

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DU COÛT DE LA VARIABILITÉ VIA FORMAGE DE  
FONCTION DE DENSITÉ DE PROBABILITÉ PAR CONTRÔLEUR  
COMMUTANT

BERTRAND PIGEON

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CHIMIQUE)

DÉCEMBRE 2005



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-16835-6*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-16835-6*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**  
**ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

Ce mémoire intitulé :

**OPTIMISATION DU COÛT DE LA VARIABILITÉ VIA  
FORMAGE DE FONCTION DE DENSITÉ DE PROBABILITÉ PAR  
CONTRÔLEUR COMMUTANT**

présenté par : PIGEON Bertrand

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SRINIVASAN Balasubrahmanyan, Ph.D., président

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. STUART Paul, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GENDRON Sylvain, Ph.D., membre

*Je dédie ce mémoire à toutes les femmes  
qui m'ont pris en flagrant délit  
de regarder trop longtemps leur décolleté  
et qui n'ont rien dit*

# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur Michel Perrier et co-directeur Paul Stuart pour le support tout au long de ce projet. De plus, je voudrais aussi remercier tous qui ont touché directement ou indirectement mon projet, vous m'avez rendu la tâche facile, presque agréable.

Plus personnellement, je voudrais remercier Michel (pour m'avoir fait confiance), Paul (pour m'avoir financé sans avoir eu de résultats concrets pendant deux ans), Agnès (pour avoir enduré mes retards), Gisèle et Gérard (pour leur soutien inconditionnel), Yanick (pour toutes les choses que je lui ai empruntées à « long terme »), Danielle (pour les multiples corrections), Moncef (pour ne pas avoir montré mon ignorance au grand jour), Guillaume (pour avoir programmé 90% des devoirs au bac), Claude (pour son hospitalité), Marc (pour tous les efforts en GCH3100), Louis-Philippe (pour ses deuxièmes conseils financiers), Michel (pour toutes les bières), Mathieu (pour héberger mes jeux), Mathieu (pour les shish taouk pendant la grève au CÉGEP), Christine (pour m'avoir fait découvrir les joies de la natation), la dernière classe de GCH3150 (pour l'expérience), la première classe de GCH3100 (pour son indulgence), Tommaso (pour le poulet frit Kentucky sur le bord de la 401), Nicolas (pour m'avoir montré que l'important c'est d'avoir l'air de comprendre), Charles (pour m'avoir expliqué la simulation « maudite »), Christian et Mathieu (pour les parties de jeux vidéo), Mike (pour être le dernier adversaire digne de ce nom à

Soul Calibur), Freak (pour ses récits), Turbis (pour les batteries rechargeables que tu as oubliées). Finalement, je voudrais remercier la personne la plus importante dans ma vie et qui sans elle rien n'aurait été possible, moi-même.

## Résumé

L'objectif premier de ce travail de recherche est d'optimiser le coût de la variabilité. Ce coût est déterminé par une fonction de l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire. Cette fonction est optimisée pour obtenir l'établissement d'une fonction de densité de probabilité (FDP) cible. Cependant, cette FDP cible est contrainte par une variance minimale et une variance maximale. Ensuite, il faut créer une stratégie de formage pour que la FDP de la variable de sortie approche le plus possible la FDP cible.

À la place d'utiliser les méthodes existantes, une toute autre méthode de formage de FDP a été développée : le formage de FDP par contrôleur commutant. La commutation crée la non linéarité nécessaire pour former la FDP et la rendre asymétrique. Les paramètres du contrôleur sont trouvés par optimisation semi infinie. Cette méthode a été comparée avec une autre méthode de formage de FDP, la méthode par approximation de la FDP par des fonctions de Gram-Charlier(G-C). Les performances de la méthode par contrôleur commutant sont aussi bonnes que par G-C. En plus, le formage de FDP par contrôleur commutant est une méthode plus simple à implanter et demande moins d'efforts de la variable manipulée que la méthode de formage de FDP par approximation de Gram-Charlier.

Ensuite, la méthode de formage de FDP a été testée sur un réacteur où des

réactions suivent le schéma Van de Vusse. Une FDP optimale a été déterminée à l'aide d'une fonction économique. L'algorithme de formage de FDP a été fait en optimisant 3 paramètres d'un contrôleur commutant : les deux constantes proportionnelles et le point de consigne. Les résultats ont été très probants. L'analyse de ceux-ci a démontré une très grande sensibilité aux erreurs de modélisation. D'ailleurs un phénomène de retour à une distribution gaussienne d'une FDP asymétrique a été observé lorsque le modèle pour faire le formage de FDP est différent du modèle réel.

En conclusion, une nouvelle méthode pour faire le formage de FDP a été développée. Son principe est la création d'une non linéarité par un contrôleur commutant. Cette méthode donne de très bonnes performances tout en étant très simple. Cependant, il n'y a pas de lien mathématique direct entre le contrôleur commutant et la FDP de sortie du contrôleur, ce qui complexifie le problème d'optimisation. De plus, l'absence de ce lien direct fait en sorte que plusieurs phénomènes ne peuvent être clairement expliqués (la variance maximale et la sensibilité de la FDP).



# Abstract

The main objective of this research project is to optimize the cost of variability. The cost of variability is determined by a function of the expected value of a random variable. This function is optimized to obtain a target probability density function (PDF). However, there are two constraints limiting the shape of the target PDF: the minimal variance and the maximal variance. A control strategy is then designed so that the output PDF follows as close as possible the target PDF.

Instead of using an existing method, a completely different approach has been developed: PDF shaping via switching controller. The commutation induces the non-linearity necessary to shape the PDF. The parameters of the controller are defined with semi infinite optimization. This method is compared with another PDF shaping method, PDF shaping via the approximation of the PDF with Gram-Charlier functions. The results show that the switching controller method performance is similar to the other method. Furthermore, PDF shaping via switching controller is simpler and is less demanding on the manipulated variable.

Secondly, PDF shaping via switching controller was applied to a reactor example with Van de Vusse reactions. A target PDF was determined with an economic function. The PDF shaping algorithm was designed by optimizing 3 parameters of a switching controller: the setpoint and the two proportional constants. The results are

very good. The sensitivity analysis shows that the algorithm is sensitive to model mismatch. We observed that the PDF returned to a Gaussian shape when the model used is slightly different than the process.

In conclusion, a new method for PDF shaping has been developed. The working principle lies in the creation of a non linearity by a switching controller. It gives great performance while remaining simple. However, there is no direct mathematical link between the controller and the output PDF, thereby increasing the difficulty of the optimization problem. Also, the absence of this direct link obscures the understanding of properties like maximum variance and the sensitivity of the algorithm.

# Table des matières

|  |            |
|--|------------|
| <b>Dédicace.....</b>   | <b>IV</b>  |
| <b>Remerciements .....</b>   | <b>V</b>   |
| <b>Résumé... ..</b>  | <b>VII</b> |
| <b>Abstract... ..</b>  | <b>IX</b>  |
| <b>Table des matières.....</b>                                     | <b>XI</b>  |
| <b>Liste des tableaux .....</b>                                    | <b>XV</b>  |
| <b>Liste des figures .....</b>                                     | <b>XVI</b> |
| <b>Liste des annexes .....</b>                                     | <b>XIX</b> |
| <b>Liste des symboles et abréviations .....</b>                    | <b>XX</b>  |
| <b>Chapitre 1 : Introduction .....</b>                             | <b>1</b>   |
| 1.1 Problématique .....  | 1          |
| 1.2 Recensement des connaissances scientifiques .....              | 4          |
| 1.2.1 Approche mathématique de l'évaluation des performances ..... | 5          |
| 1.2.2 Approche pratique de l'évaluation des performances .....     | 6          |
| 1.2.3 Formage de fonction de densité de probabilité .....          | 10         |
| 1.3 Objectifs .....  | 11         |
| 1.4 Contenu/méthodologie .....                                     | 11         |
| 1.5 Contributions scientifiques.....                               | 12         |
| <b>Chapitre 2 : Concepts mathématiques .....</b>                   | <b>13</b>  |
| 2.1 Coût de la variabilité .....                                   | 13         |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.1.1 Autres travaux .....   | 14        |
| 2.1.2 Description de la méthode.....   | 16        |
| 2.1.3 Développement de la méthode discrète.....                                  | 17        |
| 2.1.4 Fonction économique .....  | 19        |
| 2.1.5 Exemple.....   | 20        |
| 2.1.6 Avantages et désavantages.....   | 22        |
| 2.1.7 Applications possibles.....  | 24        |
| 2.2 Fonctions de densité de probabilité.....                                     | 26        |
| 2.2.1 Choix de la FDP pour paramétrer la courbe de population.....               | 26        |
| 2.2.2 Fonction de densité de probabilité .....                                   | 28        |
| 2.2.3 Fonctions de densité de probabilité approximées .....                      | 29        |
| 2.2.3.1 Transfert d'une distribution en une équation avec les fonctions de G-C.  | 29        |
| 2.2.3.2 Exemple de transfert d'une distribution par l'approximation de G-C ..... | 31        |
| 2.2.4 Optimisation de la fonction de densité de probabilité.....                 | 37        |
| 2.3 Conclusion.....  | 38        |
| <b>Chapitre 3 : Formage de fonction de densité de probabilité.....</b>           | <b>39</b> |
| 3.1 Formage de FDP dynamique.....  | 39        |
| 3.2 Formage de fonction de densité de probabilité statique.....                  | 41        |
| 3.2.1 Méthode de formage de FDP avec l'équation de F-P-K .....                   | 41        |
| 3.2.2 Méthode de formage de FDP stationnaire avec l'approximation de G-C .....   | 43        |
| 3.2.3 Méthode développée dans le cadre du projet de recherche .....              | 45        |
| 3.3 Variance minimale et maximale.....   | 47        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.4 Comparaison entre la méthode utilisant G-C et celle de ce projet..... | 48        |
| 3.4.1 Description du procédé .....  | 49        |
| 3.4.2 Fonction de densité de probabilité cible.....                       | 50        |
| 3.4.3 Variance minimale et maximale du procédé.....                       | 50        |
| 3.4.4 Algorithme de formage de FDP trouvé par approximation de G-C.....   | 52        |
| 3.4.5 Algorithme de formage de FDP par gain commutant .....               | 52        |
| 3.4.6 Résultats .....   | 53        |
| 3.4.7 Comparaison mathématique entre les deux méthodes .....              | 55        |
| 3.4.8 Avantages et désavantages entres les deux méthodes.....             | 58        |
| 3.5 Conclusion.....   | 59        |
| <b>Chapitre 4 : Exemple avec procédé de Van de Vusse .....</b>            | <b>61</b> |
| 4.1 Introduction .....  | 61        |
| 4.2 Description .....   | 61        |
| 4.3 Démarche suivie.....  | 63        |
| 4.4 Fonction économique .....   | 64        |
| 4.5 Variance minimale et maximale.....                                    | 66        |
| 4.6 Fonction de densité de probabilité désirée .....                      | 67        |
| 4.7 Contrôleur et résultats .....   | 69        |
| 4.8 Analyse de sensibilité sur les paramètres.....                        | 72        |
| 4.9 Amélioration de la stratégie de formage .....                         | 76        |
| 4.9.1 Résultats avec ajout de contrôleur PI.....                          | 77        |

|  |           |
|--|-----------|
| 4.10 Retour sur le coût de la variabilité .....        | 79        |
| 4.11 Analyse des résultats .....                       | 81        |
| 4.12 Conclusion.....                                   | 82        |
| <b>Chapitre 5 : Conclusion et travaux futurs .....</b> | <b>83</b> |
| 5.1 Contributions scientifiques.....                   | 85        |
| 5.2 Recommandations et travaux futurs.....             | 86        |
| <b>Bibliographie .....</b>                             | <b>88</b> |
| <b>ANNEXES.....</b>                                    | <b>96</b> |

## Liste des tableaux

|   |    |
|---|----|
| Tableau 3.1 Données de l'exemple 3.4.1 .....                    | 49 |
| Tableau 4.1 Analyse économique de l'exemple du chapitre 4 ..... | 80 |

# Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure 1.1 Exemple d'approchement du point de consigne vers la contrainte par une diminution de la variance .....   | 3  |
| Figure 2.1 Exemple montrant le coût de la courbe de population .....  | 15 |
| Figure 2.2 Fonction économique pour l'exemple .....   | 21 |
| Figure 2.3 Fonction de densité de probabilité des deux stratégies de contrôle pour l'exemple.....   | 21 |
| Figure 2.4 Fonction d'espérance de coût entre les deux stratégies de contrôle.....  | 22 |
| Figure 2.5 Histogrammes avec 60 et 600 classes et leurs fonctions de distribution de probabilités respectives classes fait à partir du même ensemble de données | 27 |
| Figure 2.6 Résultats avec un FDP faiblement non gaussienne .....  | 33 |
| Figure 2.7 Résultats avec un FDP fortement non gaussienne .....   | 34 |
| Figure 3.1 FDP cible utilisé dans l'exemple.....  | 50 |
| Figure 3.2 Variance du procédé en fonction du gain d'un compensateur .....  | 51 |
| Figure 3.3 FDP obtenues par la méthode par approximation de Gram-Charlier, par gains commutants et cible .....  | 53 |
| Figure 3.4 Valeur de l'intégrale de l'erreur au carré face à la FDP cible: (1) méthode par gains commutant, (2) méthode par approximation de G-C.....           | 54 |



|   |    |
|---|----|
| Figure 3.5 Variable contrôlée dans le temps pour les deux méthodes de formage de<br>FDP .....   | 55 |
| Figure 3.6 Courbes de population de la variable manipulée pour les deux méthodes ...  | 55 |
| Figure 3.7 Variable manipulée pour les deux méthodes de formage de FDP.....   | 56 |
| Figure 3.8 Gain par rapport à l'erreur pour les deux méthodes de formage de FDP....   | 57 |
| Figure 4.1 Schéma du réacteur.....  | 61 |
| Figure 4.2 Concentration du composant B à la sortie.....  | 62 |
| Figure 4.3 Revenu par mole de B en fonction de sa concentration.....  | 64 |
| Figure 4.4 Coût pour séparer une mole de A en fonction de sa concentration .....  | 64 |
| Figure 4.5 Profit en fonction du point de consigne sur la concentration de B.....   | 65 |
| Figure 4.6 Variance de la concentration B, en fonction du facteur multipliant l'inverse<br>du gain du système dans le compensateur..... | 66 |
| Figure 4.7 FDP cible de la concentration de B .....   | 68 |
| Figure 4.8 Fonction espérance du profit avec la FDP cible la fonction économique ....   | 68 |
| Figure 4.9 Schéma Simulink pour le formage de FDP sur le procédé de Van de<br>Vusse .....   | 69 |
| Figure 4.10 FDP obtenue par un contrôleur à gains commutants et FDP cible .....   | 70 |
| Figure 4.11 Profil de la concentration de B à la sortie dans le temps .....   | 71 |
| Figure 4.12 Profil de D (variable manipulée) dans le temps.....   | 71 |
| Figure 4.13 Intégrale de l'erreur en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la<br>réaction.....                            | 73 |

|  |    |
|--|----|
| Figure 4.14 Moyenne en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la<br>réaction.....                                       | 74 |
| Figure 4.15 Variance en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction  | 74 |
| Figure 4.16 Asymétrie en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la<br>réaction.....                                     | 75 |
| Figure 4.17 Aplatissement en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la<br>réaction.....                                 | 75 |
| Figure 4.18 Stratégie de formage à gains commutants avec constante intégratrice.....   | 76 |
| Figure 4.19 Intégrale de l'erreur en fonction du facteur multiplicatif du coefficient $K_1$<br>de la réaction .....                  | 77 |
| Figure 4.20 FDP obtenue par un contrôleur à gains commutants, gains commutants et<br>PI et FDP cible avec un bruit avec dérive ..... | 78 |
| Figure 4.21 FDP avec formage de FDP (contrôleur commutant) et FDP sans formage<br>de FDP(contrôleur proportionnel).....              | 80 |
| Figure A.1 Fonction de cumulative probabilité .....  | 97 |

## Liste des annexes

|   |    |
|---|----|
| Concepts mathématiques.....                                       | 96 |
| Concept de probabilité discrète.....                              | 96 |
| Concept de probabilité continue.....                              | 96 |
| Concept de fonction de densité de probabilité .....               | 98 |
| Concept de fonction de moyenne et moments .....                   | 98 |
| Concept d'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire ..... | 99 |
| Concept de fonction d'espérance .....                             | 99 |

# Liste des symboles et abréviations

**FDP** : Fonction de densité de probabilité

**G-C** : Gram-Charlier

**F-P-K** : Fokker-Plank-Kolmogorov

$N_{\mu,\sigma}$  : Distribution normale avec une moyenne de  $\mu$  et un écart type de  $\sigma$

# Chapitre 1 : Introduction

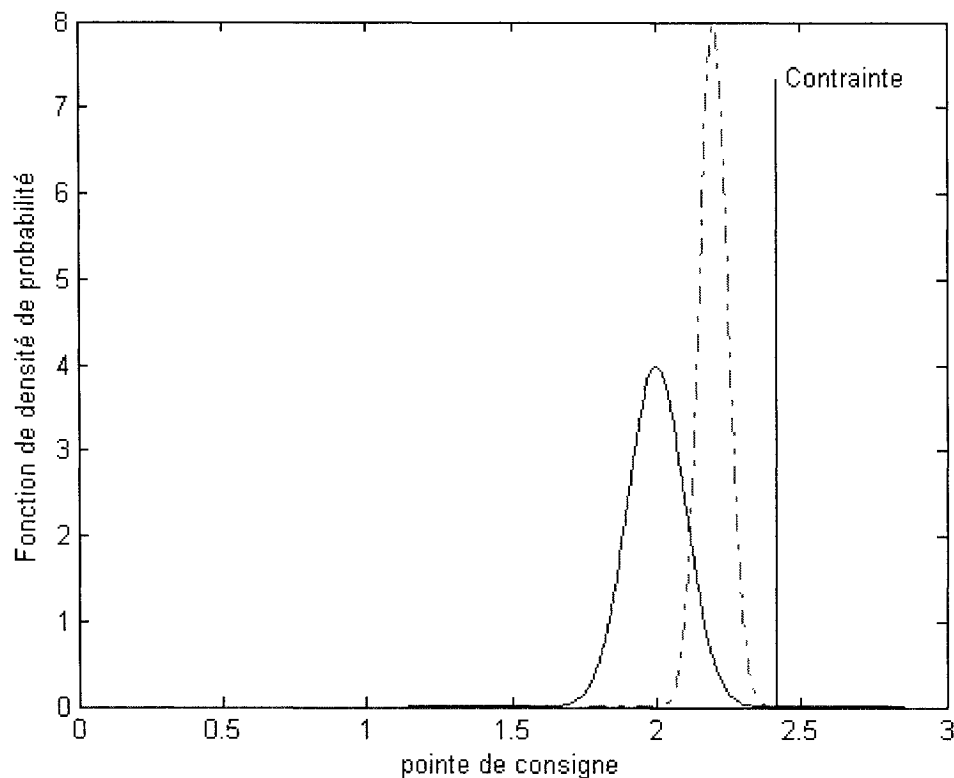
## 1.1 Problématique

Le contrôle de procédé est un domaine technologique qui prend de plus en plus d'importance dans l'industrie. En effet, celui-ci permet, entre autres, d'accroître la production sans modifier les infrastructures déjà existantes, ou de répondre à des normes de qualités de plus en plus strictes. Cependant, il faut faire une étude exhaustive du procédé pour pouvoir déterminer où se situent les opportunités les plus lucratives. L'étude du centre Warren en Australie donne une démarche pour trouver ces opportunités (Marlin et al., 2001). Un estimé précis des gains économiques est important, car des arguments convaincants sont nécessaires pour convaincre les dirigeants industriels du bien fondé de l'utilisation de stratégies de contrôle avancées (Eder, 2003).

Malgré que la problématique soit bien posée, le problème de l'estimation des performances des systèmes de contrôle n'a pas de solutions claires. Cela provient du fait qu'il n'y a pas de base scientifique unique pour décrire une bonne performance. Ainsi, selon la profession ou les intérêts du concepteur, la meilleure performance d'une boucle de contrôle peut varier. De plus, à cause de la diversité des boucles de contrôle, une méthode développée peut être tout simplement inapplicable pour un autre type de boucle de contrôle. Donc, le défi principal dans le domaine de l'évaluation des performances d'une boucle de contrôle est d'établir un protocole versatile.

Cependant, il y a un point commun à tous les types de boucles de contrôle: l'objectif économique. En effet, si une boucle de contrôle est installée, c'est dans un but principalement économique. Par conséquent, les performances d'une boucle de contrôle industrielle devraient être calculées économiquement. Il en découle le besoin d'évaluer au stade décisionnel le gain économique résultant de l'implantation d'une stratégie de contrôle avancée. En fin de compte, en calculant les performances d'une boucle de contrôle par rapport à l'aspect économique, on obtient une méthode applicable à plusieurs situations industrielles. Mais aussi, on obtient une méthode pour calculer le gain économique d'une amélioration des performances d'une boucle de contrôle.

Dans le même ordre d'idée, ce gain économique a surtout été calculé jusqu'à maintenant en approchant le point de consigne vers une contrainte du procédé. Cela est possible par la diminution de la variance de la courbe de population (voir figure 1.1) Ce concept a été traité depuis longtemps par Brewster (1970), Tolfo (1980) et Muske (2003). Mais ce n'est que récemment qu'il y a eu un intérêt pour les autres moments de la courbe de population (Latour, 1996). En effet, il a été prouvé que le gain monétaire résultant d'une faible variance, n'était pas seulement dû à un rapprochement d'une contrainte, mais aussi d'une diminution significative des excursions hors spécifications. En résumé, il faut considérer tous les effets sur la courbe de population pour pouvoir en calculer le gain économique.



**Figure 1.1** Exemple d'approchement du point de consigne vers la contrainte par une diminution de la variance

Dans un autre ordre d'idées, la fonction économique associant une valeur monétaire à une spécification est souvent asymétrique. Ce qui fait qu'une courbe de population « optimale » devrait en tenir compte et pour une moyenne donnée, elle devrait tendre du côté où c'est le plus avantageux économiquement. Avant les travaux de Forbes (2004) et Wang (1998), aucune théorie n'avait été développée pour faire le design d'une boucle de contrôle qui modifiait l'allure de la courbe de population. Ces approches utilisent les propriétés des modèles discrets dynamiques non-linéaires afin d'y arriver. Il est maintenant possible d'optimiser la forme de la courbe de population pour exploiter la forme de la fonction économique.

Il y a eu beaucoup de travaux qui ont traité du problème d'évaluation des performances d'une boucle de contrôle. En utilisant l'aspect économique des procédés industriels, le gain économique résultant d'une amélioration à la stratégie de contrôle peut être calculé. En appliquant une méthode pouvant changer la forme de la fonction de densité de probabilité, on peut par la suite optimiser, par une stratégie de contrôle, la courbe de population pour minimiser le coût de production.

## **1.2 Recensement des connaissances scientifiques**

Le domaine de l'évaluation des performances d'une boucle de contrôle est vaste et intéresse les chercheurs depuis longtemps. Aujourd'hui, ce domaine peut être divisé en sous catégories. Ces sous catégories représentent chacune une optique différente dans la solution de ce problème. En effet, il y a l'approche mathématique qui s'appuie sur la théorie des processus stochastiques afin de déterminer si les performances sont optimales. Il y a l'approche pratique qui détermine le gain économique possible par un changement de la stratégie ou une resyntonisation de la boucle de contrôle. Le dernier domaine est un mélange des deux derniers. Les théorèmes stochastiques sont utilisés afin de calculer le gain économique. À l'inverse de l'évaluation des performances d'une boucle de contrôle, le domaine de la mise en forme de la fonction de densité de probabilité est un nouveau domaine où il y a peu d'écrits. Donc, les principaux travaux reliés à de l'évaluation des performances seront décrits dans les parties qui suivent.



### **1.2.1 Approche mathématique de l'évaluation des performances**

L'approche mathématique est principalement basée sur les théorèmes stochastiques avec l'hypothèse que le système est en régime permanent et que les perturbations aléatoires suivent une loi de distribution. Le résultat principal est la variance minimale qui est la variance d'un système excité par un signal aléatoire stationnaire et le contrôleur est paramétré selon un problème d'optimisation stochastique (Åström, 1970). Cette variance minimale est par conséquent la meilleure performance possible d'un point de vue mathématique. Cependant, il faut paramétrer le contrôleur à partir de données en boucle ouverte pour calculer la variance minimale. Ce fut un obstacle majeur, car les données d'opération en boucle ouverte sont difficiles à obtenir dans un contexte d'opération industrielle. Cet obstacle a été surmonté en adaptant une série chronologique aux données d'opération pour avoir la variance minimale (Harris, 1989). Par la suite, la méthode s'est développée pour des systèmes MIMO (Huang et al., 1995) (Harris et al., 1996) (Huang et al., 1997), pour les systèmes avec anticipation (Desborough et al., 1992)(Huang et al., 2000) pour les systèmes avec une composante intégrative (Grimble, 2004). Pour de plus de références, le lecteur est invité à lire les revues de littératures de Qin et Harris (Qin, 1998) (Harris et al., 1999). Un désavantage principal de ces méthodes est qu'elles n'associent pas une valeur monétaire du gain potentiel. De plus, un contrôleur à variance minimum est généralement très agressif et n'est pas souvent applicable au milieu industriel. Donc,

ces méthodes sont bonnes pour calculer la variance minimale résultant de l'installation d'un contrôleur à variance minimale, mais cette borne est souvent non atteignable.

### **1.2.2 Approche pratique de l'évaluation des performances**

L'approche pratique est axée sur le calcul du gain économique résultant d'une réduction de la variance. Celle-ci étant plus faible, le point de consigne peut être approché d'une contrainte, ce qui fait baisser le coût de production ou augmente les profits. Par conséquent, cette méthode peut être décomposée en deux parties : la première étant de trouver la nouvelle variance avec la nouvelle stratégie de contrôle et la deuxième qui consiste à calculer le gain économique par le déplacement du point de consigne. Il y a différentes façons d'y arriver : par empirisme, par modélisation et par utilisation de la courbe de distribution. Il est à noter qu'il y a d'autres travaux qui ont une démarche inverse, c'est-à-dire que le gain économique est déterminé après que la stratégie de contrôle avancée soit installée (Craig et al., 2000, 2003). Donc, il y a trois façons de calculer le gain économique et elles seront décrites dans les parties qui suivent.

La première façon de trouver la réduction de la variance, est de l'estimer par expérience ou par une manière empirique. Elle est basée sur l'analyse de données d'opération normales. Souvent elles demandent un traitement avant de les analyser: filtrage, spectre de fréquence, histogrammes (Stanton, 1990). Par la suite, il ne reste qu'à calculer le rapprochement du point d'opération vers une contrainte. Il existe

plusieurs règles, dépendant de la tolérance à dépasser la contrainte, mais elles sont toutes basées sur une baisse de la variance posée (souvent la moitié de la variance actuelle)(Martin et al., 1991). L'avantage principal d'utiliser cette méthode est la rapidité et ne nécessite pas beaucoup de données. Le désavantage est que la méthode est imprécise à cause des hypothèses qui sont posées, comme une distribution normale et une diminution de variance imposée d'avance. En conclusion, les méthodes empiriques sont bonnes pour faire une première estimation du gain possible en utilisant une meilleure stratégie de contrôle.

La deuxième façon de trouver la baisse de la variance est plus complexe mais beaucoup plus précise. Elle se base sur l'utilisation de modèles mathématiques pour simuler la réponse du procédé à une perturbation. Ensuite, le rapprochement du point de consigne vers la contrainte peut être calculé. Cet algorithme a été un des premiers à être utilisé pour déterminer le gain économique de l'amélioration d'un système de contrôle (Brewster, 1970)(Tolfo, 1983)(Senyard et al., 1983). Plus récemment, on utilise le modèle directement pour calculer la variance après avoir amélioré la stratégie de contrôle d'un procédé (Muske, 2003).L'avantage de ces méthodes est d'avoir une meilleure estimation de la réduction de la variance que les méthodes empiriques. De plus, la dynamique du procédé face à la stratégie à implanter peut être anticipée, ce qui permet de prévoir les problèmes d'opérations. Cependant, le désavantage principal est l'hypothèse que tous les signaux du système suivent une loi statistique normale, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Lorsque le point de consigne s'approche d'une

contrainte, il est préférable d'avoir une courbe de distribution asymétrique avec une longue queue du côté opposé à la contrainte. Une autre façon est de simuler le système avec différentes entrées aléatoires. Pour chaque entrée, un coût est calculé et mis en graphique. On peut ainsi voir l'étendue des coûts selon la stratégie de contrôle (un meilleur contrôle donnant une distribution plus serrée) (Di Mascio, 2002). Cette méthode étant trop subjective et mal adaptée pour pouvoir calculer le gain résultant d'une amélioration dynamique du procédé n'a pas été retenue. Donc, l'approche utilisant un modèle est beaucoup plus précise qu'une méthode empirique, sauf qu'en supposant que toutes les distributions, de la courbe optimale aux perturbations, sont normales, le résultat obtenu s'éloigne de la réalité.

La troisième et dernière méthode est l'utilisation de toute la courbe de distribution. En effet, quand on utilise la moyenne, il y a une perte d'informations (les autres moments) et toutes les méthodes précédentes utilisent la moyenne pour calculer le profit ou le coût d'opération. Comme la plupart des distributions ne suivent pas une loi normale et la fonction coût n'est pas linéaire, le résultat s'en trouve faussé. En effet, la fonction de coût de production s'applique sur toute la courbe de distribution, c'est pourquoi le coût de production baisse quand la variance diminue même si le point de consigne n'est pas changé. C'est parce qu'il y a moins de produits hors spécification, qui nécessitent plus de ressources ou qui doivent être rejetés (Latour, 1992). Le même auteur a développé une façon de trouver le coût de cette distribution, la méthode CLIFFTENT (Latour, 1996). Elle n'était pas explicitée, d'autres ont utilisé l'espérance

d'une fonction et ont obtenu le même résultat (Zhou, et al. 2002):

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)p(\xi)d\xi \quad (\text{éq. 1.1})$$

où  $p$  est la fonction de densité de probabilité de la fonction de distribution et  $f$  est une fonction économique qui relie le point de consigne avec un profit ou un coût de production. L'approche utilisée par Zhou est de calculer l'espérance pour chaque point de consigne de la fonction coût et de trouver le minimum de cette nouvelle fonction par optimisation probabiliste. Ensuite, vu que la fonction de distribution de probabilité peut être connue, une incertitude peut être posée sur la justesse du gain économique. L'avantage d'une telle méthode est que toute la cloche de distribution de probabilité est utilisée, donc l'hypothèse d'une courbe normale n'est plus obligée d'être posée. De plus, avec la fonction de l'espérance de coût en fonction de point de consigne, on a une meilleure idée du comportement économique du procédé. Le désavantage de cette méthode résulte du fait qu'elle n'optimise pas la forme de la FDP afin de faire baisser l'espérance de coût. En conclusion, la méthode décrite est la meilleure méthode pour calculer le gain économique résultant d'une amélioration de la stratégie de contrôle car elle tient compte de toute la courbe de distribution.

### 1.2.3 Formage de fonction de densité de probabilité

Finalement, le cœur de ce projet de recherche est le formage de fonction de densité de probabilité. Cette nouvelle approche dans le domaine de contrôle de procédé permet de changer la forme de la fonction de densité de probabilité. Par conséquent, elle a un impact direct sur le coût de la variabilité puisqu'elle permet d'optimiser le coût d'opération en changeant la forme de la fonction de densité de probabilité. Cette méthode est basée sur le paramétrage de la fonction de densité de probabilité. Ensuite, on y a appliqué une démarche d'optimisation pour trouver la valeur optimale des paramètres qui gouvernent la forme de la FDP. Finalement, on obtient une loi de commande qui permet d'obtenir la fonction de densité de probabilité qui va minimiser le coût d'opération. Peu de publications ont été écrites dans ce domaine. La première mention de la possibilité de former la fonction de densité de probabilité a été faite par Kárný (1996). Ensuite, Wang a développé une stratégie de contrôle avec les poids d'une spline neurale de type B qui paramètre la fonction de densité de probabilité. (Wang 1998, 1999). Crespo (2002) utilise l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov pour trouver un contrôleur. Forbes, par un paramétrage de Gram-Charlier, trouve l'équation d'un quotient de polynôme pour le contrôleur (Forbes et al 2003a, 2003b et 2004). Les méthodes de Wang, Forbes et Crespo seront développées au chapitre trois. En résumé, le formage de fonction de densité de probabilité a été fait par ces méthodes, mais aucune à date n'a été reprise par un autre chercheur.

### **1.3 Objectifs**

En ce qui concerne le coût de la variabilité, la théorie développée à ce jour satisfait les besoins industriels. Il n'y a pas de besoins à développer sur les protocoles déjà faits à ce jour. Dans l'optique du projet, la fonction d'espérance de coût est suffisante. Cependant, il y a beaucoup à développer du côté du formage de fonction de densité. Les méthodes développées jusqu'à date n'ont pas été testées sur des simulations de procédés industriels. En plus, elles sont difficiles à implanter. Par conséquent, l'objectif de ce projet est le développement d'une méthode de formage de fonction de densité de probabilité avec une application à un de procédé chimique.

### **1.4 Contenu/méthodologie**

Le mémoire se divise en 5 chapitres. Le premier sert d'introduction, de recensement des écrits scientifiques et à poser la problématique. Le deuxième chapitre développe les concepts mathématiques nécessaires aux chapitres subséquents. Le chapitre trois décrit les méthodes de formage de fonction de densité de probabilité. De plus, la comparaison est faite entre la méthode de par approximation par G-C de la fonction de densité de probabilité et celle développée dans ce mémoire. Le quatrième chapitre on applique la méthode développée au procédé de Van de Vusse. Finalement, le cinquième chapitre sert de conclusion, un retour sur la méthode développée ainsi que le résumé des contributions scientifiques s'y trouve.

## **1.5 Contributions scientifiques**

La contribution principale de ce projet de maîtrise est le développement d'une méthode de formage de fonction de densité de probabilité. Cette méthode sera expliquée ainsi que ces forces et faiblesses par rapport aux autres méthodes développées. De plus, elle sera appliquée sur le procédé de Van de Vusse pour prouver son applicabilité sur plusieurs types de procédés industriels. De plus, le problème de contraignant la forme de la fonction de densité de probabilité sera abordé.



## Chapitre 2 : Concepts mathématiques

### 2.1 Coût de la variabilité

Un des problèmes majeurs en contrôle de procédé dans l'industrie est d'évaluer le gain économique résultant de l'amélioration des stratégies de contrôle. Sans cette donnée, il est impossible d'évaluer la faisabilité économique d'un projet relié au contrôle de procédé. Par conséquent, cela limite les investissements dans ce domaine ce qui entraîne deux effets : une large partie des opportunités d'augmenter la profitabilité ne sont pas exploitées et un désintéressement à investir dans la recherche dans le domaine du contrôle de procédé. Donc il est impératif de trouver une solution à ce problème. C'est dans cette optique qu'a été écrit ce chapitre : le développement et la description d'une méthode pouvant de calculer le gain économique résultant d'une amélioration de la stratégie de contrôle. En d'autre mot, le coût de la variabilité est défini comme le gain économique pour passer d'une FDP de la variable de sortie à une nouvelle FDP résultant d'une meilleure stratégie de contrôle de procédé. Finalement, cette partie se terminera par un exemple illustratif et trois autres applications possibles de cette méthode. Le lecteur est invité à lire les notions de base en stochastique qui sont présentées en annexe, car elles seront utilisées dans cette partie.

### 2.1.1 Autres travaux

Comme il a déjà été mentionné dans la revue bibliographique, ce problème a été traité sous différents angles. La méthode utilisée ici provient de l'approche prise par Latour (1996, 1992). Celle-ci est basée sur le fait que le coût relié à la variabilité n'est pas seulement dû à un éloignement d'une contrainte, mais aussi au fait qu'il y a aussi une quantité non négligeable de produit qui dépasse cette contrainte. Cette partie de produit peut résulter en une perte monétaire, de temps et possiblement de clientèle. En améliorant la stratégie de contrôle, on se retrouve à diminuer automatiquement cette partie et par conséquent, le procédé est plus profitable. Malheureusement, l'approche qui a été prise par Latour n'a pas été développée d'un point de vue mathématique.

L'approche prise par Zhou (2002, et al. 2003) constitue la base de la méthode utilisée. Cette méthode utilise toute la courbe de distribution de probabilité en utilisant la fonction d'espérance d'une fonction face à une variable aléatoire. Conséquemment, elle permet de calculer les pertes monétaires dues à la production d'unités non conformes. Elle est en somme une méthode d'optimisation du point de consigne qui peut tenir compte de contraintes probabilistes. C'est-à-dire, qu'à la place de Latour qui inclut tout dans sa fonction économique pour calculer le gain économique, Zhou pose une probabilité de dépasser une contrainte. Ensuite, la contrainte probabiliste est transformée en contrainte déterministe avec une hypothèse de courbes de distribution normale.

Notre approche est donc principalement basée sur l'approche de Zhou qui utilise la fonction espérance, tandis que la fonction économique s'inspire de la méthode de Latour dans le sens qu'elle englobe tous les aspects économiques du procédé. Par conséquent, on traduit économiquement chaque variable face au point de consigne. Par exemple, sur la figure 2.1, plus la température dans une unité est élevée, le coût de production baisse. Cependant à 22°C il faut arrêter l'unité, le coût relié à cette mesure de sécurité est inclus dans la fonction économique.

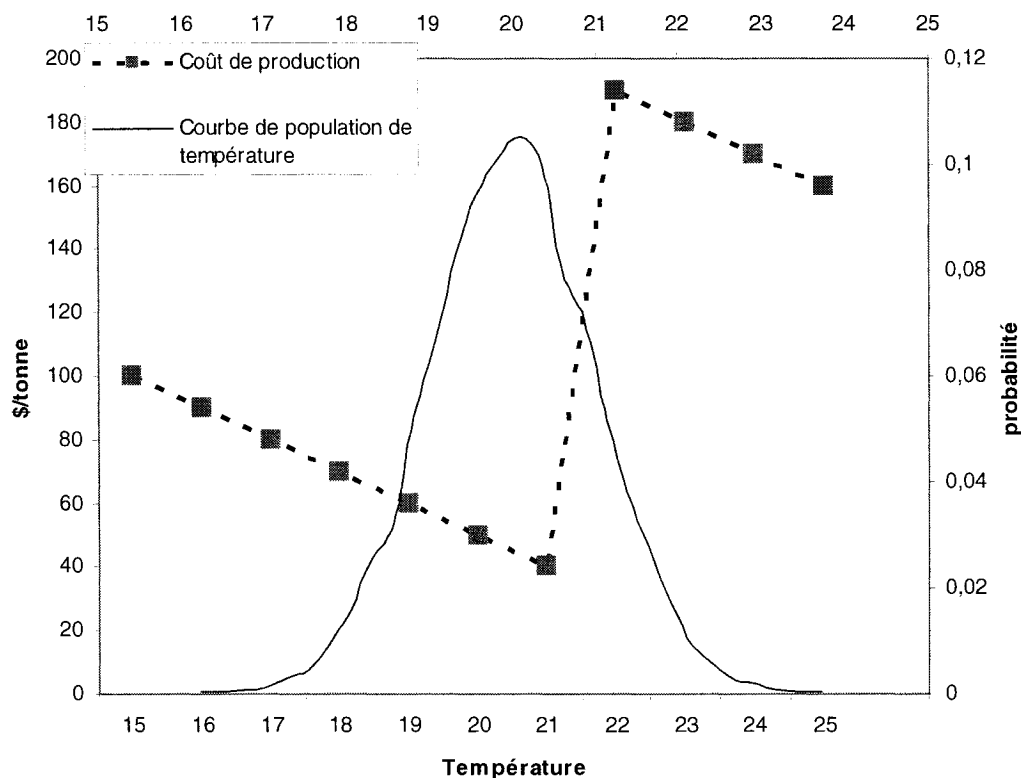


Figure 2.1 Exemple montrant le coût de la courbe de population

### 2.1.2 Description de la méthode

La méthode utilisée est basée sur l'espérance d'une fonction  $f(\xi)$  d'une variable aléatoire qui a la fonction de densité de probabilité  $p(\xi)$  (Borrie 1992).

$$E(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)p(\xi)d\xi \quad (\text{éq. 2.1})$$

Avec la méthode utilisée, la fonction  $f(\xi)$  est une fonction économique qui donne le coût de production par rapport au point de consigne. Elle est créée par un modèle statique.

La fonction de densité de probabilité  $p(\xi)$  représente la courbe de distribution face au point de consigne. À cause de la variabilité, la plupart des points sont d'une part et d'autre du point de consigne. À partir de cette distribution, la fonction de distribution de probabilité est créée.

Quand la méthode d'espérance de coût est appliquée sur plusieurs points  $x$  de consigne, on obtient la fonction espérance de coût. Son minimum est le point de consigne optimal compte tenu de la variabilité présente dans le procédé (voir équation 2.2). Si celle-ci diminue, le point de consigne optimal s'approchera naturellement de la contrainte. Cette démarche ne peut être appliquée que si l'hypothèse de linéarité du procédé et de la stratégie de contrôle est posée. De ce fait, la fonction de distribution de

probabilité ne change pas selon le point de consigne. Ensuite, il est possible d'intégrer la fonction de distribution de probabilité à chaque point de consigne.

$$J_1 = \min_{\text{point\_de\_consigne}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. 2.2})$$

Le coût de la variabilité est directement relié à cette fonction. Il suffit de comparer le coût de production optimal calculé avec des données d'opérations. Ensuite, avec un modèle de procédé, on simule le procédé avec une nouvelle stratégie de contrôle. Avec ces données, la fonction de distribution de probabilité et la fonction de densité de probabilité sont calculées. Il suffit d'y appliquer la méthode de calcul de la fonction d'espérance de coût. Ensuite, le coût optimal de production avec les données d'opérations est comparé avec celui obtenu avec la simulation. Cette différence est le gain économique par unité de production relié à l'amélioration. Par la suite, il est facile de calculer les divers indices comptables pour analyser la viabilité du projet.

### 2.1.3 Développement de la méthode discrète

Dans cette partie, cette méthode sera développée dans un mode discret, ce qui peut en faciliter la compréhension et la programmation d'une méthode numérique.

Avec la méthode précédente

$$\varepsilon(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. 2.3})$$

On transforme la fonction de densité de probabilité par sa définition, la dérivée de la fonction cumulative de probabilité  $P(\xi)$ .

$$\varepsilon(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{dP(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (\text{éq.2.4})$$

On transforme ensuite l'intégrale par une sommation de Riemann

$$\varepsilon(f(x)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \times \frac{\Delta P(\xi)}{\Delta \xi} \times \Delta \xi \quad (\text{éq. 2.5})$$

Les  $\Delta \xi$  s'annulent et le  $\Delta P(\xi)$  est la probabilité de l'événement  $(\xi)$ . Ce qui donne finalement :

$$\varepsilon(f(x)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \times \text{prob}(\xi) \quad (\text{éq. 2.6})$$

Finalement l'espérance de coût n'est que la sommation des coûts multipliés par la probabilité d'occurrence lorsque l'opération s'effectue à un point de consigne spécifique.

Il suffit ensuite de poser les mêmes hypothèses que pour le cas continu et de répéter la méthode pour plusieurs points de consigne pour obtenir la fonction

d'espérance de coût de la variabilité. La fonction de probabilité s'obtient soit par données d'opération ou de simulation. En ce qui concerne la fonction économique et le coût de la variabilité, tout ce qui a été expliqué dans le cas continu s'applique pour le cas discret.

#### **2.1.4 Fonction économique**

À ce point, il est important de répéter le rôle significatif de la fonction économique. Comme il a déjà été dit, celle-ci est le coût de production en fonction du point de consigne. Étant donné que les contraintes probabilistes ne sont pas utilisées, il est important de tout traduire en termes économiques, incluant les contraintes de sécurité. L'oubli d'une contrainte de sécurité peut résulter en un point de consigne dangereux. Donc par pénalisation économique, on peut s'assurer que le point de consigne optimal sera suffisamment éloigné de cette contrainte de sécurité. De l'autre côté, si on pénalise trop cette même contrainte, le point de consigne optimal sera trop loin et entraînera des pertes monétaires. Après, une nouvelle fonction coût sans contraintes de sécurités ou de qualités peut être recalculée. Ceci pour calculer une fonction d'espérance de coût de production qui n'a que des coûts réels pour voir quel sera le coût de production sans l'inclusion de coûts associés à la sécurité, satisfaction du client, etc. De plus, dans plusieurs cas, il faut refaire la fonction économique pour le cas simulé. Étant donné que la nouvelle stratégie de contrôle change les conditions d'opération, la fonction économique doit aussi changer. En résumé, la fonction

économique est relativement compliquée et nécessite beaucoup de travail et d'attention, car le succès de la méthode du coût de la variabilité dépend évidemment de la validité de cette fonction.

### **2.1.5 Exemple**

Voici un exemple illustratif purement mathématique. Une fonction économique a été créée (voir figure 2.2.), ainsi que deux fonctions de distribution représentant les performances de deux stratégies de contrôle (voir figure 2.3). La nouvelle stratégie de contrôle est plus performante que l'ancienne puisque sa fonction de distribution est plus étroite. Donc elle induit moins de variabilité dans la sortie du procédé. Pour calculer la fonction économique, la méthode utilisant la FDP a été utilisée. Les résultats démontrent qu'avec la nouvelle stratégie de contrôle, il est possible d'aller chercher plus facilement le creux de la fonction coût (voir figure 2.4). Ce faisant, le coût de production passe de 23.01\$/unité à une point de consigne de 17 avec l'ancienne stratégie de contrôle à 21.12\$/unité à un point de consigne de 22.5 avec la nouvelle stratégie. Ce qui donne un gain économique de 1.89\$/unité, qui est le coût associé à la variabilité.



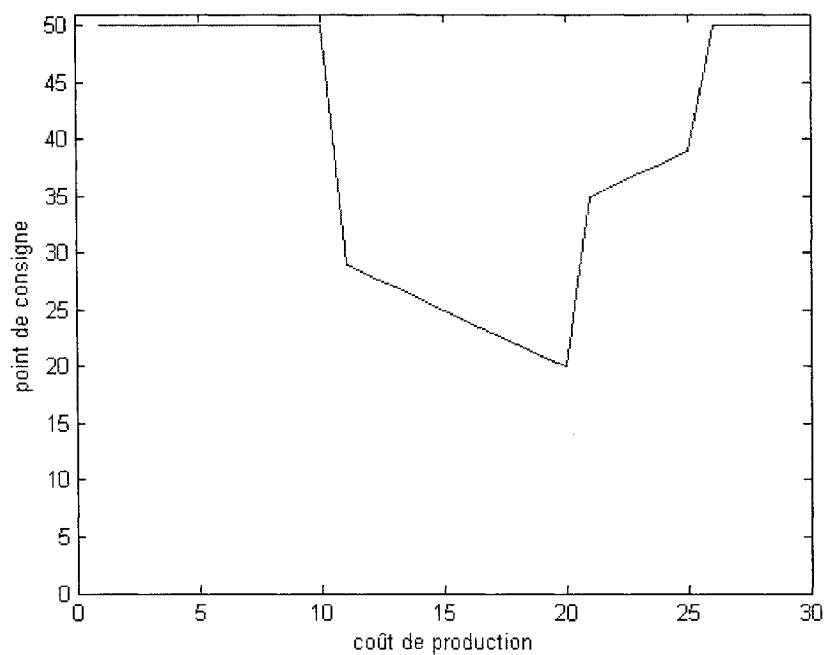


Figure 2.2 Fonction économique pour l'exemple 2.1.5

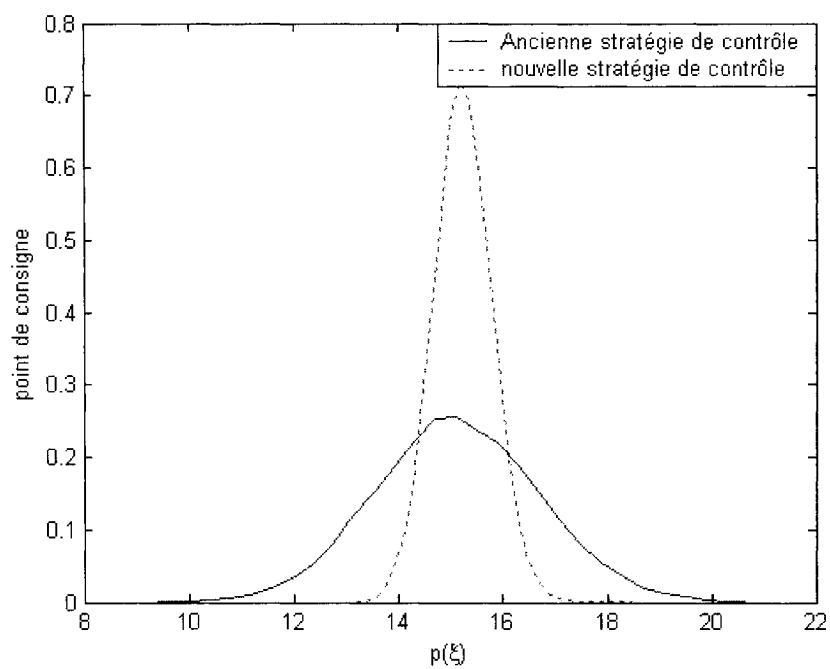


Figure 2.3 Fonction de densité de probabilité des deux stratégies de contrôle pour l'exemple 2.1.5

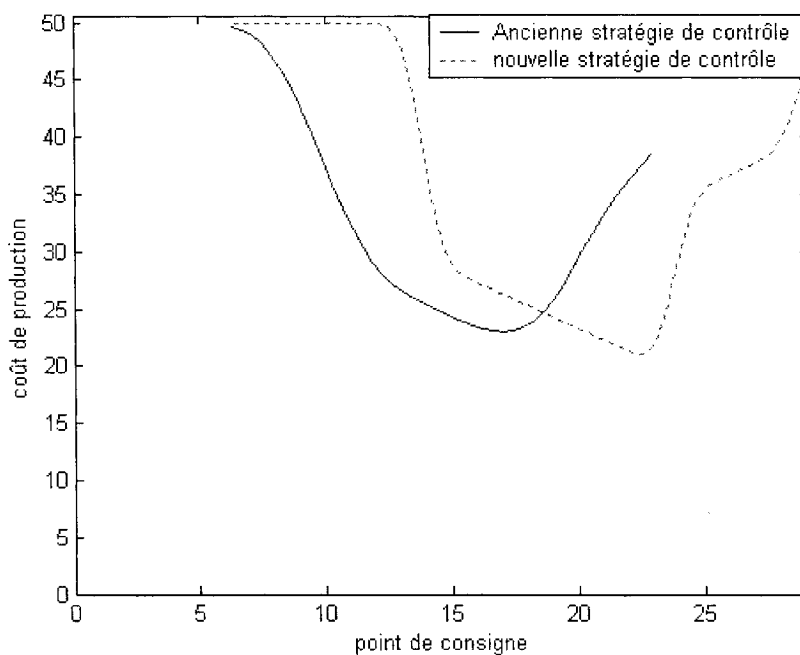


Figure 2.4 Fonction d'espérance de coût entre les deux stratégies de contrôle de l'exemple 2.1.5

### 2.1.6 Avantages et désavantages

Cette méthode a plusieurs avantages et quelques désavantages qui sont décrits ci bas afin que déterminer les limites et les éléments essentiels de la méthode.

L'avantage principal de cette méthode provient du fait qu'elle tient compte de toute la cloche de population. Par conséquent, c'est une méthode qui va calculer l'effet des queues de population, une cause principales de coût de la variabilité, car ce sont pour les éléments les plus éloignés que les coûts sont les plus grands (accidents, perte de clients, surconsommation de produits). En plus, avec l'approche de pénalisation de dépassement des contraintes, il y a optimisation du point de consigne face à cette

contrainte, c'est-à-dire, que le point de consigne sera le plus proche de la contrainte sans que la pénalité économique n'influence trop l'espérance de coût de production. Un autre avantage est la simplicité de la méthode et, hormis la fonction économique, ne nécessite que des données d'opérations pour savoir trouver le point de consigne optimal avec la variabilité actuelle. En somme, la méthode développée tient compte de tous les effets de la variabilité et de plusieurs contraintes tout en étant simple d'application.

Le désavantage principal de la méthode est l'élaboration de la fonction économique. Cette fonction demande beaucoup d'efforts à obtenir. Une unité qui suit ou précède une autre unité avec des courants recirculés peut avoir des interactions non négligeables avec tout le procédé. De plus, dépendant de l'envergure du changement dans le procédé, il se peut qu'il y ait plusieurs fonctions économiques à créer : une pour l'opération normale et d'autre pour les opérations modifiées. Par exemple, une stratégie de contrôle qui solliciterait plus souvent une vanne entraînerait plus d'entretien, donc il faut tenir de ce coût additionnel. Un avantage d'opérer avec cette méthode est que les non linéarités dynamiques ou de point d'opérations n'interviennent pas parce que le modèle statique est utilisé.

### 2.1.7 Applications possibles

Plusieurs utilisations peuvent être tirées de cette méthode. En effet, le principe de la fonction espérance de coût ne s'applique pas seulement à calculer le gain économique résultant d'une amélioration de la stratégie de contrôle. Ce gain économique peut être appliqué à toute amélioration de procédé, pour faire le suivi de procédé, et comme évaluation d'objectif d'investissement.

La première application est le calcul du gain économique résultant d'un changement quelconque sur le procédé. En effet, la méthode développée précédemment ne s'applique pas seulement qu'aux changements sur la stratégie de contrôle. Elle est aussi applicable à tous changements qui peuvent être simulables. Cependant, la fonction économique risque de changer parce que les conditions d'opération changent.

En second lieu, la deuxième application est le suivi de procédés qui se détériorent dans le temps. Dans ce cas, détérioration influence la distribution autour du point de consigne. Plus le procédé se détériore, plus la distribution est large. Éventuellement, il est économiquement logique d'arrêter le procédé, et le remettre à l'état initial. En calculant la fonction économique à intervalles réguliers, il sera possible de poser un écart entre l'espérance de coût actuelle et l'espérance de coût initiale. Quand cet écart atteint une valeur prédéterminée, il sera économiquement profitable d'arrêter complètement le procédé et de le remettre à son état initial. Si lors de détérioration, les conditions d'opération changent, il faudrait faire une autre fonction

économique représentant chaque stage de détérioration, ce qui alourdit considérablement la méthode. La méthode pour calculer le coût de la variabilité peut donc être appliquée dans la gestion des opérations.

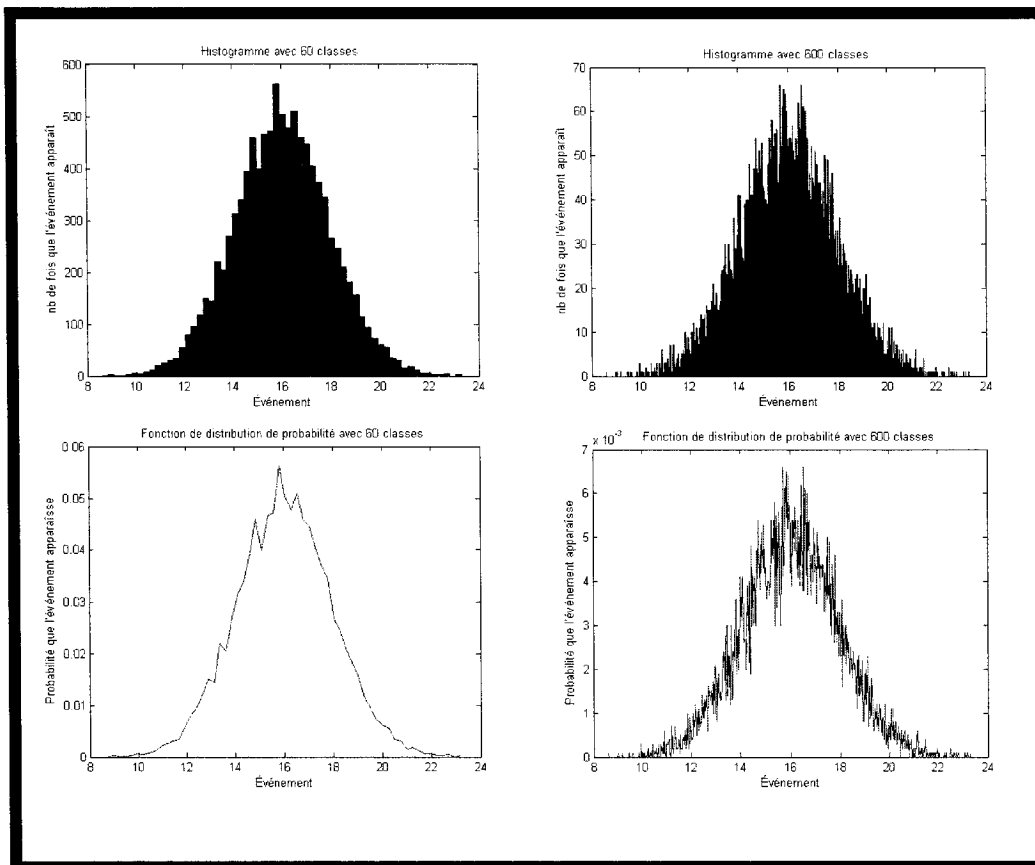
En troisième lieu, la méthode développée pour trouver le coût de la variabilité est aussi appropriée pour établir des objectifs d'amélioration de procédé. En effet, il est possible d'évaluer la baisse de variabilité nécessaire pour avoir un gain monétaire prédéterminé, ou de poser une baisse de variabilité et de déterminer le gain monétaire. Cette méthode commence par poser un gain monétaire. Ensuite avec les données d'opération et la fonction économique, on calcule la fonction d'espérance de coût de production actuelle. Par la suite, avec un logiciel mathématique, on simule une courbe de population analogue, mais avec une variance moindre qui va donner une fonction d'espérance de coût de production qui va donner le gain monétaire désiré. Sachant la diminution de variance, il est possible d'évaluation de la faisabilité de l'objectif visé. À l'inverse, il est possible de vérifier le gain économique avec une baisse de variabilité donnée. Cela donne un outil qui permet de voir la faisabilité économique en anticipant la baisse de variance. En résumé, la méthode développée pour calculer le coût de la variabilité peut être aussi utilisé comme un outil de décision.

## **2.2 Fonctions de densité de probabilité**

### **2.2.1 Choix de la FDP pour paramétrer la courbe de population**

En premier lieu, il faut caractériser la cloche de population. Il existe plusieurs paramètres pour la décrire. La plus simple serait de prendre la fonction de distribution. Cependant, puisque que les caractéristiques sont souvent dans le domaine continu, la fonction de distribution varie en fonction de la taille des intervalles. De ce fait, la fonction de distribution est directement liée au nombre de classe de l'histogramme qui a été utilisé pour faire la fonction de distribution. Ceci est démontré clairement à la figure 2.5, où la cloche de probabilité avec 600 classes est 10 fois plus petite que celle avec 60 classes. Pourtant ces deux fonctions de distribution de probabilité proviennent du même ensemble de données. Par conséquent, la fonction de distribution de probabilité ne peut être utilisée directement pour faire une stratégie de contrôle.

Comme il vient d'être dit, il faut choisir une autre mesure que la cloche de probabilité. Celle-ci est la fonction de densité de probabilité (FDP)(voir équation A-3). Celle-ci a l'avantage de ne pas fortement dépendre du nombre de classes qui ont été utilisés pour calculer la FDP. En effet, puisque celle-ci dépend de la fonction cumulative de probabilité, le nombre de classes n'influencera la FDP à outre mesures. Par conséquent, c'est la FDP qui est utilisée tout au long de ce projet. Cela a l'avantage d'être l'outil statistique qui est aussi utilisé pour calculer le gain économique résultant de l'amélioration de la stratégie de contrôle.



**Figure 2.5** Histogrammes avec 60 et 600 classes et leurs fonctions de distribution de probabilités respectives classes fait à partir du même ensemble de données

### 2.2.2 Fonction de densité de probabilité

La fonction de densité de probabilité (FDP) de Weibull est utilisée dans le cadre de la méthode de formage de fonction en tant que FDP cible. La fonction de densité de Weibull est définie par :

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} \quad (\text{éq. 2.7})$$

où  $b$  est un facteur d'échelle et  $c$  est un facteur de forme. Pour identifier, l'estimation de vraisemblance maximale est utilisée. Les estimateurs de vraisemblance maximum basés sur un ensemble de taille  $n$  sont donnés par :

$$\frac{1}{\hat{c}} - \frac{\sum \hat{X}_i^c \ln X_i}{\sum \hat{X}_i^c} + \frac{\sum \ln X_i}{n} = 0 \quad (\text{éq 2.8})$$

et

$$\hat{b} = \left( \frac{\sum \hat{X}_i^c}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{c}}} \quad (\text{éq 2.9})$$

Cependant, le logiciel Matlab utilise des fonctions sensiblement différentes de celles-ci:

$$f(x) = \alpha \beta (x)^{\beta-1} e^{-\alpha x} \quad (\text{éq 2.10})$$

$$\mu = \alpha^{\frac{1}{\beta}} \times \Gamma(1 + \beta^{-1}) \quad (\text{éq 2.11})$$



$$\sigma^2 = \alpha^{\frac{2}{\beta}} \times [\Gamma(2 + \beta^{-1}) - \Gamma^2(1 + \beta^{-1})] \quad (\text{éq 2.12})$$

L'avantage d'utiliser une FDP de Weibull est qu'il est possible d'avoir une queue d'un côté ou de l'autre de la moyenne.

### 2.2.3 Fonctions de densité de probabilité approximées

L'avantage principal d'approximer une FDP est qu'un paramétrage transforme la courbe en une équation. Ainsi, il est plus facile d'en déduire un algorithme de formage afin de changer la forme de la FDP.

Hong Wang utilise une spline B neurale afin de paramétrer la fonction de densité voulue (Wang, 1998, 1999, Wang et al., 2002) tandis que Michael Forbes utilise une approximation de Gram-Charlier (Forbes, 2003). Pour des raisons qui seront expliquées plus tard, l'approche de Wang n'a pas beaucoup été étudiée. C'est pourquoi, seulement la méthode d'approximation par Gram-Charlier (G-C) est expliquée dans ce mémoire.

#### 2.2.3.1 Transfert d'une distribution en une équation avec les fonctions de G-C

Tout le développement mathématique de cette section provient de la thèse de Forbes (2003). Celle-ci est basée sur l'approximation de la FDP par des fonctions de base de Gram-Charlier (G-C). Les fonctions de bases de GC sont bien adaptées pour

exprimer une FDP faiblement non gaussienne. Puisque chaque coefficient a un sens statistique, chaque FDP de G-C peut être modifiée pour avoir une FDP aux propriétés voulues. Dans le cas ci présent, seul le cas monovariante va être expliqué. Les fonctions de bases de Gram-Charlier proviennent de la dérivation d'une fonction de densité de probabilité gaussienne :

$$\phi_i = (-1)^i \frac{\sigma^i}{\sqrt{i!}} \frac{d^i N_{\mu,\sigma}(z)}{dz^i} \quad (\text{éq. 2.13})$$

Par conséquent, les 5 premières fonctions de base  $\phi_i$  de Gram-Charlier sont :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= N_{\mu,\sigma}(z) \\ \phi_1 &= \frac{z-\mu}{\sigma} N_{\mu,\sigma}(z) \\ \phi_2 &= \frac{z^2 - 2\mu z + \mu^2 - \sigma^2}{\sqrt{2}\sigma^2} N_{\mu,\sigma}(z) \\ \phi_3 &= \frac{z^3 - 3\mu z^2 - 3\sigma^2 z + 3\mu^2 z + 3\sigma^2 \mu^2 - \mu^3}{\sqrt{2}\sigma^2} N_{\mu,\sigma}(z) \\ \phi_4 &= \frac{z^4 - 4\mu z^3 + 6\mu^2 z^2 - 6\sigma^2 z^2 - 4\mu^3 z + 12\sigma^2 \mu^2 z + 3\sigma^4 - 6\sigma^2 \mu^2 + \mu^4}{\sqrt{2}\sigma^2} N_{\mu,\sigma}(z) \end{aligned} \quad (\text{éq. 2.14})$$

Il est à noter que chaque fonction de base est le produit d'un polynôme d'Hermite (éq. 2.14) et une FDP gaussienne. De plus, les fonctions de base gardent la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite.

$$h_k(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^k k!}} e^{x^2} \frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k} \quad (\text{éq. 2.15})$$

Une FDP faite à partir des fonctions de bases de G-C, est une combinaison linéaire de ceux-ci :

$$p_{GC}(z) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_N\phi_N \quad (\text{éq 2.16})$$

Toutefois, il se peut que la FDP ainsi créée ne réponde pas aux conditions pour être une FDP. Il faut vérifier qu'elle soit positive partout et que l'intégrale de celle-ci sur tout le domaine donne 1. Cette dernière condition est toujours respectée quand le coefficient  $c_0$  vaut 1.

Les coefficients  $c_i$  sont déterminés par l'intégrale suivante qui vient de la propriété d'orthogonalité :

$$c_i = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(z) p_{GC}(z) dz \quad (\text{éq 2.17})$$

Où  $p_{GC}$  est la valeur, de la fonction de densité de probabilité à transférer au point  $z$ .

### 2.2.3.2 Exemple de transfert d'une distribution par l'approximation de G-C

#### Protocole

La méthode vise à vérifier si une FDP quelconque peut être transformé en un polynôme ayant comme fonction de base un polynôme de Gram-Charlier. En résumé, la méthode consiste à générer une population de points aléatoires selon une fonction de densité de probabilité non normale. Dans ce cas, le type de FDP choisi est une de type gamma. Ensuite, la fonction cumulative de probabilité et la FDP de cette population sont calculées. Ensuite, cette FDP sert au paramétrage de celle-ci. Le protocole se

divise en huit étapes :

- 1- Génération de points aléatoires selon une FDP prédéterminée gamma, la FDP « Test »
- 2- Calcul de la fonction de distribution de probabilité
- 3- Calcul de la fonction cumulative de probabilité
- 4- Calcul de la fonction de densité de probabilité
- 5- Calcul des coefficients  $c_x$  qui vont multiplier les fonctions de base
- 6- Compiler la FDP et la calculer
- 7- Calculer la fonction cumulative de probabilité
- 8- Calculer la fonction de distribution de probabilité

Les résultats qui suivent ont été obtenus à partir de deux distributions. La première étant faiblement non gaussienne et la deuxième étant fortement non gaussienne.

## Résultats

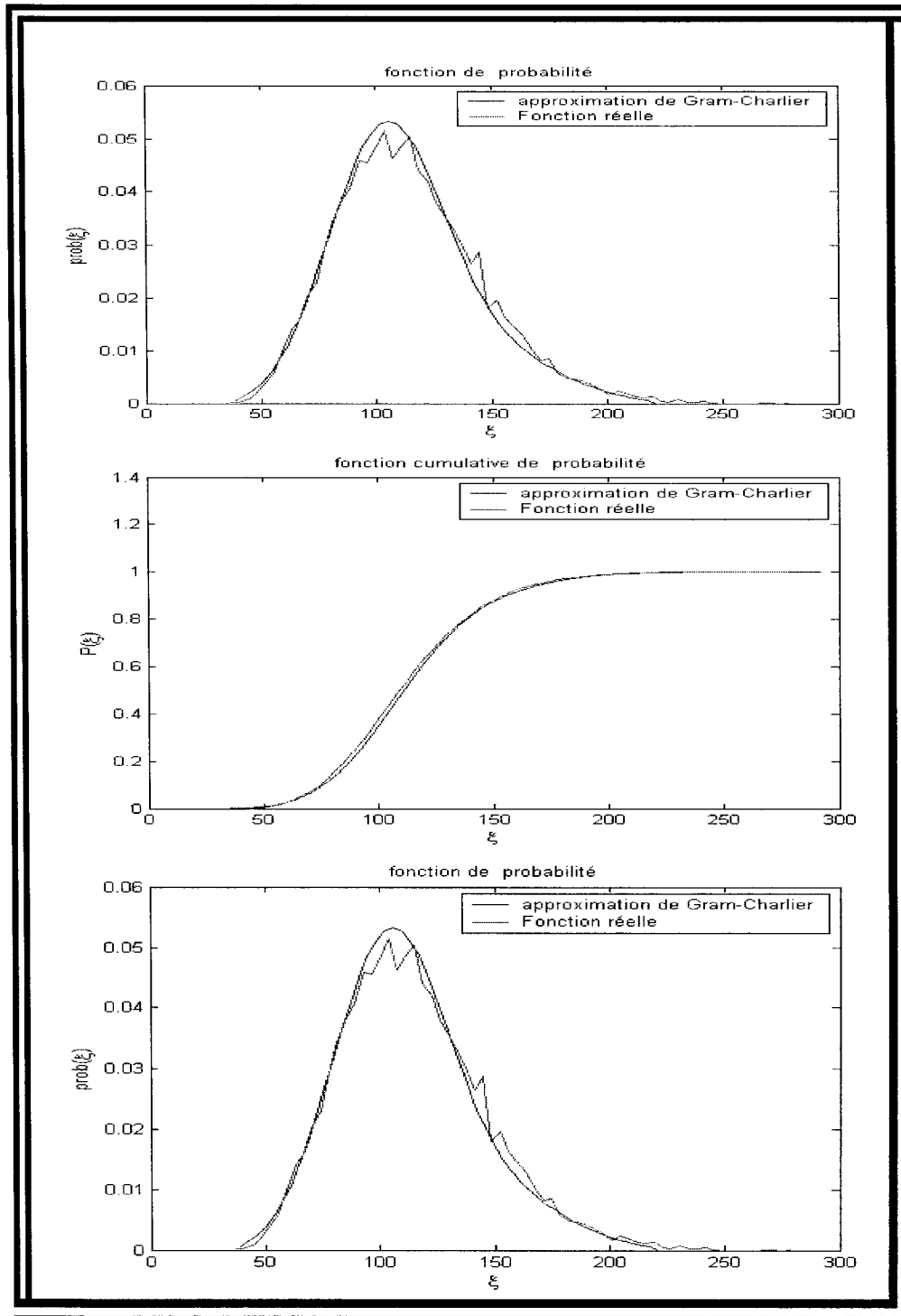


Figure 2.6 Résultats avec un FDP faiblement non gaussienne

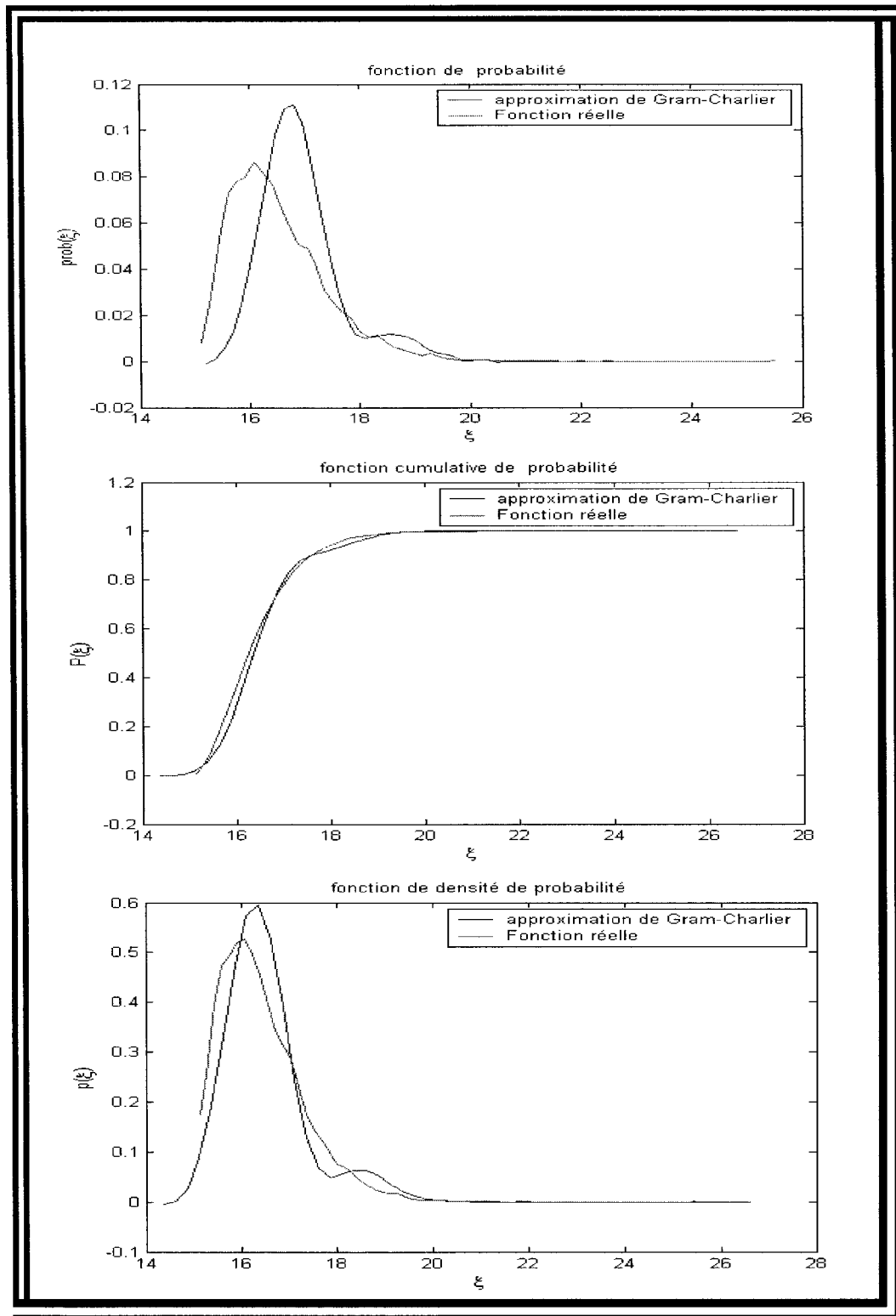


Figure 2.7 Résultats avec un FDP fortement non gaussienne

## Discussion

La méthode fonctionne dans le cas faiblement non linéaire, mais moins bien quand la fonction de densité de probabilité (FDP) est fortement non-linéaire. La FDP approximée suit l'allure de la FDP réelle malgré le fait que celle-ci possède quelques points irréguliers. C'est qu'en utilisant les données comme la moyenne, l'écart type et la FDP, on « lisse » la courbe réelle et on amoindrit le bruit naturel dû à la nature aléatoire des fonctions de distribution de probabilité réelle.

Quand la méthode est appliquée à une FDP faiblement non gaussienne (voir figure 2.6), les résultats sont très concluants. La FDP suit pratiquement la FDP réelle et la fonction de distribution de probabilité et très proche de la courbe réelle qui est obtenue par un ensemble de données aléatoires suivant une loi de distribution.

Quand la méthode est appliquée à une FDP fortement non gaussienne (voir figure 2.7), les résultats sont moins concluants. La FDP de G-C suit sommairement la FDP « réelle » en ayant ses caractéristiques générales, telle la queue de la courbe, mais sans jamais la suivre parfaitement. De plus, l'approximation modifie la FDP pour la rendre bimodale. Cela est répercuté sur la fonction de distribution de probabilité qui elle aussi suit la courbe « réelle » sans jamais la toucher.

En conclusion la méthode d'approximation d'une fonction de densité de probabilité par des fonctions de base de Gram-Charlier donne des résultats satisfaisants quand une fonction faiblement non gaussienne est approximée. Si celle-ci est fortement non gaussienne, la FDP approximée garde les caractéristiques générales de la FDP original mais la déforme sensiblement. Donc, cette méthode peut être utilisée pour avoir une équation qui servira au formage de la fonction de densité de probabilité par contrôle tant qu'elle est faiblement gaussienne.



### 2.2.4 Optimisation de la fonction de densité de probabilité

Pour trouver la FDP optimale pour le coût de la variabilité, il faut appliquer une routine d'optimisation semi infinie qui optimise les paramètres de la FDP (Weibull ou l'approximation de Gram-Charlier) dans l'équation 2.18. De plus, il faut que la variance de la nouvelle FDP soit égale à la variance d'opération, sinon, l'algorithme de formage de FDP sera trop agressif et entraînera un usage excessif des équipements. En résumé, par le paramétrage de la FDP, on peut optimiser sa forme, c'est-à-dire résoudre numériquement le problème d'optimisation suivant :

$$J_2 = \min_{\substack{\text{paramètres\_de\_la\_FDP} \\ \text{S.T.} \\ \sigma = \sigma_{\text{operation}}}} \left[ \min_{\text{point\_de\_consigne}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi \right] \quad (\text{éq. 2.18})$$

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts mathématiques nécessaires au calcul du coût de la variabilité ainsi que pour le formage de FDP ont été abordés. La première partie est entièrement consacrée aux outils stochastiques afin de déterminer le coût de la variabilité, la notion la plus importante étant l'équation 2.1, la fonction d'espérance de coût. Ensuite, l'autre partie de ce chapitre est consacrée aux FDP. Après avoir choisi le paramétrage de la FDP cible par une FDP de Weibull, l'approximation de G-C a été testée avec deux exemples. Elle performe moins bien quand la FDP est fortement non gaussienne. Toutes les notions développées dans ce chapitre servent à faire le formage de la FDP qui sera décrite au chapitre suivant.

## Chapitre 3 : Formage de fonction de densité de probabilité

Dans ce chapitre, différentes façons de former une fonction de densité de probabilité (FDP) sont expliquées. Il y a deux façons d'aborder ce problème. La première consiste à voir la FDP d'une façon dynamique. C'est-à-dire, qu'elle passe d'une certaine FDP à une FDP désirée par l'intermédiaire du contrôleur. Cette manière implique un paramétrage dans le temps qui donne un contrôleur qui varie dans le temps. L'autre manière de voir le formage de FDP est par la stationnarité. Par conséquent, le contrôleur voulu donne la FDP cible en régime stationnaire. Le contrôleur est ainsi invariable dans le temps.

### 3.1 Formage de FDP dynamique

Un seul parmi les auteurs cités dans le recensement des connaissances scientifiques applique le formage de FDP dynamique. Il s'agit de Wang qui utilise un paramétrage de la FDP cible avec une spline B neurale. Le formage de FDP dynamique transforme les équations pour en dériver la FDP à chaque pas de temps. Par conséquent, la progression de la FDP originale vers la FDP désirée peut être observée.

Avec Wang, le paramétrage de la FDP (ou de sa racine carrée) avec une spline B permet de faire un algorithme qui affecte directement les poids multipliant les fonctions de bases. Ce qui fait que la dynamique de la FDP est directement reliée à

l'algorithme. Cependant, le choix des fonctions de base se fait par essais et erreurs, donc cette méthode est difficile à mettre en pratique. Plusieurs algorithmes pour trouver le contrôleur ont été développés (Wang 1998, 2002)(Wang et al 2001, 2002a, 2002b, 2002c)(Guo et al 2003a, 2003b, 2005a, 2005b). Voici les grandes lignes du premier algorithme (Wang, 1999).

Soit  $u(k) = (u_1(k), u_2(k), u_3(k), u_m(k))^T$  le vecteur de contrôle qui contrôle la distribution de  $y$ , un vecteur aléatoire continu borné qui est la sortie du procédé,  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$ . Le système stochastique peut être écrit sous la forme :

$$\{u(k)\} \rightarrow \{y\} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{éq. 3.1})$$

La FDP désirée  $\Phi(y, u(k))$  est définie par :

$$\phi(y, u(k)) = \sum_{i=1}^{N+1} w_i(u(k)) B_i(y(k)) + e_0(y, u(k)) \quad (\text{éq. 3.2})$$

qui est une spline B de réseaux neuronaux où les  $w_i(u(k))$  sont les poids qui multiplient les fonctions de base  $B_i(y(k))$ . Les fonctions de base sont trouvées par essais et erreur et il n'y a pas de lien entre elles et le modèle physique (Wang et al. 2002a). Les poids étant une fonction de la variable manipulée, un changement dans la FDP provient directement d'un changement de la variable manipulée. La valeur  $e_0(y, u(k))$  est l'erreur entre la FDP obtenue et celle désirée. Le contrôleur est défini par la minimisation d'une fonction coût. Deux algorithmes ont été développés, l'un connaissant l'entrée aléatoire du système, l'autre plus robuste décompose la fonction

coût afin de minimiser l'impact de l'entrée inconnue. Cela est fait en incorporant les termes influencés par l'entrée inconnue dans la fonction coût. Puisque cette méthode est difficilement applicable aux procédés industriels à cause des fonctions de bases, elle n'a pas été analysée plus en profondeur.

## **3.2 Formage de fonction de densité de probabilité statique**

Le formage de FDP statique est défini par le design de contrôleur afin d'avoir une FDP en régime stationnaire, la dynamique pour faire passer la FDP à la FDP désirée n'est pas considérée. Dans cette partie, deux méthodes sont décrites : celle de Forbes (2004) qui utilise une approximation de Gram-Charlier et celle de Crespo et al. (2002) qui utilise l'équation de Fokker-Plank-Kolmogorov (F-P-K). Les deux utilisent des polynômes dans leurs algorithmes de formage pour créer la non-linéarité nécessaire pour former une FDP asymétrique.

### **3.2.1 Méthode de formage de FDP avec l'équation de F-P-K**

Selon Crespo et al. (2002) le procédé est un procédé de Itô excité par un bruit qui est un procédé de Wiener. Avec l'équation de Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK) et sa solution stationnaire, une équation de la FDP du système est obtenue. Ensuite, le contrôleur est obtenu par la solution d'un problème d'optimisation où l'on veut minimiser la l'erreur qui est la différence entre la FDP obtenue et la FDP désirée. Cependant, pour simplifier les calculs afin d'obtenir un contrôleur, l'erreur entre la FDP

cible et la FDP d'opération est modifiée. La forme du contrôleur est un polynôme de la variable mesurée et ce sont les coefficients qui multiplient la mesure. Pour en revenir avec la méthode développée par Crespo, en voici les grandes lignes :

Considérant le procédé stochastique à une dimension décrit par l'équation d'Itô suivante :

$$dz(t) = \{\Phi(z) + U(z)\}dt + d\xi(t) \quad (\text{éq. 3.3})$$

où  $z(t)$  est la variable d'état,  $\Phi$  est une fonction non linéaire de  $z$ ,  $U(z)$  est le contrôleur et  $\xi(t)$  est une procédé de Wiener tel que  $E[d\xi(t)] = 0$  et  $E[d\xi(t) d\xi(t')] = 2(t-t')$ .

L'équation de FPK associée à ce système est :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta}{\delta z} [\{\Phi(z) + U(z)\}p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (\text{éq. 3.4})$$

La solution stationnaire de cette équation est donne la FPD  $p_s$  suivante :

$$p_s(z) = D e^{2\phi(z)} \quad (\text{éq. 3.5})$$

Où  $D$  est une constante de normalisation et  $\phi(z) = \int \{\Phi(z) + U(z)\} dz$  est le potentiel de probabilité. Après, une FDP cible,  $\hat{p}$  est posée ainsi que la structure de l'algorithme de formage. Dans l'exemple cité par Crespo, celui-ci est un polynôme avec un terme de

commutation pour tenir compte de l'incertitude du modèle. Ensuite, une fonction d'erreur modifiée est minimisée par une optimisation des coefficients du polynôme.

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z) \sum_{r=0}^N \left[ \frac{d^r}{dz^r} (\phi - \hat{\phi}) \right]^2 dz \quad (\text{éq. 3.6})$$

Cette méthode n'a pas été analysée parce que la structure du contrôleur est la même que la méthode d'approximation de Gram-Charlier. Seule la façon de trouver les paramètres diffère.

### 3.2.2 Méthode de formage de FDP stationnaire avec l'approximation de Gram-Charlier

La méthode développée par Forbes (Forbes et al., 2003a, 2003b, 2003c, 2004) se base sur l'équation 3.7 et les propriétés orthogonales des fonctions de bases de Gram-Charlier. On se retrouve avec un ensemble d'équations à résoudre en fonction des coefficients qui multiplient les fonctions de base de l'approximation de la FDP par Gram-Charlier.

$$p(z) = \int_{\mathbb{R}^n} p_w(z - f(\xi)) p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. 3.7})$$

La méthode se base sur l'équation 3.7 qui relie la valeur d'une FDP en boucle fermée à un point  $z$  à l'intégrale de  $\xi$  sur  $\mathbb{R}$  de la multiplication de la FDP du bruit entrant dans le système évaluée au point  $z$  moins la réponse du système en boucle fermée évaluée à  $\xi$  par la FDP en boucle fermée évaluée à  $\xi$  :

Avec l'approximation  $\hat{p}$  de Gram-Charlier

$$\hat{p}(z; c) = c^T h(z) N_{\mu, \Sigma}(z) \quad (\text{éq. 3.8})$$

En choisissant une réponse en boucle fermée avec autant de coefficients à déterminer qu'il y a de fonctions de base pour l'approximation de Gram-Charlier, c'est pourquoi la forme polynomiale est souvent choisie. L'équation 3.7 devient :

$$c^T h(z) N_{\mu, \Sigma}(z) = \int_{\mathfrak{R}^n} p_w(z - f(\xi)) c^T h(\xi) N_{\mu, \Sigma}(\xi) d\xi \quad (\text{éq. 3.9})$$

Ensuite en invoquant la condition d'orthogonalité des coefficients de l'approximation de Gram-Charlier où  $i$  est le  $i$ ème terme de l'approximation :

$$c^i = \int_{\mathfrak{R}^n} h^i p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. 3.10})$$

L'équation 3.9 devient :

$$c^T = c^T \int_{\mathfrak{R}^n} \int_{\mathfrak{R}^n} p_w(z - f(\xi)) c^T N_{\mu, \Sigma}(\xi) h(\xi) h^T(z) d\xi dz \quad (\text{éq. 3.11})$$

La double intégrale est une matrice  $\Gamma$  de dimension  $N \times N$  composées de valeurs réelles.

$$c^T = c^T \Gamma \quad (\text{éq. 3.12})$$



Le vecteur  $c$  est le vecteur propre de la matrice  $\Gamma$  associé à la valeur propre de 1. Il suffit de résoudre les équations pour trouver la valeur des coefficients du paramétrage en boucle fermée et retrouver l'équation du contrôleur par la suite.

### **3.2.3 Méthode développée dans le cadre du projet de recherche**

Dans l'envergure originale du projet de recherche, il n'avait pas été prévu de faire le développement d'une nouvelle méthode de formage de FDP. Cependant, en faisant l'analyse des méthodes existantes de formage de FDP, il est apparu évident qu'une meilleure méthode pour changer la forme d'une fonction de densité de probabilité pouvait être développée. Les méthodes existantes se basant sur le comportement en régime stationnaire utilisent un contrôleur basé sur un quotient de polynôme. C'est-à-dire que le contrôleur est un polynôme avec des coefficients qui multiplient des puissances de sorties du procédé. Ces méthodes sont très sensibles à des variations de paramètres et sont stables sur un petit intervalle.

Dans le formage de fonction de densité de probabilité, il est nécessaire de créer des dynamiques non-linéaires si une FDP autre que gaussienne est désirée. Par conséquent, la seule unité où une telle non linéarité peut être créée facilement est dans le contrôleur. Dans la méthode développée dans le cadre de ce projet de recherche, cette non linéarité est créée par l'ajout d'un contrôleur commutant, par conséquent la dérivée est infinie au point de commutation. La commutation permet d'obtenir un

algorithme avec une plage d'opération plus grande tout en étant non linéaire. Le contrôleur commute entre 2 gains qui multiplient l'erreur entre le point de consigne.

Voici la démarche de la conception du contrôleur:

- 1- Choix de la FDP désirée
- 2- Établissement d'une boucle de contrôle par rétroaction où le contrôleur est un contrôleur commutant
- 3- Établissement du point de commutation (0 par défaut)
- 4- Trouver les gains du contrôleur commutant par optimisation semi infinie où la fonction coût est l'intégrale de la différence au carrée entre la FDP obtenue et désirée :

$$J_3 = \min_{K_1, K_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (p(\xi)^* - p(\xi))^2 d\xi \quad (\text{éq. 3.13})$$

Note - Il est possible d'inclure le point de consigne comme variable de décision dans le problème d'optimisation.

Note -  $p(\xi)$  est obtenue par Monte-Carlo parce qu'il n'y a pas d'équation reliant un procédé commutant à une FDP.

### 3.3 Variance minimale et maximale

Durant les travaux exécutés dans le cadre de ce projet de recherche, il a été noté que la forme de la FDP est limitée. La première limite étant la variance minimale, soit la limite inférieure de la variance que la variable de sortie du système en boucle fermée peut avoir (Åström, 1970). Dans le cadre du projet, la variance minimale est redéfinie par la variance minimale atteignable avec une structure de contrôleur imposée (dans ce cas-ci : un seul contrôleur proportionnel, parce que l'algorithme de formage de FDP est composé exclusivement de constantes proportionnelles). De l'autre côté, il y a une limite supérieure à la variance que le système ne peut dépasser. Dans les deux exemples traités dans ce projet de recherche, celle-ci est atteinte lorsqu'il n'y a pas de contrôleur. Dans d'autres cas, la variance est déterminée par la limite de stabilité du système. Un autre facteur limitant la variance maximale est la saturation de la variable manipulée, puisque celle-ci est limitée, il est normal que la variable de sortie soit aussi limitée. De plus, aucune étude n'a été réalisée sur le comportement des FDP entre ces deux limites. Pour qualifier l'envergure des changements possibles sur la forme de la FDP, un nouvel indice approximatif a été créé. C'est le ratio entre la variance maximale et la variance minimale. Plus ce ratio est grand, plus grande est l'étendue des formes que peut prendre la FDP de sortie. En résumé, durant les travaux de ce projet de recherche, il a été remarqué que la FDP cible était bornée supérieurement et inférieurement sur sa variance, et par conséquent sa forme.

### **3.4 Comparaison entre la méthode utilisant G-C et celle de ce projet**

Dans cette partie, la méthode de formage de FDP par contrôleur commutant et celle de Forbes (Forbes 2004). Le cas choisi est celui qui est utilisé dans la thèse de Forbes. Par après, les performances des contrôleurs seront comparées ainsi que leurs caractéristiques.

### 3.4.1 Description du procédé

Le procédé utilisé est un réacteur où un produit unique se décompose. Voici l'équation de bilan discret :

$$c(t+1) = c(t) + \frac{F(t)}{V}(c_m - c(t))\Delta t - \frac{1}{V}(kc(t) + w(t))\Delta t \quad (\text{éq. 3.14})$$

La réaction se produit dans un réacteur parfaitement mélangé, la réaction est du premier ordre avec un terme additif  $w$ . Voici les valeurs numériques des différents paramètres.

**Tableau 3.1 Données de l'exemple 3.4.1**

| Donnée        | Valeur                   |
|---------------|--------------------------|
| $F_t$ nominal | 0.003 m <sup>3</sup> /s  |
| $c_t$ nominal | 0.005 mol/m <sup>3</sup> |
| $c_{in}$      | 5 mol/m <sup>3</sup>     |
| $V$           | 3 m <sup>3</sup>         |
| $K$           | 0.297m <sup>3</sup> /s   |
| $\Delta t$    | 5 s                      |
| $W$           | N <sub>0,0005</sub>      |

Variable contrôlée : Concentration à la sortie

Variable manipulée : Débit à l'entrée

### 3.4.2 Fonction de densité de probabilité cible

Puisque cet exemple provient des travaux de Forbes, la FDP cible est une FDP approximée par Gram-Charlier donc les coefficients sont:

$$p(c(t)) = (1 - 0.078h_3(c(t)) + 0.048h_4(c(t)))N_{0.05, 0.00093}(c(t)) \quad (\text{éq. 3.15})$$

La FDP associée à ces coefficients est donnée à la figure 3.1.

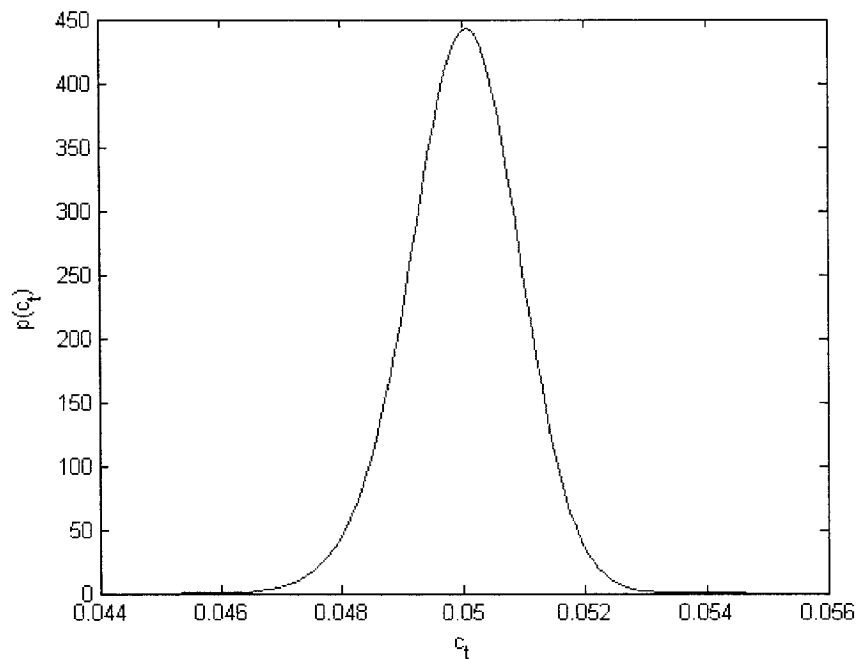
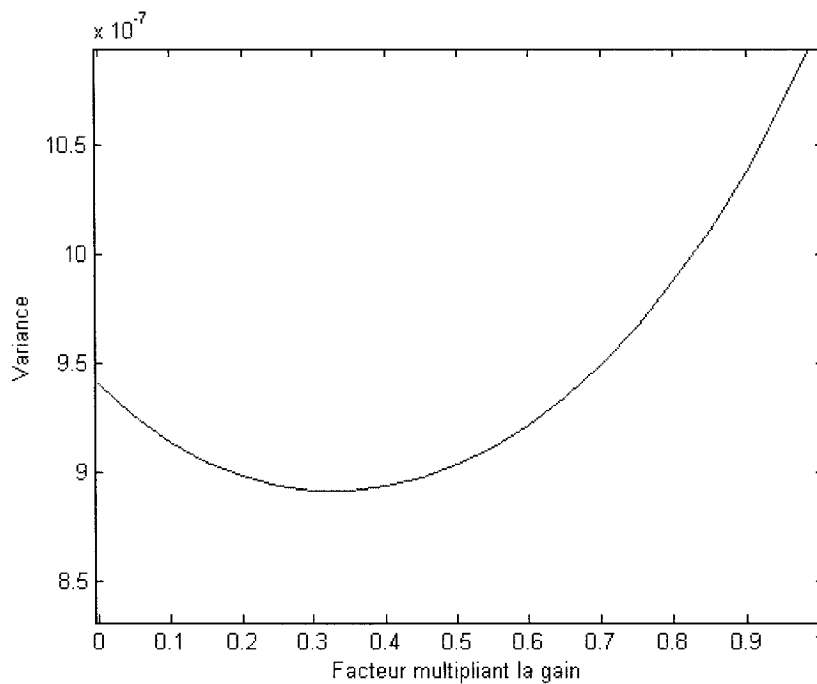


Figure 3.1 FDP cible utilisé dans l'exemple

### 3.4.3 Variance minimale et maximale du procédé.

La variance minimale et maximale sont intéressantes à déterminer parce qu'elles semblent donner des indications sur les limites de la forme que la fonction de densité de probabilité peut prendre. S'il y a une grande différence entre la variance minimale et maximale, alors la FDP peut exprimer de fortes tendances non

gaussiennes. Il est à noter que la variance minimale est déterminée par la plus faible valeur de la variance qui peut être obtenue avec un compensateur par gain (voir figure 3.2). La variance maximale est la variance en l'absence de compensateur, puisque le gain du compensateur vaut 0. Si le gain est supérieur au gain de la variance minimale, le système devient instable. Donc, voici le graphique de la variance en fonction du gain d'un compensateur.



**Figure 3.2** Variance du procédé en fonction du gain d'un compensateur

Dans ce cas, la variance maximale (sans gain) est de  $9.4 \times 10^{-7}$  et la variance minimale avec un gain 0.35 fois le gain du procédé est de  $8.9 \times 10^{-7}$ . Par conséquent, le rapport variance maximale sur la variance minimale est de 1.05, ce qui peut expliquer que la forme de la FDP n'est que faiblement gaussienne.

### 3.4.4 Algorithme de formage de FDP trouvé par approximation de Gram-Charlier

Voici le contrôleur trouvé avec la méthode d'approximation de la FDP par G-C (valeur venant de Michael Forbes):

$$F(t) = \frac{3(a_0 + (a_1 - 0.505)c(t) + a_2(c(t))^2 + a_2(c(t))^2 + a_3(c(t))^3 + a_4(c(t))^4}{25 - 5c(t)} \quad (\text{éq. 3.16})$$

$$a_0 = 110.0498755$$

$$a_1 = -8882.596811$$

$$a_2 = 268696.9890$$

$$a_3 = -3608879.625$$

$$a_4 = 18159618.27$$

où  $c(t)$  est la concentration à la sortie du réacteur au temps.

### 3.4.5 Algorithme de formage de FDP par gain commutant

Voici le contrôleur trouvé avec la méthode des gains commutants:

$$F(t) = 3 \times 10^{-3} + 5.71 \times 10^{-4} \times e(t) \quad \text{si } e < 0$$

$$F(t) = 3 \times 10^{-3} + 3.31 \times 10^{-2} \times e(t) \quad \text{si } e > 0$$

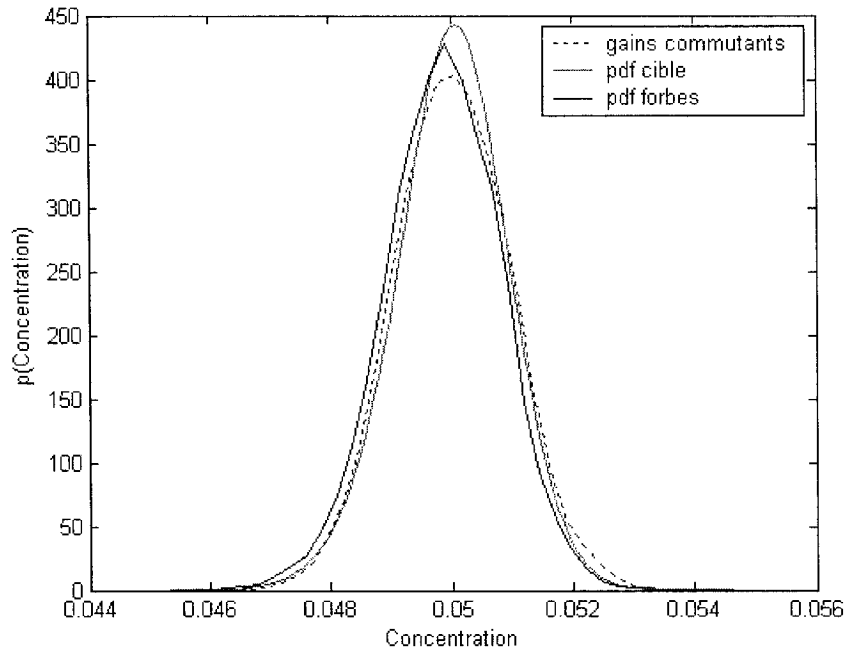
$$F(t) = 3 \times 10^{-3} \quad \text{si } e = 0$$

$$e(t) = 0.05 - c_{\text{sortie}}(t)$$



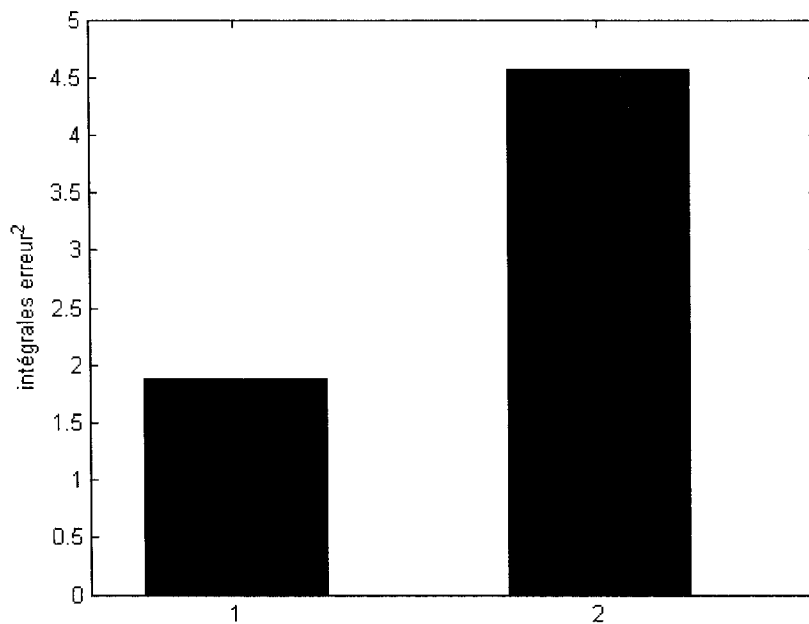
### 3.4.6 Résultats

Voici à la figure 3.3 les résultats obtenus.



**Figure 3.3 FDP obtenues par la méthode par approximation de Gram-Charlier, par gains commutants et cible**

La figure 3.4 montre les valeurs de l'intégrale de la différence au carré entre la FDP cible et la FDP obtenue.



**Figure 3.4** Valeur de l'intégrale de l'erreur au carré face à la FDP cible: (1) méthode par gains commutant, (2) méthode par approximation de G-C

On voit que la méthode par gain commutants donne un meilleur résultat tout en étant simple. Par conséquent, cette méthode est validée en tant que méthode pour former une fonction de densité de probabilité. Il est à noter que le troisième moment (l'asymétrie) de la FDP cible est de  $-1.5 \times 10^{-10}$ , celui de la FDP par approximation de GC est de  $-1.8 \times 10^{-10}$  et celui de la FDP gain commutant est de  $-1.6 \times 10^{-11}$ . Par conséquent, les valeurs sont trop petites pour être significatives. Maintenant, il serait intéressant de mieux qualifier les différences entre ces deux méthodes d'un point de vue mathématique.

### 3.4.7 Comparaison mathématique entre les deux méthodes

La figure 3.5 montre la variable manipulée dans le temps et la figure 3.6 montre leur population

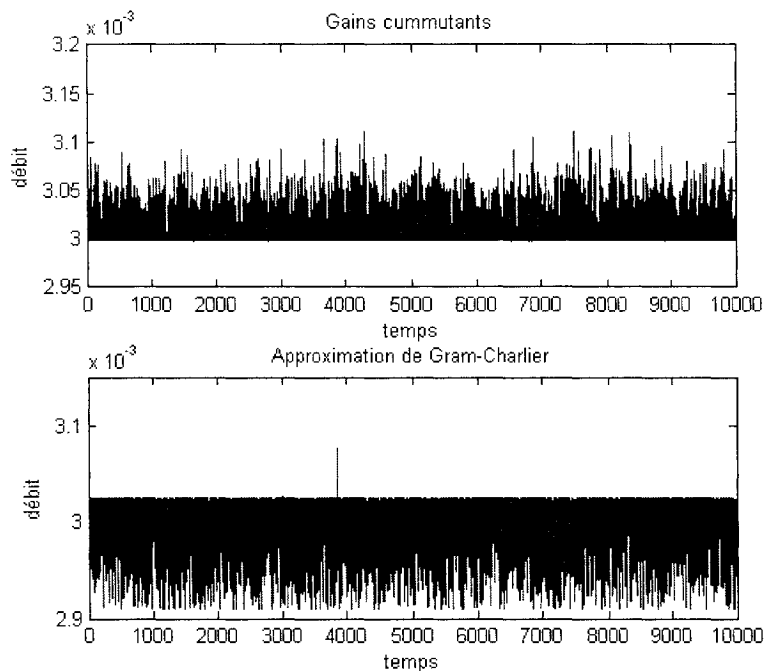


Figure 3.5 Variable contrôlée dans le temps pour les deux méthodes de formage de FDP

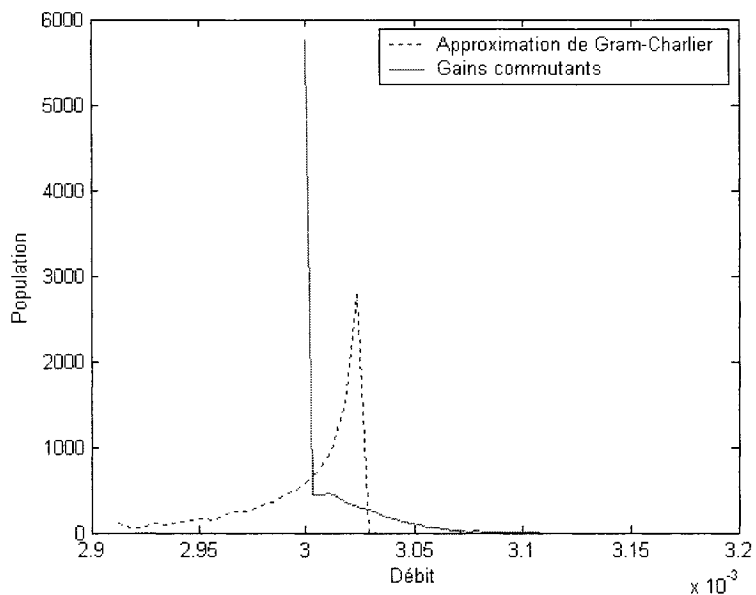


Figure 3.6 Courbes de population de la variable manipulée pour les deux méthodes

Le profil de la variable manipulée varie grandement selon la méthode de formage de FDP utilisée. Quand la méthode de Forbes est utilisée, la moyenne de la variable manipulée est de  $3.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  et la variance de  $7.27 \times 10^{-10} \text{ m}^6/\text{s}^2$ . Quand la méthode des gains commutants est utilisée, la moyenne de la variable manipulée est de  $3.01 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{seconde}$  et une variance de  $3.37 \times 10^{-10} \text{ m}^6/\text{s}^2$ . Puisque la variance avec de la méthode des gains commutants a une variance inférieure, elle demande un effort plus petit sur la variable manipulée. Ces différences sont dues aux non linéarités qui sont générées de deux manières différentes.

Les figures 3.7 et 3.8 présentent le débit en fonction de l'erreur et le gain en fonction de l'erreur

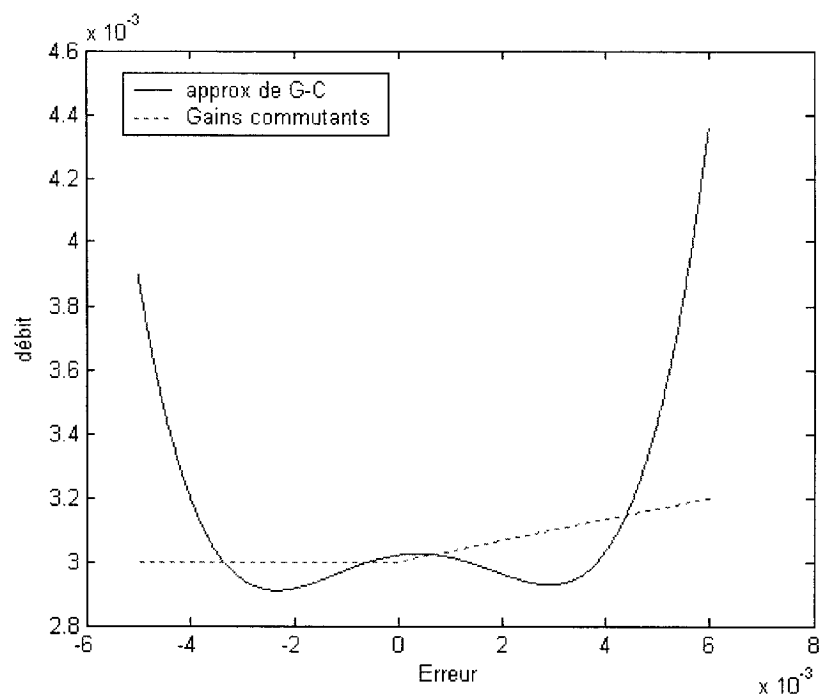
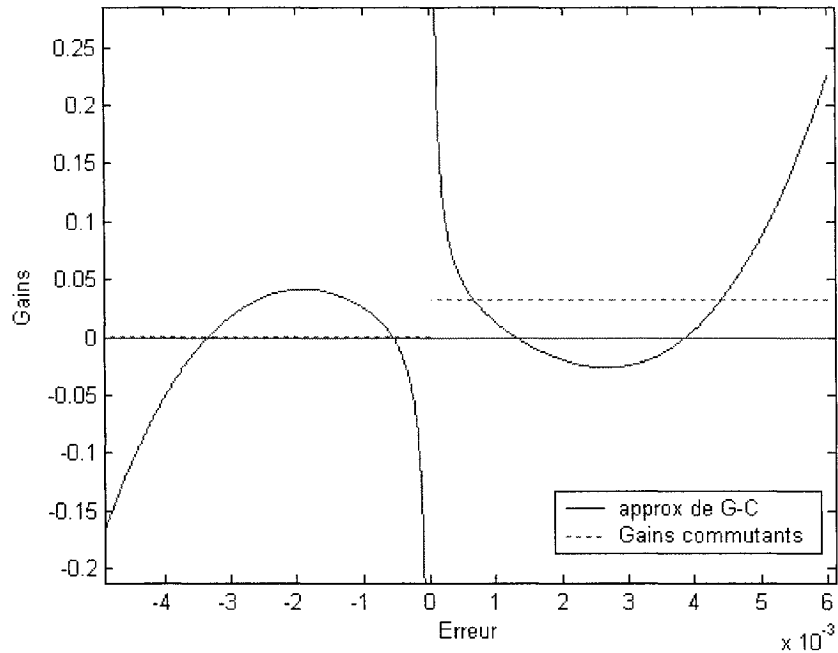


Figure 3.7 Variable manipulée pour les deux méthodes de formage de FDP



**Figure 3.8 Gain par rapport à l'erreur pour les deux méthodes de formage de FDP**

À la figure 3.7, il est facile de voir que l'algorithme de formage de FDP par approximation de Gram-Charlier a une plage d'opération plus petite que l'algorithme par gains commutants. C'est à cause des puissances (2-3-4) dans la méthode par approximation de G-C dans la qui prennent le dessus quand il y a de grandes erreurs. De plus, il est intéressant de montrer que le contrôleur donne un débit au dessus de  $3 \times 10^{-3}$  quand il y a une erreur de zéro, c'est pourquoi le gain est infini quand l'erreur est zéro. Cela s'explique par le fait que c'est un contrôleur pour le formage de FDP et non pour le suivi d'un point de consigne. Par conséquent, il se peut que le contrôleur amène le système à un autre point que le point de consigne. Quant à la figure 3.8, il est intéressant de comparer le gain de la méthode d'approximation de G-C avec celui de la méthode des gains commutants. Ainsi la méthode de gain commutants a un gain de

$5.71 \times 10^{-4}$  quand l'erreur est négative et un gain de  $3.31 \times 10^{-2}$  lorsque l'erreur est positive. Avec la méthode d'approximation de G-C, le gain change de signe plusieurs fois et tend vers l'infini lorsque l'erreur est de 0. Puisque cette méthode n'utilise pas l'erreur, par conséquent le gain calculé n'a pas de significations et aucune conclusion n'est possible.

### **3.4.8 Avantages et désavantages entres les deux méthodes**

#### **Avantages de la méthode des gains commutants**

1- Simplicité de la méthode: Puisque cette stratégie de contrôle consiste à utiliser un contrôleur commutant et à optimiser les différents paramètres de celui-ci afin d'obtenir une FDP qui s'approche de la FDP cible. Cette méthode peut s'appliquer à différents problèmes de contrôle.

2-Performance: Les performances du contrôleur commutant sont sensiblement meilleures que celles d'un contrôleur quadratique. En effet, la valeur de l'intégrale de l'erreur au carré pour la méthode pour le contrôleur commutant est d'environ 1.8 tandis que celle du contrôleur quadratique est de 4.5.

3-Stabilité: Quoique non testée, la stabilité du système avec des contrôleurs commutants est meilleure que le contrôleur quadratique, parce que le contrôleur quadratique est fait pour un petit intervalle d'opération. Le lecteur est invité à lire les travaux d'Hespanha et al. (1999) pour en savoir plus sur la stabilité des systèmes commutants.

### **Désavantage de la méthode des gains commutants**

Le développement mathématique est incomplet. En effet, le lien entre le contrôleur et le la FDP s'effectue par essais et erreurs. Par conséquent, il n'y a pas de preuve que les paramètres optimaux ont été trouvés. De plus, sans ce lien mathématique, il est difficile de trouver la variance maximale et le paramétrage optimal du contrôleur. Il serait intéressant de développer une méthode qui relie les deux sans passer par l'optimisation dynamique.

## **3.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de formage de FDP ont été analysées. Le formage de FDP dynamique n'a pas été analysé en profondeur car il semble plus intéressant de s'attarder au régime stationnaire car il est directement relié au coût de la variabilité. Toutes les méthodes de formage de FDP stationnaire se basent sur la création d'une commande non-linéaire. Les méthodes de Forbes et Crespo utilisent un quotient de polynôme de la mesure. La méthode développée dans le cadre de ce projet de recherche est basée sur un contrôleur commutant. Cette méthode a été testée sur un cas qui a déjà été appliqué avec la méthode par approximation de G-C, ainsi les performances des deux méthodes ont pu être comparées. La méthode développée est aussi performante que l'autre tout en étant très simple. Son seul désavantage est qu'il n'y a pas de lien explicite entre l'algorithme trouvé et la FDP obtenue. Par la suite, la

méthode de formage de FDP par contrôleur commutant va être testée sur un cas typique de procédé industriels au chapitre suivant.



# Chapitre 4 : Exemple avec procédé de Van de Vusse

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la méthode de formage de FPD par contrôleur commutant est testée sur une simulation du procédé réactionnel de Van de Vusse. Ce procédé est utilisé afin de démontrer que la méthode de formage de FPD par contrôleur commutant peut être applicable à beaucoup de procédés chimique affectés par un bruit (changement dans la qualité des réactifs, changements de température, &c).

## 4.2 Description

Les réactions de Van de Vusse sont un ensemble de réactions chimiques dans un réacteur isotherme, avec un volume constant et parfaitement mélangé (voir figure 4.1). Le réactif A réagit dans le réacteur et seulement le produit B est désiré.

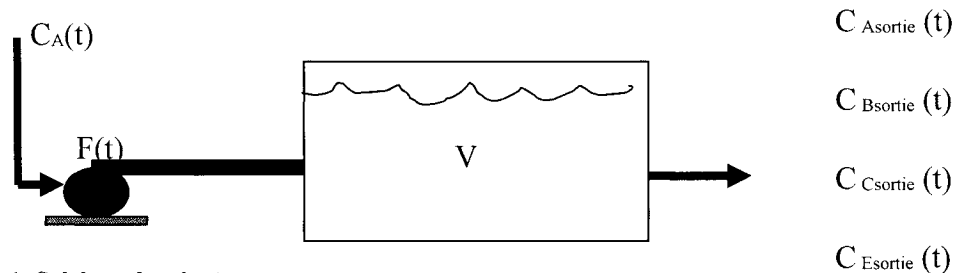


Figure 4.1 Schéma du réacteur

Les réactions se déroulant dans le réacteur sont les suivantes :



Données numériques

$$k_1 = \frac{5}{6} \text{ min}^{-1}; k_2 = \frac{5}{3} \text{ min}^{-1}; k_3 = \frac{1}{6} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{min}}$$

$$C_{Ais} = 10 \frac{\text{mol}}{\text{L}} + \varepsilon; \varepsilon = N_{0,0.0316}$$

$$V = 1 \text{ m}^3$$

Dans le cadre du projet, le bruit entrant dans le procédé vient de la concentration de A. La concentration de B est contrôlée en manipulant le débit entrant dans le réacteur, ce qui se résume à changer le facteur de dilution D (voir figure 4.2). C'est pour cette raison que le volume n'est pas spécifié.

Le procédé est fortement non linéaire puisque la concentration du produit B atteint un point optimal, et de chaque côté de ce point optimal, le système possède un gain de signe inverse. L'opération du procédé à ce point devient difficile.

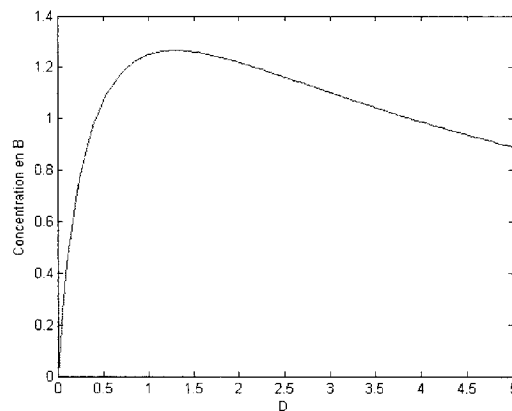


Figure 4.2 Concentration du composant B à la sortie en fonction du facteur de dilution

### 4.3 Démarche suivie

Voici la démarche suivie pour appliquer les notions présentées dans ce projet de recherche

**1-Établissement de la fonction coût :** (section 2.1.4) Avec les variables d'opération et en posant les liens qui relient celles-ci avec une valeur économique, la fonction économique est obtenue, qui relie le point de consigne à une valeur économique.

**2- Établissement de la FDP optimale :** (section 2.2.4) Par le paramétrage de la FDP et en posant la variance voulue, on peut maintenant optimiser la forme de la FDP ainsi que le point de consigne.

$$J_1 = \min_{\text{point de consigne}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)p(\xi)d\xi \quad (\text{éq. 4.2})$$

$$J_2 = \min_{\substack{\text{paramètres de la FDP} \\ \text{S.T.} \\ \sigma = \sigma_{\text{opération}}}} \left[ \min_{\text{point de consigne}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)p(\xi)d\xi \right] \quad (\text{éq. 4.3})$$

**3- Établissement de l'algorithme de formage de FDP :** (section 3.2.3) Avec une FDP optimale à former, les paramètres de l'algorithme de formage de FDP sont trouvés par optimisation numérique :

$$J_3 = \min_{K_1 K_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (p(\xi)^* - p(\xi))^2 d\xi \quad (\text{éq. 4.5})$$

Il est possible de combiner  $J_2$  et  $J_3$ , mais les coûts en calcul sont trop importants. Le problème a donc été divisé en deux parties.

## 4.4 Fonction économique

Pour créer une fonction coût associé à ce procédé, il faut poser plusieurs hypothèses.

- 1- Les revenus ne proviennent que de la quantité de B et selon sa concentration(fig 4.3)
- 2- Le réactif A revient à un coût constant de 45\$ par mole
- 3- Le coût associé à la séparation de A est relié à sa concentration (fig. 4.4)

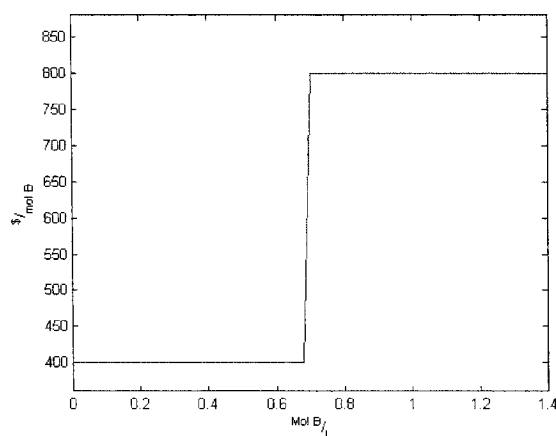


Figure 4.3 Revenu par mole de B en fonction de sa concentration

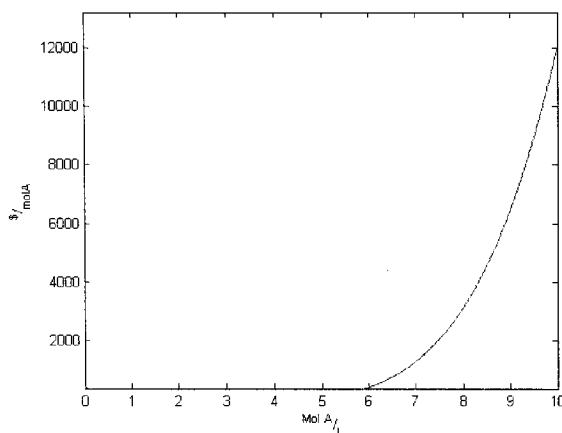


Figure 4.4 Coût pour séparer une mole de A en fonction de sa concentration

La fonction économique est obtenue quand ces trois coûts sont calculés en fonction de la concentration de B (voir figure 4.5). Il est à noter que la fonction possède un intervalle où deux facteurs de dilution sont possibles pour une même valeur de  $C_b$  (ce n'est pas une fonction d'un point de vue mathématique). Par conséquent, il y a deux coûts possibles pour certaines valeurs de  $C_b$ .

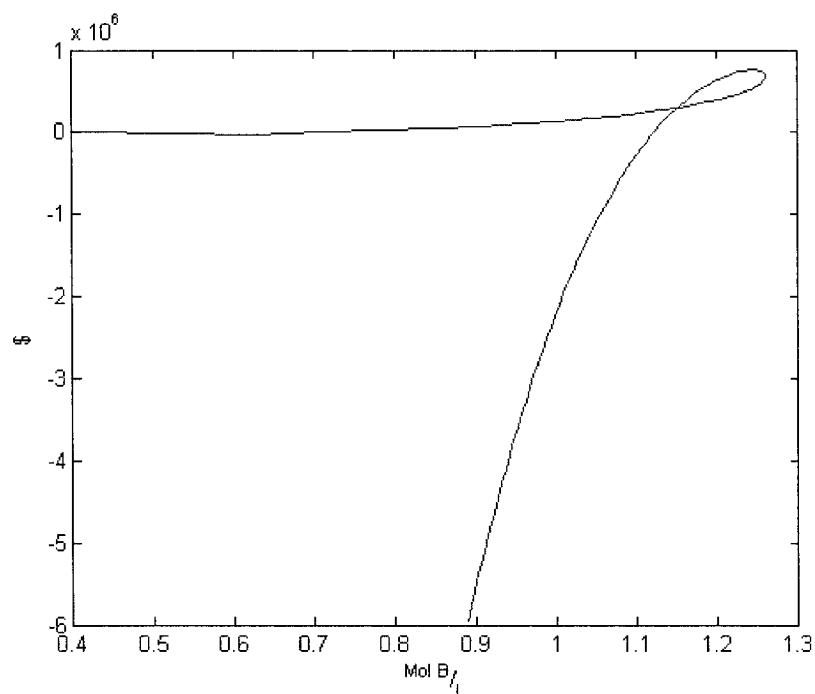
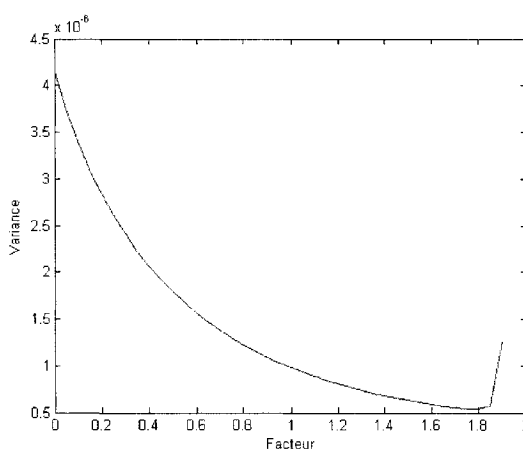


Figure 4.5 Profit en fonction du point de consigne sur la concentration de B

## 4.5 Variance minimale et maximale

Pour savoir la capacité de la FDP du système à être non gaussienne, le test de variance minimale et maximale est exécuté. Comme il a déjà été dit, on prend la variance simulée avec un compensateur proportionnel seulement. L'échelle est par rapport au facteur multiplicatif qui multiplie l'inverse du gain du système. Il est à noter que le gain du système est de  $-8.5859 \text{ mol/s}^{-1}$ . Le résultat de la multiplication est la constante du compensateur proportionnel. Dans ce cas-ci, que la PDF peut montrer des caractéristiques non gaussiennes supérieures au cas vu dans chapitre 3. La variance maximale est de  $4.2 \times 10^{-6}$  et la variance minimale est de  $0.6 \times 10^{-6}$ . Le rapport entre la variance maximale et minimale est de 7. Ceci est beaucoup plus élevé que dans l'exemple du chapitre 3 (qui était de 1). Par conséquent, il devrait ne pas y avoir de problème pour choisir un FDP tant que sa variance est entre la variance maximale et minimale.



**Figure 4.6** Variance de la concentration B, en fonction du facteur multipliant l'inverse du gain du système dans le compensateur

## 4.6 Fonction de densité de probabilité désirée

La fonction de densité de probabilité désirée (voir figure 4.7) est trouvée par optimisation numérique (éq. 4.3). En posant la variance et un des deux paramètres d'une FDP de Weibull, il est possible d'obtenir le second paramètre. Avec le maximum de la fonction d'espérance économique associée à cette FDP, celle-ci est utilisée comme fonction à optimiser. Par conséquent, le résultat est la FDP qui donne de maximum de revenu avec une variance posée. Dans le cas présent, en posant une variance de  $7 \times 10^{-7}$ , l'équation 4.3 est résolue pour trouver les paramètres de l'équation 2.10. Donc voici la FDP optimale (figure 4.7) ainsi que la fonction d'espérance économique associée à cette FDP (figure 4.8). Le point optimal d'opération est 1.2253 mol/l de CB (voir figure 4.8), la moyenne de la FDP avec les paramètres a et b est de 0.013, c'est pourquoi il faut l'enlever à la translation.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ab(x - (1.2253 - 0.013))^{b-1} e^{-ax^b} \\
 a &= 4.023329 \times 10^{29} \\
 b &= 15
 \end{aligned}
 \tag{éq. 4.6}$$

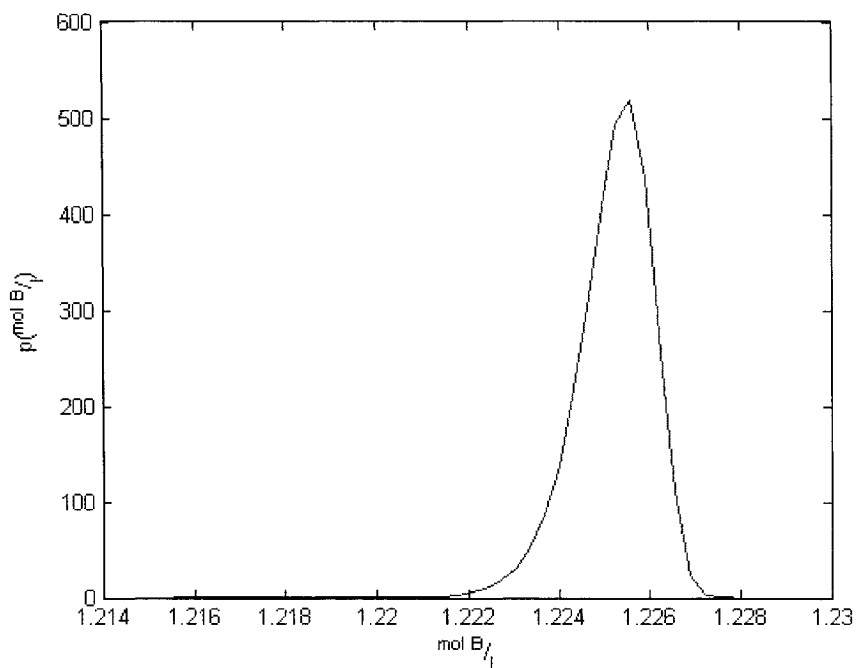


Figure 4.7 FDP cible de la concentration de B

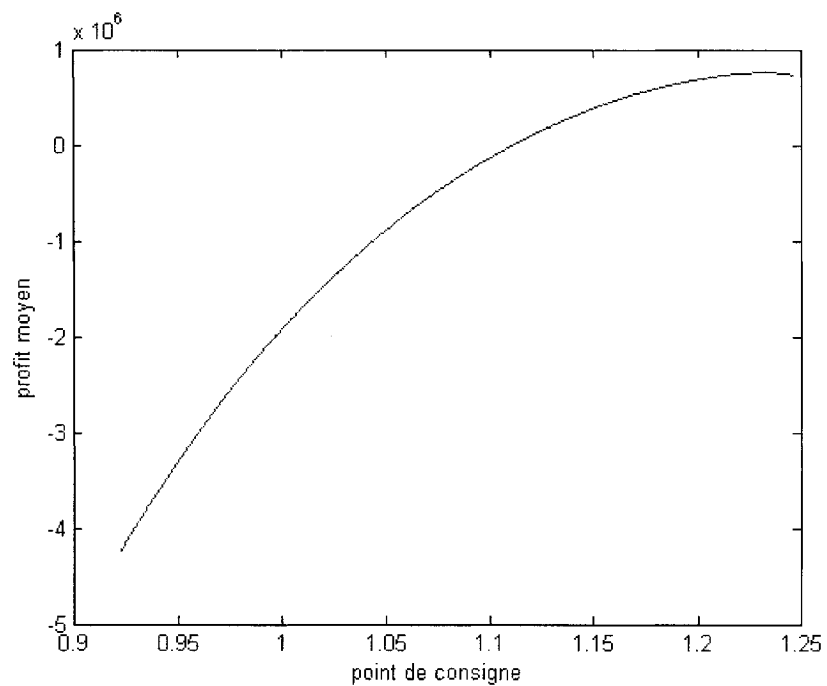


Figure 4.8 Fonction espérance du profit avec la FDP cible la fonction économique



## 4.7 Contrôleur et résultats

Par optimisation numérique l'équation 4.5 a été solutionnée et les paramètres du contrôleur commutant ont été trouvés. En plus des deux gains, le point de consigne a été rajouté pour améliorer les performances. Ce faisant, ce paramètre applique une translation à la FDP. Donc voici le schéma Simulink utilisé:

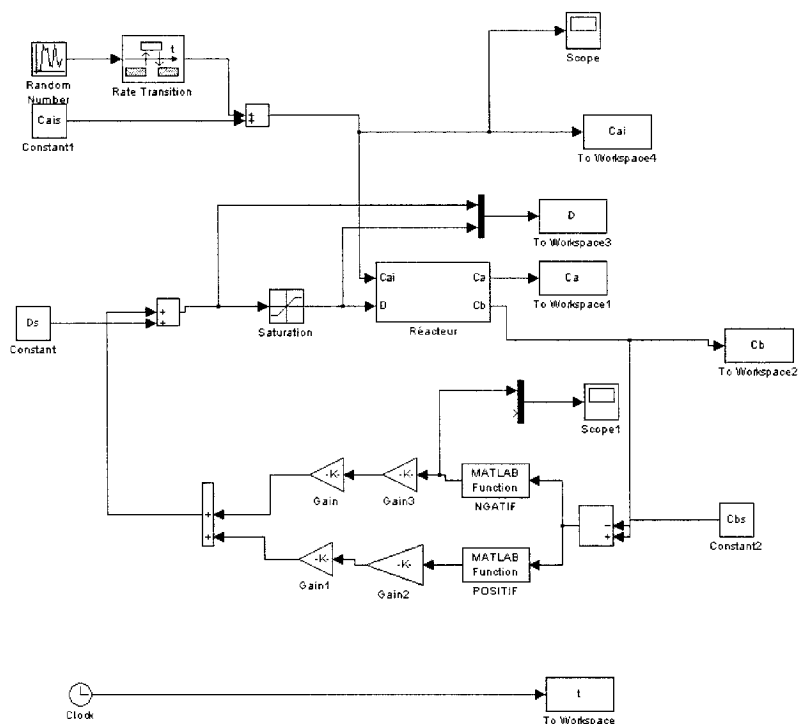


Figure 4.9 Schéma Simulink pour le formage de FDP sur le procédé de Van de Vusse

On y voit le bloc générant le bruit de procédé, la saturation sur la variable manipulée ainsi que le contrôleur à gains commutant.

Voici le contrôleur :

$$D(t) = 1.9396 + 1.1395 \times \text{gain}^{-1} \times e(t) \quad \text{si } e < 0$$

$$D(t) = 1.9396 + 1.8859 \times \text{gain}^{-1} \times e(t) \quad \text{si } e > 0$$

$$D(t) = 1.9396 \quad \text{si } e = 0$$

(éq. 4.7)

$$e(t) = 1.2256 - C_{\text{Bsortie}}(t) \quad (\text{le point de consigne avant était de } 1.2253)$$

$$\text{gain} = -8.5859$$

Voici la FDP obtenue (figure 4.10) avec ce contrôleur et la FDP. Les résultats sont très concluants, la FDP obtenue ressemble beaucoup à la PDF cible.

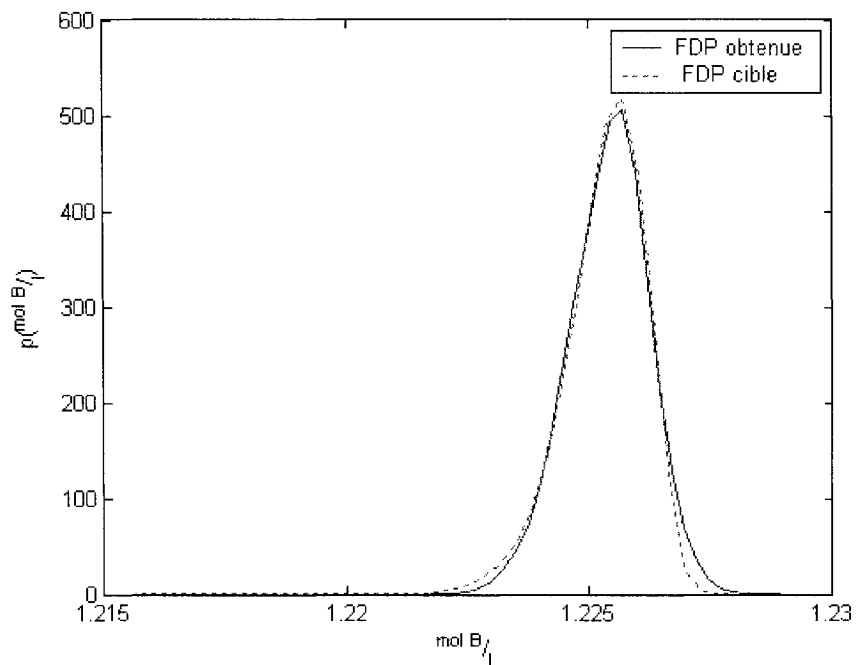


Figure 4.10 FDP obtenue par un contrôleur à gains commutants et FDP cible

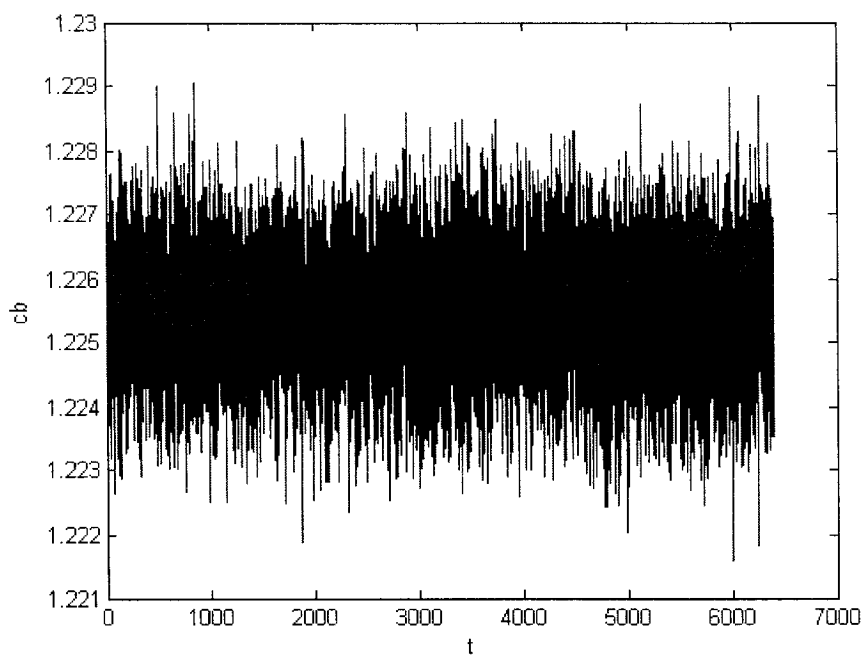


Figure 4.11 Profil de la concentration de B(variable contrôlée) à la sortie dans le temps

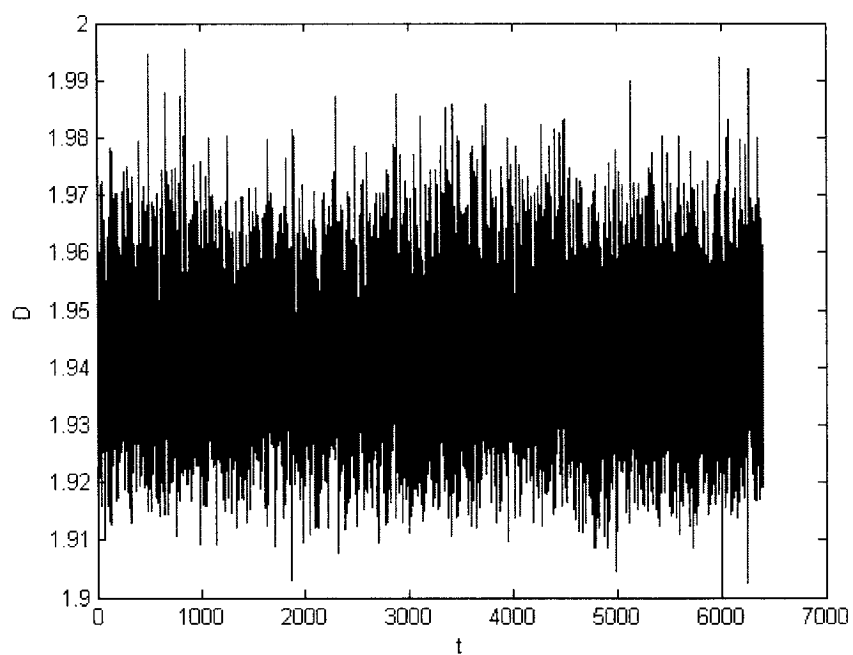


Figure 4.12 Profil de D (variable manipulée) dans le temps

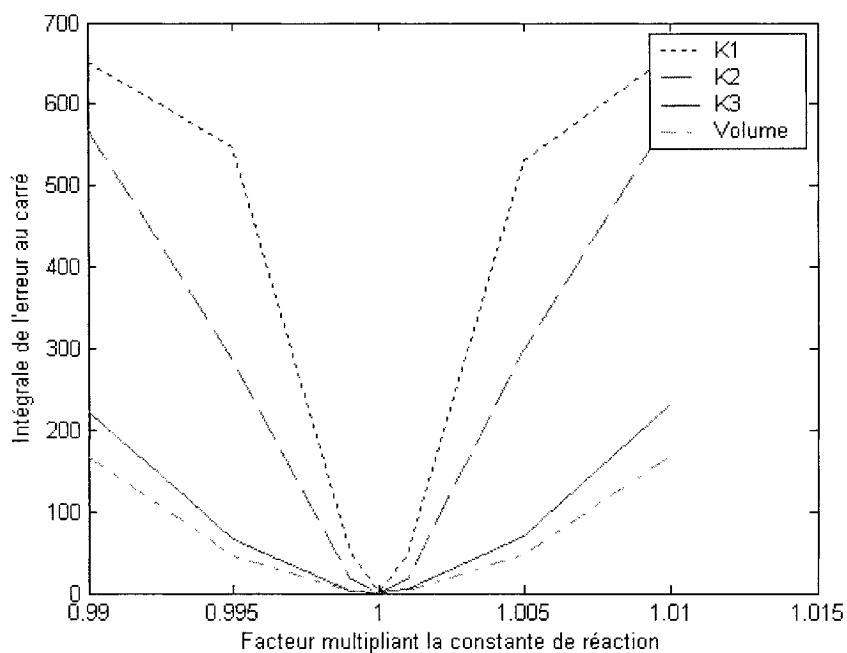
## 4.8 Analyse de sensibilité sur les paramètres

Dans cette partie, la sensibilité de la méthode face à de petites variations sur le modèle est étudiée. Puisque la FDP est très étroite, il est normal que de petits changements vont déplacer la FDP loin de la FDP désirée. C'est pourquoi les moments sont analysés. Ainsi, la forme de la FDP peut mieux être analysée.

La moyenne (figure 4.14) et la variance (figure 4.15) sont utilisées pour vérifier si la FDP s'est déplacée. L'asymétrie (figure 4.16) est pour déterminer de quel côté est la queue de la distribution (positif si la queue tend vers la droite, négative si la queue tend vers la gauche). L'aplatissement (figure 4.17) quantifie l'étalement de la FDP. Une FDP gaussienne a un aplatissement de 3.

La première chose remarquée lors de l'analyse des résultats est que la FDP est sensible aux petits changements. Le plus grand changement est de 1%, et dans tout les cas, cela entraîne une forte hausse de la valeur de l'intégrale de l'erreur au carré (figure 4.13). Cela est expliqué par le fait que la moyenne change beaucoup, si l'échelle est tenue en compte, s'il y a un biais de  $0.005 \text{ mol B}_1$  sur la FDP, elle est complètement à côté de la FDP originale. La variance ne semble pas beaucoup changer selon le facteur d'erreur sur le paramètre. Le graphique le plus intéressant est celui de l'asymétrie : plus le troisième moment s'approche de zéro, moins la courbe est asymétrique (donc plus gaussienne). Il est étonnant de voir une « re-gaussianisation » de la FDP de la variable

de sortie à la suite d'une erreur de modélisation. Ce phénomène s'explique par le fait que la moyenne s'éloigne du point de commutation, donc le contrôle commute de moins en moins. Le contrôleur devient linéaire et la FDP redevient gaussienne. Le graphique sur l'aplatissement de la FDP (figure 4.17) n'indique aucune tendance. Si on compare les trois réactions dans chaque graphique, le même phénomène est observé : un changement sur la réaction 1 a plus d'impact qu'un changement sur la réaction 2 qui lui a plus d'impact qu'un changement sur la réaction 3. C'est normal puisque la réaction 1 crée le composant B, la réaction 2 consomme du B et la réaction 3 consomme du A. En conclusion, il est important de mentionner que la méthode développée semble très sensible aux variations dans le procédé.



**Figure 4.13** Intégrale de l'erreur en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction

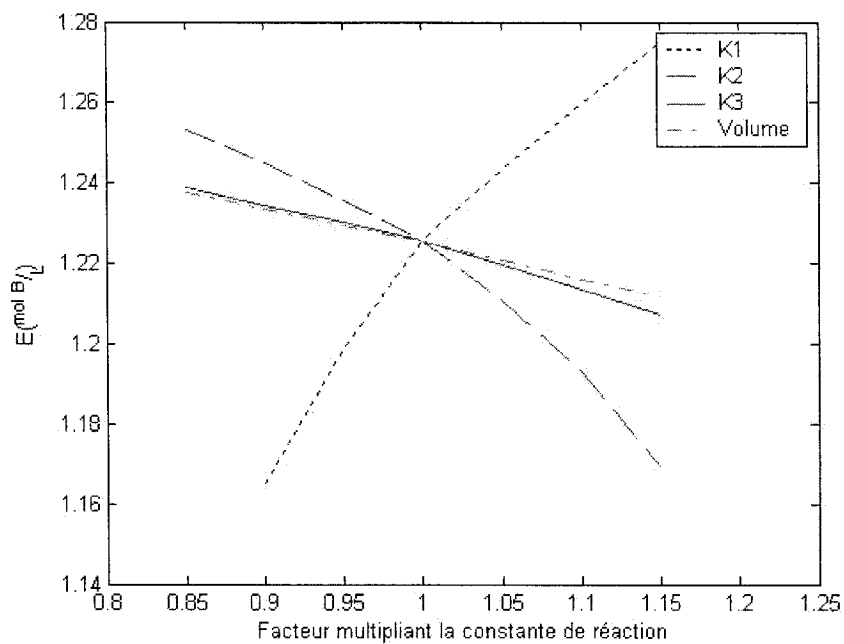


Figure 4.14 Moyenne en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction

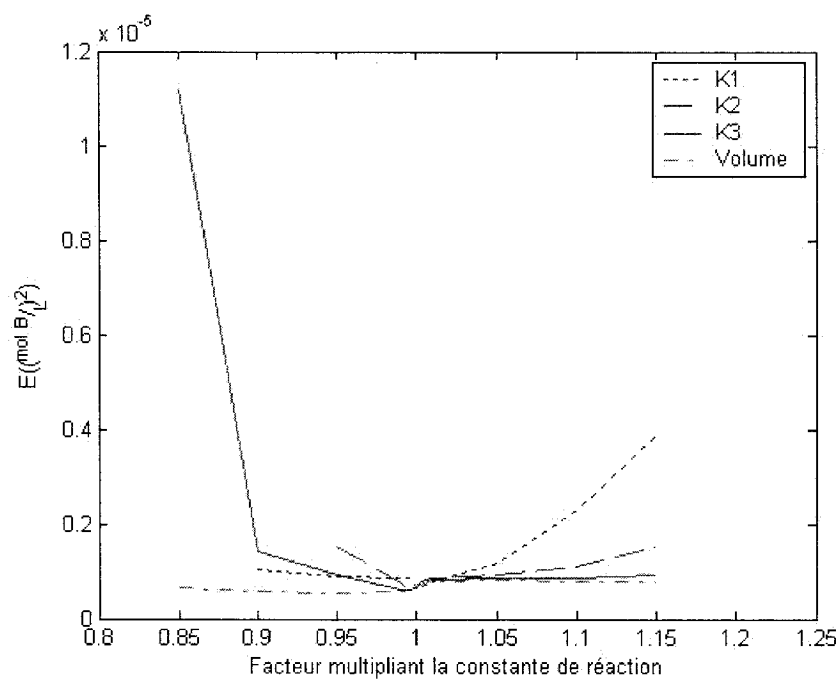


Figure 4.15 Variance en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction

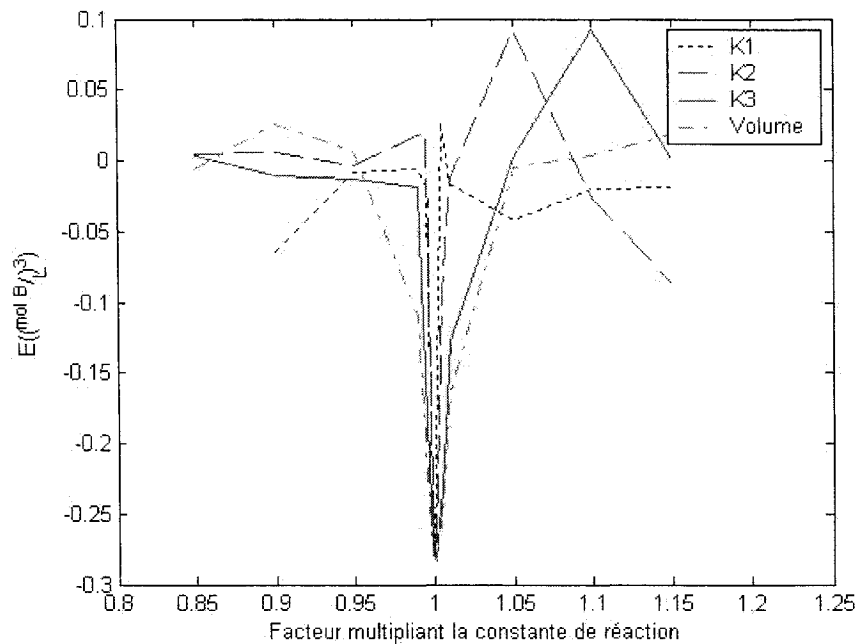


Figure 4.16 Asymétrie en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction

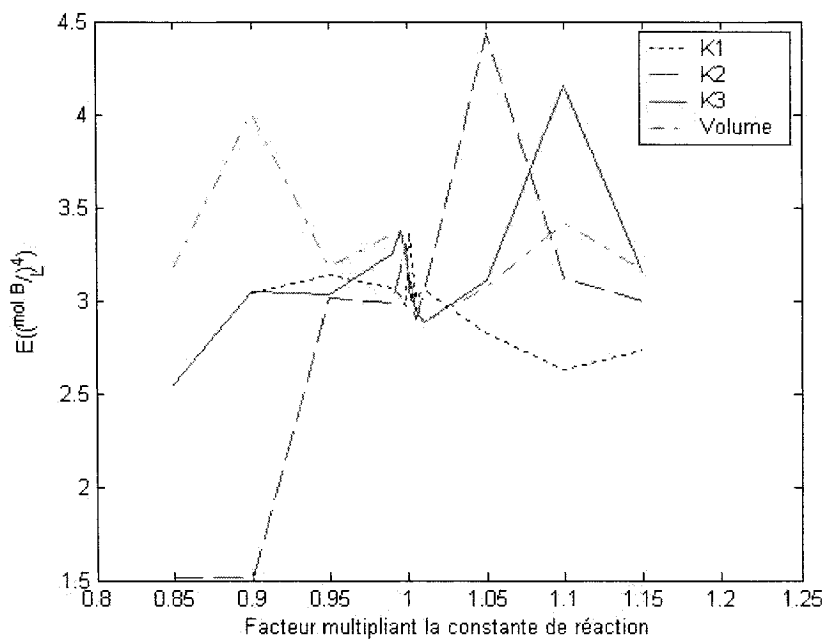


Figure 4.17 Aplatissement en fonction du facteur multiplicatif du coefficient de la réaction

## 4.9 Amélioration de la stratégie de formage

Vu la très grande sensibilité de la FDP à de petits changements sur le modèle (voir figure 4.13 à 4.17), la stratégie de formage a été modifiée. Deux autres contrôleurs ont été rajoutés dans l'algorithme de commutation. Ceux-ci ont des constantes d'intégration qui amenuisent l'erreur en régime permanent. Leurs points de commutation sont à l'extérieur de la FDP pour ne pas influencer l'algorithme original de formage de FDP (voir figure 4.18). Les paramètres des contrôleurs sont posés ainsi que l'algorithme de formage, seulement les points de commutations ont été trouvés par optimisation (parce que l'algorithme de formage a déjà été optimisé). Ainsi les deux autres contrôleurs ne font que ramener le point d'opération dans la zone originale de formage de fonction de densité de probabilité.

$$J_4 = \min_{\text{Point de Consigne}_1, \text{Point de Consigne}_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (p(\xi)^* - p(\xi))^2 d\xi \quad (\text{éq. 4.8})$$

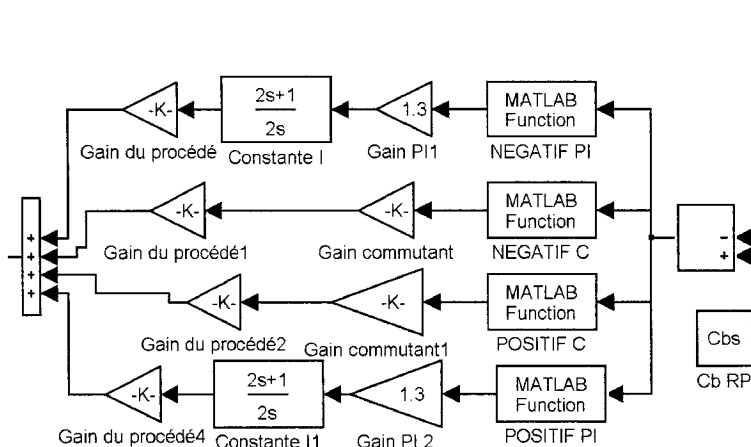


Figure 4.18 Stratégie de formage à gains commutants avec constante intégratrice



### 4.9.1 Résultats avec ajout de contrôleur PI

Dans cette partie, le nouvel algorithme a été testé. Le premier test est l'analyse de sensibilité sur le paramètre  $K_1$  (le plus influent). Le deuxième est un test de comparaison de FDP avec un bruit non stationnaire (en additionnant l'intégrale du bruit).

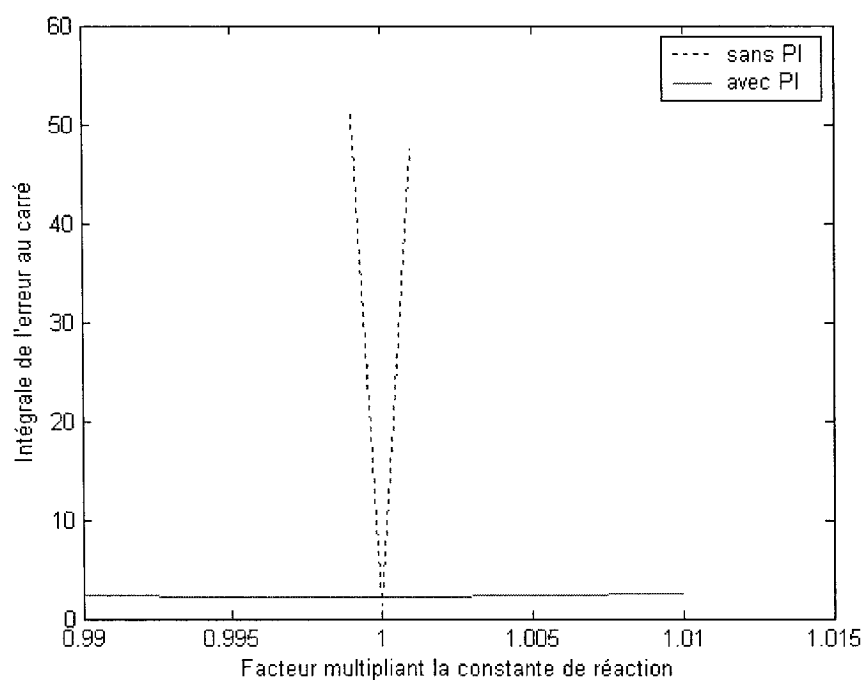
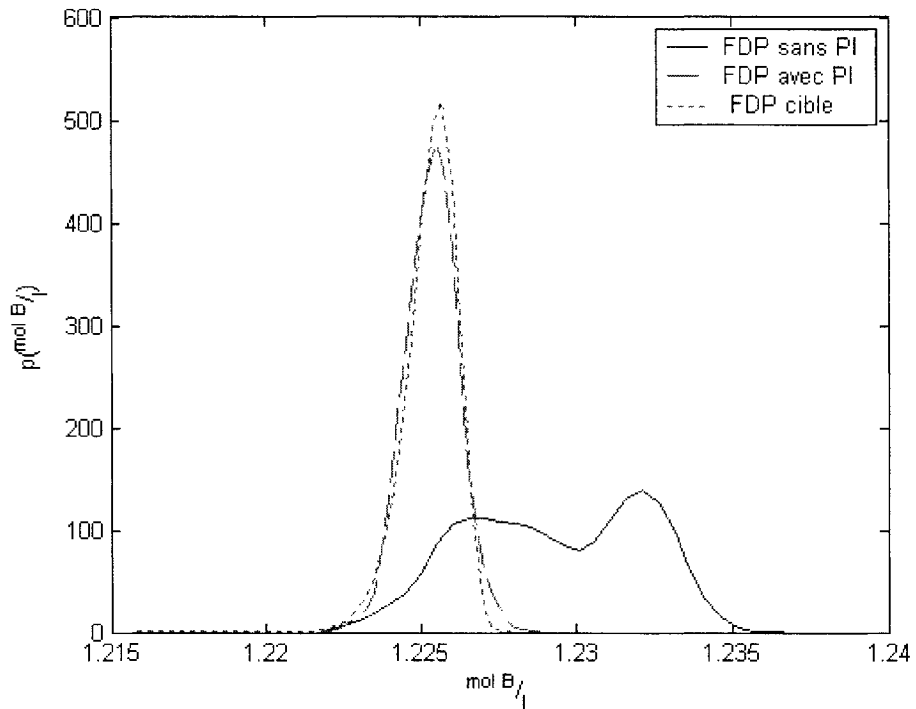


Figure 4.19 Intégrale de l'erreur en fonction du facteur multiplicatif du coefficient  $K_1$  de la réaction



**Figure 4.20 FDP obtenue par un contrôleur à gains commutants, gains commutants et PI et FDP cible avec un bruit avec dérive**

On voit que dans les deux cas, la stratégie de formage de FDP est beaucoup moins sensible à des erreurs de modélisation et aux biais. C'est à cause de la composante intégrale qui élimine les biais. Par conséquent l'ajout d'une composante qui intègre rend l'algorithme moins sensible aux biais.

## 4.10 Retour sur le coût de la variabilité

Pour en revenir à l'idée du coût de la variabilité, il serait intéressant de pouvoir calculer un gain monétaire face à une situation antérieure suite à une stratégie de formage de FDP. Pour ce faire, le procédé a été simulé avec seulement un compensateur proportionnel (valeur est 1.13 fois l'inverse du gain de procédé). La FDP résultante est utilisée avec la fonction coût pour appliquer une espérance de revenu. Ensuite, cette espérance de revenu est comparée avec l'espérance de revenu avec le formage de FDP. La différence entre les deux est le gain économique dû à une optimisation de la variabilité. Il est à noter que les deux FDP ont les mêmes queues vers la droite.

Voici le contrôleur :

$$D(t) = 1.9396 + 1.1395 * \text{gain}^{-1} * e(t)$$

(éq. 4.9)

$$e(t) = 1.2252 - C_{\text{Bsortie}}(t)$$

gain = -8.5859

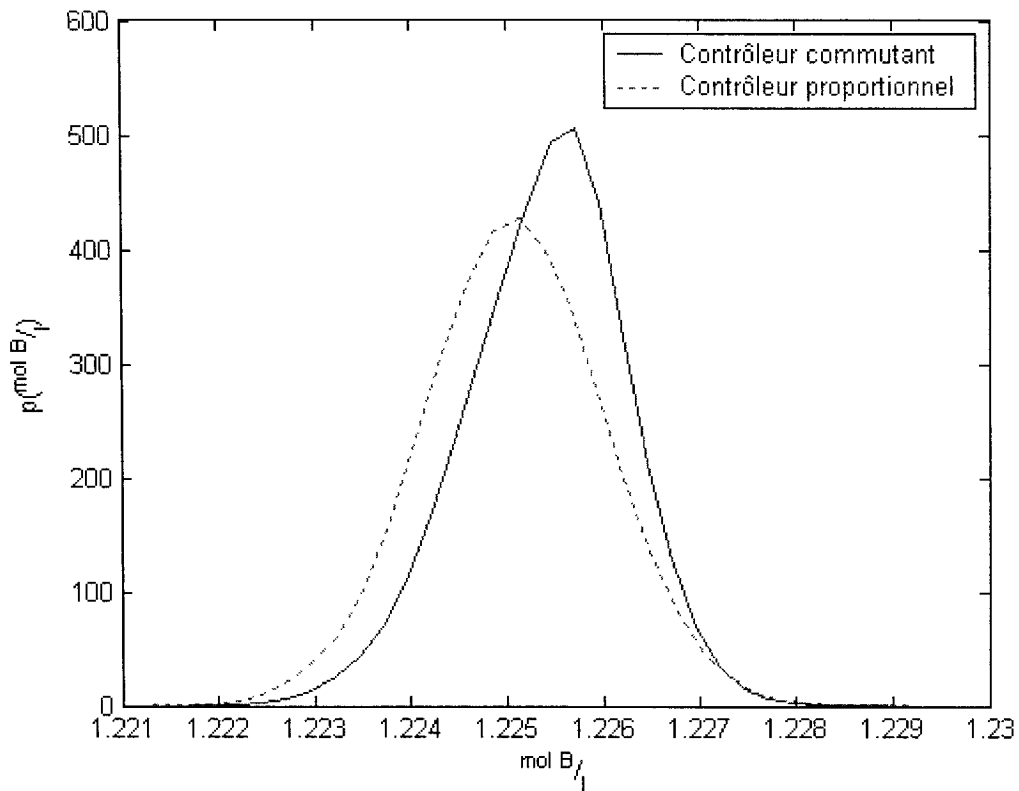


Figure 4.21 FDP avec formage de FDP (contrôleur commutant) et FDP sans formage de FDP(contrôleur proportionnel)

Tableau 4.1 Analyse économique de l'exemple du chapitre 4

|  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| Espérance de revenu avec un compensateur de type proportionnel | $7.3715 \times 10^5$ dollars /min |
| Espérance de revenu avec formage de FDP                        | $7.3780 \times 10^5$ dollars /min |
| Augmentation du profit par coût de la variabilité              | 656.60 dollars/min                |
| Augmentation relative  | 0.088%                            |

## 4.11 Analyse des résultats

Les résultats sont concluants à première vue: la FDP expérimentale suit la FDP cible et la variable manipulée reste dans les limites entre 0 et 5 (voir figure 4.12). La forme générale de la FDP obtenue est très proche de la FDP désirée. Il est à noter que pour avoir ces bons résultats, il a fallu faire une translation à la FDP, c'est-à-dire que le point de consigne n'est pas le point de consigne optimal trouvé en 4.4. Si de meilleurs résultats sont désirés dans les queues de la distribution, il suffit de changer la fonction erreur dans l'optimisation infinie. Cependant, il est à noter que le système est très sensible et qu'en rajoutant une composante intégrale à l'algorithme de formage, celui-ci devient moins sensible. Par après, le coût de la variabilité a été calculé et une augmentation du profit de 0.088% a été obtenue. C'est peu et c'est parce que la fonction économique est plate à ce point d'opération. Par conséquent, le gain monétaire est faible. Ce qui indique que la méthode de formage de FDP est rentable dans les procédés qui consomment beaucoup de réactifs ou d'énergie. Si la fonction économique est plate, comme dans ce cas-ci, un rapprochement vers les contraintes n'a pas beaucoup d'effet économique. Donc, il est important d'analyser les opportunités économiques avant d'appliquer toute méthode d'amélioration de performances. Comme il a déjà été dit, ces opportunités se trouvent dans des unités de procédé onéreux à opérer, par exemple, les évaporateurs dans une usine à papier kraft. Il se peut aussi que la variabilité provienne d'une unité en amont. Par conséquent, il est important de faire une analyse de la source de variabilité affectant ces procédés.

## 4.12 Conclusion

Dans ce chapitre, on a voulu démontrer que la méthode de formage de FDP par contrôleur commutants s'applique facilement aux procédés chimiques. Le procédé de Van de Vusse a été choisi. Ce procédé a été décrit ainsi que la fonction économique pour avoir une FDP cible. Ensuite, les paramètres du contrôleur ont été choisis par optimisation semi infinie. Les résultats sont très concluants, la FDP obtenue est très proche de la FDP cible. Par contre, il faut tenir compte de la sensibilité de la méthode à de petites différences entre le modèle utilisé et le procédé. Ceci nécessite l'ajout d'une composante intégrale à l'algorithme de formage. Malgré cela, la méthode par contrôleur commutant est une bonne méthode pour former une FDP.

## Chapitre 5 : Conclusion et travaux futurs

L'évaluation des performances en contrôle de procédé est un domaine très important. Car il justifie l'investissement dans le milieu industriel et par conséquent en recherche. Les premiers travaux dans ce domaine (Åström, 1970) étaient uniquement basés sur le point de vue mathématique. D'autres travaux (Brewster, 1970) (Tolfo, 1983)(Stanton et al., 1991), ont établi des méthodes pour calculer le coût de la variabilité. Cependant, seulement certains tiennent compte de toute la distribution (Latour, 1996)(Zhou, 2003). Ce sont sur ces travaux que le coût de la variabilité a été basé dans le cadre de ce mémoire. Par la suite, l'optimisation du coût de la variabilité, implique de former la fonction de densité de probabilité. Mais, la plupart des méthodes développées jusqu'à date créent la non linéarité par des exposants(Crespo 2002) (Forbes 2003), ce qui cause des problèmes d'un point de vue de la stabilité et de la variable manipulée. C'est pour cela que la méthode des gains commutants a été développée.

La méthode proposée dans ce mémoire pour former la fonction de densité de probabilité se résume à un contrôleur qui commute entre deux gains. Ainsi, il y a une réponse non linéaire du contrôleur selon le point d'opération. Ces deux gains sont trouvés par optimisation semi infinie. L'avantage de cette méthode face aux autres méthodes est qu'elle n'a pas les problèmes de stabilité créées par l'ajout d'exposants

dans l'algorithme de contrôle. De plus, la simplicité du contrôleur permet une implantation facile dans le milieu industriel. Le désavantage de cette méthode est qu'il n'y a pas de lien explicite entre le contrôleur et la fonction de densité de probabilité. Ceci nécessite d'importante ressource en calcul lorsqu'il faut optimiser les paramètres d'un contrôleur commutant sur une simulation complexe.

La méthode proposée a été testée sur deux procédés. Le premier est un exemple qui a servi pour la méthode de formage de fonction de densité de probabilité par approximation de Gram-Charlier utilisé par Forbes (2004). Avec cet exemple, la méthode de formage de FDP par contrôleur commutant a pu être comparée avec celle par approximation de Gram-Charlier. Le résultat de cette comparaison est qu'il n'y a pas de différences significatives entre les deux méthodes. Le deuxième exemple est un réacteur où des réactions de Van de Vusse se produisent. Le résultat principal de cet exemple est que cette méthode est facilement applicable aux procédés chimiques. Car les résultats permettent de modifier la fonction de densité de probabilité de façon significative. De plus, l'algorithme original a été modifié en ajoutant des contrôleurs avec des constantes intégrales. Cela a grandement amélioré les performances quand il y avait des erreurs de modélisation et des dérives dans le bruit. Ensuite, le coût de la variabilité a été calculé sur cet exemple en prenant comme base un compensateur proportionnel.



## 5.1 Contributions scientifiques

La principale contribution scientifique de ce mémoire est le développement d'une nouvelle façon de faire du formage de fonction de densité de probabilité. Il a été démontré que cette méthode est aussi performante que la méthode utilisée par approximation de Gram-Charlier (Forbes 2004). De plus, il a été aussi démontré que cette méthode est facilement implantable avec des résultats satisfaisants. D'ailleurs, dans un contexte industriel, la méthode des gains commutants peut être utilisée sans faire d'analyse économique. Dans ce cas-ci, la méthode des gains commutants est utilisée pour rendre la distribution asymétrique afin de d'approcher le point de consigne de la contrainte.

Une seconde contribution scientifique est la détermination de limites sur la forme de la fonction de densité de probabilité. Ainsi, la variance minimum est la cloche la plus étroite que peut prendre la FDP, mais il semble qu'il y ait une variance maximale qui est impossible de dépasser. Cela est dû au fait que le système devient instable. Par conséquent, la variance maximale est directement reliée au contrôleur. Puisque seulement un seul type de contrôleur a été testé et que cette contribution n'était pas dans l'optique originale du sujet, cet aspect n'a pas été approfondi plus en détails.

## 5.2 Recommandations et travaux futurs

Comme le développement de la méthode de formage de fonction de densité de probabilité a été inductif, toute la théorie reste à développer. Il serait intéressant d'appliquer des équations qui relient directement la FDP au système contrôlé. L'approche de Crespo par l'équation de Fokker-Plank semble intéressante.

De plus, il faudrait mieux comprendre le phénomène de variance maximale. Ce qui revient problème au précédent par l'établissement d'équations entre le système contrôlé et la FDP de sortie. Une limite de la forme de la FDP en intégrant les notions de stabilité et de saturation dans ces équations devrait être trouvée.

Un autre aspect qui mérite d'être étudié est la stabilité des contrôleurs commutants avec un contrôleur instable qui est dans l'ensemble des contrôleurs. Dans le cas étudié, dans l'algorithme de commutation, il y avait un contrôleur qui était instable et l'autre qui était stable. L'ensemble donne un contrôleur commutant stable, mais cette stabilité n'a pas été prouvée mathématiquement.

Dans le même ordre d'idées, il serait intéressant d'analyser plus en profondeur la sensibilité de la FDP aux erreurs de modélisation. Cette analyse pourrait mieux quantifier ces changements et par conséquent, il serait possible de faire le design de procédé et d'équipements pour minimiser cette sensibilité. Il pourrait en résulter une nouvelle optique sur le design de procédés chimiques.

Finalement, l'algorithme de formage de FDP ne permet pas son contrôle direct. Si le modèle change, il devient inefficace. Il faudrait faire un algorithme de contrôle de fonction de densité de probabilité adaptatif. En estimant le modèle, on peut savoir quand il change. Dans ce cas, on n'a qu'à répéter l'algorithme de formage de FDP avec le nouveau modèle. De plus, on pourrait recalculer une FDP à une fréquence lente et contrôler la FDP par rétroaction.

# Bibliographie

- ÅSTRÖM, Karl J. 1970. *Introduction to stochastic control theory*. New-York: Academic Press. 299p.
- BORRIE, John A. 1992. *Stochastic systems for engineers Modelling, Estimation & Control*. London: Prentice Hall. 290p.
- BREWSTER, Donald B. 1970. "Economic Gains From Improved Quality Control". *Pulp and Paper Magazine of Canada*. 71:6. 55-58
- CRAIG, Ian K., HENNING, R.G.D. 2000. "Evaluation of Advanced Industrial Control Projects: a Framework for Determining Economic Benefits". *Control Engineering Practice*. 8:7. 769-780
- CRAIG, Ian K., KOCH, I. 2003. "Experimental Design for the Economic Performance Evaluation of Industrial Controllers". *Control Engineering Practice*. 11 :1. 57-66
- CRESPO, Luis.G., SUN, J.Q. 2002. "Nonlinear Stochastic Control via Stationary Probability Density Functions". *Proceedings of the American Control Conference*. Volume 3. 2029-2034

- CRESPO, Luis.G., SUN, J.Q. 2002a. "Nonlinear Stochastic Control via Stationary response design". *Probabilistic Engineering Mechanics*. 18 :1. 79-86
- DESBOROUGH, L.D., HARRIS, Thomas J. 1992. "Performance Assessment Measures for Univariate Feedback Control". *Canadian Journal of Chemical Engineering*. 70 :6. 1186-1197
- Di MASCIO, R. 2002. "An Economic Measure for Comparing Dynamic Robustness". *Journal of Process Control*. 12 :6. 745-751
- EDER, Hans H. 2003. "Advanced Process Control : Opportunities, Benefits and Barriers". *IEE Computing and Control Engineering*. 14:5. 10-15
- FORBES, Michael G., FORBES, J. Fraser, GUAY Martin. 2003. "Regulatory Control Design for Stochastic Processes: Shaping the Probability Density Function". *Proceedings of the American Control Conference*. Volume 5. 3998-4003
- FORBES, Michael G., FORBES, J. Fraser, GUAY, Martin. 2003b. "Regulating Discrete-Time Stochastic Systems: Focusing On The Probability Density Function". *Journal of Process Control*. 7 : 6. 425-438

FORBES, Michael G., FORBES, J. Fraser. 2003c. "Control Design for Discrete-Time Stochastic Nonlinear Process with a Nonquadratic Performance Objective". *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*. volume 4. 4243-4248

FORBES, Michael G., GUAY Martin, FORBES, J.Fraser. 2004. "Control Design for First-order Processes: Shaping the Probability Density of the Process State". *Journal of Process Control*. 14:4. 399-410

FORBES, Michael G. 2003. *Performance Characterization and Regulatory Feedback Control Design for Time-Invariant Discrete-Time Stochastic Process*. Thèse de doctorat en génie chimique. University of Alberta

GRIMBLE, Mike J. 2004. "Integral Minimum Variance Control and Benchmarking". *Journal of Process Control*. 14 :2. 177-191

GUO, Lei, WANG, Hong. 2003a. "Pseudo-PID Tracking Control for a Class of Output PDFs of General Non-Gaussian Stochastic Systems ". *Proceeding of the 2003 American Control Conferencel ,part1*. volume 1. 362-367

- GUO, Lei, WANG, Hong. 2003*b*. "Pseudo-PID Tracking Control for a Class of Output PDFs of General Non-Gaussian Stochastic Systems ". *Proceeding of the 2003 American Control Conferencel ,part1*. volume 1. 362-367
- GUO, Lei, WANG, Hong. 2005*a*. "Generalized discrete-time PI control of output PDF using square root B-spline expansion". *Automatica*. 41 :1. 159-162
- GUO, Lei, WANG, Hong. 2005*b*. "PID Controller Design for Output PDFs of Stochastic Systems Using Linear Matrix Inequalities". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*. 35 :1. 65-71
- HARRIS, Thomas J. 1989. "Assessment of Control Loop Performance ". *The Canadian journal of Chemical Engineering*. 67 :5. 856-861
- HARRIS, Thomas J., BOUDREAU, F., MacGREGOR, John F. 1996. "Performance Assessment of Multivariable Feedback Controlers ". *Automatica*. 32 :11. 1505-1518
- HARRIS, Thomas J., SEPPALA, Chris T., DESBOROUGH, Lane D. 1999. "A Review of Performance Assessment Techniques for Univariate and Multivariate Control Systems . *Journal of Process Control*. 9 :1. 1-17

- HESPANHA, João P., MORSE, Stephen A. 1999. "Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time ". *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. volume 3. 2655-2660
- HUANG, Biao, SHAH, Sirish L, MILLER, Randy. 2000. "Feedforward Plus Feedback Controller Assessment of MIMO Systems". *IEEE Transactions on control systems technology*. 8:3. 580-587
- HUANG, Biao, SHAH, Sirish L., KWOK, E.K. 1997. "Good, Bad or Optimal? Performance Assessment of Multivariable Processes". *Automatica*. 33 :6. 1175-1183
- HUANG, Biao, SHAH, Sirish L., KWOK, Ezra K. 1995. "On-line Control Performance Monitoring of MIMO Processes". *Proceedings of the American Control Conference*. volume 2. 1141-1146
- KÁRNÝ, Miroslav. 1996. "Towards Fully Probabilistic Control Design". *Automatica*. 32 :12. 1719-1722
- LATOUR, Pierre .R. 1992. "Quantify quality control's intangible benefits". *Hydrocarbon Processing*. 71:5. 61-68



- LATOURE, Pierre.R. 1996. "Process Control: CLIFFTENT Shows it's more Profitable than expected". *Hydrocarbon Processing*. 78 :12. 75-80
- MARLIN, T.E., BRISK, M.L., BARTON, G.W., ERKINS, J.D. 2001. "Experiences from an Industry-University Study on Control Benefits". *Pulp and Paper Canada*. 102 :4. 34-37
- MARTIN, Greg D., TURPIN, Lee E., CLINE, Richard P. 1991. "Estimating Control Function Benefits". *Hydrocarbon Processing*. 70 :6. 68-73
- MUSKE, Kenneth R. 2003. "Estimating the Economic Benefit from Improved Process Control". *Industrial Engineering Chemical Research*. 42:20. 4535-4544
- QIN, Joe S. 1998. "Control Performance Monitoring – a Review and Assesment". *Computer & Chemical Engineering*. 23 :2. 173-186
- SENYARD, Corley P., SENYARD, Thomas J. 1983. "Stalking the Elusive Control Incentives". *Proceedings of the American Control Conference*. volume 3. 1147-1152
- STANTON, Ben D. 1990. "Using Historical Data to Justify Controls ". *Hydrocarbon Processing*. 69 :6. 57-60

TOLFO, Flavio. 1983. "A Methodology to Assess the Economic Return of Advanced Control Project". *Proceedings of the American Control Conference*. Volume 3. 1141-1146

WANG, Hong. 1998. "Robust Control of the Output Probability Density Functions for Multivariable Stochastic Systems". *Proceedings of the 37<sup>st</sup> Conference on decision on control*. volume 2. 1305-1310

WANG, Hong. 1998. "Robust Control of the Output Probability Density Functions for Multivariable Stochastic Systems". *Proceedings of the 37<sup>st</sup> Conference on decision on control*. volume 2. 1305-1310

WANG, Hong. 1999. "Robust Control of the Output Probability Density Functions for Multivariable Stochastic Systems with Guaranteed Stability". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 44:11. 2103-2107

WANG, Hong, ZHANG, Jan Hua. 2001. "Bounded Stochastic distributions Control for Pseudo-Armax Stochastic Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 46:3. 486-490

WANG, Hong. 2002. "Minimum Entropy Control of Non-Gaussian Dynamic Stochastic Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 47:02. 398-403

WANG, Yongji, WANG, Hong. 2002a. "Suboptimal mean controllers for bounded and dynamic stochastic distributions". *Journal of Process Control*. 12 :3. 445-452

WANG, Yongji, WANG, Hong. 2002b. "Output PDFS Control for Linear Stochastic Systems with Arbitrarily Bounded Random Parameters: A New Application of the Laplace Transform". *Proceedings of the American Control Conference*. Volume 5. 4262-4267

WANG, Hong, ZHAN, Jian Hua. 2002c. "Control of the Output Stochastic Distributions via Lyapunov Function Analysis". *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*. 927-931

ZHOU, Yimin. 2002. *Optimization-based benefits analysis for process control systems*. Mémoire de maîtrise en génie chimique. University of Alberta

ZHOU, Yimin, FORBES, J.Fraser 2003. "Determining controller benefits via probabilistic optimization". *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 17 :7-9. 553-568

# ANNEXES

## Concepts mathématiques

Dans cette partie, les notions mathématiques qui seront utilisées tout au cours du projet seront expliquées.

### Concept de probabilité discrète

La probabilité  $P(X)$  qu'un événement  $X$  arrive est défini par :

$$P(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N} \quad (\text{éq. A.1})$$

où  $N_x$  est le nombre de fois que l'événement  $X$  arrive.

Puisque que faire une expérience un nombre infini de fois consomme beaucoup de temps, et que le financement de l'auteur est borné, il serait préférable d'utiliser un autre définition moins rigoureuse scientifiquement, mais plus pratique :

$$P(X) = \frac{N_x}{N} \quad (\text{éq A.2})$$

$N$  étant le nombre total d'événements.

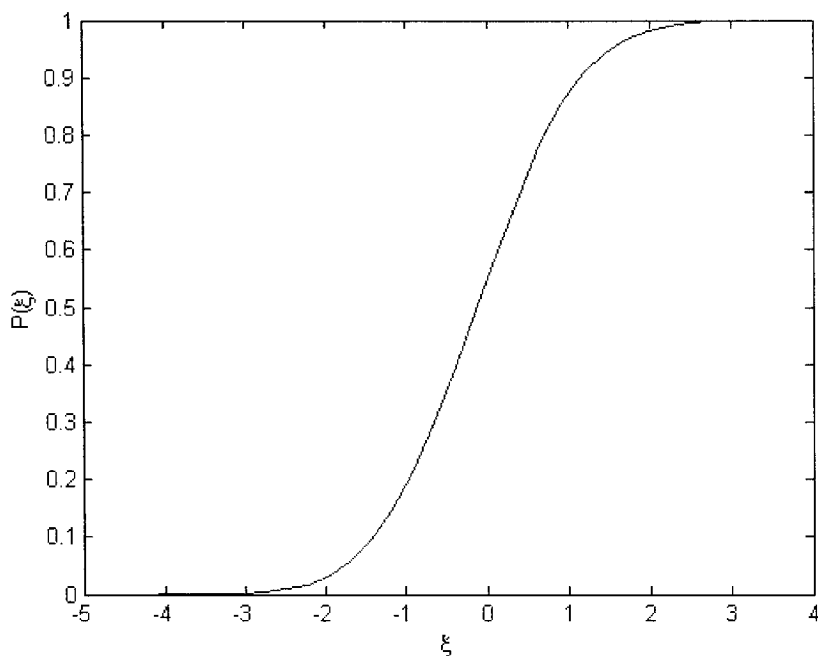
### Concept de probabilité continue

Comme la plupart des variables mesurées sont continues (la valeur dépend de la précision de l'instrument de mesure), la définition de probabilité discrète s'applique

plus ou moins bien. C'est pourquoi on utilise le concept de probabilité continue. C'est ainsi que la fonction de probabilité d'un variable continue  $\xi$  peut être définie en assignant une valeur  $x$  à  $X$  de telle sorte que  $x$  est une variable continue :

$$P(\xi) = \text{Pr ob}(x \leq \xi)$$

En d'autre mots, cela correspond à l'événement  $X$  que  $x$  soit plus petit que  $\xi$  ce qui correspond au graphique suivant :



**Figure A.1** Fonction de cumulative probabilité

En voici les propriétés principales :

- (i)  $P(\xi) \geq 0, -\infty \leq \xi \leq +\infty$
- (ii)  $P(-\infty) = 0, P(+\infty) = 1$

$$(iii) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \geq 0, -\infty \leq \xi \leq +\infty$$

$$(iv) \text{Prob}(\xi_1 < x \leq \xi_2) = P(\xi_2) - P(\xi_1)$$

### Concept de fonction de densité de probabilité

La fonction de densité de probabilité est définie comme la distribution de la variable  $x$ , cela se traduit par :

$$p(\xi) = \frac{dP(\xi)}{d\xi} \quad (\text{éq. A.3})$$

Ses propriétés sont :

$$(i) p(\xi) \geq 0, -\infty \leq \xi \leq +\infty$$

$$(ii) p(-\infty) = p(+\infty) = 0$$

$$(iii) \text{Prob}(x \leq \xi_1) = \int_{-\infty}^{\xi_1} p(\xi) d\xi$$

$$(iv) \text{Prob}(\xi_1 < x \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi) d\xi$$

$$(v) p(\xi) = \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{Prob}(\xi < x \leq \xi + \delta\xi)}{\delta\xi} \right]$$

$$(vi) \text{Prob}(-\infty < x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi = 1$$

### Concept de fonction de moyenne et moments

La moyenne, ou premier moment, est défini par :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. A.4})$$

$$\text{Le second moment est défini par } E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 p(\xi) d\xi$$

Si on est en variable de déviation, donc la moyenne est zéro, et par conséquent

cette définition est équivalente à la variance qui est le second moment central :

$$\sigma_x^2 = E(x - E(x))^2 \quad (\text{éq. A.5})$$

Le n<sup>ième</sup> moment est défini par :

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. A.6})$$

### **Concept d'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire**

La moyenne d'une fonction  $f(x)$  d'une variable aléatoire  $x$  est

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. A.7})$$

### **Concept de fonction d'espérance**

Si on applique l'espérance sur toute la fonction  $f(x)$ , on se retrouve avec la fonction  $F(x)$  qui donne la valeur de l'espérance à  $x$ .

$$F(x) = E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi \quad (\text{éq. A.8})$$

Cette notion est très importante dans le coût de la variabilité.