0)\dagger}\right] \\ - E\left[\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)}\right)a^{(0)\dagger}\right] - E\left[a^{(0)}\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)}\right)^\dagger\right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.8})$$

$$EQM = \text{tr} \left\{ \begin{array}{l} E \left[\left| \sum_l U^{(l)} a^{(l)} \right|^2 \right] \\ + E \left[|v^{(0)}|^2 \right] + E \left[|a^{(0)}|^2 \right] \\ - E \left[\left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)} \right) a^{(0)\dagger} \right] - E \left[a^{(0)} \left(\sum_l U^{(l)} a^{(l)} \right)^\dagger \right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.9})$$

où nous avons utilisé l'indépendance des variables aléatoires de moyenne nulle a et v . En utilisant (B.3), (B.4), (2.15) ainsi que l'identité $v(t) = W'(t) \otimes w(t)$, on peut écrire

$$EQM = \text{tr} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a^2 \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} W'(-\tau) H'(\tau - lT) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} H'^{\dagger}(\tau - lT) W'^{\dagger}(-\tau) d\tau \\ + \int_{-\infty}^{\infty} |W'(-\tau)|^2 d\tau + \sigma_a^2 \mathbf{I} \\ - \sigma_a^2 U^{(0)} - \sigma_a^2 U^{(0)\dagger} \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

où nous avons supposé que la densité spectrale bilatérale des sources de bruit blanc $w(t)$ est unitaire (voir la section 2.2). En écrivant maintenant $U^{(0)}$ au long à l'aide de (B.3) on obtient

$$EQM = \text{tr} \left[\sigma_a^2 \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} W'(-\tau) H'(\tau - lT) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} H'^{\dagger}(\tau - lT) W'^{\dagger}(-\tau) d\tau \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} |W'(-\tau)|^2 d\tau + \sigma_a^2 \mathbf{I} - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} W'(-\tau) H'(\tau) d\tau \right] - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} H'(\tau)^\dagger W'^{\dagger}(-\tau) d\tau \quad (\text{B.11})$$

Comme on le voit, l'EQM est une fonction quadratique en $W'(\tau)$ et il est bien connu que dans ce cas la minimisation de l'EQM par rapport à $W'(\tau)$ possède une solution unique. Pour évaluer l'EQM minimale, nous pouvons utiliser le calcul des variations. Remplaçons en premier lieu $W'(\tau)$ par une matrice dont les composantes sont données par

$$\hat{W}_{nm}(\tau) + \delta_{nm} f_{nm}(\tau) \quad n = 1 \dots N, m = 1 \dots M \quad (\text{B.12})$$

où $\hat{W}_{nm}(\tau)$ sont les composantes de la matrice $W'(\tau)$ optimum, δ_{nm} sont des réels et $f_{nm}(\tau)$ sont des fonctions quelconques. La condition de minimisation devient

$$\left[\frac{\partial}{\partial \delta_{nm}} EQM \right]_{\delta_{nm} = 0} = [0]_{nm} \quad (\text{B.13})$$

où $[0]_{nm}$ est une matrice $N \times M$ ayant la valeur zéro en position nm . Il faut maintenant calculer la dérivée par rapport à δ_{nm} et la poser égale à zéro.

$$\text{tr} \left\{ \begin{aligned} & \sigma_a^2 \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{nm}(-\tau) \mathbf{H}'(\tau-lT) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^{*\dagger}(\tau-lT) \hat{\mathbf{W}}^\dagger(-\tau) d\tau \\ & + \sigma_a^2 \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{W}}(-\tau) \mathbf{H}'(\tau-lT) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^{*\dagger}(\tau-lT) \hat{f}_{nm}^\dagger(-\tau) d\tau \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}_{nm}(-\tau) \hat{\mathbf{W}}^\dagger(-\tau) + \hat{\mathbf{W}}(-\tau) \hat{f}_{nm}^\dagger(-\tau) \right) d\tau \\ & - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{nm}(-\tau) \mathbf{H}'(\tau) d\tau - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^{*\dagger}(\tau) \hat{f}_{nm}^\dagger(-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Ici, $\hat{f}_{nm}(-\tau)$ est une matrice contenant $f_{nm}(-\tau)$ en position n, m et zéro partout ailleurs.

En évaluant ensuite explicitement la trace et en dérivant par rapport à τ , on obtient

$$\text{tr} \left\{ \begin{aligned} & \sigma_a^2 \sum_l f_{nm}(-\tau) \left[\mathbf{H}'(\tau-lT) \mathbf{U}^{(\dagger)\dagger} \right]_{mn} \\ & + \sigma_a^2 \sum_l \left[\mathbf{U}^{(\dagger)} \mathbf{H}^{*\dagger}(\tau-lT) \right]_{nm} f_{nm}^*(-\tau) \\ & + f_{nm}(-\tau) \hat{\mathbf{W}}_{nm}^*(-\tau) + \hat{\mathbf{W}}_{nm}(-\tau) f_{nm}^*(-\tau) \\ & - \sigma_a^2 f_{nm}(-\tau) \mathbf{H}'_{mn}(\tau) - \sigma_a^2 \mathbf{H}'_{mn}^*(\tau) f_{nm}^*(-\tau) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Cette équation doit être vérifiée pour toute fonction $f_{nm}(\tau)$. Comme nous travaillons avec des fonctions complexes, elle doit être vérifiée pour la partie imaginaire et la partie réelle.

i.e. $\text{Re}(\dots) = 0$ et $\text{Im}(\dots) = 0$. Il vient

$$2\sigma_a^2 \text{Re} \left[\sum_l \left[\mathbf{H}'(\tau-lT) \mathbf{U}^{(\dagger)\dagger} \right]_{mn} \right] + 2\text{Re} \left(\hat{\mathbf{W}}_{nm}^*(-\tau) \right) - 2\sigma_a^2 \text{Re} \left(\mathbf{H}'_{mn}(\tau) \right) = 0$$

$$2\sigma_a^2 \text{Im} \left[\sum_l \left[\mathbf{H}'(\tau-lT) \mathbf{U}^{(\dagger)\dagger} \right]_{mn} \right] + 2\text{Im} \left(\hat{\mathbf{W}}_{nm}^*(-\tau) \right) - 2\sigma_a^2 \text{Im} \left(\mathbf{H}'_{mn}(\tau) \right) = 0$$

(B.16)

ou plus simplement

$$\sigma_a^2 \sum_l \left[\mathbf{H}'(\tau - lT) \mathbf{U}^{(l)\dagger} \right]_{mn} + \hat{W}_{nm}^*(-\tau) - \sigma_a^2 \mathbf{H}'_{mn}(\tau) = 0 \quad (\text{B.17})$$

et sous forme matricielle

$$\sigma_a^2 \sum_l \mathbf{U}^{(l)} \mathbf{H}'^\dagger(\tau - lT) + \hat{\mathbf{W}}(-\tau) - \sigma_a^2 \mathbf{H}'^\dagger(\tau) = 0 \quad (\text{B.18})$$

En post-multipliant cette équation par $\hat{\mathbf{W}}^\dagger(-\tau)$ et en intégrant par rapport à τ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{W}}(-\tau)|^2 d\tau = \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}'^\dagger(\tau) \hat{\mathbf{W}}^\dagger(-\tau) d\tau - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l \mathbf{U}^{(l)} \mathbf{H}'^\dagger(\tau - lT) \hat{\mathbf{W}}^\dagger(-\tau) d\tau \quad (\text{B.19})$$

qui substitué dans (B.11) donne

$$EQM = \text{tr} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a^2 \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{W'(-\tau) H'(\tau - lT) d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{H'^\dagger(\tau - lT) W'^\dagger(-\tau) d\tau} \\ + \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{H'^\dagger(\tau) \hat{W}^\dagger(-\tau) d\tau} - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l \cancel{U^{(l)} H'^\dagger(\tau - lT) \hat{W}^\dagger(-\tau) d\tau} \\ + \sigma_a^2 \mathbf{I} - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{W'(-\tau) H'(\tau) d\tau} \} - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{H'^\dagger(\tau) W'^\dagger(-\tau) d\tau} \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

En utilisant (B.3), on obtient finalement

$$EQMM = \sigma_a^2 \text{tr} [\mathbf{I} - \mathbf{U}^{(0)}] \quad (\text{B.21})$$

Remarquons que tel que discuté précédemment, la minimisation de l'EQM totale mène au même résultat que la somme des EQM minimisées individuellement. L'EQM associée à un canal particulier peut être trouvée en isolant les éléments de la trace (la diagonale, voir l'équation (B.5)). L'EQM associée au mobile n est par conséquent

$$EQMM_n = \sigma_a^2 [1 - U_{nn}^{(0)}] \quad (\text{B.22})$$

Il faut maintenant calculer la matrice $\mathbf{U}^{(0)}$. Pour ce faire, post-multiplions l'équation (B.18) par $\mathbf{H}'(\tau - kT)$ et intégrons par rapport à τ

$$\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l U^{(l)} H'^{\dagger}(\tau - lT) H'(\tau - kT) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(-\tau) H'(\tau - kT) d\tau - \sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} H'^{\dagger}(\tau) H'(\tau - kT) d\tau = 0 \quad (\text{B.23})$$

en posant

$$\mathbf{R}^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} H'^{\dagger}(\tau) H'(\tau - lT) d\tau \quad (\text{B.24})$$

et en utilisant (B.3) on obtient

$$\sigma_a^2 \sum_l U^{(l)} \mathbf{R}^{(l-k)} + U^{(k)} - \sigma_a^2 \mathbf{R}^{(k)} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Cette équation peut être résolue en U en utilisant la transformée de Fourier périodique.

Posons

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \sum_l \mathbf{R}^{(l)} e^{j\omega T l} \quad (\text{B.26})$$

$$\tilde{U}(\omega) = \sum_l U^{(l)} e^{j\omega T l} \quad (\text{B.27})$$

En appliquant ces transformées à (B.25), on obtient

$$\sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \tilde{U}(\omega) + \tilde{U}(\omega) - \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) = 0 \quad (\text{B.28})$$

d'où

$$\tilde{U}(\omega) = \left[\sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) + \mathbf{I} \right]^{-1} \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \quad (\text{B.29})$$

On trouve $U^{(0)}$ en intégrant $\tilde{U}(\omega)$ sur un cycle

$$U^{(0)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\left[\sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) + \mathbf{I} \right]^{-1} \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \right] d\omega \quad (\text{B.30})$$

où on note que les composantes de la diagonale de $U^{(0)}$ sont réelles puisque $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ est une matrice hermitienne (Papoulis, 1991). Ceci nous sera utile à la section 2.5. En

substituant cette expression dans (B.21), on obtient finalement l'expression compacte de l'EQMM en fonction des paramètres du système

$$EQMM = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \text{tr} \left[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \right]^{-1} d\omega \quad (\text{B.31})$$

Comme nous avons utilisé la transformée périodique de Fourier, $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ est le spectre replié de la matrice du canal $\tilde{\mathbf{H}}'(\omega)$

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_l \left| \tilde{\mathbf{H}}' \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \right|^2 \quad (\text{B.32})$$

Comme précédemment, l'EQMM associée à un canal particulier peut être trouvée en isolant les éléments de la trace. L'EQMM associée au mobile n est par conséquent

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\left[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \right]^{-1} \right]_{nn} d\omega \quad (\text{B.33})$$

Rappelons que cette expression de l'EQMM correspond au système de communication de la figure 2.4 où les sources de bruit sont blanches. Pour trouver l'EQMM associée au système de la figure 2.3, où les sources de bruit sont colorées, il suffit de substituer (2.10) dans (B.32), ce qui donne

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_l \left| \tilde{\mathbf{N}}^{-1/2} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \tilde{\mathbf{H}} \left(\omega - \frac{2\pi l}{T} \right) \right|^2 \quad (\text{B.34})$$

B.2 Le cas de la borne du filtre adapté

Pour calculer l'EQMM de la borne du filtre adapté, il suffit de supposer que l'égaliseur peut éliminer complètement l'interférence entre symboles. Ceci revient à poser $U^{(i)} = 0, i \neq 0$ dans l'équation (B.25). On obtient

$$\sigma_a^2 U^{(0)} \mathbf{R}^{(0)} + U^{(0)} - \sigma_a^2 \mathbf{R}^{(0)} = 0 \quad (\text{B.35})$$

Dans ce cas, on peut isoler $U^{(0)}$ directement

$$U^{(0)} = \sigma_a^2 \mathbf{R}^{(0)} \left[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \mathbf{R}^{(0)} \right]^{-1} \quad (\text{B.36})$$

En substituant cette expression dans (B.21), on obtient l'expression de l'EQMM

$$EQMM = \sigma_a^2 \text{tr} \left[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \mathbf{R}^{(0)} \right]^{-1} \quad (\text{B.37})$$

on peut trouver $\mathbf{R}^{(0)}$ en utilisant la transformée discrète inverse de Fourier (voir (B.26))

$$\mathbf{R}^{(0)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \tilde{\mathbf{R}}(\omega) d\omega \quad (\text{B.38})$$

d'où on a

$$EQMM = \sigma_a^2 \text{tr} \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\mathbf{I} + \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \right] d\omega \right]^{-1} \quad (\text{B.39})$$

Comme précédemment, l'EQMM associée à un mobile particulier peut être trouvée en isolant les éléments de la trace. L'EQMM associée au mobile n est par conséquent

$$EQMM_n = \sigma_a^2 \left[\left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left(\mathbf{I} + \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) \right) d\omega \right]^{-1} \right]_{nn} \quad (\text{B.40})$$

où $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ est donné par (B.32) pour le système de la figure 2.4 et par (B.34) pour celui de la figure 2.3.

B.3 Calcul de la matrice de l'égaliseur

Pour calculer la matrice $\tilde{\mathbf{W}}(\omega)$ de l'égaliseur linéaire, retournons à l'équation (B.18)

$$\sigma_a^2 \sum_l U^{(l)} \mathbf{H}'^\dagger(\tau - lT) + \hat{\mathbf{W}}(-\tau) - \sigma_a^2 \mathbf{H}'^\dagger(\tau) = 0 \quad (\text{B.41})$$

Cette équation, rappelons-le, est la condition faisant en sorte que l'EQM entre l'entrée et la sortie du système de communications sera minimum (critère d'optimisation). En isolant $\hat{W}(-\tau)$ et en posant $t = -\tau$, on obtient

$$\hat{W}(t) = \sigma_a^2 \left[\mathbf{H}'^\dagger(-t) - \sum_l \mathbf{U}^{(l)} \mathbf{H}'^\dagger(\tau - lT) \right] \quad (\text{B.42})$$

En passant au domaine fréquentiel par la transformée de Fourier, on a

$$\begin{aligned} \bar{W}(\omega) &= \sigma_a^2 \left[\tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) - \sum_l \mathbf{U}^{(l)} \tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) e^{j\omega lT} \right] \\ \bar{W}(\omega) &= \sigma_a^2 \left[\mathbf{I} - \sum_l \mathbf{U}^{(l)} e^{j\omega lT} \right] \tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

En utilisant (B.27) et (B.29), on obtient finalement

$$\bar{W}(\omega) = \left[\sigma_a^2 \tilde{\mathbf{R}}(\omega) + \mathbf{I} \right]^{-1} \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) \quad (\text{B.44})$$

où $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ est donnée par (B.32). Cette équation est valide pour l'égaliseur linéaire. Dans le cas du filtre adapté, il faut éliminer l'interférence entre symboles en posant

$$\mathbf{U}^{(l)} = 0 \quad l \neq 0 \quad (\text{B.45})$$

En utilisant ceci dans (B.43), on obtient

$$\bar{W}(\omega) = \sigma_a^2 \left[\mathbf{I} - \mathbf{U}^{(0)} \right] \tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) \quad (\text{B.46})$$

On peut simplifier cette équation pour des fins de simulation en utilisant (B.30)

$$\bar{W}(\omega) = \left[\sigma_a^2 \mathbf{R}^{(0)} + \mathbf{I} \right]^{-1} \sigma_a^2 \tilde{\mathbf{H}}'^\dagger(-\omega) \quad (\text{B.47})$$

où

$$\mathbf{R}^{(0)} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \tilde{\mathbf{R}}(\omega) d\omega \quad (\text{B.48})$$

et où $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ est donnée par (B.32).

ANNEXE C DÉTERMINATION DU NOMBRE DE NIVEAUX L

Cette annexe présente une méthode permettant l'évaluation numérique de la valeur de L de l'équation (2.73) lorsque le taux d'erreur sur les bits BER est fixé. Isolons en premier lieu la variable L dans l'exposant de (2.73) et écrivons l'expression obtenue sous la forme récurrente suivante:

$$L_{i+1} = \sqrt{\frac{3(K_n - 1)}{2K_n \ln\left(\frac{L_i \log_2(L_i)}{2(L_i - 1)} BER\right)}} + 1 \quad (C.1)$$

En remplaçant K_n par sa valeur donnée par (2.71), on obtient

$$L_{i+1} = \sqrt{\frac{3(EQMM_n - \sigma_a^2)}{2EQMM_n \ln\left(\frac{L_i \log_2(L_i)}{2(L_i - 1)} BER\right)}} + 1 \quad (C.2)$$

où l' $EQMM$ est donnée respectivement par les équations (2.64) et (2.65) pour l'égaliseur linéaire et la borne du filtre adapté. Notons que puisque K_n est une constante, on doit maintenir les valeurs de $EQMM$ et σ_a^2 constantes lors des itérations successives (même si elles sont fonction de L). Pour que cette équation converge, on doit utiliser une valeur initiale L_0 suffisamment élevée. Dans nos simulations, nous avons fixé $L_0 = 100$ de sorte que la convergence est obtenue en environ 4 à 6 itérations pour une précision relative de 10^{-7} , i.e.

$$\left| \frac{L_i - L_{i-1}}{L_i} \right| < 10^{-7} \quad (C.3)$$

Notons que cette méthode ne convergera pas si

$$L_1 \leq \frac{2}{2 - BER} \quad (C.4)$$

Dans ce cas, une méthode par bisection des intervalles (Vandergraft, 1983) peut être utilisée mais le temps de convergence est plus long pour la même précision (environ 25 itérations dans notre cas). Notons que ceci ne s'est produit que très rarement lors de nos simulations (de l'ordre de quelques cas sur 10000).

ANNEXE D

DÉTERMINATION DU RAPPORT SNR POUR LE CANAL RADIOMOBILE

Nous évaluons dans cette annexe le rapport signal sur bruit moyen mesuré au récepteur pour le système de communication radiomobile du chapitre III. En se rapportant à la figure 2.3 décrivant le modèle général du système de communication, il apparait que la puissance conditionnelle moyenne reçue par l'antenne m pour une réalisation du canal variable dans le temps est donnée par

$$P_m = \left[\frac{1}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} |m_m(t)|^2 dt \right] \quad (D.1)$$

ce qui représente la moyenne temporelle de la puissance sur un intervalle de temps $2\lambda T$ correspondant à la durée de la réalisation. En supposant que le nombre de symboles transmis est élevé par rapport à cet intervalle de temps (i.e. $T \ll 2\lambda T$) alors la moyenne temporelle peut être approximée par l'espérance prise sur l'ensemble des symboles d'entrée $a_n^{(l)}$ lorsqu'on fait tendre λ à l'infini. On obtient alors

$$P_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} |m_m(t)|^2 dt \right] \quad (D.2)$$

En se faisant, nous supposons que les variations du canal sont relativement lentes par rapport au taux de transmission des symboles. En remplaçant $m(t)$ par sa valeur donnée à l'équation (2.19) et en développant le produit vectoriel, on obtient

$$P_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} H_{mn}(t-lT) a_n^{(l)} \right|^2 dt \right] \quad (D.3)$$

En interchangeant l'espérance et les sommations et en utilisant (2.15), i.e. $E[|a_n|^2] = \sigma_a^2$, il vient

$$P_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_a^2}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} |H_{mn}(t-lT)|^2 \right] dt \quad (D.4)$$

Le canal étant variable dans le temps, nous allons maintenant calculer la puissance moyenne sur l'ensemble des réalisations, i.e. l'espérance de P_m par rapport aux variables aléatoires du canal. En écrivant explicitement l'expression de $H_{mn}(t-lT)$ à partir de (2.20) et (3.31) et en calculant explicitement la convolution, on obtient

$$\bar{P}_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{\sigma_a^2}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \sum_{n=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \left| \sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^{(mn)} g(t-lT-\tau_r) \right|^2 dt \right] \quad (D.5)$$

Interchangeant espérance et sommations diverses, on obtient finalement

$$\bar{P}_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_a^2}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \sum_{n=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^{(mn)2} |g(t-lT-\tau_r)|^2 \right] dt \quad (D.6)$$

qu'on peut récrire sous la forme

$$\bar{P}_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_a^2}{2\lambda T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^{(mn)2} \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} |g(t-lT-\tau_r)|^2 dt \right] \quad (D.7)$$

Puisque λ tend à l'infini, on peut appliquer le théorème de Parseval (l'énergie dans le domaine du temps est égale à l'énergie dans le domaine des fréquences) pour obtenir

$$\bar{P}_m = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_a^2}{2\lambda T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \sum_{r=0}^{R-1} [\eta_r^{(mn)2}] \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (D.8)$$

$$\bar{P}_m = \frac{\sigma_a^2}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{g}(\omega)|^2 d\omega \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \sum_{r=0}^{R-1} \eta_r^{(mn)2} \quad (D.9)$$

En évaluant l'espérance de cette équation par rapport au nombre de raies R et en utilisant la contrainte d'énergie unitaire (3.32), on obtient finalement la puissance moyenne qui est égale pour toutes les antennes:

$$\bar{P} = \bar{P}_m = \frac{N\sigma_a^2}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{g}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{D.10})$$

Pour des fins de simplification, nous imposons une contrainte d'énergie unitaire pour le filtre de mise en forme $\bar{g}(\omega)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{g}(\omega)|^2 d\omega = 1 \quad (\text{D.11})$$

L'expression (D.10) devient donc

$$\bar{P} = \frac{N\sigma_a^2}{T} \quad (\text{D.12})$$

Nous définissons maintenant le rapport signal sur bruit moyen pour l'ensemble des mobiles comme le rapport entre (D.12) et la puissance du bruit dans la bande de fréquence de Nyquist $W = 1/T$ Hz (correspondant à $\pm 1/(2T)$ en bande de base)

$$\rho_{tot} = \frac{N\sigma_a^2/T}{N_0 W} = \frac{N\sigma_a^2}{N_0} \quad (\text{D.13})$$

Le rapport signal sur bruit moyen par mobile s'obtient en divisant (D.13) par le nombre de mobiles N , c.-à-d.

$$\rho = \frac{\sigma_a^2}{N_0} \quad (\text{D.14})$$

Notons que le rapport signal sur bruit défini de cette façon peut également s'interpréter comme le rapport E_s/N_0 où E_s est l'énergie moyenne d'un symbole (l'énergie moyenne du signal sur un intervalle de temps T).

ANNEXE E

ÉVALUATION DES CONSTANTES DE NORMALISATION DE PUISSANCE

Cette annexe présente les détails relatifs à l'évaluation de la constante de normalisation K de l'équation (3.35) pour les modèles à profil continu, à arrivées discrètes à intervalles aléatoires et à arrivées par salves des sections 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. L'organisation de cette annexe est comme il suit: Nous présentons à la section E.1 un résumé donnant la valeur de K pour les trois types de modèles considérés dans le cas des formes de profil uniforme, exponentielle et gaussien. Les sections E.2 et E.3 présentent ensuite les preuves détaillées de l'évaluation de K dans le cas du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires et à arrivées par salves, le modèle à profil continu ne nécessitant pas de preuve distincte.

E.1 Résumé des résultats

Avant de procéder, nous devons remarquer que pour simuler les différents modèles à l'aide d'un nombre fini de raies, nous devons tronquer la plupart des profils puisque ces derniers sont en général de durée infinie. Pour ce faire, nous définissons D_{tot} comme la valeur du délai au-delà duquel on ne tient plus compte des raies. Dans le cas du profil uniforme, D_{tot} correspond à la fin du profil et la troncation n'est donc pas nécessaire.

E.1.1 Modèle à profil continu

Le nombre de raies R qui constituent l'approximation doit être choisi de façon à avoir

$$R\tau = D_{tot} \quad (\text{E.1})$$

où τ est le retard de base entre les raies. Le retard relatif de la raie r est donné par

$$\tau_r = r\tau \quad r = 0 \dots R-1 \quad (\text{E.2})$$

Le calcul de K pour les différents profils donnés aux équations (3.36) à (3.38) donne

a) Profil uniforme

$$K = \sqrt{\frac{\tau_{rms} 2\sqrt{3}}{R}} \quad (E.3)$$

b) Profil exponentiel

$$K = \frac{1}{\sqrt{\sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{\tau_{rms}} e^{-\frac{\tau_r}{\tau_{rms}}}}} \quad (E.4)$$

c) Profil gaussien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\sum_{r=0}^{R-1} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau_r^2}{2\sigma^2}}}}, \quad \tau_{rms} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} \quad (E.5)$$

E.1.2 Modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires

Dans ce cas, l'aléa apparaît dans l'amplitude des raies ainsi que dans l'instant d'arrivée que nous supposons modélisé par un processus de Poisson. Il s'ensuit que les temps d'arrivée de chacune des raies sont des variables aléatoires ayant une distribution d'Erlang caractérisée par la densité de probabilité

$$f_r(x) = \frac{\lambda^{r+1}}{r!} x^r e^{-\lambda x} \quad r = 0 \dots R-1 \quad (E.6)$$

où λ représente le taux d'arrivée moyen des raies. De façon équivalente, on peut exprimer sous forme récursive les temps d'arrivée des raies à l'aide de la relation

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \delta_0 \\ \tau_r &= \tau_{r-1} + \delta_r \quad r = 1 \dots R-1 \end{aligned} \quad (E.7)$$

où la variable aléatoire δ_r possède une distribution exponentielle caractérisée par la densité de probabilité

$$f_{\delta}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (\text{E.8})$$

Le calcul du coefficient K pour les différents profils donnés aux équations (3.36) à (3.38) conduit aux valeurs suivantes

a) Profil uniforme

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{E.9})$$

b) Profil exponentiel

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \left(1 - e^{-D_{tot}/\tau_{rms}} \right)}} \quad (\text{E.10})$$

c) Profil gaussien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \left[1 - 2Q \left[\frac{D_{tot} \sqrt{1 - 2/\pi}}{\tau_{rms}} \right] \right]}} \quad (\text{E.11})$$

où la fonction $Q(x)$ est définie par (2.76).

E.1.3 Modèle à arrivées par salves

Ce modèle est quelque peu compliqué par le fait que les raies sont générées à partir de deux processus d'arrivées de Poisson (i.e. celui des salves et celui des raies) et de deux constantes de temps des fonctions exponentielles caractérisant leur amplitude (voir la section 3.2). On doit donc cette fois calculer l'espérance par rapport au profil lui-même puisqu'il varie d'une réalisation à l'autre. De plus, on doit tenir compte du fait que la première salve et la première raie de chaque salve sont fixées respectivement à zéro et au début de chaque salve et ne sont donc pas placées aléatoirement. On obtient

$$K = \sqrt{\frac{\Gamma\gamma}{\left[\Lambda\Gamma \left(1 - e^{-D_{tot}^1/\Gamma} \right) + 1 \right] \left[\lambda\gamma \left(1 - e^{-D_{tot}^2/\gamma} \right) + 1 \right]}} \quad (\text{E.12})$$

où $D1_{tot}$ et $D2_{tot}$ sont respectivement les délais totaux pour les salves et les raies au-delà desquels on ne tient plus compte de ces dernières (relativement au début du profil et au début des salves).

E.2 Preuve pour le modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires

La constante de normalisation K peut être évaluée à l'aide de l'équation (3.34)

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} K^2 v_r^2 \right] = 1 \quad (\text{E.13})$$

où v_r est une variable aléatoire représentant l'amplitude de la raie r pour une réalisation du canal. Cette variable aléatoire est caractérisée par une distribution de Rayleigh dont la valeur quadratique moyenne correspond à l'amplitude du profil évaluée à la valeur du retard τ_r correspondant (i.e. $p(\tau_r)$). Le simple argument suivant permet d'obtenir l'expression recherchée pour la variable K .

La puissance moyenne reçue dans un intervalle de temps $[x, x+dx]$ est égale à l'amplitude du profil $p(x)$ mesurée à la valeur correspondante du délai multipliée par le nombre moyen de raies λdx dans cet intervalle. Ici λ représente le taux d'arrivée moyen des raies. La puissance moyenne totale s'écrit alors comme

$$P = \int_0^{D_{tot}} p(x) \lambda dx \quad (\text{E.14})$$

où nous avons procédé à la troncation du profil après un délai D_{tot} aux fins du calcul numérique. La variable K se calcul alors simplement comme

$$K = \frac{1}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \int_0^{D_{tot}} p(x) dx}} \quad (\text{E.15})$$

Nous présentons dans ce qui suit une approche différente permettant de prouver ce résultat à partir de la distribution de probabilité de l'amplitude des raies.

Sachant qu'une variable aléatoire x_i caractérisée par une distribution de probabilité de Rayleigh de valeur quadratique moyenne m_2 peut être obtenue à l'aide de la transformation suivante (Papoulis, 1991)

$$x_i = \sqrt{-m_2 \ln u_i} \quad (\text{E.16})$$

où u_i est une variable aléatoire de distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, v_r peut être définie comme

$$v_r = \sqrt{-p(\tau_r) \ln(u_r)} \quad (\text{E.17})$$

Avec cette transformation, (E.13) devient

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} -p(\tau_r) \ln(u_r) \right] = 1 \quad (\text{E.18})$$

La variable aléatoire u_r étant indépendante de τ_r et distribuée identiquement pour tous r , on peut évaluer en premier lieu l'espérance par rapport à u_r . L'espérance de $-\ln(u_r)$ lorsque u_r est une variable aléatoire de distribution uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ étant unitaire, cette équation devient

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} p(\tau_r) \right] = 1 \quad (\text{E.19})$$

où le nombre de raies R est une variable aléatoire représentant le nombre de raies dans l'intervalle $[0, D_{tot}]$ où D_{tot} est le délai de tronquation du profil (i.e. les raies dont le retard est supérieur à D_{tot} sont ignorées). Notons que dans le cas général, le profil est de longueur infinie et on doit procéder à sa tronquation lors de simulations numériques. Une façon équivalente d'effectuer cette tronquation est de faire tendre R à l'infini mais de multiplier l'amplitude des raies dont le retard est supérieur à D_{tot} par zéro. Pour ce faire, nous définissons une variable auxiliaire $z(\tau_r)$ telle que

$$z(\tau_r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau_r \leq D_{tot} \\ 0, & 0 > \tau_r > D_{tot} \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

En utilisant (E.20) il est possible de récrire (E.19) comme

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{\infty} z(\tau_r) p(\tau_r) \right] = 1 \quad (\text{E.21})$$

où le nombre de raies est maintenant infini mais où celles se situant hors du délai de tronquation voient leur amplitude multipliée par $z = 0$ et sont par conséquent éliminées.

On peut récrire cette équation comme

$$K^2 \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E} [z(\tau_r) p(\tau_r)] = 1 \quad (\text{E.22})$$

Il faut maintenant évaluer l'espérance à l'aide de la distribution des temps d'arrivées τ_r , donnée par la distribution d'Erlang (lorsque l'arrivée des raies est modélisée par un processus de Poisson, les temps d'arrivée suivent une distribution d'Erlang (Papoulis, 1991)) donnée par

$$f_r(x) = \frac{\lambda^{r+1}}{r!} x^r e^{-\lambda x} \quad r = 0 \dots R-1 \quad (\text{E.23})$$

où λ représente le taux d'arrivée moyen des raies. On obtient alors

$$K^2 \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z(x) p(x) \frac{\lambda^{r+1}}{r!} x^r e^{-\lambda x} dx = 1 \quad (\text{E.24})$$

La fonction $z(x)$ étant unitaire pour $0 \leq x \leq D_{tot}$ et nulle partout ailleurs, (E.24) devient

$$K^2 \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{D_{tot}} p(x) \frac{\lambda^{r+1}}{r!} x^r e^{-\lambda x} dx = 1 \quad (\text{E.25})$$

En interchangeant l'ordre d'évaluation de la somme et de l'intégrale, il vient

$$K^2 \int_0^{D_{tot}} p(x) e^{-\lambda x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} x^r dx = 1$$

$$K^2 \lambda \int_0^{D_{tot}} p(x) e^{-\lambda x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^r}{r!} dx = 1$$
(E.26)

On reconnaît la somme Σ dans cette équation comme étant l'expansion en série de la fonction exponentielle $e^{\lambda x}$. Ceci nous permet d'écrire

$$K^2 \lambda \int_0^{D_{tot}} p(x) e^{-\lambda x} e^{\lambda x} dx = 1$$

$$K^2 \lambda \int_0^{D_{tot}} p(x) dx = 1$$
(E.27)

En isolant K , on trouve l'expression générale de K pour le modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires de profil $p(x)$ caractérisé par un taux d'arrivée moyen des raies λ

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \int_0^{D_{tot}} p(x) dx}}$$
(E.28)

On donne aux sections suivantes l'expression de K pour les trois profils que nous utilisons dans ce travail, i.e. les profils uniforme, exponentiel et gaussien.

E.2.1 Le cas du profil uniforme

L'évaluation de l'équation (E.28) dans le cas du profil uniforme de l'équation (3.36) donne

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \int_0^{D_{tot}} \frac{1}{D_{tot}} dx}}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$
(E.29)

E.2.2 Le cas du profil exponentiel

L'évaluation de l'équation (E.28) dans le cas du profil exponentiel de l'équation (3.37) donne

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \int_0^{D_{tot}} \frac{1}{\tau_{rms}} e^{-x/\tau_{rms}} dx}}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \left(1 - e^{-D_{tot}/\tau_{rms}} \right)}} \quad (\text{E.30})$$

E.2.3 Le cas du profil gaussien

L'évaluation de l'équation (E.28) dans le cas du profil gaussien de l'équation (3.38) donne

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \int_0^{D_{tot}} \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \left(1 - 2Q \left[\frac{D_{tot}}{\sigma} \right] \right)}} \quad (\text{E.31})$$

où la fonction $Q(x)$ est définie par (2.76). En utilisant la définition de la valeur efficace du retard donnée en (3.38), on obtient finalement

$$K = \frac{1}{\sqrt{\lambda \left[1 - 2Q \left[\frac{D_{tot} \sqrt{1 - 2/\pi}}{\tau_{rms}} \right] \right]}} \quad (\text{E.32})$$

E.3 Preuve dans le cas du modèle à arrivées par salves

Ce modèle est quelque peu compliqué du fait que les raies sont générées à partir de deux processus d'arrivées de Poisson (i.e. celui des salves et celui des raies) et de deux constantes de temps des fonctions exponentielles caractérisant leur amplitude (voir la

section 3.2.3 et la figure 3.12). On doit donc cette fois calculer l'espérance par rapport au profil lui-même puisqu'il varie d'une réalisation à l'autre. De plus, on doit tenir compte du fait que la première salve et la première raie de chaque salve sont fixées respectivement à zéro et au début de chaque salve et ne sont donc pas placées aléatoirement comme dans le cas du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires. La constante de normalisation K peut être évaluée à l'aide de l'équation (3.34)

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} K^2 v_r^2 \right] = 1$$

$$K^2 E \left[\sum_{r=0}^{R-1} v_r^2 \right] = 1 \quad (\text{E.33})$$

où v_r est une variable aléatoire représentant l'amplitude de la raie r pour une réalisation du canal. Nous présentons ci-dessous une preuve menant à l'expression de K selon un cheminement qui se veut le plus près possible de la réalité physique du modèle. Notons qu'un argument plus simple et similaire à celui présenté à la section E.2 permet d'obtenir le résultat final donné en (E.55).

La somme pour toutes les raies $r = 0 \dots R-1$ dans (E.33) peut être subdivisée en effectuant premièrement la somme sur les raies pour une salve et ensuite la somme sur toutes les salves, i.e.

$$\sum_{r=0}^{R-1} v_r^2 = \sum_{i=0}^{Q-1} \sum_{j=0}^{R_i-1} v_{ij}^2 \quad (\text{E.34})$$

où $i = 0 \dots Q-1$ et $j = 0 \dots R_i-1$ sont respectivement les indices des salves et des raies, Q étant le nombre de salves et R_i le nombre de raies dans la salve i . Notons que dans le cas général, le profil est de longueur infinie et qu'il faut procéder à sa tronquation lors de simulations numériques. Pour cette raison, Q et R_i sont des variables aléatoires. En utilisant ceci dans (E.33), on obtient

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_i \sum_j v_{ij}^2 \right] = 1 \quad (\text{E.35})$$

D'après la définition du modèle à arrivées par salves (voir la figure 3.12), la valeur quadratique moyenne de l'amplitude d'une raie au temps $\tau = T_i + \tau_{ij}$ est donnée par

$$p(T_i, \tau_{ij}) = \frac{1}{\Gamma\gamma} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \quad (\text{E.36})$$

où T_i est le temps d'arrivée de la salve i et τ_{ij} est le temps d'arrivée de la raie j pour cette salve (relativement au début de la salve). Γ et γ sont les constantes de temps respectives des enveloppes des salves et des raies. En utilisant cette valeur dans (E.16) pour m_2 , on obtient

$$v_{ij} = \sqrt{-\left[\frac{1}{\Gamma\gamma} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \right] \ln(u_{ij})} \quad (\text{E.37})$$

où u_{ij} est une variable aléatoire distribuée uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. La condition (E.35) devient

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_i \sum_j -\frac{1}{\Gamma\gamma} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \ln(u_{ij}) \right] = 1 \quad (\text{E.38})$$

La variable aléatoire u_{ij} étant indépendante de T_i et τ_{ij} et distribuée identiquement pour tous i et j , on peut évaluer en premier lieu l'espérance par rapport à u_{ij} . Comme l'espérance de $-\ln(u_{ij})$ est unitaire, on obtient

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_i \sum_j \frac{1}{\Gamma\gamma} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \right] = 1 \quad (\text{E.39})$$

où l'espérance doit être prise par rapport aux temps d'arrivées des salves T_i et des raies individuelles τ_{ij} caractérisés respectivement par des taux moyens d'arrivées Λ et λ . En isolant la première salve (i.e. $i = 0$) et la première raie de toutes les salves (i.e. $j = 0$), on peut récrire (E.39) comme

$$\frac{K^2}{\Gamma\gamma} \mathbb{E} \left[e^{-T_0/\Gamma} e^{-\tau_{00}/\gamma} + \sum_{j \neq 0} e^{-T_0/\Gamma} e^{-\tau_{0j}/\gamma} + \sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{i0}/\gamma} + \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \right] = 1 \quad (\text{E.40})$$

Comme le temps d'arrivée de la première salve est fixé à $T_0 = 0$ et que la première raie de chaque salve est fixée à $\tau_{i0} = 0$, cette équation peut être simplifiée comme

$$\frac{K^2}{\Gamma\gamma} \mathbb{E} \left[1 + \sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{0j}/\gamma} + \sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} + \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \right] = 1 \quad (\text{E.41})$$

En distribuant l'espérance sur les termes individuels, cette équation devient

$$\frac{K^2}{\Gamma\gamma} \left\{ 1 + \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{0j}/\gamma} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma} \right] \right\} = 1 \quad (\text{E.42})$$

Calculons en premier lieu l'espérance suivante

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j \neq 0} \frac{1}{\gamma} e^{-\tau_{0j}/\gamma} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq 0} p(\tau_{0j}) \right], \quad p(\tau_{0j}) = \frac{1}{\gamma} e^{-\tau_{0j}/\gamma} \quad (\text{E.43})$$

où l'espérance est prise par rapport au temps d'arrivée relatif des raies τ_{0j} . On constate que cette équation correspond au cas du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires de profil exponentiel. En effet, le profil $p(\tau_{0j})$ de l'équation (E.43) correspond au profil de forme exponentielle de l'équation (3.38) avec $\tau_{rms} = \gamma$. De plus, comme la raie fixée à $\tau_{00} = 0$ est absente (car $j \neq 0$) dans (E.43), on obtient un processus d'arrivées de Poisson de taux moyen d'arrivée λ , ce qui correspond exactement au cas du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires. Si on revient à ce modèle, nous avons à l'équation (E.19)

$$K^2 \mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} p(\tau_r) \right] = 1 \quad (\text{E.44})$$

qu'on peut récrire comme

$$\mathbb{E} \left[\sum_{r=0}^{R-1} p(\tau_r) \right] = \frac{1}{K^2} \quad (\text{E.45})$$

En utilisant le résultat obtenu pour le profil exponentiel à l'équation (E.30), cette équation devient

$$E \left[\sum_{r=0}^{R-1} p(\tau_r) \right] = \lambda \left(1 - e^{-D_{tot}/\tau_{rms}} \right) \quad (\text{E.46})$$

En remplaçant τ_{rms} par γ , l'espérance (E.43) est donc

$$E \left[\sum_{j \neq 0} \frac{1}{\gamma} e^{-\tau_{0j}/\gamma} \right] = \lambda \left(1 - e^{-D2_{tot}/\gamma} \right)$$

$$E \left[\sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{0j}/\gamma} \right] = \lambda \gamma \left(1 - e^{-D2_{tot}/\gamma} \right) \quad (\text{E.47})$$

où $D2_{tot}$ est le délai de troncation des raies (i.e. les raies dont le retard, relatif au début de la salve, est supérieur à $D2_{tot}$ sont ignorées). En procédant de façon similaire pour la deuxième espérance dans (E.42), on obtient

$$E \left[\sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} \right] = \Lambda \Gamma \left(1 - e^{-D1_{tot}/\Gamma} \right) \quad (\text{E.48})$$

où $D1_{tot}$ est le délai de troncation des salves (i.e. les salves dont le temps d'arrivée est supérieur à $D1_{tot}$ sont ignorées). Une illustration de l'effet des paramètres $D1_{tot}$ et $D2_{tot}$ est donnée à la figure E.1.

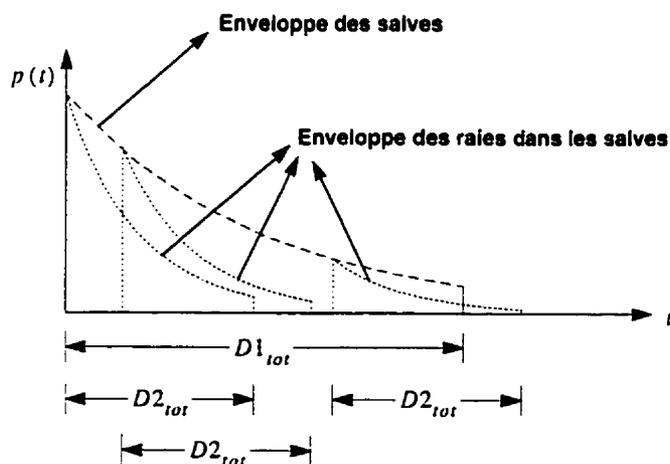


Figure E.1 Illustration de la troncation dans le cas du modèle à arrivées par salves

La troisième espérance dans (E.42) peut s'écrire

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] &= E\left[\sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} \sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] \\ &= \sum_{i \neq 0} E\left[e^{-T_i/\Gamma} \sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

Les variables aléatoires T_i et τ_{ij} étant indépendantes (puisque τ_{ij} est le temps d'arrivée des raies par rapport au début des salves, elle peut être générée de façon indépendante du temps d'arrivée de ces dernières), on peut écrire

$$E\left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] = \sum_{i \neq 0} E\left[e^{-T_i/\Gamma}\right] E\left[\sum_{j \neq 0} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] \quad (\text{E.50})$$

En utilisant (E.47) (l'indice i dans ce cas est immatériel), cette équation devient

$$E\left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] = \sum_{i \neq 0} E\left[e^{-T_i/\Gamma}\right] \lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) \quad (\text{E.51})$$

qu'on peut récrire comme

$$E\left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] = \lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) E\left[\sum_{i \neq 0} e^{-T_i/\Gamma}\right] \quad (\text{E.52})$$

En utilisant (E.48), on obtient

$$E\left[\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} e^{-T_i/\Gamma} e^{-\tau_{ij}/\gamma}\right] = \lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) \Lambda\Gamma \left(1 - e^{-D^1 t_{or}/\Gamma}\right) \quad (\text{E.53})$$

Il faut maintenant substituer (E.47), (E.48) et (E.53) dans (E.42), ce qui donne

$$\frac{K^2}{\Gamma\gamma} \left\{ 1 + \lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) + \Lambda\Gamma \left(1 - e^{-D^1 t_{or}/\Gamma}\right) + \lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) \Lambda\Gamma \left(1 - e^{-D^1 t_{or}/\Gamma}\right) \right\} = 1 \quad (\text{E.54})$$

En isolant K , on obtient finalement

$$K = \sqrt{\frac{\Gamma\gamma}{\left[\Lambda\Gamma \left(1 - e^{-D^1 t_{or}/\Gamma}\right) + 1\right] \left[\lambda\gamma \left(1 - e^{-D^2 t_{or}/\gamma}\right) + 1\right]}} \quad (\text{E.55})$$

ANNEXE F
DÉTERMINATION D'UN INDICATEUR SUR LA PRÉCISION DES RÉSULTATS
RELATIFS AU CANAL RADIOMOBILE

Cette annexe présente une méthode permettant l'obtention d'un indicateur sur la précision des résultats numériques relatifs au canal radiomobile du chapitre III. L'utilisation d'un tel indicateur est indispensable car la précision des résultats numériques obtenus lors des simulations de type Monte-Carlo est a-priori inconnue. Dans le but d'obtenir des résultats fiables on aura tendance à effectuer un grand nombre de simulations, jusqu'à obtenir par exemple des valeurs qui semblent ne plus varier de façon perceptible. Cette méthode est loin d'être satisfaisante en ce qui a trait à la durée des simulations requises. Une autre méthode plus simple consiste à obtenir un nombre fixe de réalisations pour toutes les simulations. Dans ce cas, certains résultats seront d'une grande précision alors que d'autres pourront être peu précis.

Afin de limiter les durées des simulations tout en garantissant une certaine précision sur les résultats, nous allons déterminer une borne sur la précision des résultats obtenus. Soit la distribution cumulative de probabilité $F_R(r)$ se rapportant soit sur le taux de transmission obtenu à l'aide de l'égaliseur linéaire ou de la borne du filtre adapté soit sur la capacité. La valeur du taux de coupure à 1% que nous cherchons à déterminer par simulation est définie comme

$$R_{0.01} = \{r | F_R(r) = 0.01\} \quad (\text{F.1})$$

Soit maintenant $\hat{F}_R(r)$ un estimé de la distribution obtenu par simulation à l'aide de n réalisations. Selon (Papoulis, 1991), la valeur $\hat{F}_R(r)$, pour r fixé, se situe dans l'intervalle

$$\hat{F}_R(r) \pm \frac{z_u}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{F}_R(r) [1 - \hat{F}_R(r)]} \quad (\text{F.2})$$

avec un facteur de confiance $\zeta = 2u - 1$ (i.e. la valeur trouvée sera dans cet intervalle avec probabilité ζ) où u est le niveau de confiance, n le nombre de points de simulation sur lequel est basé $\hat{F}_R(r)$ et z_u est définie par la relation

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_u} e^{-z^2/2} dz \quad (\text{F.3})$$

Dans notre cas, nous désirons connaître non pas la précision sur $\hat{F}_R(r)$ mais sur la valeur en abscisse $r = \hat{R}_{0.01}$ qui correspond à $\hat{F}_R(r) = 0.01$. Il suffit donc de fixer $\hat{F}_R(r) = 0.01$, de calculer l'intervalle (F.2) et de projeter ce dernier sur l'axe r , tel qu'illustré à la figure F.1. La pente m nécessaire à cette projection est inconnue mais on peut en obtenir une approximation en calculant la dérivée de $\hat{F}_R(r)$ autour du point $\hat{R}_{0.01}$.

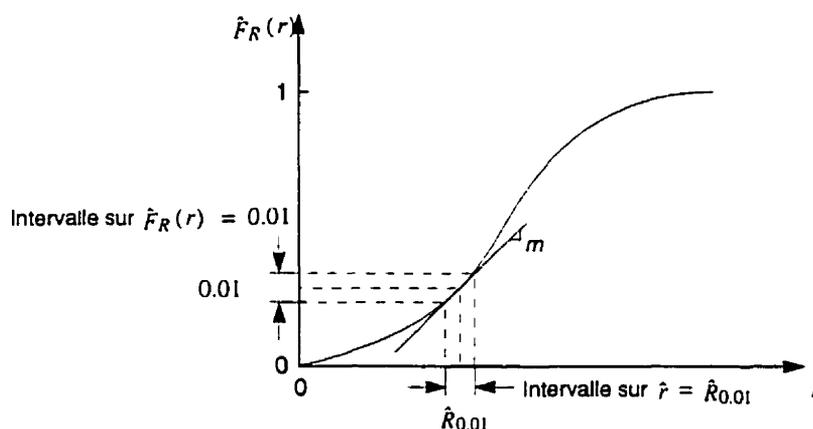


Figure F.1 Projection de l'intervalle de confiance

L'intervalle sur $R_{0.01}$ est alors estimé à

$$R_{0.01} \pm \frac{z_u}{m\sqrt{n}} \sqrt{0.01 [1 - 0.01]} \quad (\text{F.4})$$

Notons que le fait d'utiliser un estimé de m introduit une incertitude supplémentaire sur la marge d'erreur mais, si n est suffisamment grand, cette incertitude sera petite par rapport à l'intervalle et modifiera le facteur de confiance de façon minimale.

Les résultats numériques (relatifs au canal radiomobiles) présentés dans cette thèse ont été obtenus en choisissant un facteur de confiance $\zeta = 95\%$ (i.e. $z_u = 1.96$) et en fixant l'intervalle (F.4) à $\pm 1.0\%$. Ceci revient à dire que pour chaque résultat numérique, la simulation s'est poursuivie jusqu'à ce que la marge d'erreur sur $\hat{R}_{0.01}$ soit d'environ $\pm(1.0\%)$, 95% du temps. L'intervalle en pourcentage s'écrit alors

$$\hat{R}_{0.01} \pm \frac{19.5}{\hat{R}_{0.01} m \sqrt{n}} \% = \hat{R}_{0.01} \pm 1\% \quad (\text{F.5})$$

Notons qu'un minimum de 1000 réalisations est toujours imposé afin d'assurer une valeur de n suffisamment élevée pour éliminer les erreurs transitoires lorsque n est faible. De plus, les simulations sont arrêtées lorsque l'erreur absolue devient inférieure à 0.01, i.e. lorsque $1\% \times \hat{R}_{0.01} < 0.01$.

ANNEXE G GÉNÉRATION DES NOMBRES ALÉATOIRES

Tous les nombres aléatoires utilisés lors des simulations du canal radiomobile numérique du chapitre III ont été générés à l'aide de la formule récurrente suivante (Papoulis, 1991)

$$\begin{aligned} z_n &= 16807z_{n-1} \bmod 2147483647 \\ z_0 &= 1 \end{aligned} \tag{G.1}$$

dont la période est 2^{31} . Il a été vérifié que pour chacune des simulations, cette période n'a jamais été atteinte (le générateur a par contre été remis à zéro pour chacune des simulations). On obtient une séquence de nombre dont la distribution est uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$ en divisant z_n par la période

$$u_n = \frac{z_n}{2^{31}} \tag{G.2}$$

Dans les sections suivantes, la variable aléatoire u_i est utilisée pour générer les différentes variables aléatoires nécessaires à nos simulation. Les méthodes utilisées (Papoulis, 1991) font appel à la technique de transformation du pourcentage pour les distributions de Rayleigh et exponentielle et à celle de rejet et combinaison pour la distribution normale.

Distribution de Rayleigh

Une séquence de nombres pseudoaléatoires caractérisée par une distribution de probabilité de Rayleigh et dont la valeur quadratique moyenne est m_2 est obtenue à l'aide de la transformation

$$x_i = \sqrt{-m_2 \ln u_i} \tag{G.3}$$

Distribution de phase

Une séquence de nombres pseudoaléatoires caractérisée par une distribution de probabilité uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est obtenue à l'aide de la transformation

$$x_i = 2\pi(u_i - 0.5) \quad (\text{G.4})$$

Distribution de Rice

Soit D l'amplitude de l'onde directe et m_2 la valeur quadratique moyenne d'une distribution de Rayleigh correspondant à l'onde diffuse. Une séquence de nombres pseudoaléatoires dont l'amplitude A_i et la phase θ_i suivent une distribution de probabilité de Rice est obtenue à l'aide des transformations

$$\begin{aligned} A_i &= (\alpha_i + D)^2 + \beta_i^2 \\ \theta_i &= -\text{atan2}(\beta_i, \alpha_i + D) \quad -\pi < \theta_i < \pi \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

où $\text{atan2}(x)$ est la fonction arctangente définie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et où α_i et β_i sont des variables aléatoires normales de variance $m_2/2$ pouvant être générées efficacement à l'aide de la procédure suivante

$$\begin{aligned} &\text{Tant que } (s \geq 1) \\ &\quad a = 2u_j - 1 \quad j = j + 1 \\ &\quad b = 2u_j - 1 \quad j = j + 1 \\ &\quad s = a^2 + b^2 \\ &\text{Fin Tant que} \\ &l = \sqrt{\frac{-m_2 \ln(s)}{s}} \\ &\alpha_i = al \\ &\beta_i = bl \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Distribution exponentielle

Une séquence de nombres pseudoaléatoires caractérisée par une distribution de probabilité exponentielle de paramètre λ (voir (E.8)) est obtenue à l'aide de la transformation

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(u_i) \quad (\text{G.7})$$

ANNEXE H
EFFET DU PARAMÈTRE τ SUR LA CAPACITÉ DU CANAL RADIOMOBILE
MUNI DE DEUX RAIES

Cette annexe étudie l'effet du paramètre τ sur la capacité du canal radiomobile muni de deux raies (il n'y a qu'un mobile et une antenne réceptrice) de la section 3.7 et démontre que lorsque $\tau \rightarrow \infty$, la valeur de la capacité devient indépendante des variables τ , θ_1 et θ_2 représentant respectivement le délai entre les deux raies et leur phase respective. Dans le cas général, la capacité se calcule comme (voir la section (3.3))

$$C = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \log_2 \left[\frac{\lambda_i(z)}{\lambda} \right] dz \quad \text{bits/sec} \quad (\text{H.1})$$

$$N\rho = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i(z)} dz \quad (\text{H.2})$$

où λ_i sont les N valeurs propres de la matrice de canal $|\tilde{H}(z)|^2$, et où λ est un multiplicateur de Lagrange, ρ est le rapport signal sur bruit moyen par mobile (lorsque le bruit est blanc et gaussien) et Ω_i sont les intervalles d'intégration à l'intérieur d'une bande de fréquence W_c et définis par

$$\Omega_i = \{z \mid \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i(z)} > 0\} \quad i = 1 \dots N \quad (\text{H.3})$$

Pour un système de communications radiomobile où un mobile transmet sur un canal muni de deux raies vers un récepteur muni d'une seule antenne réceptrice, la fonction de transfert du canal s'écrit comme (voir la figure 3.25-b)

$$\tilde{H}(\omega) = A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} e^{-j\omega\tau} \quad (\text{H.4})$$

où A_1 , A_2 , θ_1 et θ_2 sont des variables dont la valeur dépend du modèle de canal choisi. On calcule l'unique valeur propre de ce canal comme

$$\begin{aligned}\lambda_1(\omega) &= |\bar{H}(\omega)|^2 \\ \lambda_1(\omega) &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \omega\tau)\end{aligned}\quad (\text{H.5})$$

En substituant $z = fT = \frac{\omega}{2\pi}T$ dans cette équation et en utilisant le résultat dans (H.1) et (H.2) où on pose $N = 1$, et $\tau' = \frac{\tau}{T}$, on obtient

$$C = \int_{\Omega} \log_2 \left[\frac{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')}{\lambda} \right] dz \quad (\text{H.6})$$

$$\rho T = \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')} dz \quad (\text{H.7})$$

On peut récrire (H.7) comme

$$\rho T = \frac{1}{\lambda} K(\Omega) - \int \frac{1}{\Omega A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')} dz \quad (\text{H.8})$$

où $K(\Omega) = \int_{\Omega} dz$. En isolant λ dans cette expression, on obtient

$$\lambda = \frac{K(\Omega)}{\rho T + \int \frac{1}{\Omega A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')} dz} \quad (\text{H.9})$$

La figure H.1a illustre la fonction à intégrer dans cette équation dans le cas particulier où $\theta_1 = \theta_2$ et $\tau' = 1$ alors que la figure H.1b illustre le cas plus général où $\theta_1 \neq \theta_2$ et $\tau' \neq 1$. Tel qu'illustré, cette intégrale (et par voie de conséquence λ et C) dépend en général des valeurs de θ_1 , θ_2 et τ . Nous allons cependant démontrer que lorsque $\tau' \rightarrow \infty$, ces variables n'interviennent plus dans le calcul de la capacité. Pour ce faire, examinons le scénario montré à la figure H.1c qui correspond au cas où $\tau' \gg 1$. Dans ce cas, l'intégrale s'évalue sur un très grand nombre d'intervalles identiques de la fonction cyclique à intégrer, seules les intervalles correspondant aux deux extrémités de la fonction étant éventuellement incomplets. La valeur de l'intégrale pour ces deux extrémités étant négligeable par rapport au reste de l'intégrale, il est possible de ne pas en tenir compte lorsque $\tau' \rightarrow \infty$. L'intégrale étant identique sur tout les intervalles restant, il devient alors

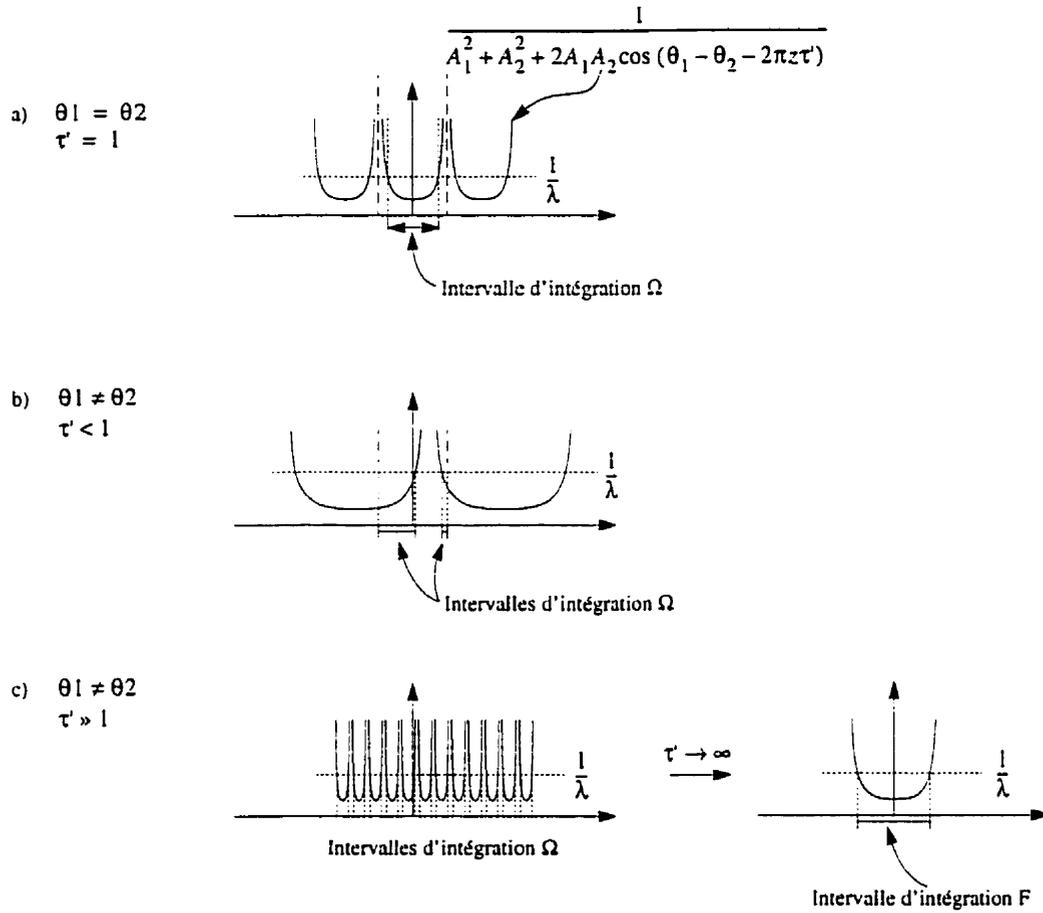


Figure H.1 Fonction à intégrer dans l'équation (H.9)

possible d'intégrer sur un seul d'entre eux et de multiplier le résultat par le nombre d'intervalles. Ce dernier se calcule en divisant la largeur de bande par la longueur d'un cycle du cosinus dans (H.9), i.e.

$$n = \frac{W_z}{1/\tau'} \tag{H.10}$$

On a alors

$$\int \frac{1}{\Omega A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')} dz \stackrel{\tau' \rightarrow \infty}{=} \frac{W_z}{1/\tau'} \int_F \frac{1}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau')} dz \tag{H.11}$$

où F correspond à l'intervalle d'intégration d'un seule cycle. En substituant $x = \theta_1 - \theta_2 + 2\pi z\tau'$ dans la partie droite de l'expression, on a finalement

$$\int \frac{1}{\Omega A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi z \tau')} dz \stackrel{\tau \rightarrow \infty}{=} \frac{W_z}{2\pi} \int_{F'} \frac{1}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(x)} dx \quad (\text{H.12})$$

où F' est l'intervalle d'intégration à l'intérieur de $[-\pi, \pi]$ (un cycle de la fonction $\cos(x)$). En substituant cette expression dans (H.9), on obtient

$$\lambda \stackrel{\tau \rightarrow \infty}{=} \frac{K(F)}{\rho T + \frac{W_z}{2\pi} \int_{F'} \frac{1}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(x)} dx} \quad (\text{H.13})$$

il apparait donc que lorsque $\tau' \rightarrow \infty$ (ou de façon équivalente $\tau \rightarrow \infty$), λ devient indépendante de τ' (et donc de τ) ainsi que de θ_1 et θ_2 . En procédant de façon similaire avec l'expression (H.6) (où maintenant λ est indépendant de τ , θ_1 et θ_2) donnant la capacité, il ressort que cette dernière devient également indépendante des variables τ , θ_1 et θ_2 lorsque $\tau \rightarrow \infty$.

ANNEXE I

AUTRES RÉSULTATS NUMÉRIQUES RELATIFS AU CANAL RADIOMOBILE

Nous présentons dans cette annexe les résultats supplémentaires de simulations effectuées en fonction des différents paramètres du système de communication radiomobile du chapitre III. Nous débuterons par donner à la première section les résultats, sous la forme de taux de coupure à 1%, relatifs à l'utilisation du modèle à profil continu. Dans ce cas, nous fournirons en premier lieu un modèle de base et étudierons individuellement, dans les sous-sections, l'influence de la majorité des paramètres du système tels que la valeur efficace du retard, le rapport signal sur bruit, etc. Nous donnerons aux deux sections subséquentes quelques résultats relatifs aux modèles à arrivées discrètes et à arrivées par salves. Dans le cas du modèle à arrivées discrètes, nous ne présenterons que des résultats faisant état de l'influence du taux d'arrivée des raies λ et de l'influence de la valeur efficace du retard alors que dans le cas du modèle à arrivées par salves, nous n'étudierons que l'influence de la valeur efficace du retard. Par la suite, une comparaison entre le modèle à arrivées discrètes et celui à arrivées par salves sera présentée afin de faire ressortir dans quelle mesure l'utilisation d'un modèle plutôt que l'autre affecte les résultats lorsque la forme du profil et le taux d'arrivée moyen des raies sont les mêmes dans les deux cas. Notons que la précision des résultats présentés dans ce chapitre sur les taux de coupure à 1% est d'environ 1%, 95% du temps (à ce propos, voir l'annexe F).

I.1 Résultats relatifs au modèle à profil continu

Nous désirons étudier dans cette section l'influence des divers paramètres du système pour le modèle à profil continu. Pour ce faire, nous allons premièrement définir un système de base caractérisé par les paramètres suivants:

- Type de modèle: à profil continu
- Forme du profil: uniforme
- Nombre de raies $R = 10$

- Valeur efficace du retard normalisée $\tau_{rms}/T = 1.0$
- Taux d'arrivée des raies (à intervalles fixes) $\lambda_c = 2.88$ ¹
- Rapport signal sur bruit $\rho = 10\text{dB}$
- Taux d'erreur maximal $BER = 10^{-3}$
- Facteur d'expansion de bande $\alpha = 0.35$
- Évanouissements de type Rayleigh (sans liaison directe)
- Nombre d'antennes $M = 1 \dots 3$
- Nombre de mobiles $N = 1 \dots 3$

Nous étudierons aux sous-sections suivantes l'influence individuelle de chacun de ces paramètres sur les valeurs du taux de coupure de l'égaliseur linéaire, du filtre adapté et de la capacité. Puisque le modèle à profil continu suppose un taux d'arrivée des raies assez élevé (voir la section 3.2), nous débuterons par une étude du nombre de raies requises afin de simuler de façon adéquate le modèle à profil continu. Ayant ainsi démontré que le système de base simule de façon adéquate le modèle à profil continu, nous procéderons par la suite à l'étude de l'influence des autres paramètres.

I.1.1 Évaluation de l'influence du taux d'arrivée des raies

Nous étudions dans cette section l'impact du nombre de raies utilisées pour modéliser le modèle à profil continu ou plus spécifiquement du nombre de raies par unité de retard efficace (i.e. le nombre de raies dans un intervalle de temps égal à la valeur efficace du retard) que nous désignerons dans ce qui suit comme le taux d'arrivée des raies et que nous définissons comme

$$\lambda_c = \frac{\tau_{rms}}{\tau} \quad (\text{I.1})$$

où τ est la valeur du retard entre les raies successives. La figure I.1 présente les taux de coupure en fonction du nombre de raies par unité de retard efficace normalisé pour les

1. 2.88 raies dans un intervalle de temps correspondant à la valeur efficace du retard.

profils uniforme et exponentiel dont la valeur efficace du retard est unitaire. On y constate

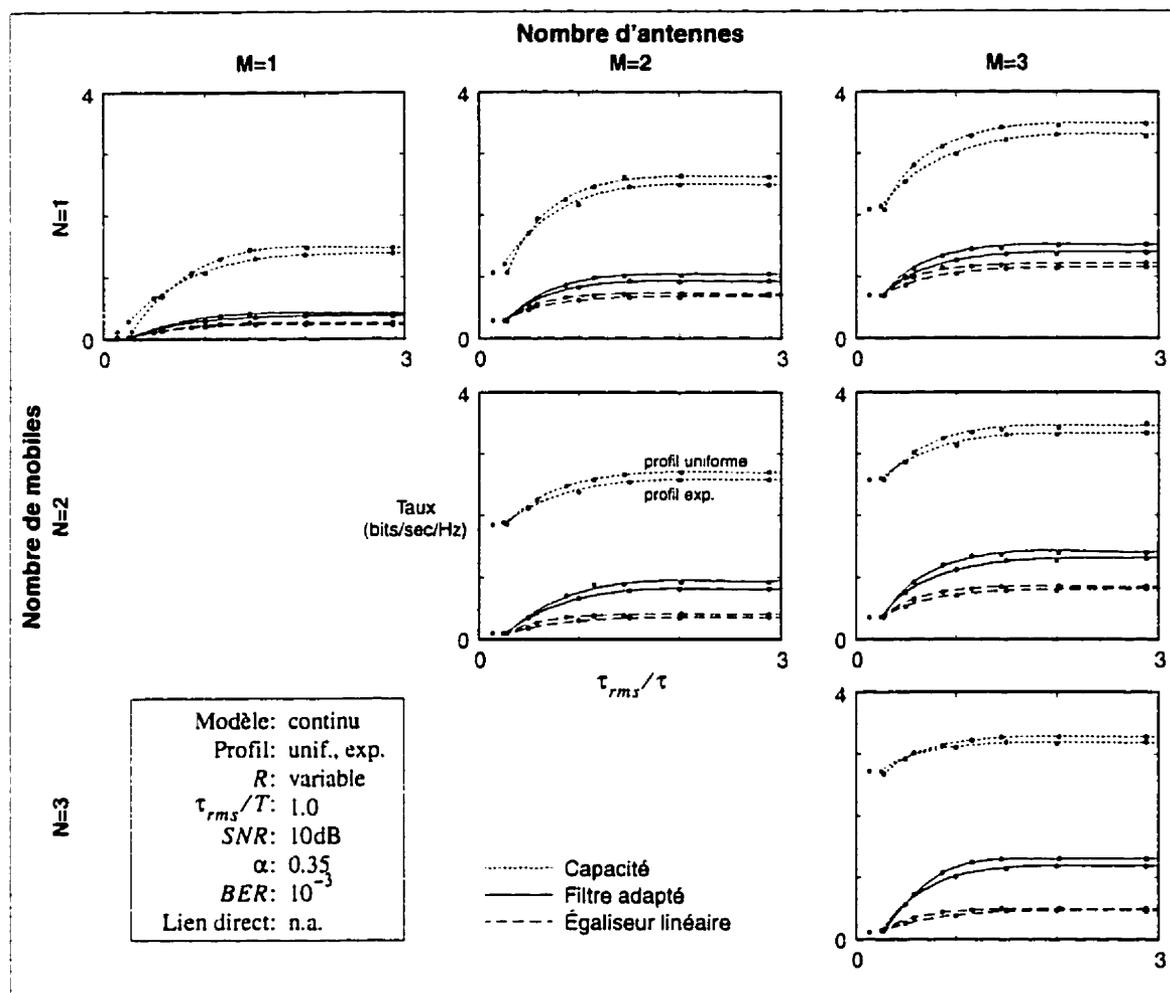


Figure I.1 Taux de coupure vs. taux d'arrivée, modèle à profil continu

que les taux de coupure tendent vers une valeur asymptotique lorsque le taux d'arrivée est supérieur à environ 1.5 ou 2. On obtient alors une bonne approximation du profil continu puisque les taux de coupure ne varient plus de façon perceptible. Comme le système de base défini précédemment utilise un taux d'arrivée des raies de 2.88, nous pouvons en tirer la conclusion que ce dernier constitue une bonne approximation du modèle à profil continu.

I.1.2 Évaluation de l'influence de la valeur efficace du retard

La figure I.2 illustre de quelle façon le taux de coupure varie en fonction de la valeur efficace du retard normalisé τ_{rms}/T pour le système de base. Se rapportant au cas où il n'y

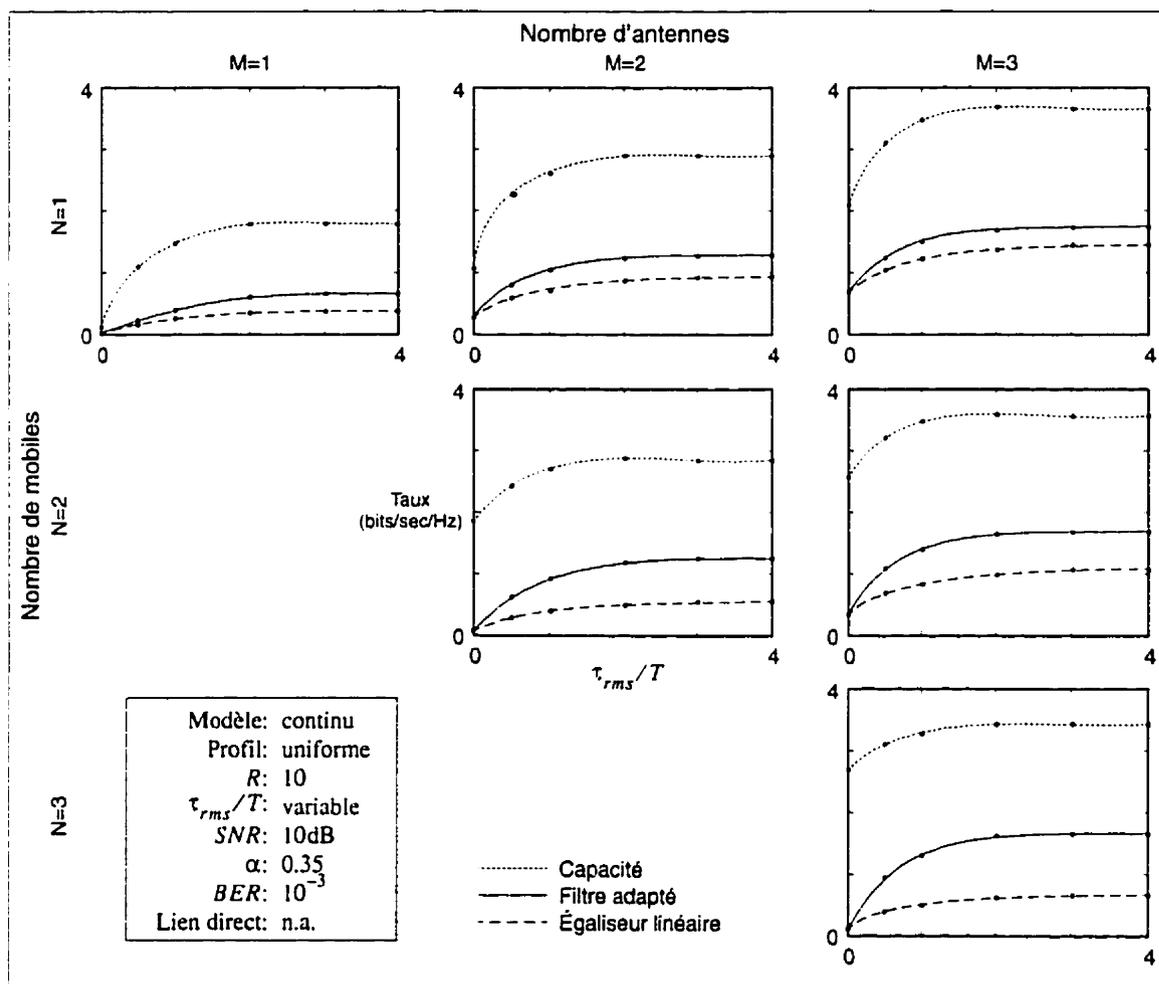


Figure I.2 Taux de coupure vs. valeur efficace du retard, modèle à profil continu

a qu'un mobile et une antenne, on voit que le taux de coupure augmente rapidement lorsque la valeur efficace du retard devient non négligeable et finit par se stabiliser lorsque cette valeur tend à l'infini. D'autre part, on voit que les taux de coupure pour la capacité, l'égaliseur linéaire et le filtre adapté évoluent de façon similaire en fonction de la valeur

efficace du retard, ce qui laisse penser que l'égaliseur linéaire réussit à prendre avantage de la capacité accrue du canal dans ce cas.

Ceci reste valide lorsque le nombre d'antennes passe à deux puis à trois puisque les trois valeurs du taux de coupure augmentent de façon similaire. Par contre, lorsque le nombre de mobiles augmente, la capacité et la borne du filtre adapté restent relativement stables alors que le taux de l'égaliseur linéaire chute dramatiquement, ce qui tend à indiquer que ce dernier ne réussit pas à tirer avantage de la diversité implicite du canal, qui pourtant est présente, tel que démontré par les taux de coupure de la capacité et du filtre adapté. Ceci semble démontrer que la présence des autres mobiles agit comme un signal de brouillage que l'égaliseur linéaire est incapable de traiter de façon convenable.

I.1.3 Évaluation de l'influence de la forme du profil

Jusqu'à présent, nous avons présenté des résultats basés sur l'utilisation d'un profil de canal uniforme. La figure I.3 démontre que les taux de coupure sont surtout fonction de la valeur efficace du retard, la forme spécifique du profil ayant peu d'influence. En effet, les taux de coupure calculés en utilisant un profil uniforme et un profil gaussien sont pratiquement identiques, leurs courbes respectives se confondant. On note par contre une très légère modification des performances lors de l'utilisation d'un profil exponentiel. Cette différence peut s'expliquer par le fait que le profil gaussien se rapproche plus du profil uniforme du fait qu'il tend rapidement vers zéro en fonction de e^{-x^2} comparativement à e^{-x} pour le profil exponentiel, le profil uniforme étant forcé à zéro instantanément après un certain délai. Ces résultats indiquant que la forme du profil a peu d'influence sur les performances des égaliseurs correspondent à des travaux précédents pour des structures d'émetteurs-récepteurs bien définies (Chuang, 1987).

I.1.4 Évaluation de l'influence du rapport signal sur bruit

La figure I.4 illustre l'évolution des taux de coupure en fonction du rapport signal sur bruit (SNR) ρ exprimé en dB (voir (3.42)). Comme on le constate, le taux de coupure du filtre

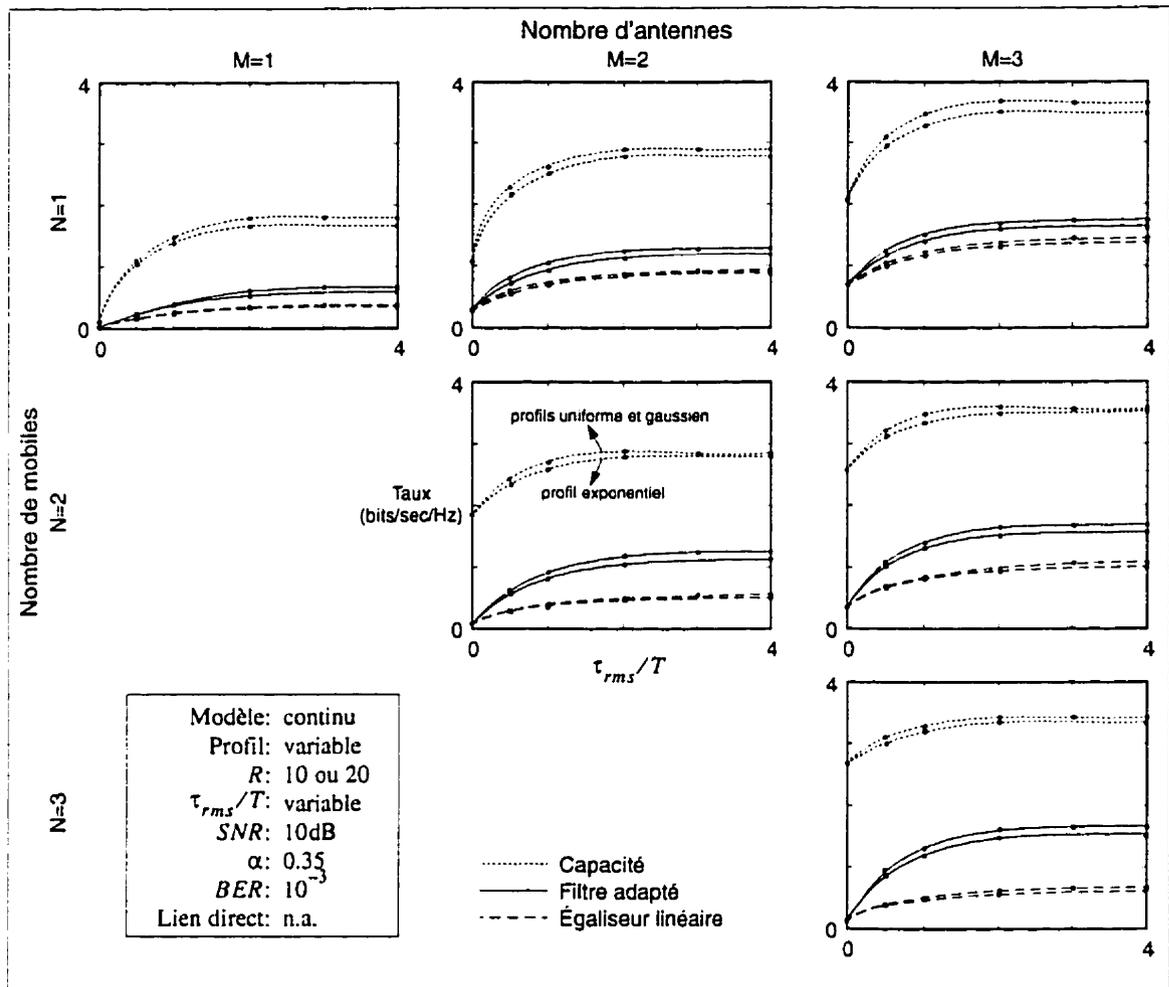


Figure I.3 Taux de coupure vs. forme du profil

adapté suit assez bien l'évolution de la capacité lorsque SNR augmente. On constate par contre que bien que le taux de l'égaliseur linéaire augmente avec SNR , cette augmentation n'est pas aussi forte que celle de la capacité ou du filtre adapté, et ceci est encore plus évident lorsque le nombre de mobiles augmente.

Ceci semble indiquer que lorsque le bruit devient négligeable, la susceptibilité de l'égaliseur linéaire à la présence de brouilleurs devient plus évidente. Lorsque par contre le bruit est grand (SNR est petit), c'est le bruit qui est le facteur d'importance et alors

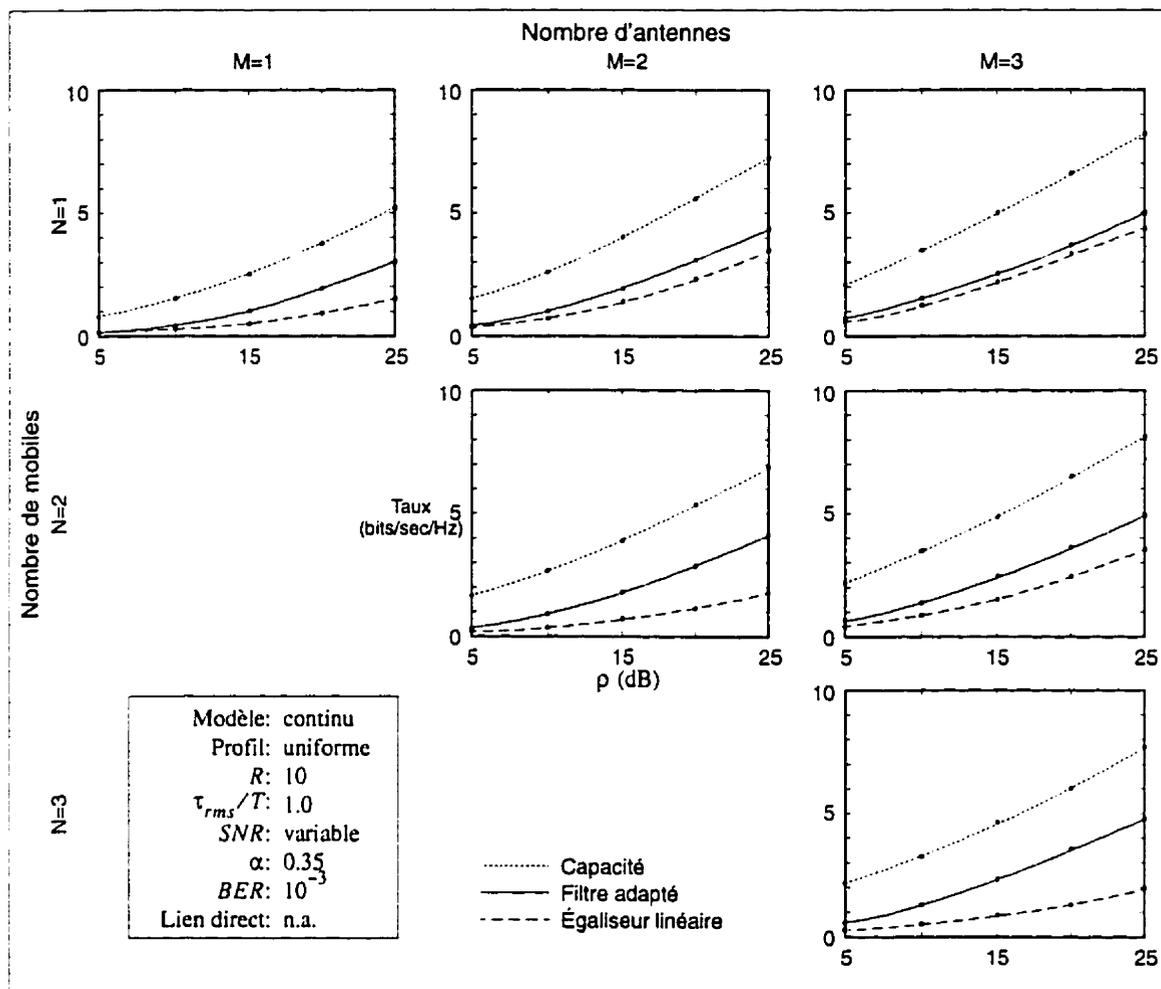


Figure I.4 Taux de coupure vs. rapport signal sur bruit

l'égaliseur linéaire est plus performant comparativement à la capacité et au filtre adapté. En fait, l'égaliseur linéaire tend vers un filtre adapté lorsque le bruit est très grand comparativement au brouillage et c'est pourquoi ses performances se rapprochent de celles du filtre adapté.

On constate également que l'ajout d'antennes supplémentaires, lorsqu'on maintient le nombre de mobiles fixe, tend à rendre le taux de l'égaliseur linéaire semblable au taux du filtre adapté, ce qui est plus évident pour de grande valeur de ρ . La diversité spatiale des

antennes compense donc pour l'inaptitude de l'égaliseur linéaire à contrer le brouillage alors que le filtre adapté n'en a pas vraiment besoin puisqu'il réussit à tirer avantage de la diversité temporelle implicite du canal, i.e. ses performances varient peu lorsque M augmente.

I.1.5 Évaluation de l'influence du taux d'erreur maximal

Jusqu'à maintenant, nous avons fixé le taux d'erreur $BER = 10^{-3}$ afin de calculer les taux de coupure de l'égaliseur linéaire et du filtre adapté. La figure I.5 illustre les taux de coupure pour différentes valeurs de BER . Notons que la capacité est indépendante de ce paramètre. Évidemment, le taux de coupure augmente lorsqu'on accepte d'avoir plus d'erreurs (augmentation du BER) mais on voit que l'égaliseur linéaire et le filtre adapté répondent de façon similaire à ce paramètre puisque leurs courbes restent sensiblement parallèles. On voit tout de même que lorsque le nombre de mobiles augmente, surtout pour de grandes valeurs de BER , la performance de l'égaliseur linéaire se dégrade comparativement à celle du filtre adapté.

I.1.6 Évaluation de l'influence du facteur d'expansion de bande

Le système utilisé jusqu'à maintenant faisait appel à un facteur d'expansion de bande $\alpha = 0.35$ (voir la section 3.5.2), ce qui signifie que la largeur de bande du filtre de mise en forme est de 35% supérieure à la largeur de bande de Nyquist qui est de $W_N = 1/T$ Hz. La largeur de bande du filtre de mise en forme est donc de $W = (1 + \alpha)/T$ Hz. En général, on essaiera de diminuer autant que possible la valeur de α afin d'utiliser une largeur de bande la plus petite possible et ainsi permettre un plus grand nombre d'utilisateurs pour une largeur de bande totale donnée. La figure I.6 démontre que l'effet de ce facteur est minime sur les taux de coupure mais on constate une légère diminution avec une plus grande largeur de bande. Notons toutefois que nous avons limité la largeur de bande du système à deux fois la bande de Nyquist (lorsque $\alpha = 1$). Les performances du système

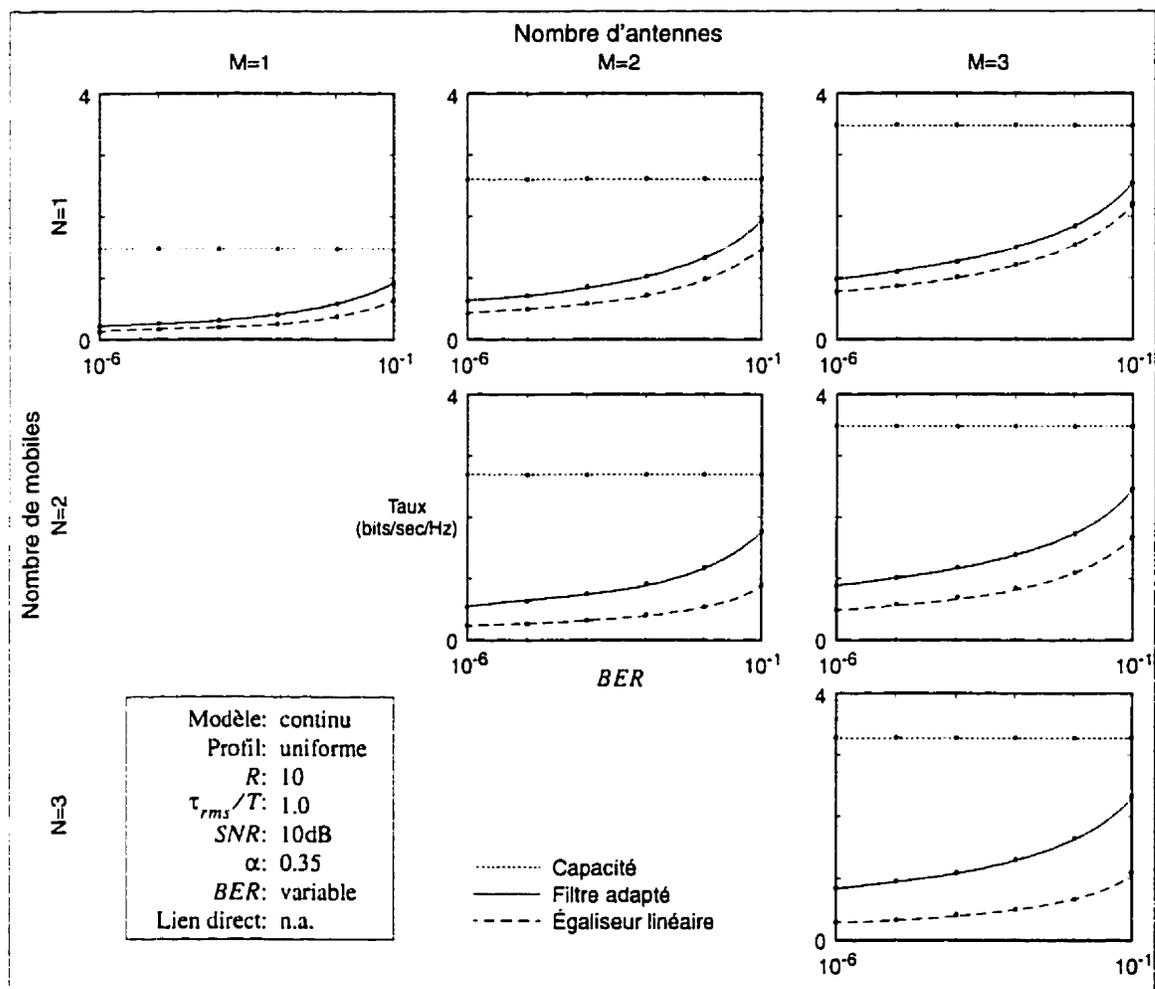


Figure I.5 Taux de coupure vs. taux d'erreur maximal

au delà de cette bande peuvent donc différer, tel que d'autres résultats semblent le suggérer dans le cas où il y a absence d'évanouissements (Petersen et Falconer, 1994).

I.2 Évaluation de l'influence de la puissance relative de la raie directe

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé l'absence d'une liaison directe entre les mobiles et les antennes réceptrices, i.e. $D^2 = 0$ dans (3.62). La figure I.7 présente les taux de coupure en fonction de la puissance relative dans la raie du trajet direct. Dans cette figure, une valeur nulle pour D^2 indique l'absence de cette liaison directe alors qu'une valeur

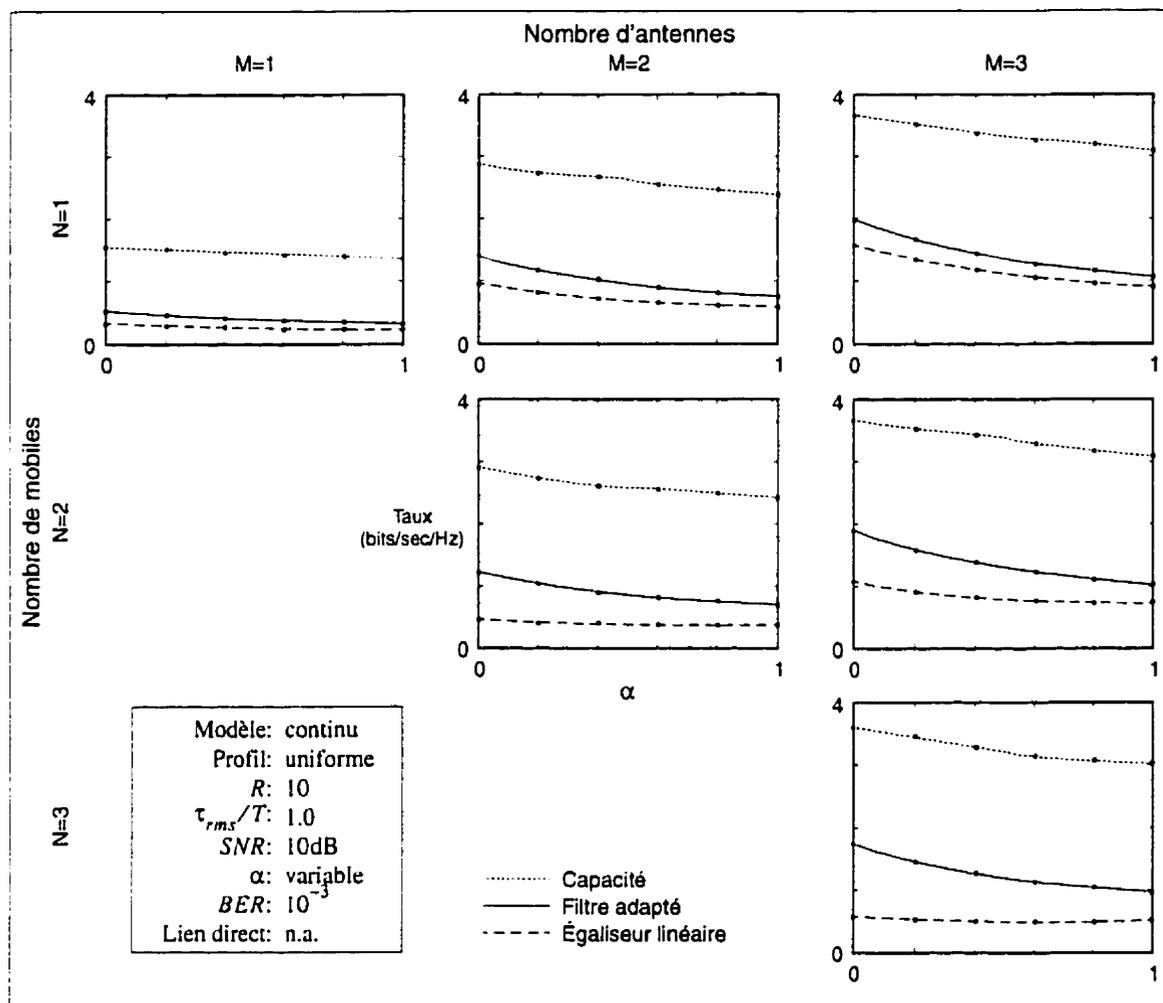


Figure I.6 Taux de coupure vs. facteur d'expansion de bande

unitaire indique l'absence de liaisons diffusent entre mobiles et antennes réceptrices (i.e. toutes les entrées de la matrice de canal sont alors unitaires).

On constate une légère augmentation des valeurs du taux de coupure pour de faibles valeurs de la puissance de la raie directe, ce qui correspond à une diminution de l'effet des évanouissements, le canal devenant de plus en plus constant et fiable. Ceci est particulièrement évident lorsqu'il n'y a qu'un seul mobile. Par contre, lorsque la raie directe devient plus importante, la diversité temporelle implicite du canal devient de plus

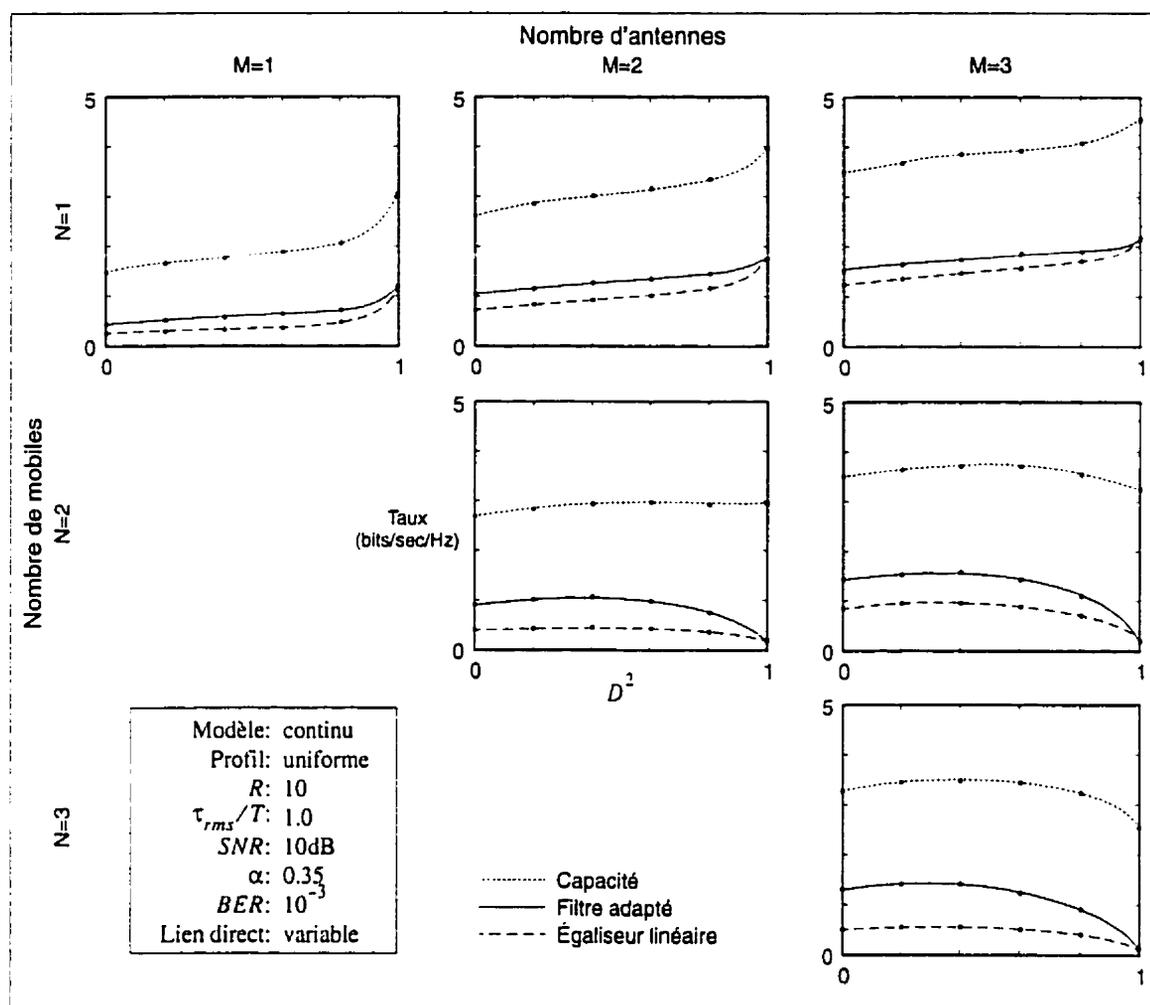


Figure I.7 Taux de coupure vs. puissance relative de la raie directe

en plus négligeable et les signaux reçus par les antennes deviennent corrélés entre eux. Ceci fait en sorte de diminuer les valeurs du taux de coupure lorsque le nombre de mobiles est supérieur à un. En effet, pour supporter plusieurs mobiles, les signaux reçus par les antennes doivent être décorrélés, ce qui n'est plus le cas. On constate également que les valeurs du taux de coupure pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté sont identiques lorsque $D^2 = 1$. Ceci correspond au fait que le canal étant constant, il y a absence d'interférence entre symboles et l'égaliseur linéaire devient alors un filtre adapté. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les équations (2.64) et (2.65) donnant

respectivement l'EQM pour l'égaliseur linéaire et le filtre adapté; en supposant que $\tilde{R}(\omega)$ (la matrice repliée de canal) soit constante, les équations sont identiques.

On peut donc en venir à la conclusion que la présence d'une liaison directe entre les mobiles et la base n'a pas d'effet négatif tant que la puissance de la raie directe reste sous un certain seuil qui, dans notre cas se situe autour de $D^2 = 0.6$ pour un maximum de 3 mobiles et 3 antennes.

I.3 Résultats relatifs au modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires

Dans cette section, nous présentons les résultats relatifs à l'utilisation du modèle à arrivées discrètes à intervalles aléatoires. Dans un premier temps nous étudierons l'impact du taux d'arrivée des raies λ sur les valeurs du taux de coupure pour le système de base présenté précédemment et dont le nombre de raies ainsi que leur répartition temporelle obéissent à un processus de Poisson. Nous discutons dans un deuxième temps de l'influence de la valeur efficace du retard sur les valeurs du taux de coupure pour ce même modèle.

I.3.1 Évaluation de l'influence du taux d'arrivée des raies

La figure I.8 présente les valeurs du taux de coupure en fonction du taux d'arrivée normalisé $\lambda\tau_{rms}$ des raies, qui caractérise le nombre moyen d'arrivées dans un intervalle de temps égal à la valeur efficace du retard, pour le système de base à arrivées par processus de Poisson. Notons que ces résultats sont présentés pour les formes de profils uniforme et exponentiel. Comme on peut le constater, les taux de coupure varient de façon relativement négligeable lorsque le taux d'arrivée normalisé est supérieur à environ 4.

Comme nous l'avons mentionné à la section 3.2, le modèle à arrivées discrètes tend vers le modèle à profil continu lorsque le taux d'arrivée tend à l'infini. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les valeurs du taux de coupure pour de grande valeurs de $\lambda\tau_{rms}$ (i.e. 20 dans notre cas) dans le cas d'un profil uniforme à celles obtenues pour le modèle à profil continu uniforme lorsque $\tau_{rms}/T = 1$ (voir la figure I.1 ou la figure I.2). Il y a

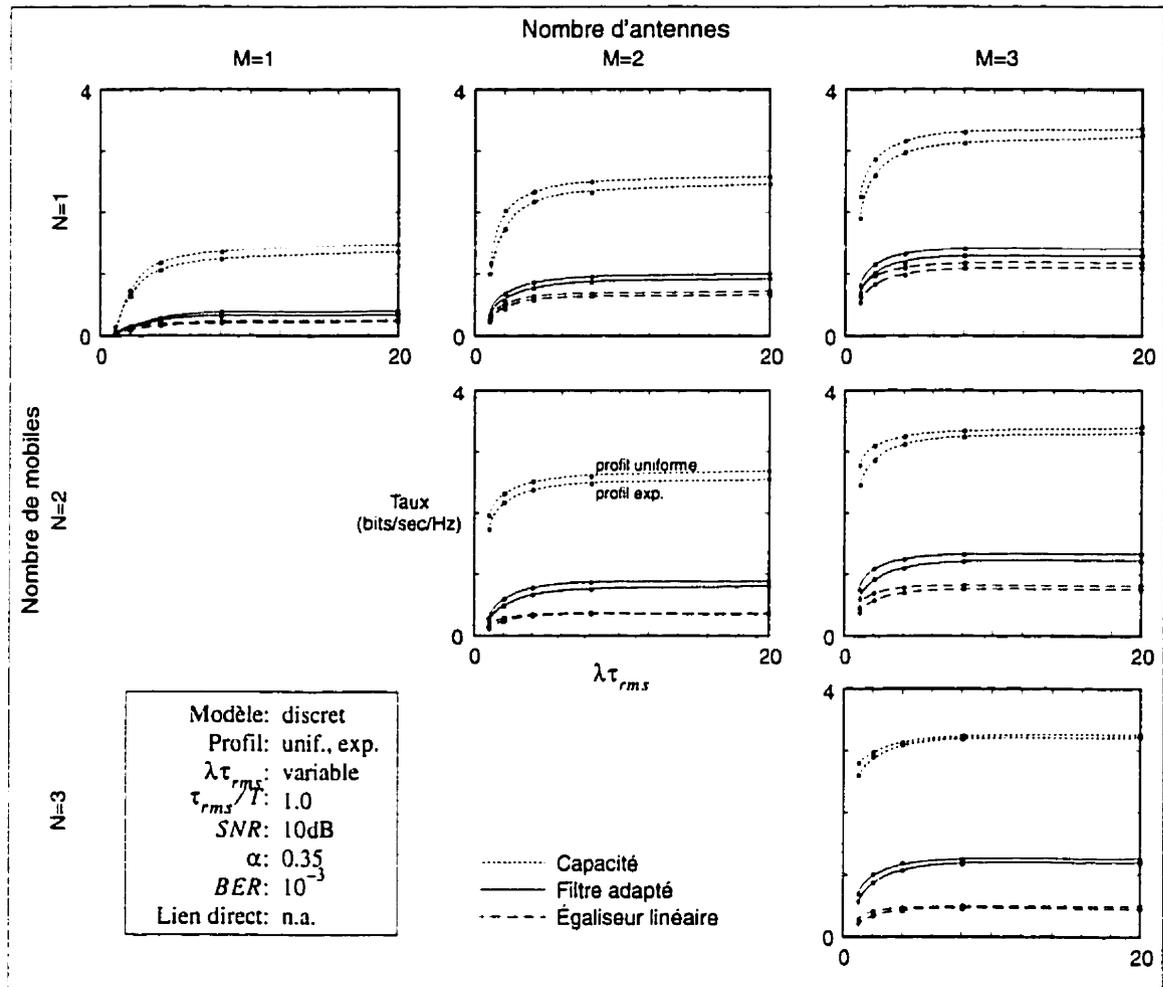


Figure I.8 Taux de coupure vs. taux d'arrivée, modèle à arrivées discrètes

effectivement correspondance entre ces deux modèles dans ces conditions. Nous en venons donc à la conclusion que pour le système que nous étudions, si le taux d'arrivée des raies normalisé d'un canal à arrivées discrètes est supérieur à 4, il est possible d'utiliser l'approximation du modèle à profil continu avec un taux d'arrivée des raies supérieur à 2 pour évaluer les taux de coupure.

Notons que (Sexton et Pahlavan, 1989) arrivaient à la conclusion que le taux d'arrivée normalisé des raies devait être seulement supérieur à 2 (comparativement à la valeur de 4

suggérée par notre étude). Le système de communication que ces auteurs utilisaient était toutefois différent du nôtre puisqu'utilisant des modems à modulation de phase en quadrature et une valeur efficace du retard de $\tau_{rms} = 0.2$, l'indice de performance utilisé étant la probabilité d'erreur moyenne.

I.3.2 Évaluation de l'influence de la valeur efficace du retard

La figure I.9 illustre les taux de coupure pour le système de base à arrivées discrètes en fonction de la valeur efficace du retard. Dans ce cas, nous avons fixé le taux d'arrivée des

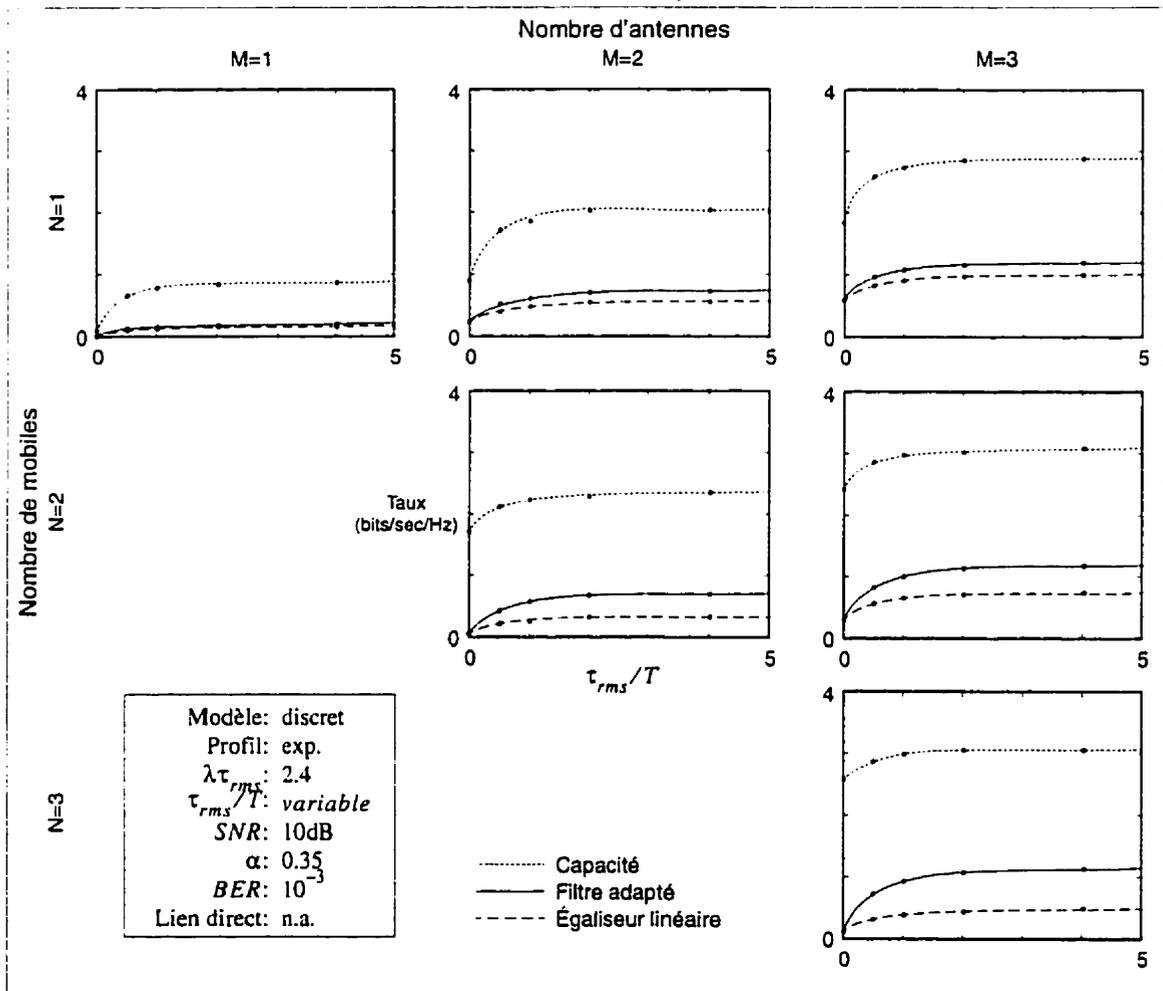


Figure I.9 Taux de coupure vs. valeur eff. du retard, modèle à arrivées discrètes

raies normalisé à $\lambda\tau_{rms} = 2.4$. Comme on le constate, le comportement général des taux de coupure est semblable à celui qui est observé pour le modèle à profil continu.

I.4 Résultats relatifs au modèle à arrivées par salves

La figure I.10 présente les taux de coupure pour le modèle de canal à arrivées par salves. Nous avons utilisé pour ces simulations les valeurs des paramètres suggérées par (Saleh et Valenzuela, 1987) et qui correspondent aux mesures expérimentales effectuées dans un immeuble moyen de deux étages. Les valeurs suggérées sont:

- Constante de temps de l'enveloppe des salves $\Gamma = 60\text{ns}$
- Constante de temps des salves $\gamma = 20\text{ns}$
- Temps moyen entre les salves $1/\Lambda = 300\text{ns}$
- Temps moyen entre les raies $1/\lambda = 5\text{ns}$

Afin d'obtenir des valeurs normalisées, nous les avons simplement divisées par la durée des symboles T . Les valeurs en abscisse correspondent à la valeur normalisée de Γ qui rappelons-le est la valeur efficace du retard du profil moyen. Par exemple, une valeur de 0.6 sur l'abscisse correspond à un délai entre symboles de $T = 60\text{ns}/0.6 = 100\text{ns}$.

Comme on le constate, le comportement général des taux de coupure ressemble à celui observé pour les modèles à profil continu et à arrivées discrètes en fonction de la valeur efficace du retard. Notons que la variable Γ dans le modèle à arrivées par salves correspond effectivement à la valeur efficace du retard comme il en a été fait mention à la section 3.2. Notons également qu'en général, les taux de coupure semblent converger moins rapidement vers leur valeur asymptotique en fonction de Γ que dans le cas des deux autres modèles.

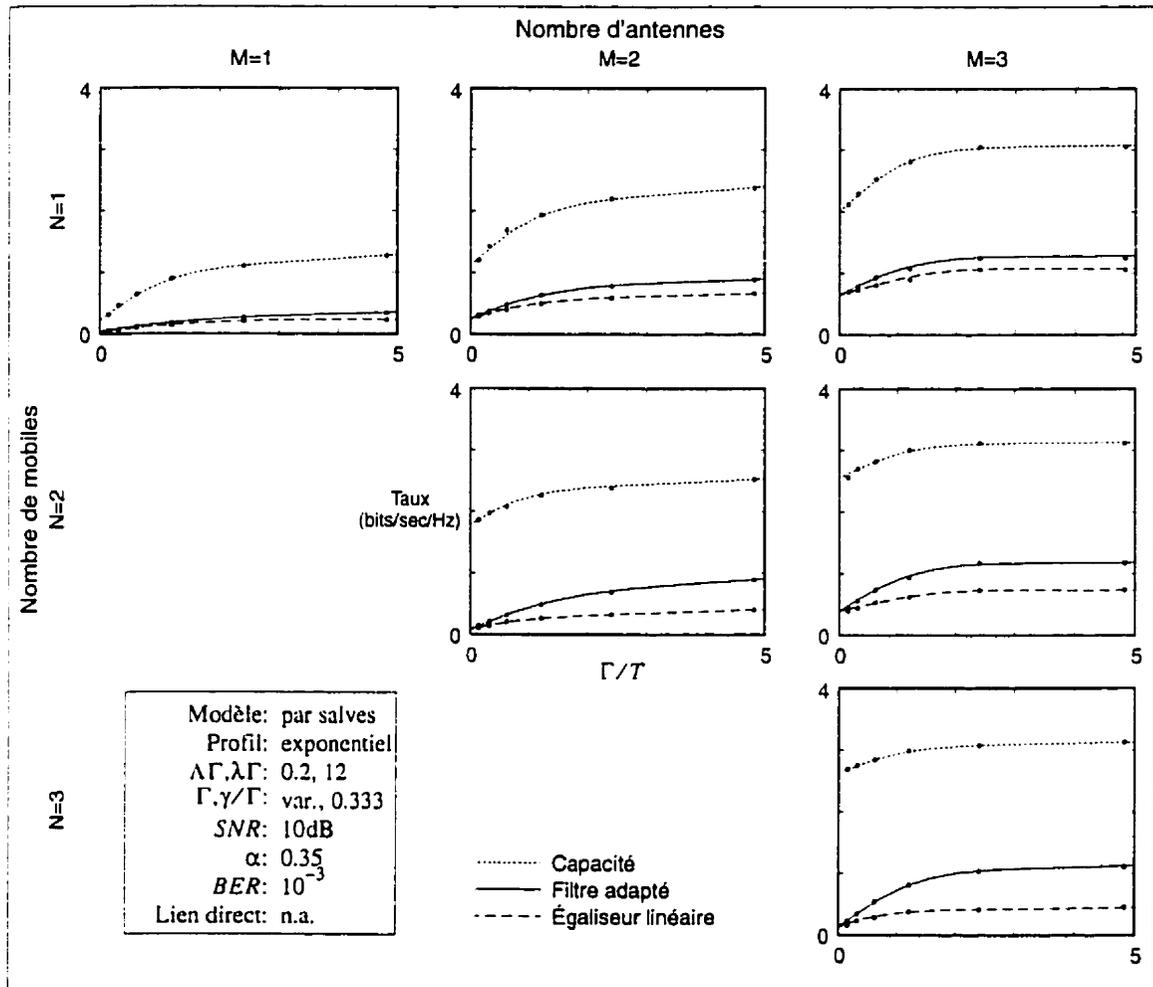


Figure I.10 Taux de coupure vs. valeur eff. du retard, modèle à arrivées par salve

I.5 Comparaison entre les modèles à arrivées discrètes et par salves

La figure I.11 illustre une comparaison entre le modèle à arrivées discrètes avec profil de forme exponentielle et celui à arrivées par salves pour le système de base lorsque le taux moyen d'arrivée des raies est le même pour les deux modèles, i.e.

$$\lambda_d = \lambda_s \Lambda_s \quad (I.2)$$

Ici, λ_d est le taux d'arrivée des raies pour le modèle à arrivées discrètes, λ_s et Λ_s sont respectivement les taux d'arrivée des raies et des salves du modèle à arrivées par salves. Les figures I.9 et I.10 correspondant justement au cas où $\tau_{rms}\lambda_d = (\Gamma\lambda_s) (\Gamma\Lambda_s) = 2.4$, il suffit de les superposer pour obtenir la comparaison désirée, ce qui est illustré à la figure I.11.

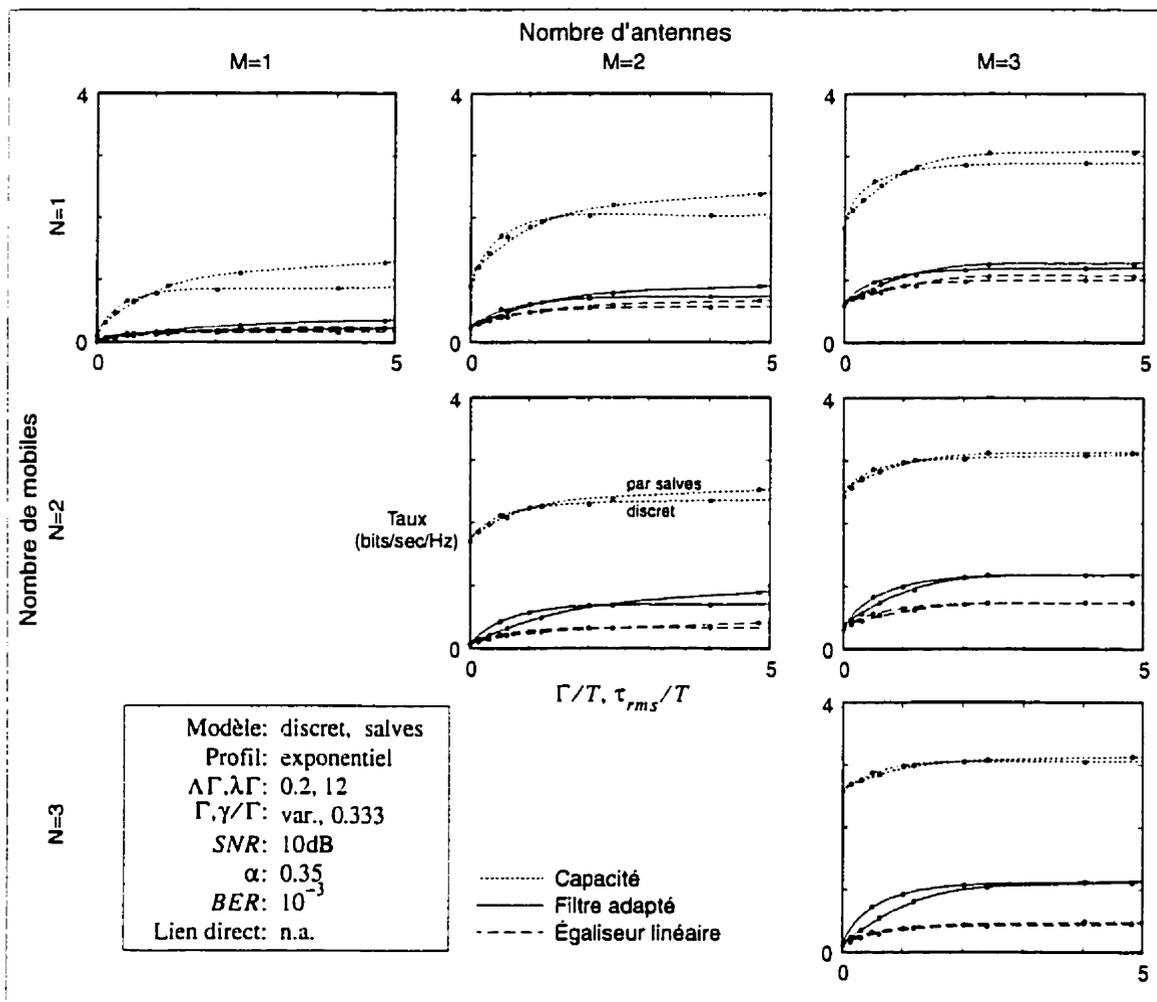


Figure I.11 Comparaison entre le modèle à arrivées discrètes et par salves

ANNEXE J
DÉTERMINATION DU RAPPORT SNR POUR LE CANAL
D'ENREGISTREMENT MAGNÉTIQUE

Nous évaluons dans cette annexe le rapport signal sur bruit mesuré à la sortie des têtes de lecture dans le cas du système d'enregistrement magnétique du chapitre IV. L'expression du rapport signal sur bruit pour la $j^{\text{ième}}$ tête de lecture est donnée par (4.19), i.e.

$$\rho_j \equiv \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \int_{-\lambda T_x}^{\lambda T_x} |m_j(x)|^2 dx \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} \int_{W_k} \bar{S}_{n_j}(k) dk} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.1})$$

où $\bar{S}_{n_j}(k)$ est donnée par (4.18), W_k est la largeur de la bande de fréquence considérée et où l'espérance est prise sur l'ensemble des symboles d'entrées $x_i^{(l)}$. Ces derniers sont reliés à (J.1) par l'intermédiaire du signal de sortie $m_j(x)$ (voir la figure 4.4) donné par

$$m_j(x) = \left[\sum_l P(x - lT_x) x^{(l)} \right]_j = \sum_{i=1}^N \sum_l P_{ji}(x - lT_x) x_i^{(l)} \quad (\text{J.2})$$

où $P(x)$ se calcule suivant (4.8) et $x^{(l)}$ représente le vecteur des séquences des données d'entrée à l'instant $x = lT_x$. En substituant cette valeur dans (J.1) et en évaluant directement le dénominateur à l'aide de (4.18), on obtient

$$\rho_j = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \int_{-\lambda T_x}^{\lambda T_x} E \left[\left| \sum_{i=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} P_{ji}(x - lT_x) x_i^{(l)} \right|^2 \right] dx \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} \left[\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H_j) \right]} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.3})$$

où

$$B(a_x, W_k, H) = \left[\frac{H}{2a_x^3} + \frac{0.6498}{2a_x^2} - e^{-W_k a_x} \left[H \left[\frac{W_k^2}{4a_x} + \frac{W_k}{2a_x^2} + \frac{1}{2a_x^3} \right] + 0.6498 \left[\frac{a_x W_k + 1}{2a_x^2} \right] \right] \right] \quad (\text{J.4})$$

En évaluant l'espérance sur l'ensemble des symboles d'entrées $x_i^{(j)}$, qu'on suppose binaires (dans ce cas nous avons $E[|x_i|^2] = 1$), équiprobables et indépendant d'un symbole à l'autre et d'une entrée à l'autre, on obtient

$$\rho_j = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \sum_{i=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda T_x}^{\lambda T_x} |P_{ji}(x-lT_x)|^2 dx \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} [\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H_j)]} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.5})$$

Qu'on peut récrire comme

$$\rho_j = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \sum_{i=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda T_x}^{\lambda T_x} |P_{ji}(x-lT_x)|^2 dx \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} [\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H_j)]} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.6})$$

Puisque λ tend à l'infini, on peut appliquer le théorème de Parseval (l'énergie dans le domaine du temps est égale à l'énergie dans le domaine des fréquences) à l'intégrale, ce qui donne

$$\rho_j = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\lambda T_x} \sum_{i=1}^N \sum_{l=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\pi} \int_{W_k} |\bar{P}_{ji}(k)|^2 dk \right]}{\frac{1}{2\pi T_x} [\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H_j)]} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.7})$$

En simplifiant cette expression on obtient finalement

$$\rho_j = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{W_k} |\bar{P}_{ji}(k)|^2 dk}{\Pi_e W_k + V_0^2 \Pi_m B(a_x, W_k, H_j)} \quad j = 1 \dots M \quad (\text{J.8})$$

ANNEXE K
MAXIMISATION DE LA FONCTION Z

Cette annexe présente les détails relatifs à la maximisation de l'équation (4.59) en fonction des variables N et $W_p, l = 1 \dots N$. Nous supposons dans nos développements que la valeur de H est constante. On cherche

$$Z_{\max} = V_0^2 M_{\max} \max_{N, W_l} \left[N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H, \quad W_{\min} \leq W_l \quad (\text{K.1})$$

où la fonction à optimiser peut se simplifier comme

$$Z'_{\max} = \max_{N, W_l} \left[N \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H, \quad W_{\min} \leq W_l \quad (\text{K.2})$$

Nous procéderons à la maximisation en deux temps, premièrement en fonction de la largeur des pistes $W_p, l = 1 \dots N$ et ensuite en fonction de N . Supposons N constant, et définissons

$$r = \sum_{l=1}^N W_l^2 \quad (\text{K.3})$$

Dans ce cas, le sous-problème se réduit à trouver la valeur maximum de r selon

$$r_{\max} = \max_{W_l} \left[\sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad \sum_{l=1}^N W_l \leq H, \quad W_{\min} \leq W_l \quad (\text{K.4})$$

En comparant cette expression à celle d'une hypersphère en N dimensions et de rayon \sqrt{r} (i.e. $r = \sum_{l=1}^N W_l^2$) centrée à l'origine, le problème se réduit à trouver le rayon maximum \sqrt{r} de la sphère sous les conditions données en (K.4). La première condition, i.e. $\sum_{l=1}^N W_l \leq H$, peut s'interpréter comme définissant une série d'hyperplans parallèles d'équation $\sum_{l=1}^N W_l = h, h \leq H$ dans le premier quadrant (car par définition $W_l \geq 0$) tandis que la seconde, i.e. $W_{\min} \leq W_l$, vient délimiter leurs frontières. Le rayon maximum

de l'hypersphère est atteint lorsque cette dernière intersecte l'hyperplan le plus distant de l'origine, i.e. $\sum_{l=1}^N W_l = H$ en ses N points les plus éloignés de sa normale lorsque cette dernière passe par l'origine. Les coordonnées de ces N points sont de la forme

$$\hat{W}_l = \begin{cases} W_{\min} & (N-1) \text{ des coordonnées} \\ H - (N-1) W_{\min} & \text{une des coordonnées} \end{cases} \quad (\text{K.5})$$

et peuvent s'interpréter comme les N "coins" de l'hyperplan. Nous démontrerons de façon analytique à la section suivante qu'il s'agit bien de la solution optimum. Sans perte de généralité, les N "coins" de (K.5) étant tous à la même distance de l'origine, on sélectionne le point de coordonnées $\hat{W}_1 = H - (N-1) W_{\min}$ et $\hat{W}_l = W_{\min}$, $l \neq 1$. À l'aide de ces valeurs, (K.4) devient

$$r_{\max} = \sum_{l=1}^N \hat{W}_l^2 = [N-1] W_{\min}^2 + [H - (N-1) W_{\min}]^2 \quad (\text{K.6})$$

qui substitué dans (K.2) donne

$$Z'_{\max} = \max_N \left[N \left[[N-1] W_{\min}^2 + [H - (N-1) W_{\min}]^2 \right] \right] \quad (\text{K.7})$$

Afin de déterminer le maximum de cette fonction du troisième degré en N , on évalue sa dérivée par rapport à cette variable et on la pose égale à zéro. On trouve que les valeurs de N correspondant aux extremums locaux sont

$$N = \left\{ \frac{H + 2W_{\min}}{3W_{\min}}, \frac{H}{W_{\min}} \right\} \quad (\text{K.8})$$

Ces deux points sont illustrés sur la figure K.1 où la fonction Z'_{\max} est tracée en fonction du paramètre N . Les points se trouvant à la droite de H/W_{\min} sont inadmissibles puisqu'ils supposent qu'au moins une des pistes est de largeur $\hat{W}_l < W_{\min}$ ce qui désobéit à la condition de largeur minimum. La dérivée seconde de (K.7) évaluée au point H/W_{\min} étant positive, il s'agit d'un minimum et par conséquent, le maximum recherché se situe en $N = (H + 2W_{\min}) / (3W_{\min})$.

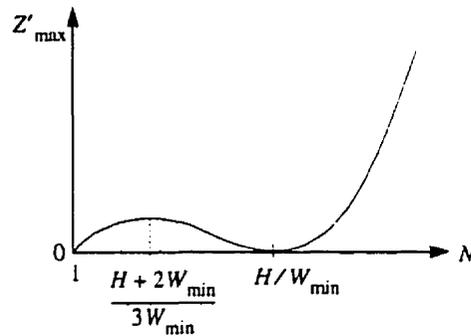


Figure K.1 Fonction Z'_{\max} en fonction de N

En résumé, la valeur maximum de Z est atteinte lorsque le nombre de pistes ainsi que leur largeur sont donnés respectivement par

$$N = \frac{H + 2W_{\min}}{3W_{\min}}$$

$$\hat{W}_l = \begin{cases} H - (N - 1)W_{\min} & l = 1 \\ W_{\min} & l \neq 1 \end{cases} \quad (\text{K.9})$$

Dans la réalité, la valeur de N ne peut être qu'entière et on choisira donc évidemment comme valeur pratique la partie entière conduisant à la valeur maximum de Z'_{\max} . En évaluant (K.7) à l'aide de ces valeurs, on obtient finalement

$$Z'_{\max} = \frac{(H + 2W_{\min})^2 (4H - W_{\min})}{27W_{\min}} \quad (\text{K.10})$$

K.1 Preuve de la solution donnée en (K.5) à la maximisation de (K.4)

Lors de la maximisation de l'expression (K.4), nous avons fait appel au concept d'hypersphère pour arriver à la solution donnée en (K.5). Comme il ne s'agit pas d'une preuve à proprement dit, nous allons établir formellement dans cette section que cette solution mène bien à la valeur maximum de r donnée en (K.6).

Débutons par examiner les conditions données en (K.4). La première, i.e. $\sum_{l=1}^N W_l \leq H$, peut s'interpréter comme définissant une série d'hyperplans parallèles d'équation $\sum_{l=1}^N W_l = h$, $h \leq H$ dans le premier quadrant (car par définition $W_l \geq 0$). tandis que la seconde, i.e. $W_{\min} \leq W_l$, vient délimiter leurs frontières. Soit un point S_1 sur l'hyperplan h_1 d'équation

$$\sum_{l=1}^N W_l = h_1 \quad (\text{K.11})$$

et la valeur de r correspondante

$$r_1 = \left[\sum_{l=1}^N W_l^2 \right] \quad (\text{K.12})$$

Si on multiplie cette équation par un réel $\mu > 1$, on a

$$\mu r_1 = \left[\mu \sum_{l=1}^N W_l^2 \right] = \sum_{l=1}^N [W_l \sqrt{\mu}]^2 \quad (\text{K.13})$$

En posant $r_2 = \mu r_1$ et $W'_l = W_l \sqrt{\mu}$ on obtient

$$r_2 = \sum_{l=1}^N [W'_l]^2 \quad (\text{K.14})$$

et (K.11) devient

$$\sum_{l=1}^N \frac{W'_l}{\sqrt{\mu}} = h_1 \quad (\text{K.15})$$

qu'il est possible de récrire comme

$$\sum_{l=1}^N W'_l = h_1 \sqrt{\mu} \quad (\text{K.16})$$

$$(\text{K.17})$$

En posant $h_2 = h_1 \sqrt{\mu}$ dans cette expression, on obtient finalement

$$\sum_{l=1}^N W_l' = h_2 \quad (\text{K.18})$$

(K.14) et (K.18) montre qu'à tout point S_1 de l'hyperplan h_1 de l'équation (K.11) il est possible de faire correspondre un point S_2 sur l'hyperplan h_2 de l'équation (K.18) où $h_2 = h_1 \sqrt{\mu} > h_1$ et pour lequel $r_2 = \mu r_1 > r_1$. La solution sur l'hyperplan h_2 est donc supérieure à celle se situant sur l'hyperplan h_1 et par conséquent la valeur maximum de r , pour N donnée, trouve nécessairement sa solution sur l'hyperplan pour lequel h est maximum. Dans ce cas la condition donnée en (K.4) se simplifie comme

$$\sum_{l=1}^N W_l \leq H \quad \rightarrow \quad \sum_{l=1}^N W_l = H \quad (\text{K.19})$$

Notons finalement que le point S_2 obéit à la condition $W_l' \geq W_{\min}$ puisque $W_l' = W_l \sqrt{\mu} > W_l \geq W_{\min}$.

Afin de démontrer que (K.5) est effectivement la solution optimum de (K.4) nous démontrerons que toute autre solution mène à une valeur égale ou inférieure de r . Si on suppose que (K.5) n'est pas optimum, alors pour une valeur de N donnée et des réels $\varphi_i, i = 2 \dots N, \varphi_i \geq 0$ il devrait exister une solution telle que

$$W_l' = \begin{cases} \hat{W}_l + \varphi_l & l = 2 \dots N \\ \hat{W}_1 - \sum_{i=2}^N \varphi_i & l = 1 \end{cases} \quad (\text{K.20})$$

pour laquelle $r_\varphi \geq r_{\max}$ (l'égalité indiquant que la solution alternative est équivalente, ceci nous servira ultérieurement) où r_φ est donnée par

$$r_\varphi = \left[\sum_{l=1}^N W_l'^2 \right] \quad (\text{K.21})$$

Comparativement à (K.4), l'expression (K.20) fait en sorte d'augmenter la largeur des pistes de largeur minimum et de diminuer en égale proportion la piste la plus large, préservant ainsi la condition $\sum_{l=1}^N W_l = H$. Comme on se doit de maintenir la condition de largeur minimum sur toutes les pistes, on doit toujours avoir

$$\hat{W}'_1 \geq W_{\min} \quad (\text{K.22})$$

En substituant \hat{W}'_1 par sa valeur donnée en (K.20), on obtient

$$\hat{W}_1 - \sum_{i=2}^N \varphi_i \geq W_{\min} \quad (\text{K.23})$$

qu'on peut récrire comme

$$\sum_{i=2}^N \varphi_i \leq \hat{W}_1 - W_{\min} \quad (\text{K.24})$$

En remplaçant \hat{W}_1 par sa valeur donnée en (K.9), on obtient après simplifications

$$\sum_{i=2}^N \varphi_i \leq H - NW_{\min} \quad (\text{K.25})$$

Cette condition sur la somme des variables φ_i nous servira dans la suite de la preuve. Évaluons à présent (K.21) où nous remplaçons les variables W'_l par leur valeur donnée en (K.20)

$$r_\varphi = \left[\hat{W}_1 - \sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 + \sum_{l=2}^N [\hat{W}_l + \varphi_l]^2 \quad (\text{K.26})$$

En évaluant de façon explicite les termes de cette équation, on obtient

$$r_\varphi = \hat{W}_1^2 + \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - 2\hat{W}_1 \sum_{i=2}^N \varphi_i + \sum_{l=2}^N \hat{W}_l^2 + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2 + 2 \sum_{l=2}^N \hat{W}_l \varphi_l \quad (\text{K.27})$$

$$(\text{K.28})$$

où on reconnaît l'expression $r_{\max} = \hat{W}_1^2 + \sum_{l=2}^N \hat{W}_l^2$ (voir (K.6)). Ceci nous permet d'écrire

$$r_\varphi = r_{\max} + \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - 2\hat{W}_1 \sum_{i=2}^N \varphi_i + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2 + 2 \sum_{l=2}^N \hat{W}_l \varphi_l \quad (\text{K.29})$$

qu'il est possible de récrire comme

$$\left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - 2\hat{W}_1 \sum_{i=2}^N \varphi_i + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2 + 2 \sum_{l=2}^N \hat{W}_l \varphi_l = r_\varphi - r_{\max} \quad (\text{K.30})$$

Comme nous avons supposé que la valeur de r_φ était égale ou supérieure à celle de r_{\max} , on a $r_\varphi \geq r_{\max}$ ¹ ce qui nous permet d'écrire

$$\left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - 2\hat{W}_1 \sum_{i=2}^N \varphi_i + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2 + 2 \sum_{l=2}^N \hat{W}_l \varphi_l \geq 0 \quad (\text{K.31})$$

Remplaçons à présent \hat{W}_1 et \hat{W}_l par leur expression respective donnée en (K.9)

$$\left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - 2[H - (N-1)W_{\min}] \sum_{i=2}^N \varphi_i + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2 + 2 \sum_{l=2}^N W_{\min} \varphi_l \geq 0 \quad (\text{K.32})$$

qu'on peut récrire comme

$$[H - NW_{\min}] \leq \frac{\left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 + \sum_{l=2}^N \varphi_l^2}{2 \sum_{i=2}^N \varphi_i} \quad (\text{K.33})$$

1. Rappelons que par définition, toute valeur de r est strictement supérieur à zéro.

ou encore

$$[H - NW_{\min}] \leq \frac{\left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 + \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right]^2 - \sum_{i=2m \neq l}^N \varphi_i \varphi_m}{2 \sum_{i=2}^N \varphi_i}$$

$$[H - NW_{\min}] \leq \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right] - \frac{\sum_{i=2m \neq l}^N \varphi_i \varphi_m}{2 \sum_{i=2}^N \varphi_i}$$

(K.34)

Puisque par définition $\varphi_i \geq 0$, le terme à la droite du signe négatif est positif et il est dans ce cas possible d'écrire

$$[H - NW_{\min}] \leq \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right] - \frac{\sum_{i=2m \neq l}^N \varphi_i \varphi_m}{2 \sum_{i=2}^N \varphi_i} \leq \left[\sum_{i=2}^N \varphi_i \right] \quad (\text{K.35})$$

Hors la condition (K.25), i.e. $\sum_{i=2}^N \varphi_i \leq H - NW_{\min}$, est en contradiction avec cette inégalité, sauf si $\sum_{i=2}^N \varphi_i = H - NW_{\min}$. En substituant cette dernière égalité dans (K.29), on constate que les deux solutions conduisent aux mêmes valeurs puisque $r_\varphi = r_{\max}$. En évaluant \hat{W}'_1 à l'aide de (K.20) et (K.9) et de cette égalité, on a finalement

$$\hat{W}'_1 = \hat{W}_1 - \sum_{i=2}^N \varphi_i$$

$$\hat{W}'_1 = H - (N-1)W_{\min} - H - NW_{\min}$$

$$\hat{W}'_1 = W_{\min}$$

(K.36)

Ainsi, la piste de largeur \hat{W}'_1 précédemment la plus large du système optimum est à présent une des pistes de largeur minimum. Il apparaît donc que toutes les solutions alternatives se situent aux coordonnées d'un des autres "coins" de l'hyperplan (voir (K.5)), ces solutions conduisant toutes à la même valeur r_{\max} de r .