

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PLANIFICATION DE LA PRODUCTION ET DE LA  
MAINTENANCE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION:  
APPROCHE HIÉRARCHISÉE

JEAN - PIERRE KENNÉ

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

NOVEMBRE 1997

© Jean-Pierre Kenné, 1997.



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33007-9

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

PLANIFICATION DE LA PRODUCTION ET DE LA  
MAINTENANCE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION:  
APPROCHE HIÉRARCHISÉE

Présentée par: KENNÉ Jean - Pierre

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GHARBI Ali, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CHAUNY Fabien, Ph.D., membre

M. SAAD Maarouf, Ph.D., membre

A LA FAMILLE TANÉ TSAPI MARTIN

A MA FILLE CASSANDRA

A MES FILS VINCE ET ARSÈNE

A MA FEMME DORETTE

# Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur El Kébir Boukas, de l'École Polytechnique de Montréal, pour la proposition de ce sujet de thèse et pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail de recherche.

Je voudrais également remercier mon codirecteur de recherche, le professeur Ali Gharbi, de l'École de Technologie Supérieure, pour ses multiples conseils et encouragements qui ont abouti au succès de ce travail de recherche.

Je voudrais aussi remercier les membres du jury, le professeur Roland Malhamé du département de génie électrique de l'École Polytechnique de Montréal, le professeur Fabien Chauny de l'École des Hautes Études Commerciales de Montréal, le professeur Maarouf Saad de l'École de Technologie Supérieure ainsi que le professeur Richard Gourdeau, représentant du Doyen, pour avoir apporté des critiques et commentaires constructifs pour la version finale de cette thèse.

Je tiens à remercier la direction et le personnel de l'ENSET et de l'Université de Douala (Cameroun) pour m'avoir accordé une mission de longue durée dans le cadre de la préparation de cette thèse. Je tiens également à remercier l'ACDI (Agence Canadienne pour le Développement International) pour son soutien financier tout au long de la recherche.

J'exprime ma reconnaissance la plus profonde à mon épouse Dorette et à mes enfants Arsène, Vince et Cassandra qui, par leur patience, leur compréhension et leur soutien moral m'ont permis de mener à bien cette longue recherche.

Je tiens enfin à remercier en général tous ceux qui directement ou indirectement m'ont soutenu pendant toute la durée de cette recherche, en particulier les professeurs des départements de génie mécanique et de génie électrique de l'École Polytechnique de Montréal, tous mes amis de Montréal et tous nos collègues de l'Université de Douala en mission au Canada.

# Résumé

Les systèmes de production considérés dans cette thèse sont constitués de plusieurs machines interconnectées qui produisent simultanément plusieurs types de pièces. Ces machines sont sujettes à des pannes et réparations aléatoires, et leurs distributions des pannes dépendent de leurs âges. Le problème de planification de la production et de la maintenance de ces systèmes de production est formulé comme un problème d'optimisation stochastique de grande dimension. Cette dimension croît de façon exponentielle avec le nombre de machines et de types de pièces considérés. Les problèmes d'optimisation stochastique associés à une telle dimension sont complexes et très difficiles à résoudre de nos jours. L'objectif de notre recherche est de déterminer une loi sous-optimale qui approxime la loi de commande de ces problèmes complexes, en utilisant une approche hiérarchisée à deux niveaux.

Dans cette thèse, nous avons:

- (i) proposé une méthode de réduction de la taille du problème de commande et résolu le problème réduit pour trouver une approximation de la loi de commande du problème d'optimisation stochastique considéré;
- (ii) proposé une stratégie de commande plus réaliste en raffinant, à l'aide d'une méthode heuristique, la loi de commande approximée;
- (iii) validé les résultats obtenus à l'aide des modèles de simulation.

L'approche de commande proposée consiste à utiliser les méthodes des perturbations singulières pour transformer le problème de commande stochastique initial en un problème de commande déterministe équivalent. Cette méthode est basée sur le fait que la dynamique du système est associée à une existence simultanée des phénomènes rapides et lents. Ces phénomènes correspondent respectivement à des fréquences d'arrivées des pannes, d'entretiens préventifs des machines et d'actualisation du coût encouru. En associant ces phénomènes aux échelles de temps rapides et lents, nous formulons deux problèmes de commande (déterministe et stochastique) aux niveaux 1 et 2 de la hiérarchie proposée.

L'approche de Kushner est par la suite appliquée au problème déterministe pour obtenir un problème de décision markovien. En résolvant ce problème de faible dimension à l'aide des méthodes numériques, nous obtenons une loi de commande à partir de laquelle nous construisons la loi de commande recherchée pour le problème d'optimisation stochastique initial. Une méthode heuristique est proposée pour une telle construction. Des modèles de simulation sont enfin utilisés pour valider l'approche de commande proposée dans cette thèse.



# Abstract

Manufacturing systems considered in this thesis are constituted of several interconnected machines that produce several part types simultaneously. These machines are subject to random breakdowns and repairs, and their distributions of breakdowns depend on their ages. The production and preventive maintenance planning problem of these systems is formulated as a large scale stochastic optimization problem. The problem dimension grows exponentially with the number of machines and part types involved. Stochastic optimization problems related to a such dimension are complex and very difficult to solve. The objective of this research is to determine a suboptimal control policy, which approximate the optimal control policy of these complex problems, using a two-level hierarchical control approach.

In this thesis we have:

- (i) proposed a method based on the reduction of the control problem size and solved the reduced control problem in order to find an approximation of the control policy of the considered stochastic optimization problem;
- (ii) proposed a more realistic control policy by improving the approximated one with the aim of a heuristic method;
- (iii) validated the obtained results with the help of simulation models.

The proposed control approach is based on singular perturbation methods which are used here to derive an equivalent deterministic control problem from the initial stochastic one. These methods are based on the fact that the system dynamics involves rapid and slow phenomena simultaneously. These phenomena correspond respectively to the arrival frequencies of machines breakdowns or preventive maintenance and to the actualization of the cost incurred. By associating these phenomena to rapid and slow time scales, we formulate two control problems (deterministic and stochastic) at levels 1 and 2 of the proposed hierarchy.

The Kushner approach is then applied to the deterministic control problem to obtain a markovian decision control process. This small size control problem is solved with numerical methods and the obtained control policy is used to construct the control policy of the original stochastic optimization problem. A heuristic approach is proposed for the construction of such a policy. Finally, simulation models are used to validate the control approach proposed in this thesis.

# Table des matières

<b>Dédicace</b> .....	iv
<b>Remerciements</b> .....	v
<b>Résumé</b> .....	vii
<b>Abstract</b> .....	ix
<b>Table des matières</b> .....	xi
<b>Liste des figures</b> .....	xiv
<b>Liste des tableaux</b> .....	xvii
<b>Liste des principales notations</b> .....	xviii
<b>Liste des annexes</b> .....	xx
<b>Chapitre 1: Introduction</b> .....	1
1.1 Problématique et objectif général de la recherche .....	2
1.2 Revue de la littérature .....	3
1.3 Motivation de la recherche .....	9
1.4 Méthodologie .....	10
1.5 Contributions originales .....	14
1.6 Organisation de la thèse .....	14
<b>Chapitre 2: Formulation du problème et conditions</b> <b>d'optimalité</b> .....	16
2.1 Introduction .....	16
2.2 Structure du FMS et modèles dynamiques .....	17

2.2.1	Modèle dynamique . . . . .	18
2.2.1.1	Dynamique continue . . . . .	19
2.2.1.2	Dynamique discrète . . . . .	21
2.2.2	Commande optimale stochastique . . . . .	23
2.3	Propriétés de la fonction valeur . . . . .	26
2.4	Dimension des équations d'HJB . . . . .	30
2.5	Conclusion . . . . .	32
<b>Chapitre 3: Commande hiérarchisée . . . . .</b>		<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Principe de la méthode des perturbations singulières . . . . .	36
3.2.1	Approche générale de commande hiérarchisée . . . . .	36
3.2.2	Échelles de temps basées sur la dynamique continue . . . . .	37
3.2.3	Échelles de temps basées sur la dynamique discrète . . . . .	39
3.3	Formulation du problème . . . . .	41
3.4	Conditions d'optimalité . . . . .	48
3.4.1	Problème stochastique initial . . . . .	48
3.4.2	Problème de commande limite . . . . .	53
3.5	Méthodes numériques . . . . .	59
3.6	Construction de la loi de commande stochastique . . . . .	62
3.7	Conclusion . . . . .	67
<b>Chapitre 4: Expérimentation de l'approche de</b>		
<b>commande hiérarchisée . . . . .</b>		<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Système de production à deux machines et un seul produit . . . . .	71

4.2.1	Dynamiques des pannes et de production . . . . .	72
4.2.2	Commande optimale et conditions d'optimalité . . . . .	75
4.2.3	Problème de commande limite . . . . .	75
4.2.4	Méthodes numériques . . . . .	77
4.2.5	Construction de la loi de commande stochastique . . . . .	84
4.2.6	Validation de l'approche de commande hiérarchisée . . . . .	88
4.2.6.1	Approche de simulation proposée . . . . .	91
4.2.6.2	Étude comparative . . . . .	95
4.3	Systèmes de production à deux machines, deux produits . . . . .	99
4.3.1	Dynamiques des pannes et de production . . . . .	99
4.3.2	Commande optimale et conditions d'optimalité . . . . .	100
4.3.3	Problème de commande limite . . . . .	101
4.3.4	Méthodes numériques . . . . .	102
4.3.5	Construction de la loi de commande stochastique . . . . .	110
4.3.6	Étude comparative . . . . .	115
4.4	Structure générale des lois de commande . . . . .	116
4.5	Conclusion . . . . .	118
	<b>Conclusions générales</b> . . . . .	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>122</b>

## Liste des figures

Figure 1.1:	Méthodologie générale de commande heuristique proposée . . .	11
Figure 2.1:	Modèle de deux machines en parallèle . . . . .	20
Figure 3.1:	Approche de commande hiérarchisée . . . . .	40
Figure 3.2:	Différentes classes d'âges des machines opérationnelles . . .	65
Figure 4.1:	Système de production à deux machines et un seul produit	71
Figure 4.2:	Taux de production $\bar{u}(x)$ du problème limite . . . . .	80
Figure 4.3:	Taux de maintenance préventive $\bar{\omega}(x)$ du problème limite .	81
Figure 4.4:	Taux de production du problème limite en fonction de l'âge de la machine équivalente . . . . .	81
Figure 4.5:	Taux de maintenance préventive du problème limite en fonction de l'âge de la machine équivalente . . . . .	82
Figure 4.6:	Ensemble des neuf régions issues du regroupement des machines	85
Figure 4.7:	Classification des machines par ordre décroissant par rapport à l'âge . . . . .	87
Figure 4.8:	Taux de production des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour $a_2 = 1$ . . . . .	89
Figure 4.9:	Taux de production des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour $a_2 = 5$ . . . . .	89
Figure 4.10:	Taux de maintenance préventive des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour $a_2 = 1.6$ . . . . .	90

Figure 4.11: Taux de maintenance préventive des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour $a_2 = 5$ . . . . .	90
Figure 4.12: Distribution des probabilités de pannes d'une machine . . . . .	93
Figure 4.13 Trajectoires des stocks avec des seuils critiques $x_{op}^h = 1.19$ et $x_{op}^d = 1.005$ pour les méthodes heuristique et directe (avec $a_1$ et $a_2$ fixés) . . . . .	96
Figure 4.14: Coûts moyens associés à la méthode directe et à la méthode heuristique pour différentes partitions ( $q = 2, 3, 4$ ) . . . . .	97
Figure 4.15: Taux de production $\bar{u}_1(x_1, x_2)$ du produit 1 . . . . .	105
Figure 4.16: Taux de production $\bar{u}_2(x_1, x_2)$ du produit 2 . . . . .	105
Figure 4.17: Taux de maintenance préventive $\bar{\omega}(x_1, x_2)$ du problème limite	106
Figure 4.18: Taux de production $\bar{u}_1(x_1, x_2, 1)$ du produit 1 pour un âge de la machine équivalente fixé à 1 . . . . .	107
Figure 4.19: Taux de production $\bar{u}_2(x_1, x_2, 1)$ du produit 2 pour un âge de la machine équivalente fixé à 1 . . . . .	108
Figure 4.20: Taux de production $\bar{u}_1(x_1, x_2, 5)$ du produit 1 pour un âge de la machine équivalente fixé à 5 . . . . .	108
Figure 4.21: Taux de production $\bar{u}_2(x_1, x_2, 5)$ du produit 2 pour un âge de la machine équivalente fixé à 5 . . . . .	109
Figure 4.22: Taux de maintenance préventive $\bar{\omega}(x_1, x_2, 1)$ du problème limite pour un âge de la machine équivalente fixé à 1 . . . . .	109
Figure 4.23: Taux de maintenance préventive $\bar{\omega}(x_1, x_2, 5)$ du problème limite pour un âge de la machine équivalente fixé à 5 . . . . .	110

Figure 4.24: Schématisation des taux de production du problème limite dans le plan $(x_1, x_2)$ lorsque l'âge de la machine équivalente est fixé à 1 . . . . .	111
Figure 4.25: Taux de production des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$ (produit 1) . . . . .	112
Figure 4.26: Taux de production des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$ (produit 2) . . . . .	113
Figure 4.27: Taux de production des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 3$ et $a_2 = 5$ (produit 1) . . . . .	113
Figure 4.28: Taux de production des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 3$ et $a_2 = 5$ (produit 2) . . . . .	114
Figure 4.29: Taux de maintenance préventive des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$ . . . . .	114
Figure 4.30: Taux de maintenance préventive des deux machines au mode 1 pour $a_1 = 3$ et $a_2 = 5$ . . . . .	115
Figure 4.31: Coûts moyens associés aux méthodes directe et hiérarchisée pour $q = 5$ (partition de six classes) . . . . .	116
Figure A.1: Taux de production de $M_1$ pour $a_2 = 1$ . . . . .	129
Figure A.2: Taux de production de $M_2$ pour $a_2 = 1$ . . . . .	130
Figure A.3: Taux de production de $M_1$ pour $a_2 = 5$ . . . . .	130
Figure A.4: Taux de production de $M_2$ pour $a_2 = 5$ . . . . .	131
Figure A.5: Taux de maintenance préventive de $M_1$ pour $a_2 = 1$ . . . . .	131
Figure A.6: Taux de maintenance préventive de $M_2$ pour $a_2 = 0$ . . . . .	132
Figure A.7: Taux de maintenance préventive de $M_1$ pour $a_2 = 3$ . . . . .	132



Figure A.8: Taux de maintenance préventive de $M_2$ pour $a_2 = 3$ . . . . .	133
Figure A.9: Taux de maintenance préventive de $M_1$ pour $a_2 = 6$ . . . . .	133
Figure A.10: Taux de maintenance préventive de $M_2$ pour $a_2 = 6$ . . . . .	134
Figure B.1: Machines opérationnelles avec $\sum_{k=1}^m TS_k = u^{-1}(\cdot)$ et $k = A(1)$	136
Figure B.2: Pannes et maintenances des machines avec $T_r = 1/\lambda_{21}^i$ , $T_m = 1/\lambda_{31}^i$ , $T_1 = 1/\omega_i(\cdot)$ , $T_2 = 0.1$ . . . . .	138
Figure B.3: Boucle de simulation avec $T_d = d^{-1}$ . . . . .	139
Figure C.1: Taux de production du produit 1 sur la machine $M_1$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 3$ . . . . .	142
Figure C.2: Taux de production du produit 1 sur la machine $M_2$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 3$ . . . . .	143
Figure C.3: Taux de production du produit 2 sur la machine $M_1$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 3$ . . . . .	144
Figure C.4: Taux de production du produit 2 sur la machine $M_2$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 3$ . . . . .	145
Figure C.5: Taux de production du produit 1 sur la machine $M_1$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 5$ . . . . .	146
Figure C.6: Taux de production du produit 1 sur la machine $M_2$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 5$ . . . . .	147
Figure C.7: Taux de production du produit 2 sur la machine $M_1$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 5$ . . . . .	148
Figure C.8: Taux de production du produit 2 sur la machine $M_2$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 5$ . . . . .	149
Figure C.9: Taux de maintenance de la machine $M_1$ pour $a_1 = 1$ , $a_2 = 3$	150

Figure C.10: Taux de maintenance de la machine $M_2$ pour $a_1 = 1, a_2 = 3$	150
Figure C.11: Taux de maintenance de la machine $M_1$ pour $a_1 = 1, a_2 = 5$	151
Figure C.12: Taux de maintenance de la machine $M_2$ pour $a_1 = 1, a_2 = 5$	151
Figure C.13: Taux de maintenance de la machine $M_1$ pour $a_1 = 3, a_2 = 5$	152
Figure C.14: Taux de maintenance de la machine $M_2$ pour $a_1 = 3, a_2 = 5$	152

## Liste des tableaux

Tableau 2.1: Modes de $\zeta(t)$ et $\zeta_i(t)$ , $i = 1, 2$ . . . . .	22
Tableau 4.1: Constantes du coût instantané (deux machines, un seul produit) . . . . .	79
Tableau 4.2: Étude comparative des approches basées sur la commande hiérarchisée (pour une partition de cinq classes) et la méthode directe de résolution des équations d'HJB . . . . .	98
Tableau 4.3: Constantes du coût instantané (deux machines, deux produits) . . . . .	104

# Liste des principales notations

- $\mathbf{x}(t)$  : vecteur des différents stocks à l'instant  $t$   
 $\mathbf{a}(t)$  : vecteur des différents âges des machines à l'instant  $t$   
 $\bar{\mathbf{x}}(t)$  : partie continue du vecteur d'état du système à l'instant  $t$   
 $\zeta(t)$  : vecteur de perturbation du système à l'instant  $t$   
 $\zeta^\epsilon(t)$  : vecteur de perturbation du système à l'instant  $t$  associé au paramètre de perturbation singulière  $\epsilon$   
 $\mathbf{u}(t)$  : vecteur des taux de production des différents produits à l'instant  $t$   
 $\omega(t)$  : vecteur des taux d'envoi en entretien préventif des différentes machines à l'instant  $t$   
 $\bar{\mathbf{u}}(t)$  : vecteur de commande du système  
 $\mathbf{d}$  : vecteur des taux de demande des produits finis  
 $m$  : nombre de machines du système de production  
 $n$  : nombre de types de pièces du système de production  
 $\lambda(\cdot)$  : taux de transition du processus stochastique commandé  $\zeta(t)$   
 $\mathcal{B}$  : ensemble discret des modes du processus stochastique  $\zeta(t)$   
 $\mathcal{U}(\cdot)$  : ensemble des lois de commande admissibles  
 $\rho$  : taux d'actualisation du coût  
 $J(\cdot)$  : fonction coût du problème d'optimisation  
 $v(\cdot)$  : fonction valeur du problème d'optimisation  
 $\mathbf{Q}(\cdot)$  : matrice des taux de transition du processus stochastique  $\zeta(t)$

- dim** : dimension des conditions d'optimalité
- $Z^\epsilon(t)$  : processus stochastique correspondant au nombre de machines opérationnelles au temps  $t$
- $K(\cdot)$  : ensemble de commandes admissibles associées au processus  $Z^\epsilon(\cdot)$
- $\mathcal{E}$  : ensemble discret des modes du processus stochastique  $Z^\epsilon(t)$
- $P^0$  : formulation possible du problème déterministe équivalent au problème de commande stochastique initial
- $A^0$  : ensemble des commandes admissibles associées à la formulation  $P^0$
- $\bar{k}(\cdot)$  : nombre moyen de machines opérationnelles
- $\tilde{P}^0$  : autre formulation du problème déterministe équivalent au problème de commande stochastique initial
- $\tilde{A}^0$  : ensemble des commandes admissibles associées à la formulation  $\tilde{P}^0$

# Liste des annexes

<b>Annexe A: Système de production à deux machines</b>	
<b>traitant un seul type de pièce</b> .....	128
<b>Annexe B: Modèles de simulation des systèmes de</b>	
<b>production</b> .....	135
B.1 Modes opérationnels des machines .....	135
B.2 Pannes et maintenances préventives des machines .....	137
B.3 Boucle de simulation .....	139
<b>Annexe C: Système de production à deux machines</b>	
<b>traitant deux types de pièces</b> .....	141

# Chapitre 1

## Introduction

Face aux exigences technologiques des dernières décennies, la taille et la complexité des problèmes industriels relatifs à la production ne cessent de croître. Pendant ces années, des installations manufacturières sophistiquées ont été mises au point pour répondre à la demande des consommateurs. Les systèmes de production associés à ces installations sont généralement constitués de plusieurs machines pouvant procurer une certaine flexibilité et garantir ainsi la survie de l'usine dans un environnement de plus en plus compétitif. De plus, ces types de systèmes sont sujets à des événements aléatoires discrets tels que les pannes et les réparations des machines, les fluctuations de la demande, etc.

Les systèmes de production flexible (Flexible Manufacturing System (FMS)) se distinguent par leur capacité de satisfaire la demande des consommateurs en tenant compte de la présence des événements aléatoires ci-haut mentionnés. Ces systèmes doivent par conséquent utiliser des lois de commande appropriées qui intègrent la présence d'événements aléatoires. La commande des FMS a par conséquent occupé, ces dernières années, une place prépondérante dans la littérature de commande des systèmes de production. Cette prépondérance est due principalement à l'importance des investissements engagés et à la nature stochastique (présence d'aléas) du

problème de commande optimale considéré.

Une bonne stratégie de planification de la production et de la maintenance des machines est alors nécessaire afin de rentabiliser les investissements engagés malgré la présence des pannes des machines ou de tout autre événement aléatoire. L'industrie manufacturière est alors confrontée au problème de détermination des rythmes de production et de maintenance des machines qui maximisent le profit en général tout en satisfaisant le plus possible les exigences des clients.

## 1.1 Problématique et objectif général de la recherche

Les FMSs sont généralement constitués de plusieurs machines interconnectées qui produisent simultanément plusieurs types de pièces. Ces machines sont sujettes à des pannes et réparations aléatoires, et leurs distributions des pannes dépendent de leurs âges. De plus, ces machines ne peuvent pas toujours être purement flexibles (autrement dit, elles peuvent requérir un temps et un coût de setup ou de changement de pièce). Les aspects qualitatifs tels que les règles d'ordonnancement et d'affectation dynamique des produits aux machines peuvent également influencer de façon significative les performances du système. Dans ces conditions, la loi de commande à déterminer est constituée d'un rythme de production, d'une politique de maintenance des machines, d'une stratégie de setup et d'une règle d'ordonnancement et d'affectation dynamique des produits aux machines. Le problème d'optimisation associé à une telle loi de commande est un problème complexe dans la littérature de contrôle des FMS.

Cette recherche a pour but de résoudre le problème de planification de la



production et de la maintenance des systèmes de production. Nous utilisons une approche basée sur la réduction de la complexité du problème d'optimisation posé. À partir de cette réduction, nous décrivons une méthode heuristique d'approximation de la loi de commande optimale (taux de production et de maintenance préventive des machines).

Le problème à résoudre est formulé comme un problème d'optimisation stochastique de grande dimension. Face à la complexité du problème, les politiques de setup et les règles d'ordonnancement et d'affectation des produits aux machines ne sont pas considérées dans cette thèse. La loi de commande recherchée est donc constituée des taux de production et de maintenance préventive des machines. Le problème d'optimisation stochastique considéré consiste à trouver une loi de commande qui minimise une fonction coût dépendant des coûts de stockage des produits finis et des coûts de réparation ou de maintenance des machines.

## 1.2 Revue de la littérature

Malgré la connaissance à priori de la politique de setup et des règles d'ordonnancement, le problème d'optimisation considéré dans cette recherche reste un problème très complexe à cause du nombre de machines et de types de produits impliqués. Dans la littérature, plusieurs auteurs considèrent, pour fin de simplicité, le cas où le coût est essentiellement lié au stockage des produits et au degré de satisfaction de la demande. Les méthodes proposées sont généralement basées sur la représentation des FMS à l'aide des systèmes perturbés par des processus de saut. Ces processus sont couramment modélisés par des chaînes de Markov.

Dans les travaux pionniers d'Olsder et Suri (1980) et de Kimenia et Gershwin

(1983), ces processus de saut sont modélisés par des chaînes de Markov homogènes selon le formalisme de Rishel (1975). Akella et Kumar (1986) ont montré que, pour un système constitué d'une machine qui produit un seul type de pièce et dont le processus de saut est une chaîne de Markov homogène (à cause de la constance des taux de transition), la politique de type seuil critique (hedging point) est optimale. Cette stratégie de commande consiste à construire et à maintenir constant un niveau optimal de stock des produits finis dans le but de continuer de satisfaire la demande durant les états non opérationnels de la machine. Les extensions de la stratégie de commande de type seuil critique sont également discutées par Sharifnia (1988), Malhamé et Boukas (1991) et Bielecki et Kumar (1988). Le problème de recherche de la stratégie de commande optimale devient plus difficile lorsque la chaîne de Markov n'est pas homogène (c'est-à-dire lorsque les taux de transition ne sont pas constants et peuvent dépendre des âges des machines et/ou de la commande).

En considérant le fait que la distribution des probabilités de panne d'une machine dépend de son âge, le formalisme de Boukas, présenté dans Boukas (1987), Boukas et Haurie (1990) et Boukas (1995), considère l'âge de la machine dans la modélisation et la commande d'un FMS. En combinant la commande du taux de production et celle des actions de maintenance préventive, l'approche de Boukas a établi, par application d'une méthode numérique basée sur l'approximation de Kushner, que la solution au problème de commande optimale stochastique du FMS considéré est non seulement de type seuil critique mais dépend également de l'âge. À partir de ce résultat, Boukas et al. (1995a) et Boukas et Yang (1996) ont modifié le concept du hedging point classique en montrant qu'il existe un âge optimal de la machine à partir duquel on doit bâtir un stock tel que dans Akella et Kumar

(1986). Avant cet âge, la machine est supposée neuve et la politique du juste à temps (c'est-à-dire une production au taux de la demande) est optimale. Kenne et al. (1997a) ont par la suite déterminé, par une combinaison d'approches analytique et de simulation, le niveau de stock critique (différent du "threshold" obtenu analytiquement par Akella et Kumar (1986) et utilisé par Boukas et al. (1995a)) et l'âge de commutation associé. Dans le cas général, lorsqu'on est en présence de plusieurs machines et plusieurs types de pièces, les conditions d'optimalité obtenues sont difficiles à résoudre. Dans le cas des systèmes de faible dimension (maximum de deux machines traitant un seul type de pièce), l'approche numérique permet de résoudre les conditions d'optimalité et d'approximer la loi de commande optimale du FMS tel que dans Boukas (1987) et dans Boukas et Kenne (1997).

En ce qui concerne les systèmes complexes, constitués de plusieurs machines, le problème de planification du taux de production est reconnu dans la littérature comme étant un problème complexe. Pour un système constitué de deux machines en série et traitant un seul type de pièce, Lou et al. (1994) ont proposé une formulation qui tient compte des contraintes additionnelles rattachées à l'existence d'un stock tampon (work-in-process (WIP)) entre les deux machines. Dans ce cas, le concept du hedging point n'est plus directement applicable. Lou et al. (1994) ont étudié les propriétés dynamiques du problème de commande optimale associé à ce système à partir d'une extension du modèle d'Akella et Kumar (1986). Van Ryzin et al. (1993) ont généralisé les stratégies de commande optimale de ce même système en appliquant les méthodes numériques sur un exemple spécifique. En se basant sur les résultats numériques obtenus, Van Ryzin et al. (1993) proposent l'approximation d'une loi de commande sous-optimale du problème considéré. Dans

le cas de plusieurs machines, les conditions d'optimalité du problème de commande optimale sont présentées par Presman et al. (1995). Les résultats obtenus ont été étendus au cas où l'on contrôle simultanément le rythme de production et le taux de réparation des machines (maintenance corrective) par Kenne et al. (1997b). Les approches proposées dans la littérature au sujet des systèmes en tandem sont difficilement applicables lorsqu'on tient compte de l'âge. Cela est dû non seulement à la dimension du problème de contrôle, mais également à la contrainte imposée par le WIP.

Pour un système constitué de plusieurs machines et traitant plusieurs types de pièces, Bai et Gershwin (1994) et Glassey et Hong (1993) abordent le problème de planification de la production en utilisant une méthode basée sur la décomposition. Ils traitent le FMS comme un agrégat de plusieurs systèmes à deux machines traitant un seul type de pièce dont des lois de commande sous-optimales sont disponibles. Ils considèrent trois classes d'activités (production, réparation et blocage ou non-alimentation des machines) dans le problème d'ordonnancement de la production et de contrôle du niveau du WIP. La méthode heuristique proposée est basée sur l'approximation de la fonction valeur et sur un certain nombre d'hypothèses restrictives. Ces hypothèses limitent les applications d'une telle méthode et rendent difficiles leurs extensions aux systèmes de production modélisés en tenant compte du fait que la capacité d'un système dépend des âges des machines.

Dans le cas des FMS constitués de plusieurs machines, l'approche des perturbations singulières a été souvent utilisée. Cette approche se distingue des approches classiques car elle exploite la structure particulière d'un système en vue de procurer une loi de commande hiérarchisée. L'idée principale de cette approche

est de réduire la taille du problème de commande des systèmes larges en considérant une hiérarchie qui dérive du fait que les taux de transition entre les différents modes du système (pannes des machines par exemple) sont plus grands que le taux suivant lequel le coût est actualisé. Dans ces conditions, on peut remplacer les équations classiques d'Hamilton-Jacobi-Belleman (HJB) par des équations de la programmation dynamique d'un problème déterministe équivalent dit "problème limite". Ce problème dépend uniquement des valeurs moyennes des phénomènes rapides (pannes des machines par exemple) et correspond à une approximation du problème original. À partir de la solution optimale de ce problème, on reconstruit une solution dite "sous-optimale" du problème optimal original. L'approche utilisée par Lehoczky et al. (1991), Sethi et Zhang (1994) et Soner (1993) diffère de celle présentée par Grammel (1996), Kokotović et al. (1986) et Saksena et al. (1984) qui ont associé les échelles de temps considérées à la dynamique continue plutôt qu'à la dynamique discrète. Cependant, les deux approches visent le même but: à savoir réduire la complexité de résolution du problème d'optimisation posé. Dans le cas où les processus de saut sont décrits par des chaînes de Markov non homogènes, une telle approche s'applique difficilement car la construction de la solution au problème stochastique original n'est plus évidente dès lors que l'hypothèse d'homogénéité de la chaîne de Markov n'est plus valide.

Nous pouvons également noter qu'il existe une large littérature illustrant la puissance de l'outil de simulation dans la conception, la planification, l'ordonnancement et le contrôle des FMS complexes. À l'aide des langages de simulation à usage général (voir Pritsker (1986) et Bengu (1994)), nous pouvons décrire en détail le comportement d'un FMS. La flexibilité de ces types de langage

a permis de développer des modèles qui procurent une détection précise des performances d'un FMS, quelles que soient sa taille et ses conditions d'opération. Certains chercheurs ont essayé d'augmenter l'efficacité de la simulation dans le cas des FMS en exploitant les capacités descriptives de cette dernière, soit à l'aide de systèmes experts (voir Bai et Nagarur (1994), Haddock (1990) et Mellichamp et al. (1990)), soit en utilisant le design expérimental (voir Abdunour et al. (1994), Gupta et al. (1993) et Tarum et Rizvan (1994)). Les systèmes experts ont surtout été utilisés pour générer automatiquement des modèles de simulation pour FMS tel que dans Haddock (1990) ou pour interpréter les résultats de simulation, identifier les problèmes ou les possibilités d'amélioration de la conception d'un FMS. Ces systèmes experts sont basés sur une analyse des entrées des modèles de simulation et des sorties correspondantes (voir Haddock (1990) et Mellichamp et al. (1990)). La méthodologie de design expérimental, quant à elle, est surtout utilisée pour aider à identifier les facteurs et les interactions qui influent sur le système et, par conséquent, permet de dégager un modèle de régression qui pourra, par la suite, être minimisé pour déterminer les conditions optimales d'opération (voir Kenne et Gharbi (1997)).

Notons cependant que l'utilisation de la simulation, aussi bien en combinaison avec les systèmes experts qu'avec le design expérimental, nécessite la connaissance à priori de la loi de commande. Cette condition rend donc difficile l'application des modèles de simulation classiques dans le domaine de la commande des FMS, où les lois de commande sont des variables de contrôle à déterminer.

### 1.3 Motivation de la recherche

Nous observons que l'extension du concept du hedging point au cas des systèmes décrits par des chaînes de Markov non homogènes est complexe dans le cas des systèmes constitués de plusieurs machines traitant plusieurs types de pièces. De même, il n'existe pas une méthode satisfaisante qui permet de déterminer simultanément les taux optimaux de production et de maintenance des machines dans le cas de ces systèmes complexes. Les modèles analytiques présentés dans la littérature ne peuvent être résolus que dans le cas des systèmes de très faible dimension. Pour les systèmes complexes, il n'existe pas une approche générale qui permet d'obtenir une loi de commande optimale d'un FMS tout en tenant compte des âges des machines dans le modèle.

Pour certains des systèmes de production étudiés dans la littérature, les solutions sous-optimales obtenues sont basées sur un certain nombre d'hypothèses restrictives (chaînes de Markov homogènes par exemple) et sur des approches limitées par les dimensions des problèmes de commande associées (équations d'HJB stochastiques).

Face à la complexité de résolution des équations d'HJB stochastiques d'une part et au manque de méthodes heuristiques de commande des FMS en situation réelle d'autre part, nous nous proposons dans cette recherche de bâtir des méthodes heuristiques pour la commande des FMS en utilisant une formulation plus générale. Cette formulation tient compte des âges des machines et de la politique de maintenance des machines dans le modèle.

## 1.4 Méthodologie

Dans le but d'aborder l'étude des systèmes complexes, nous allons nous concentrer particulièrement sur des approches basées sur la réduction de la complexité du problème de commande optimale de ces systèmes. La méthode proposée consiste à utiliser la technique des perturbations singulières pour transformer le problème de commande stochastique initial en un problème de commande déterministe équivalent. Les problèmes de commande stochastique et déterministe équivalent sont formulés respectivement aux niveaux 2 et 1 de la hiérarchie proposée. L'approche de Kushner est par la suite appliquée au problème déterministe pour obtenir un problème de décision markovien. En résolvant ce problème de faible dimension à l'aide des méthodes numériques, nous obtenons une loi de commande qui est à la base de la construction de la loi de commande recherchée pour notre problème initial. Une méthode heuristique est proposée pour une telle construction. Des modèles de simulation sont enfin utilisés pour valider l'approche de commande proposée dans cette recherche.

Les principaux développements de notre démarche sont résumés dans la figure 1.1 qui présente la méthodologie de commande heuristique que nous proposons. Nous détaillons ci-après, de façon séquentielle, les étapes  $E_1$  à  $E_4$  associées à la méthode proposée et qui regroupent les différents développements illustrés par la figure 1.1.

$E_1$  Présenter un formalisme plus général du **problème de commande de FMS** en nous basant sur le formalisme de Rishel (1975) et l'extension proposée par Boukas (1987). Nous formulons dans cette étape un certain nombre d'**hypothèses dites de modélisation** et nous considérons une loi de



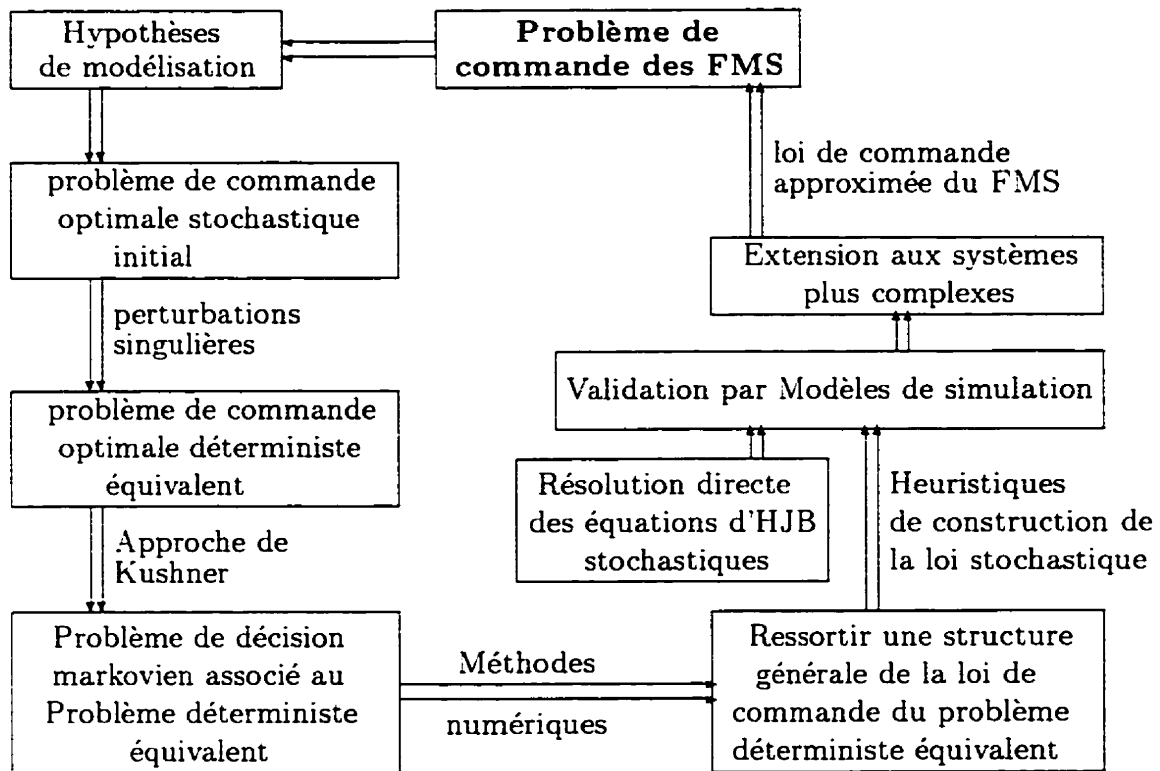


Figure 1.1: Méthodologie générale de commande heuristique proposée

commande constituée des taux de production et de maintenance préventive. Nous présentons les conditions d'optimalité qui garantissent l'existence et l'unicité d'une loi de commande optimale. Cette étape présente donc la formulation d'un **problème de commande optimale stochastique dit problème initial** que nous associons au deuxième niveau de la hiérarchie proposée.

**E<sub>2</sub>** Proposer une approche de commande hiérarchisée basée sur la méthode des **perturbations singulières** pour réduire la taille du problème de contrôle.

Cette approche consiste à déduire de la formulation de l'étape  $E_1$  un problème de **commande optimale déterministe équivalent** en remplaçant les phénomènes rapides (les pannes et les réparations des machines par exemple) par leurs moyennes. La loi de commande résultante est par conséquent d'une optimalité asymptotique et peut être considérée à la limite comme loi de commande du problème stochastique initial. Cette limite n'étant pas physique, nous disons qu'une telle loi est une loi sous-optimale du problème stochastique initial.

$E_3$  Appliquer l'approche de Kushner au problème déterministe équivalent, caractérisé par des conditions d'optimalité de faible dimension. Résoudre le problème de décision markovien obtenu à l'aide des méthodes numériques. Ressortir par la suite la structure de la loi de rétroaction résultante et proposer une **méthode de construction de la loi de commande du problème stochastique** à partir de la solution du problème limite (problème déterministe). La méthode de construction proposée est basée sur une discrétisation du vecteur des âges des machines suivie du regroupement de ces dernières en classes. En nous basant sur ce regroupement, nous présentons également dans cette étape une approche de construction d'une loi de commande dépendant de l'âge et qui intègre la nature stochastique du problème.

$E_4$  Valider par la suite la méthode heuristique proposée, à l'aide d'un modèle de simulation discrète, en comparant les performances du FMS (niveaux d'inventaire et le coût total encouru) lorsque ce dernier est soumis à deux lois de commande différentes. Les deux lois considérées sont issues respectivement

de la méthode proposée et de la résolution numérique directe des équations d'HJB. Raffiner par la suite la loi de commande obtenue en augmentant le nombre de classes de la partition du vecteur des âges des machines. Le nombre maximal des classes de cette partition est imposé par le fait que chaque classe doit contenir au moins deux éléments.

Plus précisément, pour résoudre ces différents problèmes liés à la commande optimale stochastique des FMS, cette recherche a pour objet de répondre aux questions  $Q_1$  à  $Q_4$  formulées ci-après:

- $Q_1$  Pouvons-nous développer des modèles généralisés simples de commande stochastique (incluant des actions de maintenance préventive)? Ces modèles doivent être caractérisés par des conditions d'optimalité de faible dimension, comparées à celles des conditions d'optimalité couramment utilisées.
- $Q_2$  Pouvons-nous inclure des actions d'entretien préventif et des taux de panne des machines qui dépendent de leurs âges dans ces modèles et établir les conditions d'optimalité correspondantes ?
- $Q_3$  Pouvons-nous résoudre numériquement le problème de commande optimale relatif aux modèles simples issus de la réduction de la taille du problème d'optimisation initial ?
- $Q_4$  Pouvons-nous par la suite construire la solution du problème de commande initial à partir de la solution du problème limite et la valider à l'aide des modèles de simulation ?

## 1.5 Contributions originales

Les réponses à ces questions constituent les contributions de cette thèse. Ces contributions comprennent une étude théorique et une étude pratique. L'étude théorique est constituée des réponses aux questions  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  qui regroupent les étapes  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  de la méthodologie proposée. Cette partie de l'étude consiste à développer des modèles simples de commande des systèmes de production flexible à l'aide de l'approche de commande hiérarchisée. Cette approche réduit la taille du système d'équations qui décrit l'optimum dans le cas des systèmes complexes. En plus, ces modèles incluent les âges des machines et la politique de maintenance préventive de ces machines. L'étude pratique, réponse à la question  $Q_4$ , est constituée de l'étape  $E_4$  de la méthodologie proposée. Cette deuxième partie de l'étude consiste à appliquer la structure de commande, obtenue par l'étude théorique, à des modèles de simulation pour valider l'approche proposée.

## 1.6 Organisation de la thèse

Au chapitre 2, nous présentons une formulation plus générale du problème de commande optimale des FMS. En nous basant sur le formalisme de Rishel (1975) et sur l'extension proposée par Boukas (1987), nous présentons un modèle analytique de ce problème, les conditions d'optimalité, l'impact de la taille des équations d'HJB sur la résolution du problème et les difficultés de résolution de ces types d'équations.

Au chapitre 3, nous présentons l'approche de commande hiérarchisée basée sur la méthode des perturbations singulières. Nous montrons dans ce chapitre qu'il est possible de trouver un problème de commande optimale déterministe qui est

équivalent au problème initial de commande optimale stochastique. L'approche de Kushner est appliquée aux conditions d'optimalité de ce problème déterministe et le problème de décision markovien obtenu est résolu à l'aide des méthodes numériques. Nous présentons également dans ce chapitre une méthode de construction de la solution du problème de commande initial à partir de la solution du problème déterministe.

Au chapitre 4, nous appliquons la méthode proposée au chapitre 3 sur deux exemples numériques. Afin de valider l'approche heuristique proposée, nous considérons pour cela des systèmes dont les conditions d'optimalité peuvent être résolues directement (c'est-à-dire lorsque nous n'utilisons aucune transformation) par des méthodes numériques. Nous validons l'approche en comparant dans ce chapitre les performances de ces systèmes lorsqu'ils sont soumis respectivement à la politique issue de l'approche hiérarchisée et à celle issue de la résolution directe des conditions d'optimalité. Les modèles de simulation sont utilisés pour valider la méthodologie proposée.

## Chapitre 2

# Formulation du problème et conditions d'optimalité

### 2.1 Introduction

En nous basant sur des hypothèses semblables à celles utilisées par Rishel (1975) et par Boukas (1987), nous étudions dans ce chapitre les conditions d'optimalité du problème de planification de la production et de la maintenance des systèmes de production considérés dans cette thèse. En utilisant la programmation dynamique, nous montrons que ces conditions décrivent un système d'équations aux dérivées partielles de type HJB (Hamilton-Jacobi-Belleman). Pour des systèmes de production larges, ces équations sont de grande dimension et sont par conséquent difficiles à résoudre. Nous présentons au chapitre suivant une approche heuristique de résolution de ces types d'équations.

Ce chapitre vise un double objectif. Le premier objectif consiste à formuler le problème de planification de la production et de la maintenance des systèmes de production. Le second objectif consiste à établir les conditions d'optimalité de ce problème en considérant l'exemple des systèmes de production constitués de plusieurs machines identiques qui traitent plusieurs types de pièces. Le modèle que

nous présentons dans ce chapitre est basé sur une chaîne de Markov non homogène caractérisé par la dépendance des taux de transition des âges des machines et de la loi de commande.

Le plan de ce chapitre est le suivant: à la section 2, nous présentons la structure du FMS considéré et les modèles dynamiques correspondants. Le problème de commande optimale relatif à ces modèles et les propriétés de la fonction valeur correspondante sont étudiés à la section 3. Les limites de résolution numérique des conditions d'optimalité obtenues sont discutées à la section 4.

## 2.2 Structure du FMS et modèles dynamiques

Dans cette recherche, nous nous limitons à la dynamique des machines et à celle des stocks de pièces. Nous développons les modèles analytiques des systèmes considérés sous les hypothèses restrictives suivantes:

( $\mathcal{H}_1$ ) : Le temps de manutention des appareils de transport tels que les AGVs (Automated Guided Vehicles) est négligeable.

( $\mathcal{H}_2$ ) : Le temps requis pour le changement de pièce (ou setup) et le coût de cette opération sont négligeables comparativement au temps d'usinage d'une tâche et au coût des opérations telles que la réparation ou la maintenance des machines.

( $\mathcal{H}_3$ ) : Les pièces se déplacent d'une machine à l'autre selon un routage défini à l'avance. De plus, aucune règle d'affectation ou d'ordonnancement dynamique n'est considérée dans le modèle analytique que nous présentons.

$(\mathcal{H}_4)$  : Les distributions des temps de panne d'une machine dépendent de son âge et les taux de transition des modes du processus stochastique qui décrit la dynamique des pannes d'une telle machine peuvent être contrôlés.

Les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2)$  et  $(\mathcal{H}_3)$  permettent de représenter la dynamique du système par des équations différentielles simples et de simplifier par conséquent les conditions d'optimalité. L'hypothèse  $(\mathcal{H}_4)$  permet de considérer l'âge d'une machine dans le modèle et de contrôler simultanément les taux de production et de maintenance préventive des machines.

Le problème d'optimisation mentionné au chapitre 1, correspondant à la planification de la production et de la maintenance d'un système de production, est un problème d'optimisation stochastique à cause des événements aléatoires tels que les pannes des machines. Les actions de maintenance préventive sont introduites dans le modèle pour augmenter la disponibilité des machines. Nous présentons ci-après le modèle mathématique associé à notre approche. Nous considérons dans cette thèse les systèmes de production constitués de plusieurs machines identiques en parallèle qui produisent plusieurs types de pièces.

### 2.2.1 Modèle dynamique

Nous présentons dans cette section les équations qui décrivent la dynamique des stocks et celle des modes des machines. Le modèle du système, constitué de  $m$  machines et traitant  $n$  produits différents, est décrit par un état hybride constitué d'une partie continue (dynamique des stocks et des âges) et d'une partie discrète (modes des machines). La variable continue du vecteur d'état est composée d'un vecteur  $\mathbf{x}(t)$  traduisant les différents stocks et d'un vecteur  $\mathbf{a}(t)$  représentant les



âges des différentes machines.

### 2.2.1.1 Dynamique continue

Soient  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x}'(t), \mathbf{a}'(t))'$  le vecteur d'état continu du système,  $\mathbf{d}(t)$  le vecteur des taux de demande et  $\mathbf{u}(t)$  le vecteur des taux de production des machines. La notation  $A'$  désigne la transposée de  $A$ . La dynamique de  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  peut être décrite par:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \quad (2.1)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.2)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}$  donné.  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Nous supposons que les fonctions  $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  sont continues par rapport à  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  et  $\mathbf{d}(t)$  et satisfont la condition de Lipschitz. En posant  $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{u}}', \mathbf{d}')'$ , nous définissons ci-après la continuité d'une fonction et la condition de Lipschitz appliquée à une telle fonction.

**Définition 2.1** La fonction  $f(\cdot)$  est dite continue au point  $\tilde{\mathbf{w}}_0 \in \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^{n+m}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(\tilde{\mathbf{w}}) - f(\tilde{\mathbf{w}}_0)| < \epsilon$  avec  $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$  et  $|\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{w}}_0| < \delta$ . Si  $f(\cdot)$  est continu en tout point de  $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$ , on dit que  $f(\cdot)$  est continu dans cet ensemble.

**Définition 2.2** La fonction  $f(\cdot)$ , définie dans  $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$ , satisfait la condition de Lipschitz s'il existe une constante  $K$  telle que, pour chaque paire de points  $\tilde{\mathbf{w}}^1, \tilde{\mathbf{w}}^2 \in \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$ , nous avons:

$$|f(\tilde{\mathbf{w}}^1) - f(\tilde{\mathbf{w}}^2)| \leq K \cdot |\tilde{\mathbf{w}}^1 - \tilde{\mathbf{w}}^2| \quad (2.3)$$

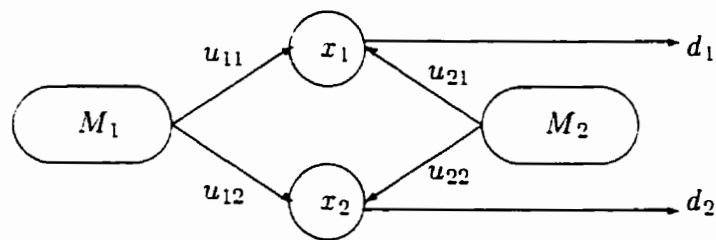
Avec la condition (2.3), on dit que  $f(\cdot)$  est à variation bornée dans  $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2n}$ .

L'exemple suivant nous permet de spécifier la fonction  $f(\cdot)$  relative à un système

de production donné.

**Exemple 2.1: Deux machines en parallèle traitant deux produits**

Soit le système illustré à la figure 2.1 et constitué de deux machines en parallèle qui produisent deux types de pièces ( $m = 2$  et  $n = 2$ ).



**Figure 2.1:** Modèle de deux machines en parallèle

Le système d'équations (2.1)-(2.2) est dans ce cas donné par:

$$\dot{x}_1(t) = u_{11}(t) + u_{21}(t) - d_1(t), \quad x_1(0) = x_1 \quad (2.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_{12}(t) + u_{22}(t) - d_2(t), \quad x_2(0) = x_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{a}_1(t) = k_{11}u_{11}(t) + k_{12}u_{12}(t), \quad a_1(0) = a_1 \quad (2.6)$$

$$\dot{a}_2(t) = k_{21}u_{21}(t) + k_{22}u_{22}(t), \quad a_2(0) = a_2 \quad (2.7)$$

En posant

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x}'(t) \ \mathbf{a}'(t))' = (x_1(t) \ x_2(t) \ a_1(t) \ a_2(t))'$$

$$\mathbf{u}(t) = (u_{11}(t) \ u_{12}(t) \ u_{21}(t) \ u_{22}(t))' \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{d}(t) = (d_1(t) \ d_2(t))'$$

le système d'équations (2.4)-(2.7) devient:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}d(t) \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.2.1.2 Dynamique discrète

La dynamique décrite par le système d'équations (2.1)-(2.2) est perturbée par un processus de saut  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  correspondant à l'état discret du système. Cet état discret est généré par un processus markovien à temps continu et à état fini  $\zeta(t)$ , appelé mode, prenant ses valeurs dans un ensemble fini  $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$  avec les probabilités de transition du mode  $\alpha$  au mode  $\beta$  décrites par les relations suivantes:

$$P[\zeta(t + \delta t) = \beta | \zeta(t) = \alpha] = \begin{cases} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{if } \alpha \neq \beta \\ 1 + \lambda_{\alpha\alpha}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{if } \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.9)$$

Le processus  $\zeta(t)$  est caractérisé par la matrice des taux de transition  $[\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)]$  tels que les  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sont différentiables par rapport à  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $\bar{\mathbf{u}}$  et vérifient les relations suivantes:

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{B} \quad (2.10)$$

$$\lambda_{\alpha\beta}(\cdot) \geq 0 \quad \forall \beta \neq \alpha \quad (2.11)$$

avec  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$ .

Le processus de saut  $\zeta(t)$  est un vecteur dont les éléments sont des variables aléatoires  $\zeta_i(t)$  à états dans  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Nous avons en général  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times$

$\dots \times \mathcal{B}_i \dots \times \mathcal{B}_m$ . Dans le cas de l'exemple 2.1,  $\zeta_i(t) \in \mathcal{B}_i = \{1, 2, 3\}$  tel que:

$$\zeta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si la machine } M_i \text{ est opérationnelle} \\ 2 & \text{si la machine } M_i \text{ est en réparation} \\ 3 & \text{si la machine } M_i \text{ est en maintenance préventive} \end{cases} \quad (2.12)$$

Les taux de transition  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$  du processus  $\zeta(t)$  se déduisent aisément de ceux des processus  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , comme suit:

1. définir  $\mathcal{B}$  tel que  $\text{card}(\mathcal{B}) = 3^m$ . Identifier les modes de  $\zeta(t)$  tels que:

$$\zeta(t) \in \{1, 2, \dots, 3^m\}$$

2. établir le lien entre les modes de  $\zeta(t)$  et ceux de  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , en utilisant un tableau similaire au tableau 2.1 et en déduire  $\lambda_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ ) à partir de la connaissance des  $\lambda_{\alpha'\beta'}^i$ , ( $\alpha', \beta' \in \mathcal{B}_i$ )

où  $\lambda_{\alpha'\beta'}^i$  est le taux de transition du mode  $\alpha'$  au mode  $\beta'$  correspondant au processus  $\zeta_i(t)$ . D'après le tableau 2.1, on peut noter que  $\lambda_{12} = \lambda_{12}^2$ ,  $\lambda_{13} = \lambda_{13}^2$ ,  $\lambda_{14} = \lambda_{12}^1$ , etc.

**Tableau 2.1:** Modes de  $\zeta(t)$  et  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

$\zeta_1$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$\zeta_2$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\zeta$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Soit  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}', \omega')'$  le vecteur de commande où  $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  est le vecteur des taux d'envoi en entretien préventif des machines  $M_i$ . Ces taux représentent physiquement l'inverse du temps qui sépare l'appel du technicien de maintenance et son arrivée. Nous supposons que l'arrivée du technicien, appelé pour une machine  $M_i$ , correspond à l'arrêt de cette machine. Les  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont considérés comme étant des variables de commande et correspondent aux taux de transition

du mode opérationnel au mode de maintenance préventive pour chaque machine  $M_i$ . Pour plus d'information sur ce concept, nous renvoyons le lecteur à Boukas (1987) et à Boukas (1995).

Nous présenterons plus en détail au chapitre 4 les significations physiques des différents taux de transition  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$  en montrant leur dépendance vis-à-vis des âges des machines et de la commande. Cependant, nous pouvons noter ici que le concept de taux de transition variable ainsi utilisé permet de:

1. Modéliser des fréquences de panne d'une machine  $i$  qui dépendent de son âge  $a_i(t)$ . On peut poser par exemple  $\lambda_{12}^i(a_i(t)) = T(a_i(t))$  où  $T(\cdot)$  est une fonction réelle quelconque et  $\lambda_{12}^i(\cdot)$  est le taux de transition du mode opérationnel au mode panne de la machine  $M_i$ .
2. Définir une politique de maintenance préventive en contrôlant simultanément les taux de production  $u(\cdot)$  du système et de maintenance préventive  $\omega(\cdot)$  des machines.

### 2.2.2 Commande optimale stochastique

Nous présentons dans cette section l'ensemble des commandes admissibles, la forme du coût instantané considéré et l'expression du critère de performance. Nous posons par la suite le problème de commande optimale stochastique associé au problème de planification de la production et de la maintenance du système de production considéré. Pour le système de  $m$  machines identiques en parallèle qui produisent  $n$  types de pièces, rappelons ici que nous avons  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta(t) \in \mathcal{B} = \{1, \dots, p\}$  et  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^n$  où  $p \in \mathbb{N}$  est le dernier mode du système ( $p = 3^m$ ). La dynamique de  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  est donnée par le système d'équations (2.1)-(2.2)

dont une structure particulière est présentée par les équations (2.4)-(2.7) relatives à l'exemple 2.1.

Soit  $Q(\cdot) = [\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)]$  une matrice  $p \times p$  telle que les conditions (2.10)-(2.11) soient vérifiées. Si  $Q(\cdot)$  est la matrice des taux de transition de la chaîne de Markov  $\zeta(t)$ , nous avons pour toute fonction  $\varphi$  définie dans  $\mathcal{B}$ :

$$Q(\cdot)\varphi(\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot) [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)] \quad (2.13)$$

Pour un mode  $\alpha \in \mathcal{B}$ , définissons l'ensemble des lois de commande admissibles  $U(\alpha)$  comme suit:

$$U(\alpha) = \left\{ \tilde{u}(\cdot) : 0 \leq u_{ij}(\cdot) \leq \text{Ind}\{\zeta_i(t) = 1\} u_{max}^{ij}; \right. \\ \left. 0 \leq \omega_i(\cdot) \leq \text{Ind}\{\zeta_i(t) = 1\} \omega_{max} \right\} \quad (2.14)$$

où  $u_{max}^{ij}$  est le taux de production maximale du produit  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sur la machine  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et  $\omega_{max}$  est le taux de maintenance préventive maximale de chaque machine. La fonction  $\text{Ind}\{P(\cdot)\}$  est définie telle que  $\text{Ind}\{P(\cdot)\} = 1$  si la proposition  $P(\cdot)$  est vraie et  $\text{Ind}\{P(\cdot)\} = 0$  si la proposition  $P(\cdot)$  est fausse. L'ensemble  $U(\alpha)$  est constitué des lois de commande définies sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^{n+m}$  telles que  $\tilde{u}(\alpha, \tilde{x})$  est partout continûment différentiable avec des dérivées partielles bornées en  $\tilde{x}$ . Nous pouvons remarquer que  $U(\alpha)$  est un ensemble convexe.

**Définition 2.3** Une fonction  $\tilde{u}(\alpha, \tilde{x})$  est appelée loi de feedback admissible si:

(i) pour toute condition initiale  $\tilde{x}$ , l'équation

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(\alpha, \tilde{x}), \mathbf{d}(t)) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x} \quad (2.15)$$

admet une solution unique;

(ii)  $\tilde{u}(\cdot) = \{\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\alpha, \tilde{x}), t \geq 0\} \in U(\alpha)$ .

Au lieu de définir un ensemble de lois de feedback admissibles, nous exprimons par la suite la condition d'admissibilité (ii) en posant simplement  $\tilde{\mathbf{u}}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) \in U(\alpha)$  avec un abus de notation.

Soit  $g^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  la fonction coût instantané qui permet de pénaliser, dans chaque mode  $\alpha$  du système, le stockage des produits, les opérations de production et celles de réparation et de maintenance des machines. Cette fonction sera définie de façon précise au chapitre 4 consacré à l'expérimentation de l'approche de commande hiérarchisée (présentée au chapitre 3). Pour chaque loi de commande  $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) \in U(\alpha)$ , la fonction coût peut être définie comme suit:

$$J(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha, \tilde{\mathbf{u}}(\cdot)) = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} [g^{\zeta(t)}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t))] dt \mid \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}, \zeta(0) = \alpha \right\} \quad (2.16)$$

où  $\rho$  est le taux d'actualisation. Le problème de commande optimale considéré consiste à déterminer une stratégie de production et de maintenance des machines qui minimise l'expression (2.16).

La fonction valeur associée à ce problème d'optimisation est donnée par l'expression suivante:

$$v(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha) = \inf_{\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) \in U(\alpha)} J(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha, \tilde{\mathbf{u}}(\cdot)) \quad (2.17)$$

Si la fonction valeur  $v(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha)$  est différentiable par rapport à  $\tilde{\mathbf{x}}$ , elle doit satisfaire un certain nombre de relations à l'optimum dites conditions d'optimalité du problème d'optimisation stochastique posé. Nous spécifions ces relations à la section suivante en terme de propriétés de la fonction valeur.

## 2.3 Propriétés de la fonction valeur

Dans cette section, il est question d'établir les conditions d'optimalité pour un problème de commande stochastique de FMS. Ces conditions se traduisent par un ensemble de relations que la fonction valeur doit satisfaire. Nous établissons les propriétés de la fonction valeur en montrant qu'elle est localement Lipschitz (ce qui garantit qu'elle est différentiable partout) et qu'elle satisfait un ensemble d'équations aux dérivées partielles dites équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Nous établissons également une condition suffisante pour la commande optimale. Pour établir ces propriétés, nous avons besoin de l'hypothèse suivante:

(A2.1) *La fonction coût instantané  $g^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$  est une fonction continue et il existe des constantes  $C_g$  et  $k_g$  telles que:*

$$0 \leq g^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \leq C_g(1 + |\bar{\mathbf{x}}|^{k_g})$$

et pour tout  $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1$  et  $\bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{u}}_2$

$$|g^\alpha(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1) - g^\alpha(\bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{u}}_2)| \leq C_g(1 + |\bar{\mathbf{x}}_1|^{k_g} + |\bar{\mathbf{x}}_2|^{k_g})|\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2|$$

**Remarque 2.1:** L'hypothèse (A2.1) indique que le coût instantané satisfait une certaine condition de croissance par rapport  $\bar{\mathbf{x}}$ . De plus, cette fonction coût est localement Lipschitz en  $\bar{\mathbf{x}}$  (voir Boukas et al. (1995b)).

Le prochain théorème montre que la fonction valeur  $v(\cdot)$  satisfait un ensemble de conditions à l'optimum qui dépendent du gradient  $v_{\bar{\mathbf{x}}}(\cdot)$ . Cette dépendance nécessite alors les propriétés de continuité et de différentiabilité de  $v(\cdot)$ . Nous allons maintenant présenter ces conditions d'optimum et établir par la suite la différentiabilité de la fonction valeur associée.

Soit

$$H(\alpha, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}) = (\mathbf{u} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q}(\omega)v_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}, \cdot)(\alpha) + g^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \quad (2.18)$$



Les équations de la programmation dynamique associées au problème de commande optimale considéré sont données par:

$$\rho v(\bar{x}, \alpha) = \min_{(\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U}(\alpha)} H(\alpha, v_{\bar{x}}(\bar{x}, \alpha), \bar{\mathbf{u}}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \alpha \in \mathcal{B} \quad (2.19)$$

où  $v_{\bar{x}}(\bar{x}, \alpha)$  est le gradient de  $v(\cdot)$  mentionné précédemment. Nous utilisons les définitions suivantes pour montrer que la fonction valeur  $v(\cdot)$  satisfait l'équation (2.19).

**Définition 2.4** La super-différentiabilité  $D^-f(\bar{x})$  et la sous-différentiabilité  $D^+f(\bar{x})$  de toute fonction  $f(\bar{x})$  sont définies respectivement comme suit:

$$D^-f(\bar{x}) = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n+m} : \limsup_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \mathbf{h}) - f(\bar{x}) - \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{h}|} \leq 0 \right\}$$

$$D^+f(\bar{x}) = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n+m} : \liminf_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \mathbf{h}) - f(\bar{x}) - \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{h}|} \geq 0 \right\}$$

**Définition 2.5** On dit que la fonction valeur  $v(\cdot)$  est une solution de viscosité de (2.19) si les conditions suivantes sont vérifiées:

(a)  $v(\cdot)$  est continu et  $0 \leq v(\bar{x}, \alpha) \leq C_g(1 + |\bar{x}|^{\kappa_g})$ ;

(b)  $\forall \mathbf{r} \in D^-v(\bar{x}, \alpha)$

$$\min_{(\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U}(\alpha)} H(\alpha, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}) - \rho v(\bar{x}, \alpha) \geq 0 \quad (2.20)$$

(c)  $\forall \mathbf{r} \in D^+v(\bar{x}, \alpha)$

$$\min_{(\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U}(\alpha)} H(\alpha, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{u}}) - \rho v(\bar{x}, \alpha) \leq 0 \quad (2.21)$$

Si les conditions (a) et (b) sont satisfaites, alors la fonction valeur  $v(\cdot)$  est dite une sous-solution de viscosité. Si les conditions (a) et (c) sont satisfaites,  $v(\cdot)$  est appelée une super-solution de viscosité. Pour plus d'information et de discussion sur le concept de solution de viscosité, nous référons le lecteur aux travaux de Grandall et al. (1984) et de Sethi et Zhang (1994).

**Théorème 2.1** *La fonction valeur  $v(\bar{x}, \alpha)$  est (i) continûment différentiable et (ii) satisfait l'équation d'HJB donnée par (2.19).*

**Preuve:** Nous allons prouver successivement les deux parties de ce théorème.

(i) À partir du fait que  $v(\bar{x}, \alpha)$  satisfait la propriété de Lipschitz, nous pouvons conclure qu'une telle fonction est différentiable par rapport à  $\bar{x}$ , pour tout  $\alpha \in \mathcal{B}$ . Notons également que toute fonction qui est convexe et satisfait la condition de Lipschitz est continûment différentiable.

(ii) Pour prouver que la fonction valeur satisfait l'équation d'HJB, utilisons maintenant les concepts donnés par la définition 2.4. D'après la première partie du théorème (2.1), c'est-à-dire  $v(\cdot)$  est continûment différentiable par rapport à  $\bar{x}$ .  $D^-v(\bar{x}, \alpha)$  et  $D^+v(\bar{x}, \alpha)$  sont tous les deux égaux à  $\{v_{\bar{x}}(\bar{x}, \alpha)\}$ . Dans ces conditions, les deux inégalités dans la définition du concept de solution de viscosité (voir équations (2.20) et (2.21)) deviennent des égalités. Donc  $v(\cdot)$  satisfait les équations d'HJB.  $\square$

Le théorème de vérification ci-après établit une condition suffisante d'optimalité.

**Théorème 2.2** *(théorème de vérification) Soit  $v(\bar{x}, \alpha)$  une solution différentiable de l'équation d'HJB (2.19) telle que si*

$$0 \leq v(\bar{x}, \alpha) \leq C_g(1 + |\bar{x}|^{k_g})$$

alors

(i)  $v(\bar{x}, \alpha) \leq J(\bar{x}, \alpha, \bar{u})$  pour tout  $\bar{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$ .

(ii) si  $\bar{u}^*(\bar{x}, \alpha)$  est une loi de feedback admissible telle que

$$\min_{(\mathbf{u}, \omega) \in \mathcal{U}(\alpha)} H(\alpha, v_{\bar{x}}(\bar{x}, \alpha), \bar{u}) = H(\alpha, v_{\bar{x}}(\bar{x}, \alpha), \bar{u}^*(\bar{x}, \alpha))$$

alors:

$$J(\bar{\mathbf{x}}, \alpha, \tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot)) = v(\bar{\mathbf{x}}, \alpha)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot) = (\mathbf{u}^*(\cdot), \omega^*(\cdot)) = (\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{a}(\cdot), \alpha), \omega^*(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{a}(\cdot), \alpha))$ . La loi de commande  $(\mathbf{u}^*(\cdot), \omega^*(\cdot))$  est alors optimale.

**Preuve:** La preuve de ce théorème est présentée dans Boukas et al. (1995b).  $\square$

La loi de commande optimale  $\tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot)$  est celle qui minimise, à travers  $\mathcal{U}(\alpha)$ , le membre de droite de l'équation (2.19). Cette commande est associée à la fonction valeur décrite par le théorème précédent. Lorsque la fonction valeur est disponible, une politique de commande optimale est obtenue d'après (2.19). Mais une solution analytique de (2.19) qui donne  $v(\cdot)$  et la commande optimale associée est difficile à obtenir.

Chercher à résoudre analytiquement le système d'équations (2.19) n'est donc pas un objectif réaliste à cause de sa complexité dans le cas des systèmes larges, constitués de plusieurs machines qui produisent plusieurs types de pièces. Une solution analytique de cette équation existe dans le cas d'un système constitué d'une machine produisant un seul type de pièce et avec une dynamique des pannes de la machine décrite par une chaîne de Markov homogène (voir Akella et Kumar (1986)). Une alternative pour résoudre ces équations consiste à appliquer des méthodes numériques. Nous présentons aux annexes A et C l'application de telles méthodes aux cas de deux systèmes de production constitués de deux machines. Les systèmes considérés produisent respectivement un seul type de pièce et deux types de pièces. Les méthodes numériques utilisées se heurtent malheureusement à la grande dimension des équations d'HJB pour des systèmes complexes. Cette

dimension varie exponentiellement avec la taille du problème d'optimisation, tel que nous le ressortons à la section suivante.

## 2.4 Dimension des équations d'HJB

À cause de la large dimension des problèmes de planification de la production et de la maintenance des FMS dans des situations réelles, l'obtention d'une solution aux équations d'HJB est extrêmement difficile sinon impossible. Notons cependant qu'à l'aide des méthodes numériques, il est possible d'envisager une solution de l'équation (2.19) dans le cas des systèmes constitués d'un maximum de deux machines et produisant un seul ou deux types de pièces. L'espace mémoire disponible pour l'implantation des algorithmes numériques développés dans le passé ne permet pas d'utiliser un maillage fin dans le cas d'un système complexe. Cette limitation vient du fait que la dimension du problème est relativement importante. Cette dimension dépend des éléments principaux suivants:

1. nombre de modes du processus stochastique  $\zeta(t)$ ;
2. nombre de machines et de types de pièces qui constituent le système de production;
3. maillage ou grille des variables d'état (défini par les bornes supérieure et inférieure des variables d'état et les pas de discrétisation considérés);
4. maillage ou grille de commande (défini par les différentes valeurs possibles des variables de commande);
5. combinaisons des taux de production dans les différents modes où la production a lieu;

## 6. combinaisons des taux de maintenance préventive dans les différents modes où la maintenance préventive a lieu.

Lorsque les nombres de machines et de types de pièces augmentent, la dimension du problème d'optimisation croît très rapidement et rend de plus en plus difficile l'implantation des algorithmes numériques de résolution des équations d'HJB.

Avec une telle croissance de la dimension, le problème de commande ne peut être résolu numériquement par l'approche classique que lorsqu'on considère un maillage grossier (c'est-à-dire à large pas de discrétisation) dont le stockage n'excède pas la mémoire RAM disponible. Étant donné que la précision des résultats numériques dépend du pas de discrétisation des variables, les lois de commande issues des approches numériques sont dites d'optimalité asymptotique. Nous demandons au lecteur de se référer au travaux de Boukas et Kenne (1997) et de Kushner et Dupuis (1992) pour plus de détails sur la convergence des solutions numériques vers les solutions optimales lorsque le pas de discrétisation diminue. Lorsque le nombre de variables impliquées est relativement faible (problème de faible dimension), les méthodes numériques peuvent être utilisées pour déterminer les lois de commande du FMS avec un maillage fin.

L'approche que nous proposons dans cette thèse consiste à éviter d'aborder le problème de commande des FMS en considérant les équations d'HJB telles que présentées par l'expression (2.19) mais plutôt de réduire la taille du problème avant d'appliquer les méthodes numériques. Les détails sur cette alternative sont donnés au chapitre 3.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une formulation générale du problème de planification des lois de commande des FMS dans le cas où les taux de transition dépendent de l'état et de la commande. Nous avons ressorti le fait que la fonction valeur associée au problème d'optimisation considéré satisfait les équations d'HJB. Nous avons établi que la dimension du problème de commande optimale stochastique augmente très rapidement avec les nombres de machines et de types de pièces impliqués. C'est cette augmentation qui rend difficile la résolution des équations d'HJB et qui est à l'origine de la motivation principale de cette recherche.

Ce chapitre nous a permis de définir clairement le problème d'optimisation stochastique à résoudre dans cette thèse. De plus, nous avons défini les concepts couramment utilisés dans la théorie de commande stochastique et nous avons ressorti une difficulté rencontrée lorsqu'on aborde le problème selon le formalisme de Boukas (1987). Le chapitre suivant étend ce formalisme à la commande des systèmes de production plus larges en proposant une approche alternative qui réduit le niveau de complexité de résolution du problème.

## Chapitre 3

# Commande hiérarchisée

### 3.1 Introduction

La méthode de décomposition hiérarchisée est l'une des plus importantes approches utilisées pour la commande des problèmes d'optimisation associés aux systèmes de production complexes. L'idée de cette méthode consiste:

- (i) à réduire la complexité du problème d'optimisation global en approximant ce dernier soit par un problème d'optimisation simple, soit par un ensemble de problèmes de commande de faible dimension;
- (ii) à résoudre le problème d'optimisation simple ou l'ensemble des problèmes de faible dimension issus de la réduction précédente;
- (iii) à construire une solution du problème d'optimisation initial à partir des solutions du problème ou des problèmes d'optimisation simples.

Il existe plusieurs méthodes qui peuvent être utilisées pour réduire la complexité d'un problème de commande. Ces méthodes ne sont pas mutuellement exclusives et les plus importantes, présentées par Lehoczky et al. (1991), sont les suivantes:

1. méthode de décomposition du problème initial en plusieurs problèmes de faible dimension et avec un mécanisme de coordination approprié;

2. méthode basée successivement sur une agrégation des ressources, sur une étude des problèmes de commande obtenus et enfin sur une désagrégation des ressources;
3. méthode basée sur le remplacement des phénomènes rapides par leurs moyennes et autres moments si possible.

La troisième méthode est généralement associée aux méthodes des perturbations singulières. L'approche résultante, dite hiérarchisée, est basée sur plusieurs échelles de temps. Ces échelles de temps sont associées aux phénomènes aléatoires ou déterministes caractérisés respectivement par un temps moyen d'interarrivée court (phénomènes rapides) et un temps moyen d'interarrivée relativement long (phénomènes lents). Ce concept, lorsqu'il est basé sur deux échelles, permet de développer des modèles de commande hiérarchisée à deux niveaux. Pour plus de détails sur les approches de commande hiérarchisée appliquées aux systèmes de production et sur l'importance de telles approches, nous demandons au lecteur de se référer aux travaux de Sethi et Zhang (1994) et aux références qui y sont relatives.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème d'optimisation relié à la planification des activités dans un FMS. Nous contrôlons simultanément les taux de production et de maintenance préventive des machines de manière à satisfaire le plus possible un taux de demande donné. Ce problème, dit global, est formulé comme un problème dynamique d'optimisation stochastique en présence d'une capacité de production décrite par une chaîne de Markov non homogène à états finis.

En pratique, la planification des activités dans un système de production complexe se fait à plusieurs niveaux d'organisation, soit à cause de la complexité du problème d'optimisation ou à cause des considérations organisationnelles



(structure hiérarchisée par exemple). Le problème d'optimisation considéré dans cette recherche peut ainsi se ramener à un problème hiérarchisé de prise de décision associé aux niveaux suivants :

1. le niveau de planification de la production et de la maintenance préventive à long terme qui ignore les fluctuations journalières de la capacité de chaque machine;
2. le niveau de production et de maintenance préventive des machines en temps réel qui utilise une stratégie basée sur une planification à long terme et qui intègre la nature stochastique du problème.

En nous basant sur une approche de commande hiérarchisée associée à ces deux niveaux, nous nous proposons d'étendre la méthodologie de commande hiérarchisée, présentée par Lehoczky et al. (1991), Sethi et Zhang (1994) et Soner (1993), au cas des systèmes de production décrits par des chaînes de Markov non homogènes.

Nous réduisons la complexité du problème de commande initial en considérant des échelles de temps différents reliés aux processus des pannes et réparations des machines et à l'actualisation du coût. Les phénomènes rapides sont remplacés par leurs moyennes et le problème d'optimisation obtenu est associé au niveau 1 de la hiérarchie proposée. À partir de la solution du problème du niveau 1, nous passons au niveau 2 de la hiérarchie en construisant une loi de commande qui approxime celle du problème stochastique initial (voir Kenne et Boukas (1997b)).

Nous présentons dans ce chapitre une application de l'approche des perturbations singulières à la commande d'un FMS dont la capacité de production est décrite par une chaîne de Markov non homogène. Cette approche permet de réduire la complexité du problème de commande et de proposer une approximation

de la loi de commande optimale en utilisant une méthode de commande hiérarchisée à deux niveaux.

Le plan de ce chapitre est le suivant: dans la section 2, nous présentons l'approche des perturbations singulières et son application dans la commande des systèmes de production. Dans la section 3, nous formulons à nouveau le problème d'optimisation présenté au chapitre 2 dans le cas des machines identiques en parallèle qui produisent plusieurs types de pièces. La section 4 présente le problème déterministe que nous obtenons à partir du problème stochastique initial par application de la méthode des perturbations singulières. La section 5 présente le problème de décision markovien associé au problème limite. La section 6 présente la méthode heuristique de construction de la loi de commande stochastique du problème initial à partir de la solution du problème de décision markovien.

## **3.2 Principe de la méthode des perturbations singulières**

### **3.2.1 Approche générale de commande hiérarchisée**

Les systèmes perturbés de façon singulière (singularly perturbed systems) et, plus précisément, les systèmes à plusieurs échelles de temps (multi-time scale systems) sont naturellement dus à la présence des phénomènes de hautes fréquences dans le modèle. Ces phénomènes sont généralement associés à une échelle de temps dite échelle de temps rapide (fast time scale). Les phénomènes lents sont associés à l'échelle de temps lent. Le passage d'une échelle de temps à l'autre peut être interprété comme une perturbation. Ce type de perturbation étant brusque,

comparée à une perturbation régulière, est dite singulière. L'existence des deux échelles de temps est généralement modélisée par un paramètre de perturbation singulière  $\epsilon$  et le système est dit perturbé de façon singulière.

Dans la théorie de commande, plusieurs approches de modélisation et de commande, basées sur le concept des perturbations singulières, ont été présentées dans la littérature. Les échelles de temps considérées dans les différents modèles développés dans la littérature sont soit associées à la dynamique continue du système (constituée des équations différentielles d'état), soit à la dynamique discrète du système (constituée du processus stochastique décrivant les différents modes du système). Nous présentons aux sections 3.2.2 et 3.2.3 les références associées aux approches correspondant à ces modèles.

### 3.2.2 Échelles de temps basées sur la dynamique continue

Lorsque la dynamique d'un système est telle qu'il existe un faible couplage entre les différentes équations différentielles d'état, le modèle standard suivant est généralement utilisé dans la littérature

$$\dot{x} = h(x, z, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^p \quad (3.1)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z, t), \quad z(t_0) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^q \quad (3.2)$$

où  $h(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont des fonctions continûment différentiables par rapport à leurs arguments  $x, z, t$ . Le scalaire  $\epsilon$  représente dans ce cas tous les paramètres à négliger (petits paramètres physiques, faibles constantes de temps, etc.). La variable d'état  $x(\cdot)$  est associée au phénomène lent et la variable  $z(\cdot)$  au phénomène rapide.

En faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro, les paramètres non significatifs sont négligés et nous obtenons ainsi une réduction de l'ordre du système d'équations différentielles

(3.1)-(3.2). En résolvant  $g(x, z, t) = 0$  et en introduisant la solution trouvée dans (3.1), nous obtenons un système d'ordre  $p$  comparé à l'ordre initial  $p + q$ . Cette approche de modélisation a été utilisée par Kokotović et al. (1986) pour montrer qu'en négligeant l'inductance  $L$  d'un moteur à courant continu (c'est-à-dire en posant  $L = \epsilon$ ), nous pouvons retrouver facilement le modèle du premier ordre couramment utilisé pour décrire la dynamique d'un tel moteur. Pour plus d'information sur ces types de réduction et leurs applications dans la commande des systèmes, nous demandons au lecteur de se référer aux travaux de Grammel (1996), de Kokotović et al. (1986) et de Saksena et al. (1984).

D'après la modélisation du chapitre 2 et les modèles dynamiques utilisés dans la littérature de commande des FMS, il ressort que les équations d'état ne sont pas caractérisées par la présence des faibles paramètres qui peuvent jouer le rôle de  $\epsilon$  comme dans les travaux de Grammel (1996), de Kokotović et al. (1986) et de Saksena et al. (1984). Nous ne pouvons donc pas utiliser, dans le cadre de cette recherche, des modèles basés sur une association des échelles de temps à la dynamique continue du système. Par contre, si nous associons la notion d'échelle de temps à la dynamique discrète du système en étude, nous obtenons des modèles qui sont des extensions de ceux présentés par Lehoczky et al. (1991), Sethi et Zhang (1994) et Soner (1993). Nous présentons dans ce chapitre une méthodologie de commande hiérarchisée qui est basée sur une extension des approches basées sur des chaînes de Markov homogènes au cas des systèmes décrits par des chaînes de Markov non homogènes.

### 3.2.3 Échelles de temps basées sur la dynamique discrète

L'application de la méthode de commande hiérarchisée, basée sur plusieurs échelles de temps, à la commande d'un FMS peut également se justifier par le fait que ce dernier est généralement caractérisé par divers changements de capacité de production. Les points suivants présentent les principales approches présentées dans la littérature et qui sont basées sur ces changements de capacité (dynamique discrète).

1. Existence des machines lentes et rapides dans un système de production en tandem. L'exemple présenté par Bielecki (1996) illustre bien cette approche. L'approche est basée sur le fait que les capacités de production d'un système constitué de deux machines en série peuvent être décrites par une chaîne de Markov dont les taux de transition sont consistants par rapport à l'échelle de temps de la machine rapide. Cette approche réduit considérablement la dimension du problème de commande optimale initial.
2. La matrice des taux de transition  $Q(\cdot)$  du processus stochastique qui décrit la dynamique des machines est telle qu'on peut la décomposer comme suit :

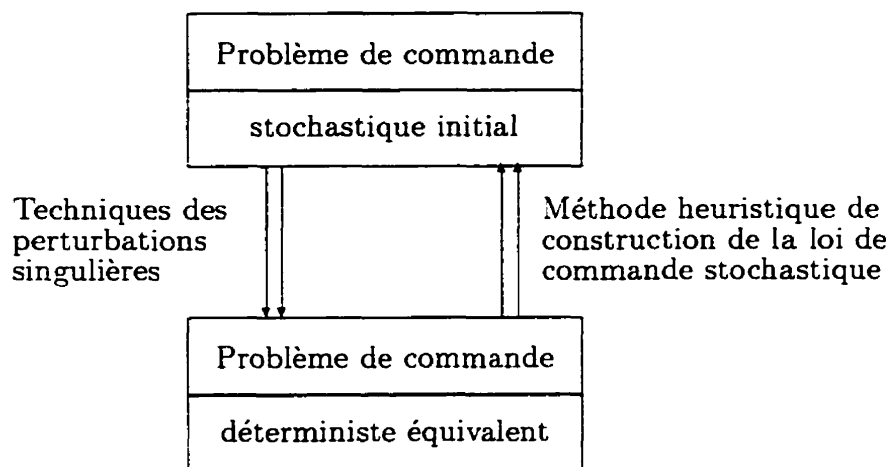
$$Q(\cdot) = Q^1(\cdot) + \frac{1}{\epsilon} Q^2(\cdot) \quad (3.3)$$

où  $\epsilon$  est le paramètre de perturbation singulière,  $Q^1(\cdot)$  est la matrice des taux de transition des phénomènes lents et  $Q^2(\cdot)$  est celle des phénomènes rapides. Des détails sur cette approche peuvent être trouvés dans Sethi et Zhang (1994) et dans Sethi et al. (1994).

3. Les transitions entre les modes du processus stochastique qui modélise la dynamique des pannes des machines sont rapides comparées à l'actualisation

du coût. Ce processus de capacité du système change de mode avant toute déviation substantielle de  $e^{-\rho t}$  par rapport à 1 (correspondant à  $e^{-\rho t}$  à  $t = 0$ ). La méthode de commande hiérarchisée que nous présentons dans cette thèse est basée sur une telle approche.

Pour plus d'information sur la troisième approche de modélisation, nous invitons le lecteur à se référer aux travaux de Kenne et Boukas (1997b), de Lehoczky et al. (1991) et de Sethi et Zhang (1994). Avec une telle approche, les changements de capacité se font plus rapidement que les changements associés aux phénomènes tels que l'actualisation du coût.



**Figure 3.1:** Approche de commande hiérarchisée

En d'autres termes, le taux suivant lequel la capacité du système de production change est plus grand que le taux d'actualisation du coût ou plus grand qu'un taux associé à toute autre échelle de temps. Pour une demande constante et un taux d'actualisation relativement faible, nous obtenons deux échelles de temps. L'approche de commande associée à ces deux échelles de temps est illustrée à la

figure 3.1. Cette figure montre qu'en appliquant la méthode des perturbations singulières au problème de commande stochastique initial, nous pouvons obtenir un problème de commande déterministe équivalent. L'approche de cette méthode consiste à remplacer le phénomène rapide par ses valeurs moyennes lorsque les phénomènes lents et rapides sont associés à deux échelles de temps différentes. Le problème de commande déterministe obtenu, caractérisé par une faible dimension, est relativement plus facile à résoudre et est associé au niveau 1 de la hiérarchie. À partir de la solution de ce dernier problème, nous nous proposons d'approximer la solution du problème de commande initial à l'aide d'une méthode heuristique. La loi de commande issue de cette méthode heuristique intègre les fluctuations réelles de production et correspond à une planification à court terme ou au niveau 2 de la hiérarchie proposée.

Dans le modèle que nous présentons, le processus de capacité du système dépend des âges des machines et de la commande. Nous présentons ci-après la formulation du problème d'optimisation du FMS perturbé de façon singulière par la présence de deux échelles de temps.

### **3.3 Formulation du problème**

Dans cette section, nous présentons une formulation explicite du problème de planification des taux de production et de maintenance préventive d'un FMS soumis à des processus qui appartiennent à deux échelles de temps. La méthode des perturbations singulières est utilisée pour réduire la complexité du problème de commande. Une approche hiérarchisée est alors proposée pour résoudre le problème complexe de commande posé.

Le fait que les taux de changement des modes des machines sont en général plus grands que le taux d'actualisation du coût nous permet d'appliquer une méthode basée sur deux échelles de temps. Nous supposons (sans perdre de vue la généralité de l'approche) un taux de demande constant. Avec cette hypothèse, l'existence d'un paramètre de perturbation  $\epsilon$  et la méthodologie présentée à la figure 3.1 nous permettent de présenter une méthode d'approximation de la solution du problème de commande optimale initial.

Nous considérons un système constitué de  $m$  machines identiques qui produisent  $n$  types de pièces. Comme au chapitre précédent, le mode opérationnel d'une machine  $i$  peut être décrit par un processus stochastique  $\zeta_i(t)$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Rappelons qu'une telle machine est soit opérationnelle ( $\zeta_i(t) = 1$ ), en réparation ( $\zeta_i(t) = 2$ ) ou en maintenance préventive ( $\zeta_i(t) = 3$ ). Pour chaque machine, nous avons alors un processus  $\zeta_i(t)$  tel que  $\zeta_i(t) \in \mathcal{B}_i = \{1, 2, 3\}$ . Nous pouvons alors décrire le mode du système global par le vecteur  $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_m(t))'$  à valeur dans  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$ .

Soient  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)'$  et  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)'$  les vecteurs des âges et des taux d'envoi en entretien préventif des machines respectivement. Le processus  $\zeta(t)$  est modélisé par une chaîne de Markov à états finis ayant une matrice de taux de transition  $\mathbf{Q}(\cdot)$  qui dépend de  $\mathbf{a}$  et de  $\omega$ . Cette matrice est donnée par:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{a}, \omega) = \left[ \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{a}, \omega) \right], \quad \lambda_{\alpha\beta}(\cdot) \geq 0, \quad \forall \alpha \neq \beta$$

$$\sum_{\beta=1}^M \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{a}, \omega) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, M$$

où  $M = \text{card}(\mathcal{B})$ . Les taux de transition  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$  sont obtenus à partir d'une combinaison des taux de transition des processus dépendants  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , en utilisant la méthode présentée à la section 2.2.1.2. Les probabilités de transition



de ces processus sont données par l'expression (2.9).

Nous allons considérer pour la suite du développement deux échelles de temps. Le paramètre de perturbation singulière  $\epsilon$  correspondant est associé à l'écart entre le temps moyen d'interarrivée des phénomènes rapides (pannes/réparation ou envoi en entretien préventif/maintenance des machines) et celui des phénomènes lents (actualisation du coût). Le point suivant se déduit de cette considération:

- Si  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$  est un taux de transition associé au processus rapide, alors  $\epsilon\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$  et  $\rho$  ont le même ordre de grandeur. Il existe donc un taux de transition  $q_{\alpha\beta}(\cdot)$  du même processus dans l'échelle de temps des phénomènes lents (associée à l'actualisation du coût) tel que  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot) = \epsilon^{-1}q_{\alpha\beta}(\cdot)$ .

Nous pouvons alors décrire la capacité du système par un processus stochastique  $\zeta^\epsilon(t)$  associé à une matrice des taux de transition  $Q^\epsilon(\cdot)$  définie comme suit:

$$Q^\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} [q_{\alpha\beta}(\cdot)] \quad \alpha, \beta \in \mathcal{B} \quad (3.4)$$

(autrement dit  $Q^\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon}Q(\cdot)$ ). L'approche des perturbations singulières est basée sur des probabilités limites du processus rapide. Ces probabilités permettent de remplacer la capacité stochastique du système par une capacité moyenne et d'obtenir ainsi un problème de commande déterministe équivalent.

Si nous désignons par  $a_M$  l'âge moyen des machines et par  $\bar{\omega}$  le taux de maintenance préventive moyen des machines et remplaçons respectivement  $a_i$  et  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , par  $a_M$  et  $\bar{\omega}$  dans le modèle, nous obtenons une matrice des taux de transition constante  $Q(a_M, \bar{\omega})$ . La chaîne de Markov associée à une telle matrice est donc homogène, à états finis, et admet des probabilités limites  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_M)'$

telles que:

$$\nu Q(\cdot) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^M \nu_i = 1. \quad (3.5)$$

Pour plus d'information relative à l'existence de telles probabilités, nous demandons au lecteur de se référer aux travaux de Ross (1993). Notons que les probabilités limites, issues de l'équation (3.5), sont indépendantes de  $\epsilon$ .

**Remarque 3.1** Sur un horizon infini, l'âge moyen  $a_M$  est indépendant de la commande. Son taux de variation dépend uniquement du taux de demande des produits finis. Notons que le taux de demande correspond, dans ce cas, au taux de production moyen des machines. L'âge moyen des machines peut être approximé à partir du développement qui suit.

La variation de l'âge de chaque machine  $i$ , peut être décrite par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6)$$

où  $k_{ij}$  sont des constantes données. Ces constantes sont utilisées dans le modèle de l'exemple du système de production constitué de deux machines qui produisent deux types de pièce, présenté au chapitre 2. La variation de l'âge moyen  $a_M$  est donnée par:

$$\dot{a}_M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_{ij} u_{ij} \quad (3.7)$$

Comme les machines sont identiques, nous avons  $k_{ij} = k_j$ , quelque soit la machine  $i$ . Nous avons dans ce cas:

$$\begin{aligned} \dot{a}_M &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j \left[ \sum_{i=1}^m u_{ij} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n k_j \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'âge moyen des machines a un instant  $t$  est alors donné par la relation suivante:

$$a_M(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j d_j \times t \quad (3.9)$$

avec  $\sum_{i=1}^m u_{ij}(t) \equiv d_j$  (voir remarque 3.1). La valeur moyenne de l'âge moyen des machines est alors donnée par:

$$\bar{a}_M = E\left[\frac{1}{T_{on}} \int_0^{T_{on}} a_M(\tau) d\tau\right] \quad (3.10)$$

où  $T_{on}$  est le temps moyen pendant lequel les machines sont opérationnelles. En utilisant les équations (3.9) et (3.10) nous obtenons:

$$\bar{a}_M = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j d_j \left[ \frac{E\left[\int_0^{T_{on}} \tau d\tau\right]}{E[T_{on}]} \right] \quad (3.11)$$

En notant que  $E\left[\int_0^{T_{on}} \tau d\tau\right] = E[T_{on}]^2$ , nous avons:

$$\bar{a}_M = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j d_j \times E[T_{on}] \quad (3.12)$$

avec

$$E[T_{on}] = \frac{1}{\lambda_{12}(a_M) + \lambda_{13}}$$

Pour  $\lambda_{13}(\cdot) = \bar{\omega}$  et  $\lambda_{12} = k_0 + k_a \bar{a}_M$ , l'équation (3.12) devient:

$$k_a a_M^2 + (\bar{\omega} + k_0) a_M - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n k_j d_j = 0 \quad (3.13)$$

Pour un choix approprié de  $k_j$ ,  $k_0$  et  $k_a$ , nous utiliserons l'équation (3.13) au chapitre 4 pour déterminer la valeur de  $a_M$  appartenant au domaine de définition choisi.

Pour simplifier le modèle et adopter la notation de Sethi et Zhang (1994), nous définissons un processus  $\{Z^\epsilon(t), t \geq 0\}$  à états finis correspondant au nombre de machines opérationnelles au temps  $t$  et ayant des valeurs dans  $\mathcal{E} = \{0, 1, \dots, m\}$ .

L'utilisation de ce nouveau processus constitue déjà un premier niveau d'aggrégation car ce processus n'est pas équivalent au processus  $\zeta^\epsilon(t)$ . Nous reformulons ci-après le problème original de commande optimale en utilisant le processus  $Z^\epsilon(t)$ . L'âge de chaque machine et son taux d'envoi en entretien préventif seront remplacés respectivement par  $a_m$  et  $\bar{\omega}$  à la section 3.4.2 consacrée au problème de commande limite.

L'ensemble des commandes admissibles  $K(z)$ , avec  $z = Z^\epsilon(t)$ , est donné par:

$$K(z) = \left\{ (\mathbf{u}(t), \omega) \in \mathbb{R}^{n+m}, u_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m u_{ij}(t) \right) \gamma_j \leq z, \right. \\ \left. \text{et } 0 \leq \omega_i \leq \omega_{max} \right\} \quad 0 \leq z \leq m \quad (3.14)$$

où  $\gamma_j$  est le temps de traitement du produit de type  $j$  sur chaque machine et  $\omega_{max}$  est le taux d'envoi en entretien préventif maximal des machines.

Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  et  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)'$  les variables d'état du système correspondant respectivement aux vecteurs de stocks et d'âges des machines. Ces variables sont décrites par le système d'équations différentielles suivant:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{d} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad (3.15)$$

$$\dot{a}_i(t) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(t) \quad a_i(0) = a_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16)$$

où  $k_{ij}$  sont des constantes telles qu'à l'équation (3.6). Notons que  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{d}$  désignent respectivement le vecteur des stocks, d'âges des machines et des taux de demande des produits finis.

Soit  $G(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega)$  le coût instantané défini comme suit:

$$G(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) = \mathbf{c}^+ \mathbf{x}^+ + \mathbf{c}^- \mathbf{x}^- + c^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{E} \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{c}^+$  et  $\mathbf{c}^-$  sont respectivement des coûts encourus par unité de pièce produite dans le cas d'inventaire et dans le cas de manque de pièces. De plus,

$\mathbf{x}^+ = (\max(0, x_1), \dots, \max(0, x_n))'$ ,  $\mathbf{x}^- = (\max(-x_1, 0), \dots, \max(-x_n, 0))'$ . Les constantes  $c^\alpha$  permettent de pénaliser le séjour des machines dans un mode  $\alpha$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$  et  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \omega)$ . La fonction  $G(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  satisfait les hypothèses suivantes:

$$(A3.1) : 0 \leq G(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \leq C(1 + |\tilde{\mathbf{x}}|^{c_k})$$

$$(A3.2) : |G(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) - G(\alpha, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}})| \leq C(1 + |\tilde{\mathbf{x}}|^{c_k} + |\tilde{\mathbf{y}}|^{c_k})|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}| \quad \text{si } |\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}| \leq b$$

pour des constantes  $C, c_k, b \geq 0$  appropriées.

**Remarque 3.2** Les hypothèses (A3.1) et (A3.2) montrent que le coût instantané  $G(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  est convexe, positif et borné à droite par rapport à  $\tilde{\mathbf{x}}$  et admet un taux de croissance polynomial. Ces hypothèses sont généralement utilisées pour établir les conditions d'optimalité du problème de commande posé (voir Lou et Sethi (1994) et Sethi et Zhang (1994)).

L'objectif du problème de commande est de contrôler le vecteur des taux de production  $\mathbf{u}(t)$  et celui des taux d'envoi des machines en entretien préventif  $\omega(t)$  de façon à minimiser le coût moyen actualisé donné par:

$$J^\epsilon(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} G(Z^\epsilon(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) dt \mid \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}, \right. \\ \left. \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}, Z^\epsilon(0) = \alpha \right\} \quad (3.18)$$

sous les contraintes données par le système d'équations (3.15)-(3.16).

Soit  $v^\epsilon(\alpha, \tilde{\mathbf{x}})$  le scalaire désignant le minimum du coût actualisé, c'est-à-dire:

$$v^\epsilon(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) = \inf_{\tilde{\mathbf{u}} \in K(\alpha)} J^\epsilon(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{E} \quad (3.19)$$

Le scalaire  $v^\epsilon(\alpha, \tilde{\mathbf{x}})$  est appelé fonction valeur du problème d'optimisation posé.

Dans les sections suivantes, nous présentons quelques propriétés élémentaires de la fonction valeur  $v^\epsilon(\cdot)$  et la méthodologie d'obtention du problème limite.

## 3.4 Conditions d'optimalité

### 3.4.1 Problème stochastique initial

Dans cette section, nous présentons les propriétés de la fonction valeur  $v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  du problème de commande stochastique initial perturbé par le paramètre  $\epsilon$ . Si  $Q^{\epsilon}(\cdot)$  est la matrice des taux de transition de  $Z^\epsilon(t)$ , nous avons:

$$Q^{\epsilon}(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} q'_{00} & q'_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q'_{10}(\cdot) & q'_{11}(\cdot) & q'_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q'_{21}(\cdot) & q'_{22}(\cdot) & q'_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q'_{m-2,m-3}(\cdot) & q'_{m-2,m-2}(\cdot) & q'_{m-2,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q'_{m-1,m-2}(\cdot) & q'_{m-1,m-1}(\cdot) & q'_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q'_{m,m-1}(\cdot) & q'_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix}$$

où  $(\cdot)$  désigne  $(\mathbf{a}, \omega)$ .

Nous montrons que  $v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  est solution des équations d'HJB suivantes:

$$\rho v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{u} \in K(\alpha)} \left\{ \mathbf{f}(\cdot) v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) + G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\beta=0}^m q'_{\alpha\beta} v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}) \right\} \quad (3.20)$$

où  $\mathbf{f}(\cdot) = (\mathbf{u} - \mathbf{d}, \sum_{j=1}^n k_j u_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n k_j u_{mj})'$  et  $v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  est le gradient de  $v^\epsilon(\cdot)$  par rapport à  $\bar{\mathbf{x}}$ . Comme la différentiabilité de  $v^\epsilon(\cdot)$  n'est pas en général garantie, nous utilisons la méthode des solutions de viscosité "viscosity solution", telle que dans Fleming et Soner (1992), dans Kenne et Boukas (1997b) et dans Lehoczky et al. (1991) pour établir les propriétés d'une telle fonction. Nous reprenons dans cette section les définitions des solutions de type viscosité pour bien illustrer leurs utilisations dans cette thèse.

Soit une classe de solutions du système d'équations aux dérivées partielles (3.20) de la forme:

$$F(\bar{\mathbf{x}}, v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}), v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}})) = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}, \beta \in \mathcal{E} \quad (3.21)$$

où  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . En posant

$$F(\cdot) = \rho v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) - \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(\alpha)} \left\{ f(\cdot) v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) + G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\beta=0}^m q'_{\alpha\beta}(\cdot) v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}) \right\}$$

nous pouvons noter que les équations (3.20) et (3.21) sont équivalentes.

L'équation (3.21) est une combinaison des deux relations suivantes:

$$\limsup_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0} \left( v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}) - v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}_0) - p_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \right) |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0|^{-1} \leq 0 \quad (3.22)$$

$$\liminf_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0} \left( v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}) - v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}_0) - p_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \right) |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0|^{-1} \geq 0 \quad (3.23)$$

où  $p_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  tel que  $Dv^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}_0) = p_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ . Pour obtenir les relations (3.22) et (3.23), nous avons supposé que la fonction  $v^\epsilon(\cdot)$  est différentiable au point  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{L}$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}) = v^\epsilon(\cdot, \bar{\mathbf{x}}_0) + p_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) + o(|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0|) \quad (3.24)$$

où  $a \cdot b$  est le produit scalaire euclidien de  $a$  et  $b$  et  $o(\cdot)$  est tel que

$$\lim_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0} \frac{o(|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0|)}{|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0|} = 0$$

Les équations (3.22) et (3.23) sont équivalentes aux relations utilisées dans les définitions des ensembles  $D^+v(\cdot, \bar{\mathbf{x}})$  et  $D^-v(\cdot, \bar{\mathbf{x}})$  donnés par les conditions (a) et (b) de la définition 2.4.

Nous avons noté au chapitre 2 que la fonction valeur d'un tel problème est continue (voir théorème 2.3) et continûment différentiable, mais en considérant les équations (3.22) et (3.23), la dérivée de  $v^\epsilon(\cdot)$  n'existe pas toujours pour tout  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ . Il est donc nécessaire d'étendre la définition 2.4 à  $D^+v(\cdot, \bar{\mathbf{x}})$  et à

$D^-v(\cdot, \bar{x})$  qui sont des ensembles fermés et convexes. Pour la notation et la forme des systèmes d'équations aux dérivées partielles considérées dans ce chapitre, nous avons la définition suivante:

**Définition 3.1** Une solution de type viscosité de  $F(\bar{x}, v^\epsilon(\beta, \bar{x}), Dv^\epsilon(\beta, \bar{x})) = 0$  dans  $\mathcal{L}$  est une fonction  $v^\epsilon(\beta, \bar{x})$  qui satisfait:

$$F(\bar{x}, v^\epsilon(j, \bar{x}), r) \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{L}, \quad \forall r \in D^+v(\cdot, \bar{x}), \quad j \in \mathcal{E} \quad (3.25)$$

et

$$F(\bar{x}, v^\epsilon(j, \bar{x}), r) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{L}, \quad \forall r \in D^-v(\cdot, \bar{x}), \quad j \in \mathcal{E} \quad (3.26)$$

Ce concept de solution de type viscosité d'une équation sera utilisé ultérieurement pour montrer le théorème suivant:

**Théorème 3.1** Si  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  satisfait la condition de Lipschitz pour chaque  $\alpha \in \mathcal{E}$ , alors il existe une constante  $C$  telle que:

$$\begin{aligned} |v^\epsilon(\alpha, \bar{x})| + \frac{1}{\epsilon} |v^\epsilon(\alpha, \bar{x}) - v^\epsilon(\beta, \bar{x})| &+ \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} |v^\epsilon(\alpha, \bar{x}) - v^\epsilon(\alpha, \bar{y})| \\ &\leq C(1 + |\bar{x}|^{c_k}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{E}$  et  $\bar{x} \neq \bar{y}$  satisfaisant  $|\bar{x} - \bar{y}| \leq b$ , où  $c_k$  et  $b$  sont les mêmes qu'aux hypothèses (A3.1) et (A3.2). De plus, la fonction valeur  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$ ,  $\alpha \in \mathcal{E}$ , est l'unique solution de viscosité de l'équation de la programmation dynamique (3.20) si  $v^\epsilon(\cdot)$  est différentiable. Au point de non-différentiabilité, nous avons:

$$\rho v^\epsilon(\alpha, \bar{x}) - \min_{\bar{u} \in K(\alpha)} \left\{ f(\cdot) \cdot p + G(\alpha, \bar{x}, \bar{u}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\beta=0}^m q'_{\alpha\beta}(\cdot) v^\epsilon(\beta, \bar{x}) \right\} \leq 0 \quad (3.28)$$

pour tout  $p \in \partial v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$

**Preuve:** Avec  $G(\cdot) \geq 0$  et  $v^\epsilon(\cdot) \geq 0$ , nous pouvons choisir  $\bar{u}(t) \equiv 0$  et utiliser l'hypothèse (A3.1) pour obtenir:

$$0 \leq v^\epsilon(\alpha, \bar{x}) \leq C_g(1 + |\bar{x}|^{k_g}) \quad (3.29)$$



Dans un mode  $\alpha \in \mathcal{E}$ , considérons des conditions initiales  $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{m+n}$  telles que  $|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}| < b$ . Pour  $\vartheta$  supérieur à zéro donné, soit une commande  $\bar{\mathbf{u}}$  telle que:

$$J^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \leq v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) + \vartheta \quad (3.30)$$

Si  $\bar{\mathbf{u}}$  est admissible pour la condition initiale  $(\alpha, \bar{\mathbf{y}})$ , alors l'équation (3.30) peut être utilisée pour obtenir:

$$\begin{aligned} v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{y}}) - v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) &\leq J^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}}) - J^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \vartheta \\ &= \vartheta + \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} [G(\alpha, \bar{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) - G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))] dt \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse (A3.2), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} [G(\alpha, \bar{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) - G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))] dt \\ \leq \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} C (1 + G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))) |\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)| dt \end{aligned}$$

En observant que  $|\bar{\mathbf{y}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)| = |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|$  et que  $\int_0^\infty e^{-\rho t} dt = \rho^{-1}$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{y}}) - v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) &\leq \vartheta + C |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \left\{ \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) dt + \frac{1}{\rho} \right\} \\ &= \vartheta + C |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \left\{ J^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\rho} \right\} \end{aligned}$$

D'après la relation (3.30), nous obtenons :

$$v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{y}}) - v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) \leq \vartheta + C |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}| \left\{ v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) + \vartheta + \frac{1}{\rho} \right\}$$

En combinant cette dernière expression avec (3.29), nous obtenons:

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|} |v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) - v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{y}})| \leq C_2 (1 + |\bar{\mathbf{x}}|^{c_k}) \quad (3.31)$$

pour une constante  $C_2$  donnée. Nous complétons ainsi la preuve que  $v^\epsilon(\alpha, \cdot)$  satisfait la condition de Lipschitz. Pour compléter la preuve de (3.27), nous devons d'abord

montrer que (3.28) est vraie. En effet, le fait que  $v^\epsilon(\alpha, \cdot)$  satisfait la condition de Lipschitz permet de déduire (3.28) du principe de la programmation dynamique (voir Fleming et al. (1987)).

Si  $\bar{x}_0$  est un point où  $v^\epsilon(\alpha, \cdot)$  est différentiable pour chaque  $\alpha \in \mathcal{E}$ , alors l'équation (3.20) est vérifiée. Nous avons supposé que  $\bar{x}_0$  est un point de différentiabilité pour  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$ . L'ensemble des points  $\bar{x}_0$  est dense à cause de la continuité de  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$ . Notons ici que l'irréductibilité de  $Q(\cdot)$  implique que son noyau est un sous-espace généré par le vecteur  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{m+1}$ . Pour chaque  $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ , on peut trouver une constante  $C_3$  telle que:

$$\frac{1}{\epsilon} |v^\epsilon(\alpha, \bar{x}_0) - v^\epsilon(\beta, \bar{x}_0)| \leq C_3(1 + |\bar{x}_0|^{\epsilon^*}), \quad \forall \bar{x}_0 \in \mathcal{L} \quad (3.32)$$

En combinant l'équation (3.32) avec (3.29) et (3.31), nous obtenons l'inégalité (3.27) pour un choix approprié de  $C$ .  $\square$

En utilisant le concept de solution de type viscosité de la programmation dynamique, nous pouvons établir que  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  est une solution de type viscosité de (3.20). En effet,  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  est différentiable dans la direction  $\bar{x}$ , pour  $\alpha \in \mathcal{E}$ , si  $D^+ v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  et  $D^- v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  sont tous égaux à un singleton. Dans ce cas, ce singleton correspond au gradient  $v_{\bar{x}}^\epsilon(\alpha, \bar{x})$ . De plus, avec l'existence de la loi de commande optimale (voir le théorème de vérification établi au chapitre 2),  $D^+ v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  est un ensemble vide, excepté au point  $\bar{x}$  où  $v^\epsilon(\cdot)$  est différentiable et  $D^- v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  coïncide avec l'ensemble de sous-différentiels de  $v^\epsilon(\cdot)$  tel que dans la définition 2.5. Il se déduit du théorème 3.1 que  $v^\epsilon(\cdot)$  est la solution de type viscosité de (3.20).

### 3.4.2 Problème de commande limite

Nous formulons dans cette section le problème déterministe équivalent associé au problème de commande stochastique initial présenté à la section précédente. Rappelons ici qu'en supposant l'existence de la dérivée de la fonction valeur, les conditions d'optimalité de notre problème d'optimisation associées au processus  $Z^\epsilon(t)$  sont les suivantes:

$$\rho v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(\alpha)} \left\{ \mathbf{f}(\cdot) v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}}) + G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\beta=0}^m q'_{\alpha\beta}(\cdot) v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}) \right\} \quad (3.33)$$

En remplaçant respectivement l'âge et le taux de maintenance préventive dans le modèle par  $a_m$  et par  $\bar{\omega}$  (c'est-à-dire que  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, a_m) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \bar{\omega}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ) et en multipliant les deux membres de l'équation (3.33), au mode  $\alpha = i$ , par  $\mu_i$  et en sommant sur tous les modes de  $Z^\epsilon(t)$ , nous obtenons:

$$\rho \sum_{i=0}^m \mu_i v^\epsilon(i, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^m \mu_i \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(i)} \left\{ \mathbf{f}(\cdot) v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(i, \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\beta=0}^m q'_{i\beta}(\cdot) v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}) + G(i, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}^i) \right\} \quad (3.34)$$

où  $\mu_i$  est la probabilité limite d'être au mode  $i$  pour le processus  $Z^\epsilon(t)$  et  $\bar{\mathbf{u}}^i$  représente la loi de commande  $\bar{\mathbf{u}}$  au mode  $i$ . En observant que les probabilités limites du processus  $\zeta^\epsilon(t)$  sont reliées à la matrice des taux de transition  $\mathbf{Q}'(\cdot)$ , nous avons:

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=0}^m \mu_i \sum_{\beta=0}^m q'_{i\beta}(\cdot) v^\epsilon(\beta, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\epsilon} \mu(\cdot) \mathbf{Q}'(\cdot) \quad (3.35)$$

La matrice  $\mathbf{Q}'(\cdot)$  étant une matrice stochastique, nous avons  $\mu(\cdot) \mathbf{Q}'(\cdot) = 0$ .

L'équation (3.34) devient alors:

$$\rho v^\epsilon(i, \bar{\mathbf{x}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(i)} \left\{ \sum_{i=0}^m \mu_i (\mathbf{u}^i - \mathbf{d}) v_{\bar{\mathbf{x}}}^\epsilon(i, \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=0}^m \mu_i k_i \mathbf{u}^i v_{a_M}^\epsilon(i, \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=0}^m \mu_i G(i, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}^i) \right\} \quad (3.36)$$

Définissons une loi de commande déterministe  $U(t)$  dans l'espace de commande  $A^0$  donné par:

$$A^0 = \left\{ U(t) = ((\mathbf{u}^0(t), \bar{\omega}^0), (\mathbf{u}^1(t), \bar{\omega}^1), \dots, (\mathbf{u}^m(t), \bar{\omega}^m)) : \right. \\ \left. 0 \leq \sum_{p=1}^n \gamma_p u_p^i(t) \leq i, 0 \leq \bar{\omega}^i \leq \omega_{max}, \quad \forall i \in \mathcal{E} \right\} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{u}^i = (u_1^i, \dots, u_p^i, \dots, u_n^i)$  et  $\gamma_p$  désignent respectivement le vecteur des taux de production au mode  $i$  et le temps de traitement du produit  $p$ . Notons ici que nous avons considéré que  $\bar{\omega}$  est un paramètre fixé (autrement dit  $\bar{\omega}^1 = \bar{\omega}^2 = \dots = \bar{\omega}^m = \bar{\omega}$ ).

À partir des expressions (3.36) et (3.37), définissons le problème de commande optimale,  $P^0$ , suivant:

$$\min J^0(\bar{\mathbf{x}}, U(\cdot)) = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} \sum_{i=0}^m \mu_i G(i, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}^i(t)) dt \mid \right. \\ \left. \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}, a_M(0) = a_M \right\} \quad (3.38)$$

où  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, a_M) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Les équations d'état sont les suivantes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^m \mu_i \mathbf{u}^i(t) - \mathbf{d} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad (3.39)$$

$$\dot{a}_M(t) = \sum_{i=0}^m \mu_i k_i \mathbf{u}^i(t) \quad a_M(0) = a_M \quad (3.40)$$

La fonction valeur du problème  $P^0$  est donnée par:

$$v(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{U(\cdot) \in A^0} J^0(\bar{\mathbf{x}}, U(\cdot)) \quad (3.41)$$

Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, alors  $v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  tend vers  $v(\bar{\mathbf{x}})$ , c'est-à-dire:

$$v(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$$

La fonction valeur  $v(\cdot)$ , indépendante de  $\alpha$ , est celle du problème déterministe limite associé au problème de commande stochastique initial.

La structure de l'équation (3.36) nous suggère une formulation plus simple du problème limite. En effet, en utilisant l'hypothèse de linéarité de  $f(\cdot)$  par rapport à  $\mathbf{u}$ , si nous remplaçons le nombre de machines opérationnelles  $Z^e(t)$  (ou  $i \in \mathcal{E}$ ), par un nombre moyen de machines donné par :

$$\bar{k}(a_m, \bar{\omega}) = \mathbf{E}[Z^e(t)] = \sum_{i=0}^m i \mu_i$$

et posons

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\omega}) \quad \text{où} \quad \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=0}^m \mu_i \mathbf{u}^i(\cdot)$$

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^m \mu_i G(i, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})$$

nous pouvons écrire encore l'équation (3.36) comme suit:

$$\rho v(\bar{\mathbf{x}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(\bar{k}(\cdot))} \left\{ (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{d}) v_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}) + k \bar{\mathbf{u}} v_{a_M}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \right\} \quad (3.42)$$

**Remarque 3.3** Le taux de maintenance préventive moyen  $\bar{\omega}$  est choisi comme paramètre et est supposé connu lors de la recherche du taux de production optimal. De plus, la fonction coût instantané que nous avons choisie est indépendante du taux de production  $\mathbf{u}$  (voir équation (3.17)). Par abus de notation, nous désignons ce coût par  $G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\omega})$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{E}$  dans le reste du développement.

Avec les remarques 3.1 et 3.3, l'équation (3.42) peut s'écrire comme suit:

$$\rho v(\bar{\mathbf{x}}) = \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(\bar{k}(\cdot))} \left\{ (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{d}) v_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}) \right\} + \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^n k_j d_j \right) v_{a_M}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\omega}) \quad (3.43)$$

Par identification, nous notons que l'équation (3.43) correspond aux conditions d'optimalité de type HJB d'un problème déterministe équivalent à  $\mathbf{P}^0$ . Ce problème dénoté  $\bar{\mathbf{P}}^0$  se formule comme suit:

$$\min \bar{J}^0(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{G}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\omega}) dt \quad (3.44)$$

sous les équations d'état suivantes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{d} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad (3.45)$$

$$\dot{a}_M(t) = \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^n k_j d_j \right) \quad a_M(0) = a_M \quad (3.46)$$

avec une fonction valeur donnée par:

$$\bar{v}(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathbf{A}}^0} \bar{J}^0(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}(\cdot)) \quad (3.47)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}^0$  est l'ensemble des lois de commande déterministe défini comme suit:

$$\bar{\mathbf{A}}^0 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}(\cdot) = (\bar{\mathbf{u}}(\cdot), \bar{\omega}(\cdot)) : 0 \leq \sum_{p=1}^n \gamma_p \bar{u}_p(\cdot) \leq \bar{k} \right\} \quad (3.48)$$

où  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ . En utilisant le théorème 3.1, il en résulte que  $\bar{v}(\bar{\mathbf{x}})$  est une solution de type viscosité de l'équation (3.43). Le théorème 3.2 ci-après établit que les formulations  $P^0$  et  $\bar{P}^0$  sont équivalentes.

**Théorème 3.2** (i)  $v(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{v}(\bar{\mathbf{x}})$

(ii) si  $U^*(\cdot) = (\mathbf{u}^0(\cdot), \dots, \mathbf{u}^m(\cdot)) \in A^0$  est optimal pour  $P^0$ , alors  $\mathbf{u}^*(\cdot) = \sum_{i=0}^m \mu_i \mathbf{u}^i(\cdot)$  est optimal pour  $\bar{P}^0$ .

(iii) si  $\mathbf{u}^* \in \bar{A}^0$  est optimal pour  $\bar{P}^0$ , alors il existe  $U^*(\cdot) = (\mathbf{u}^0(\cdot), \dots, \mathbf{u}^m(\cdot)) \in A^0$  qui satisfait:

$$0 \leq \sum_{p=1}^n \gamma_p u_p^i(\cdot) \leq i, \quad \mathbf{u}^*(\cdot) = \sum_{i=0}^m \mu_i \mathbf{u}^i(\cdot)$$

et

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \bar{\omega}) = \sum_{i=0}^m \mu_i G(i, \mathbf{x}, \bar{\omega}) \quad (3.49)$$

De plus,  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  est optimal pour  $P^0$ .

**Preuve:** La preuve de ce théorème est présentée dans Sethi et Zhang (1994).  $\square$

Il est intéressant de remarquer que le problème de commande déterministe limite obtenu ne dépend pas directement de  $Q'(\cdot)$ . Il dépend seulement de  $\bar{k}(a_M, \bar{\omega})$  qui est le nombre moyen de machines opérationnelles correspondant à  $a_m$  et  $\bar{\omega}$  donnés. Comme  $\bar{\omega}$  est une variable de commande du problème d'optimisation original considéré, nous devons trouver la valeur optimale de  $\bar{\omega}^*(\cdot)$  et celle du taux de production optimale  $u^*(\cdot)$  associé. Pour ce faire, nous devons résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\rho v(\tilde{\mathbf{x}}) = \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{max}} \left\{ \min_{\tilde{\mathbf{u}} \in K(k(\cdot))} \left[ (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{d})v_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right] + \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^n k_j d_j \right) v_{a_M}(\tilde{\mathbf{x}}) + \bar{G}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\omega}) \right\} \quad (3.50)$$

Cette structure rend le problème limite facile à résoudre car il est caractérisé par une dimension réduite comparée au problème stochastique initial.

En résolvant l'équation (3.50), nous obtenons la loi de réaction  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  du problème limite et la fonction valeur  $v(\mathbf{x})$  associée. Notons que la solution obtenue est indépendante des âges des machines (le vecteur des âges  $\mathbf{a}$  a été remplacé par l'âge moyen  $a_m$ ). En nous basant sur la structure de la loi de commande optimale du problème original, telle que présentée aux annexes A et C ou dans les travaux de Boukas (voir Boukas et Haurie (1990) par exemple), nous décrivons ci-après une méthode heuristique qui fait dépendre la loi de commande du problème limite des âges des machines.

### 1. Définir un âge moyen équivalent

Considérons un âge moyen équivalent à l'âge d'une machine dans le cas d'un système constitué d'une seule machine. Soit  $\bar{a}_m$  cet âge.

## 2. Définir un voisinage de l'âge moyen équivalent

Définir à partir de la valeur de l'âge moyen un voisinage à partir duquel une machine est supposée jeune ou vieille. Soit  $\mathcal{V}$  ce voisinage:

$$\mathcal{V} = \{ \bar{a}_M : a_M - \delta \leq \bar{a}_M \leq a_M + \delta \} \quad (3.51)$$

pour une constante  $\delta$  donnée.

## 3. Taux de maintenance préventive

- (a) Si l'âge moyen équivalent n'atteint pas le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $\bar{a}_M < a_M - \delta$ ), alors le taux de maintenance préventive est nul.
- (b) Si l'âge moyen équivalent est dans le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $a_M - \delta \leq \bar{a}_M \leq a_M + \delta$ ), alors assigner le taux de maintenance préventive du problème limite à la machine équivalente en considérant le fait que la maintenance préventive ne doit avoir lieu que lorsque le niveau de stock est significatif.
- (c) Si l'âge moyen équivalent dépasse le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $\bar{a}_M > a_M + \delta$ ), alors assigner le taux maximal de maintenance préventive à la machine équivalente pour des valeurs non nulles des taux de maintenance préventive du problème limite.

## 4. Taux de production

- (a) Si l'âge moyen équivalent n'atteint pas le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $\bar{a}_M < a_M - \delta$ ), alors la production doit se faire aux taux de demande des différents produits.



- (b) Si l'âge moyen équivalent est dans le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $a_M - \delta \leq \bar{a}_M \leq a_M + \delta$ ) ou dépasse le voisinage  $\mathcal{V}$  (c'est-à-dire  $\bar{a}_M > a_M + \delta$ ), alors on doit bâtir un stock avec un niveau de stock qui croît avec l'âge moyen de la machine équivalente (c'est-à-dire lorsque  $\bar{a}_m$  augmente).

Le lien entre l'âge de la machine équivalente et les âges de machine se fait en comparant le maximum des âges des machines avec l'âge de cette machine équivalente. Nous établissons un tel lien au chapitre 4 en appliquant la méthode heuristique proposée sur deux exemples de systèmes de production. Nous présentons ci-après l'approche numérique de résolution des équations d'HJB déterministes associées au problème limite.

### 3.5 Méthodes numériques

L'idée de l'approche basée sur les méthodes numériques consiste à utiliser les différences finies pour approximer les dérivées partielles de la fonction valeur  $v(\bar{\mathbf{x}})$  à l'intérieur des maillages  $G_{\bar{\mathbf{x}}}^h$  et  $G_{\mathbf{u}}^h$  associés respectivement au vecteur d'état  $\bar{\mathbf{x}}$ , au vecteur de commande  $\mathbf{u}$  et au vecteur des pas de discrétisation  $\mathbf{h}$ . Cette approche va nous permettre de transformer le problème de commande déterministe associé à (3.50) en un problème de décision markovien. Pour plus de détails concernant une telle transformation, nous invitons le lecteur à se référer aux travaux de Boukas (1987) et (1997). Nous utilisons par la suite la méthode d'itérations de la commande pour résoudre le problème d'optimisation de décision markovien tel que développé par Boukas (1987) et (1997).

Le problème d'optimisation construit dans le maillage  $G_{\bar{\mathbf{x}}}^h \times G_{\mathbf{u}}^h$  a la forme

suivante:

$$\begin{aligned}
v_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}) = & \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{\max}} \left\{ \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{u}}}^h} \left\{ \frac{\bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\omega})}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \left[ 1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} \right]} + \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} \right]} \right. \right. \\
& \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{x}}}^h} P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_M, \mathbf{x}', \mathbf{u}) v_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}', a_M) \\
& \left. \left. + \sum_{a'_m \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{x}}}^h} P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_M, a'_m, \mathbf{u}) v_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, a'_m) \right\} \right\} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Les expressions de  $Q_{\mathbf{h}}$ ,  $P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_m, \mathbf{x}', \mathbf{u})$  et  $P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_m, a'_m, \mathbf{u})$  seront données au chapitre 4 réservé à l'expérimentation des méthodes numériques et de l'approche de commande proposée. La technique d'approximation utilisée nous a ainsi permis de transformer le problème de commande déterministe à résoudre en un problème de décision markovien avec espaces d'état et de commande finis. Ce problème d'optimisation approximé satisfait toutes les hypothèses et les propriétés relatives à l'existence et à l'unicité de la solution optimale. Pour obtenir une approximation de cette solution, nous allons utiliser la technique d'itérations de la commande. Nous présentons ci-après l'algorithme de la technique d'itérations de la commande.

Pour une politique  $\bar{\mathbf{u}}$ , soient deux opérateurs  $T_{\bar{\mathbf{u}}}$  et  $T^*$ , appliqués sur  $v_{\mathbf{h}}(\cdot)$  et qui sont définis comme suit:

$$\begin{aligned}
T_{\bar{\mathbf{u}}}(v_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}})) = & \frac{\bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\omega})}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \left[ 1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} \right]} + \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} \right]} \left[ \right. \\
& \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{x}}}^h} P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_M, \mathbf{x}', \mathbf{u}) v_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}', a_M) \\
& \left. + \sum_{a'_m \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{x}}}^h} P_{\bar{\mathbf{h}}}(\mathbf{x}, a_M, a'_m, \mathbf{u}) v_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, a'_m) \right] \quad (3.53)
\end{aligned}$$

$$T^*(v_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}})) = \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{\max}} \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{G}_{\bar{\mathbf{u}}}^h} \{ T_{\bar{\mathbf{u}}}(v_{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{x}})) \} \quad (3.54)$$

Pour un vecteur  $\mathbf{h}$  donné, l'algorithme d'itération de la commande (policy iteration) est le suivant:

1. **Initialisation:** Choisir  $\eta \in \mathbb{R}^+$ , poser  $k := 1$  et  $v_h^0(\bar{\mathbf{x}}) := 0$ ,  $\forall \bar{\mathbf{x}} \in G_{\bar{\mathbf{x}}}^h$ .  
Supposer une commande stationnaire  $\bar{\mathbf{u}}^k \in G_{\bar{\mathbf{u}}}^h$ .
2. **Évaluation de la commande:** Avec la commande stationnaire  $\mathbf{u}^k \in G_{\bar{\mathbf{u}}}^h$  et  $0 \leq \bar{\omega}^k \leq \bar{k}\omega_{max}$ , calculer la fonction valeur correspondante  $v_h^k(\cdot)$  en utilisant l'équation (3.53).
3. **Raffinement de la commande:** Obtenir une nouvelle commande stationnaire  $\mathbf{u}^{k+1} \in G_{\bar{\mathbf{u}}}^h$ ,  $0 \leq \bar{\omega}^{k+1} \leq \bar{k}\omega_{max}$  en utilisant l'équation (3.54).
4. **Test de la convergence:**

$$\begin{aligned} \bar{c} &:= \min_{\bar{\mathbf{x}} \in G_{\bar{\mathbf{x}}}^h} \left\{ v_h^k(\bar{\mathbf{x}}) - v_h^{k-1}(\bar{\mathbf{x}}) \right\} \\ \underline{c} &:= \max_{\bar{\mathbf{x}} \in G_{\bar{\mathbf{x}}}^h} \left\{ v_h^k(\bar{\mathbf{x}}) - v_h^{k-1}(\bar{\mathbf{x}}) \right\} \\ c_{min} &:= \frac{\rho}{1-\rho} \bar{c} \\ c_{max} &:= \frac{\rho}{1-\rho} \underline{c} \end{aligned}$$

Si  $|c_{min} - c_{max}| \leq \eta$ , alors arrêter l'exécution et poser  $\bar{\mathbf{u}}^* = \bar{\mathbf{u}}^k$ ; sinon incrémenter  $k$  (c'est-à-dire  $k = k + 1$ ) et retourner à l'étape 2.

L'utilisation de cet algorithme donne une approximation de la solution au problème de décision markovien que nous avons formulé précédemment. Cette solution approximée converge vers la solution optimale pour des faibles valeurs de  $h$  (voir Bertsekas (1987)). Nous présentons à la section suivante une approche heuristique de construction de la loi de réaction stochastique  $\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  du problème de commande initial pour tout  $\alpha \in \mathcal{E}$ .

### 3.6 Construction de la loi de commande stochastique

Dans cette section, nous présentons une méthode heuristique de construction de la loi de commande du problème stochastique initial à partir de la solution du problème de commande limite. L'approche proposée étend les méthodes classiques (basées sur des chaînes de Markov homogènes) de construction de telles lois au cas où la dynamique des modes d'une machine dépend de son âge. Le lecteur est invité à se référer aux travaux de Lehoczky et al. (1991) et de Sethi et Zhang (1994), dans lesquels la construction du taux de production du problème de commande initial, à partir du taux de production optimal du problème limite, est décrite par le théorème suivant:

**Théorème 3.3** *Si  $\bar{u}^*(\cdot)$  est le taux de production optimal du problème limite relatif à une chaîne de Markov homogène, nous pouvons approximer le taux de production optimal relatif au problème d'optimisation stochastique initial par l'équation suivante:*

$$\mathbf{u}(\cdot, \alpha) = \alpha \frac{\bar{\mathbf{u}}^*(\cdot)}{\bar{k}'} \quad \alpha \in \mathcal{E} - \{0\} \quad (3.55)$$

où  $\alpha$  est le nombre de machines opérationnelles et  $\bar{k}'$  est le nombre moyen de machines opérationnelles pour ce formalisme. Les  $\alpha$  machines étant identiques, le taux de production de chacune d'elle est donné par:

$$\mathbf{u}_i(\cdot, \alpha) = \frac{\mathbf{u}(\cdot, \alpha)}{\alpha}, \quad i = 1, \dots, \alpha \quad (3.56)$$

**Preuve:** La preuve de ce théorème est présentée par Lehoczky et al. (1991).  $\square$

Ce théorème stipule que le taux de production du système doit être distribué uniformément aux différentes machines opérationnelles (voir équation (3.56)). Ce

théorème ne peut pas être appliqué directement dans cette recherche car le modèle proposé est basé sur une dynamique des pannes de machine qui dépend de l'âge. Il est évident que les trajectoires des âges des machines, initialement identiques, deviennent différentes au cours du temps. Ces machines ne sont donc plus identiques. Le théorème 3.3 ne s'applique donc plus directement.

Pour construire la loi de commande du problème d'optimisation initial, nous allons nous baser sur les caractéristiques des lois de commande stochastiques des systèmes de faible dimension modélisés par des chaînes de Markov non homogènes telles que dans cette recherche. Nous avons présenté à l'annexe A la loi de rétroaction stochastique obtenue à l'aide d'une résolution numérique directe du système d'équations (3.20) pour  $m = 2$  et  $n = 1$ . La capacité des systèmes de production considérés dans cette thèse est telle que l'ensemble des  $m$  machines est requis pour satisfaire la demande. Avec cette considération, la loi de commande issue de la méthode directe de résolution des équations d'HJB est représentée par les figures A.1 à A.10. Les points suivants caractérisent une telle loi de commande:

1. Lorsque le stock est négatif (c'est-à-dire lorsque  $x(t) < 0$ ), les taux de production des machines sont fixés à leurs valeurs maximales et les taux de maintenance préventive sont fixés à zéro (car on ne doit pas envisager d'entretien préventif dans cette situation).
2. Lorsque le stock est nul (c'est-à-dire quand  $x(t) = 0$ ), le taux de production global du FMS est soit égal au taux de demande, soit supérieur au taux de demande. Il est égal au taux de demande lorsque les machines sont neuves (faibles valeurs des âges). Pour des grandes valeurs des âges, les machines sont vieilles et la nécessité de stocker des pièces s'impose. Les taux de maintenance

préventive restent fixés à zéro.

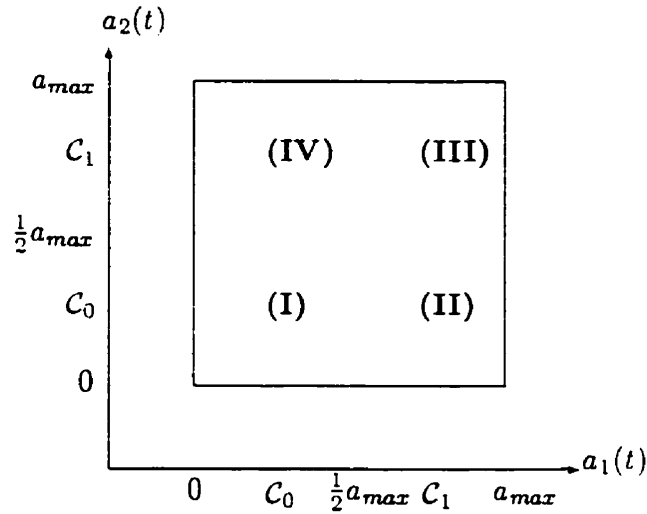
3. Lorsque le stock est positif et que les âges des machines sont différents, nous devons exploiter les vieilles machines selon un taux de production maximal. Par contre, nous remarquons que le domaine de maintenance préventive se rétrécit lorsque les machines deviennent de plus en plus vieilles et que le stock demeure non significatif.

De ces observations, issues de la méthode directe de résolution des équations d'HJB dans ce cas simple, nous présentons ci-après la méthode heuristique de construction de la loi de commande sous-optimale du problème stochastique initial. Cette méthode heuristique est constituée des étapes 1, 2 et 3 suivantes:

- **Étape 1:** Soit une partition finie constituée de  $q + 1$  ensembles  $C_0, C_1, \dots, C_q$  correspondant aux classes d'âges d'une machine. La dynamique de l'âge d'une telle machine est telle que son âge se déplace de  $C_i$  à  $C_{i+1}$  et de  $C_k$ , ( $k \neq 0$ ) à  $C_0$  après chaque intervention sur la machine (réparation ou maintenance préventive). Cette partition est définie comme suit:

$$\bigcup_{i=0}^q C_i = \Lambda \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=0}^q C_i = \emptyset \quad (3.57)$$

où  $\Lambda = \{a_i : a_i = (i-1)h_a\}$ ,  $i = 1, \dots, N_a$ , pour  $N_a$  et  $h_a$  donnés. Notons que  $\Lambda$  est un maillage à une dimension généré par  $N_a$  et  $h_a$ . La figure 3.2 illustre un exemple de partition pour  $q = 1$  (partition à deux classes). Cette illustration correspond à un système de deux machines. La combinaison des classes  $C_i$ ,  $i = 0, 1$ , des deux machines donne les quatre cases (I), (II), (III) et (IV) où  $a_{max}$  désigne l'âge maximal de chaque machine. Le choix de la partition étant



**Figure 3.2:** Différentes classes d'âges des machines opérationnelles arbitraire, nous allons montrer plus loin l'effet d'une telle partition sur la loi de commande heuristique obtenue.

- **Étape 2:** À chaque instant, regrouper les machines opérationnelles en classes et appliquer le théorème 3.3 (équations (3.55) et (3.56)) lorsque les machines appartiennent à une même classe. Dans le cas de la figure 3.2, les cases (I) et (III) correspondent aux cas où les machines appartiennent à une même classe. De telles machines sont supposées identiques. Le taux de maintenance préventive de chacune des machines opérationnelles est donné dans ce cas par:

$$\omega(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha) = \alpha \frac{\bar{\omega}^*(\tilde{\mathbf{x}})}{\bar{k}(\cdot)} \quad (3.58)$$

$$\omega_i(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha) = \frac{\omega(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha)}{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq \alpha \quad (3.59)$$

où  $\alpha$  désigne toujours le nombre de machines opérationnelles et  $\omega_i(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha)$  le taux de maintenance préventive de la machine  $i$  au mode  $\alpha$ . L'équation (3.58) nous permet de définir le taux de maintenance préventive du système à partir

du taux de maintenance préventive du problème limite. L'équation (3.59) stipule que le taux de maintenance préventive du système doit être distribué uniformément aux  $\alpha$  machines opérationnelles ( $\alpha \geq 1$ ).

- **Étape 3:** Exploiter les machines plus âgées au maximum et assigner des valeurs aux taux de production des autres machines telle que la somme des taux de production des machines opérationnelles soit égale au taux de production du système (défini par la solution du problème limite). Les taux de production  $u(\alpha, \bar{x})$  et de maintenance préventive  $\omega(\alpha, \bar{x})$  du FMS sont respectivement donnés par (3.55) et (3.58). Si  $x(t) > 0$ ,  $\bar{u}(\cdot) \neq 0$  ou  $\bar{\omega}(\cdot) \neq 0$ , alors nous pouvons distribuer  $u(\alpha, \bar{x})$  et  $\omega(\alpha, \bar{x})$ ,  $\alpha \in \mathcal{E}$ , aux machines opérationnelles en suivant les étapes ci-après:

- (i) Pour chaque mode  $\alpha$  du système, classifier l'ensemble des machines opérationnelles par rapport à un ordre décroissant des âges (autrement dit, commencer par la machine la plus vieille, suivie de la moins vieille, ainsi de suite jusqu'à la plus jeune). Soit  $\mathcal{O}$  cet ensemble ordonné de machines.
- (ii) Pour le taux de production, assigner le taux maximal de production à la plus vieille des machines (qui correspond au premier élément de l'ensemble  $\mathcal{O}$ ). Assigner par la suite et de façon séquentielle une valeur égale au taux maximal de production ou au taux de demande aux taux de production des autres machines, en suivant l'ordre établi dans  $\mathcal{O}$ , jusqu'à ce que la somme des taux assignés atteigne  $u(\alpha, \bar{x})$ . Assigner enfin la valeur zéro au taux de production des machines restantes.



(iii) Pour la maintenance préventive, suivre l'ordre établi dans  $\mathcal{O}$  pour assigner des valeurs au taux de maintenance préventive dans chaque mode. Assigner séquentiellement le taux d'envoi en entretien préventif maximal au taux de maintenance préventive de chaque machine, en commençant par le premier élément de  $\mathcal{O}$  jusqu'à ce que la somme des taux assignés atteigne  $\omega(\alpha, \bar{x})$ . Comme précédemment, assigner par la suite zéro aux taux de maintenance des jeunes machines restantes. Notons ici que lorsque la capacité du système est telle que l'ensemble des  $m$  machines soit requis pour satisfaire la demande, le taux de maintenance préventive est nul pour tout mode  $\alpha < m$ .

(iv) Répéter les étapes (i), (ii) et (iii) pour tout  $\alpha \in \mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$ .

Au chapitre suivant, nous appliquerons l'approche proposée dans cette section sur des exemples numériques et nous comparerons, pour fin de validation, les résultats obtenus à ceux issus d'une résolution directe des équations d'HJB stochastiques.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle de commande des systèmes de production basé sur une approche de commande hiérarchisée. En considérant une structure particulière du système, dans laquelle des événements arrivent à des échelles de temps différents, nous avons établi qu'une hiérarchie à deux niveaux peut être utilisée pour approximer la loi de commande d'un système de production. En remplaçant la capacité du système de production par une capacité moyenne, nous avons formulé au niveau 1 de la hiérarchie un problème de commande déterministe et nous avons utilisé le fait que la solution au problème de commande stochastique

initial converge vers celle d'un problème déterministe équivalent. La solution à ce problème limite nous a permis de faire une planification à long terme des activités du système de production. Au niveau 2 de la hiérarchie, correspondant à une planification à court terme, nous avons présenté une méthode heuristique de construction de la loi de commande stochastique à partir de la planification du niveau 1. Nous avons par la suite développé des méthodes numériques permettant de résoudre les conditions d'optimalité du problème limite en formulant un problème de décision markovien. Nous avons enfin présenté l'algorithme de résolution du problème d'optimisation approximé ainsi obtenu.

Le chapitre suivant sera consacré à l'application de l'approche de commande hiérarchisée proposée dans ce chapitre à deux exemples numériques. À l'aide des modèles de simulation, nous allons valider la méthodologie proposée en comparant les performances du système avec celles issues de la commande générée par la méthode directe de résolution des équations d'HJB dans des cas simples.

## Chapitre 4

# Expérimentation de l'approche de commande hiérarchisée

### 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'expérimenter l'approche de commande hiérarchisée sur des exemples de systèmes de production. Les systèmes considérés sont caractérisés par l'existence de deux échelles de temps associées respectivement aux événements lents et rapides. Pour faciliter la présentation et la validation de l'approche, nous étudions dans un premier temps le cas d'un système de production constitué de deux machines qui produisent un seul type de pièce. Avec cet exemple, nous présentons en détail une validation de l'approche de commande proposée en comparant les résultats obtenus avec ceux issus de la résolution numérique directe des équations d'HJB. Nous appliquons par la suite l'approche de commande hiérarchisée au problème de commande d'un FMS constitué de deux machines qui produisent deux types de pièces. Comme dans le premier exemple, une seconde validation de l'approche est présentée en utilisant ce dernier exemple.

Nous reprenons de façon succincte la formulation du problème de commande optimale stochastique sur horizon infini pour chacun des deux systèmes considérés.

Nous établissons par la suite les conditions d'optimalité des problèmes de commande relatifs à ces systèmes en nous basant sur les résultats des chapitres 2 et 3. Les perturbations singulières sont enfin appliquées à ces problèmes d'optimisation stochastique pour réduire la complexité de la résolution des conditions d'optimalité.

Pour valider l'approche de commande proposée au chapitre 3, nous utilisons des modèles de simulation pour évaluer les performances des FMS considérés sous une des deux lois de commande suivantes :

1. loi de commande obtenue en appliquant l'approche de commande hiérarchisée;
2. loi de commande issue de la résolution directe des équations d'HJB à l'aide des méthodes numériques.

Les seuils critiques du stock et les coûts moyens encourus associés à ces deux politiques seront comparés pour évaluer les pourcentages d'écart entre les performances des deux approches. Nous allons nous baser sur les résultats de cette comparaison pour valider la méthodologie proposée et discuter par la suite de la structure des lois de commande dans le cas des systèmes plus larges.

Le plan que nous adoptons dans ce chapitre est le suivant: à la section 2, nous traitons le problème de commande d'un système de production constitué de deux machines qui produisent un seul type de pièce. La section 3 est consacrée à l'étude de la commande d'un système de production similaire produisant deux types de pièces. Dans la section 4, nous discutons de la structure générale de la loi de commande qui se dégage de nos résultats et qui peut être étendue à des systèmes plus complexes.

## 4.2 Système de production à deux machines et un seul produit

Les deux machines considérées, montées en parallèle, sont spécialisées dans la production d'un seul type de pièce. Le problème de commande à résoudre consiste à contrôler simultanément les taux de production du système et de maintenance préventive des machines dans le but de satisfaire un taux de demande constant tout en minimisant le coût total encouru. Le système de production à contrôler est illustré à la figure 4.1.

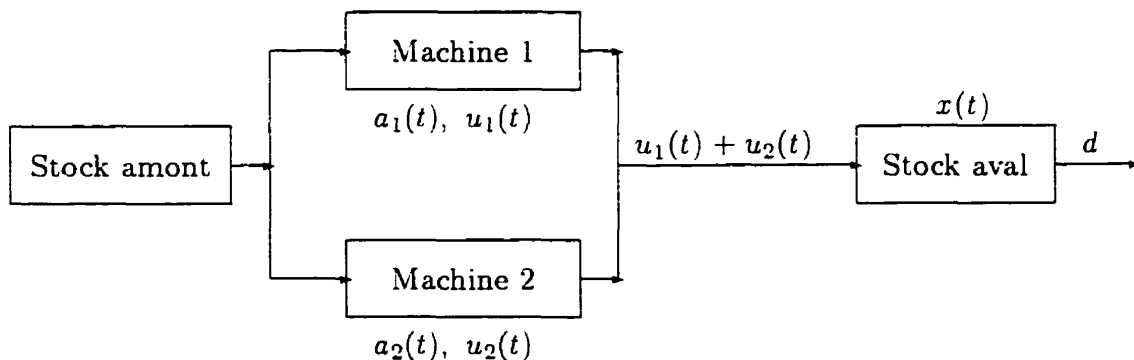


Figure 4.1: Système de production à deux machines et un seul produit

Le système est constitué principalement des deux machines, d'un ou de plusieurs systèmes de transport servant pour le cheminement des pièces du stock en amont vers les machines et de celles-ci vers le stock en aval. Les pièces produites sont stockées et seront écoulées selon un taux de demande donné.

### 4.2.1 Dynamiques des pannes et de production

La dynamique des pannes de chacune des deux machines est modélisée par un processus stochastique continu  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , à espace d'état fini  $\mathcal{B}_i = \{1, 2, 3\}$  dont les modes sont définis par l'équation (2.12). Le processus global  $\zeta(t) = \zeta_1(t) \times \zeta_2(t)$  est également un processus stochastique continu à espace d'état fini  $\mathcal{B} = \{1, \dots, 3^2\}$ . Le lien entre chacun des neuf modes du processus  $\zeta(t)$  avec les modes des processus  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , est défini par le tableau 2.1. Si à un instant donné  $t$ ,  $\zeta(t)$  est au mode  $\alpha \in \mathcal{B}$ , avec une usure des machines  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  et que la loi de commande  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \omega_1, \omega_2)$  est employée, alors deux événements possibles peuvent se produire à l'instant  $t + \delta t$ :

- Le système saute vers un autre mode  $\beta$  avec une probabilité donnée par:

$$P[\zeta(t + \delta t) = \beta | \zeta(t) = \alpha] = \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{u}})\delta t + o(\delta t) \quad (4.1)$$

- Le système reste au mode  $\alpha$  avec la probabilité suivante:

$$P[\zeta(t + \delta t) = \alpha | \zeta(t) = \alpha] = 1 + \lambda_{\alpha\alpha}(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{u}})\delta t + o(\delta t) \quad (4.2)$$

où les taux de transition  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$  remplissent les conditions (2.10)-(2.11) et

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$$

Avec la présence de deux échelles de temps, nous supposons qu'il existe un paramètre  $\epsilon < 1$  qui nous permet de passer d'une échelle de temps à l'autre comme décrit au chapitre 3. Rappelons ici qu'en multipliant les taux de transition du processus  $\zeta(t)$ , (taux relatifs à l'échelle de temps des phénomènes rapides) par  $\epsilon$ , nous obtenons les taux de transition d'un processus lent noté  $\zeta^\epsilon(t)$  (taux relatifs

à l'échelle de temps des phénomènes lents). Notons que le processus  $\zeta^\epsilon(t)$  est une représentation du processus initial  $\zeta(t)$  dans l'échelle de temps des phénomènes lents.

Si  $Q(\cdot) = \{\lambda_{\alpha\beta}(\cdot)\}$  est la matrice des taux de transition du processus  $\zeta(t)$ , alors  $Q^\epsilon(\cdot) = \epsilon^{-1}\{q_{\alpha\beta}(\cdot)\}$  est la matrice des taux de transition de  $\zeta^\epsilon(t)$  avec  $\lambda_{\alpha\beta}(\cdot) = \epsilon^{-1}q_{\alpha\beta}(\cdot)$ . D'où :

$$Q^\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} [q_{\alpha\beta}(\cdot)] \quad \forall \alpha, \beta \in B$$

Notons enfin que  $\zeta^\epsilon(t)$  et  $\zeta(t)$ , associés respectivement à  $Q^\epsilon(\cdot)$  et à  $Q(\cdot)$ , expriment tous les deux le même processus dans deux échelles de temps différents.

La dynamique du vecteur d'état  $\tilde{x}(t) = (x(t), a_1(t), a_2(t))'$  est décrite par le système d'équations (2.1)-(2.2). Rappelons que  $x(t)$ ,  $a_1(t)$  et  $a_2(t)$  désignent respectivement le stock de pièces en aval des machines, l'âge de la première machine et l'âge de la seconde machine. L'hypothèse suivante définit la relation entre le taux de panne de chaque machine et son usure ou âge :

- Pour chaque machine  $i$ , le taux de transition  $\lambda_{12}^i(\cdot)$  du mode opérationnel au mode panne ou réparation est donné par l'expression:

$$\lambda_{12}^i(a_i(t)) = A_0^i + K_a^i a_i(t) \quad (4.3)$$

où  $A_0^i$  et  $K_a^i$  sont des constantes réelles positives données et  $a_i(t)$  désigne l'âge de la machine  $i$  au temps  $t$ .

Les deux machines étant supposées identiques, leurs caractéristiques probabilistes sont égales. Nous posons pour le reste de ce chapitre  $q_{\alpha\beta}^i(\cdot) = q_{\alpha\beta}(\cdot)$ ,  $A_0^i = A_0$  et  $K_a^i = K_a$ . Avec ces notations, la matrice des taux de transition associée à  $\zeta^\epsilon(t)$  est

donnée par:

$$Q^\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} q_{11}(\cdot) & q_{12}(\cdot) & q_{13}(\cdot) & q_{12}(\cdot) & 0 & 0 & q_{13}(\cdot) & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22}(\cdot) & 0 & 0 & q_{12}(\cdot) & 0 & 0 & q_{13}(\cdot) & 0 \\ q_{31} & 0 & q_{33}(\cdot) & 0 & 0 & q_{12}(\cdot) & 0 & 0 & q_{13}(\cdot) \\ q_{21} & 0 & 0 & q_{44} & q_{12}(\cdot) & q_{13}(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{21} & 0 & q_{21} & q_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{21} & q_{31} & 0 & q_{66} & 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{77}(\cdot) & q_{12}(\cdot) & q_{13}(\cdot) \\ 0 & q_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{21} & q_{88} & 0 \\ 0 & 0 & q_{31} & 0 & 0 & 0 & q_{31} & 0 & q_{99} \end{pmatrix}$$

où  $(\cdot)$  représente  $(\vec{x}, \vec{u})$  et

$$q_{\alpha\alpha}(\cdot) = - \sum_{\beta \in \mathcal{B} - \{\alpha\}} q_{\alpha\beta}(\cdot), \quad \forall \alpha \in \mathcal{B}$$

Le processus  $Z^\epsilon(t)$ , correspondant au nombre de machines opérationnelles au temps  $t$ , est tel que ses modes appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2\}$ . Si  $Z^\epsilon(t) = 0$  (c'est-à-dire qu'aucune machine n'est opérationnelle) alors les taux de production et de maintenance préventive sont nuls. Dans le cas contraire, l'ensemble des commandes admissibles, pour  $Z^\epsilon(t) = z$ , est donné par :

$$K(z) = \left\{ (u(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0 \leq u(t) \leq z \right. \\ \left. \text{et } 0 \leq \omega_j(t) \leq \omega_{max}, \quad j = 1, 2 \right\} \quad z = 1, 2 \quad (4.4)$$

En utilisant les taux de transition  $q'_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$ , associés à  $Z^\epsilon(t)$ , la matrice des taux de transition de ce processus est donnée par :

$$Q^\alpha(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} q'_{00} & q'_{01} & 0 \\ q'_{10}(\cdot) & q'_{11}(\cdot) & q'_{12} \\ 0 & q'_{21}(\cdot) & q'_{22}(\cdot) \end{pmatrix}$$

où  $(\cdot)$  désigne  $(a_1, a_2, \omega_1, \omega_2)$  et

$$q'_{\alpha\alpha}(\cdot) = - \sum_{\beta \in \mathcal{E} - \{\alpha\}} q'_{\alpha\beta}(\cdot), \quad \forall \alpha \in \mathcal{E}$$

Nous présentons ci-après le problème de commande optimale associé à ces dynamiques et les conditions d'optimalité correspondantes.



### 4.2.2 Commande optimale et conditions d'optimalité

Le coût instantané est donné par:

$$G(Z^\epsilon(t), x(t), a_1(t), a_2(t)) = c^+ x^+(t) + c^- x^-(t) + c^{Z^\epsilon(t)} \quad (4.5)$$

Le problème d'optimisation considéré consiste à déterminer, dans l'ensemble des commandes admissibles  $K(\cdot)$ , une stratégie de pilotage des deux machines qui minimise le coût suivant:

$$J^\epsilon(\bar{x}, \alpha, \bar{u}(\cdot)) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} [G(Z^\epsilon(t), x(t), a_1(t), a_2(t))] dt \mid \bar{x}(0) = \bar{x}, Z^\epsilon(0) = \alpha \right\} \quad (4.6)$$

sous les contraintes données par les équations d'état.

Si  $v^\epsilon(\alpha, \bar{x})$  est la fonction valeur associée à la loi de commande admissible  $\bar{u}(\cdot)$  et aux conditions initiales  $(\alpha, \bar{x})$ , alors les conditions d'optimalité sont données par des équations d'HJB similaires à celles présentées à l'équation (3.20). Nous présentons ci-après les conditions d'optimalité du problème déterministe limite issu du problème de commande précédent par application des méthodes des perturbations singulières.

### 4.2.3 Problème de commande limite

Le problème de commande limite consiste à trouver une loi de commande  $\bar{u} = (\bar{u}, \bar{\omega})'$  qui minimise  $J(\cdot)$  défini comme suit:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{G}(\bar{x}(t), \bar{\omega}) dt \quad (4.7)$$

où

$$\bar{G}(\bar{x}(t), \bar{\omega}) = \sum_{\alpha=0}^2 \mu_\alpha G(\alpha, \bar{x}(t), \omega^\alpha) = c^+ x^+(t) + c^- x^-(t) + \sum_{\alpha=0}^2 c^\alpha \mu_\alpha$$

avec la probabilité limite d'être au mode  $\alpha$  qui est désignée par  $\mu_\alpha$ . La commande  $\bar{u}$  est définie par l'équation (3.42) et le taux de maintenance préventive  $\bar{\omega}$  est considéré comme paramètre. La valeur optimale de ce paramètre et le taux de production associé constituent la loi de commande recherchée.

La minimisation de (4.7) est soumise aux contraintes d'état données par les équations suivantes:

$$\dot{x}(t) = \bar{u}(t) - d \quad x(0) = x \quad (4.8)$$

$$\dot{a}_M(t) = \frac{1}{2}k_1d \quad a_M(0) = a_M \quad (4.9)$$

où nous avons posé  $\bar{u}(t) = d$ . Notons que  $k_1$  est une constante donnée. L'équation de la programmation dynamique pour ce problème est donnée par:

$$\rho v(x, a_m) = \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{max}} \left\{ \min_{\bar{u} \in K(\bar{k})} \left\{ (\bar{u} - d)v_x(x, a_m) + \frac{1}{2}k_1d v_{a_M}(x, a_M) + \bar{G}(x, a_m, \bar{\omega}) \right\} \right\} \quad (4.10)$$

où  $K(\cdot)$  et  $\bar{k}$  sont définis de la même manière qu'aux sections 3.3 et 3.4.

L'équation (4.10) est une équation hyperbolique aux dérivées partielles dont la résolution permet de trouver la fonction valeur  $v(\bar{x})$  et la loi de commande  $(\bar{u}, \bar{\omega})$  associée. Par contre, les équations d'HJB du problème de commande stochastique initial se traduisent par un système hyperbolique de neuf équations aux dérivées partielles. Nous observons donc qu'une seule équation (c'est-à-dire l'équation (4.10)) permet de décrire les conditions d'optimalité du problème limite associé à l'exemple considéré. Cette observation nous permet d'illustrer la réduction de la complexité de résolution d'un problème de commande lorsqu'on utilise l'approche de commande proposée. Cette approche est essentiellement basée sur la transformation d'un problème stochastique initial en un problème déterministe équivalent.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 3, au lieu de chercher à résoudre l'ensemble des neuf équations, nous allons plutôt résoudre les conditions d'optimalité du problème limite, données par l'équation (4.10). À partir de la solution obtenue, correspondant à la loi de commande du problème déterministe équivalent, nous allons présenter plus loin la méthode de construction de la loi de commande stochastique associée au problème d'optimisation initial (voir section 4.2.5). Nous présentons ci-après la résolution numérique de l'équation (4.10).

#### 4.2.4 Méthodes numériques

Le problème de décision markovien relatif à l'exemple de FMS constitué de deux machines qui traitent un type de pièce est décrit par la condition d'optimalité suivante :

$$\begin{aligned}
 v_{\mathbf{h}}(x, a_m) = & \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{max}} \left\{ \min_{\bar{u} \in G_k^{\mathbf{h}}} \left\{ \frac{c^+ x^+ c^- x^- + \sum_{\alpha=0}^2 \mu_{\alpha} c^{\alpha}}{Q_{\mathbf{h}}(\cdot) \left[1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\cdot)}\right]} + \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho}{Q_{\mathbf{h}}(\cdot)}\right]} \right\} \right. \\
 & P_{h_x}(x, a_M, x + h_x) v_{\mathbf{h}}(x + h_x, a_M) \\
 & + P_{h_x}(x, a_M, x - h_x) v_{\mathbf{h}}(x - h_x, a_M) \\
 & \left. \left. + P_{h_a}(x, a_M + h_a) v_{\mathbf{h}}(x, a_M + h_a) \right\} \right\} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

où  $h_x$  et  $h_a$  désignent les pas de discrétisation associés respectivement aux variables d'état  $x$  et  $a_M$ . De plus, nous avons:

$$\begin{aligned}
 Q_{\mathbf{h}}(\cdot) &= \frac{k_1 d}{2h_a} + \frac{|\bar{u} - d|}{h_x} \\
 P_{h_x}(x, a_M, x + h_x) &= \begin{cases} \frac{\bar{u} - d}{h_x Q_{\mathbf{h}}(\cdot)} & \text{si } \bar{u} - d \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 P_{h_x}(x, a_M, x - h_x) &= \begin{cases} \frac{d - \bar{u}}{h_x Q_{\mathbf{h}}(\cdot)} & \text{si } \bar{u} - d < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 P_{h_a}(x, a_M + h_a) &= \frac{k_1 d}{2h_a Q_{\mathbf{h}}(\cdot)}
 \end{aligned}$$

**Remarque 4.1:**  $G_k^h$  est un maillage de commande dépendant du nombre moyen de machines opérationnelles  $\bar{k}$ . Par exemple, si les machines ont une capacité maximale égale à l'unité (c'est-à-dire  $u_{max} = 1$ ), alors  $G_k^h$  est tel que  $0 \leq \bar{u} \leq \bar{k}$ . Dans ces conditions, la faisabilité du problème de commande exige que  $\bar{k} \geq d$ .

L'algorithme d'itération de la commande, présenté à la section 3.6.2, a été programmé en utilisant Matlab avec des données de simulation fixées. Ces données sont choisies telles que le système de production considéré soit en mesure de satisfaire la demande sur un horizon infini. Ces données ne correspondent donc pas à un système réel donné et sont présentées ci-après:

1. Variables d'état et de commande.

Soit  $h_x = h_a = 0.2$ . Pour  $x \in [-2, 2]$  et  $a_M \in [0, 6]$  nous avons:

$$G_x^h = \left\{ (x^{l_1}, a_M^{l_2}) : x^{l_1} = -2 + l_1 h_x; a_M^{l_2} = l_2 h_a; \right. \\ \left. l_1 = 0, \dots, 20, l_2 = 0, \dots, 30 \right\}$$

$$G_{\bar{u}}^h = \left\{ \bar{u} : \bar{u} \in [0, d, \bar{k}] \right\}$$

lorsque  $u_{max} = 1$  et  $\omega_{max} = 0.04$ .

2. Taux d'actualisation et de demande

$$d = 1.6 \text{ et } \rho = 0.005 \quad (4.12)$$

3. Caractéristiques probabilistes

- Taux de panne

$$q_{12}(a_i(t)) = A_0 + K_a a_i(t), \quad i = 1, 2$$

avec  $A_0 = 0.0001$  et  $K_a = 0.005$

- Taux de réparation et de retour d'entretien préventif

$$q_{21} = 0.1 \quad \text{et} \quad q_{31} = 0.25$$

Les taux de transition  $q'_{\alpha'\beta'}$  du processus  $Z^\epsilon(t)$ ,  $\alpha', \beta' \in \{0, 1, 2\}$ , se déduisent des  $q_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, 9\}$ , en considérant les différents modes du processus équivalent  $\zeta^\epsilon(t)$ .

#### 4. Coût instantané

Les différents paramètres du coût instantané sont représentés dans le tableau 4.1.

**Tableau 4.1:** Constantes du coût instantané (deux machines, un seul produit)

$c^-$	$c^-$	$\bar{c}^1$	$\bar{c}^2$	$\bar{c}^3$	$\bar{c}^4$	$\bar{c}^5$	$\bar{c}^6$	$\bar{c}^7$	$\bar{c}^8$	$\bar{c}^9$	$k_1$
1	10	0	10	1	10	20	11	1	11	2	4

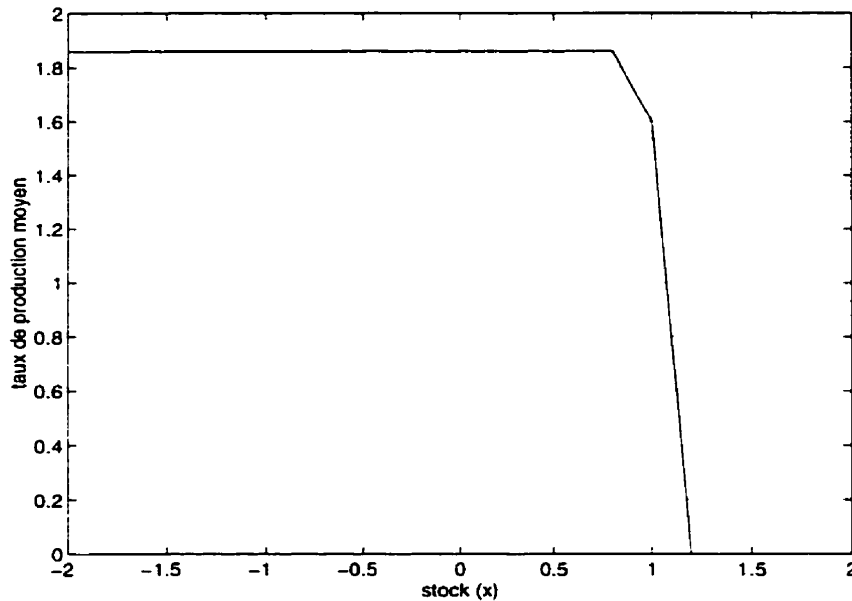
Les  $\bar{c}^\beta$ ,  $\beta = 1, \dots, 9$ , sont associés à  $\zeta^\epsilon(t)$  et les  $c^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , sont définis comme suit:

$$c^2 = \bar{c}^1 \nu_1$$

$$c^1 = \bar{c}^2 \nu_2 + \bar{c}^3 \nu_3 + \bar{c}^4 \nu_4 + \bar{c}^7 \nu_7$$

$$c^0 = \bar{c}^5 \nu_5 + \bar{c}^6 \nu_6 + \bar{c}^8 \nu_8 + \bar{c}^9 \nu_9$$

Avec ces données, nous obtenons les résultats présentés aux figures 4.2 et 4.3 correspondant respectivement aux taux de production et de maintenance préventive du problème limite. D'après la figure 4.2, le taux moyen de production est maximal lorsque le niveau de stock est inférieur ou égal à 0.8 (c'est-à-dire  $x(t) \leq 0.8$ ). Ce taux est égal au taux de demande lorsque  $x(t) = 1$ . De plus, aucune production ne



**Figure 4.2:** Taux de production  $\bar{u}(x)$  du problème limite

doit être envisagée lorsque  $x(t) > 1$ . La loi de commande limite stipule également que le taux de maintenance préventive moyen doit être égal à zéro lorsque  $x(t) \leq 1$  (voir figure 4.3). Dans le cas contraire, le taux de maintenance préventive moyen doit être égal au taux maximal de maintenance préventive.

En appliquant la méthode heuristique présentée à la section 3.4.2, relative à la construction d'une loi de commande du problème limite qui dépend de l'âge, nous obtenons les taux de production et de maintenance préventive illustrés aux figures 4.4 et 4.5. Ces résultats montrent que la loi de commande du problème limite est une loi de commande de type "bang-bang" dépendant d'un âge moyen équivalent à l'âge d'une machine dans le cas d'un système de production constitué d'une seule machine. De ces figures, il ressort clairement que la politique de planification à long terme (taux de production et de maintenance préventive) doit être choisie en fonction des valeurs des âges des machines (comparées à l'âge de la machine

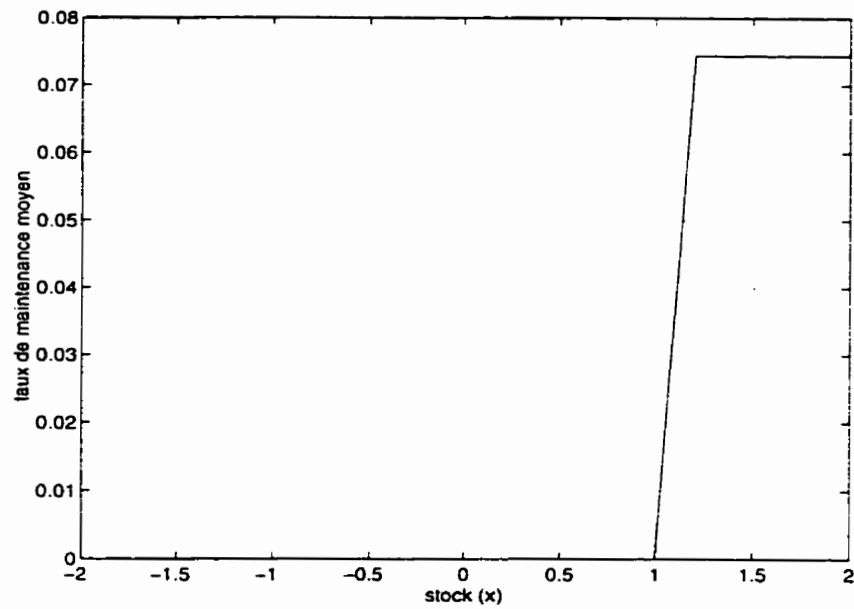


Figure 4.3: Taux de maintenance préventive  $\bar{\omega}(x)$  du problème limite

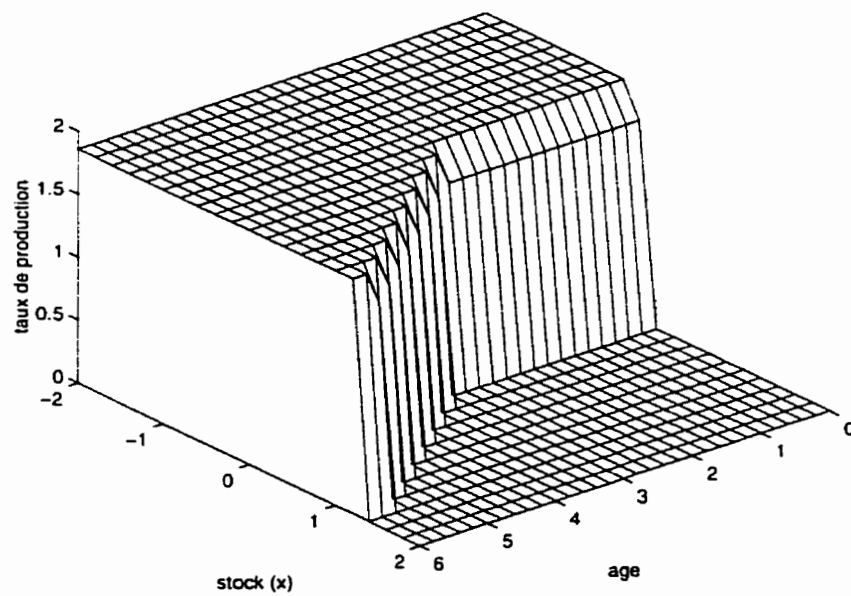
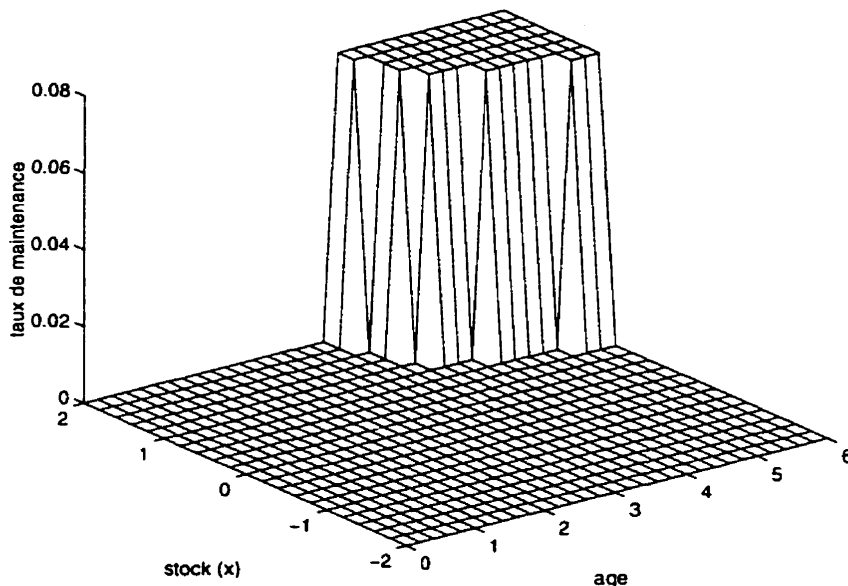


Figure 4.4: Taux de production du problème limite en fonction de l'âge de la machine équivalente



**Figure 4.5:** Taux de maintenance préventive du problème limite en fonction de l'âge de la machine équivalente

équivalente) et du niveau de stock. Nous résumons la description de cette loi de commande à travers les observations suivantes:

- Lorsqu'une des deux machines opérationnelles est neuve ( $M_2$  par exemple avec  $a_2 = 2.8$ ), la politique de production du problème limite prévoit une production au taux de la demande si l'autre machine est également neuve (c'est-à-dire  $M_1$  avec par exemple  $a_1 < 3$ ) et le niveau de stock est positif et faible. Un taux de production maximal est assigné à la politique de production lorsqu'une des machines vieillit ( $M_1$  par exemple). La loi de commande dans ce cas maintient un niveau de stock significatif tel qu'illustré par la figure 4.4.
- Si une des deux machines opérationnelles est vieille ( $M_2$  par exemple avec  $a_2 = 5$ ), la politique de production du problème limite prévoit une production au taux maximal, non seulement en présence d'un manque de pièces produites



mais aussi dans le cas d'inventaire. La région où le taux de production est non nul, pour  $x(t) > 0$ , dépend de l'âge de la machine équivalente et est bien illustrée. Cette région croît avec l'âge telle que le montre la figure 4.4.

- Pour la politique de maintenance préventive, il est intéressant de noter qu'on doit envisager de faire de la maintenance préventive seulement si l'âge de chacune des machines atteint une certaine valeur. Si le maximum des âges des deux machines atteint la valeur de 3 pour  $x(t) = 1.6$  (voir figure 4.5), on doit faire de la maintenance préventive. Par contre, si  $x(t) < 0$  (c'est-à-dire qu'il y a une rupture de stock), aucun entretien préventif ne doit être envisagé tel qu'illustré par la figure 4.5.

Pour ressortir la réduction de la complexité issue de l'application de la méthode des perturbations singulières, nous comparons ci-après deux grandeurs associées respectivement à l'approche proposée et à une méthode directe de résolution des équations d'HJB. Nous avons ainsi choisi de comparer les ordres de grandeur des dimensions des problèmes de commande et les temps de résolution relatifs à l'algorithme de résolution des conditions d'optimalité.

### 1. Dimension du problème de commande

Dans l'exemple du système constitué de deux machines qui traitent un seul type de pièce, nous avons résolu numériquement le problème de commande dont la dimension peut être approximée par:

$$\begin{aligned} \mathbf{dim} = & \text{card}(U_p) \times \text{card}(U_e) \times \left(1 + \frac{x^{sup} - x^{inf}}{h_x}\right) \\ & \times \left(1 + \frac{a_M^{sup} - a_M^{inf}}{h_a}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où  $U_p = \{0, d, u_{max}\}$  et  $U_e = \{0, \bar{k}\omega_{max}\}$  dénotent respectivement les ensembles des taux possibles de production et de maintenance préventive. La dimension du problème stochastique équivalent est  $\text{card}(\mathcal{B}) \times \text{card}(U_p)^5 \times \text{card}(U_e)^5 \times \text{dim}$ . Pour des systèmes de production de grande taille, la réduction obtenue pour le problème de commande considéré est significative.

## 2. Temps de résolution

Pour le maillage décrit précédemment, le temps de résolution relatif à l'approche de commande hiérarchisée est de 20 minutes environ lorsque nous utilisons l'algorithme d'itération de la commande. Par contre, le même algorithme de résolution, lorsqu'il est appliqué directement aux équations d'HJB, converge après cinq jours.

Nous présentons, à la section 4.2.6.2, un tableau de comparaison des approches basées respectivement sur la commande hiérarchisée et la résolution directes des équations d'HJB. Notons pour le moment qu'une comparaison des dimensions des deux problèmes de commande et les temps de résolution associés montre les limites des méthodes numériques classiques et l'utilité de l'approche de commande que nous proposons dans cette recherche.

### 4.2.5 Construction de la loi de commande stochastique

Dans cette section, nous appliquons la méthode heuristique de construction de la loi de commande stochastique du problème initial à l'exemple du système de production constitué de deux machines avec un seul type de produit. Nous avons présenté à la section précédente la loi de commande du problème limite à partir de laquelle cette loi de commande stochastique ou planification à court terme doit être construite.

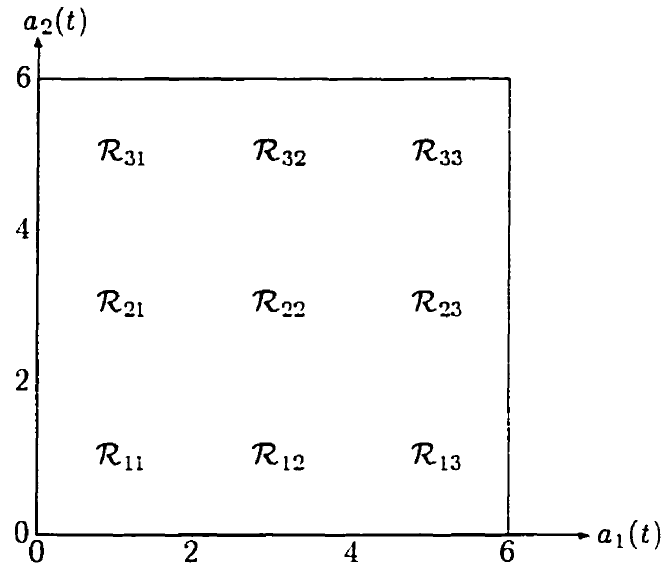


Figure 4.6: Ensemble des neuf régions issues du regroupement des machines

Dans cette application, nous suivons de façon séquentielle les étapes 1, 2 et 3 de la méthodologie heuristique présentée à la section 3.5.

### 1. Partition des âges des machines

À titre d'exemple, considérons une partition de trois classes  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  tel que:

$$\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \Lambda \quad (4.14)$$

où

$$\Lambda = \{a_z^k : a_z^k = kh_a, \quad k = 0, \dots, 30\}, \quad z = 1, 2$$

La figure 4.6 illustre la partition considérée. Notons que  $\mathcal{C}_0 = [0, 2]$ ,  $\mathcal{C}_1 = [2, 4]$  et  $\mathcal{C}_2 = [4, 6]$ . En combinant les classes  $\mathcal{C}_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  pour  $h_a = 0.2$ , nous obtenons l'ensemble des régions  $\mathcal{R}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

### 2. Regroupement des machines en classes

La dynamique des âges des machines permet de passer d'une région à l'autre.

La structure de la figure 4.6 permet ainsi de regrouper les machines en régions ou classes d'âges. Lorsqu'à un instant donné la dynamique des âges des machines est telle que ces dernières sont toutes les deux dans une région  $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nous devons appliquer le théorème 3.3 pour déterminer le taux de production de chaque machine. Pour illustrer cette procédure, considérons l'exemple suivant.

**Exemple 4.1:** Pour la région  $\mathcal{R}_{33}$  (par exemple  $a_1 = 5.2$  et  $a_2 = 5$  avec  $\max(a_1, a_2) = 5.2$  qui doit être comparé à l'âge de la machine équivalente), si  $x = 0.4$ , alors  $\bar{u} = \bar{k}$  et  $\bar{\omega} = 0$  (voir figures 4.4 et 4.5). Comme les deux machines sont identiques, nous avons, d'après (3.55) et (3.56), le taux de production suivant:

$$u(x, a_1, a_2, 2) = 2 \quad \text{et} \quad u_j(x, a_1, a_2, 2) = 1, \quad j = 1, 2$$

D'après les équations (3.58) et (3.59), le taux de maintenance préventive est donné par:

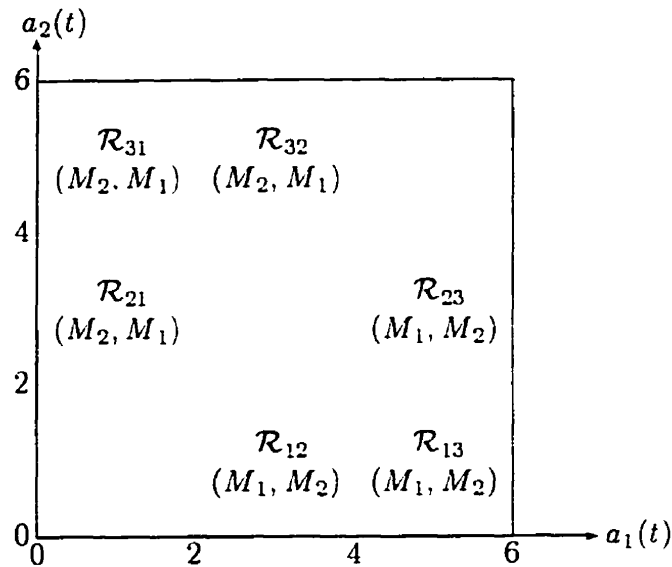
$$\omega(x, a_1, a_2, 2) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_j(x, a_1, a_2, 2) = 0, \quad j = 1, 2$$

### 3. Machines dans des classes différentes

Lorsque les machines appartiennent à des régions différentes, les taux de production et de maintenance préventive du système sont toujours donnés respectivement par:

$$u(x, a_1, a_2, 2) = 2 \frac{\bar{u}(\cdot)}{\bar{k}} \quad \text{et} \quad \omega(x, a_1, a_2, 2) = 2 \frac{\bar{\omega}(\cdot)}{\bar{k}} \quad (4.15)$$

Comme les deux machines ne sont plus identiques, le partage de  $u(x, a_1, a_2, 2)$  ou de  $\omega(x, a_1, a_2, 2)$  entre les deux machines ne se fait plus de façon uniforme.



**Figure 4.7:** Classification des machines par ordre décroissant par rapport à l'âge

La méthode heuristique proposée consiste à classer les deux machines selon un ordre décroissant par rapport à l'âge. La figure 4.7 présente l'ensemble ordonné  $(M_1, M_2)$  ou  $(M_2, M_1)$  associé à la région  $\mathcal{R}_{ij}$ ,  $i \neq j$  lorsque  $M_k$ ,  $k = 1, 2$  représente la machine  $k$ . Dans la notation  $(M_1, M_2)$ , la machine  $M_1$  est plus vieille que  $M_2$ . Suite à cette classification, nous devons exploiter la vieille machine au maximum et choisir le taux de production de la machine jeune en conséquence.

Pour illustrer ce concept, considérons l'exemple suivant:

**Exemple 4.2:** Pour la région  $\mathcal{R}_{32}$  (par exemple  $a_1 = 3.8$  et  $a_2 = 5$  avec  $\max(a_1, a_2) = 5$  qui doit être comparé à l'âge de la machine équivalente), si  $x = 2$ , alors  $\bar{u} = 0$  et  $\bar{\omega} = \bar{k}\omega_{max}$  (voir figures 4.4 et 4.5). Comme les deux machines sont différentes, l'équation (3.56) n'est plus valide. Le

taux de production du système est le suivant:

$$u(x, a_1, a_2, 2) = 0 \quad \text{avec} \quad u_j(x, a_1, a_2, 2) = 0, \quad j = 1, 2$$

De même, l'équation (3.59) n'est plus valide. Le taux de maintenance préventive du système est toujours donné par:

$$\omega(x, a_1, a_2, 2) = 2 \frac{\bar{\omega}}{k(\cdot)}$$

Le taux de maintenance préventive de la vieille machine (c'est-à-dire  $M_2$ ) est  $\omega_2(x, a_1, a_2, 2) = \omega_{max}$  et celui de  $M_1$  est tel que  $\omega_2(x, a_1, a_2, 2) + \omega_1(x, a_1, a_2, 2) \leq \omega(x, a_1, a_2, 2)$ .

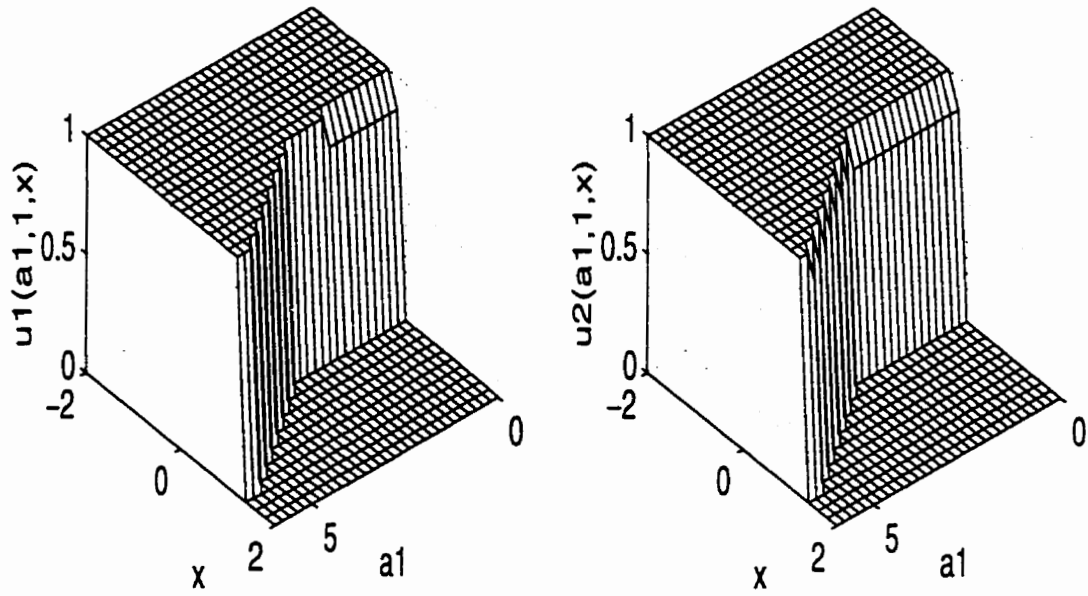
En appliquant cette méthode heuristique de construction de la loi de commande stochastique, nous obtenons une approximation de la loi de commande optimale du problème d'optimisation initial. Les figures 4.8 à 4.11 représentent les taux de production et de maintenance préventive associés aux figures 4.2 à 4.5, relatives au problème limite.

Nous présentons ci-après la validation de la méthode heuristique proposée en comparant les performances du système lorsqu'il est soumis à loi de commande développée ultérieurement (commande hiérarchisée), avec les performances relatives à la loi de commande issue de la résolution numérique directe des équations d'HJB.

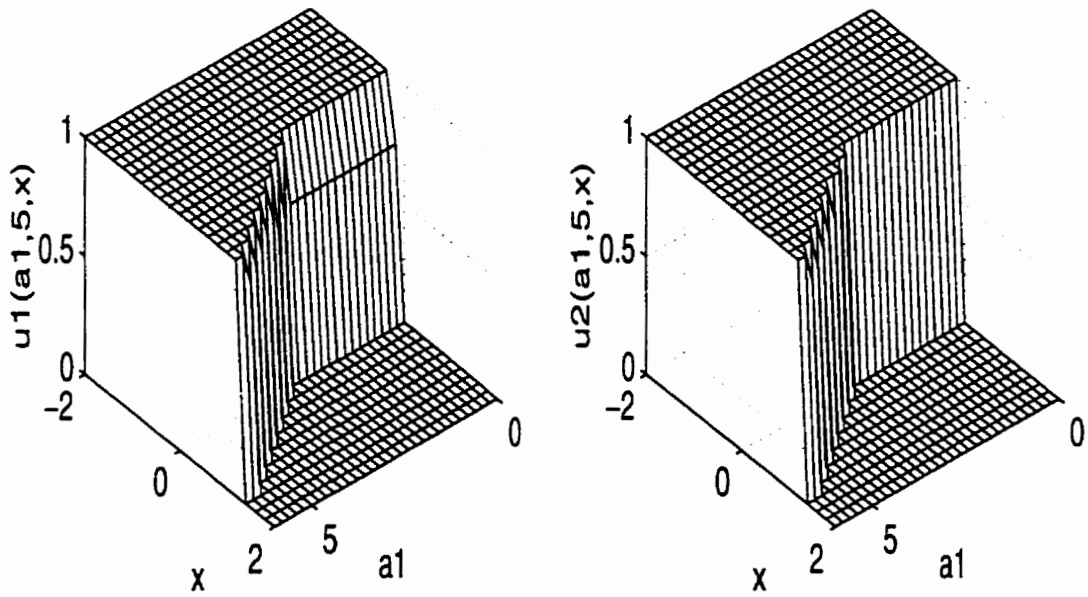
#### 4.2.6 Validation de l'approche de commande hiérarchisée

L'approche de validation que nous proposons consiste à suivre de façon séquentielle les étapes suivantes:

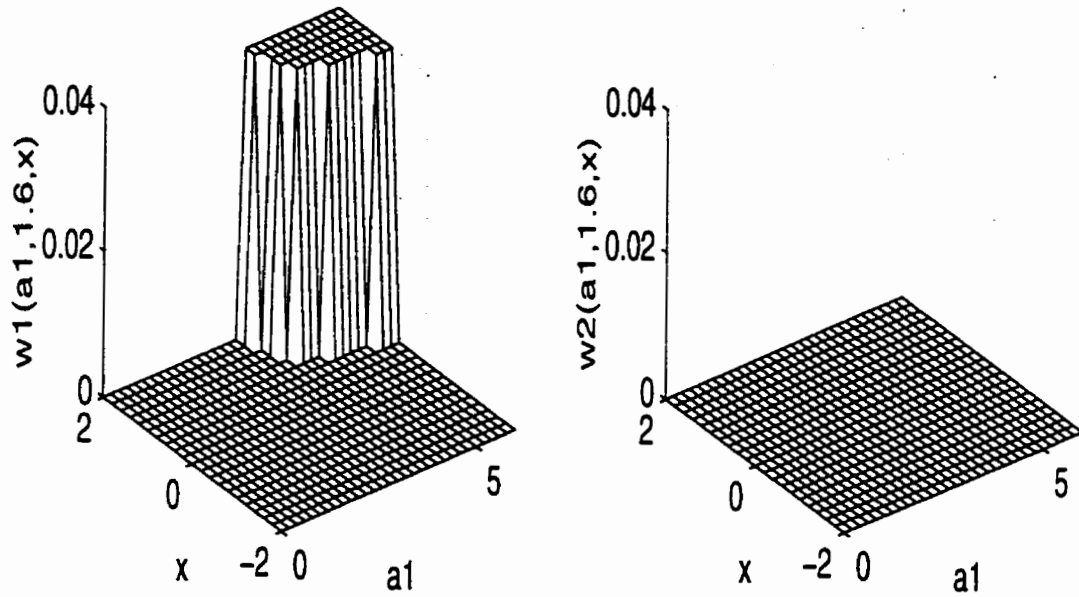
1. développer des modèles de simulation qui permettent de décrire le comportement d'un système de production sous une loi de commande donnée;



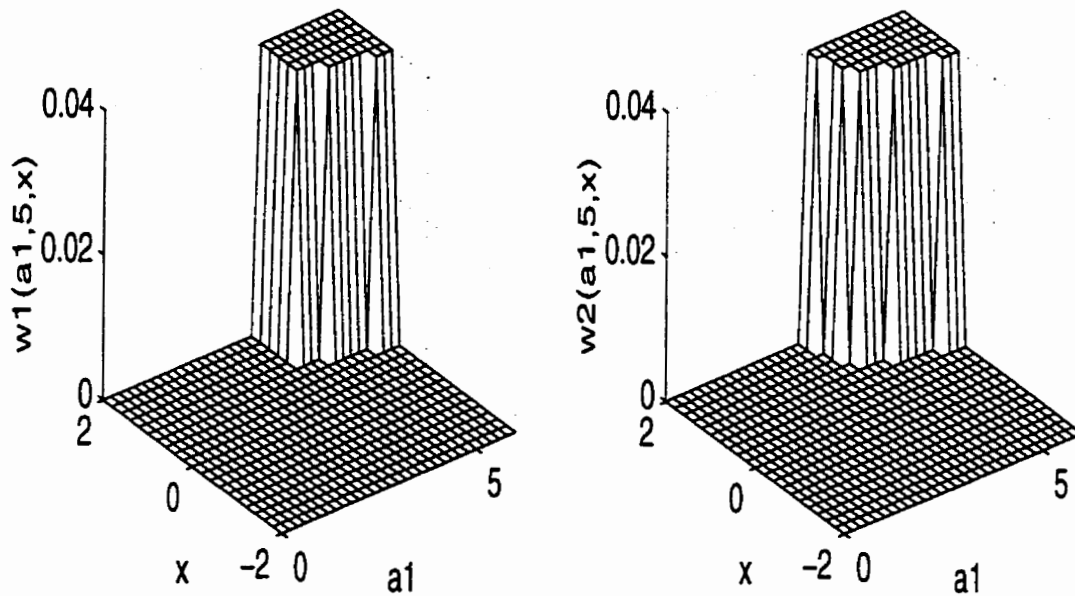
**Figure 4.8:** Taux de production des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour  $a_2 = 1$



**Figure 4.9:** Taux de production des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour  $a_2 = 5$



**Figure 4.10:** Taux de maintenance préventive des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour  $a_2 = 1.6$



**Figure 4.11:** Taux de maintenance préventive des deux machines relatifs au problème original (mode 1) pour  $a_2 = 5$



2. déterminer, pour une partition donnée, les performances du système sous la loi de commande hiérarchisée:
3. simuler le même système de production en considérant la loi de commande issue de la méthode directe et comparer les performances obtenues avec celles de l'étape 2;
4. étudier l'effet de la partition (nombre de classes) sur le raffinement de la loi de commande approximée par l'approche de commande hiérarchisée.

#### 4.2.6.1 Approche de simulation proposée

Nous présentons dans cette section une approche de simulation basée sur une combinaison d'événements, d'activités et de circulation d'entités associés à ces événements. Nous supposons que les changements relatifs à la dynamique globale du système arrivent à des intervalles de temps discrets pour des règles d'opération définies à l'avance. Ces règles sont définies en utilisant une loi de commande donnée (par exemple celle issue de l'approche de commande hiérarchisée).

Sans perte de généralité de l'approche, nous adoptons la modélisation par simulation de type réseaux. Les réseaux représentent graphiquement le système considéré à l'aide de symboles (noeuds ou branches) interconnectés avec des sous-programmes usagers si nécessaire. Pour décrire le comportement du système, nous utilisons un modèle qui consiste en une séquence d'événements ordonnés dans le temps alternés avec plusieurs noeuds, activités et branches orientées. Pour plus d'informations sur ce concept, le lecteur est invité à se référer à Kenne et al. (1997a) et à Gharbi et Kenne (1997).

Pour simuler l'arrivée des pannes d'une machine, nous utilisons une distribution

de probabilités de panne  $P(a_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ , pour générer une entité qui retire la machine  $i$  de la production. Une telle machine est aussitôt envoyée en réparation pour une durée distribuée selon une loi exponentielle de moyenne  $mt = \lambda_{21}^{-1}$ . La distribution  $P(a_i(t))$  est telle que:

$$P(a(t)) = 1 - \exp(-\gamma(a(t))) \quad (4.16)$$

Pour différentes fonctions  $\gamma(\cdot)$ , nous présentons à la figure 4.12 la forme de  $P(a(t))$  correspondante (courbes  $c_1$  à  $c_4$ ). Les courbes  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , sont telles que:

$$\gamma(a(t)) = \begin{cases} k_1 a(t) & \text{pour la courbe } c_1 \\ k_2 (a(t))^2 & \text{pour la courbe } c_2 \\ k_3 (a(t))^3 & \text{pour la courbe } c_3 \\ k_4 (a(t))^4 & \text{pour la courbe } c_4 \end{cases} \quad (4.17)$$

Les constantes  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , sont choisies telles que les machines soient très vieilles à  $a_i(t) = 6$  (autrement dit pour  $P(6)$  suffisamment grand). Pour  $k_1 = 5 \times 10^{-3}$ ,  $k_2 = 10^{-5}$ ,  $k_3 = 10^{-8}$  et  $k_4 = 10^{-11}$ , nous obtenons les courbes de la figure 4.12. Notons que les courbes  $c_3$  et  $c_4$  sont généralement utilisées pour modéliser la dynamique des pannes des machines dites à taux de panne croissant (machines outils telles que tour, fraiseuse, etc.).

Pour envoyer une machine en entretien préventif, une entité générée après un temps  $T_e(\cdot)$ , ayant une distribution exponentielle de moyenne  $\omega^{-1}(\cdot)$ , retire la machine de la production. Une telle machine est aussitôt envoyée en maintenance préventive pendant une durée exponentielle de moyenne  $\lambda_{31}^{-1}$ . Nous présentons ci-après l'algorithme de simulation de la dynamique du système de production considéré sur un horizon de planification  $P_h$  donné. L'algorithme de simulation utilisé est le suivant:

### 1. Initialisation et définitions des paramètres

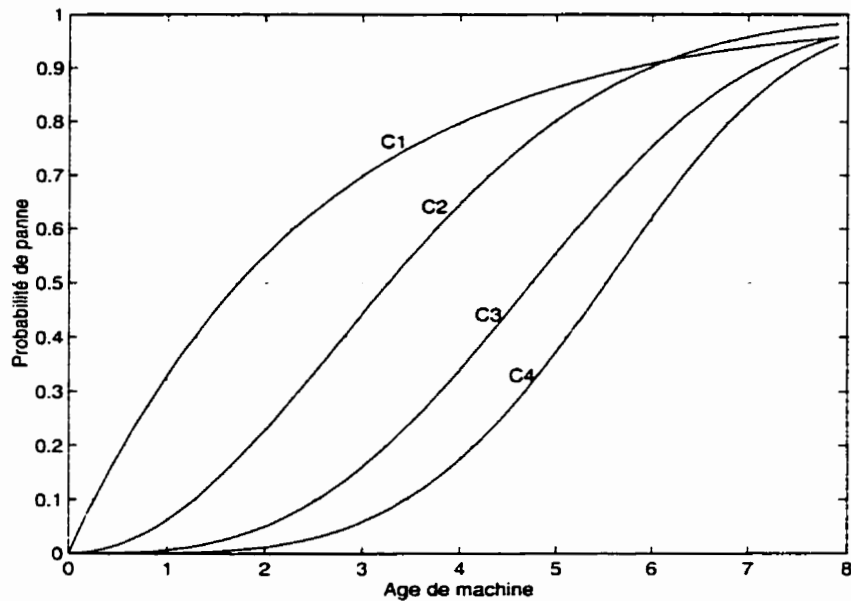


Figure 4.12: Distribution des probabilités de pannes d'une machine

$x(0) := 0$ ;  $a_1(0) := 0$ ;  $a_2(0) := 0$ ; temps := 0. Définir  $G_{\bar{x}}^h$ ,  $G_{\bar{u}}^h$ ,  $P(a_i(t))$ ,  $rt$ ,  $mt$ ,  $P_h$ .

## 2. Définition de la loi de commande

$\forall \bar{x} \in G_{\bar{x}}^h$ , définir le taux de production et de maintenance à partir des figures 4.8 à 4.11 (commande hiérarchisée) ou des figures A.1 à A.10 (méthode directe de résolution numérique des équations d'HJB).

## 3. Envoi d'une machine $i$ en entretien préventif

- (a) Si  $\omega_i(.) \neq 0$  alors envoyer la machine  $i$  en entretien préventif après un temps exponentiel de moyenne  $\omega^{-1}(.)$  unités de temps, poser  $a_i(.) = 0$  (nous supposons que la machine est remise à neuf après chaque

intervention), satisfaire la demande, faire la mise à jour du coût et passer à l'étape (b); sinon passer à l'étape 4.

(b) Faire de la maintenance préventive sur la machine  $i$  pendant un temps exponentiel de moyenne  $mt$  unités de temps et passer à l'étape 5.

#### 4. Panne d'une machine $i$

Générer de façon probabiliste la panne de la machine  $i$  en utilisant  $P(a_i(t))$ . Si l'entité de panne de la machine  $i$  est présente, envoyer la machine en réparation pendant une durée exponentielle de moyenne  $rt$  unités de temps, poser  $a_i(\cdot) = 0$ . satisfaire la demande et faire la mise à jour du coût; sinon passer à l'étape 5.

#### 5. Production avec la machine $i$

(e1) Si  $u_i(\cdot) = 0$ , attendre  $T_o$  unités sans produire et passer à l'étape (e3).

(e2) Si  $u_i(\cdot) \neq 0$ , occuper la machine pendant une unité de temps, poser

$$\begin{aligned} \text{temps} &= \text{temps} + 1, \quad x(\text{temps}) = x(\text{temps}) + u_i(\cdot) \\ a_i(\text{temps}) &= a_i(\text{temps}) + u_i(\cdot) \end{aligned}$$

et passer à l'étape (e3).

(e3) Incrémenter le temps de simulation  $T_{now}$  comme suit:

$$T_{now} = T_{now} + \text{Ind}\{u(\cdot) \neq 0\} + T_o \text{Ind}\{u(\cdot) = 0\}$$

et passer à l'étape (e4).

(e4) Faire la mise à jour du coût et du stock et passer à l'étape 6.

## 6. Tester l'arrêt de la simulation

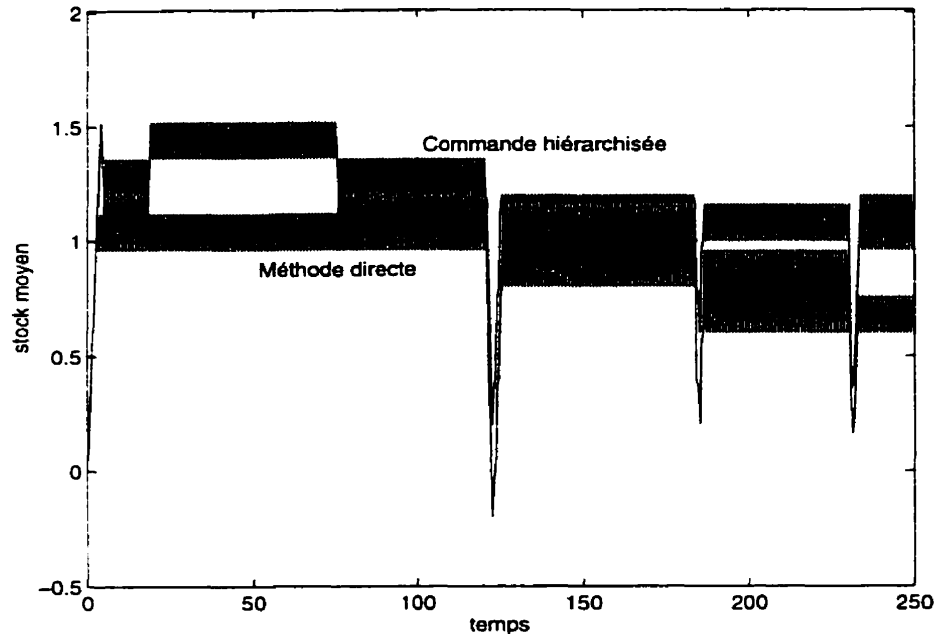
- Si  $T_{now} \leq P_h$ , poser  $time := 0$  et retourner à l'étape 3.: sinon arrêter la simulation.

Nous avons implanté cet algorithme en utilisant le langage de simulation SLAM II développé par Pritsker (1986). Ce langage est associé à différents sous-programmes FORTRAN. Par exemple, nous avons défini la loi de commande dans un sous-programme en utilisant une variable à trois dimensions (ces dimensions étant rattachées successivement à  $x(t)$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ).

Nous présenterons plus en détail à l'annexe B les différents sous-programmes interconnectés aux réseaux SLAM II. À la section suivante, nous comparons les performances du système de production considéré (deux machines, un seul produit) lorsqu'il est soumis à plusieurs stratégies de planification. Nous montrons également dans cette section l'effet du nombre de classes de la partition des âges des machines sur les performances du système.

### 4.2.6.2 Étude comparative

Nous allons utiliser le niveau de stock optimal approximé et le coût moyen à long terme associé comme critères de comparaison pour valider la méthode de commande hiérarchisée proposée au chapitre 3. En utilisant la loi de commande hiérarchisée et celle issue de la méthode directe dans le modèle de simulation, nous obtenons deux trajectoires de stock (voir figure 4.13) issues de trois réplifications. Chaque point de la figure 4.13 est une moyenne des trois réplifications faites en variant les nombres sources, pour la génération des nombres aléatoires, utilisés par SLAM II



**Figure 4.13:** Trajectoires des stocks avec des seuils critiques  $x_{op}^h = 1.19$  et  $x_{op}^d = 1.005$  pour les méthodes heuristique et directe (avec  $a_1$  et  $a_2$  fixés)

pour générer des distributions de probabilité.

La loi de commande hiérarchisée construite à la section 4.2.5 avec une partition de cinq classes (c'est-à-dire  $q = 4$ ) donne un seuil critique de stock  $x_{op}^h \simeq 1.2$  tandis que celle issue de la méthode directe donne un seuil critique  $x_{op}^d \simeq 1$  (pour  $a_1 = a_2 = 5$ ). Le coût moyen encouru obtenu, illustré à la figure 4.14, est évidemment plus faible lorsque nous utilisons la loi de commande issue de la méthode directe.

Il est intéressant de noter que la déviation du coût moyen encouru associée à la méthode heuristique par rapport à celui du coût relatif à la méthode directe est de l'ordre de 47% pour  $q = 2$ . Nous avons approximé cet ordre de grandeur par la

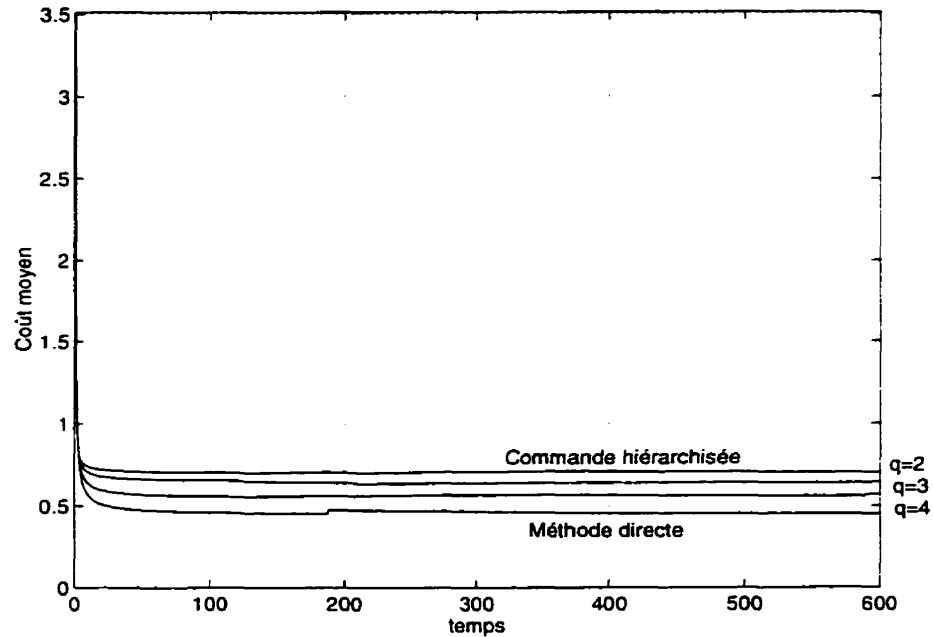


Figure 4.14: Coûts moyens associés à la méthode directe et à la méthode heuristique pour différentes partitions ( $q = 2, 3, 4$ )

relation suivante:

$$od = \frac{|C_{ap}^d - C_{ap}^h|}{C_{ap}^d} \quad (4.18)$$

où  $C_{ap}^d$  et  $C_{ap}^h$  désignent respectivement les coûts moyens approximatés, associés aux méthodes directe et heuristique.

Pour étudier l'effet du nombre de classes de la partition sur la loi de commande hiérarchisée, nous avons simulé la dynamique de production du système considéré avec des lois de commande relatives à des partitions de trois, quatre et cinq classes (c'est-à-dire  $q = 2, q = 3$  et  $q = 4$ ). Il ressort des résultats obtenus que le coût moyen encouru diminue lorsque le nombre de classes de la partition augmente. Nous notons par conséquent que l'ordre de grandeur de la déviation  $od$ , issu de l'application de

l'expression (4.18), décroît avec le nombre de classes de la partition. L'ordre de grandeur de la déviation passe de 47% pour  $q = 2$  à 32% et 14% pour  $q = 3$  et  $q = 4$  respectivement (c'est-à-dire pour des partitions de 4 et 5 classes respectivement). L'augmentation du nombre de classes de la partition permet ainsi de rapprocher la loi de commande hiérarchisée de la loi de commande issue de la méthode directe et de raffiner ainsi la politique sous-optimale obtenue. Le tableau 4.2 récapitule les résultats de l'étude comparative des approches basées sur la commande hiérarchisée et sur la résolution numérique directe des équations d'HJB.

**Tableau 4.2:** Étude comparative des approches basées sur la commande hiérarchisée (pour une partition de cinq classes) et la méthode directe de résolution des équations d'HJB

Approche	dimension du maillage	temps de résolution	coût moyen	seuil critique
Commande hiérarchisée	$3.9 \times 10^3$	0.333h	0.61	1.19
Méthode directe	$27.3 \times 10^6$	120h	0.43	1.00

Cette comparaison nous permet de conclure que l'approche de commande hiérarchisée proposée donne de bons résultats et peut être utilisée pour des systèmes de production de grande taille pour lesquels une résolution directe des équations d'HJB est difficile. Nous appliquons ci-après la méthode de commande hiérarchisée à la planification des activités d'un système de production constitué de deux machines qui traitent deux types de pièce.



## 4.3 Systèmes de production à deux machines, deux produits

Les deux machines considérées, montées en parallèle, sont spécialisées dans la production de deux types de pièce. Le problème de commande que l'on se pose consiste à contrôler simultanément le taux de maintenance préventive et le taux de production de chacun des produits dans le but de satisfaire des taux de demande constants des deux produits tout en minimisant le coût total encouru. Le système de production à contrôler est illustré à la figure 2.1. Nous allons montrer que l'application de la méthode de commande hiérarchisée à la résolution de ce problème d'optimisation stochastique, difficile à résoudre, permet d'obtenir une bonne approximation de la loi de commande optimale stochastique.

### 4.3.1 Dynamiques des pannes et de production

La dynamique des pannes des machines  $M_1$  et  $M_2$  est la même que celle de la section 4.2. De même, les processus stochastiques  $\zeta^\epsilon(t)$  et  $Z^\epsilon(t)$  sont les mêmes qu'à la section 4.2 et ne seront pas repris dans cette section. En ce qui concerne la dynamique de production, nous allons écrire les équations d'état qui décrivent les variations de l'usure de chacune des deux machines et des stocks en aval. La dynamique du vecteur d'état  $\tilde{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), a_1(t), a_2(t))'$  est donnée par:

$$\dot{x}_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) - d_1 \quad x_1(0) = x_1 \quad (4.19)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_{21}(t) + u_{22}(t) - d_2 \quad x_2(0) = x_2 \quad (4.20)$$

$$\dot{a}_1(t) = k_{11}u_{11}(t) + k_{12}u_{12}(t) \quad a_1(0) = a_1 \quad (4.21)$$

$$\dot{a}_2(t) = k_{21}u_{21}(t) + k_{22}u_{22}(t) \quad a_2(0) = a_2 \quad (4.22)$$

où  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$  et  $k_{22}$  sont des constantes données. De plus,  $u_{ij}$  et  $d_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , désignent respectivement le taux de production de la machine  $M_i$  du produit  $j$  et le taux de demande du produit  $j$  supposé constant.

### 4.3.2 Commande optimale et conditions d'optimalité

L'ensemble des commandes admissibles relatives à chaque mode  $z$  du processus  $Z^\epsilon(t)$  est donné par:

$$K(z) = \left\{ (\mathbf{u}(t), \omega(t)) \in \mathbb{R}^{4+2}, u_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^2 u_{ij}(t)\gamma_j \leq z, i = 1, 2 \right. \\ \left. \text{et } 0 \leq \omega_i(t) \leq \omega_{max} \right\} \quad z = 1, 2 \quad (4.23)$$

où  $\gamma_j$  est le temps de traitement du produit de type  $j$  sur chaque machine et  $\omega_{max}$  est le taux d'envoi en entretien préventif maximal des machines.

Soit  $G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}, \omega)$  le coût instantané, payé quand le système est au mode  $\alpha$  et à l'état  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1(t), x_2(t), a_1(t), a_2(t))$ , donné par:

$$G(\alpha, \mathbf{x}(t), a_1(t), a_2(t), \omega) = \mathbf{c}^+ \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{c}^- \mathbf{x}^-(t) + c^\alpha \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{c}^+ = (c_1^+, c_2^+)'$ ,  $\mathbf{c}^- = (c_1^-, c_2^-)'$  et  $c^\alpha$  sont des constantes réelles positives qui permettent de pénaliser toute déviation d'un stock de la valeur zéro et le séjour des machines dans les modes  $\alpha$ .

Le problème d'optimisation considéré consiste à déterminer, dans l'ensemble des commandes admissibles  $K(\cdot)$ , une stratégie de pilotage des deux machines qui minimise le coût suivant:

$$J^\epsilon(\bar{\mathbf{x}}, \alpha, \bar{\mathbf{u}}(\cdot)) = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} [G(Z^\epsilon(t), \mathbf{x}(t), a_1(t), a_2(t), \omega(t))] dt \right\} \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}, Z^\epsilon(0) = \alpha \quad (4.25)$$

sous les contraintes données par les équations d'état. Comme à la section 4.2, si  $v^\epsilon(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$  est la fonction valeur associée à loi de commande admissible  $\bar{\mathbf{u}}(\cdot)$  et aux conditions initiales  $(\alpha, \bar{\mathbf{x}})$ , alors les conditions d'optimalité sont similaires aux équations d'HJB présentées à l'équation (3.20).

Nous présentons à l'annexe C la loi de commande issue d'une résolution numérique directe des conditions d'optimalité associées à cet exemple. Nous allons comparer, comme à la section 4.2, les performances du système sous cette loi de commande avec celles issues de la loi de commande hiérarchisée correspondante.

### 4.3.3 Problème de commande limite

Le problème de commande limite consiste à trouver une loi de commande  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\omega})$  qui minimise le coût actualisé  $J(\cdot)$  défini comme suit:

$$J(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{G}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\omega}) dt \quad (4.26)$$

où

$$\bar{G}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\omega}) = \sum_{\alpha=0}^2 \mu_\alpha G(\alpha, \bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\omega}) = \mathbf{c}^+ \mathbf{x}^+(t) + \mathbf{c}^- \mathbf{x}^-(t) + \sum_{\alpha=0}^2 c^\alpha \mu_\alpha$$

avec la probabilité limite d'être au mode  $\alpha$  qui est désignée par  $\mu_\alpha$ . Les commandes  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$  sont définies comme à l'équation (3.42) et la commande  $\bar{\omega}$  est choisie dans un premier temps comme paramètre. Ensuite, une minimisation par rapport au paramètre  $\bar{\omega}$  permet de trouver les valeurs optimales des taux de production des différents produits et du taux de maintenance préventive des machines (problème limite).

La minimisation de (4.26) est soumise aux contraintes d'état données par les

équations suivantes:

$$\dot{x}_1(t) = \bar{u}_1(t) - d_1 \quad x_1(0) = x_1 \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_2(t) = \bar{u}_2(t) - d_2 \quad x_2(0) = x_2 \quad (4.28)$$

$$\dot{a}_M(t) = \frac{1}{2}(k_1 d_1 + k_2 d_2) \quad a_M(0) = a_M \quad (4.29)$$

où  $a_m$  désigne l'âge moyen des machines et  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes données.

L'équation de la programmation dynamique pour ce problème est donnée par:

$$\begin{aligned} \rho v(\bar{\mathbf{x}}) = & \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{max}} \left\{ \min_{\bar{\mathbf{u}} \in K(\bar{k})} \left\{ (\bar{u}_1 - d_1)v_{x_1}(\bar{\mathbf{x}}) + (\bar{u}_2 - d_2)v_{x_2}(\bar{\mathbf{x}}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}(k_1 d_1 + k_2 d_2)v_{a_M}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{G}(x, a_M, \bar{\omega}) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

La résolution de cette équation hyperbolique aux dérivées partielles permet de trouver la fonction valeur  $v(\bar{\mathbf{x}})$  et la loi de commande optimale  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\omega})$  associée.

#### 4.3.4 Méthodes numériques

En introduisant les approximations des dérivées partielles dans l'équation (4.30) et après quelques manipulations, nous obtenons:

$$\begin{aligned} v_h(x_1, x_2, a_m) = & \min_{0 \leq \bar{\omega} \leq k\omega_{max}} \left\{ \min_{\bar{\mathbf{u}} \in G_k^h} \left\{ \frac{c^+ x^+ c^- x^- + \sum_{\alpha=0}^2 \mu_\alpha c^\alpha}{Q'_h(\cdot) [1 + \frac{\rho}{Q'_h(\cdot)}]} + \frac{1}{[1 + \frac{\rho}{Q'_h(\cdot)}]} \right. \right. \\ & P_{h_{x_1}}(\bar{\mathbf{x}}, x_1 + h_{x_1})v_h(x_1 + h_{x_1}, x_2, a_M) \\ & P_{h_{x_2}}(\bar{\mathbf{x}}, x_2 + h_{x_2})v_h(x_1, x_2 + h_{x_2}, a_M) \\ & + P_{h_{x_1}}(\bar{\mathbf{x}}, x_1 - h_{x_1})v_h(x_1 - h_{x_1}, x_2, a_M) \\ & + P_{h_{x_2}}(\bar{\mathbf{x}}, x_2 - h_{x_2})v_h(x_1, x_2 - h_{x_2}, a_M) \\ & \left. \left. + P_{h_a}(\bar{\mathbf{x}}, a_M + h_a)v_h(x_1, x_2, a_M + h_a) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

où  $h_{x_1}$ ,  $h_{x_2}$  et  $h_a$  désignent les pas de discrétisation associés respectivement aux variables d'état  $x_1$ ,  $x_2$  et  $a_m$ . De plus, nous avons :

$$Q'_h(\cdot) = \frac{k_1 d_1 + k_2 d_2}{2h_a} + \frac{|\bar{u}_1 - d_1|}{h_{x_1}} + \frac{|\bar{u}_2 - d_2|}{h_{x_2}}$$

$$P_{h_{x_1}}(\bar{\mathbf{x}}, x_1 + h_{x_1}) = \begin{cases} \frac{\bar{u}_1 - d_1}{h_{x_1} Q'_h(\cdot)} & \text{si } \bar{u}_1 - d_1 \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{h_{x_2}}(\bar{\mathbf{x}}, x_2 + h_{x_2}) = \begin{cases} \frac{\bar{u}_2 - d_2}{h_{x_2} Q'_h(\cdot)} & \text{si } \bar{u}_2 - d_2 \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{h_{x_1}}(\bar{\mathbf{x}}, x_1 - h_{x_1}) = \begin{cases} \frac{d_1 - \bar{u}_1}{h_{x_1} Q'_h(\cdot)} & \text{si } \bar{u}_1 - d_1 < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{h_{x_2}}(\bar{\mathbf{x}}, x_2 - h_{x_2}) = \begin{cases} \frac{d_2 - \bar{u}_2}{h_{x_2} Q'_h(\cdot)} & \text{si } \bar{u}_2 - d_2 < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{h_a}(\bar{\mathbf{x}}, a_M + h_a) = \frac{k_1 d_1 + k_2 d_2}{2h_a Q'_h(\cdot)}$$

Les données de simulation dans ce cas sont les suivantes:

### 1. Variables d'état et de commande.

Soit  $h_{x_1} = h_{x_2} = h_a = 0.2$ . Pour  $x_1, x_2 \in [-2, 2]$  et  $a_M \in [0, 6]$ , nous avons:

$$G_{\bar{\mathbf{x}}}^h = \left\{ (x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, a_M^{l_3}) : x_1^{l_1} = -2 + l_1 h_{x_1}; x_2^{l_2} = -2 + l_2 h_{x_2}; \right.$$

$$\left. a_M^{l_3} = l_3 h_a; l_1, l_2 = 0, \dots, 20, l_3 = 0, \dots, 30 \right\}$$

$$G_{\bar{\mathbf{u}}}^h = \left\{ (\bar{u}_1, \bar{u}_2) : (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in [0, d_1, \bar{k}] \times [0, d_2, \bar{k}] \right\}$$

lorsque  $u_{max}^{ij} = 1$ .

### 2. Coût instantané

Les différents paramètres du coût instantané sont représentés dans le tableau

4.3.

**Tableau 4.3:** Constantes du coût instantané (deux machines, deux produits)

$c_1^+$	$c_1^-$	$c_2^-$	$c_2^+$	$\bar{c}^0$	$\bar{c}^1$	$\bar{c}^2$	$\bar{c}^3$	$\bar{c}^4, \bar{c}^5$	$\bar{c}^6$	$\bar{c}^7$	$\bar{c}^8$	$\bar{c}^9$	$k_1$	$k_2$
1	10	1.1	10.2	0	10	1	20	10	1	11	11	2	2	2

Les  $\bar{c}^j$ ,  $j = 1, \dots, 9$ , sont définis en fonction des  $c^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , tel que dans l'exemple de la section 4.2.

### 3. Taux d'actualisation et de demande

$$d_1 = d_2 = 1.6 \quad \text{et} \quad \rho = 0.005 \quad (4.32)$$

### 4. Caractéristiques probabilistes

- Taux de panne

$$q_{12}(a_i(t)) = A_0 + K_a a_i(t), \quad i = 1, 2$$

avec  $A_0 = 0.0001$  et  $K_a = 0.005$

- Taux de réparation et de retour d'entretien préventif

$$q_{21} = 0.1 \quad \text{et} \quad q_{31} = 0.25$$

Notons que les taux de transition du processus  $Z^\epsilon(t)$  sont les mêmes que dans l'exemple de la section 4.2.

Avec ces données, nous obtenons les taux de production  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$  des deux produits et le taux de maintenance préventive  $\bar{\omega}$  du problème limite qui sont présentés aux figures 4.15, 4.16 et 4.17.

**Analyse des résultats:**

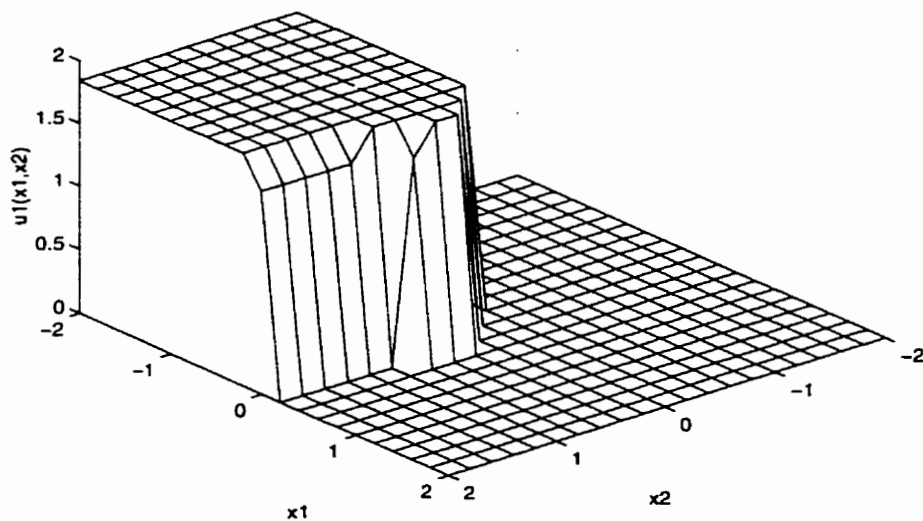


Figure 4.15: Taux de production  $\bar{u}_1(x_1, x_2)$  du produit 1

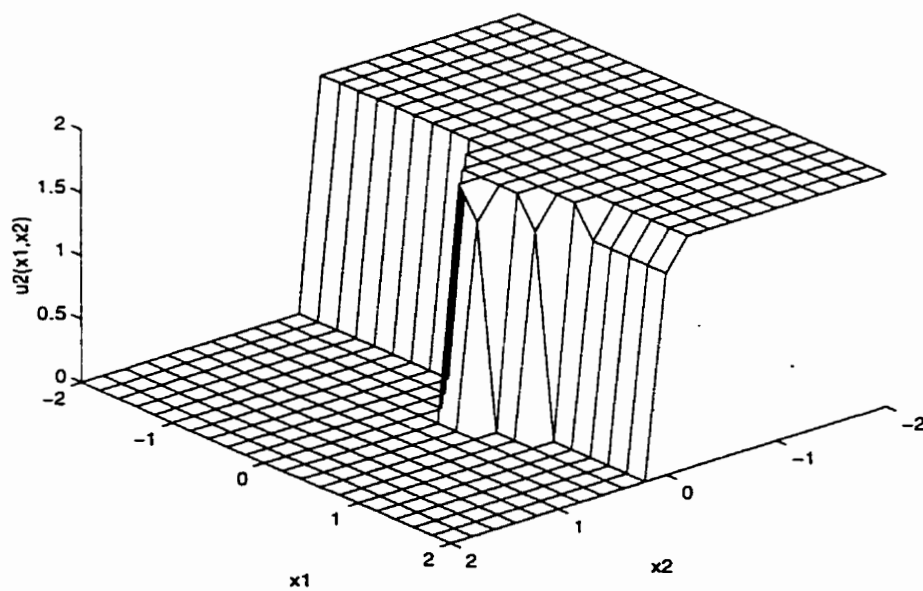
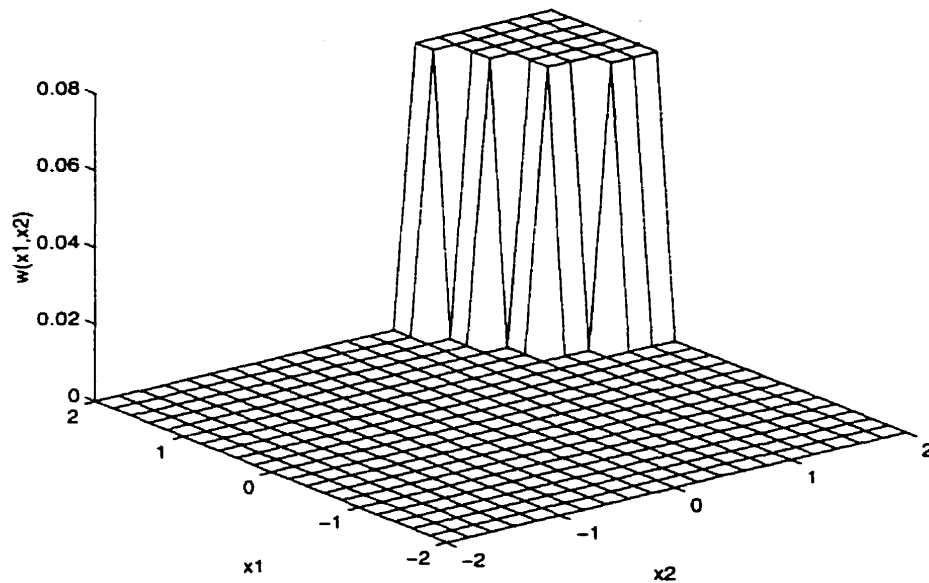


Figure 4.16: Taux de production  $\bar{u}_2(x_1, x_2)$  du produit 2

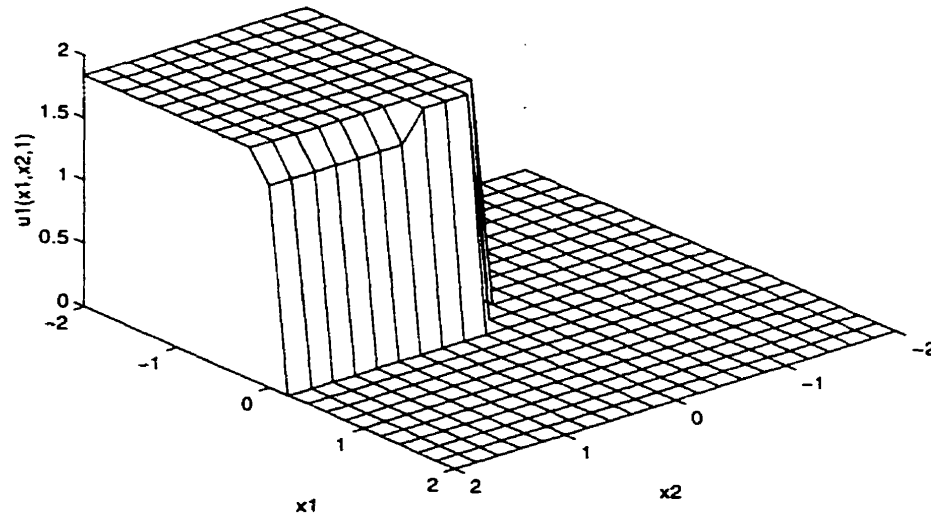


**Figure 4.17:** Taux de maintenance préventive  $\bar{w}(x_1, x_2)$  du problème limite

Désignons par  $P_1$  et  $P_2$  les types de produits 1 et 2. La politique de production pour les deux produits  $P_1$  et  $P_2$ , relative au problème limite, est présentée aux figures 4.15 et 4.16. Lorsqu'une priorité est accordée à  $P_2$  (avec  $c_2^+ > c_1^+$  et  $c_2^- > c_1^-$ ), nous ne devons produire  $P_1$  que lorsque  $x_2 \geq 0$  en maintenant un niveau de stock faible (voir figure 4.15). D'après la figure 4.16, la production de  $P_2$  est maximale pour  $x_2 < 0$ , quelle que soit la valeur de  $x_1$ . Dès que  $x_2 \geq 0$ , une production au taux maximal est envisagée au voisinage de  $x_2 = 0$ ,  $x_1 > 0$  dans le but de maintenir un niveau de stock donné. La production de  $P_2$  se fait par la suite au taux de la demande de  $P_2$  lorsque  $x_1 \geq 1$  et  $x_2 = 0.2$ . Pour  $a_m = 3.2$  et  $\bar{w} = 0.04$ , la capacité maximale moyenne du système pour chaque produit est 1.84.

La figure (4.17) montre que le taux de maintenance préventive du problème limite est différent de zéro pour des niveaux de stock significatifs (c'est-à-dire lorsque  $x_1 > 0.6$  et  $x_2 > 0.6$ ). En appliquant la méthode heuristique présentée à la section

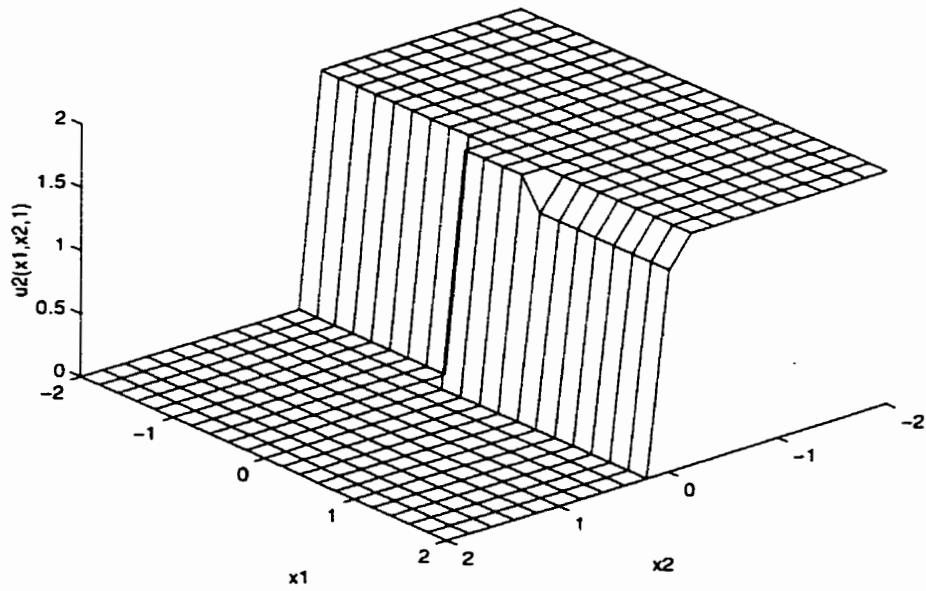




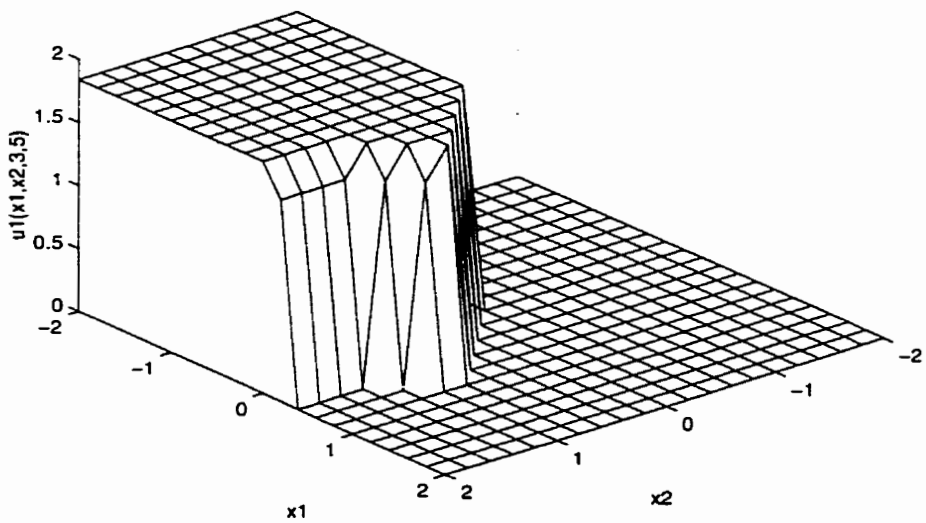
**Figure 4.18:** Taux de production  $\bar{u}_1(x_1, x_2, 1)$  du produit 1 pour un âge de la machine équivalente fixé à 1

3.4.2. relative à la construction d'une loi de commande du problème limite qui dépend de l'âge, nous obtenons les taux de production et de maintenance préventive illustrés aux figures 4.18 à 4.23.

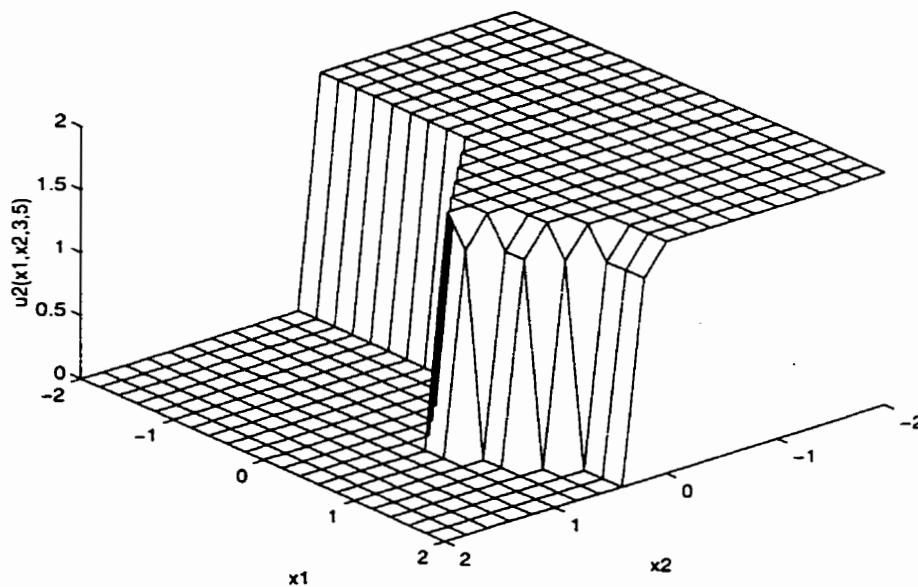
Lorsque les deux machines sont relativement jeunes ( $a_1 = 1$  et  $a_2 = 1$  par exemple), les figures 4.18 et 4.19 montrent que dans ces conditions, nous devons stocker très peu de pièces (c'est-à-dire que le taux de production de chaque produit est nul lorsque son niveau de stock est significatif). Par contre, lorsque les machines vieillissent (par exemple  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 5$ ), la politique optimale de production exige de stocker davantage de pièces. L'effet des âges des machines sur la politique de production est ainsi bien illustré par l'augmentation du niveau de stock optimal lorsque les machines vieillissent. Nous résumons l'analyse de ces résultats par la schématisation de la figure 4.24 dans le cas où les machines sont relativement jeunes.



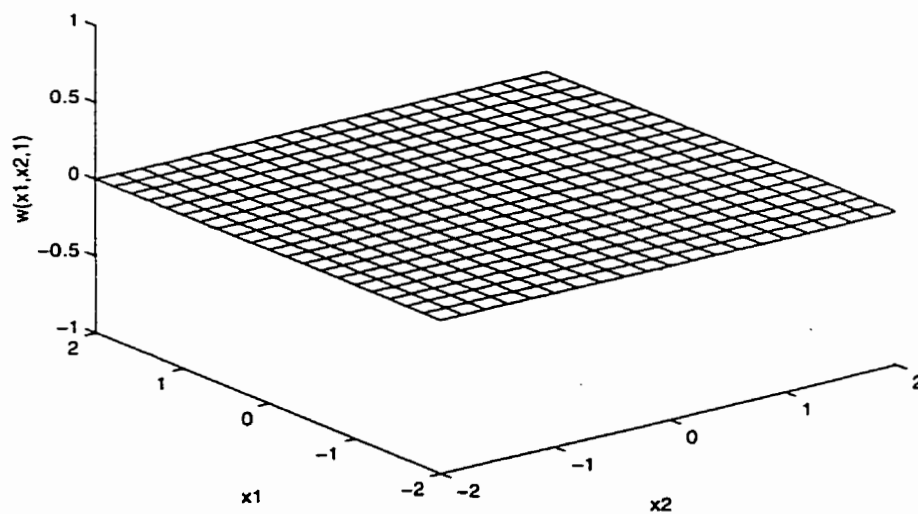
**Figure 4.19:** Taux de production  $\bar{u}_2(x_1, x_2, 1)$  du produit 2 pour un âge de la machine équivalente fixé à 1



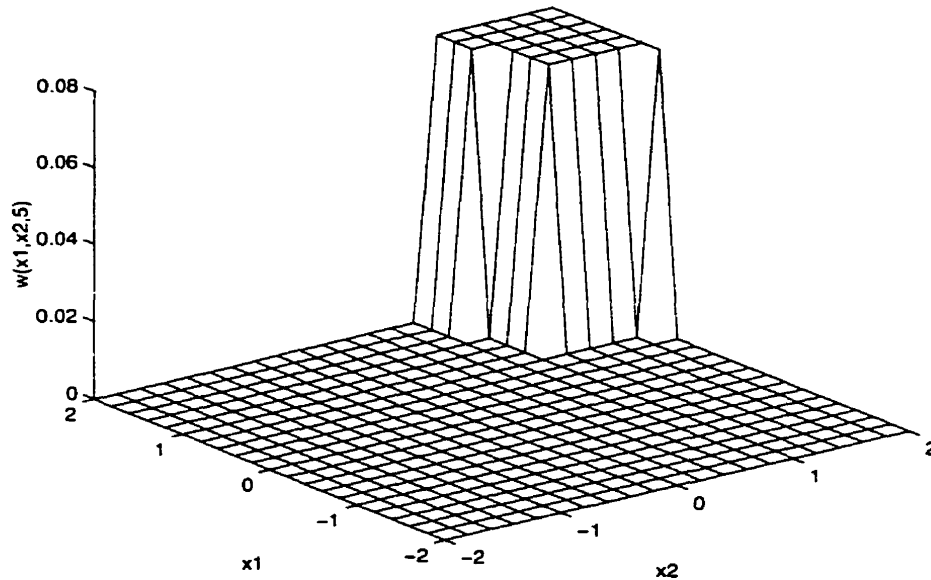
**Figure 4.20:** Taux de production  $\bar{u}_1(x_1, x_2, 5)$  du produit 1 pour un âge de la machine équivalente fixé à 5



**Figure 4.21:** Taux de production  $\bar{u}_2(x_1, x_2, 5)$  du produit 2 pour un âge de la machine équivalente fixé à 5



**Figure 4.22:** Taux de maintenance préventive  $\bar{w}(x_1, x_2, 1)$  du problème limite pour un âge de la machine équivalente fixé à 1

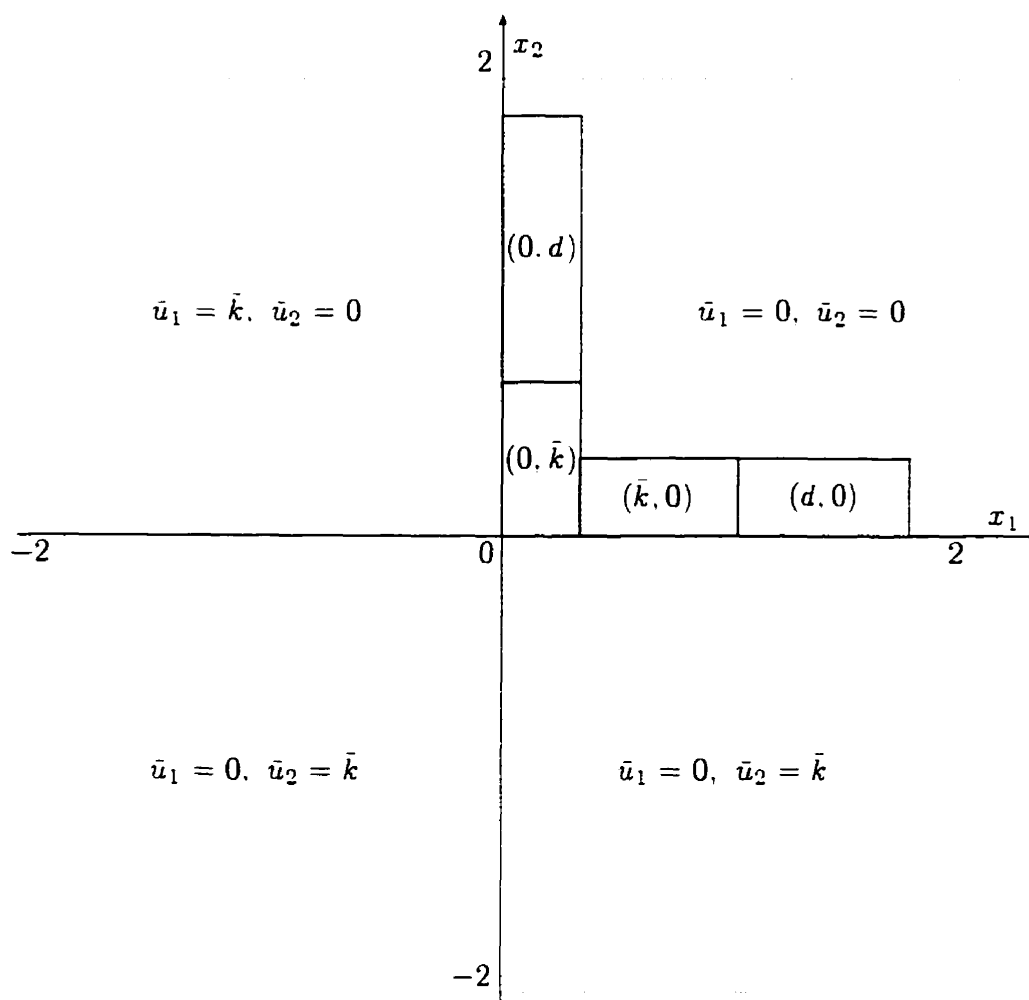


**Figure 4.23:** Taux de maintenance préventive  $\bar{w}(x_1, x_2, 5)$  du problème limite pour un âge de la machine équivalente fixé à 5

Quant à la politique de maintenance préventive, la figure 4.22 donne un taux d'envoi en entretien préventif nul lorsque les machines sont neuves ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ). Pour  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$ , une maintenance préventive doit être envisagée lorsque  $x_2 > 0.8$  et  $x_1 > 0.6$  (voir figure 4.23). Nous reprenons brièvement ci-après la procédure de construction de la loi de commande stochastique présentée à la section 4.2.5.

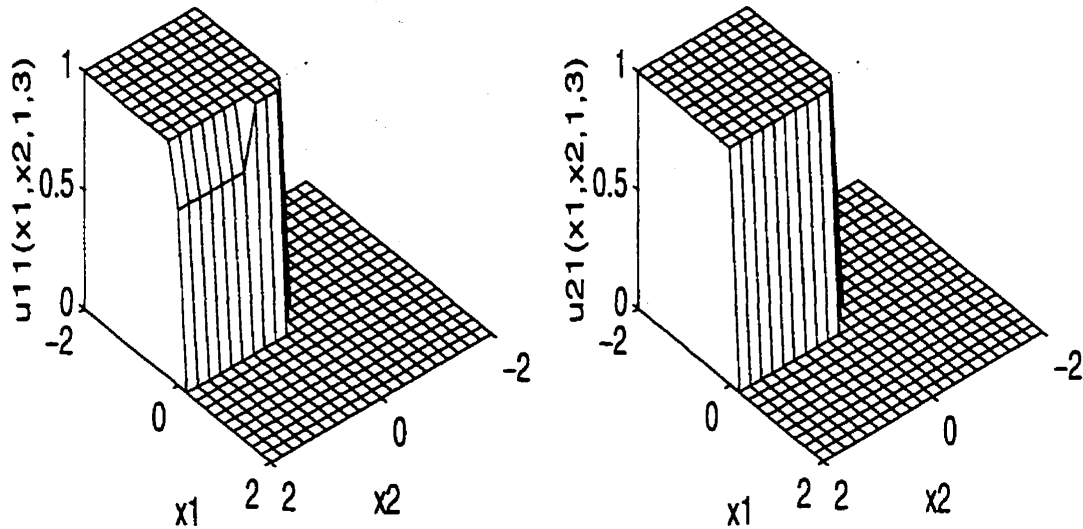
#### 4.3.5 Construction de la loi de commande stochastique

Le problème de commande considéré dans cette section est caractérisé par un vecteur d'état à quatre composantes  $x_1(\cdot)$ ,  $x_2(\cdot)$ ,  $a_1(\cdot)$  et  $a_2(\cdot)$ . Ceci complique la représentation graphique de la loi de commande du problème d'optimisation considéré. Cependant, à partir de l'illustration des figures 4.18 à 4.23, limitée à



**Figure 4.24:** Schématisation des taux de production du problème limite dans le plan  $(x_1, x_2)$  lorsque l'âge de la machine équivalente est fixé à 1

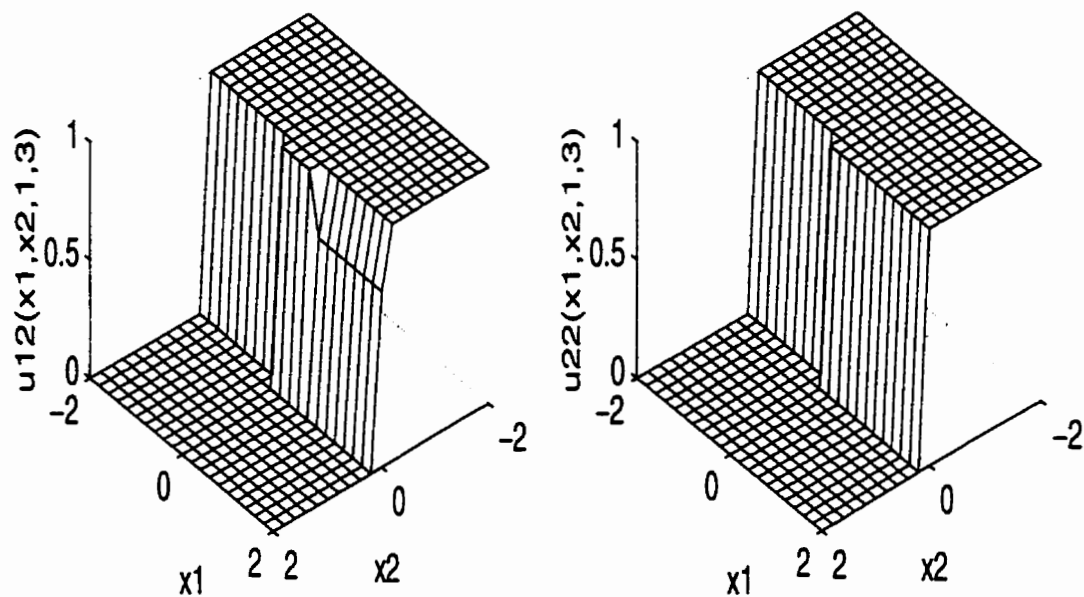
quelques combinaisons des âges des machines (obtenues en comparant le maximum des âges des deux machines avec l'âge de la machine équivalente comme dans l'exemple de la section 4.2), nous ressortons l'effet du vieillissement des machines sur la loi de commande hiérarchisée. La procédure de construction de la loi de commande stochastique à partir de celle du problème limite est identique à celle présentée à la section 3.5 et appliquée aisément à l'exemple de la section 4.2.5.



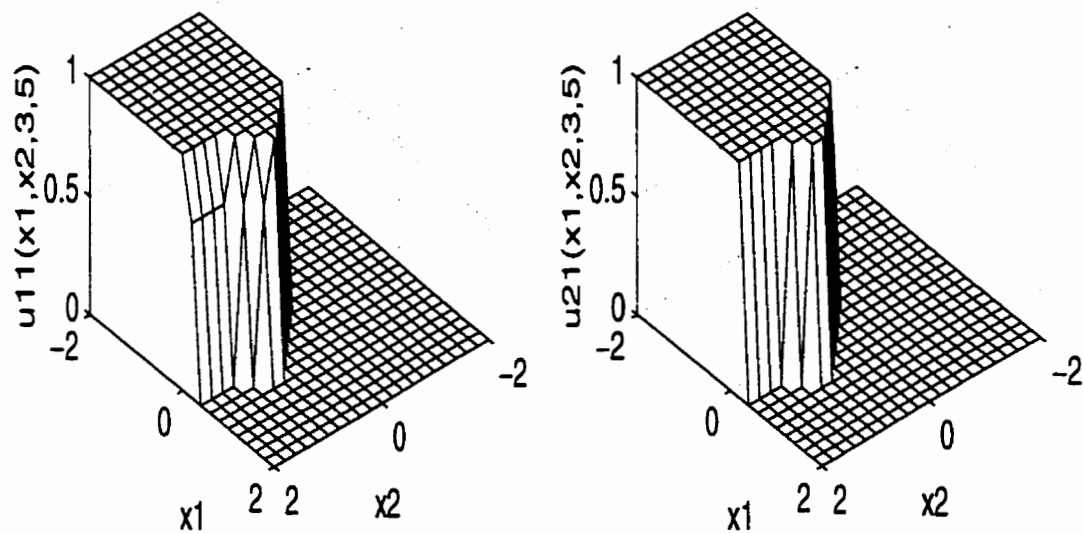
**Figure 4.25:** Taux de production des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 3$  (produit 1)

Pour appliquer la méthode de construction de la section 3.5, il suffit tout simplement de garder en mémoire de l'ordinateur les vecteurs  $\bar{u}_1(\bar{x})$ ,  $\bar{u}_2(\bar{x})$  et  $\bar{c}(\bar{x})$  et d'appliquer les étapes 1, 2 et 3 de la méthode présentée au chapitre 3. La loi de commande heuristique obtenue, illustrée pour quelques variations d'âges de machines, est représentée par les figures 4.25 à 4.30. Cette loi de commande est une désagrégation de celle du problème limite représentée par les figures 4.18 à 4.23.

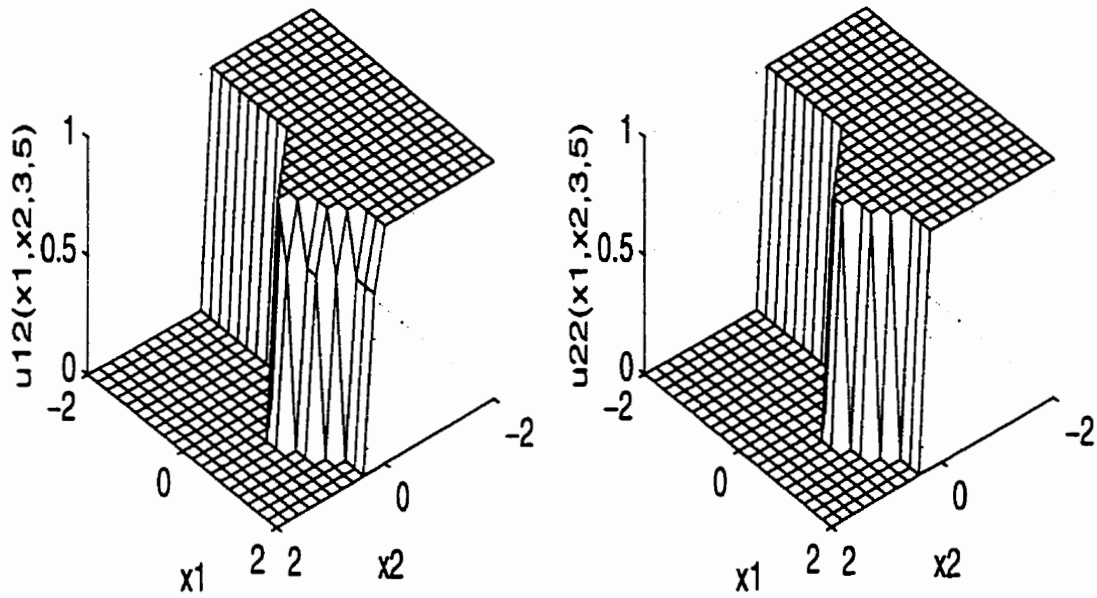
À l'aide de la simulation, nous avons déterminé le coût total moyen encouru et le seuil critique de stock associés à une partition de six classes. Les performances du système sous cette loi de commande sont comparées ci-après à celles relatives à la loi de commande issue de l'application directe des méthodes numériques aux équations d'HJB.



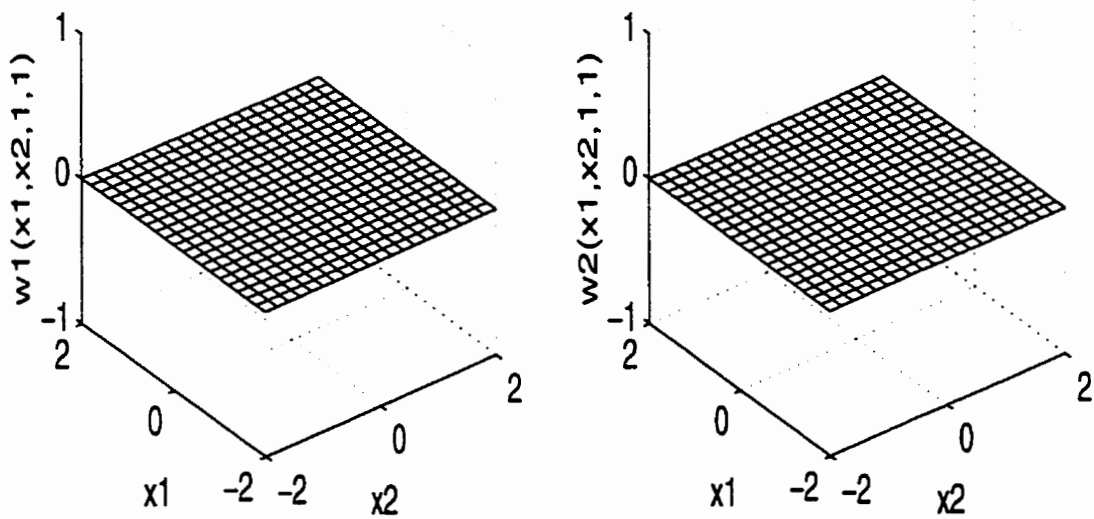
**Figure 4.26:** Taux de production des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 3$  (produit 2)



**Figure 4.27:** Taux de production des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 5$  (produit 1)



**Figure 4.28:** Taux de production des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 5$  (produit 2)



**Figure 4.29:** Taux de maintenance préventive des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 3$



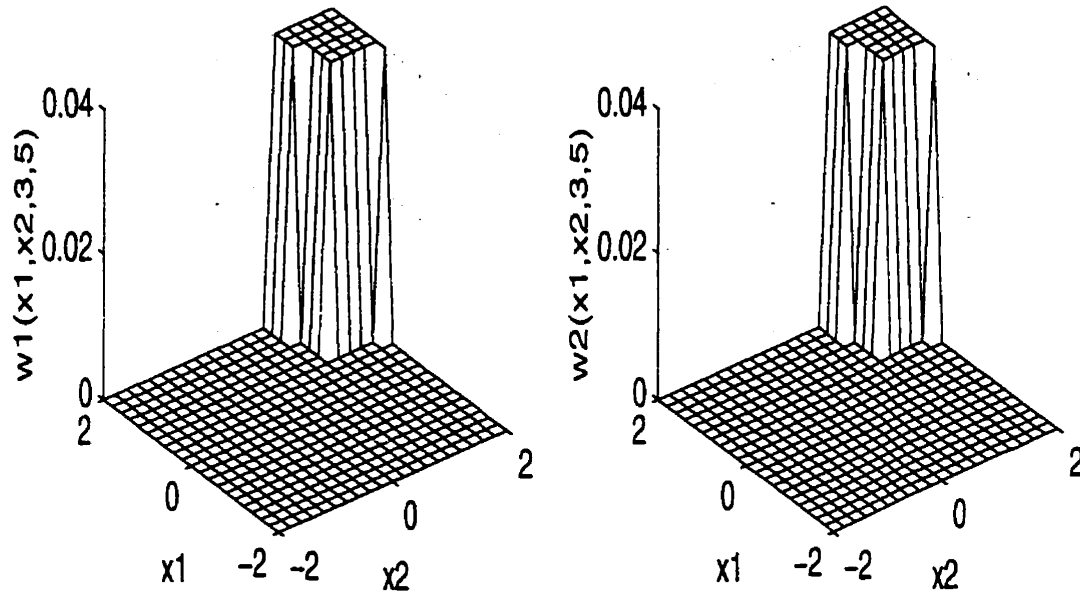
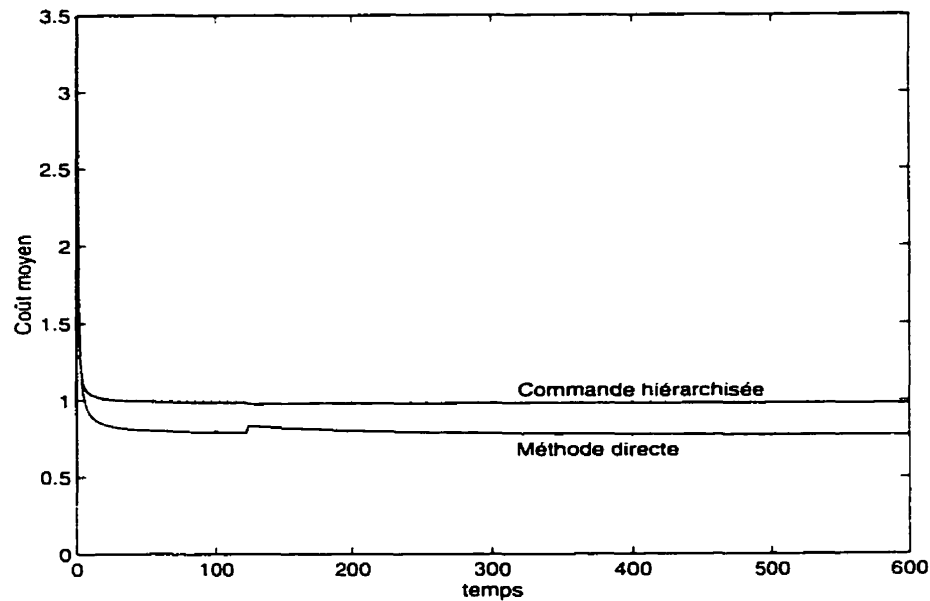


Figure 4.30: Taux de maintenance préventive des deux machines au mode 1 pour  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 5$

#### 4.3.6 Étude comparative

Il ressort des résultats de la simulation que la loi de commande hiérarchisée, pour une partition de six classes, donne des seuils critiques  $x_{1op}^h = 0.94$  et  $x_{2op}^h = 1.12$  associés aux stocks des produits P1 et P2 respectivement. La figure 4.31 montre que le coût total moyen encouru, associé à la méthode directe, demeure inférieur à celui généré par la loi de commande hiérarchisée. Il est à noter ici que la déviation du coût moyen de la méthode hiérarchisée par rapport au coût moyen de la méthode directe est de l'ordre de 18% seulement. Ce niveau de déviation, relativement faible, est dû principalement au fait que nous avons utilisé une partition raffinée de 6 classes; ce qui nous rapproche de la méthode directe.

Cette seconde comparaison permet de conclure que l'approche de commande hiérarchisée que nous proposons peut être utilisée pour des systèmes de production



**Figure 4.31:** Coûts moyens associés aux méthodes directe et hiérarchisée pour  $q = 5$  (partition de six classes)

plus larges pour lesquels la résolution numérique des équations d’HJB, pendant un temps de simulation raisonnable, n’est possible qu’avec des maillages très réduits. Nous présentons ci-après une structure générale et heuristique des stratégies de planification des systèmes de production qui se dégage des caractéristiques des résultats obtenus.

#### 4.4 Structure générale des lois de commande

Les résultats obtenus montrent que les lois de commande optimales sont de type “bang-bang” et sont caractérisées par des seuils critiques dépendant des âges des machines. La structure générale que nous pouvons retenir de ces lois de commande est donc de type “hedging point” dépendant de l’âge (le seuil critique pour chaque produit dépend de la dynamique des âges). Pour un seuil critique donné, la politique

classique du "hedging point" s'applique.

Comme l'usure d'une machine ne fait qu'augmenter tant qu'on n'intervient pas sur elle (réparation ou maintenance préventive qui remet la machine à neuf), il est clair qu'il n'existe pas une politique de planification qui maintient l'usure constante tout en produisant. C'est ainsi que la loi de commande optimale ne peut être caractérisée que par des seuils critiques sur les stocks. Par contre, il est intéressant de noter que ces seuils critiques dépendent de la politique de maintenance préventive, basée sur le concept des taux de transition variables (fonction des âges et de la commande).

Soit  $X_j$  le seuil critique du produit  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$  où  $n$  est le nombre de types de pièces. Le taux de production  $u_j(\cdot)$  du produit de type  $j$  est donné par:

$$u_j(\tilde{x}) = \begin{cases} u_{max}^j & \text{si } x_j(t) < X_j \\ d_j & \text{si } x_j(t) = X_j \\ 0 & \text{si } x_j(t) > X_j \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $u_{max}^j = \sum_{i=1}^m u_{max}^{ij}$  avec  $u_{max}^{ij}$  qui désigne le taux maximal de production sur la machine  $i$  du produit  $j$ .

La politique de maintenance préventive, dépendant essentiellement des âges des machines, ne peut pas être exprimée comme à l'équation (4.33) car il n'existe pas un seuil critique sur l'âge d'une machine. Cependant, en observant de près nos résultats, nous pouvons noter que le taux d'envoi en entretien préventif de toute machine, selon la politique optimale, doit être égal à zéro s'il existe  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tel que  $x_j < X_j$ . C'est quand le seuil critique est atteint pour tous les produits que nous pouvons envisager de faire de la maintenance préventive.

En nous basant sur ces observations, nous pouvons associer à la loi de commande de type seuil critique des paramètres caractéristiques correspondant respectivement au seuil critique de chaque produit et à la valeur d'âge à partir

de laquelle les machines doivent être envoyées en entretien préventif lorsque le seuil critique est atteint. Un exemple d'une telle paramétrisation peut être trouvé dans Kenne et Gharbi (1997) où une combinaison d'approches analytiques, de simulation et de méthodes statistiques ont permis de trouver une bonne approximation de chacun des paramètres utilisés.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de commande hiérarchisée et les méthodes numériques au problème de commande d'un système de production constitué de deux machines qui produisent un seul type de pièce. Pour valider l'efficacité de la méthode heuristique proposée, nous avons comparé les performances de la loi de commande obtenue à celle d'une loi de commande issue d'une résolution directe des équations d'HJB. Il ressort de cette étude comparative que la loi de commande obtenue se rapproche de la loi de commande optimale approximée par les méthodes numériques lorsque le nombre de classes de la partition augmente.

Nous avons par la suite étendu l'application de l'approche proposée au cas d'un système de production constitué de deux machines qui traitent deux types de pièces. La résolution d'un tel problème de commande nous a permis d'illustrer la contribution de cette recherche car la résolution directe des équations d'HJB pour cet exemple n'est pas évidente. De plus, nous avons dégagé des résultats obtenus et des conclusions de certaines de nos études (non présentées dans cette thèse mais citées en référence) que la loi de commande optimale pour les types de systèmes considérés est de type hedging point dépendant des âges des machines.

## Conclusions générales

L'objectif global de cette thèse était de trouver une politique optimale de planification de la production et de la maintenance d'un système de production constitué de plusieurs machines spécialisées dans la production de plusieurs types de pièces. Pour résoudre ce problème, nous avons, sur une base théorique, présenté une approche de commande hiérarchisée basée sur la méthode des perturbations singulières. Nous avons par la suite appliqué cette approche de commande sur deux exemples de systèmes de production.

Du point de vue théorique, nous avons contribué à l'extension de l'approche de commande hiérarchisée, basée sur la méthode des perturbations singulières, au cas où le processus de saut est commandé et au cas où les taux de transition dépendent de l'état du système. Nous avons utilisé le fait que la solution au problème de commande optimale stochastique initial converge de façon asymptotique vers celle d'un problème de commande déterministe équivalent lorsque les taux de transition des phénomènes rapides tendent vers l'infini. Les conditions d'optimalité obtenues, aussi bien pour le problème de commande stochastique initial que pour le problème de commande déterministe équivalent, sont une extension de celles obtenues dans la littérature.

Pour résoudre les conditions d'optimalité du problème déterministe, nous avons utilisé l'approximation de Kushner pour formuler un problème de décision markovien à événements discrets. Après avoir établi le lien entre ce formalisme et celui proposé initialement, nous avons utilisé un algorithme numérique pour

résoudre les conditions d'optimalité obtenues. Une méthode de construction de la loi de commande stochastique du problème initial à partir de la solution numérique du problème limite a par la suite été proposée.

Au niveau des applications, nous avons considéré deux systèmes de production. Nous avons dans un premier temps déterminé la loi de commande d'un système de production constitué de deux machines produisant un seul type de pièce. En suivant les principales étapes de l'approche proposée, nous avons montré, à l'aide des modèles de simulation, que lorsque le nombre de classes de la partition des âges des machines augmente, nous obtenons un raffinement de la loi de commande. Les performances du système obtenues avec une telle politique se rapprochent de celles que procure une loi de commande sous-optimale issue de l'application directe des méthodes numériques aux équations d'HJB stochastiques.

La loi de commande hiérarchisée obtenue qui fixe les taux de production du système et de maintenance préventive de chaque machine dans chaque mode du processus stochastique décrivant la dynamique des machines est une commande de type "bang-bang". Pour la planification de la production, la loi de commande obtenue est de type "hedging point" modifié, caractérisée par un seuil critique qui dépend de la dynamique des âges des machines. La politique de maintenance préventive dépend elle aussi du seuil critique et est telle qu'aucun entretien préventif ne doit être envisagé lorsque le seuil critique n'est pas atteint.

Comme extension de l'approche de commande proposée dans cette thèse, nous pensons qu'il serait souhaitable:

1. d'introduire la maintenance corrective dans le modèle et de résoudre le problème de planification de la production, de la maintenance préventive et de

la maintenance corrective des systèmes de production en utilisant l'approche de commande hiérarchisée, basée sur les méthodes des perturbations singulières;

2. d'appliquer l'approche de commande hiérarchisée, comme dans cette thèse, à la commande des systèmes en tandem (machines en série) lorsque le processus de saut est commandé et dépend des âges des machines;
3. d'étendre l'approche proposée au cas des systèmes de production qui produisent plusieurs types de pièces en présence du setup;
4. d'associer des paramètres à la structure générale de la loi de commande de type hedging point modifié et d'utiliser l'approche basée sur la combinaison des modèles de simulation et des méthodes statistiques pour obtenir une bonne approximation de la loi de commande. Cette méthode est basée sur le fait qu'on n'aura pas à résoudre au préalable les conditions d'optimalité du problème de commande considéré.

## Bibliographie

- ABDULNOUR, G., DUDDEK, R. A. et SMITH, M. L. (1994). "Effect of maintenance policies on just-in-time production system", *International Journal of Production Research*, Vol. 33, pp. 565-583.
- AKELLA, R. et KUMAR, P. R. (1986). "Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 2, pp. 116-126.
- BAI, S. X. et GERSHWIN, S. B. (1994). "Scheduling manufacturing systems with work-in-process inventory control: multiple-part-type systems", *International Journal of Production Research*, Vol. 32, No. 2, pp. 365-385.
- BAI, N. K. et NAGARUR, N. N. (1994). "An integrated decision support system for FMS: using intelligent simulation", *International Journal of Production Research*, Vol. 32, No. 4, pp. 951-965.
- BENGU, G. (1994). "A simulation based scheduler for flexible flow line", *International Journal of Production Research*, Vol. 32, No. 2, pp. 321-344.
- BERTSEKAS, D. P. (1987). "Dynamic programming: deterministic and stochastic models", *Prentice Hall*, New Jersey.
- BIELECKI, T. (1996). "Asymptotic analysis of stochastic manufacturing systems with slow and fast machines", *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan.
- BIELECKI, T. et KUMAR, P. R. (1988). "Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems", *Operat. Res.*, Vol. 26, pp. 532-540.



- BOUKAS, E. K. (1987). "Commande optimale stochastique appliquée aux systèmes de production", *Ph.D thesis*, École Polytechnique de Montréal.
- BOUKAS, E. K. et HAURIE, A. (1990). "Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 9, pp. 1024-1031.
- BOUKAS, E. K., KENNE, J. P. et ZHU, Q (1995a). "Age dependent hedging point policies in manufacturing systems", *Proceedings of the ACC Conference*, Seattle, Washington.
- BOUKAS, E. K., Zhang, Q. et YIN, G. (1995b). "Robust production and maintenance planning in stochastic manufacturing systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 6, pp. 1098-1102.
- BOUKAS, E. K. et KENNE, J. P. (1997). "Maintenance and production control of manufacturing systems with setups", *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 33, pp. 55-70.
- BOUKAS, E. K. (1995). "Numerical methods for HJB equations of optimization problems for piecewise deterministic systems", *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 16, 41-58.
- BOUKAS, E. K. et YANG, H. (1996). "Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 6, pp. 881-885.
- BOUKAS, E. K. (1997). "Hedging point policy improvement", à paraître dans *Journal of Optimization Theory and Applications*.
- CLARKE, F. (1983). "Optimization and non-smooth analysis", *Wiley-Interscience*, New York, NY.

- FLEMMING, W. H. et SONER, H. M. (1992). "Controlled Markov processes and viscosity solutions", *Springer-Verlag*, New York.
- FLEMMING, W. H., SETHI, S. et SONER, H. M. (1987). "An optimal stochastic production planning problem with randomly fluctuating demand", *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 25, pp. 1494-1502.
- GHARBI, A. et KENNE, J.P. (1997). "Production control and design problem in a failure prone manufacturing system", *Proceedings of the Sixth Industrial Engineering Research Conference (IERC6)*, Miami, Florida, pp. 813-819.
- GLASSEY, C. R. et HONG, Y. (1993). "Analysis of behavior of an unreliable n-stage transfer line with (n-1) inter-stage storage buffers", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, No. 3, pp. 519-530.
- GRAMMEL, G. (1996). "On the convergence of the optimal value function for singularly perturbed differential inclusions", *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan.
- GRANDALL, M. C., EVANS G. W. et LIONS P. L. (1984). "Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 282, No. 2, pp. 487-502.
- GUPTA, M. C., GUPTA, Y. P. et EVANS, G. W. (1993). "Operations planning and scheduling problem in advanced manufacturing systems", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, No. 4, pp. 869-900.
- HADDOCK, J. (1990). "A simulation generator for flexible manufacturing system design and control", *IIE Transactions on IE Research*, Vol. 20, No. 11, pp. 22-310.
- KENNE, J. K., GHARBI, A. et BOUKAS, E. K. (1997a). "Control policy

simulation based on machine age in a failure prone one-machine, one-product manufacturing system", *International Journal of Production Research*, Vol. 35, No. 5, pp. 1431-1445.

KENNE, J. K. et GHARBI, A. (1997). "Experimental design in the production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system". *à paraître dans International Journal of Production Research*.

KENNE J. P. et BOUKAS, E. K. (1997a). "Production and corrective maintenance planning problem of a failure prone manufacturing system", *Proceedings of the ACC Conference*, Albuquerque.

KENNE J. P., BOUKAS, E. K. et HONGLER G. O. (1997b). "Simultaneous control of the production and corrective maintenance of a multiple-machine flowshop". *Forthcoming*.

KENNE J. P. et BOUKAS, E. K. (1997b). "Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems", *Forthcoming*.

KIMEMIA, J. G. et GERSHWIN, S. B. (1983). "An algorithm for computer control of production in flexible manufacturing systems", *IIE Trans.*, Vol. AC-15, pp. 353-362.

KOKOTOVIĆ. P., KHALIL, H. P. et O'REILLY J. (1986). "Singular perturbation methods in control: analysis and design", *Academic Press*.

KUSHNER, H. J. et DUPUIS, P. G. (1992). "Numerical methods for stochastic control problems in continuous time", *Springer-Verlag*, New York.

LEHOCZKY, J., SETHI, S., SONER, H. M. et TAKSAR M. (1991). "An asymptotic analysis of hierarchical control of manufacturing systems under uncertainty", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 16, No. 3, pp. 596-

608.

- LOU, S., SETHI, S. et ZHANG, Q. (1994). "Optimal feedback production in a stochastic two-machine flowshop", *European Journal of Operational Research*, Vol. 73. pp. 331-345.
- MALHAMÉ, R. P. et BOUKAS, E. K. (1991). "A renewal theoretical analysis of a class of manufacturing systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 36, No. 5, pp. 580-587.
- MELlichamp, J. M., KWON, O. J. et WAHAB, A. F. A. (1990). "FMS designer: an expert system for flexible manufacturing systems design", *International Journal of Production Research*, Vol. 28, No. 11. pp. 2013-2024.
- OLDER, G. J. et SURI, R. (1980). "Time optimal of part-routing in manufacturing system with failure prone machines", *Proc. 19th IEEE Conf. Decis. Contr.*, Albuquerque.
- PRESMAN, E., SETHI, S. et ZHANG, Q. (1995). "Optimal feedback production planning in a stochastic n-machine flowshop", *Automatica*, Vol. 31, No. 9. pp. 1325-1332.
- PRITSKER, A. B. (1986). "Introduction to simulation and SLAM II", *Systems Publishing Corporation West Lafayette, Indiana*, 3e edition.
- RISHEL, R. (1975). "Control of systems with jump Markov disturbances", *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 241-244.
- ROSS, S. M. (1993). "Introduction to probability models" *Fifth edition*, *Academic Press*.
- SAKSENA, V. R., O'REILLY, L. et KOKOTOVIĆ, P. V. (1984). "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976-1983",

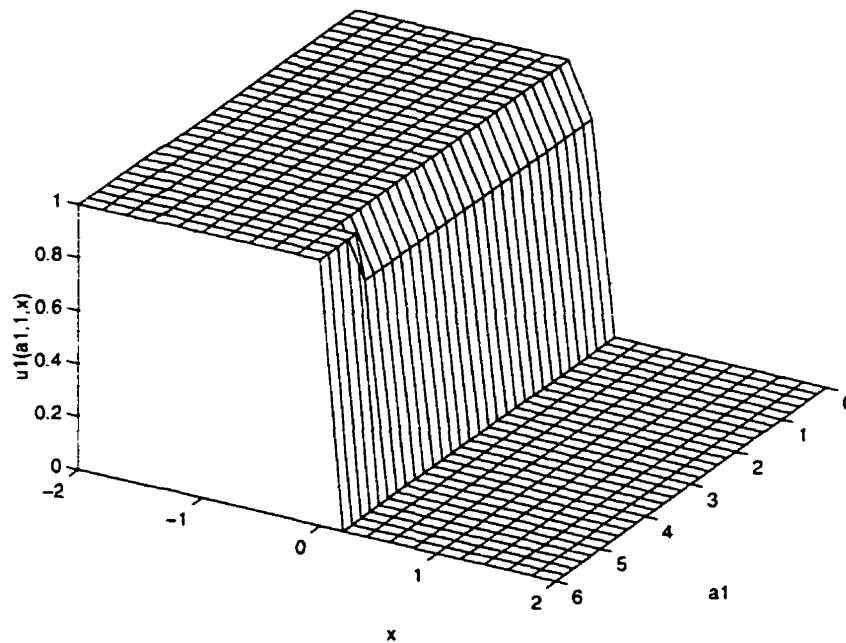
- Automatica*, Vol. 20, No. 3, pp. 273-293.
- SETHI, S. P. et ZHANG, Q. (1994) "Hierarchical control decision making in stochastic manufacturing systems", *Birkhäuser Boston*.
- SETHI, S. P., ZHANG, Q. et ZHOU, X. Y. (1994) "Hierarchical control in stochastic manufacturing systems with convex costs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 80, No. 2, pp. 299-317.
- SHARIFNIA, A. (1988). "Production control of manufacturing system with multiple machine state", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 7, pp. 620-625.
- SONER, H. M. (1993). "Singular perturbation in manufacturing", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 31, No. 1, pp. 132-146.
- TARUM, G. et RIZVAN, E. (1994). "An integrated simulation model development environment for SLAM II using object-oriented paradigm". *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 25, No. 1-4, pp. 569-572.
- VAN RYZIN, G., LOU, S. X. C. et GERSHWIN S. B. K. (1993). "Production control for a tandem two-machine system", *IIE Transactions*, Vol. 25, No. 5, pp. 5-20.

## Annexe A

# Systeme de production à deux machines traitant un seul type de pièce

L'objet de cette annexe est de présenter brièvement la loi de commande issue d'une résolution numérique des conditions d'optimalité stochastiques du problème de planification de la production et de la maintenance préventive. Nous considérons le cas d'un système constitué de deux machines spécialisées dans la production d'un seul type de pièce. Pour plus d'information sur les équations qui décrivent le problème de décision markovien associé aux équations d'HJB stochastiques développées aux chapitres 2 ou 3 (voir équation (2.19)), nous renvoyons le lecteur aux travaux de Boukas (1987) et (1997). Nous présentons dans cette annexe la loi de commande issue d'une résolution numérique du système d'équations qui décrit les conditions d'optimalité du problème de décision markovien associé au problème considéré.

Nous avons résolu le problème de décision markovien obtenu en utilisant les mêmes données qu'à la section 4.2. Les figures A.1 à A.10 représentent les taux de production et de maintenance préventive de chaque machine dans le mode où toutes



**Figure A.1:** Taux de production de  $M_1$  pour  $a_2 = 1$

les deux machines sont opérationnelles. Ces figures, limitées à quelques combinaisons des variables d'état, illustrent la loi de commande associée à la méthode dite directe dans cette thèse.

Comme nous pouvons le constater, il ressort de cette politique de planification que nous devons exploiter plus fréquemment les machines les plus vieilles et utiliser les machines plus jeunes en cas de nécessité. Cette stratégie garantit une réserve de capacité car les vieilles machines doivent tomber incessamment en panne et la production ne pourra se faire qu'avec celles qui restent opérationnelles (c'est-à-dire les machines jeunes). Cette remarque est bien illustrée par une comparaison des figures A.1 à A.4. De plus, il est intéressant de remarquer, d'après les figures A.5 à A.10, que la zone où la maintenance préventive doit être envisagée diminue lorsque les machines vieillissent (c'est-à-dire lorsque leur âge augmente).

Les méthodes numériques nous ont ainsi permis de résoudre le problème de

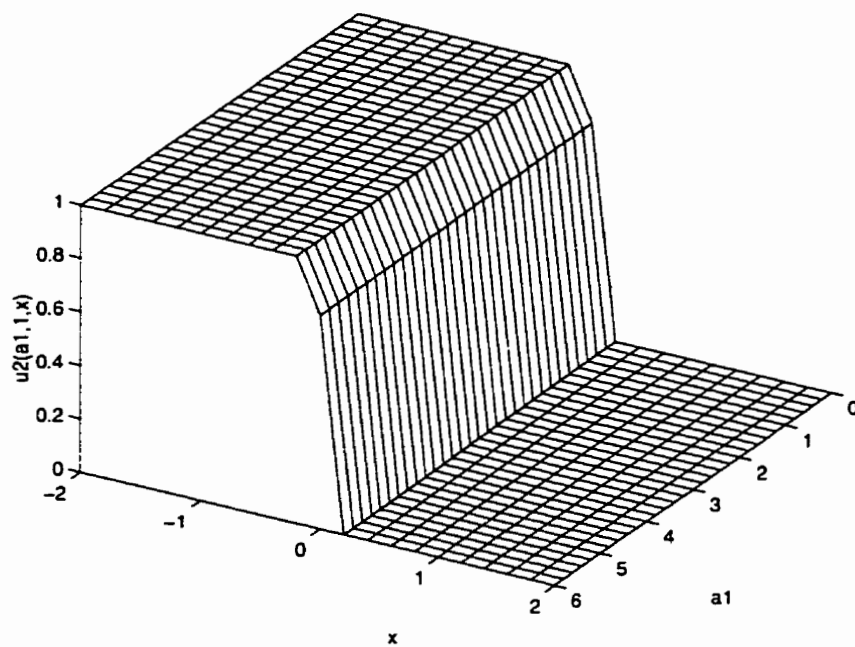


Figure A.2: Taux de production de  $M_2$  pour  $a_2 = 1$

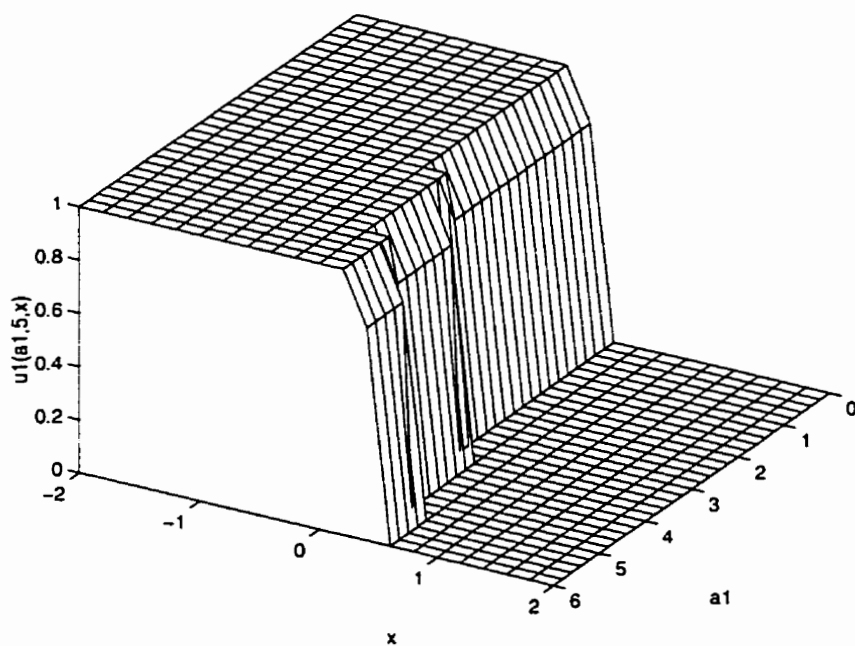


Figure A.3: Taux de production de  $M_1$  pour  $a_2 = 5$



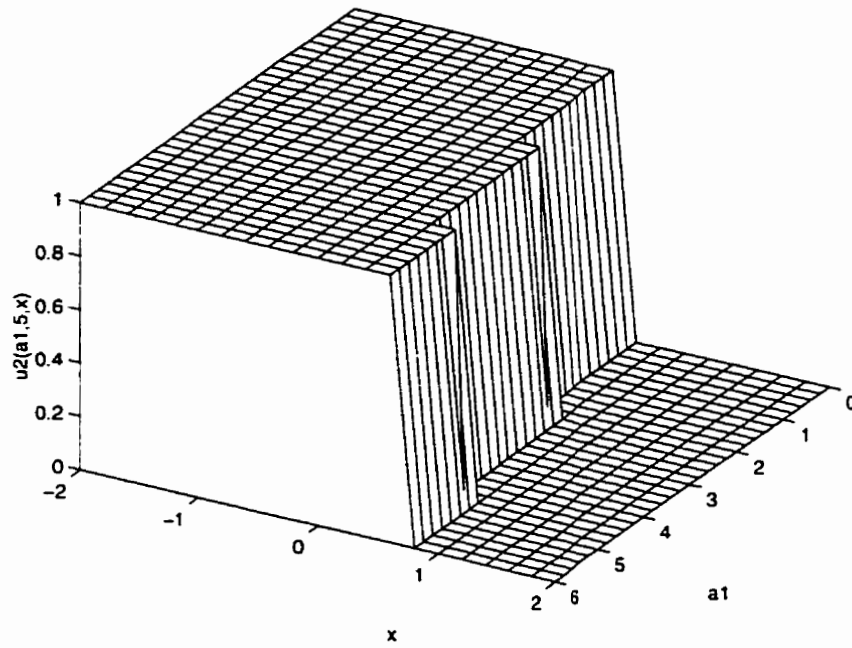


Figure A.4: Taux de production de  $M_2$  pour  $a_2 = 5$

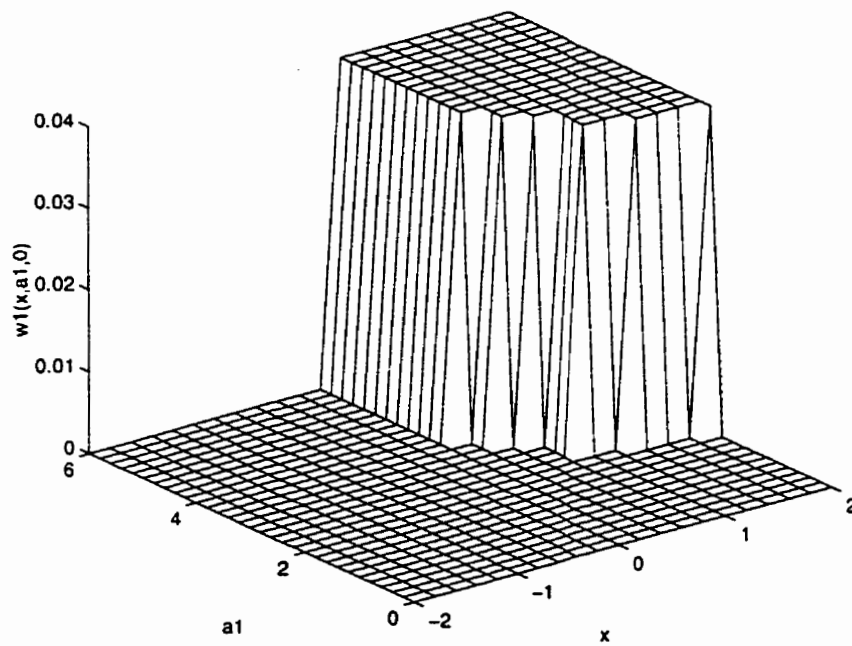


Figure A.5: Taux de maintenance préventive de  $M_1$  pour  $a_2 = 1$

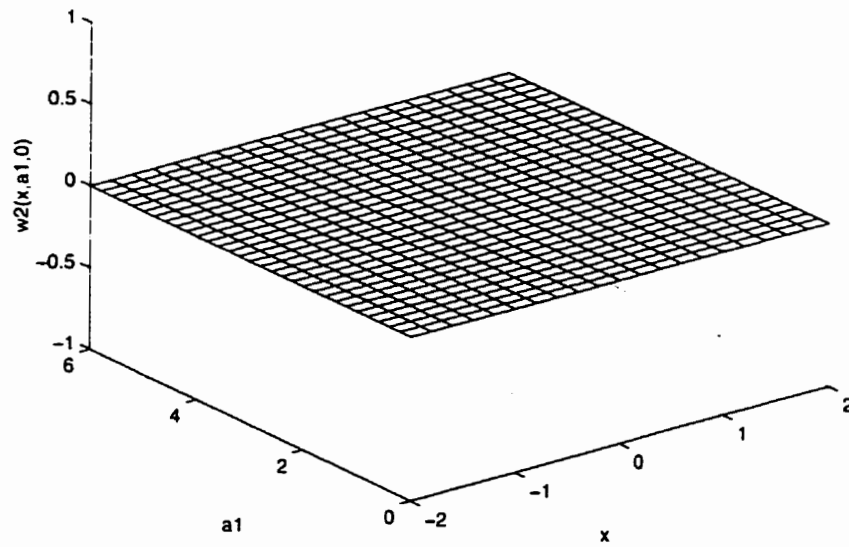


Figure A.6: Taux de maintenance préventive de  $M_2$  pour  $a_2 = 0$

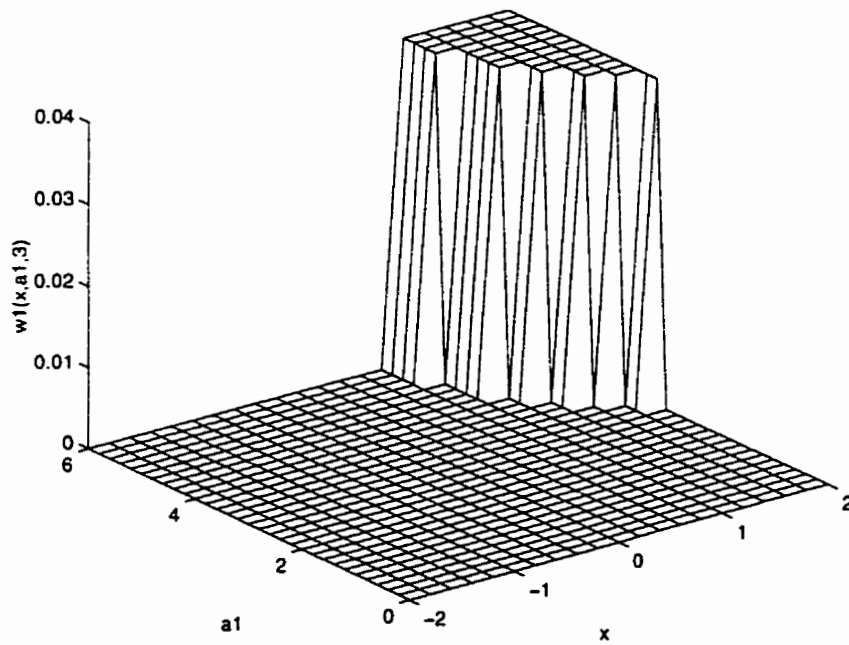


Figure A.7: Taux de maintenance préventive de  $M_1$  pour  $a_2 = 3$

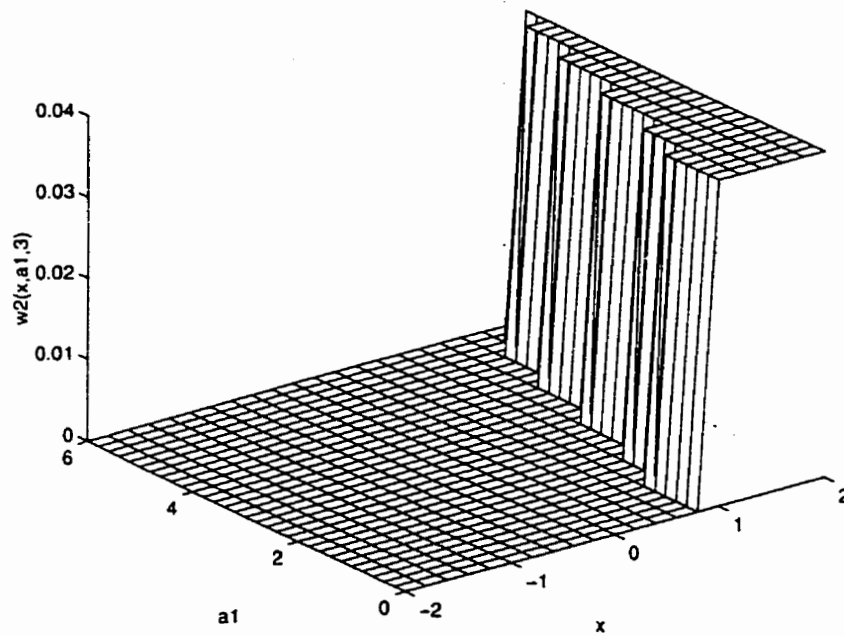


Figure A.8: Taux de maintenance préventive de  $M_2$  pour  $a_2 = 3$

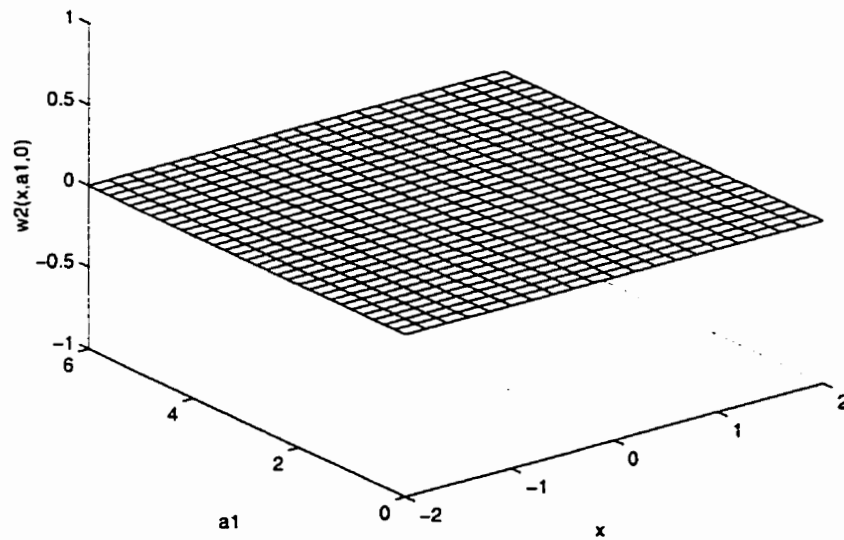
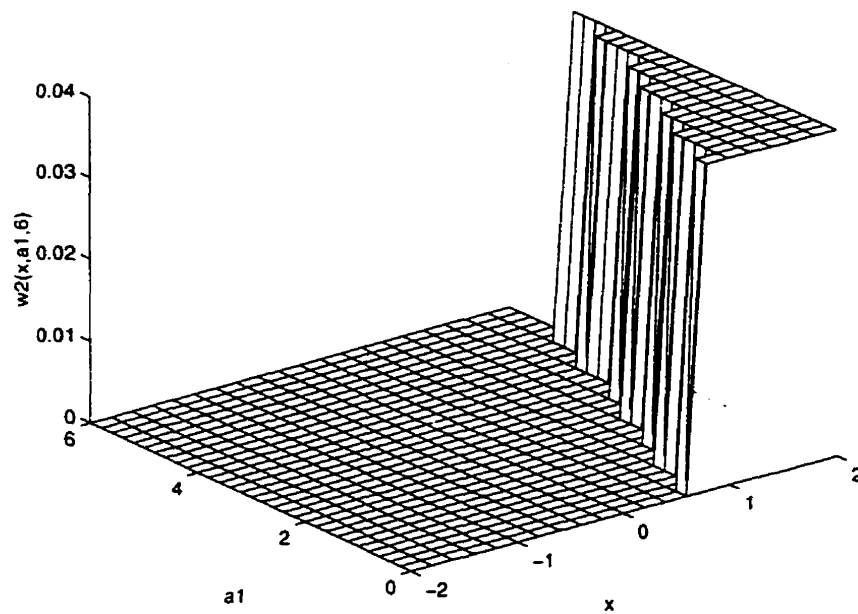


Figure A.9: Taux de maintenance préventive de  $M_1$  pour  $a_2 = 6$



**Figure A.10:** Taux de maintenance préventive de  $M_2$  pour  $a_2 = 6$

commande optimale du système de production constitué de deux machines qui produisent un seul type de pièce. Malheureusement, l'application de ces méthodes à la résolution des conditions d'optimalité associées à des systèmes plus larges se heurte à leur grande dimension. Cette dimension croît exponentiellement avec la taille du problème tel que nous l'avons précisé au chapitre 2.

## Annexe B

# Modèles de simulation des systèmes de production

L'objet de cette annexe est de présenter une approche de simulation des systèmes de production basée sur un ensemble de réseaux. Chaque réseau est un ensemble de noeuds qui représentent graphiquement et de façon spécifique une partie de la dynamique du système. Cette dynamique est décrite par un ensemble d'événements discrets, d'activités et de branches. Le programme de simulation que nous proposons est constitué principalement de trois réseaux associés respectivement aux modes opérationnels des machines, aux modes d'arrêt des machines et à la boucle de simulation.

### B.1 Modes opérationnels des machines

C'est dans un mode opérationnel que chaque machine produit selon un rythme de production défini à l'avance. Ce rythme de production peut correspondre soit à la loi de commande hiérarchisée ou à celle issue de la méthode directe de résolution des équations d'HJB stochastiques. La loi de commande  $\tilde{\mathbf{u}}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{u}(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}), \omega(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}))$  est d'abord initialisée, pour chaque mode  $\alpha$  du processus stochastique, dans

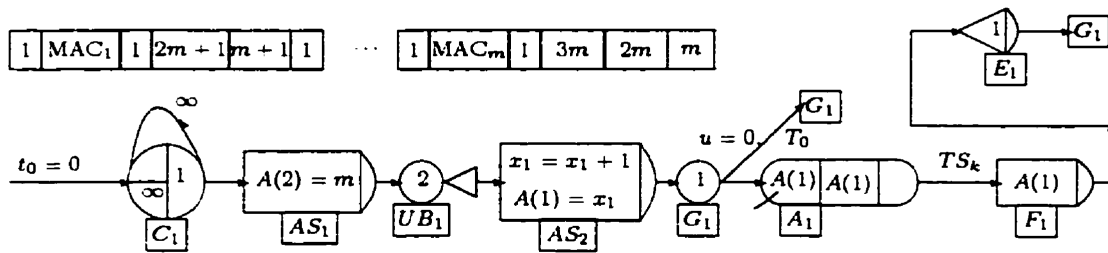


Figure B.1: Machines opérationnelles avec  $\sum_{k=1}^m TS_k = u^{-1}(\cdot)$  et  $k = A(1)$

un tableau de dimension appropriée. Pour simplifier la présentation et la compréhension, nous considérons le cas d'un système de production constitué de  $m$  machines identiques ( $m \geq 2$ ) et produisant un seul type de pièce. La figure B.1 présente le réseau qui modélise la production des pièces par les machines opérationnelles.

Les  $m$  machines sont modélisées par des RESSOURCES ( $MAC_i$ ),  $i = 1, \dots, m$ , qui sont considérées comme des postes de travail ayant un seul serveur. Un service au niveau d'une RESSOURCE  $i$  correspond à la production d'une pièce par la machine correspondante. Initialement, une entité fictive représentant l'ordre de production est créée au noeud ( $C_1$ ) au temps  $t_0 = 0$ . Cette entité est dirigée au noeud ( $AS_1$ ) où  $m$  est assigné à son attribut  $A(2)$ . L'attribut  $A(2)$  de l'entité fictive est ensuite utilisée, avec le noeud UNBATCH désigné par ( $UB_1$ ), pour introduire  $m$  entités identiques dans le réseau. Les  $m$  entités résultantes sont successivement dirigées au noeud ( $AS_2$ ) où  $x_1$  (avec  $x_1 = 1, \dots, m$ ) est assigné à leur attribut  $A(1)$ . Chacune de ces entités représente une machine décrite par un numéro donné par  $x_1$ . Les entités sont par la suite dirigées au noeud ( $G_1$ ) où un aiguillage est prévu. Un maximum d'une branche est choisi pour diriger ces entités en fonction du taux de production actuel. Les deux cas suivants peuvent se produire:

1. Si  $u(.) = 0$ , (c'est-à-dire que la production n'est pas nécessaire), alors les entités sont retournées au noeud ( $G_1$ ) par une activité de très faible durée  $T_0$ .
2. Si  $u(.) \neq 0$ , (c'est-à-dire que l'on doit produire au taux de demande ou au taux maximal), alors les entités sont dirigées vers le noeud ( $A_1$ ) où l'entité  $i$  doit attendre que la RESOURCE ( $MAC_i$ ) soit disponible. Lorsque ( $MAC_i$ ) est disponible, l'entité le capture pour une durée de  $TS_k$  unités de temps telle que:

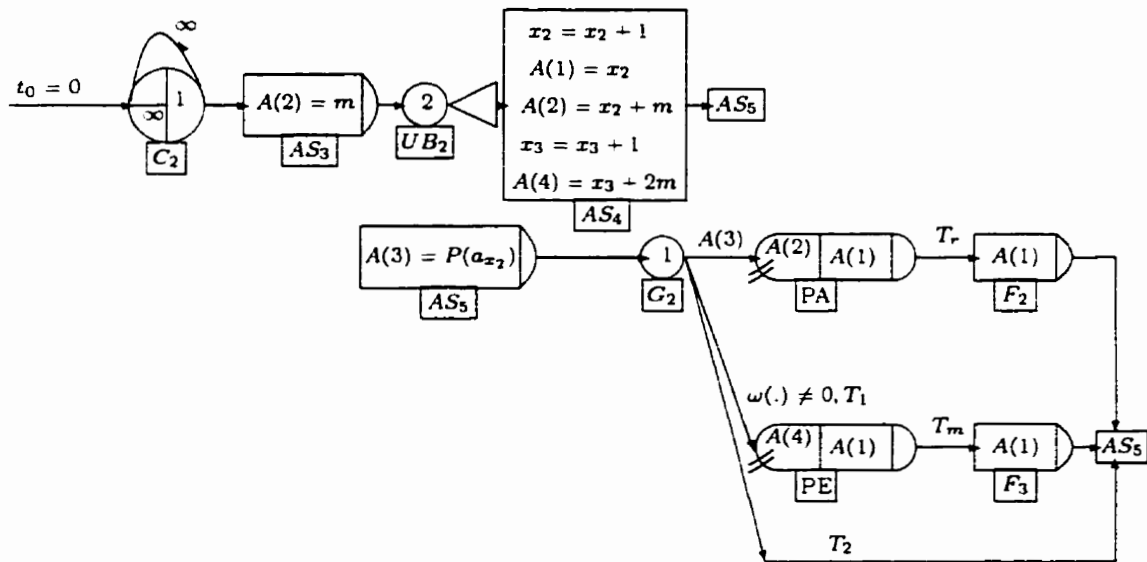
$$\sum_{k=1}^m TS_k = u^{-1}(.) \quad \text{et} \quad k = A(1) \quad (\text{B.1})$$

Après cette activité, la machine ( $MAC_i$ ) est libérée au noeud (F1) et devient disponible pour la production d'une autre pièce.

Par la suite, l'entité est dirigée au noeud ( $E_1$ ), où l'appel d'un sous-programme FORTRAN fait la mise à jour du stock, de la demande cumulative et du coût de stockage. Après le noeud ( $E_1$ ), l'entité est retournée au noeud ( $G_1$ ) pour un autre cycle de production.

## B.2 Pannes et maintenances préventives des machines

Lorsqu'une machine n'est pas opérationnelle, elle est soit en panne ou en maintenance préventive. Nous présentons à la figure B.2 le réseau qui modélise les pannes et les envois en entretien préventif des machines. Les arrivées des pannes et des maintenances préventives sont générées par une entité initialement créée au noeud ( $C_2$ ) au temps  $t_0 = 0$ . Cette entité est dirigée au noeud ( $AS_3$ ) où  $m$  est assigné à son attribut  $A(2)$ . L'entité est ensuite dirigée au noeud UNBATCH dénoté



**Figure B.2:** Pannes et maintenances des machines avec  $T_r = 1/\lambda_{21}^i$ ,

$$T_m = 1/\lambda_{31}^i, T_1 = 1/\omega_i(\cdot), T_2 = 0.1$$

par  $(UB_2)$  afin de pouvoir introduire  $m$  entités identiques dans le réseau. Les  $m$  entités sont dirigées successivement au noeud  $(AS_4)$  où les attributs  $A(1)$ ,  $A(2)$  et  $A(3)$  de chacune d'elles prennent les valeurs  $x_2$ ,  $x_2 + m$  et  $x_2 + 2m$ . Chaque entité est ensuite dirigée vers le noeud  $(AS_5)$  où la probabilité de panne  $P(a_{x_2}(\cdot))$  de la machine  $x_2$  est assignée à l'attribut  $A(3)$ . Quand l'entité arrive au noeud  $(G_2)$ , une branche sur trois doit être choisie en fonction de la probabilité de panne  $A(3)$  et du taux d'envoi en entretien préventif. Une des trois conditions suivantes doit être par conséquent valide.

1. Si  $A(3)$  ou  $P(a_{x_2}(\cdot))$  est telle qu'une panne de machine doit avoir lieu, alors l'entité est dirigée au noeud  $(PA)$  où la RESOURCE  $(MAC_{A(1)})$  est capturée. Si la machine correspondante était entrain de produire une pièce, cette opération est interrompue. L'activité de réparation de la machine commence aussitôt et



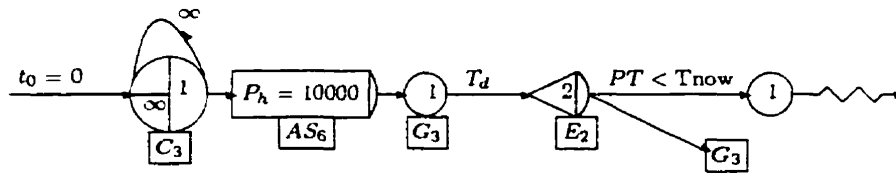


Figure B.3: Boucle de simulation avec  $T_d = d^{-1}$

de durée  $T_r$  unités de temps. Après l'activité de réparation,  $(MAC_{A(1)})$  est libéré par l'entité au noeud  $(F_3)$ . L'entité de panne de chaque machine est par la suite retournée au noeud  $(AS_5)$  pour la génération de la prochaine panne.

2. S'il n'y a pas panne de machine et que l'entretien préventif est envisagé (c'est-à-dire lorsque  $\omega(.) \neq 0$ ), alors l'entité doit capturer la RESOURCE  $(MAC_{A(1)})$  comme dans le cas précédent. Après l'activité de maintenance qui dure  $T_m$  unités de temps,  $(MAC_{A(1)})$  est libéré au noeud  $(F_4)$  et l'entité est retournée au noeud  $(AS_5)$  pour une autre génération.
3. S'il n'y a pas panne de machine et aucune activité de maintenance n'est planifiée, alors l'entité est retournée au noeud  $(AS_5)$  après  $T_2$  unités de temps. Notons que  $T_2$  est généralement négligeable par rapport au temps d'usage d'une pièce.

### B.3 Boucle de simulation

Cette boucle gère la demande des produits finis, fait la mise à jour du stock et du coût à chaque arrivée de demande et contrôle l'arrêt de la simulation. Le réseau correspondant est représenté à la figure B.3.

Une entité correspondant à une simulation est initialement créée au noeud  $(C_3)$

au temps  $t_0 = 0$ . Cette entité est dirigée au noeud ( $AS_5$ ) où le temps de production  $P_h$  (ou temps de simulation dans ce cas) prend la valeur 10000 unités de temps. L'entité est ensuite dirigée au noeud ( $G_3$ ) et par la suite au noeud ( $E_2$ ) après  $T_d$  unités de temps correspondant au temps d'interarrivées de la demande (c'est-à-dire que nous avons  $T_d = d^{-1}$ ). La demande cumulative, le stock et le coût sont révisés au noeud ( $E_2$ ) par l'appel d'un sous-programme FORTRAN. En retournant par la suite l'entité au noeud ( $G_3$ ), ce sous-programme est appelé à chaque  $T_d$  unités de temps. Si le temps de simulation courant  $T_{now}$  demeure inférieur à la durée totale de simulation  $P_h$ , alors l'entité est retournée au noeud  $G_3$ ; sinon il faut arrêter la simulation.

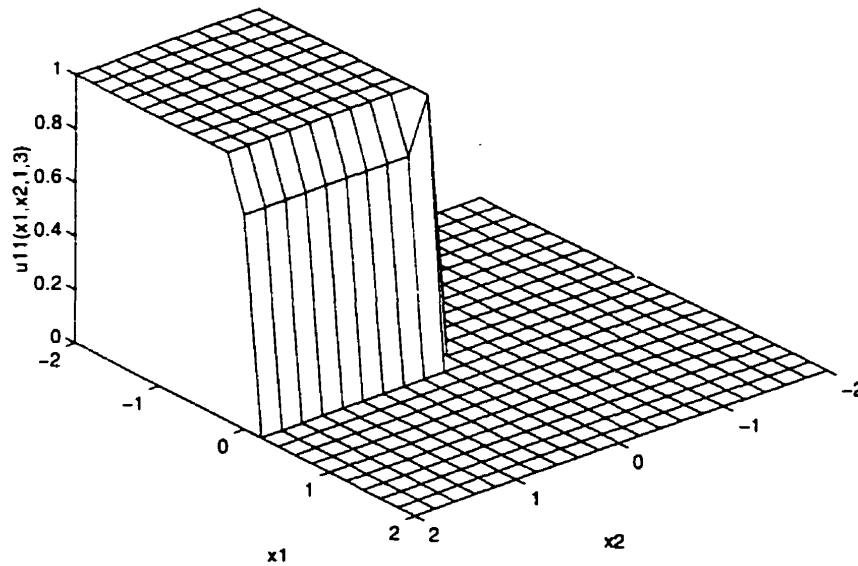
Le programme de simulation du système de production constitué de deux machines traitant un type de pièce est constitué des réseaux présentés aux figures B.1, B.2 et B.2. Nous avons présenté aux figures 4.13 et 4.14 les performances de ce système lorsqu'il est simulé sous deux types de loi de commande (loi de commande hiérarchisée et loi de commande issue de la méthode directe de résolution des équations d'HJB).

## Annexe C

# Systeme de production à deux machines traitant deux types de pièces

L'objet de cette annexe est de présenter brièvement la loi de commande issue d'une résolution numérique des conditions d'optimalité stochastiques du problème de planification de la production et de la maintenance préventive. Nous considérons le cas d'un système constitué de deux machines spécialisées dans une production simultanée de deux types de pièces. Comme dans l'annexe A, nous demandons au lecteur de se référer aux travaux de Boukas (1987) et (1997) pour plus de détails sur le problème de décision markovien associé à cet exemple.

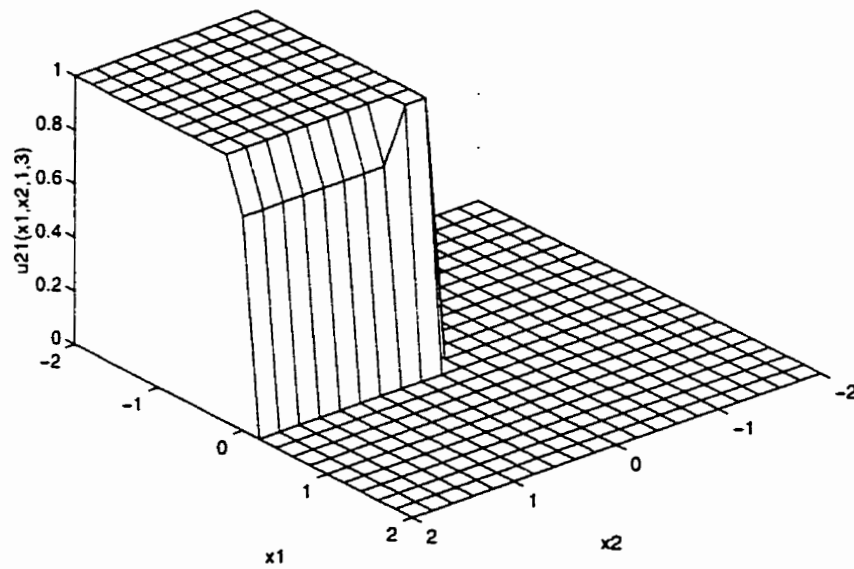
La résolution du problème de décision markovien associé au problème d'optimisation considéré dans cette annexe est difficile à cause de la dimension du problème. Nous avons cependant tenu à résoudre ce problème dans le but d'illustrer la réduction de complexité de résolution que nous offre l'approche de commande hiérarchisée. En utilisant les mêmes données qu'à la section 4.3, nous avons résolu numériquement les conditions d'optimalité relatives à ce problème à l'aide de l'algorithme d'itération de la commande. Nous présentons aux figures C.1



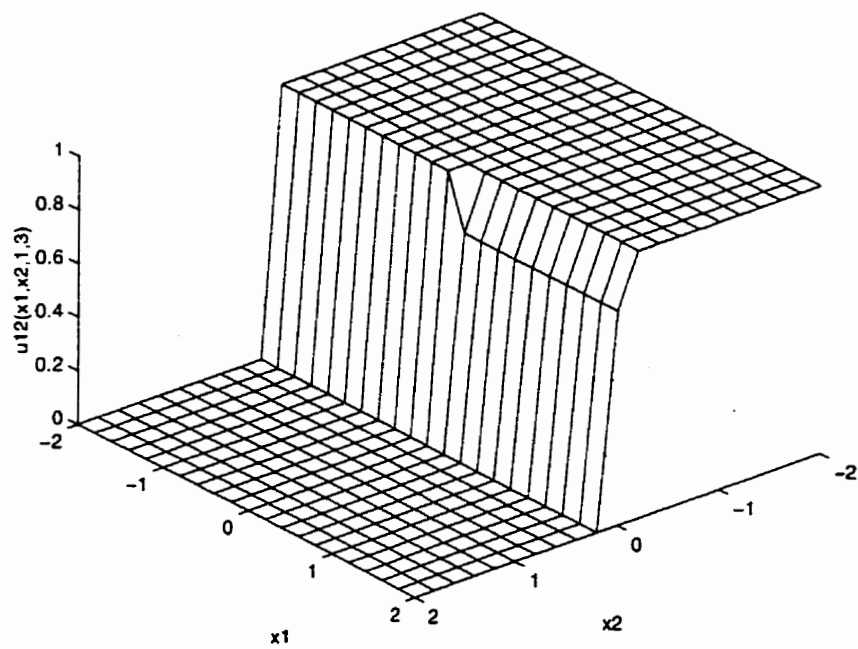
**Figure C.1:** Taux de production du produit 1 sur la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$

à C.14 la loi de commande obtenue, correspondant au mode où toutes les machines sont opérationnelles.

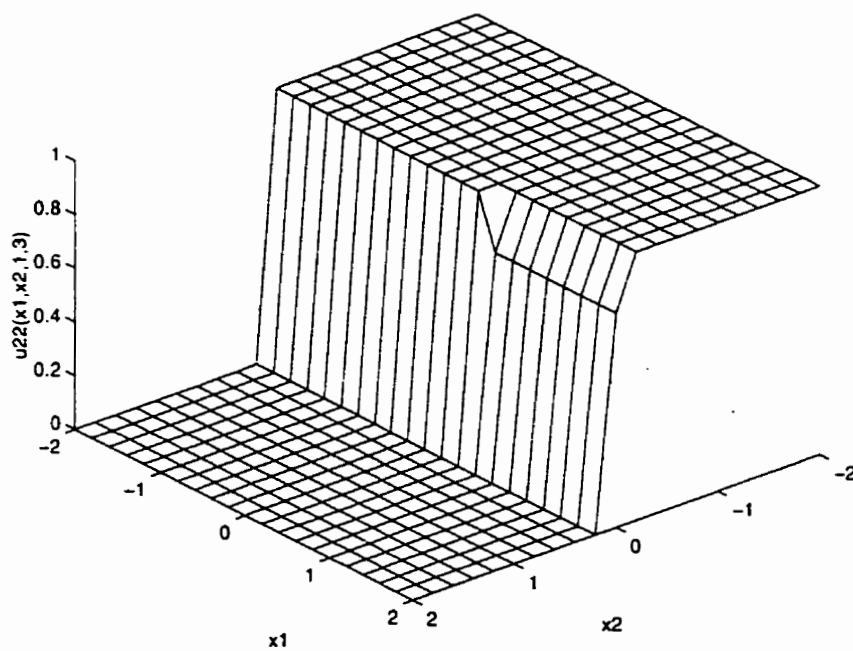
Pour représenter cette loi de commande, nous nous sommes limités à quelques combinaisons des variables d'état. Les combinaisons retenues nous permettent d'illustrer la dépendance de la loi de commande obtenue vis-à-vis des âges des machines. La loi de commande représentée par les figures C.1 à C.14 confirme le fait que les âges des machines influencent de façon significative les taux de production du système et de maintenance préventive des machines. L'exploitation des machines (production) et la stratégie de maintenance préventive des machines sont telles que la commande d'une machine jeune se distingue nettement de celle d'une machine vieille.



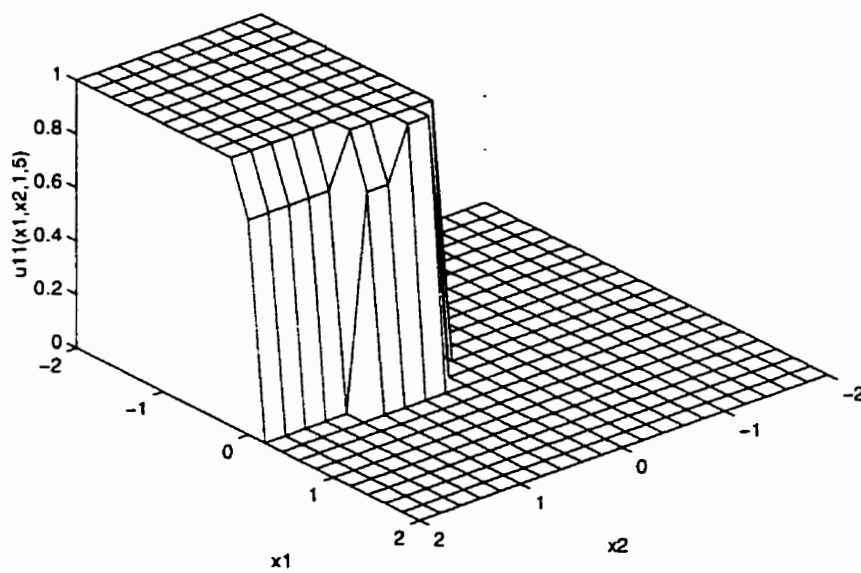
**Figure C.2:** Taux de production du produit 1 sur la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$



**Figure C.3:** Taux de production du produit 2 sur la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$

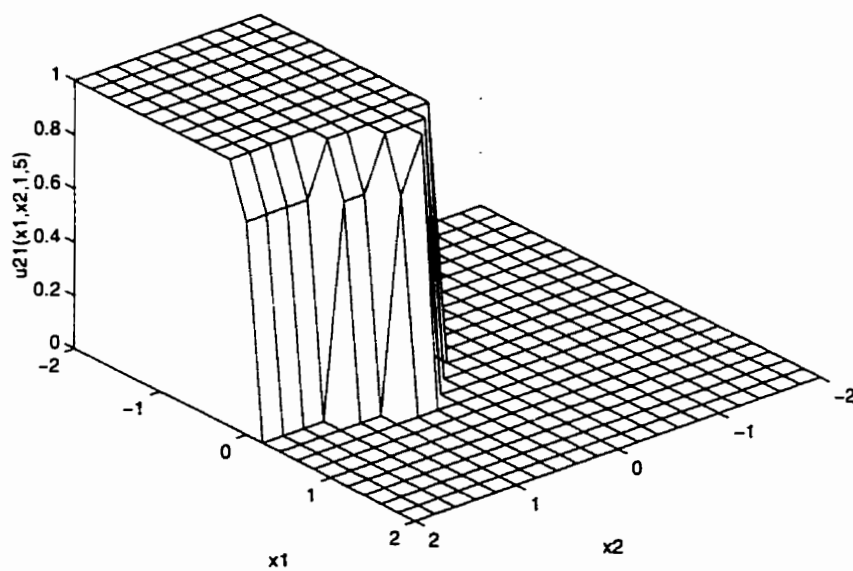


**Figure C.4:** Taux de production du produit 2 sur la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$

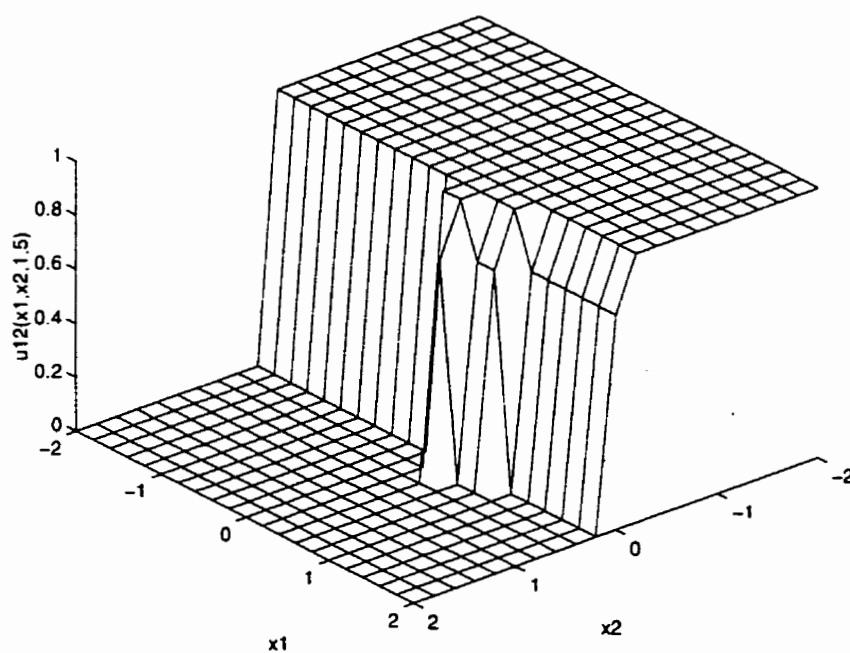


**Figure C.5:** Taux de production du produit 1 sur la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ .  $a_2 = 5$

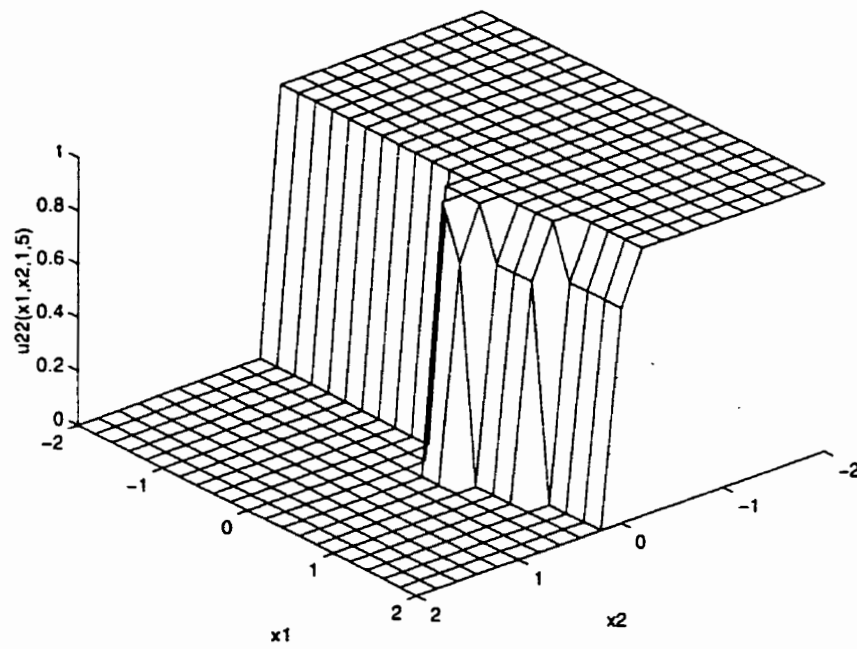




**Figure C.6:** Taux de production du produit 1 sur la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$



**Figure C.7:** Taux de production du produit 2 sur la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$



**Figure C.8:** Taux de production du produit 2 sur la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$

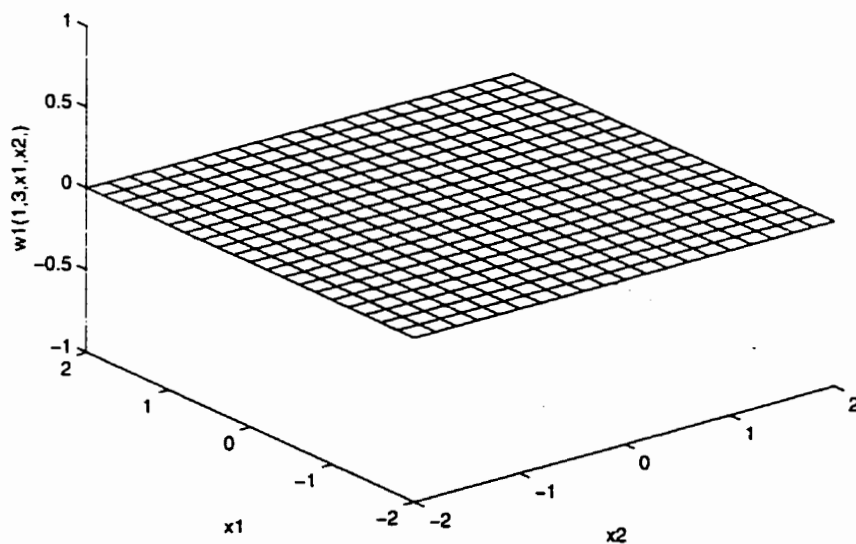


Figure C.9: Taux de maintenance de la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$

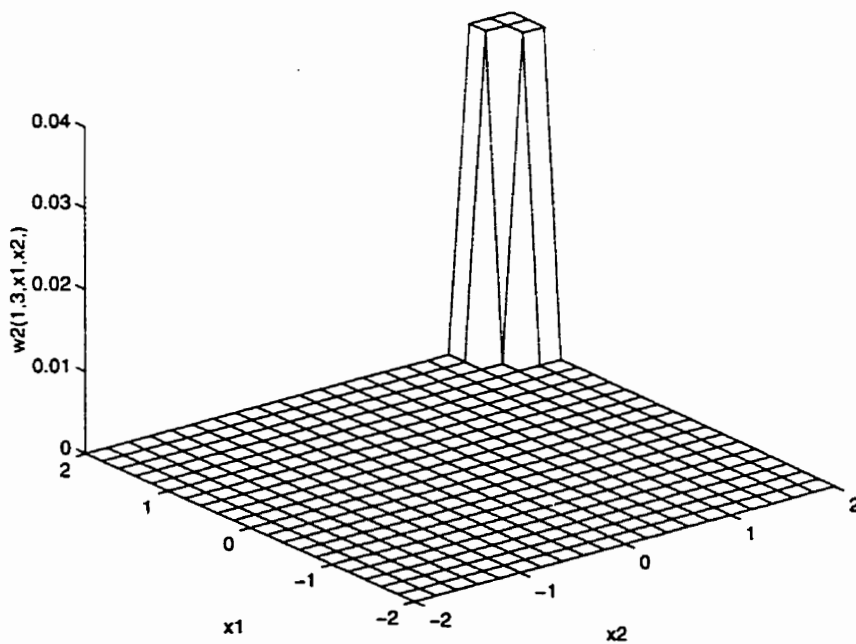


Figure C.10: Taux de maintenance de la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$

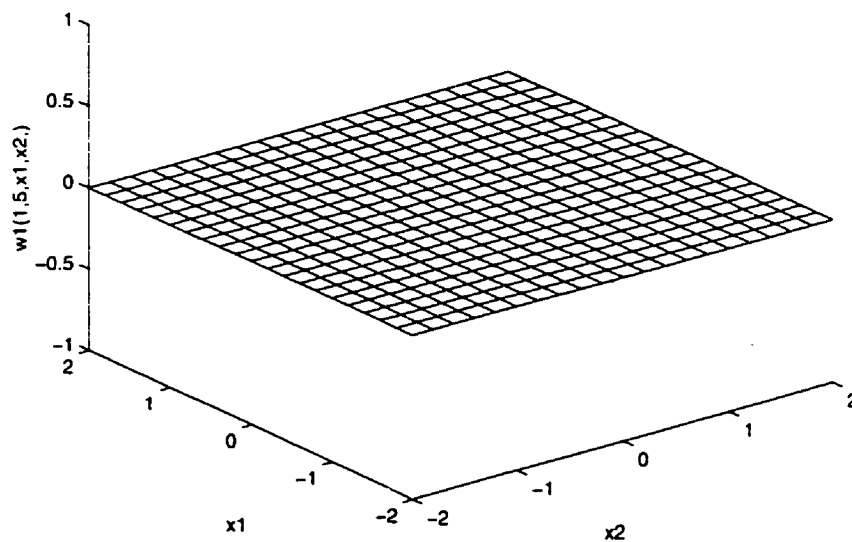


Figure C.11: Taux de maintenance de la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$

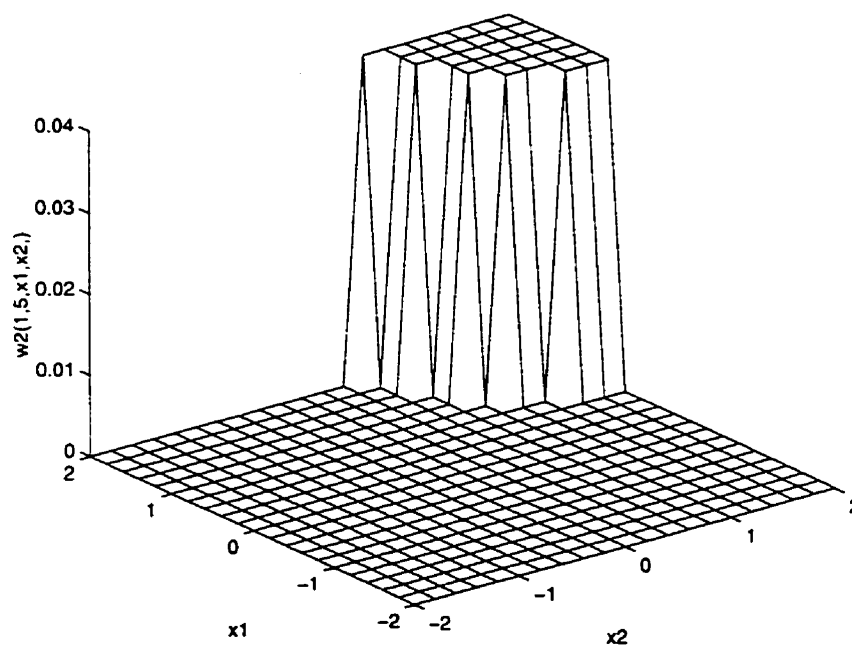


Figure C.12: Taux de maintenance de la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$

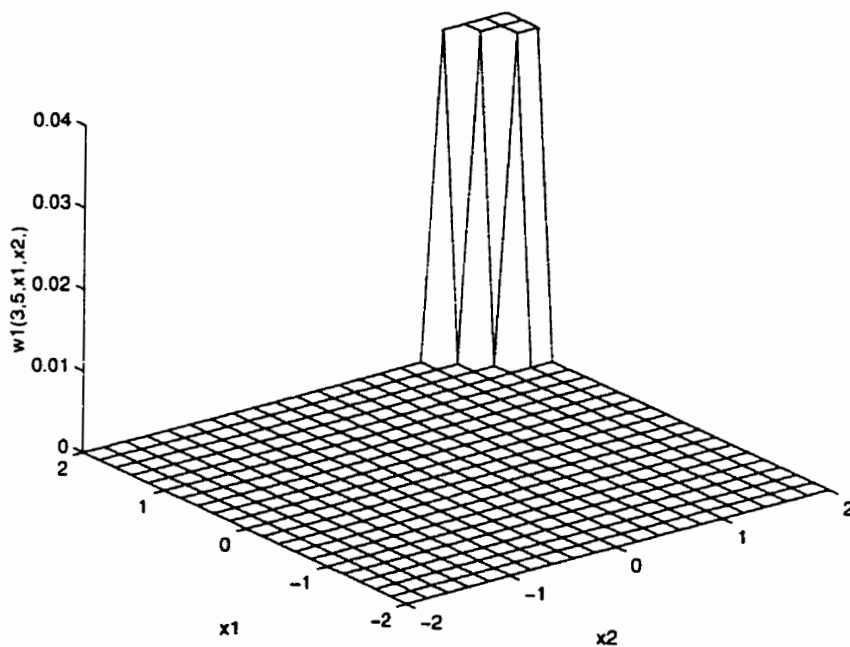


Figure C.13: Taux de maintenance de la machine  $M_1$  pour  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$

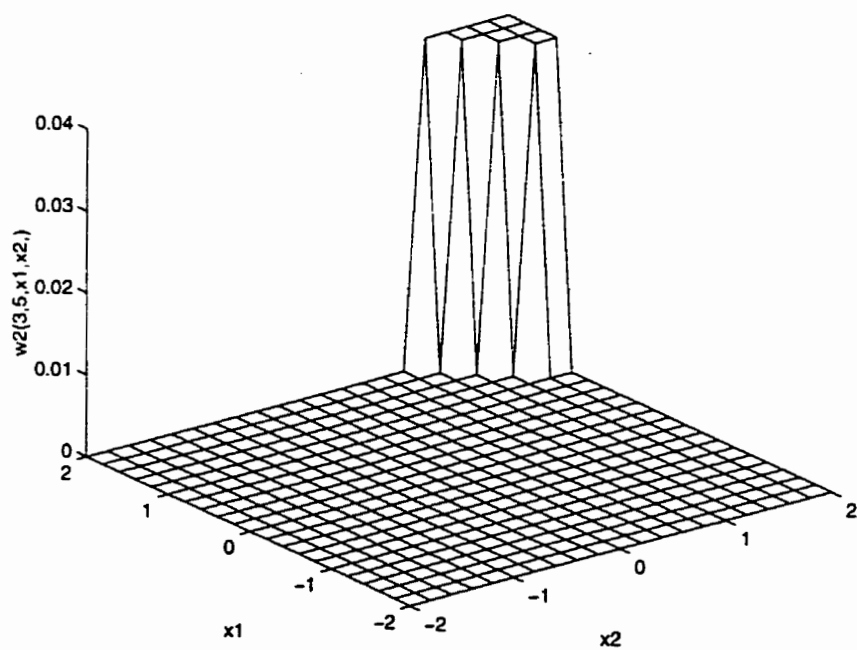
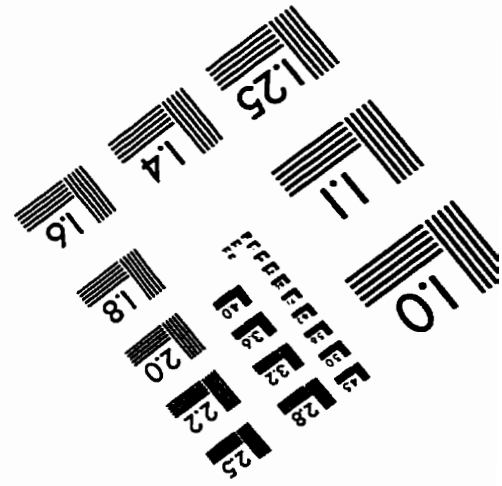
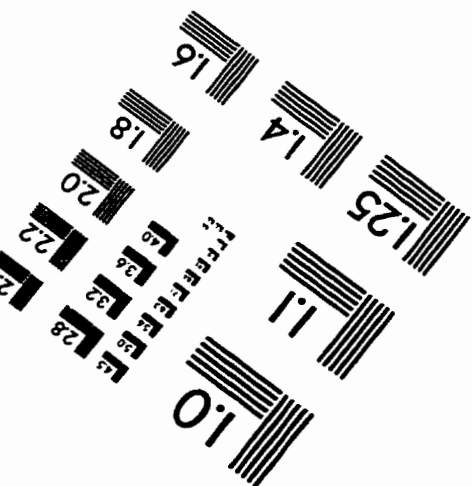
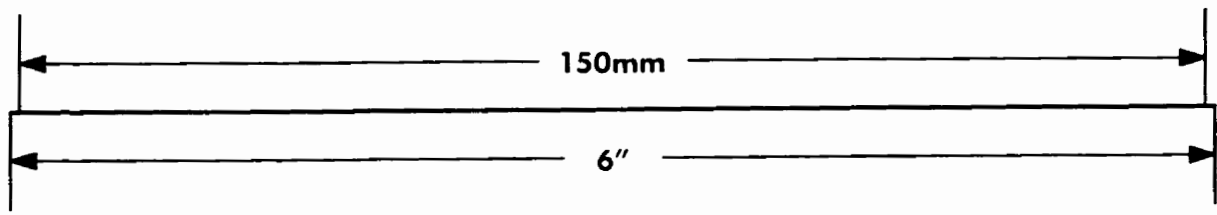
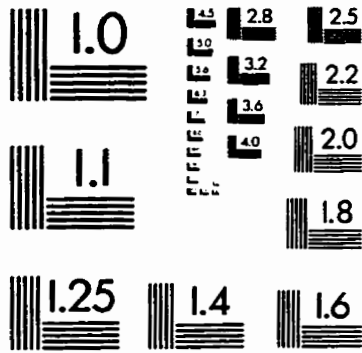
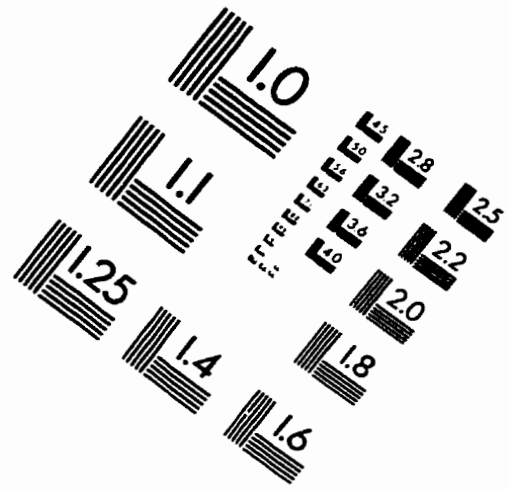
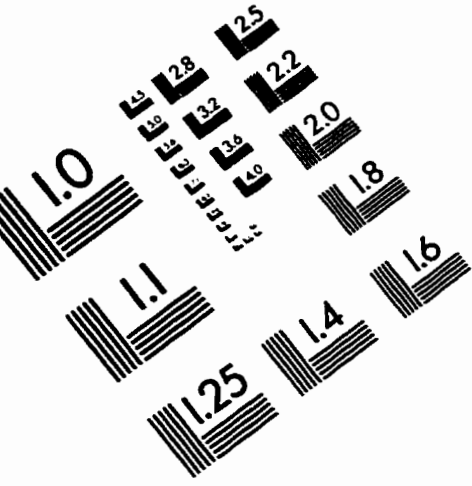


Figure C.14: Taux de maintenance de la machine  $M_2$  pour  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)




**APPLIED IMAGE, Inc**  
 1653 East Main Street  
 Rochester, NY 14609 USA  
 Phone: 716/482-0300  
 Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved