

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**SIMULATION DES INTERACTIONS ENTRE LES
ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE ET SOUTERRAIN**

**JEAN-FRANÇOIS MERCIER
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE CIVIL)**

MARS 1999

© Jean-François Mercier, 1999



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48867-5

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

**SIMULATION DES INTERACTIONS ENTRE LES
ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE ET SOUTERRAIN**

présenté par: MERCIER Jean-François

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LECLERC Guy, Ph.D., président

M. MARCHE Claude, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CARREAU Michel, Ph.D., membre

Remerciements

Je tiens à remercier MM. Claude Marche et René Kahawita pour m'avoir dirigé, tout en me laissant une grande latitude dans mes travaux.

Sincères remerciements à M. Éric McNeil, pour ses conseils judicieux.

Je tiens aussi à remercier mes parents, pour leur support; Saby, pour sa patience et sa compréhension et Mathilde, pour avoir fait durer le plaisir.

Ces travaux ont été financés en partie par le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Québec.

Résumé

Un modèle numérique capable de simuler les interactions entre les écoulements à surface libre et souterrain a été développé, afin de permettre d'étudier les conditions d'écoulement lors de l'étiage hivernal. Au cours de cette période, les apports au cours d'eau proviennent essentiellement des nappes souterraines. Le modèle développé permet une représentation bidimensionnelle plane des écoulements à surface libre et souterrain.

Le modèle d'écoulement à surface libre résout une formulation en différences finies des équations de Saint-Venant. Il présente aussi la possibilité de simuler le déplacement du littoral, en ajustant les conditions aux frontières à chaque intervalle de temps. Le modèle a été validé et utilisé dans une gamme d'applications variées, en régime transitoire ou permanent, pour des écoulements de types fluvial, torrentiel ou mixte.

Le modèle d'écoulement souterrain résout une formulation en éléments finis de l'équation de Boussinesq. Il permet de simuler les écoulements horizontaux, dans un milieu poreux saturé. Au cours de l'étiage hivernal, la contribution à l'écoulement de la zone partiellement saturé est très faible, c'est pourquoi elle n'a pas été considérée.

Différents tests ont été réalisés sur le modèle couplé en considérant le cas d'un canal rechargeant un aquifère et un canal rechargé par un aquifère. Une simulation d'écoulement régional réalisée sur un petit bassin versant a permis de reproduire le phénomène de récession de l'hydrogramme et de tarissement de la nappe. Les résultats obtenus montrent un bon comportement du modèle, un bilan hydrologique bien balancé.

Abstract

A numerical model able to simulate groundwater and free surface flow interaction has been developed, in order to study flow conditions during winter low flows. During that period, contribution to streamflow essentially comes from groundwater. The proposed model presents a bidimensionnal representation in the horizontal plan of free surface and groundwater flows.

The surface flow model solves a finite difference formulation of Saint Venant equations. It is able to simulate wetting and drying of floodplains, by adjusting boundary conditions at each time steps. The model has been validated and used in many different types of applications, for steady and unsteady problems, involving subcritical flows, supercritical flows or both.

The groundwater flow model solves a finite element formulation of Boussinesq equation. It is able to simulate horizontal flow in a saturated porous media. During winter low flow, the partially saturated zone contribution to flow is quite small and can therefore be neglected.

A number of tests were done using the coupled model considering an irrigation channel recharging groundwater and a channel being recharged by groundwater. A regional flow simulation was realized for a small watershed to reproduce hydrogram recession and water table lowering. Obtained results showed a good physical representation and a balanced hydrologic budget.

Table des matières

REMERCIEMENTS.....	IV
RÉSUMÉ	V
ABSTRACT.....	VI
TABLE DES MATIÈRES.....	VII
LISTE DES FIGURES.....	IX
LISTE DES ANNEXES	XI
CHAPITRE 1: INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2: ÉTAT DE L'ART EN MODÉLISATION DES INTERACTIONS ENTRE LES ÉCOULEMENTS SOUTERRAIN ET À SURFACE LIBRE	3
CHAPITRE 3: DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES ET REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE.....	10
3.1 ÉCOULEMENT SOUTERRAIN.....	10
3.2 ÉCOULEMENT À SURFACE LIBRE.....	16
3.2.1 Représentation unidimensionnelle.....	17
3.2.2 Équations simplifiées.....	18
3.2.3 Représentation bidimensionnelle.....	19
3.3 INTERACTIONS ENTRE LES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE ET SOUTERRAIN	25
3.4 ÉTIAGE HIVERNAL ET CHAMPS D'APPLICATION DU MODÈLE.....	28
CHAPITRE 4: MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS	30

4.1	MODÈLE D'ÉCOULEMENT SOUTERRAIN	30
4.2	MODÈLE D'ÉCOULEMENT À SURFACE LIBRE	34
4.2.1	Imposition des conditions frontières	36
4.2.2	Condition de réflexion aux frontières imperméables	37
4.2.3	Mouillage et séchage des berges	38
	CHAPITRE 5: MÉTHODOLOGIE DE COUPLAGE	41
5.1	DISCRÉTISATION GÉOMÉTRIQUE	42
5.2	MÉTHODOLOGIE DE RÉOLUTION.....	43
5.3	DISCRÉTISATION TEMPORELLE	45
	CHAPITRE 6: RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION	47
6.1	INTRODUCTION DES TERMES SOURCES	47
6.2	ÉCOULEMENT DANS UN CANAL RECTANGULAIRE	49
6.3	APPLICATION DU MODÈLE	52
	CONCLUSION	59
	RÉFÉRENCES	61
	ANNEXES.....	66

Liste des Figures

Figure 3.1 Représentation d'un cours d'eau en modélisation unidimensionnelle. a) vue en plan b) section transversale	18
Figure 3.2 Point de référence pour la bathymétrie et la hauteur d'eau	21
Figure 3.3 Interactions entre un aquifère et un cours d'eau, a) recharge provenant de l'aquifère, b) recharge provenant du cours d'eau, c) cours d'eau rechargeant un aquifère sans continuité hydraulique.....	25
Figure 4.1 Réflexion à une frontière imperméable	37
Figure 4.2 Volume de contrôle associé au noeud (i,j)	38
Figure 6.1 Élévation de la surface libre en fonction du temps, en permettant les échanges avec la nappe phréatique	48
Figure 6.2 Calcul de la courbe de remous dans un canal rectangulaire, avec prise en compte des infiltrations dans le sol	50
Figure 6.3 Influence des fluctuations de la nappe phréatique sur l'écoulement dans un canal rectangulaire	51
Figure 6.4 a) Recharge du canal b) Recharge de l'aquifère.....	52
Figure 6.5 Maillage couplé utilisant une grille de différences finies superposée à un maillage d'éléments finis triangulaires; topographie (m).....	54
Figure 6.6 Élévation de la nappe phréatique (m) et vecteurs vitesses d'écoulement obtenus au temps $t = 10$ jours.....	55
Figure 6.7 Débit spécifique (m/s) à travers le lit du cours d'eau au temps $t = 10$ jours...	56
Figure 6.8 Évolution du débit le long de la rivière après dix jours de simulation	57
Figure 6.9 Évolution du débit du cours d'eau	58
Figure A.1 Élévation de la surface libre et nombre de Froude en fonction de la distance.	74
Figure A.2 Élévation de la surface libre (m) pour un écoulement dans une contraction.	77
Figure A.3 Orientation des vitesses pour un écoulement dans une contraction.	78
Variation de la superficie inondée en fonction du niveau d'eau	79
Figure A.4 a) bathymétrie du réservoir, b) vidange du réservoir au temps $t = 200$ s.	80

Figure A.5 a) vidange du réservoir au temps $t=400s$, b) vidange du réservoir au temps $t=700s$	81
Figure A.6 a) vecteurs vitesse d'écoulement, b) profondeurs d'écoulement.....	83
Figure A.7 Rabattement en fonction de la distance du puits, solutions analytique et numérique.....	85
Figure A.8 Maillage utilisé pour la modélisation du rabattement autour d'un puits de pompage.....	86
Figure A.9 Charge hydraulique aux abords d'une rangée de puits de faible capacité. .	87

Liste des annexes

Annexe 1 Application de la méthode des différences finies	65
Annexe 2 Validation du modèle d'écoulement à surface libre.....	71
Annexe 3 Validation du modèle d'écoulement souterrain	83

Chapitre 1 Introduction

Les interactions entre les eaux souterraines et les cours d'eau peuvent être étudiées à l'échelle locale pour déterminer la nature des échanges entre ces deux systèmes. Une bonne connaissance de la dynamique de ces échanges permet une meilleure gestion de la ressource hydrique, particulièrement lors des périodes d'étiage où une fraction importante du débit d'un cours d'eau provient de l'eau souterraine, tandis qu'en période de forte hydraulicité, c'est plutôt les cours d'eau qui rechargent les aquifères. Les régions nordiques connaissent des étiages hivernaux sévères lors desquels les cours d'eau sont particulièrement sensibles à des variations du niveau de la nappe phréatique ou de la qualité de l'eau souterraine. Il est donc important de pouvoir compter sur des méthodes efficaces pour analyser les interactions et les conditions d'écoulement.

La modélisation consiste en une représentation simplifiée des phénomènes physiques. Cette représentation est sélective, car seulement une partie des phénomènes sont représentés selon le choix du concepteur du modèle. Ainsi, dans le cas présent, seul l'écoulement souterrain et l'écoulement à surface libre sont considérés, toutefois, à titre d'exemple, un modèle de formation du couvert de glace aurait aussi pu être considéré puisque la glace a une influence sur les écoulements lors des étiages hivernaux. Les modèles reposent donc sur des hypothèses de base qui restreignent leur champs d'application. L'approche proposée permet de simuler les interactions entre un modèle d'écoulement à surface libre et un modèle d'écoulement souterrain, procurant tous deux une représentation bidimensionnelle plane. Cette représentation permet d'analyser des conditions d'écoulement plus complexes que l'approche traditionnelle utilisant des modèles d'écoulement à surface libre unidimensionnel.

De nombreuses études ont porté sur l'effet atténuant de l'aquifère lors de la crue d'un cours d'eau, entraîné par l'emmagasinement dans les berges. La fraction du débit d'un cours d'eau montant en crue, emmagasinée dans l'aquifère, revient au cours d'eau lorsque le niveau du cours d'eau baisse, ce qui a pour effet d'atténuer la pointe de l'hydrogramme et d'étirer la courbe de récession. Ces travaux ont été réalisés pour un contexte différent de l'étiage, mais ils apportent une contribution importante. Ainsi, la première section constitue une revue de l'état de l'art en ce qui a trait à la modélisation des interactions entre les écoulements à surface libre et souterrain.

Les sections suivantes décriront respectivement les phénomènes physiques à considérer, de même que leur représentation mathématique et leurs hypothèses de base ; les méthodes numériques utilisées pour le développement du modèle ; la méthodologie de couplage de même que les résultats obtenus lors de simulations réalisées à partir des outils développés.

Différents essais ont été réalisés pour valider les modèles de façon découplée, puis couplée et une analyse d'écoulement régional sur un petit bassin versant a été réalisée pour appliquer la méthode proposée à un cas concret d'analyse de l'étiage hivernal.

Chapitre 2 État de l'art en modélisation des interactions entre les écoulements souterrain et à surface libre

Différentes approches ont été considérées pour modéliser les interactions entre les écoulements souterrains et les écoulements à surface libre, toutefois, l'attention sera ici centrée sur les modèles déterministes qui utilisent des relations mathématiques dont les paramètres ont un sens physique. Il sera aussi question des modèles conceptuels distribués utilisant des équations déterministes pour décrire les interactions entre les différents réservoirs.

Pinder et Bredehoeft (1968) développent un modèle mathématique d'écoulement souterrain saturé utilisant un schéma de différences finies implicite. Ce modèle est ensuite couplé à un modèle d'écoulement à surface libre unidimensionnel pour simuler l'effet d'atténuation d'une onde de crue par emmagasinement dans les berges (Pinder et Sauer, 1971). Les équations unidimensionnelles de Saint-Venant sont résolues par un schéma de différences finies explicite. Les deux modèles ont été couplés par le flux traversant le lit de la rivière, en fonction de la différence d'élévation entre la nappe phréatique et la surface libre, en utilisant le flux comme critère de convergence.

L'utilisation du modèle pour simuler le laminage d'un hydrogramme de crue, montre que les hydrogrammes obtenus lors des simulations varient de façon importante si le flux à travers le lit du cours d'eau est pris en compte ou non. Lors de la montée en crue, l'infiltration vers l'aquifère atténue la crête de l'hydrogramme. Puis, le retour vers le cours d'eau de l'eau emmagasinée dans l'aquifère, après le passage de l'onde de crue, étire la courbe de décrue de l'hydrogramme.

Cunningham et Sinclair (1979), ont utilisé un modèle en éléments finis pour résoudre les équations unidimensionnelles de Saint-Venant et un modèle en élément finis

bidimensionnel utilisant des éléments triangulaires pour résoudre l'équation de Boussinesq dans sa forme linéarisée. Sous cette forme, la transmissivité est calculée à partir de la charge hydraulique du pas de temps précédent. Une analyse de sensibilité pour chacun des paramètres a été réalisée sur un cas très simple. Les résultats de cette analyse montrent que les paramètres les plus sensibles sont les coefficients de rugosité du lit (n de Manning) et la pente du canal (bathymétrie), autant pour l'élévation de la surface libre du cours d'eau que pour celle de la nappe phréatique. Ce résultat est particulièrement intéressant puisque les paramètres du cours d'eau sont plus facilement accessibles que ceux de l'aquifère.

Le modèle a par la suite été validé à partir de données provenant de la rivière Truckee (Nevada), pour des débits élevés et faibles. Les résultats obtenus présentent une assez bonne concordance avec les données observées, surtout pour le cours d'eau et dans la zone de l'aquifère située à sa proximité. Une analyse statistique a aussi été réalisée pour déterminer la précision requise dans l'évaluation des paramètres pour obtenir des prédictions appartenant à la même population que les observations.

Crebas, Gilding et Wesseling (1983) présentent la composante d'interaction entre l'écoulement souterrain et l'écoulement à surface libre développée pour se greffer au modèle de réponse hydrologique distribué à base physique PRÉDIS du laboratoire hydraulique de Delft. Le couplage a été effectué en visant deux objectifs distincts, la modélisation des écoulements souterrains avec prise en compte de l'effet de tuyaux de drainage souterrain et la recharge entre les cours d'eau et la nappe phréatique. Le modèle d'écoulement souterrain bidimensionnel saturé résout l'équation de Boussinesq par la méthode des éléments finis avec des éléments quadrilatéraux isoparamétriques, tandis que le modèle d'écoulement à surface libre résout les équations unidimensionnelles de Saint-Venant à partir du schéma de différences finies implicite généralisé.

Leur contribution se situe surtout dans l'introduction des termes sources linéarisés permettant d'appliquer efficacement le couplage et l'imposition des conditions frontières à l'interface sol-eau. En effet, l'utilisation d'une discrétisation temporelle centrée pour le modèle d'éléments finis, en association avec une discrétisation temporelle décentrée vers l'avant pour le modèle d'écoulement à surface libre fait en sorte que les erreurs de troncatures augmentent et il devient difficile de équilibrer le bilan hydrique. Une méthode assurant la conservation de la masse est proposée, elle consiste à utiliser une méthode itérative qui équilibre le flux à travers le lit du cours d'eau calculé par les deux modèles.

Ackerer et Esteves (1991) ont utilisé un schéma de différences finies pour résoudre les équations unidimensionnelles de Saint-Venant et un modèle en élément finis bidimensionnel utilisant des éléments triangulaires pour résoudre l'équation de Boussinesq. Le modèle a été validé à partir de données mesurées sur la rivière Ill (Alsace, France) qui recharge et draine l'aquifère adjacent, selon les endroits. Les résultats obtenus montrent que l'approche préconisée permet d'obtenir une bonne précision sur l'élévation de la surface libre et de la nappe phréatique, mais une marge d'erreur importante sur le flux entre les deux systèmes. En modifiant quelque peu la méthode, il a été possible d'améliorer l'estimation du flux au détriment de la précision sur l'estimation de l'élévation de la nappe phréatique. La modification apportée consistait à comparer l'élévation de la surface libre à l'élévation de la nappe phréatique à un point situé à une dizaine de mètres du cours d'eau plutôt qu'au même point. Ceci a pour effet de s'éloigner de la zone de fort gradient qui constitue une faiblesse de l'hypothèse de Dupuit-Forcheimer.

Perkins et Koussis (1996) ont utilisé le modèle d'écoulement souterrain MODFLOW du *United states geological survey* couplé à un modèle d'écoulement à surface libre unidimensionnel utilisant l'approximation de l'onde diffuse des équations de Saint-Venant unidimensionnelles résolues par un schéma de différences finies explicite, dans le but de simuler les interactions entre les deux types d'écoulement. Le logiciel

MODFLOW, actuellement un des plus utilisés en écoulement souterrain, permet de modéliser les écoulements dans un sol saturé par un schéma de différences finies implicite sur plusieurs couches, en spécifiant la conductivité entre chacune, ce qui produit un écoulement quasi-tridimensionnel. L'approximation de l'onde diffuse pour les équations de Saint-Venant consiste à négliger les termes d'inertie et à considérer la pente de la surface libre comme la différence entre la pente du fond et le taux de la variation de la profondeur ($S_f = S_o - dy/dx$). Le logiciel MODFLOW comporte des modules intégrés lui permettant de tenir compte de la présence de cours d'eau, toutefois, les hypothèses simplificatrices d'écoulement normal et d'onde cinématique y sont utilisées. Les résultats obtenus par le module ajouté par Perkins et Koussis ont ainsi pu être comparés à ceux des modules plus simplistes.

Une des principales difficultés rencontrées est causée par la différence importante des échelles de temps entre les deux modèles. De nombreux essais ont été effectués à partir du modèle pour déterminer le ratio maximal acceptable entre les intervalles de temps utilisés dans chacun des modèles. Les résultats obtenus montrent que le principal facteur affectant ce ratio est la force de l'interaction entre les deux systèmes qui est caractérisée par la conductivité hydraulique du lit du cours d'eau. Dans un système où les interactions sont fortes, l'utilisation de trop grands intervalles de temps dans le modèle d'écoulement amène des oscillations numériques sur la charge hydraulique, des bilans hydriques mal équilibrés et un flux à travers le lit disproportionné.

Freeze (1972) a développé une approche couplant un modèle d'écoulement souterrain partiellement saturé tridimensionnel à un modèle d'écoulement à surface libre unidimensionnel. Le modèle d'écoulement souterrain résout l'équation de Richards à partir d'un schéma de différences finies implicite permettant de tenir compte de l'hystérésis de la conductivité hydraulique, tandis que les équations unidimensionnelles de Saint-Venant sont résolues à partir du schéma de différences finies explicite de Lax-Wendroff. Le choix des équations de base du modèle permet un cadre d'application

très général, qui sera moins sujet à des limitations relatives aux hypothèses de base tel que c'était le cas avec des modèles décrits précédemment qui étaient soumis à l'hypothèse de Dupuit-Forcheimer en écoulement souterrain ou à l'approximation d'onde cinématique en écoulement à surface libre. Comme il est souvent difficile d'établir les limites de validité des hypothèses simplificatrices, l'approche générale préconisée a été privilégiée par l'auteur, bien qu'elle présente plus de difficultés numériques. Le couplage des deux modèles est réalisé en utilisant l'élévation de la surface libre comme critère de convergence plutôt que le flux à travers le lit comme c'était le cas dans les modèles cités précédemment, ce qui constitue un critère de convergence moins sévère, étant donné sa moins grande sensibilité.

L'utilisation d'un schéma explicite pour le modèle d'écoulement à surface libre impose le choix d'intervalles de temps très courts par rapport à ceux du modèle d'écoulement souterrain. La solution préconisée par Freeze consiste à découpler le modèle d'écoulement à surface libre entre les intervalles de temps du modèle d'écoulement souterrain et à ajuster les conditions frontières à chacun des pas de temps du modèle souterrain. Les moyens informatiques disponibles à l'époque ne pouvaient permettre de diminuer la taille des intervalles de temps du modèle souterrain de façon à ce que les conditions de couplage soit vérifiées à chaque intervalle de temps.

Des simulations ont été réalisées sur un bassin versant hypothétique, dans le but de calculer la réponse du bassin et la contribution au débit de base, selon diverses conditions de précipitation, pour différents paramètres de sol et débits dans le cours d'eau. Les paramètres ayant le plus d'influence sur le système sont l'intensité et la durée de la précipitation. Toutefois, les résultats obtenus montrent que la contribution au débit de base obtenue pour une précipitation donnée varie beaucoup selon les paramètres de sol utilisés. Ces résultats amènent Freeze à formuler une mise en garde au sujet de l'utilisation de modèles conceptuels empiriques pour la simulation de la réponse hydrologique d'un bassin où les apports aux cours d'eau par l'écoulement souterrain sont considérables, étant donné que la complexité des interactions

observées ne peut être prise en compte par des relations simples. Toutefois, la complexité du modèle utilisé ne permettait pas l'utilisation immédiate du modèle à l'échelle régionale à cause du temps de calcul et de la quantité de mémoire requise.

Kraeger Rovey (1975) préconise une approche conjuguant en partie les efforts de Pinder et de Freeze en utilisant un modèle tridimensionnel pour l'écoulement partiellement saturé, un modèle bidimensionnel pour l'écoulement saturé et un modèle unidimensionnel très simple pour l'écoulement à surface libre. Les équations de Boussinesq et Richards sont résolues à partir de deux modèles en différences finies explicites pour lesquels les coefficients non-linéaires de chacune des équations sont considérés constants sur chacun des intervalles de temps, ce qui permet de linéariser le problème. L'élévation de la surface libre est calculée en considérant un écoulement permanent et uniforme à partir de l'équation de Manning. Cette hypothèse constitue une simplification importante et néglige les phénomènes transitoires pris en compte par l'équation de Saint-Venant. Ainsi, le modèle développé permet de calculer la contribution souterraine à l'écoulement à surface libre, mais il ne peut pas être utilisé pour calculer l'effet de l'emmagasinement dans les berges lors du laminage d'une crue. Par ailleurs, le modèle 3d permet de prendre en compte la précipitation, l'évaporation et l'évapotranspiration en imposant un flux positif ou négatif à la surface.

Le modèle a été validé sur un domaine hypothétique simple pour mesurer la sensibilité des paramètres et s'assurer du bon fonctionnement. Par exemple, il a été montré que le pompage dans l'aquifère augmentait la recharge provenant de la rivière et que la situation redevenait normale peu après l'arrêt du pompage. Les résultats ont montré que le flux à travers le lit calculé en utilisant le modèle 3d est supérieur à celui calculé par le modèle 2d pour des situations similaires, parce que le modèle 2d ne tient compte que des apports latéraux. Une validation à partir de données de terrain a été réalisée pour la rivière Arkansas et l'aquifère environnant qui est influencé par plusieurs puits. La simulation a été réalisée sur une période de calcul de 8 ans divisée en intervalles de trois mois. Les résultats des simulations effectuées correspondent assez

bien aux observations, à l'exception des périodes de crues, où les écarts sont importants. D'après Kraeger Rovey, ces écarts proviendraient du ruissellement de surface, dont le modèle ne tient pas compte.

Abbot *et al.* (1986) décrivent la structure du Système hydrologique Européen, un modèle conceptuel distribué à base physique, qui permet de simuler de nombreuses composantes du cycle hydrologique de façon intégrée. Certaines relations entre des réservoirs sont basées sur des relations empiriques, toutefois, les interactions entre l'écoulement souterrain et l'écoulement à surface libre sont traitées de façon physique, par opposition à l'utilisation de coefficient arbitraires. L'objectif des concepteurs du modèle consistait à regrouper les divers aspects de l'état de l'art en hydrologie déterministe sous un même modèle, de façon à créer un outil de simulation puissant.

L'écoulement dans la zone partiellement saturée est traité à partir d'une formulation unidimensionnelle verticale de l'équation de Richards. L'écoulement dans la zone saturée est traité par l'équation de Boussinesq selon un schéma de différences finies implicite, pour une ou plusieurs couches (pseudo-3d). L'écoulement à surface libre est calculé à partir d'un schéma de différences finies explicite résolvant les équations unidimensionnelles de Saint-Venant en négligeant les termes d'inertie. Le couplage avec l'écoulement souterrain est effectué uniquement entre la zone saturée et le cours d'eau puisque l'hypothèse d'écoulement essentiellement vertical est utilisée.

Ainsi, différentes approches de couplage ont été considérées par le passé, mais principalement en fonction des besoins des hydrogéologues, qui nécessitent plus de précision dans les conditions d'écoulement souterrain qu'en surface. L'utilisation d'un modèle bidimensionnel pour l'écoulement à surface libre n'ayant jamais été envisagée.

Chapitre 3 Description des phénomènes physiques et représentation mathématique

3.1 Écoulement souterrain

La recharge des nappes d'eau souterraines provient principalement de l'infiltration de l'eau de surface ou du lit des cours d'eau, lacs et océans ainsi que de l'injection directe. À l'opposé, l'eau quitte le sol par les processus suivants :

- évaporation ;
- évapotranspiration ;
- écoulement vers la surface du sol (principalement dans les talus) ;
- recharge directe d'un lac ou d'un cours d'eau dont l'élévation de la surface libre est inférieure à celle de la nappe phréatique ;
- pompage.

L'eau se déplace à travers le sol en réponse à un gradient de la charge hydraulique totale (H), à une vitesse proportionnelle au gradient. Le sol consiste en un arrangement de matériaux poreux plus ou moins hétérogène dont la caractéristique la plus importante pour l'écoulement est la conductivité hydraulique (k) qui décrit la facilité avec laquelle l'eau peut se déplacer à travers le milieu.

Un sol est dit saturé lorsque tout le volume des vides est occupé par l'eau. L'équation de Boussinesq (éq. 3.1), qui représente un écoulement dans un sol saturé utilise l'hypothèse de Dupuit-Forcheimer (1863) d'un écoulement essentiellement horizontal pour lequel la valeur de la composante verticale du gradient hydraulique est négligée. Cette hypothèse est valide pour des nappes phréatiques ayant de faibles pentes.

Lorsque cette équation est utilisée pour résoudre un problème d'écoulement permanent dans un sol isotrope, elle se résume à l'équation de Laplace ($\nabla^2 H = 0$).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} + q \quad (\text{éq. 3.1})$$

où

H : la charge hydraulique totale représente la somme de la hauteur piézométrique (pression exprimée en hauteur d'eau (h)) et de l'élévation au-dessus du niveau de référence (z).

$$H = h + z \quad (\text{éq. 3.2})$$

T_x, T_y : la transmissivité selon x et y correspond au produit de la conductivité hydraulique (k) selon chacun des axes par l'épaisseur de l'aquifère (b).

$$T = k b \quad (\text{éq. 3.3})$$

$$b = H - h_0 \quad (\text{éq. 3.4})$$

h_0 : élévation de la couche imperméable (limite inférieure de l'aquifère)

S : le coefficient d'emménagement de l'aquifère représente le volume d'eau libéré par une diminution unitaire de la charge hydraulique pour une colonne de sol de section unitaire.

Ce paramètre s'exprime en terme de la porosité (θ), du poids spécifique de l'eau (γ) et des compressibilités du sol (α) et de l'eau (β) lorsque l'aquifère à l'étude est soumis à une forte pression artésienne.

Dans ce cas :

$$S = \theta \gamma b \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) \quad (\text{éq. 3.5})$$

q : terme source permettant de simuler la présence de puits de pompage ou d'injection, de drains.

Cette équation, ne permet pas de tenir compte de la zone partiellement saturée généralement située près de la surface du sol, ce qui présente un désavantage important lorsque des phénomènes tels que le transport de contaminants au niveau de la zone de marnage de la nappe phréatique veulent être étudiés. La prise en compte de la zone partiellement saturée complexifie la modélisation numérique de l'écoulement souterrain car la conductivité hydraulique varie dans cette zone en fonction de la teneur en eau et de la charge piézométrique, ce qui rend le problème très non-linéaire. Les relations entre la conductivité hydraulique et la charge piézométrique, et celle entre la teneur en eau et la charge piézométrique, sont complexes à établir, étant donné qu'il s'agit d'hystérésis, n'ayant pas le même comportement lors du mouillage et du séchage d'un sol. La plupart du temps, les modèles d'infiltration utilisent des relations empiriques ne permettant pas de tenir compte de cette hystérésis, telles que celles développées par Van-Genuchten (1981) et Philip (1957). Un sol sec est généralement très peu perméable et la conductivité hydraulique maximale est atteinte lorsque le sol devient complètement saturé, la forme des relations développées permet de représenter la transition entre ces cas limites.

De plus dans la zone partiellement saturée, la notion de coefficient d'emménagement est remplacée par la capacité de rétention du sol (C) qui dépend de la teneur en eau et de la charge piézométrique. La relation décrivant l'écoulement dans un milieu poreux partiellement saturé est l'équation de Richards (1931) (éq. 3.6).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial k(h)}{\partial z} = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} + q \quad (\text{éq. 3.6})$$

où

h : hauteur piézométrique

k(h) la conductivité hydraulique dans un sol partiellement saturé dépend de la charge et peut varier selon x, y et z. Lorsque le sol est complètement saturé, k devient constant selon chacun des axes.

- $C(h)$ capacité hydraulique du sol $C(h) = \partial\theta/\partial h$ soit la relation entre la teneur en eau et la charge piézométrique. Lorsque le sol est complètement saturé $C(h)=0$ et $\partial k/\partial z = 0$ l'équation 3.6 se résume à l'équation de Laplace avec une distorsion selon les axes.
- q : terme source permettant de simuler la présence de puits de pompage ou d'injection, de drains.

Bien qu'en condition permanente, pour un sol saturé, l'équation 3.6 se réduise à l'équation de Laplace, ceci n'implique pas la continuité mathématique avec l'équation 3.1. Ces deux équations sont fondamentalement différentes et nécessitent des techniques de résolution différentes. Le domaine d'application de l'équation 3.6 se situe au-dessus de la nappe phréatique.

La nappe phréatique est la surface pour laquelle la charge piézométrique (h) est nulle, elle constitue la séparation entre les zones saturée et partiellement saturée. Dans certains cas le sol peut être complètement saturé dans la frange capillaire située au dessus de la nappe phréatique, toutefois, la pression y est négative. De la même façon, des zones d'air occlus peuvent subsister sous le niveau de la nappe phréatique à cause de l'hétérogénéité du sol. De façon pratique, la nappe phréatique est située à l'élévation où le niveau d'eau se stabiliserait dans un puits.

Un aquifère est une couche géologique saturée perméable dans laquelle l'eau peut s'écouler en réponse à un gradient hydraulique faible. Un aquifère est dit confiné, s'il est coincé sous une couche géologique imperméable (aquitard) qui le pressurise. Les puits artésiens sont forés dans des aquifères de ce type. Dans ce cas, il n'est plus question de nappe phréatique, mais de surface potentiométrique, puisque l'élévation de la surface ayant une charge piézométrique nulle peut-être située bien au-delà de la limite supérieure (plafond) de l'aquifère ou de la surface du sol.

Le débit de base d'un cours d'eau est défini comme le débit en provenance du sol. Pour qu'un aquifère puisse fournir un débit de base, l'élévation de la nappe phréatique doit être supérieure à l'élévation de la surface libre du cours d'eau. Dans le cas contraire, c'est le cours d'eau qui recharge l'aquifère tel qu'au cours des crues printanières.

La détermination précise du débit de base dans un cas général nécessite la résolution de l'équation de Richards (éq. 3.6), de façon à tenir compte de la fraction du débit provenant de la zone non-saturée. L'écoulement hypodermique se déroulant dans la couche supérieure du sol constitue un apport parfois majeur au débit de base qui ne devrait pas être négligé. Toutefois, dans le cas particulier concernant les étiages hivernaux, la couche supérieure du sol constitue une barrière imperméable à cause du gel. Dans ce cadre, la recharge à l'eau souterraine ne provient que de cours d'eau ayant une élévation de la surface libre supérieure à l'élévation de la nappe phréatique étant donné que les précipitations sous forme de neige demeurent en surface.

Il est donc justifié d'utiliser l'équation 3.1 pour modéliser l'écoulement souterrain dans le cadre d'application concernant l'étiage hivernal. La plupart des concepts développés en considérant la zone saturée peuvent être transférés au cas général prenant en compte la zone partiellement saturée, à l'exception des approches numériques utilisées pour la résolution des conditions d'écoulement souterrain qui devront être modifiées.

Les équations 3.1 et 3.6 ne peuvent pas être résolues de façon analytique à l'exception de quelques cas très simples. Différentes techniques ont été développées pour les résoudre, toutefois, l'augmentation de la puissance des ordinateurs a privilégié l'utilisation des méthodes numériques.

Les premières méthodes utilisées étaient les équations conjuguées (Polubarinova-Kochina, 1962), les analogues électriques (Thiel *et al*, 1962), les éléments analytiques (Klute *et al*, 1965) et les méthodes d'approximation numérique. Ces différentes

méthodes ont surtout été utilisées pour résoudre l'équation de Laplace pour des géométries simples, seules les analogues électriques et les méthodes numériques permettaient de traiter l'anisotropie et les domaines complexes. La méthode des analogues électriques consiste à remplacer le réseau d'écoulement par un circuit électrique équivalent, où le potentiel électrique équivaut à la charge hydraulique et les résistances et les condensateurs correspondent à la conductivité hydraulique et l'emmagasinement. Des modèles physiques ont aussi été utilisés, ils consistent en des modèles réduits d'aquifères, toutefois, dans le cadre de l'étude des interactions entre les écoulements souterrain et en cours d'eau, l'ordre de grandeur des facteurs d'échelles à considérer pose des difficultés techniques majeures (Bear, 1979). Les modèles physiques sont surtout utilisés pour le développement et la validation de modèles théoriques à partir d'analyses en laboratoire sur une colonne de sol.

Des modèles conceptuels globaux sont aussi utilisés pour décrire les écoulements souterrains, sans avoir recours aux équations 3.1 et 3.6. Il s'agit d'approches conceptuelles représentant un bassin versant comme un réseau de réservoirs reliés sur lesquels un bilan de masse est calculé. Ils utilisent des coefficients de transfert entre les bassins, calibrés par comparaison aux hydrogrammes mesurés. Ces modèles sont assez simples, toutefois, leur représentation conceptuelle par des relations déterministes empiriques n'est pas liée à la physique des phénomènes représentés, ainsi l'extrapolation à partir de tels modèles devient hasardeuse. Par ailleurs, un modèle conçu pour un bassin versant donné n'est pas facilement transférable à un autre bassin, encore une fois, à cause des relations empiriques qu'il utilise. Certains de ces modèles divisent le domaine en éléments homogènes du point de vue hydrologique (Wanakule, 1995), ce qui permet de tenir compte de la distribution spatiale des caractéristiques du sol et d'avoir une meilleure approximation de la hauteur de la nappe et des vitesses d'écoulement sur le bassin. De plus, la distribution spatiale des caractéristiques permet de simuler différents scénarios de modifications sur le bassin, de façon à prévoir leur impact sur l'écoulement souterrain.

Étant donné que les équations 3.1 et 3.6 ont été utilisées avec succès à l'intérieur de modèles théoriques locaux, il semble que ce type de représentation soit à privilégier pour la modélisation de la composante souterraine de l'écoulement. Les méthodes numériques utilisées pour la discrétisation de ces équations sont les différences finies et les éléments finis. Il en sera question plus en détail plus loin dans le texte, car ces méthodes seront aussi employées dans le cadre de la modélisation de l'écoulement à surface libre.

Les conditions frontières naturelles d'un bassin versant varient dans le temps et l'espace. De façon à reproduire ces variations sur les modèles, des modèles stochastiques ont été développés pour produire des séries de données climatiques. Dans certains modèles régionaux, les fluctuations de la nappe phréatique constituent des variables stochastiques (Kriz, 1972). Toutefois, dans le cadre de cette étude, il sera considéré que des données suffisantes pour spécifier les conditions frontières sont disponibles, de façon à étudier les phénomènes locaux à l'aide d'approches déterministes.

3.2 Écoulement à surface libre

Les conditions d'écoulement de l'eau dans les rivières ou les canaux aménagés dépend principalement de la topographie et de la rugosité du lit. Il existe différentes méthodes mathématiques pour décrire le phénomène physique, certaines sont basées sur des hypothèses simplificatrices acceptables dans certains contextes, tandis que d'autres constituent des représentations complètes fidèles, mais nécessitent un effort de calcul considérables.

3.2.1 Représentation unidimensionnelle

Les équations représentant l'écoulement à surface libre de l'eau sur une surface rugueuse sont les équations de Saint-Venant, elles proviennent des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité.

Équation dynamique obtenue à partir des équations de Saint-Venant en 1 dimension (Cunge *et al*, 1980) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(VQ) + gA \left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_o \right) + gAS_f = 0 \quad (\text{éq. 3.7})$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{éq. 3.8})$$

où

y : Profondeur ;

A : aire de la section transversale du cours d'eau ;

Q : débit transité par la section ;

V : vitesse moyenne du fluide à travers la section ;

S_o : pente du lit du cours d'eau (vers la section suivante) ;

S_t : pente de la ligne d'énergie, souvent calculée d'après l'équation de Manning

$$S_t = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \quad (\text{éq. 3.9})$$

n : coefficient de rugosité du lit du cours d'eau ;

R : rayon hydraulique de la section (Aire / périmètre mouillé).

Lorsque l'écoulement est modélisé de façon unidimensionnelle, la discrétisation spatiale est prise en compte au moyen de sections transversales qui spécifient l'élévation du lit sur toute la largeur du cours d'eau, perpendiculairement au sens de l'écoulement (Figure 3.1). L'espacement et la localisation des sections est très importante, car la qualité de la représentation du phénomène physique par la modélisation en dépend.

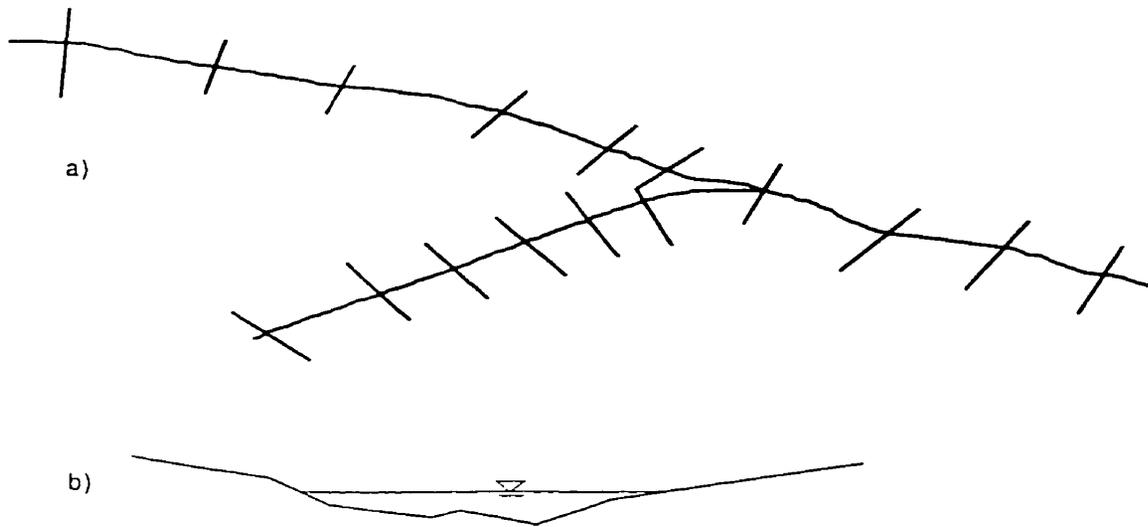


Figure 3.1 Représentation d'un cours d'eau en modélisation unidimensionnelle. a) vue en plan b) section transversale

3.2.2 Équations simplifiées

Il est possible de résoudre une approximation des équations 3.7 et 3.8 lorsque les effets dynamiques de l'écoulement peuvent être négligés. En négligeant les termes d'inertie, la pente d'énergie (S_f) est estimée ainsi :

$$S_1 \equiv S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{éq. 3.10})$$

En combinant cette équation à l'équation 3.8, l'équation de l'onde diffuse est obtenue :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + c_k q \quad (\text{éq. 3.11})$$

où

$$c_k = \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{\partial Q}{B \partial y} : \text{célérité de l'onde cinématique} \quad (\text{éq. 3.12})$$

$$D = \frac{Q}{2BS_0} : \text{coefficient de diffusion} \quad (\text{éq. 3.13})$$

B : largeur de la surface libre

La prise en compte du terme de diffusion permet de passer de l'hypothèse de l'onde cinématique à l'hypothèse d'onde diffuse. Une onde cinématique se déplace en conservant son amplitude et sa période alors qu'en considérant la diffusion, la crête de l'onde s'atténue et la période augmente progressivement lors de la propagation. Ces hypothèses sont très fréquemment employées en hydrologie car elles simplifient la résolution des équations tout en demeurant valides pour une gamme de situations assez large. Quelques-uns des modèles présentés dans le cadre de la revue de littérature utilise ce type d'approche.

3.2.3 Représentation bidimensionnelle

Dans certains cas, il peut-être difficile, voire impossible, de représenter un écoulement de façon unidimensionnelle, à cause des limitations inhérentes aux hypothèses simplificatrices utilisées par cette méthode. L'approche bidimensionnelle permet de considérer les composantes de vitesse selon les deux axes principaux ainsi que l'élévation de la surface libre à chacun des éléments du domaine discrétisé, procurant ainsi une représentation plus fidèle aux conditions d'écoulement réelles. La

connaissance du champs de vitesse s'avère nécessaire dans de nombreux cas d'application liées à l'ingénierie, notamment, pour la conception d'ouvrages hydrauliques complexes, l'évaluation du potentiel halieutique d'un bief, l'étude de la circulation des eaux, l'étude des phénomènes de transport, etc.

Les équations de Saint-Venant, obtenues en intégrant les équations de Navier-Stokes selon la profondeur d'écoulement et en posant certaines hypothèses simplificatrices, permettent de modéliser les écoulements bidimensionnels.

Les hypothèses simplificatrices utilisées sont les suivantes:

1. la distribution de pression est hydrostatique (accélération verticale nulle);
2. la pente du lit du cours d'eau est relativement faible, ce qui permet de poser égales les profondeurs mesurées verticalement et perpendiculairement au lit;
3. la distribution de vitesse selon la verticale est uniforme;
4. les pertes de charges en écoulement transitoire peuvent être calculées en considérant les équations habituellement considérées en écoulement permanent.

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, s'énoncent ainsi:

Équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{éq. 3.14})$$

Équations de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (\text{éq. 3.15})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (\text{éq. 3.16})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w \quad (\text{éq. 3.17})$$

Dans ces équations, u , v , w , p , μ , ρ et ∇^2 représentent respectivement les composantes de vitesses selon les axes x , y , z , la pression, la viscosité dynamique, la masse volumique et le Laplacien.

Pour passer de la forme tridimensionnelle des équations de Navier Stokes à l'approximation bidimensionnelle, l'équation de continuité est intégrée selon la verticale en utilisant les bornes constituées par le lit du cours d'eau et la surface libre, considérées imperméables. Cette équation est maintenant posée en terme de vitesses horizontales moyennes selon la profondeur (\bar{u} , \bar{v}), d'élévation de la surface libre (h) et de profondeur d'écoulement ($h+h_b$) (Figure 3.2).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial((h+h_b)\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial((h+h_b)\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{éq. 3.18})$$

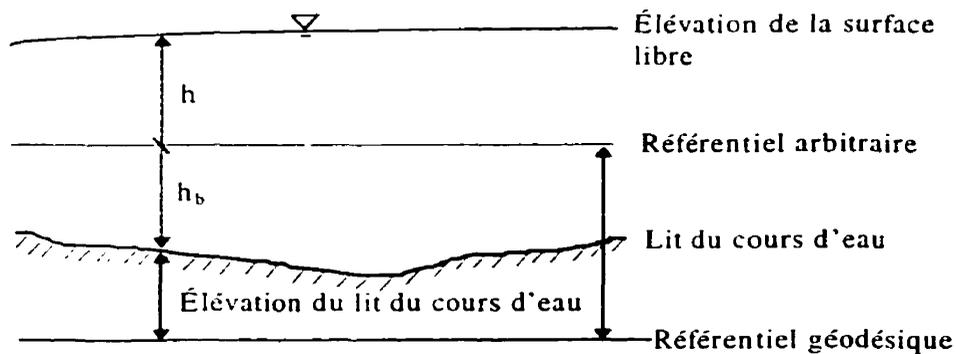


Figure 3.2 Point de référence pour la bathymétrie et la hauteur d'eau

Équation de quantité de mouvement:

En posant une valeur nulle à l'accélération verticale et la pression atmosphérique à la surface libre, l'équation de quantité de mouvement se réduit à:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = g_x - g_z \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (\text{éq. 3.19})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = g_y - g_z \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (\text{éq. 3.20})$$

$$p = \rho g_z (z - h) \quad (\text{éq. 3.21})$$

L'intégration selon la verticale de ces équations donne:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial y} = \left(g_x - g_z \frac{\partial h}{\partial x} \right) h + \int_{h_b}^h \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \right) dz \quad (\text{éq. 3.22})$$

$$\frac{\partial \bar{v}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} = \left(g_y - g_z \frac{\partial h}{\partial y} \right) h + \int_{h_b}^h \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \right) dz \quad (\text{éq. 3.23})$$

La dernière partie du membre de droite correspond aux contraintes de compression et de cisaillement turbulent. Dans un écoulement turbulent, la viscosité dynamique est remplacée par un coefficient de viscosité turbulente, ce qui permet de remplacer le terme à intégrer de l'équation 3.23 par:

$$\varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{éq. 3.24})$$

Étant donné que les contraintes de cisaillement agissant sur le fond sont dominantes, le premier terme peut être négligé. En intégrant le second terme, les contraintes de cisaillement sur la surface libre (τ_s) et sur le fond (τ_b) apparaissent. Le cisaillement en surface est dû à l'effet du frottement du vent sur la surface libre, qui ne sera pas pris en

compte dans le cas présent, tandis que le frottement avec le fond sera pris en compte à partir du calcul de la contrainte de cisaillement (éq. 3.25).

$$\tau_b = \rho gh S_f \quad (\text{éq. 3.25})$$

Jusqu'à ce point le développement a été réalisé en utilisant la profondeur normale au lit du cours d'eau toutefois, il est plus pratique d'utiliser la profondeur verticale et d'introduire le terme de bathymétrie S_o . Une fois les transformations trigonométriques réalisées et les termes d'ordres supérieurs négligés, le système d'équation devient:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial y} = gh(S_{ox} - S_{fx} - \frac{\partial h}{2\partial x}) \quad (\text{éq. 3.26})$$

$$\frac{\partial \bar{v}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} = gh(S_{oy} - S_{fy} - \frac{\partial h}{2\partial y}) \quad (\text{éq. 3.27})$$

Le système complet peut être réécrit sous la forme suivante, en laissant tomber les symboles de valeurs moyennes (-):

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (\text{éq. 3.28})$$

où

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

La représentation physique (Leclerc *et al*, 1990) de chacun des termes s'énonce comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{accélération locale dans le temps ;}$$

- $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ accélération convective (accélération dans l'espace) ;
- $g \frac{\partial h}{\partial x}$ accélération gravitationnelle reliée à la pente de la surface libre ;
- $\varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ contraintes de Reynolds (compression et cisaillement turbulent) ;
- $S_{fx} = \frac{gn^2 u}{(h + h_b)^{4/3}} \sqrt{u^2 + v^2}$ pente de la ligne d'énergie selon x (éq. de Manning) ;
- S_{0x} pente du lit du cours d'eau selon x

3.3 Interactions entre les écoulements à surface libre et souterrain

Les écoulements à surface libre et souterrain sont liés par le flux traversant le lit du cours d'eau. Pour évaluer le débit entre le cours d'eau et l'aquifère, il faut connaître les élévations respectives de la surface libre et de la nappe phréatique. La figure 3.3 illustre trois situations se produisant dans des systèmes cours d'eau - aquifère : en a et b, le flux à travers l'interface est directement proportionnel à la différence de charge (Δh) entre le cours d'eau et l'aquifère, la seule différence entre ces deux situations est le signe du gradient hydraulique, qui contrôle le sens de l'écoulement.

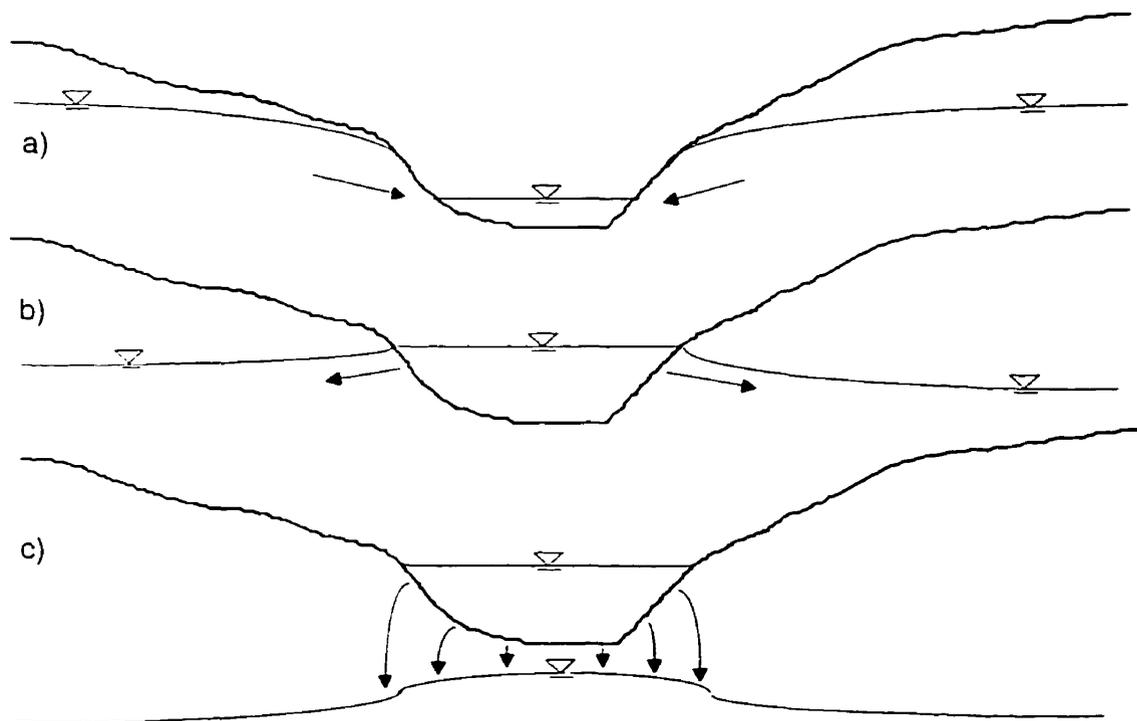


Figure 3.3 Interactions entre un aquifère et un cours d'eau, a) recharge provenant de l'aquifère, b) recharge provenant du cours d'eau, c) cours d'eau rechargeant un aquifère sans continuité hydraulique

Le flux dépend aussi de la perméabilité du lit de la rivière, dans le cas où le lit serait complètement imperméable, le débit serait évidemment nul, peu importe la différence de charge. L'importance relative de la perméabilité du lit permettra aussi de déterminer la force de l'interaction entre les deux systèmes lors de la modélisation.

La situation illustrée à la figure 3.3-c) est différente, dans ce cas il n'y a plus de continuité hydraulique, puisque la nappe phréatique est située sous le thalweg du cours d'eau et le débit traversant le lit du cours d'eau dépend uniquement de la hauteur d'eau dans le cours d'eau et de la perméabilité du lit. Dans ce cas-ci, l'effet du cours d'eau sur l'aquifère dans le modèle d'écoulement souterrain sera pris en compte directement par les termes sources sur le tracé du cours d'eau, alors que dans les cas représentés par les figures 3.3 a) et b), le débit des termes sources est déterminé de façon itérative. Dans le modèle d'écoulement à surface libre la situation demeure toujours la même, l'apport ou la perte de débit sera prise en compte par des termes sources à chacun des éléments de la discrétisation (section ou noeud).

Ainsi, l'expression permettant d'évaluer le flux traversant le lit du cours d'eau provenant directement de la loi de Darcy peut être énoncée comme suit, dans le contexte d'utilisation d'un modèle d'écoulement à surface libre unidimensionnel (Perkins et Koussis, 1996) :

$$q = \frac{k_{lit}}{d} A_s (h_{riv} - h_{sol}) \quad \text{pour } h_{sol} \geq h_{Thalweg} \quad (\text{éq. 3.29})$$

et

$$q = \frac{k_{lit}}{d} A_s (h_{riv} - h_{Thalweg}) \quad \text{pour } h_{sol} < h_{Thalweg} \quad (\text{éq. 3.30})$$

où

q : débit traversant le lit du cours d'eau (m^3/s)

h_{riv} : élévation de la surface libre du cours d'eau (m);

h_{sol} : élévation de la nappe phréatique à proximité du cours d'eau (m);

h_{Thalweg} : élévation du point le plus bas du lit du cours d'eau (m);

k_{lit} : conductivité hydraulique du lit du cours d'eau (m/s);

d : épaisseur du lit du cours d'eau (m)

A_s : aire de contact (périmètre mouillé x distance entre deux sections) (m^2).

Selon cette formulation, un débit (q) positif indique une recharge de l'aquifère par le cours d'eau. La recharge à chacune des sections peut être déterminée à partir de la différence de charge, du périmètre mouillé de la section (p) et de la distance entre les sections (L). La conductivité hydraulique du lit du cours d'eau (k_{lit}) permet de tenir compte de la couche de matériau formant le lit de la rivière qui est généralement moins perméable que le matériau constituant l'aquifère. Cette couche est souvent composée de particules fines (silt, argile) déposées au fil des années et a tendance à réduire de façon importante le flux à travers l'interface (Kraeger Rovey, 1975). La valeur de k_{lit} n'est pas facile à déterminer ; selon les auteurs, elle est fonction de la forme du canal, de la granulométrie, de l'épaisseur de la couche de sédiments fins et de ses propriétés hydrodynamiques. De façon générale, il semble que ce paramètre soit ajusté lors de la calibration du modèle, après que les valeurs des coefficients de rugosité (n), de conductivité hydraulique (K) et d'emmagasinement (S) aient été spécifiées, de façon à obtenir des élévations de la surface libre et de la nappe phréatique et un flux à travers le lit du cours d'eau correspondant aux données mesurées sur le terrain.

Il arrive que, pour un cours d'eau donné, certains biefs drainent l'aquifère (Fig. 3.3 a) et d'autres le rechargent (Fig. 3.3 b et c), ou même que la nappe phréatique soit plus élevée que la surface libre sur une des berges et plus basse sur l'autre, le cours d'eau agissant comme une tranchée drainante à perméabilité très élevée pour l'aquifère. Par ailleurs, un bief peut recharger l'aquifère lors de la crue et le drainer lors des périodes d'étiage. La nature de ces échanges varie dans le temps et l'espace.

3.4 Étiage hivernal et champs d'application du modèle

La période d'étiage hivernal des pays nordiques est caractérisée par une faible hydraulicité, en raison de l'absence totale ou partielle de ruissellement de surface due aux températures froides. Les précipitations solides demeurent en surface jusqu'au dégel. La couche superficielle de sol est gelée sur une certaine épaisseur, bloquant les apports à la zone partiellement saturée, qui se limite alors à une frange capillaire.

Les températures froides occasionnent la formation de glace et de frasil dans les cours d'eau. La présence du couvert de glace modifie les conditions d'écoulement. Lorsque la surface du couvert est plutôt uniforme, elle entraîne simplement une augmentation des pertes de charge par friction. Toutefois, il arrive aussi que l'écoulement soit complètement canalisés sous des dunes de glace une fraction très importante de la section d'écoulement dans les secteurs situés à l'aval de zone de formation de frasil. Dans ces conditions, l'analyse de l'écoulement devient beaucoup plus complexe à réaliser.

La recharge provenant de la nappe phréatique a tendance à influencer le régime thermique des cours d'eau en maintenant l'eau à des températures relativement élevées sous le couvert de glace, dans les secteurs où les apports relatifs de la nappe sont considérables. Ces apports thermiques suffisent parfois à permettre au frasil actif de passer à l'état inactif. Au cours des périodes d'étiage estival, le phénomène inverse se produit, l'eau en provenance de la nappe phréatique maintenue à une température fraîche a tendance à refroidir l'eau des cours d'eau et entraîner des augmentations de la teneur en oxygène dissous, favorisant ainsi la faune aquatique.

Les problèmes de contamination des nappes d'eau souterraine situées à proximité de cours d'eau présentent des risques particulièrement important au cours des périodes

d'étiage, étant donné qu'à ce moment les gradients hydrauliques plus élevés vers les cours d'eau favorisent la migration des contaminants de la nappe vers le cours d'eau.

L'exploitation extensive des nappes souterraines pour fins d'exportation a soulevé de nombreuses questions au cours des dernières années, notamment relatives au risque de tarissement des nappes souterraines. Un pompage extensif peut entraîner des modifications à l'écoulement régional qui sont susceptibles d'affecter la recharge de cours d'eau en période d'étiage.

Ces cas constituent des exemples du type d'application pour lequel le modèle a été conçu. Les résultats des simulations d'écoulement peuvent être transmis à des modèles de qualité de l'eau permettant ainsi de réaliser des analyses plus complètes.

Chapitre 4 Modélisation numérique des écoulements

4.1 Modèle d'écoulement souterrain

La méthode des éléments finis a été utilisée pour l'élaboration du modèle d'écoulement souterrain. Cette méthode consiste en une application de la méthode variationnelle sur chacune des fractions d'un domaine discrétisé en éléments géométriques simples. La formulation variationnelle consiste en la forme faible d'une équation aux dérivées partielles, elle est obtenue en transférant une partie des différentiations de la variable dépendante vers une fonction test. Cette formulation correspond en général à minimiser la fonctionnelle quadratique de l'équation, ce qui permet de trouver la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles. La formulation variationnelle élémentaire est obtenue intégrant par partie, sur un élément de référence, le produit de l'équation aux dérivées partielles et de la fonction test.

En considérant l'équation à résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} + q \quad \text{sur un domaine } \Omega \quad (\text{éq. 3.1})$$

posée avec des conditions frontières de débit ou de charge sur la frontière Γ du domaine Ω .

La formulation variationnelle faible est obtenue en multipliant l'équation par une fonction test w et en l'intégrant ensuite par partie :

$$\int_{\Omega} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA + \int_{\Omega} (SHw) dA = \oint_{\Gamma} (Qw) ds + \int_{\Omega} (qw) dA \quad (\text{éq. 4.2})$$

L'intégration par partie des termes de l'équation contenant des dérivées du second ordre permet de réduire le degré de la fonction d'interpolation par transfert vers la

fonction test, ceci correspond à utiliser la forme «faible» du modèle. L'intégration par partie fait aussi apparaître des termes de bord qui facilitent l'introduction des conditions naturelles aux frontières.

La discrétisation géométrique du domaine de calcul est un avantage important de la méthode des éléments finis par rapport aux différences finies. Des maillages composés d'éléments de formes et de dimensions variables peuvent facilement être utilisés, au lieu de la grille structurée habituellement utilisée en différences finies. Dans le cas présent, le modèle a été développé pour des éléments triangulaires. La densité du maillage peut ainsi être variée près des zones d'intérêt ou aux endroits présentant des problèmes particuliers. Il est intéressant de pouvoir utiliser de plus petits éléments en bordure du cours d'eau ou des puits, car ces endroits constituent des points d'intérêts particuliers où le gradient hydraulique est élevé.

Le choix d'un type d'élément se traduit par la sélection des fonctions tests appropriées, qui sont selon le cas plus ou moins complexes, dépendant de la forme de l'élément et du degré des polynômes utilisés. Pour une densité de maillage donnée, le choix de polynômes de degré élevé augmente la précision des approximations, tout en complexifiant la formulation. Les éléments choisis pour le modèle d'écoulement souterrain correspondent à des triangles à trois noeuds situés aux sommets, ce qui implique l'utilisation de fonctions tests linéaires.

Une fois que la formulation variationnelle élémentaire est connue, il suffit de l'appliquer à chacun des éléments, en calculant la valeur des coefficients des fonctions tests. Les matrices globales sont assemblées à partir des contributions de chacun des éléments. Les termes transitoires sont habituellement traités séparément à l'aide d'une approximation en différences finies.

Ainsi, pour l'équation de Boussinesq, le problème consiste à trouver une solution approximative de la forme de :

$$h(x, y, t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)w_i(x, y) \quad (\text{éq. 4.3})$$

Dans laquelle $\{w_i\}_{i=1}^n$ correspond à la série des n fonctions tests élémentaires, définies sur tout le domaine Ω . Le système peut donc être construit de la façon suivante :

$$[M] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + [K] \{\phi\} = \{F\} \quad (\text{éq. 4.4})$$

Dans laquelle ϕ représente une approximation de h et où les membres M , K , F de l'équation sont définis par:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} S w_i w_j dA \quad (\text{éq. 4.5})$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ T_x \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + T_y \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right\} dA \quad (\text{éq. 4.6})$$

$$f_j = \int_{\Omega} q w_j dA + \oint_{\Gamma} Q w_j ds \quad (\text{éq. 4.7})$$

Q : flux à travers la frontière Γ du domaine

Il s'agit de construire des matrices pour chacun des membres (m, k, f, Q), sur chacun des éléments et d'assembler le système global en additionnant les contributions respectives des éléments sur les noeuds partagés. Une fois que le système global est assemblé, la méthodologie de résolution n'est plus propre aux éléments finis, il s'agit d'analyse numérique matricielle, tout comme en différences finies.

La solution permanente de l'équation 4.4 peut être obtenue en annulant la valeur de la matrice de masse M . Toutefois, le cas général transitoire nécessite l'utilisation d'un schéma de différences finies. (L'annexe 1 décrit de façon plus détaillée la méthode des différences finies, de même qu'un exemple du développement du modèle souterrain selon cette méthode.) L'utilisation d'une approximation à partir de différences centrées dans le temps (Crank-Nicholson) produit l'équation suivante :

$$[M] \frac{\{\phi^{t+\Delta t} - \phi^t\}}{\Delta t} + \frac{1}{2} [K^{t+\Delta t}] \{\phi^{t+\Delta t}\} + \frac{1}{2} [K^t] \{\phi^t\} = \frac{1}{2} \{F^{t+\Delta t}\} + \frac{1}{2} \{F^t\} \quad (\text{éq. 4.8})$$

Il faut ici remarquer que la transmissivité (T) amène une non-linéarité causée par sa dépendance sur la charge (H), lorsque le schéma de différence temporelle est implicite. La façon habituelle de linéariser le problème consiste à utiliser une approximation de H à l'aide des valeurs obtenues aux pas de temps précédents pour calculer T. En général, la solution transitoire n'est pas très sensible à de faibles variations de l'épaisseur de l'aquifère, ainsi les résultats obtenus sont satisfaisants. Toutefois, il est possible de résoudre complètement le système non-linéaire en itérant sur l'épaisseur de l'aquifère. Ce qui correspond à résoudre le système avec une approximation de la transmissivité, puis à utiliser la solution obtenue pour corriger la transmissivité et résoudre le système à nouveau sans avancer dans le temps et ce, jusqu'à ce que la charge obtenue soit stable sur tout le domaine.

4.2 Modèle d'écoulement à surface libre

Dans le cas présent, la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations bidimensionnelles de Saint-Venant est le schéma de MacCormack (1969). Initialement développé pour résoudre des problèmes en 'aérodynamique, il a été utilisé avec succès à la modélisation hydrodynamique par Garcia et Kahawita(1986), puis par de nombreux auteurs dont Chaudry (1993). Il consiste en un schéma de différences finies explicites de type prédicteur-correcteur d'une précision d'ordre deux dans le temps et l'espace permettant de modéliser de façon efficace la propagation d'un front d'onde et des conditions d'écoulement mixtes.

L'équation 3.28 est résolue en deux étapes de calcul, en tous les points internes de la grille régulière aux coordonnées i, j , pour le pas de temps $k+1$, la valeur de chacune des variables étant connue au pas de temps k à partir des équations aux différences finies suivantes:

Étape de prédiction

$$U_{i,j}^p = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^k - \Delta t S_{i,j}^k \quad (\text{éq. 4.9})$$

Étape de correction

$$U_{i,j}^c = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^p - \Delta t S_{i,j}^p \quad (\text{éq. 4.10})$$

Solution

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^p + U_{i,j}^c) \quad (\text{éq. 4.11})$$

où les indice p et c désignent les valeurs calculées respectivement aux étapes de prédiction et de correction, tandis que les opérateurs de différences spatiales vers l'arrière et l'avant (∇, Δ) se calculent de la façon suivante:

Différence décentrée vers l'arrière:

$$\begin{aligned}\nabla_x E_{i,j} &= E_{i,j} - E_{i-1,j} \\ \nabla_y E_{i,j} &= E_{i,j} - E_{i,j-1}\end{aligned}\tag{éq. 4.12}$$

Différence décentrée vers l'avant:

$$\begin{aligned}\Delta_x E_{i,j} &= E_{i+1,j} - E_{i,j} \\ \Delta_y E_{i,j} &= E_{i,j+1} - E_{i,j}\end{aligned}\tag{éq. 4.13}$$

Les opérateurs différentiels utilisés sont du premier ordre, toutefois, les termes de troncatures du premier ordre s'annulent tous grâce à la séquence de résolution et la précision du schéma est bel et bien d'ordre deux.

L'étape de correction utilise une différence décentrée dans la direction opposée à celle utilisée à l'étape de prédiction. De façon, à réduire le biais directionnel causé par l'utilisation d'opérateurs décentrés, une séquence de résolution alternant le décentrage des opérateurs en quatre étapes a été utilisée (Tableau 4.1). Cette séquence est utilisée en permutant les étapes à tous les quatre pas de temps, créant une séquence complète ne se répétant qu'après seize incréments de temps.

Tableau 4.1 Séquence de résolution utilisée

Direction des différences selon l'étape de calcul				
Étape	Incrément de temps			
	1	2	3	4
Prédicteur x	Arrière	Avant	Arrière	Avant
Prédicteur y	Arrière	Avant	Avant	Arrière
Correcteur x	Avant	Arrière	Avant	Arrière
Correcteur y	Avant	Arrière	Arrière	Avant

4.2.1 Imposition des conditions frontières

En écoulement à surface libre, l'imposition des conditions frontières dépend du type d'écoulement observé. Pour un débit donné, l'écoulement dans un bief peut être fluvial, critique ou torrentiel selon la rugosité du fond et des berges et la pente du fond. Le nombre de Froude est utilisé pour caractériser le type d'écoulement, il représente la relation entre la vitesse moyenne de l'eau et la vitesse de propagation d'une onde dans ce fluide (célérité).

$$N_f = \frac{V}{\sqrt{gD}} \quad (\text{éq. 4.16})$$

N_f : nombre de Froude

V : vitesse moyenne

D : profondeur hydraulique

g : accélération gravitationnelle

\sqrt{gD} : célérité de l'onde

Lorsque la valeur du nombre de Froude est inférieure à l'unité, l'écoulement est dit «fluvial» tandis qu'une valeur supérieure à l'unité caractérise un écoulement torrentiel. Lorsqu'un écoulement passe de fluvial à torrentiel, il est dit «critique» et à ce point, la valeur du nombre de Froude est égale à l'unité. La vitesse d'écoulement étant plus grande que la vitesse de propagation d'une onde dans l'eau en écoulement torrentiel, ce type d'écoulement n'est pas affecté par des perturbations provenant de l'aval, contrairement à l'écoulement fluvial.

Ainsi, lorsque l'écoulement est torrentiel, les conditions frontières sont toutes spécifiées à l'amont, soit une condition pour fixer l'élévation de la surface libre et une autre pour chacune des composantes du débit spécifique. Tandis que lorsque l'écoulement est fluvial, une condition frontière sur l'élévation de la surface libre est imposée à l'aval et une condition sur le débit spécifique ou la vitesse est imposée à l'amont.

Les conditions le long des frontières fermées peuvent être imposées de deux façons, soit par l'imposition d'une condition de réflexion le long des parois imperméables fixes ou en permettant le déplacement des frontières selon le mouillage et le séchage des berges en fonction de la variation de la profondeur d'eau.

4.2.2 Condition de réflexion aux frontières imperméables

Les conditions frontières le long des parois imperméables sont imposées en forçant une réflexion des flux vers l'intérieur du domaine de calcul. Les valeurs des variables associées à un noeud situé hors du domaine de calcul nécessaires à l'évaluation des opérateurs différentiels du noeud voisin, situé directement sur la frontière, sont remplacées par les valeurs des variables du noeud situé du côté intérieur de la frontière. La réflexion est appliquée en inversant le signe des flux.

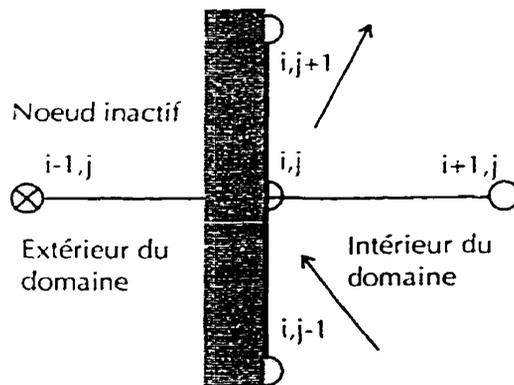


Figure 4.1 Réflexion à une frontière imperméable

Par exemple, en considérant la figure 4.1, où le noeud (i, j) est situé sur la frontière, pour le calcul de l'opérateur de différence décentré vers l'arrière, les valeurs des variables $u(i-1, j)$ et $v(i-1, j)$ sont égales à $-u(i+1, j)$ et $-v(i+1, j)$ et la valeur de $h(i-1, j)$ est posée égale à $h(i+1, j)$.

4.2.3 Mouillage et séchage des berges

La simulation du mouillage et du séchage des berges consiste à vérifier à chaque étape de calcul si un noeud est en voie de s'assécher ou susceptible de devenir mouillé.

À l'intérieur d'une boucle, pour chaque noeud, à l'exception de ceux auxquels une condition d'imperméabilité est attribuée, les flux normaux aux facettes du volume de contrôle tributaire du noeud sont évalués à partir des valeurs moyennes entre les noeuds situés de part et d'autres de chacune des facettes. Le volume de contrôle considéré est présenté à la figure 4.2.

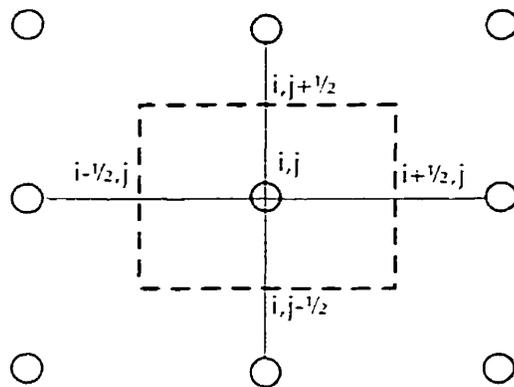


Figure 4.2 Volume de contrôle associé au noeud (i,j)

Au début d'une simulation, une élévation de la surface libre initiale est attribuée à chacun des noeuds. Une vérification préliminaire est réalisée et les noeuds pour lesquels la profondeur d'eau est inférieure à la valeur minimale tolérée sont déclarés temporairement inactifs. Certains noeuds peuvent être déclarés complètement inactifs par l'utilisateur, ils constituent alors des frontières imperméables qui ne sont jamais submergées.

En cours de simulation la forme du domaine sur lequel l'écoulement est considéré actif évolue selon la procédure suivante :

Pour vérifier si un noeud est en voie de s'assécher :

1. À un noeud (i,j) voisin d'un noeud inactif, le flux normal à travers la facette dans la direction du noeud inactif est nul. Un noeud devient inactif s'il est asséché, ou s'il a été déclaré inactif pour former une frontière imperméable.;
2. Si la profondeur d'eau à une des facettes du volume de contrôle est inférieure à la profondeur minimale tolérée, le flux normal à travers cette facette est nul, elle est déclarée imperméable;
3. Si la profondeur au noeud (i,j) est inférieure à la profondeur minimale tolérée et que le flux sortant du volume est supérieur au flux entrant, le noeud est asséché, il est déclaré inactif;
4. Si la profondeur à chacune des facettes est inférieure à la profondeur minimale tolérée, le noeud est asséché;
5. Les noeuds déclarés inactifs constituent des frontières imperméables pour les noeuds voisins, des conditions de réflexion y sont appliquées;
6. Des conditions de réflexions sont aussi appliquées lorsque le flux à travers une ou plusieurs des facettes entourant un noeud sont déclarées imperméables.

Pour qu'un noeud asséché devienne mouillé, toutes ces conditions doivent être vérifiées :

1. Au moins un des noeuds environnants est actif;
2. L'élévation de la surface libre à un des noeuds actifs environnants est supérieure à la somme de l'élévation du lit et de la profondeur minimale tolérée au noeud considéré;
3. La profondeur moyenne au-dessus des facettes active autour du noeud considéré est supérieure à la profondeur minimale tolérée.

La profondeur minimale tolérée varie en fonction des conditions d'écoulement, de la densité de la grille de calcul et de la bathymétrie du cours d'eau. Il est pratique de considérer une profondeur minimale de mouillage plus élevée que la profondeur minimale d'assèchement pour limiter les oscillations de l'état sec ou mouillé à un noeud.

Des essais réalisés ont permis d'abaisser la profondeur minimale d'assèchement à des valeurs de l'ordre du millimètre, toutefois, il a été remarqué que l'utilisation d'une valeur de l'ordre de 10 cm permet généralement une bonne convergence.

Chapitre 5 Méthodologie de couplage

Le modèle d'écoulement à surface libre et le modèle d'écoulement souterrain sont couplés par le flux traversant le lit du cours d'eau, pris en compte dans chacun des modèles par des termes sources incorporés dans les équations. Le flux à travers le lit du cours d'eau est calculé par le biais de l'expression découlant de la loi de Darcy.

L'introduction du terme source dans le modèle d'écoulement à surface libre bidimensionnel se fait en remplaçant le vecteur S de l'équation (éq. 3.28) par le vecteur suivant :

$$S = \begin{pmatrix} q \\ -gh(S_{ox} - S_{ix}) + v_x q \\ -gh(S_{oy} - S_{iy}) + v_y q \end{pmatrix} \quad (\text{éq. 5.1})$$

où

$$q = \begin{cases} \frac{k_{lit}}{d} (h_{riv} - h_b) & \text{pour } h_{sol} < h_b \\ \frac{k_{lit}}{d} (h_{riv} - h_{sol}) & \text{pour } h_{sol} > h_b \end{cases} \quad (\text{éq. 5.2})$$

$$v_x = \frac{k}{\theta} \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{k}{\theta} \frac{\Delta H}{\Delta y} \quad (\text{éq. 5.3})$$

v_x : composante de la vitesse d'écoulement interstitiel selon l'axe des x ;

v_y : composante de la vitesse d'écoulement interstitiel selon l'axe des y ;

θ : porosité du sol.

La première ligne du vecteur source S constitue la prise en compte de la contribution de l'écoulement souterrain dans l'équation de continuité, qui assure la conservation de la masse. À la différence du terme source présenté dans le contexte du modèle 1d, le débit spécifique est utilisé comme terme source, plutôt que le débit. Le débit total traversant un élément correspond au produit du débit spécifique moyen par l'aire de

l'élément. Les deux autres lignes du vecteur constituent la contribution des apports souterrains en terme de quantité de mouvement. Le premier membre de ces deux lignes est essentiellement lié à l'écoulement à surface libre, il permet la prise en compte de la bathymétrie et de la rugosité du lit du cours d'eau, tandis que le second terme constitue la variation de la quantité de mouvement due à un apport correspondant au produit de la vitesse de l'écoulement souterrain dans les pores du matériau granulaire et du débit à travers le lit

La contribution de l'écoulement souterrain à l'écoulement à surface libre est prise en compte dans le modèle d'écoulement souterrain en considérant l'introduction d'un puits soutirant un débit spécifique (q) appliqué sur la surface tributaire de chacun des noeuds couplés.

5.1 Discrétisation géométrique

L'utilisation des modèles numériques nécessite une représentation discrète du domaine de calcul. La valeur des variables du modèle n'est calculée qu'aux noeuds et la qualité de la solution est directement tributaire de la qualité de la représentation discrète. La précision d'un modèle numérique varie en fonction de la discrétisation des équations, des approximations réalisées, de la discrétisation spatiale et temporelle. Le choix d'un modèle et d'une discrétisation de densité appropriée permet d'obtenir la précision souhaitée. Pour le modèle d'écoulement souterrain, la discrétisation correspond à un maillage irrégulier d'éléments triangulaires. Ce type d'élément permet de varier rapidement la densité du maillage et d'épouser les formes irrégulières du domaine de calcul, ou des couches géologiques.

La discrétisation pour le modèle d'écoulement à surface libre bidimensionnel consiste en une grille rectangulaire régulière, pour laquelle les limites du cours d'eau sont définies par les zones de noeuds actifs. Seul le rapport entre la densité en x et en y

peut être varié. Étant donné que la charge hydraulique et le niveau d'eau doivent être connus en chacun des noeuds du cours d'eau, la façon la plus simple d'élaborer le maillage consiste à incorporer tous les noeuds de la grille de différences finies dans le maillage du modèle d'écoulement souterrain. Cette méthode nécessite l'utilisation d'un maillage relativement dense pour le modèle d'écoulement souterrain, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul requis pour la résolution. Toutefois, celle-ci a l'avantage d'offrir une meilleure précision que l'utilisation de valeurs interpolées, lorsque les noeuds du maillage et de la grille ne coïncident pas. Par ailleurs, des essais réalisés à partir d'un maillage d'éléments triangulaires moins dense que la grille, en utilisant des valeurs interpolées des variables hydrauliques, ont posé des problèmes de conservation de masse.

5.2 Méthodologie de résolution

La méthodologie de résolution utilisée commence par le calcul ou l'imposition d'un niveau d'eau initial à chacun des noeuds du domaine.

L'imposition de l'élévation initiale de la nappe phréatique peut-être réalisée en spécifiant une même élévation sur tout le domaine. Dans ce cas, il faut laisser s'écouler plusieurs intervalles de temps pour obtenir une solution significative, où l'effet des conditions initiales arbitraires n'apparaît plus. Si l'élévation de la nappe phréatique est connue en différents points du site d'étude, il est possible, à partir de ces valeurs, d'interpoler des conditions initiales plus réalistes qui procureront une convergence plus rapide ou de calculer une solution permanente passant par ces points.

Une fois les conditions limites et initiales imposées, le flux à travers le lit du cours d'eau doit être calculé par le modèle d'écoulement souterrain. Il s'agit d'une boucle itérative ayant comme critère de convergence la différence entre deux calculs du flux à travers le lit du cours d'eau.

1. Solution connue pour un pas de temps (au départ : condition initiale) ;
2. $t = t + \Delta t$;
3. résolution des conditions d'écoulement du cours d'eau ;
4. calcul de la réponse du modèle d'écoulement souterrain au niveau d'eau dans le cours d'eau ;
5. calcul du flux à travers le lit du cours d'eau ;
6. si la variation du flux à travers le lit est supérieure au critère de convergence toléré, les conditions d'écoulement du cours d'eau sont recalculées (retour à 3) sans avancer dans le temps ;
7. si le temps total de la simulation n'est pas écoulé retour à 1 ;
8. fin de la simulation.

La fin de la simulation peut correspondre à l'atteinte d'une solution permanente ou d'un état transitoire donné. Lors de simulation d'état transitoire, pour que l'échelle temporelle du modèle puisse être reliée au temps réel, il faut nécessairement que la condition initiale fournie au modèle soit réaliste. Dans le cas contraire, le temps nécessaire à dissiper l'effet des conditions arbitraires vient décaler les prédictions.

Étant donné que l'étiage est un phénomène transitoire, l'atteinte d'une solution permanente n'a pas tellement de sens car elle pourrait correspondre à un état nécessitant des années à survenir alors que le phénomène est saisonnier. Dans le cadre d'utilisation d'un tel modèle à d'autres fins que l'étiage hivernal, il est bon de rappeler que selon le type de conditions frontières utilisées, il peut arriver qu'il n'existe pas de solution permanente.

5.3 Discrétisation temporelle

Les échelles de temps naturelles entre les écoulements souterrain et à surface libre sont très différentes. Typiquement, les vitesses d'écoulement en rivière sont de l'ordre du mètre par seconde, tandis que l'eau dans le sol, requiert souvent une journée pour franchir cette distance. En général, les intervalles de temps utilisés par les modèles d'écoulement à surface libre sont courts par rapport à ceux d'écoulement souterrain. Ceci est causée par la grande différence entre les vitesses d'écoulement et les temps de réponse des deux systèmes. Toutefois, pour certaines conditions, il arrive que ce soit l'inverse, qu'il soit nécessaire d'avoir recours à des intervalles de temps très courts pour permettre la convergence du modèle d'écoulement souterrain. À titre d'exemple, un des cas modélisé pour la validation du modèle souterrain consiste à simuler un pompage dans une nappe d'eau initialement plane. Les premiers pas de temps utilisés pour cette simulation sont de l'ordre du millième de seconde.

Les intervalles de temps peuvent être augmentés à mesure que la variation de la charge en fonction du temps diminue. Pour ce cas, les intervalles de temps utilisés en fin de simulation étaient un million de fois supérieur à ceux du début.

Lorsque les intervalles de temps du modèle d'écoulement souterrain sont séparés par plusieurs intervalles de temps du modèle d'écoulement à surface libre, il faut extrapoler la valeur de la charge hydraulique de l'aquifère de façon à obtenir une bonne approximation du débit à travers le lit. Ceci requiert de conserver en mémoire les valeurs de charge hydraulique d'au moins deux pas de temps, pour pouvoir réaliser une extrapolation linéaire.

De nombreux essais ont été effectués pour déterminer le ratio maximal acceptable entre les intervalles de temps utilisés dans chacun des modèles. Les résultats obtenus montrent que le principal facteur affectant ce ratio est la force de l'interaction entre les deux systèmes, qui est caractérisée par la conductivité hydraulique du lit du cours

d'eau. Dans un système où les interactions sont fortes, l'utilisation de trop grands intervalles de temps dans le modèle d'écoulement souterrain amène des oscillations numériques sur la charge hydraulique, des bilans hydrologiques mal équilibrés et un flux à travers le lit disproportionné (Perkins et Koussis, 1996).

Il a aussi été constaté que pour des conditions où la variation du débit total à travers le lit est très faible, il n'est pas nécessaire de recalculer les conditions d'écoulement à surface libre une fois que l'état permanent est atteint. Ceci correspond à éviter systématiquement l'étape 3 de la méthodologie de résolution, jusqu'à ce que la modification du débit nécessite un nouveau calcul.

Chapitre 6 Résultats et interprétation

Différentes simulations ont été réalisées à partir des modèles développés. Des tests usuels ont été effectués pour vérifier la validité de chacun des modèles. Par la suite, une série d'applications permettant d'illustrer leur robustesse et les possibilités offertes pour différents champs d'application ont été réalisées. Ces différents résultats sont présentés à l'annexe 2, puisqu'ils présentent les modèles dans des contextes d'utilisation découplés.

Cette section présente les résultats obtenus avec les modèles couplés et l'analyse des résultats obtenus.

6.1 Introduction des termes sources

La prise en compte des termes sources permettant les échanges entre les deux modèles ne pose aucun problème pour le modèle d'écoulement souterrain, puisqu'il s'agit de la même procédure que pour la prise en compte d'un puits de pompage ou d'injection. Ainsi, les quelques exemples présentés à l'annexe 2 montrent le bon comportement du modèle. Toutefois, l'introduction ou le soutirage de débit sur toute la superficie du domaine de calcul du modèle d'écoulement à surface libre est moins habituelle et doit donc faire l'objet d'essais plus spécifiques.

La figure 6.1 présente un des premiers essais réalisés à partir du modèle d'écoulement à surface libre, en simulant l'interaction avec le modèle d'écoulement souterrain. Le problème à résoudre est constitué d'une cavité rectangulaire à fond plat d'une profondeur initiale de 0,8 m, avec des parois latérales imperméables. Sous ce plan d'eau est situé un aquifère confiné dont l'élévation piézométrique est de 0,9 m. La

conductivité hydraulique du lit a été fixée à 1×10^{-4} m/s. La simulation démarre en permettant les échanges entre les deux systèmes. Le résultat montre que le domaine se remplit jusqu'à ce que l'élévation de la surface libre atteigne l'élévation de la nappe phréatique. Le temps requis pour le remplissage est de 1000 secondes, ce qui était facilement prévisible. Le graphique montre bien que la vitesse de remplissage diminue de façon asymptotique, en fonction de la différence de charge.

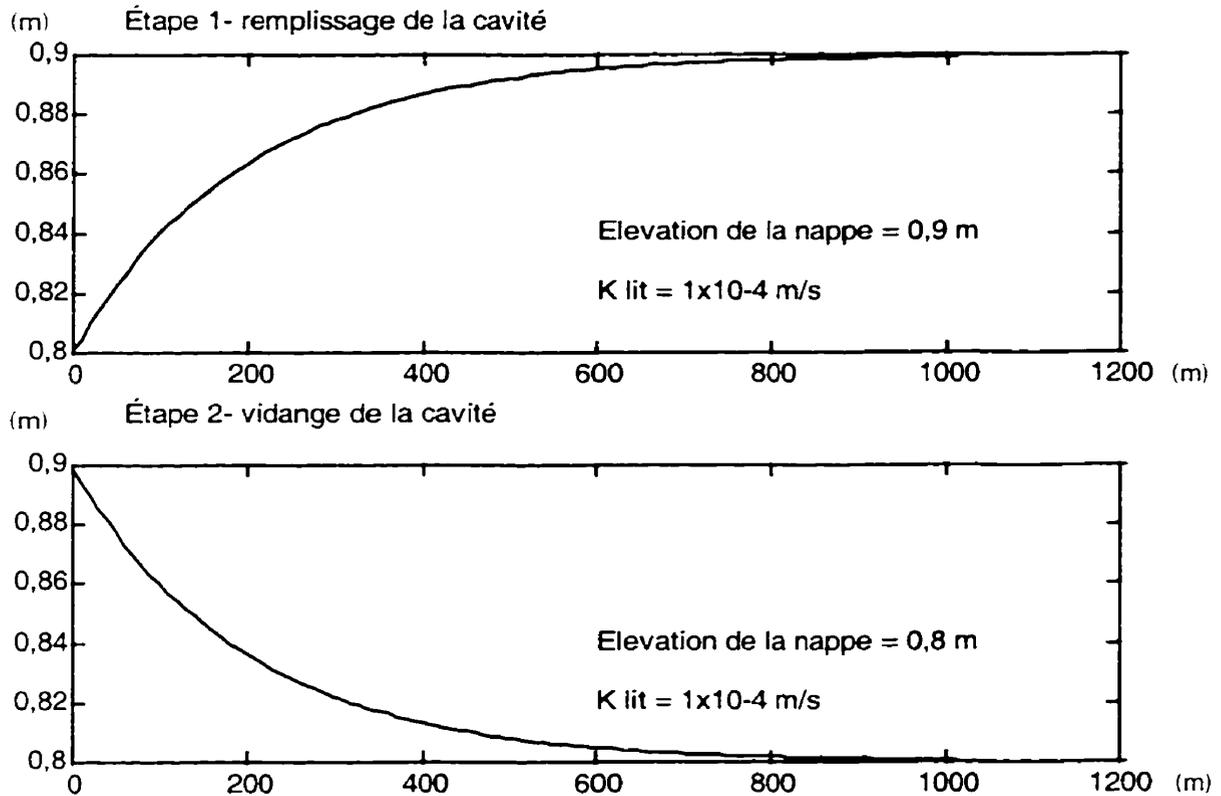


Figure 6.1 Élévation de la surface libre en fonction du temps, en permettant les échanges avec la nappe phréatique

La deuxième partie de la simulation est l'inverse de la première, la nappe souterraine est à l'élévation 0,8 m et le plan d'eau à l'élévation 0,9 m. Le résultat inverse est ainsi obtenu, confirmant le bon comportement du modèle d'écoulement à surface libre à

l'ajout des termes sources. Cet exemple constitue un des tests les plus simples qui pouvait être réalisé à partir du modèle, puisqu'il n'y a aucune vitesse, ni pente de la surface libre. En conséquence, les termes sources ont tous la même valeur et le niveau du plan d'eau augmente de façon homogène sur tout le domaine.

6.2 Écoulement dans un canal rectangulaire

Le calcul de la courbe de remous d'un canal rectangulaire a été réalisé, pour différentes conditions, de façon à s'assurer du bon comportement du modèle et à vérifier la sensibilité des différents paramètres. Le premier calcul a été réalisé en considérant un canal rectangulaire de 470 m de longueur, par 30 m de largeur ayant un débit de 22,5 m³/s à sa limite amont et une élévation de la surface libre de 0,5 m imposée à la limite aval. L'élévation de la nappe phréatique est maintenue à 0,5 m, tandis que la conductivité hydraulique du lit est variée pour chacun des essais entre 0 et 0,01 m/s (Figure 6.2).

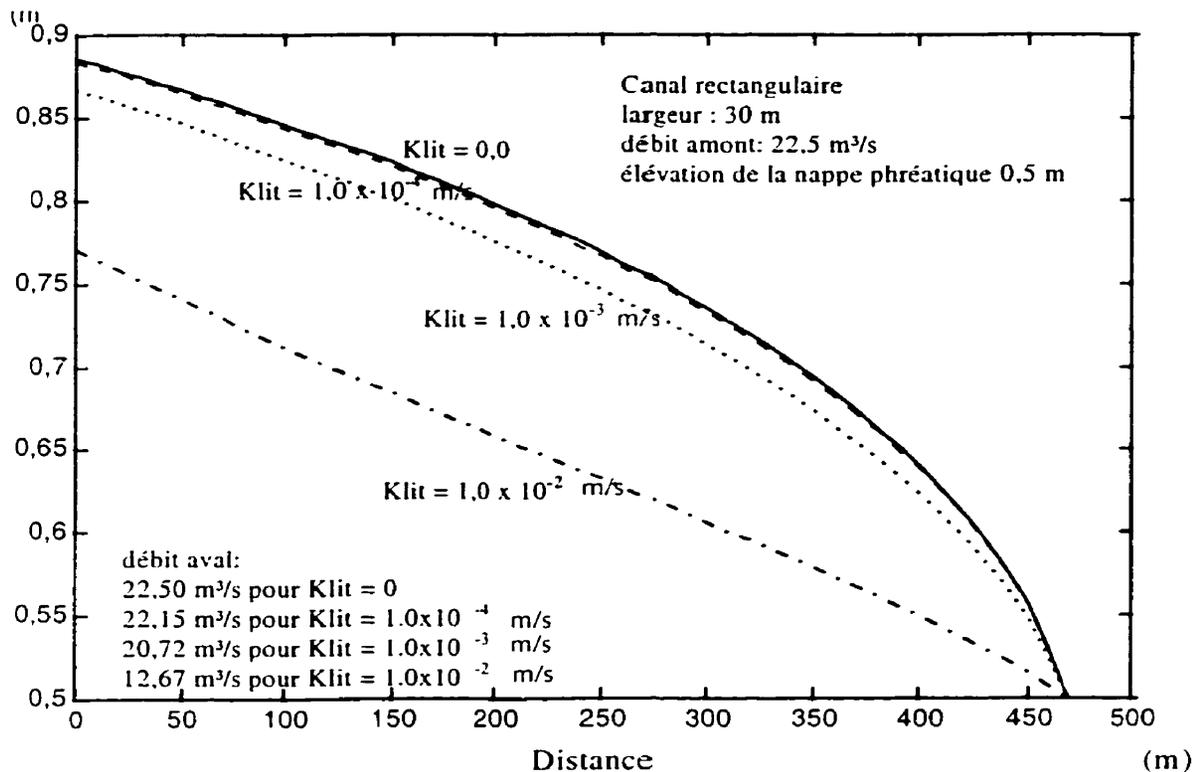


Figure 6.2 Calcul de la courbe de remous dans un canal rectangulaire, avec prise en compte des infiltrations dans le sol

Les résultats montrent que le débit à l'extrémité aval est plus faible que le débit imposé à l'amont et que le niveau d'eau à la frontière amont diminue proportionnellement aux pertes par infiltration. Les pertes de débit calculées entre l'amont et l'aval s'établissent à 0,65 m³/s, 1,78 m³/s, 12,3 m³/s, tandis que le rabattement du niveau amont s'établit à 0,1 cm, 1,6 cm et 21,2 cm, pour des conductivité hydrauliques respectives de 1x10⁻⁴ m/s, 1x10⁻³ m/s et 1x10⁻² m/s.

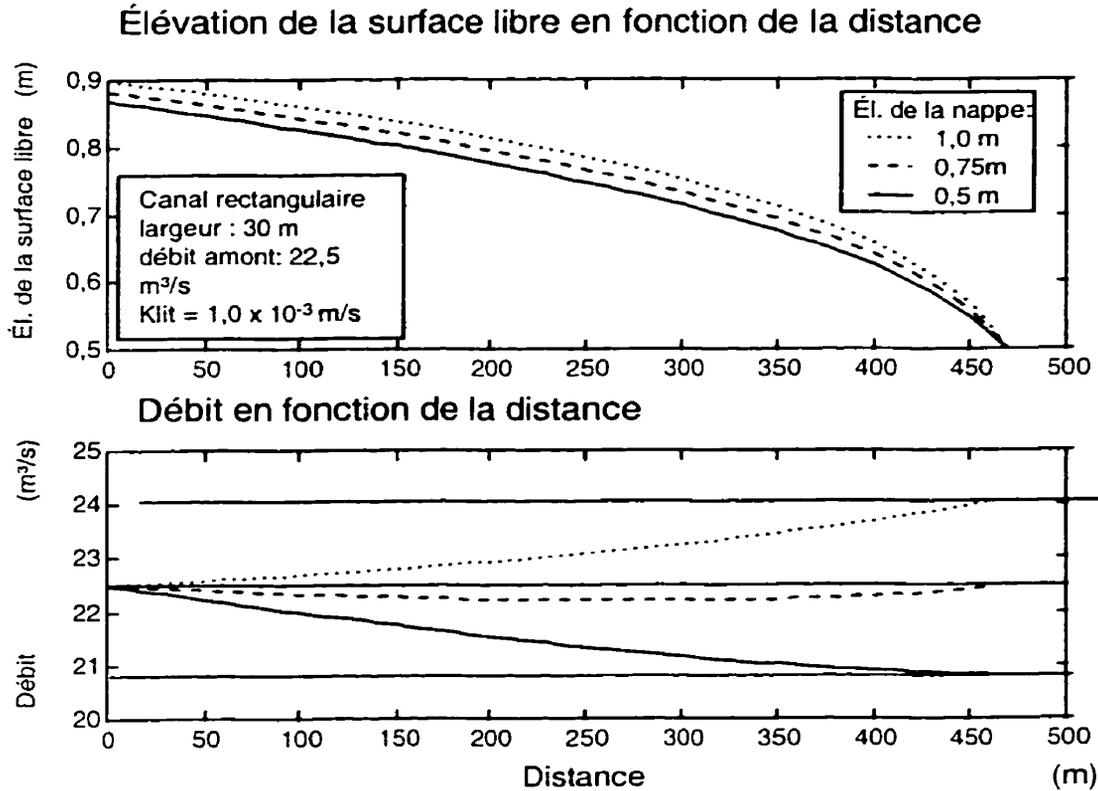


Figure 6.3 Influence des fluctuations de la nappe phréatique sur l'écoulement dans un canal rectangulaire

Le même calcul a été repris en considérant différentes élévations de la nappe phréatique, avec une conductivité hydraulique de 1×10^{-3} m/s (Figure 6.3). Lorsque la nappe phréatique est située à l'élévation 1 m, le comportement inverse de l'essai précédent est observé, le niveau d'eau augmente légèrement et le débit augmente d'environ 1,5 m³/s. Par ailleurs, lorsque le niveau de la nappe est fixé à 0,75 m, le secteur amont du cours d'eau, située au dessus de cette élévation subit des pertes par infiltration, tandis que dans le secteur aval, le débit augmente, puisque le niveau d'eau est inférieur à celui de la nappe phréatique. De telle sorte qu'à l'extrémité aval, le débit redevient égal au débit imposé à la limite amont, alors qu'il a été plus faible, sur toute la

longueur du cours d'eau. Deux des cas simulés sont illustrés à la figure 6.4 , où le canal est rechargé en a) et le canal recharge l'aquifère en b).

Pour chacun de ces essais, le modèle s'est avéré conservatif, le débit imposé à l'amont étant égal à la somme du débit de sortie et des débits à chacun des termes source.

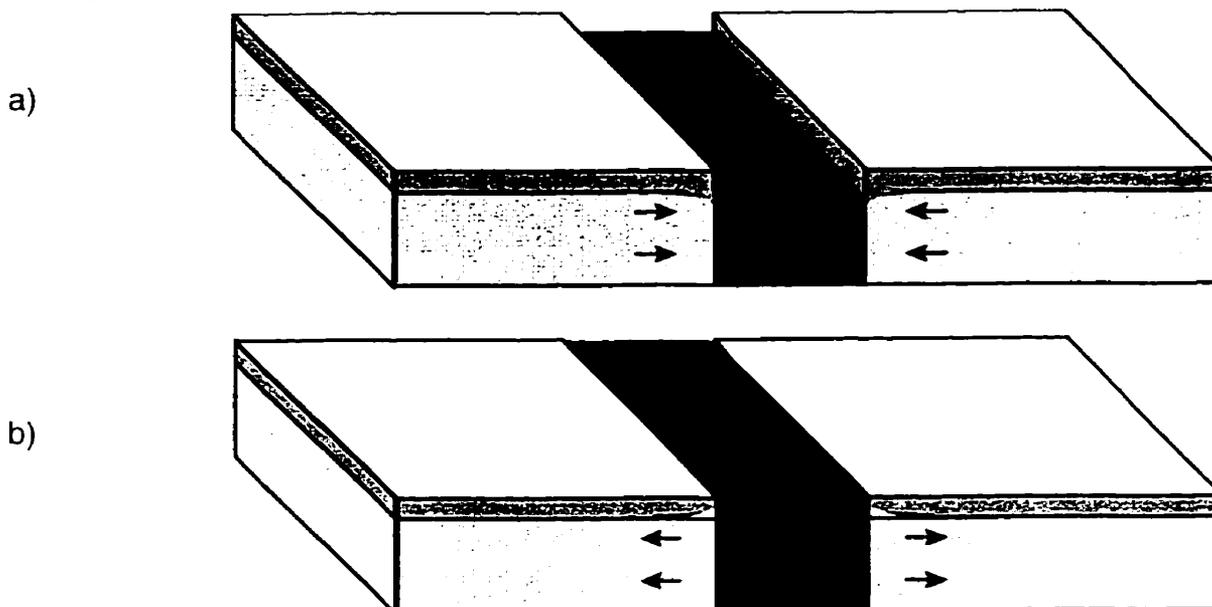


Figure 6.4 a) Recharge du canal b) Recharge de l'aquifère

6.3 Application du modèle

Le modèle a été appliqué à un cas d'analyse concret, permettant de mettre en valeur les caractéristiques bidimensionnelles de la méthode. Il s'agit d'évaluer l'évolution du débit de base en fonction du temps, sur un bassin versant de 235,5 km², d'une largeur maximale de 19,5 km par une longueur de 18,9 km, ayant une dénivelée maximale de 53 m. Ce bassin est drainé par une rivière d'une longueur de 12,9 km.

La discrétisation géométrique utilisée pour le modèle d'écoulement à surface libre correspond à une grille rectangulaire de 35 nœuds par 21 selon les axes x et y, espacés respectivement à 400 et 300 m. Le maillage irrégulier de 1273 éléments, permettant une représentation adéquate du pourtour de l'aquifère drainé par la rivière, a été constitué à partir de tous les nœuds de la grille et de 405 nœuds localisés de façon à limiter la longueur maximale d'arête à 1200 m (figure 6.5).

La conductivité hydraulique (K) de l'aquifère a été posée à 1×10^{-4} m/s, le coefficient d'emmagasinement non confiné (S) à 0,1 et la conductivité hydraulique du lit du cours d'eau à 1×10^{-5} m/s. Le coefficient de rugosité du lit du cours d'eau a été spécifié par une valeur uniforme du n de Manning à 0,025. La bathymétrie du lit du cours d'eau est relativement plane (Figure 6.5), à l'exception de la baie située à l'extrémité amont, où la pente du fond est de l'ordre de 0,01% et de l'exutoire, où il y a présence d'un haut fond.

Le domaine à l'étude a été constitué à partir d'un mélange de données réelles et hypothétiques, de façon à simuler des conditions réalistes, tout en choisissant une superficie et les paramètres de façon à réduire le temps requis pour le calcul. Ainsi, l'utilisation d'une valeur de conductivité hydraulique élevée permet de réduire le temps de simulation, tandis qu'une valeur élevée pour le coefficient d'emmagasinement permet d'augmenter le débit pouvant être soutiré pour le rabattement prévu.

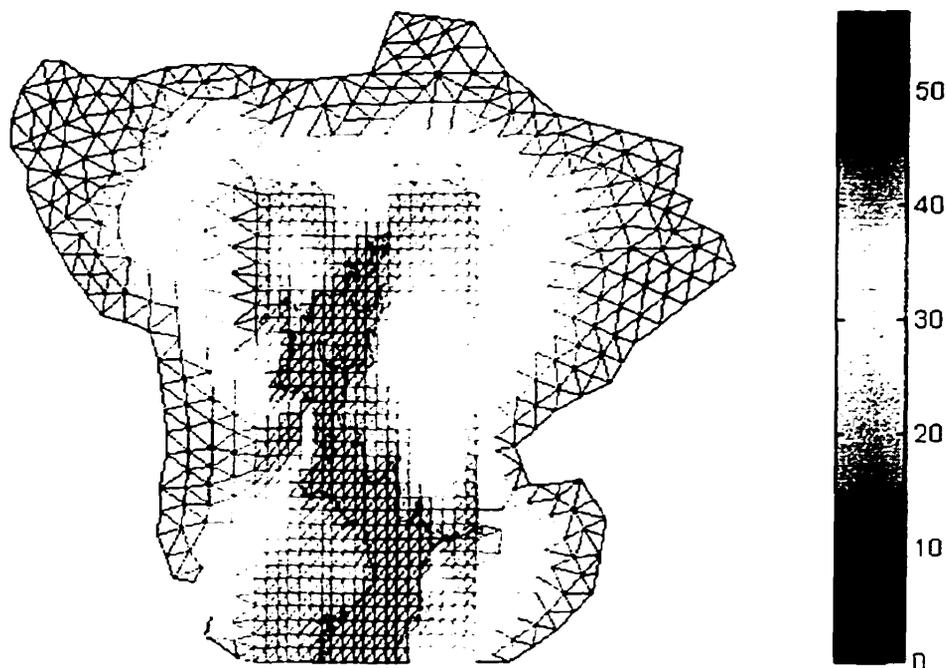


Figure 6.5 Maillage couplé utilisant une grille de différences finies superposée à un maillage d'éléments finis triangulaires; topographie (m)

La simulation a été réalisée en considérant une élévation uniforme de la nappe phréatique initiale à 5 m et une élévation de la surface libre du cours d'eau à 2,5 m. Une condition frontière d'imperméabilité a été appliquée sur le pourtour, à l'exception de l'exutoire du cours d'eau, où le niveau d'eau a été imposé à une valeur constante de 2,5 m tout au long de la simulation.

Les incréments de temps ont été fixés de façon à maintenir la valeur du critère de Courant égale à l'unité, correspondant à des pas de temps de l'ordre de 60 s, pour le modèle d'écoulement à surface libre, tandis que des pas de temps d'une valeur maximale de 3600 secondes ont été utilisés pour le modèle d'écoulement souterrain.

Certains essais ont été réalisés avec un pas de temps plus grand, mais le nombre d'itérations augmentait et aucun gain net de temps de calcul n'a été obtenu. Un critère de tolérance basé sur la somme des flux à travers l'interface a été utilisé pour vérifier si l'écoulement à surface libre devait être recalculé entre deux pas de temps d'écoulement souterrain, sa valeur a été fixée à $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$. Ainsi lorsque la variation du débit à travers le lit du cours d'eau ne dépassait pas la tolérance, les conditions d'écoulement à surface libre n'étaient pas calculées à nouveau à moins qu'un état permanent n'ait pas été atteint auparavant.

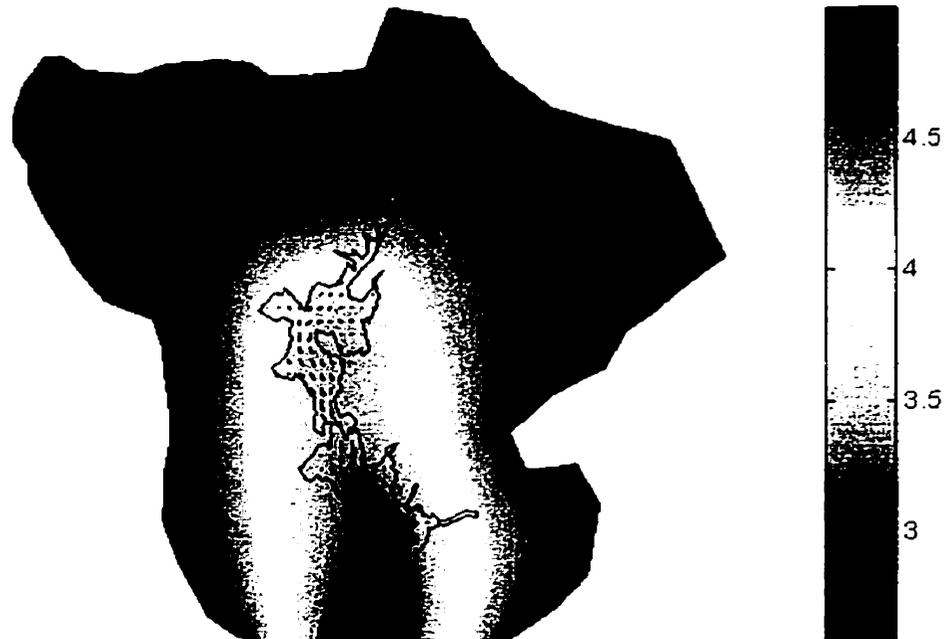


Figure 6.6 Élévation de la nappe phréatique (m) et vecteurs vitesses d'écoulement obtenus au temps $t = 10$ jours.

Les résultats obtenus au bout de 10 jours de simulation montrent déjà un rabattement assez important de la nappe souterraine, particulièrement à proximité de l'exutoire, où l'aquifère est étroit, l'élévation de la surface libre la plus basse et les gradients maximaux. (Figure 6.6) La variation spatiale du débit à travers le lit du cours d'eau montre l'intensité relative des interactions entre l'aquifère et le cours d'eau. (Figure 6.7) La valeur du débit spécifique triple entre l'exutoire du cours d'eau et son extrémité amont, en raison du rabattement important du niveau de la nappe à l'exutoire du domaine, à cet instant.

Le débit s'écoulant dans le cours d'eau a été calculé à quelques sections transversales pour illustrer l'importance des apports souterrains dans le cas traité. (Figure 6.8) Après dix jours de simulation le débit du cours d'eau est de 13,35 m³/s à son exutoire.

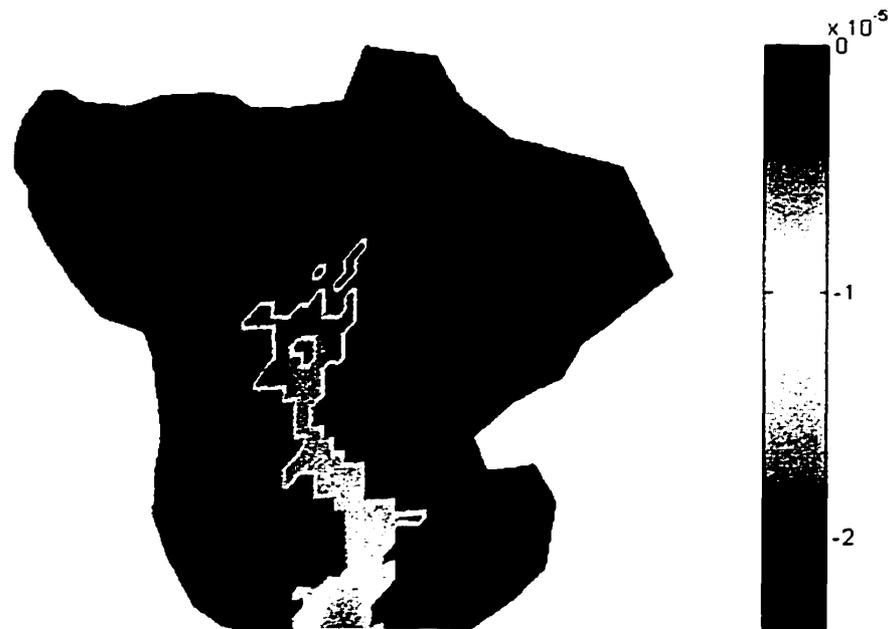


Figure 6.7 Débit spécifique (m/s) à travers le lit du cours d'eau au temps $t=10$ jours

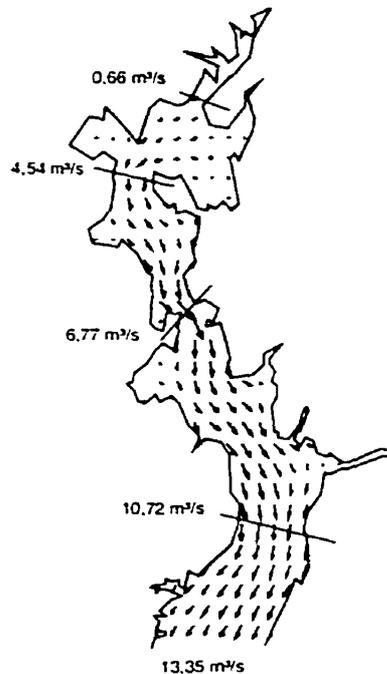


Figure 6.8 Évolution du débit le long de la rivière après dix jours de simulation

Au cours de la simulation le débit à l'exutoire du modèle a évolué de près de $24 \text{ m}^3/\text{s}$ après quelques minutes, jusqu'à $0,12 \text{ m}^3/\text{s}$ lorsque la simulation a été interrompue soit après 200 jours (Figure 6.9). La simulation n'était pas complètement terminée à 200 jours, étant donné que la nappe n'avait pas atteint une valeur uniforme de 2,5 m. Les cent derniers jours de la simulation ont permis de réduire le débit de $0,71 \text{ m}^3/\text{s}$ à $0,12 \text{ m}^3/\text{s}$, toutefois, étant donné le comportement asymptotique de la simulation, elle n'a pas été poursuivie.

Le volume d'eau disponible dans l'aquifère a été calculé à différents instants par le produit de l'intégration sous la surface de la nappe et du coefficient d'emmagasinement de l'aquifère (Figure 6.10).

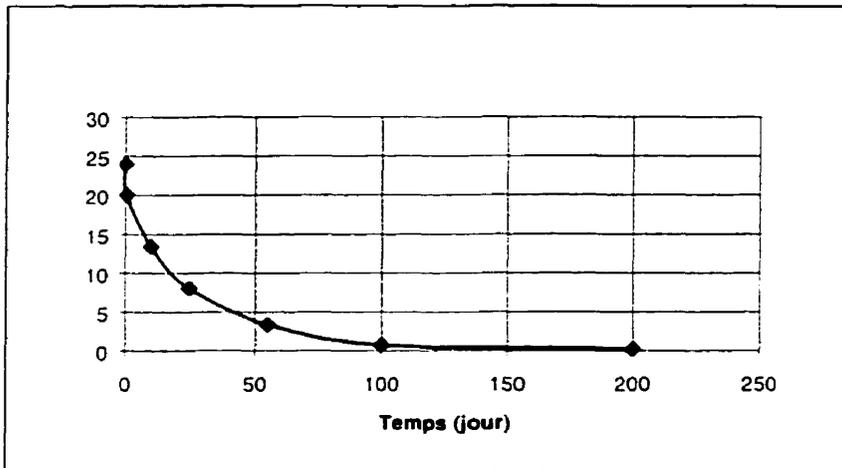


Figure 6.9 Évolution du débit du cours d'eau

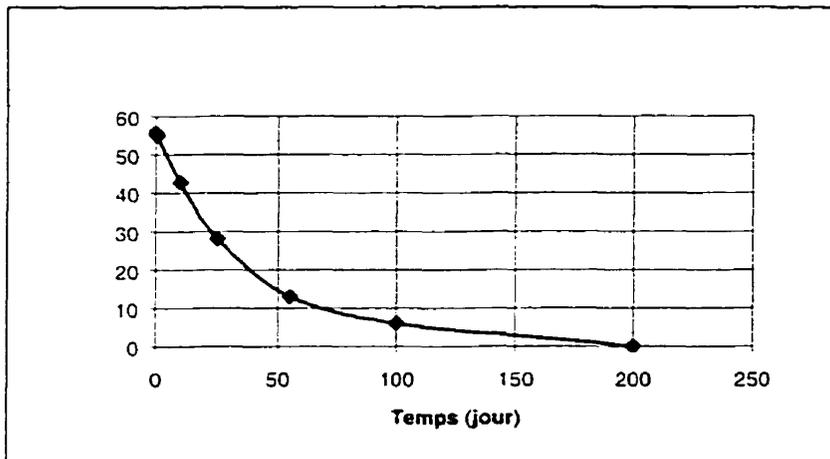


Figure 6.10 Récession de l'aquifère

L'analyse de la conservation de la masse au cours de la simulation montre une perte de l'ordre 1,6 % en comparant le volume d'eau initial à l'intégration dans le temps du débit à l'exutoire. Cet écart est faible étant donné la durée de la simulation. Les deux modèles s'étant avérés plus conservatifs dans les cas de validation réalisés, il est possible qu'une partie de l'écart soit attribuable à la méthode de calcul du bilan, étant donné qu'il a été établi en intégrant sous la courbe à partir de seulement six valeurs de débits à l'exutoire, ou à la valeur du critère de tolérance sur le débit.

Conclusion

Les écoulements souterrains et les écoulements à surface libre peuvent être représentés par des modèles mathématiques simplifiant la réalité. Étant donné que l'écoulement de l'eau est continu entre le sol et les cours d'eau, il est des situations où les modèles doivent être couplés pour pouvoir quantifier les échanges. C'est le cas lors des étiages, au cours desquels les cours d'eau sont rechargés par les aquifères ainsi que lors des crues, où les cours d'eau rechargent les aquifères.

Le modèle développé permet une représentation bidimensionnelle plane des écoulements à surface libre et souterrain. Cette représentation permet d'analyser des conditions d'écoulement plus complexes que les approches traditionnelles utilisant des modèles d'écoulement à surface libre unidimensionnel décrits dans la revue de l'état de l'art.

Différents test de validation et applications ont été réalisés à partir du modèle développé. Les résultats ont montré un comportement robuste des modèles dans des cas difficiles à simuler. Une simulation d'écoulement régional réalisée sur un petit bassin versant a permis de reproduire le phénomène de récession de l'hydrogramme et de tarissement de la nappe. Le maillage a été réalisé en incorporant les nœuds de la grille de différences finies du modèle d'écoulement à surface libre au maillage irrégulier du modèle d'écoulement souterrain. La simulation, échelonnée sur deux cents jours a requis environ une semaine de temps de calcul à partir d'un ordinateur de type Pentium 100. Le bilan hydrologique global de la simulation présente une erreur inférieure à 2 %, ce qui est raisonnable compte tenu du type de simulation réalisé.

Un aspect intéressant pour la suite de ce projet consisterait à utiliser un modèle de qualité de l'eau permettant d'intégrer l'ensemble des données produites par le modèle

d'écoulement pour réaliser des modélisations du régime thermique ou de transport de contaminant entre l'eau souterraine et un cours d'eau.

Références

ABBOT, M.B., BATHURST, J.C., CUNGE, J.A., O'CONNEL, P.E., RASMUSSEN, J. (1986). An introduction to the European hydrological system, 2 - Structure of a physically based, distributed modelling system. Journal of hydrology, vol 87, pp 61-77.

AKAN, A.O., YEN, B.C. (1981). Mathematical model of shallow water flow over porous media. Journal of the hydraulics division, ASCE, vol 107 HY4, pp. 479-493.

ACKERER, P., ESTEVES, M. KOHANE, R. (1991). Computational methods in subsurface hydrology, Wiley, pp. 69-75.

AMERICAN SOCIETY OF AGRICULTURAL ENGINEERS (1982). Hydrologic modeling of small watersheds, Water resources publications, 533 pages.

BEAR, J. (1979). Hydraulics of groundwater, McGraw Hill series in water resources and environmental engineering, 567 pages.

BOUDREAU, P., LECLERC, M. (1994). Linking 1D and 2D finite element models of free surface flow with a multiple constraints imposition method. Computational methods in surface hydrology, pp. 125-132.

CELIA, M.A., BOUTOULAS, E.T., BINNING, P. (1991). Numerical methods for nonlinear flows in porous media. Computational methods in subsurface hydrology, pp. 145-150.

CHADWICK, A., MORFETT, J. (1993). Hydraulics in civil and environmental engineering, second edition. E & FN Spon, 557 pages.

CHAUDHRY, H. (1993). Open channel flow, Prentice Hall, 480 pages.

CUNGE, J.A., HOLLY, F.M. & VERWEY, A. (1980). Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman publishing, p 94.

CUNNINGHAM, A.B., SINCLAIR, P.J. (1979). Application and analysis of a coupled surface and groundwater model. Journal of hydrology, vol 43, pp. 129-148.

CREBAS, J.I., GILDING, B.H., WESSELING, J.W. (1984). Coupling of groundwater and open channel flow, Journal of hydrology, vol 72, pp 307-330.

FALCONER, R.A., CHEN, Y. (1991). An improved representation of flooding and drying and wind stress effects in a two-dimensionnal numerical model. Proceedings of Institution of Civil Engineers, vol 91, pp 659-678.

FERRICK, M.G., MULHERIN, N.D., Calkins, D.J. (1995). Analysis of the winter low-flow balance of the semiarid White river, Nebraska and South Dakota. Water resources research, vol. 31(8), pp. 1999-2009.

FREEZE, R.A. (1975). Mathematical model of hillslope hydrology, McGraw-Hill, pp. 182-225.

FREEZE, R.A. (1972). Role of subsurface flow in generating surface runoff 1. Base flow contributions to channel flow. Water resources research, Vol. 8 (3), pp. 609-623.

GARCIA, R., Kahawita, R. (1986). Numerical solutions of the Saint-Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme. International journal for numerical methods in fluids, vol 6, pp 259-274.

HARR, M.E. (1962), Groundwater and seepage, McGraw-Hill book Co., New-York.

HYDROLOGIC ENGINEERING CENTER, CORPS OF ENGINEERS, HEC-2, water surface profiles : users manual. U.S. Army, 287 pages.

KRAEGER ROVEY, C.E. (1975). Numerical model of flow in a stream-aquifer system, Hydrology papers, Colorado State University, 73 pages.

LECLERC, M., BELLEMARE, J.F. & TRUSSARD, S. (1990). Simulation hydrodynamique de l'estuaire supérieur du fleuve Saint-Laurent avec un modèle aux éléments finis couvrant-découvrant, Revue canadienne de génie civil, vol 17, pp. 739-751.

LECLERC, M., BOUDREAU, A., BECHARA, J.A., CORFA, G. (1995). Two-dimensional hydrodynamic modeling : a neglected tool in the instream flow incremental methodology, Transactions of the american fisheries society, vol 124, pp. 645-662.

LECLERC, M. DHATT, G., ROBERT, J.L., TESSIER, J.C., SOULAÏMANI, A., DUPUIS, P., MATTE, Y. (1987). Modélisation des écoulements de l'archipel de Montréal par éléments finis : Aspects divers de l'application. Revue internationale des sciences de l'eau, vol. 3, no 2, mai 1987, pp 41-56.

MACCORMACK, ROBERT W. (1969). The effect of viscosity in hypervelocity in impact cratering, AIAA paper no 69-354, 7 p.

MOREL-SEYTOUX, H.J., DALY, C.J. (1975). A discrete kernel generator for stream-aquifer studies. Water resources research, Vol. 11(2), pp. 253-260.

MOREL-SEYTOUX, H.J. (1975). A combined model of water table and river discharge evolution. Water resources research, Vol. 11(6), pp. 968-972.

NIELD, S.P., TOWNLEY, L.R. , BARR, A.D. (1994). A framework for quantitative analysis of surface water-groundwater interaction : flow geometry in a vertical section, Water resources research. Vol. 30 (8), pp. 2461-2475.

PERKINS, S.P., KOUSSIS, A.D. (1996). Stream-aquifer interaction model with diffusive wave routing, Journal of hydraulic engineering, Vol. 122(4), pp. 210-218.

PHILIP, J.R. (1957). The theory of infiltration :1The infiltration equation and its solution, Soil sciences, 83, pp. 345-357.

PINDER, G.F., BREDEHOEFT, J.D. (1968). Application of the digital computer for aquifer evaluation. Water resources research, vol 4(5), pp 1069-1093.

PINDER, G.F., ELLIS, J. (1990). Numerical simulation of overbank flooding. International conference on river flood hydraulics, Wiley, pp. 403-412.

PINDER, G.F., GRAY, W.G. (1977). Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic Press, 295 p.

PINDER, G.F., SAUER, S.R. (1971). Numerical simulation of flood wave modification due to bank storage effects. Water resources research, vol 7(1), pp 63-70.

POLUBARINOVA-KOCHINA, P.Y. (1962). Theory of ground water movement, Princeton Univ. Press.

KLUTE, A., SCOTT, E.J., WHISLER, F.D. (1965). Steady-state water flow in an saturated inclined soil slab, Water resources research, vol 1(2), pp 287-294.

KRIZ,H. (1972). Statistical processing of long-term observations of groundwaters. Journal of hydrology, Vol 16(1), pp 17-37.

REMSOM, I., HORNBERGER, G., MOLZ, F.J. (1971). Numerical methods in subsurface hydrology, with an introduction to the finite-element method, Wiley-intersciences, 389 pages.

RICHARDS, L. A. (1931). Capillary conduction through porous mediums. Physics 1 :313-318.

REISENAUR, A.E. (1963). Methods for solving problems of multidimensionnal partially saturated steady flow in soils. Journal of geophysical research, 68, pp 5725-5733.

SAMUELS, P.G. (1990), Cross-section location in 1-D models. International conference on river flood hydraulics, Wiley, pp 351-358.

SOPHOCLEOUS, M., PERKINS, S. (1993). Calibrated models as management tools for stream-aquifer systems : the case of central Kansas, USA. Journal of hydrology, vol. 152, pp. 31-56.

THIEL, T.J., VIMOKE, B.S., TAYLOR, G.S. (1962). Instrumentation and fabrication of an electrical resistance network for studying moisture flow problems. J. Agric. Eng. Res., vol 7(4), pp 323-327.

TURNER, J. Interaction between groundwater and surface water,
<http://www.dwr.csiro.Au/groundwater /surface/surface.html>

VAN GENUCHTEN J. (1981). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, Soil sciences american journal, vol 44, pp 892-898.

WANAKULE, N. (1995). A lumped parameter model for the Edwards aquifer,
<http://www.eardc.swt.edu/ edwards/model/NLPmodel.html>

Annexe 1

Application de la méthode des différences finies

La résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles nécessite le passage de l'équation différentielle vers un système d'équations algébriques exprimant les relations entre les valeurs des variables dépendantes en un point et leurs valeurs aux points situés dans le voisinage de ce point à un instant donné. En spécifiant les conditions frontières et les valeurs initiales nécessaires, il est possible de résoudre ce système d'équations pour un nombre discret de points et d'intervalles de temps. La discrétisation spatiale du domaine est formée par une grille généralement régulière constituée de cellules à l'intérieur desquelles une approximation des variables dépendantes sera effectuée. La précision des approximations varie avec la densité de la discrétisation spatiale selon la taille des intervalles $(\Delta x, \Delta y)$ et avec la discrétisation temporelle selon le pas de temps (Δt) . De plus, à l'erreur d'approximation, vient s'ajouter l'erreur de troncature qui est inhérente à la méthode utilisée pour la résolution. La méthode des différences finies provient de l'expansion en série de Taylor des équations à résoudre et l'erreur de troncature dépend de l'ordre des termes négligés de la série.

Soit une fonction $f=f(x)$ assez régulière pour être dérivée en série de Taylor :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_x + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_x + \dots \quad (\text{éq. A.1})$$

En réorganisant les termes :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_x = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{éq. A.2})$$

L'approximation en différence avant de la dérivée de la fonction f selon x est obtenue avec une erreur de troncature du premier ordre. De la même façon, une équation de différence arrière peut-être obtenue :

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_x - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_x + \dots \quad (\text{éq. A.3})$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_x = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{éq. A.4})$$

Les équations A.1 et A.3 peuvent maintenant être utilisées en combinaison linéaire pour définir une différence centrée pour la dérivée du premier ordre (éq. A.5 = éq. A.3 - éq. A.1) ou la dérivée du second ordre (éq. A.6 = éq. A.3 + éq. A.1)

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_x = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{éq. A.5})$$

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_x = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{éq. A.6})$$

Il est donc possible de remplacer chacune des dérivées spatiales d'une équation aux dérivées partielles par une équation de différence finie, toutefois, il faut aussi considérer les dérivées dans le temps vers l'avant (éq. A.7) ou l'arrière (éq. A.8):

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=k\Delta t} = \frac{f^{k+1} - f^k}{\Delta t} \quad (\text{éq. A.7})$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=k\Delta t} = \frac{f^k - f^{k-1}}{\Delta t} \quad (\text{éq. A.8})$$

Il est maintenant possible d'utiliser les différences finies avec une équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{éq. A.9})$$

L'équation A.9 permet de décrire les écoulements souterrain dans un sol homogène ($T_x = T_y$ et $q = 0$ dans l'éq. 3.1).

Il est possible de remplacer chacune des dérivées de l'équation A.9 par des différences et si la dérivée temporelle est remplacée par une différence avant (éq. A.7), un schéma explicite est obtenu (éq. A.10). En considérant les rangées (i) et les colonnes (j) de la

grille orientées respectivement selon les axes x et y et les valeurs de la variable dépendante (H) connue au pas de temps k.

$$\frac{H_{i-1,j}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j-1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j+1}^k}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (\text{éq. A.10})$$

Étant donné que toutes les valeurs de H au pas de temps k sont connues, il est possible de déterminer la valeur de H au pas de temps k+1 en résolvant simplement l'équation A.10 à chacun des noeuds de la grille. Le schéma est dit explicite parce que la valeur de H^{k+1} dépend uniquement des valeurs de H^k . Cette caractéristique le rend très simple à utiliser, toutefois, la stabilité du schéma est soumise au critère de stabilité de Courant, qui s'énonce dans ce cas comme suit :

$$\frac{T}{S} \left[\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \right] \leq \frac{1}{2} \quad (\text{éq. A.11})$$

Si les intervalles choisis font en sorte que le critère de stabilité n'est pas respectée, l'erreur peut augmenter et la solution ne pourra converger. L'utilisation d'un schéma explicite amène donc une restriction sévère dans le choix des intervalles. Il est possible d'utiliser un schéma qui n'est pas sujet à de telles restrictions, il s'agit du schéma implicite. Pour construire un schéma implicite, il faut utiliser une différence arrière pour l'approximation de la dérivée temporelle et la forme suivante est obtenue :

$$\frac{H_{i-1,j}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j-1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (\text{éq. A.12})$$

Étant donné que les valeurs de H sont inconnues au pas de temps k+1, l'équation A.12 contient 5 inconnues. Mais en écrivant cette équation pour chacun des noeuds de la grille, un système d'équations comportant autant d'équations que d'inconnues pourra être construit. En imposant les conditions frontières appropriées, il sera possible de

résoudre ce système à partir de méthodes de résolution matricielle. Le schéma implicite est inconditionnellement stable et sa précision est de l'ordre de $O(\Delta t)$.

Il est possible d'utiliser un schéma permettant de pondérer la solution entre l'explicite et l'implicite, il s'agit du schéma implicite généralisé (éq. A.13).

$$\frac{\lambda(H_{i-1,j}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i+1,j}^{k+1}) + (1-\lambda)(H_{i-1,j}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i+1,j}^k)}{(\Delta x)^2} + \frac{\lambda(H_{i,j-1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}) + (1-\lambda)(H_{i,j-1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j+1}^k)}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (\text{éq. A.13})$$

Lorsque le coefficient de pondération λ est nul, le schéma est explicite et correspond à l'éq. 18, en revanche s'il est égal à l'unité, le schéma correspond à l'équation A.20. De plus, en choisissant une valeur de $\lambda=1/2$, certains termes de troncature s'annulent et il peut être démontré que l'erreur passe de $O(\Delta t)$ à $O(\Delta t)^2$, tout en conservant un schéma inconditionnellement stable, cette situation correspond au schéma de Crank-Nicholson (Reisenauer, 1963).

La résolution du système d'équations obtenu à partir d'un schéma implicite exige l'utilisation de méthode de résolution matricielle.

Traitement des conditions aux frontières :

Il a été plusieurs fois question de l'imposition des conditions aux frontières nécessaires à la résolution des modèles, il serait important de définir les types de conditions frontières qui seront disponibles dans chacun des modèles.

Écoulement souterrain

Condition de Dirichlet :

Ce type de condition frontière permet de fixer la valeur d'une inconnue primaire du système (h par exemple). Ce qui correspond à fixer l'élévation de la nappe phréatique en un point. Cette condition est très utilisée pour spécifier la hauteur connue de façon ponctuelle (puits d'observation) ou continue (bordure d'un lac). En fixant ainsi la charge en un ou plusieurs points, c'est le modèle qui détermine le flux à ces endroits.

Condition de Neumann :

Ce type de condition frontière permet de fixer la valeur d'une inconnue secondaire du système (dérivée d'une inconnue primaire, flux). Ceci permet de spécifier le flux à un noeud ou le flux normal à une face d'un élément. Son utilisation en écoulement souterrain est généralement reliée à l'imposition d'une frontière imperméable ($\text{flux} = 0$), telle qu'une ligne de partage des eaux. Le flux provenant de puits de pompage ou d'injection sera imposé par l'ajout de termes source. Par ailleurs, l'infiltration provenant de la précipitation peut aussi être modélisée en imposant une condition de type Neumann, il en va de même pour toute frontière où le flux est connu.

Annexe 2

Validation du modèle d'écoulement à surface libre

Validation et application du modèle d'écoulement à surface libre

De façon à vérifier, la capacité du modèle à simuler des écoulements à surface libre, une série de tests de validation et d'application a été réalisée.

- formation d'un ressaut hydraulique;
- écoulement dans un étranglement;
- séchage des berges avec une bathymétrie complexe ;
- écoulement dans une passe migratoire de type « rivière aménagée » ;

Formation d'un ressaut hydraulique

Le modèle d'écoulement à surface libre utilisé permet de simuler des écoulements en régime fluvial et torrentiel, de même que les transitions entre ces régimes. La transition du régime torrentiel au régime fluvial provoque nécessairement l'apparition d'un ressaut hydraulique, où une quantité d'énergie est dissipée, mais la quantité de mouvement conservée.

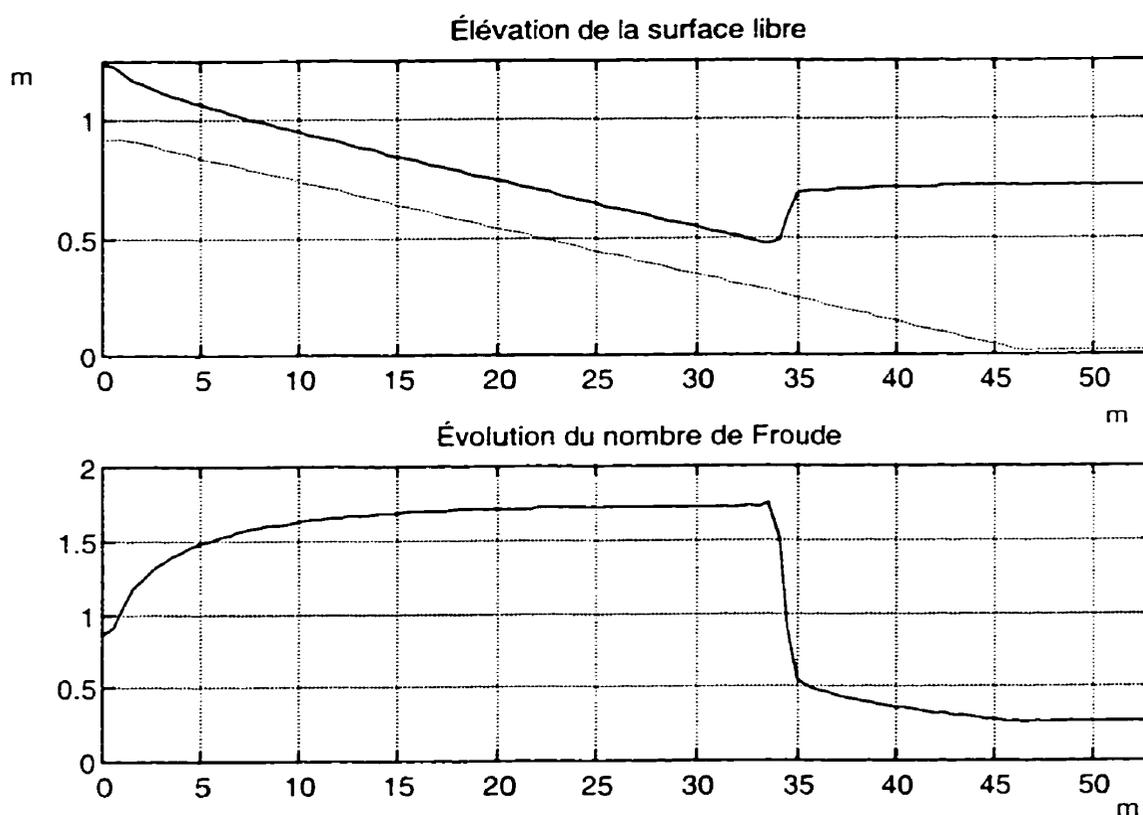


Figure A.1 Élévation de la surface libre et nombre de Froude en fonction de la distance.

Le résultat de simulation présenté à la figure A.1 illustre cette situation. Un débit unitaire de $0,4 \text{ m}^2/\text{s}$ est imposé à l'amont d'un canal à pente nulle de 1 m de longueur. Ce canal se poursuit avec une pente de 2%, sur une longueur de 45 m, puis sur un tronçon plat de 10 m de longueur à l'extrémité duquel une profondeur constante de 0,7 m est imposée. Les conditions frontières imposées correspondent aux types de conditions requises dans le cas d'un écoulement fluvial, ce qui est approprié, puisque les conditions d'écoulement sont de ce type à chaque extrémité, telle que l'indique la figure du bas, où l'on peut constater que les valeurs respectives du nombre de Froude aux extrémités amont et aval sont de l'ordre de 0,8 et 0,25.

Les conditions initiales imposées au modèle consiste en une profondeur uniforme de 0,7 m et des vitesses d'écoulement nulles. Les coefficients de rugosité (n de Manning) ont été fixés à une valeur de 0,02. La discrétisation géométrique consiste en des intervalles de 0,5 m, tandis que la taille des incréments de temps a été ajustée de façon automatique par le modèle au cours de la simulation pour maintenir la valeur maximale du critère de Courant à 0,9.

Lorsque la simulation démarre, l'eau dévale rapidement la pente sous la forme d'une intumescence négative et la profondeur de même que la pente de la surface libre augmentent au pied de la pente, ce qui a pour effet d'accélérer l'écoulement vers l'exutoire. Un ressaut hydraulique se forme alors aux environs du pied de la pente (à 43 m). Ce ressaut remonte ensuite progressivement la pente jusqu'à sa position finale, à 34 m de la frontière amont, tel que le montre la figure A.1, où l'on peut constater la diminution très rapide du nombre de Froude à la position du ressaut.

Cet exemple a permis de vérifier plusieurs aspects intéressants montrant le bon comportement du modèle, soit : la formation du ressaut hydraulique, l'atteinte de la profondeur critique à la cassure à l'amont de la pente raide, l'atteinte de la profondeur normale torrentielle dans la pente raide, des profondeurs conjuguées appropriées pour

le ressaut hydraulique, de même que l'absence d'oscillations numériques autour du ressaut.

La profondeur normale d'écoulement est maintenue à 0,202 m entre les positions 22 et 34 m, il est possible de vérifier l'exactitude de cette valeur à partir de l'équation de Manning (éq A.14).

$$q = \frac{y \left(\frac{y}{1+2y} \right)^{2/3} S_o^{1/2}}{n} \quad \text{avec} \quad 0,4 = \frac{y \left(\frac{y}{1+2y} \right)^{2/3} 0,02^{1/2}}{0,02} \quad (\text{éq. A.14})$$

La profondeur d'écoulement obtenue par le modèle à la cassure de pente est égale à 0,254 m tandis que la valeur de la profondeur critique (y_c) calculée de façon analytique donne :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{0,4^2}{9,81}} = 0,253 \text{ m} \quad (\text{éq. A.15})$$

Les profondeurs conjuguées calculées par le modèle correspondent à 0,220 m et 0,429 m, respectivement à l'amont et l'aval du ressaut. Le rapport entre ces deux profondeurs peut être calculé à partir de la relation suivante (Chaudry, 1993), obtenue à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, sans toutefois prendre en compte la rugosité du lit:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right) \quad \text{avec} \quad y_2 = 0,22 \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8(1,72)^2} \right) = 0,436 \text{ m} \quad (\text{éq. A.16})$$

Ce qui constitue un résultat assez proche de la valeur calculée.

Écoulement dans une contraction

La simulation d'un écoulement dans une contraction a été réalisée principalement pour évaluer le bon comportement du modèle, la symétrie de la solution obtenue et l'effet du coefficient de viscosité (k) sur la solution. Le cas simulé consiste en un canal de 250 m de longueur par 50 m de largeur, au centre duquel deux murets de 10 m de largeur restreignent la section d'écoulement. Un débit de $100 \text{ m}^3/\text{s}$ est imposé à l'extrémité amont et la profondeur critique est imposée à l'extrémité aval. Des essais ont été réalisés pour différentes valeurs de pente du fond et de viscosité. La figure A.2 montre l'élévation de la surface libre.

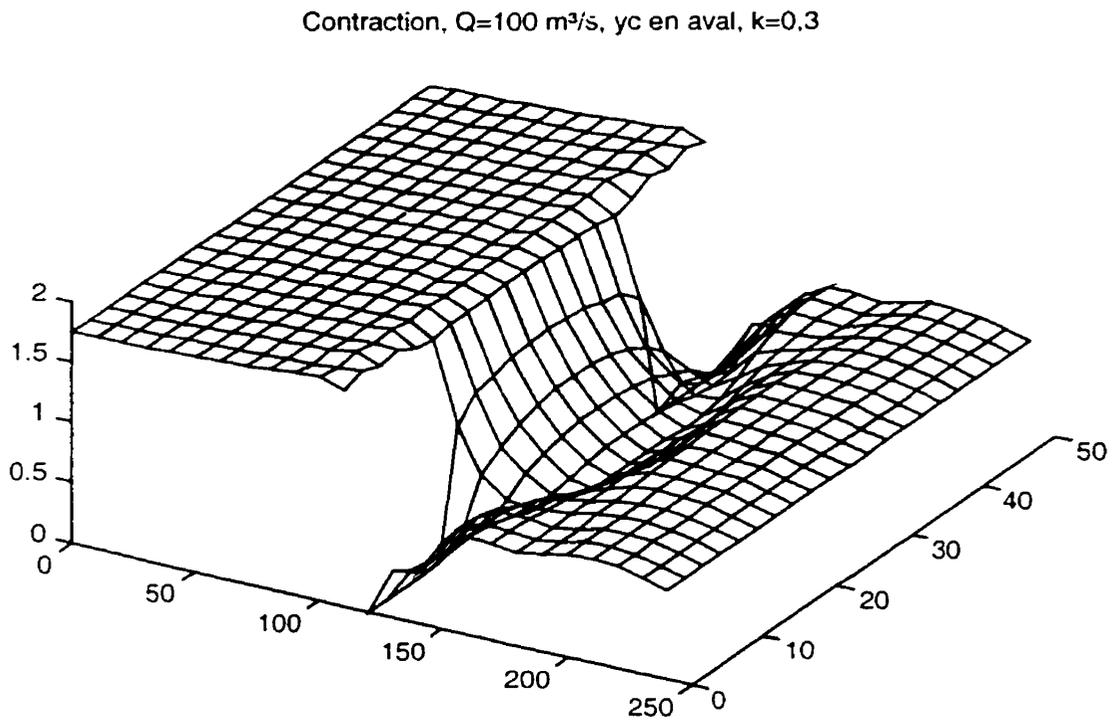


Figure A.2 Élévation de la surface libre (m) pour un écoulement dans une contraction.

Le champ vectoriel de vitesse d'écoulement (Fig. A.3) montre que la solution obtenue est symétrique. La variation du coefficient de viscosité a pour effet de modifier la forme des vortex formés à l'aval de la contraction.

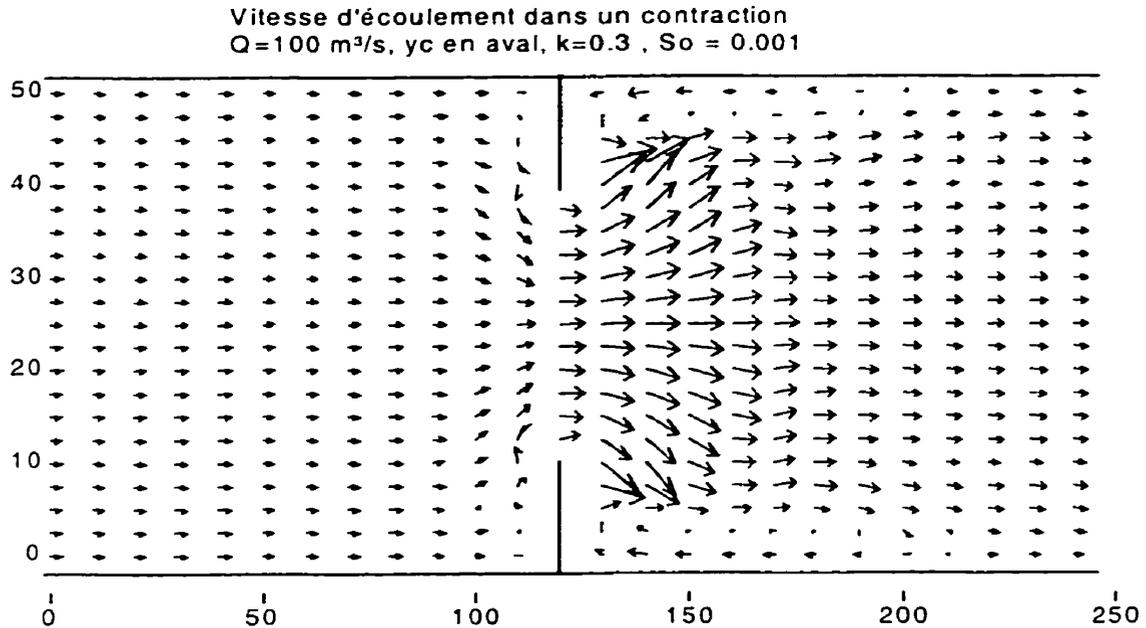


Figure A.3 Orientation des vitesses pour un écoulement dans une contraction.

Il est généralement difficile de spécifier la valeur appropriée du coefficient de viscosité, la valeur à attribuer à ce paramètre dépend de la géométrie du domaine, des conditions d'écoulement et de la densité du maillage. Un modèle ne peut simuler des phénomènes de vortex à une résolution plus fine que le maillage, une augmentation de la densité du maillage devrait normalement permettre une réduction du coefficient de viscosité. Une calibration devrait être réalisée sur ce paramètre au même titre que le coefficient de rugosité de Manning lorsque la pente d'énergie est forte ou que la géométrie du domaine est particulièrement favorable à la formation de vortex.

Variation de la superficie inondée en fonction du niveau d'eau

Une simulation a été réalisée afin de vérifier le bon comportement du modèle d'écoulement à surface libre dans des situations impliquant une variation de la superficie inondée du domaine.

La bathymétrie utilisée correspond à la valeur absolue de la fonction «Peaks» de la librairie de fonction du logiciel Matlab, qui produit cinq maximums locaux d'amplitudes variées, sur un domaine carré (fig A.4 a).

La condition initiale correspond à un plan d'eau au repos, dont le niveau est supérieur à l'élévation bathymétrique de tous les noeuds du domaine. Un débit spécifique négatif de $0,05 \text{ m}^2/\text{s}$ est imposé sur la moitié d'une des faces du domaine, ce qui a pour effet d'entraîner la vidange du réservoir.

Après 200 secondes de simulation, le premier sommet émerge (fig. A.4 b), puis le second suit à 400 secondes (fig. A.5 a). Il convient de remarquer que plus le niveau baisse, plus la vitesse d'écoulement augmente à la sortie, puisque le débit est constant, mais la section d'écoulement rétrécit. C'est pourquoi on peut remarquer une pente d'écoulement beaucoup plus raide à la figure A.5 b, qu'en A.5 a. L'effet conjugué de l'augmentation de vitesse et de la réduction de profondeur entraîne une augmentation du nombre de Froude à l'exutoire. Des instabilités numériques surviennent lorsque l'écoulement passe du régime fluvial au régime torrentiel à la frontière ouverte, empêchant la vidange complète du réservoir. Ces problèmes ont été corrigés en imposant une relation niveau-débit à la sortie.

Le modèle a donc permis de simuler adéquatement le déplacement du littoral, dans le cadre d'une simulation en régime transitoire.

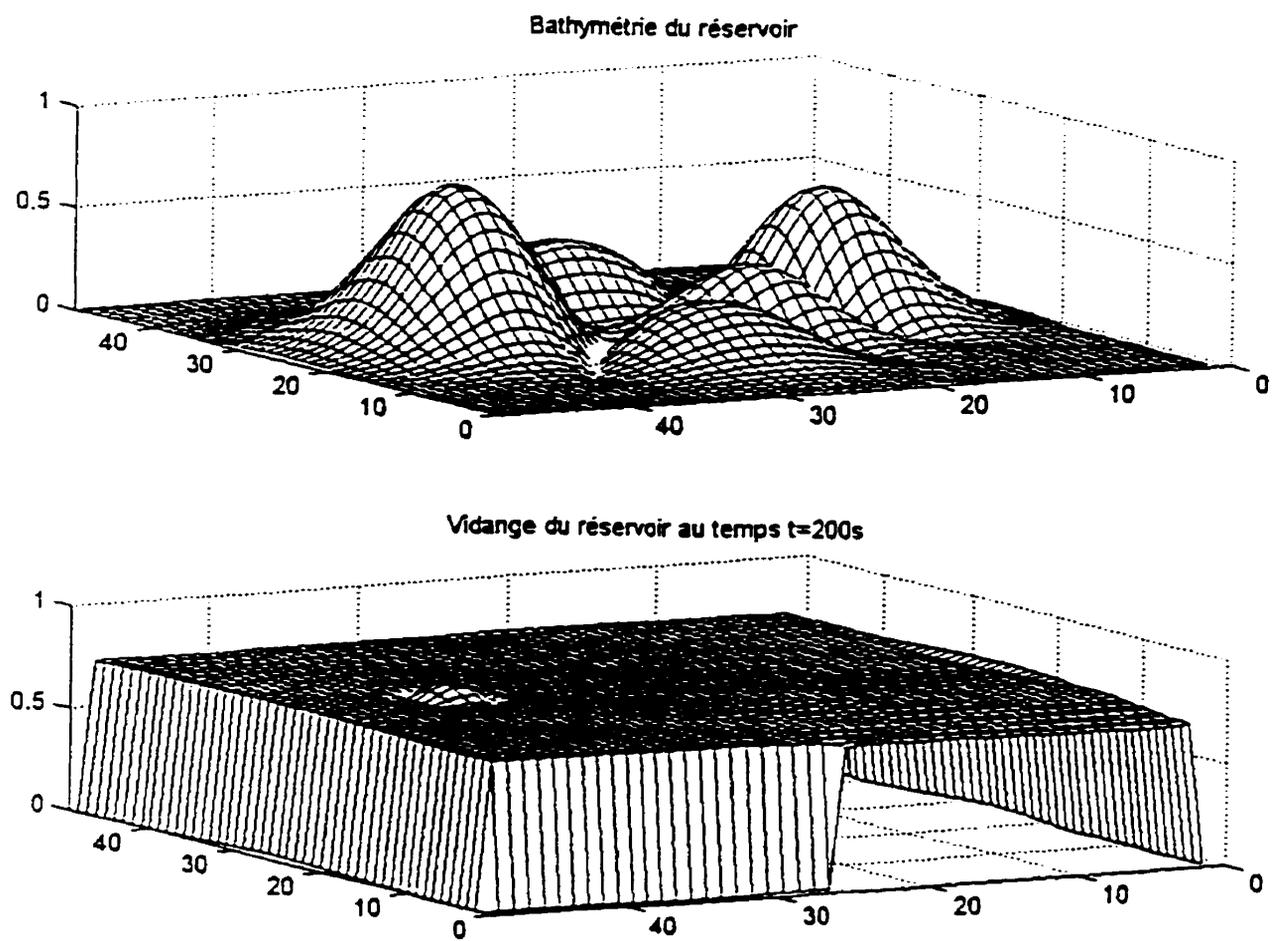


Figure A.4 a) bathymétrie du réservoir, b) vidange du réservoir au temps $t=200s$.

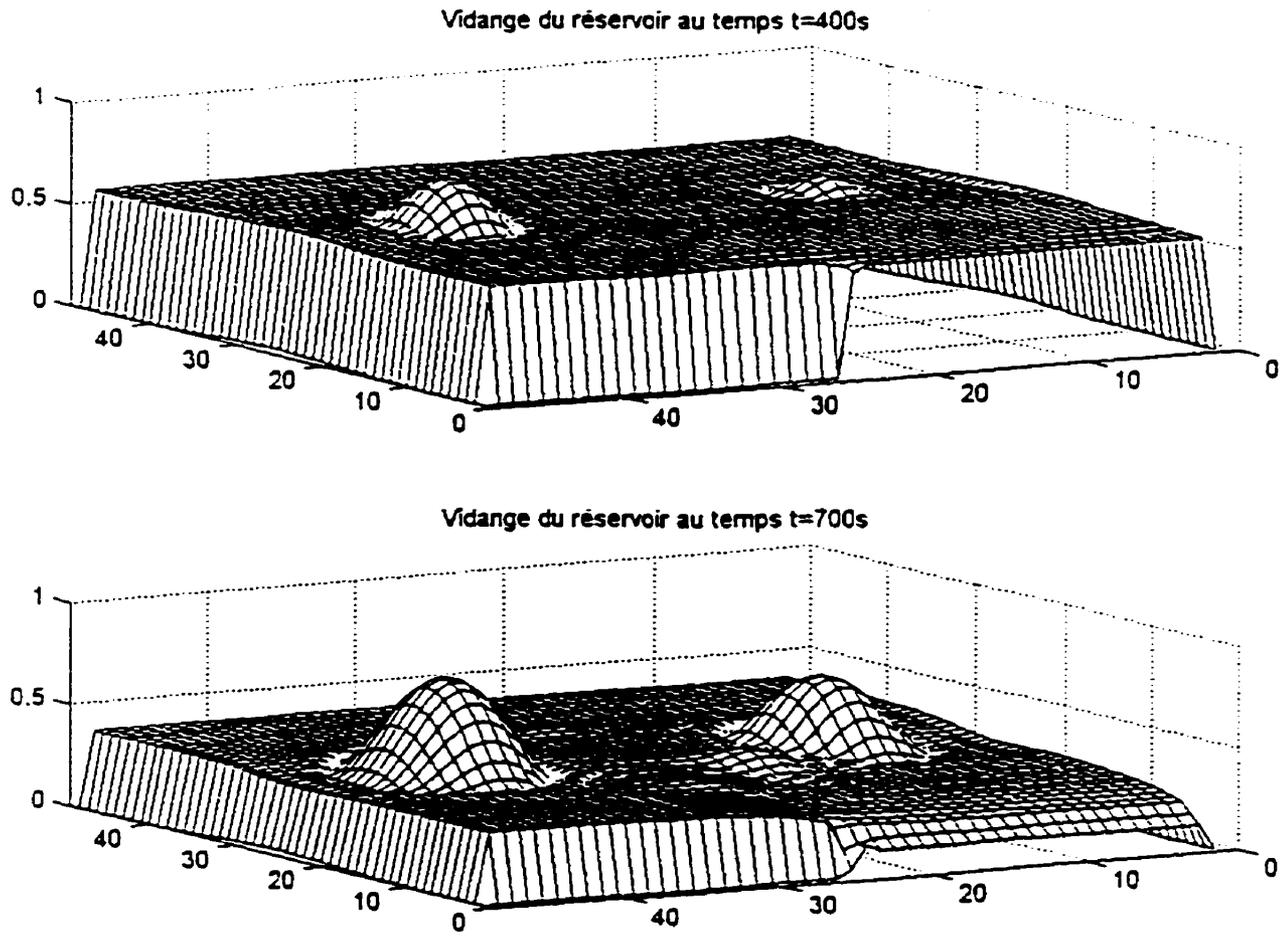


Figure A.5 a) vidange du réservoir au temps $t=400s$, b) vidange du réservoir au temps $t=700s$.

Modélisation de l'écoulement dans une passe migratoire

Une simulation d'écoulement dans une passe migratoire de type «rivière aménagée» a été réalisée dans le but de vérifier les capacités du modèle dans des conditions d'écoulement rapidement variées, sur une pente raide.

Le cas simulé consiste en un plan incliné à une pente de 10%, le long duquel des murets déflecteurs orientés à 30 degrés vers l'amont ralentissent l'écoulement et créent des aires de repos pour les poissons. Un débit de 10 m³/s alimente la passe, d'une longueur de 50 m par 5 m de largeur.

La figure A.6 montre les vecteurs vitesses et les profondeurs d'écoulement pour la solution obtenue. Une bonne solution a pu être obtenue, toutefois, les limites du type de discrétisation géométrique utilisé apparaissent clairement sur cette figure. La grille crée des murets irréguliers «en escaliers» qui ne constituent pas une représentation fidèle de la géométrie à représenter. Étant donné qu'il n'est pas possible de varier localement la densité de la grille, la densité maximale souhaitée localement sur le domaine doit être appliquée à l'ensemble, ce qui a pour effet d'augmenter considérablement la taille des problèmes à résoudre, en comparaison à l'utilisation de maillages irréguliers.

Modélisation de l'écoulement dans une passe migratoire

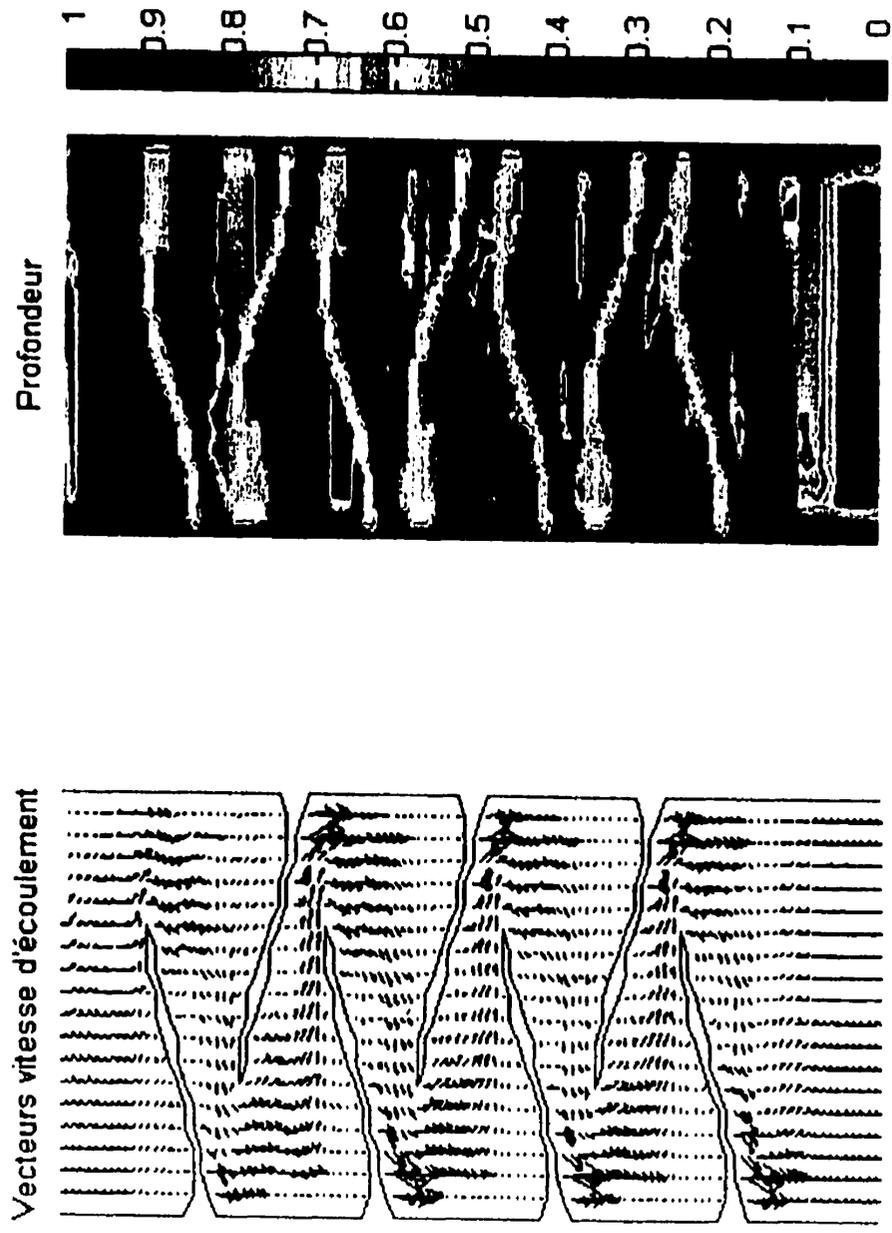


Figure A.6 a) vecteurs vitesse d'écoulement, b) profondeurs d'écoulement.

Annexe 3

Validation du modèle d'écoulement souterrain

Un puits de pompage dans un aquifère

Étant donné que la formulation utilisée pour le modèle souterrain a été souvent utilisée et que sa validité a été démontrée pour une grande gamme de situation, peu de tests de validation ont été réalisés, voici cependant une comparaison entre la solution analytique de Theis et celle obtenue par le modèle d'éléments finis.

La modélisation a été réalisée sur un domaine circulaire de 40 m de rayon, pour un aquifère confiné ayant une transmissivité de 0,015 m²/s, un coefficient d'emmagasinement de 0,005, pompé en son centre à un taux de 10 l/s.

La solution analytique de Theis (Freeze, R.A., Cherry, J.A., 1979) s'énonce ainsi :

$$h_0 - h(r, t) = \frac{Q}{4\pi T t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u} = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (\text{éq. A.17})$$

où

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (\text{éq. A.18})$$

La fonction de puits $W(u)$ peut être approchée par la série suivante :

$$W(u) = -0,577216 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \frac{u^5}{5 \cdot 5!} - \dots \quad (\text{éq. A.19})$$

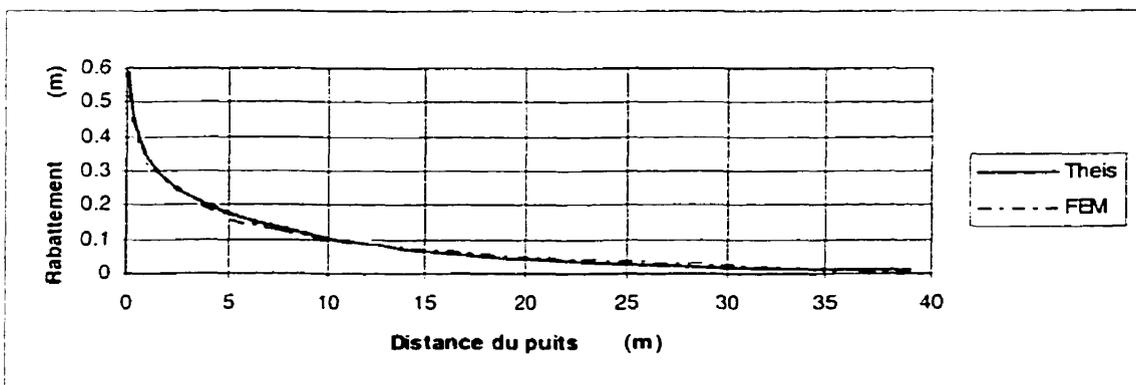


Figure A.7 Rabattement en fonction de la distance du puits, solutions analytique et numérique.

La figure A.7 présente la comparaison entre la solution de Theis (éq. A.17) et le résultat produit par le modèle après 100 s de simulation.

Les essais réalisés à différents intervalles de temps montrent une bonne concordance avec la solution analytique.

Il faut remarquer que la condition initiale fournie au modèle consistant en une surface plane, les premiers intervalles de temps doivent être de l'ordre du millième de seconde, pour que le conditionnement de la matrice permette la résolution du système. Le maillage utilisé pour la résolution est présenté à la figure A.8.

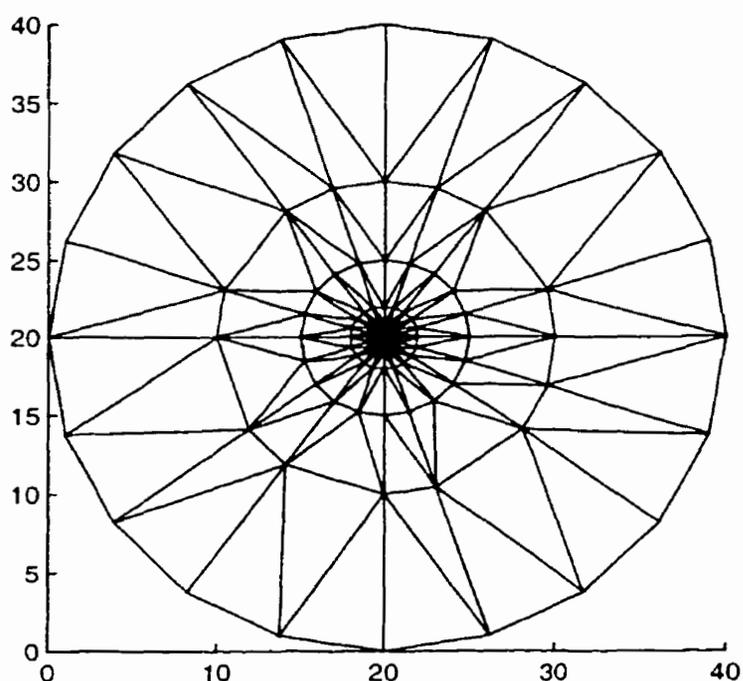


Figure A.8 Maillage utilisé pour la modélisation du rabattement autour d'un puits de pompage.

Rangée de puits dans un aquifère

Une autre application du modèle d'écoulement souterrain a été réalisée pour vérifier le comportement du modèle en condition permanente, en posant une valeur nulle à la matrice de masse. La simulation réalisée consistait à une rangée de 12 puits pompant à un taux de 0,01 l/s dans un aquifère carré de 250 m de largeur par 5 m d'épaisseur. La conductivité hydraulique a été fixée à 0,1 mm/s. Une condition frontière de charge constante (Dirichlet) a été appliquée sur 3 des côtés du domaine, tandis qu'une condition de flux nul a été appliquée sur le côté où se situe la rangée de puits. La solution obtenue est présentée à la figure A.9.

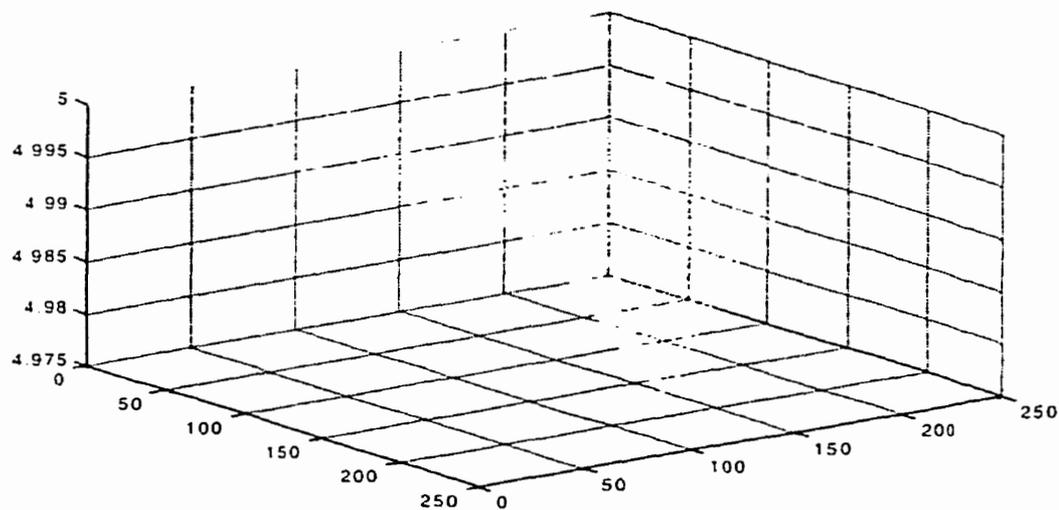


Figure A.9 Charge hydraulique aux abords d'une rangée de puits de faible capacité.

Ce type de situation s'apparente au contexte pour lequel le modèle a été élaboré, étant donné que les échanges avec le modèle d'écoulement à surface libre se font par le

biais d'une multitude de terme source. La régularité de la solution montre le bon comportement du modèle dans ce contexte.