

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION NUMÉRIQUE  
DES ONDES SECONDAIRES DE FAVRE

JULIEN MAISONNIER  
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL,  
GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE CIVIL)

JUIN 1997



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

0-612-33155-5



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION NUMÉRIQUE  
DES ONDES SECONDAIRES DE FAVRE

présenté par: MAISONNIER Julien

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. ROUSSELLE Jean, Ph.D., président

M. MARCHE Claude, D.Sc.A., membre et directeur de recherche

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre

A mes parents.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'École Polytechnique de Montréal sous la direction du Professeur Claude Marche. Monsieur Marche m'a d'abord accueilli comme étudiant au sein de la section d'Hydraulique; puis m'a proposé ce sujet. Il m'a dirigé et encouragé tout au long de ma recherche. J'ai à coeur de lui témoigner ma profonde et respectueuse gratitude.

Je souhaite exprimer mes remerciements sincères au Professeur Jean Rousselle qui a bien voulu examiner ce mémoire et dont l'amical soutien m'a été précieux.

Le Professeur René Kahawita m'a éclairé de ses conseils avisés à plusieurs reprises et m'a fait bénéficier de son expérience. Je lui suis très vivement reconnaissant pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude.

## RÉSUMÉ

Les forts gradients de vitesse horizontale présents dans les écoulements de rupture de barrage, à la tête de l'intumescence, induisent une accélération verticale des particules qui est responsable de la formation des ondes secondaires de Favre. Contrairement aux équations de Saint Venant qui supposent une pression hydrostatique au sein de l'écoulement, les équations de Boussinesq tiennent compte de cette accélération au moyen de termes additionnels qui s'ajoutent aux équations horizontales de conservation de la quantité de mouvement.

L'objet de la présente étude est la mise au point d'un modèle numérique unidimensionnel capable de simuler la formation des ondes secondaires de Favre ainsi que l'influence des paramètres de l'écoulement sur l'évolution des amplitudes maximales et des longueurs d'ondes de ces ondulations lors de leur propagation.

La résolution des équations de Boussinesq est accomplie au moyen du schéma explicite en différences finies Two-Four, par correction semi-implicite de la solution des équations de Saint Venant avec une approximation des termes additionnels de Boussinesq.

La comparaison des résultats du modèle Two-Four Boussinesq avec ceux obtenus avec le schéma de MacCormack, appliqué à la résolution des équations de Saint Venant, prouve la validité de l'approximation proposée pour une discrétisation du terme de pente du canal pour le schéma Two-Four. Elle souligne aussi le bon comportement du modèle dans diverses conditions d'écoulements permanents et non permanents.

Bien que l'amplitude maximale des ondes  $y$  soit toujours sous-évaluée, le modèle Two-Four Boussinesq simule une dynamique d'écoulement de laquelle résulte une évolution des caractéristiques des ondes en accord avec celle qui a été mise en évidence par les expériences de Favre. Les longueurs d'onde des ondulations secondaires générées numériquement sont fidèles à celles du diagramme de Favre.

Par ailleurs, l'extension du modèle pour une résolution des équations bidimensionnelles de Boussinesq permet l'étude d'écoulements dans des canaux de géométrie plus complexe: canaux de section rectangulaire et de largeur variable ainsi que canaux de section trapézoïdale.

## ABSTRACT

The strong gradients in horizontal velocity that occur in dam break flows, or at the front in positive surge waves, induce vertical accelerations of the water particles which is responsible for the formation of Favre's secondary water waves. Contrary to the Saint Venant equations which assume hydrostatic pressure within the flow, the Boussinesq equations partially account for these vertical accelerations through additional terms added to the horizontal momentum equation.

The purpose of the present study is to develop a one dimensional numerical model that is able to simulate the formation of Favre's secondary water waves as well as the influence of the flow parameters on the evolution of the maximum amplitude and wavelength of the undulations, during their propagation.

The Boussinesq equations are solved with the explicit finite difference Two-Four scheme, where the solution to the Saint Venant equations is corrected in a semi-implicit way by an approximation of the additional Boussinesq terms.

The comparison between the solutions from the Two-Four Boussinesq model and the MacCormack scheme, applied to the resolution of the Saint Venant equations, supports the validity of the discretisation of the channel bottom slope term for the Two-Four scheme. It also indicates the stable behavior of the model under different steady and unsteady flow conditions.

Even though the maximum amplitude of the waves is always underestimated, the Two-Four Boussinesq model simulates the dynamics of the flow from which result an

evolution of the wave characteristics that are in agreement with the one suggested by Favre's experiments. The numerically generated wavelengths of the secondary undulations are consistent with those presented in Favre's diagram.

Finally the extension of the model for the resolution of the two dimensional Boussinesq equations allows the study of flows in channels with a more complex geometry: channels with rectangular cross sections and varying widths and channels with trapezoidal cross sections.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> .....	iv
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	v
<b>RÉSUMÉ</b> .....	vi
<b>ABSTRACT</b> .....	viii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	x
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	xiv
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS</b> .....	xvi
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
<b>CHAPITRE I : REVUE DE LITTÉRATURE</b> .....	4
<b>CHAPITRE II : ÉQUATIONS DE BOUSSINESQ</b> .....	7
2.1 Hypothèses de démonstration .....	8
2.2 Démonstration des équations bidimensionnelles de Boussinesq .....	8
2.2.1 Équation de continuité .....	9
2.2.2 Équation de quantité de mouvement selon z .....	11
2.2.3 Équation de quantité de mouvement selon x .....	12
2.2.4 Équation de quantité de mouvement selon y .....	14
2.3 Équations générales bidimensionnelles de Boussinesq .....	14
2.3.1 Termes de frottement et de pente du canal .....	14
2.4 Équations générales unidimensionnelles de Boussinesq .....	15
2.4.1 Forme compacte .....	15
2.4.2 Forme développée .....	16
2.5 Changement de notation .....	16
<b>CHAPITRE III : DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS</b> .....	18
3.1 Discrétisation des équations de Saint Venant-Schéma Two-Four .....	19

3.1.1	Prédicteur avant.....	19
3.1.1.1	Équation de continuité.....	19
3.1.1.2	Équation de quantité de mouvement .....	20
3.1.2	Correcteur.....	20
3.1.2.1	Équation de continuité.....	20
3.1.2.2	Équation de quantité de mouvement .....	21
3.1.3	Terme de pente du canal .....	21
3.1.4	Terme de viscosité turbulente .....	24
3.1.5	Domaine de calcul du schéma Two-Four et frontières .....	25
3.1.6	Stabilité du schéma Two-Four .....	27
3.1.7	Validation du schéma Two-Four avec le schéma de MacCormack.....	27
3.1.7.1	Modélisation de l'onde de rupture de barrage .....	27
3.1.7.2	Courbe de remous pour un canal horizontal comportant un seuil ....	30
3.1.7.3	Courbe de remous dans un canal à pente constante avec frottement	32
3.2	Méthodes de résolution des équations de Boussinesq .....	34
3.3	Détail de la discrétisation des termes de Boussinesq.....	36
3.4	Validation du schéma Two-Four Boussinesq .....	37
	<b>CHAPITRE IV: SIMULATIONS NUMÉRIQUES</b> .....	41
4.1	Modélisation des ondes de Favre dans un cas parfait de rupture de barrage .....	41
4.1.1	Résultats bruts de simulation .....	42
4.1.2	Viscosité turbulente .....	44
4.1.3	Viscosité artificielle .....	45
4.1.3.1	Flux Corrected Transport .....	45
4.1.3.2	Two-Four Saint Venant et FCT .....	46
4.1.3.3	Two-Four Boussinesq et FCT.....	47
4.2	Simulations numériques et expériences de Favre.....	50
4.2.1	Nomenclature de Favre .....	50
4.2.2	Débit spécifique initial nul.....	51

4.2.3 Influence du débit spécifique constant.....	53
4.2.4 Diagrammes de Favre .....	54
4.3 Influence du terme de pente du canal .....	57
4.4 Influence de la rugosité du canal sur les ondes de Favre.....	59
4.4.1 Diagramme de Favre d'amplitude relative maximale.....	62
4.4.2 Diagramme de Favre de longueur d'onde relative .....	64
4.5 Ordre de grandeur des termes de Boussinesq et précision requise du schéma .....	66
4.5.1 Valeur relative des six termes .....	66
4.5.2 Ordre de précision du schéma numérique.....	68
<b>CHAPITRE V: MODÉLISATION BIDIMENSIONNELLE .....</b>	<b>71</b>
5.1 Schéma Two-Four et équations de Saint Venant.....	72
5.1.1 Lx Prédicteur Arrière .....	73
5.1.1.1 Équation de continuité selon x, prédicteur .....	73
5.1.1.2 Équations de quantité de mouvement selon x, prédicteur .....	73
5.1.2 Lx Correcteur Avant .....	74
5.1.2.1 Équation de continuité selon x, correcteur .....	74
5.1.2.2 Équations de quantité de mouvement selon x, correcteur .....	74
5.1.3 Ly Prédicteur Arrière .....	75
5.1.3.1 Équation de continuité selon y, prédicteur .....	75
5.1.3.2 Équations de quantité de mouvement selon y, prédicteur .....	75
5.1.4 Ly Correcteur Avant.....	76
5.1.4.1 Équation de continuité selon y, correcteur .....	76
5.1.4.2 Équations de quantité de mouvement selon y, correcteur .....	76
5.1.5 Alternance des opérateurs .....	77
5.1.6 Condition de stabilité .....	77
5.1.7 Conditions aux frontières.....	78
5.1.7.1 Terme de viscosité turbulente $\varepsilon$ nul.....	79

5.1.7.2 Terme de viscosité turbulente $\varepsilon$ non nul .....	79
5.2 Validation du schéma Two-Four Saint Venant .....	80
5.3 Schéma Two-Four et équations de Boussinesq .....	84
5.3.1 Simplification des équations de Boussinesq .....	84
5.3.2 Méthode de résolution des équations de Boussinesq .....	84
5.3.3 Viscosité artificielle FCT .....	85
5.3.4 Validation du schéma Two-Four Boussinesq .....	85
5.4 Simulation de la propagation des ondes de Favre en canal de section variable .....	86
5.4.1 Élargissement graduel de la section rectangulaire du canal .....	86
5.4.1 Rétrécissement graduel de la section rectangulaire du canal .....	90
5.5 Propagation des ondes de Favre en canal trapézoïdal .....	94
<b>CONCLUSION</b> .....	102
<b>RÉFÉRENCES</b> .....	105

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1: Discrétisation du terme de pente .....	23
Figure 3.2: Domaine de calcul du schéma Two-Four.....	26
Figure 3.3: Modélisation de l'onde de rupture de barrage.....	28
Figure 3.4: Détail de la tête de l'onde positive .....	29
Figure 3.5: Courbes de remous au passage d'un seuil.....	30
Figure 3.6: Détail des courbes de remous au passage d'un seuil.....	31
Figure 3.7: Courbes de remous de type M2.....	32
Figure 3.8: Description de la méthode de résolution des équations de Boussinesq .....	35
Figure 3.9: Courbes de remous au passage d'un seuil.....	38
Figure 3.10: Détail des courbes de remous au passage du seuil .....	39
Figure 3.11: Courbes de remous du type M2.....	40
Figure 4.1: Conditions initiales de simulation.....	41
Figure 4.2: Conditions initiales du schéma numérique .....	42
Figure 4.3: Ondes de rupture de barrage et ondes de Favre.....	43
Figure 4.4: Influence de la viscosité FCT sur la solution des équations de St Venant.....	47
Figure 4.5: Ondes de rupture de barrage et ondes de Favre, viscosité FCT .....	48
Figure 4.6: Comparaison des profils de la surface libre avec et sans viscosité FCT.....	49
Figure 4.7: Nomenclature de Favre .....	50
Figure 4.8: Formation des ondes de Favre.....	52
Figure 4.9: Détail de l'onde positive .....	53
Figure 4.10: Influence du débit spécifique initial sur les ondes de Favre.....	54
Figure 4.11: Diagramme de Favre d'amplitude maximale des ondes secondaires.....	55
Figure 4.12: Diagramme de Favre, longueurs d'ondes.....	56
Figure 4.13: Évolution de l'amplitude des ondes secondaires au passage d'un seuil .....	58

Figure 4.14: Détail des courbes de remous au passage du seuil .....	59
Figure 4.15: Courbes de remous pour différentes valeurs de coefficient de Manning .60	
Figure 4.16: Détail des têtes des ondes positives .....	61
Figure 4.17: Diagramme de Favre et influence du coefficient de Manning .....	62
Figure 4.18: Diagramme de Favre et influence du coefficient de Manning .....	63
Figure 4.19: Diagramme de Favre de longueur d'onde et influence du Manning .....	65
Figure 4.20: Amplitudes maximales relatives des ondes en fonction du Manning .....	66
Figure 4.21: Termes prépondérants des équations de Boussinesq.....	67
Figure 4.22: Modélisation des ondes secondaires avec le schéma de MacCormack....	69
Figure 5.1: Frontière étanche, viscosité turbulente nulle.....	79
Figure 5.2: Frontière étanche, viscosité turbulente non nulle.....	80
Figure 5.3: Simulation de rupture, Schéma de MacCormack.....	81
Figure 5.4: Simulation de rupture, Schéma Two-Four .....	82
Figure 5.5: Champ de vitesses, Schéma Two-Four .....	83
Figure 5.6: Géométrie du premier domaine de section variable.....	87
Figure 5.7: Évolution du front d'ondes au cours de la propagation .....	88
Figure 5.8: Front d'ondes dans le tronçon de section variable .....	90
Figure 5.9: Géométrie du deuxième domaine de section variable.....	91
Figure 5.10: Évolution du profil de la tête de l'intumescence.....	92
Figure 5.11: Ondes dans le tronçon de section variable .....	93
Figure 5.12: Évolution de la bathymétrie du canal .....	94
Figure 5.13: Ondes de Favre dans le tronçon du canal de section rectangulaire .....	95
Figure 5.14: Influence de la bathymétrie sur la première ondulation secondaire .....	96
Figure 5.15: Train d'ondes de Favre après passage de la zone de transition.....	97
Figure 5.16: Ondes de Favre en canal trapézoïdal.....	98
Figure 5.17: Détail de la troisième ondulation secondaire .....	99
Figure 5.18: Champ de vitesses au niveau de la troisième ondulation .....	100

**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

- $C_n$  : Nombre de Courant
- $dt$  : Pas de temps
- $dx$  : Pas d'espace dans la direction de l'axe des  $x$
- $dy$  : Pas d'espace dans la direction de l'axe des  $y$
- $D$  : Variable de calcul (méthode du Flux Corrected Transport)
- $e$  : Longueur d'onde (nomenclature de Favre)
- $f$  : Profondeur d'eau (méthode du Flux Corrected Transport)
- $\bar{f}$  : Profondeur d'eau après ajout de diffusion artificielle (méthode du Flux Corrected Transport)
- $g$  : accélération gravitationnelle
- $h$  : Profondeur d'eau
- $h'$  : Hauteur moyenne de l'intumescence (nomenclature de Favre)
- $h^*$  : Hauteur maximale des ondes de Favre (nomenclature de Favre)
- $H$  : Variable de conservation (i.e. profondeur d'eau)
- $H$  : Profondeur initiale (nomenclature de Favre)
- $H_c$  : Profondeur critique
- $H_n$  : Profondeur normale
- $L_x$  : Opérateur de différences finies dans la direction de l'axe des  $x$
- $L_y$  : Opérateur de différences finies dans la direction de l'axe des  $y$
- $n$  : Coefficient de Manning
- $P$  : Pression
- $S$  : Variable de calcul (méthode du Flux Corrected Transport)
- $S_0$  : Pente du fond du canal

- $\bar{S}_0$  : Pente moyenne du fond du canal
- $S_f$  : Pente de la ligne d'énergie
- $S_x$  : Terme source selon la direction de l'axe des x
- $S_y$  : Terme source selon la direction de l'axe des y
- $t$  : Temps
- $u$  : Vitesse d'écoulement selon la direction de l'axe des x
- $U$  : Variable de conservation (i.e. débit unitaire selon la direction de l'axe des x)
- $v$  : Vitesse d'écoulement selon la direction de l'axe des y
- $w$  : Vitesse d'écoulement selon la direction de l'axe des z
- $V$  : Variable de conservation (i.e. débit unitaire selon la direction de l'axe des y)
- $x$  : Coordonnée dans l'espace
- $y$  : Coordonnée dans l'espace
- $z$  : Coordonnée dans l'espace
- $Z$  : Élévation du fond du canal
- 
- $\beta$  : Somme des termes de Boussinesq
- $\Delta$  : Opérateur de différences finies
- $\Delta t$  : Pas de temps
- $\Delta x$  : Pas d'espace dans la direction de l'axe des x
- $\Delta y$  : Pas d'espace dans la direction de l'axe des y
- $\varepsilon$  : Coefficient de viscosité turbulente
- $\kappa$  : Coefficient de diffusion artificielle (méthode du Flux Corrected Transport)
- $\rho$  : Masse volumique du fluide

**Exposants**

- 0 : Valeur au temps initial
- c : Valeur du correcteur
- c1 : Valeur du correcteur avant correction avec les termes de Boussinesq
- c2 : Valeur du correcteur après correction avec les termes de Boussinesq
- k : Point de calcul dans le temps
- p : Valeur du prédicteur
- p1 : Valeur du prédicteur avant correction avec les termes de Boussinesq
- p2 : Valeur du prédicteur après correction avec les termes de Boussinesq

**Indices**

- f : Fait référence au fond du canal
- i : Point de calcul sur l'axe des x
- j : Point de calcul sur l'axe des y
- s : Fait référence à la surface libre
- x : Fait référence à la direction parallèle à l'axe des x
- y : Fait référence à la direction parallèle à l'axe des y

## INTRODUCTION

La modélisation de la formation des intumescences dans les canaux, à la suite d'une rupture de barrage, et l'étude de leur propagation repose généralement sur les équations non permanentes d'écoulement à surface libre de Saint Venant. Ces dernières supposent que la pression est hydrostatique au sein de l'écoulement. Or cette hypothèse cesse d'être valide dans les régions, comme à la tête de l'intumescence, dans lesquelles les forts gradients de vitesse horizontale induisent une accélération verticale des particules.

Les équations de Boussinesq (1877) permettent de tenir compte de cette accélération au moyen de termes additionnels qui s'ajoutent aux équations horizontales de quantité de mouvement. Lorsque la courbure des lignes de courant devient plus faible, ces termes de Boussinesq deviennent négligeables et les équations se réduisent à celles de Saint Venant.

En fonction des caractéristiques de l'écoulement (hauteur relative de l'intumescence par rapport à la profondeur d'eau initiale, vitesse initiale de l'écoulement permanent, rugosité du canal) cette accélération verticale peut générer des ondes secondaires en tête d'intumescence positive (d'amont ou d'aval) qui se superposent au profil moyen de l'intumescence. Elle portent le nom d'ondes de Favre: Henry Favre (1935) fut le premier à les étudier expérimentalement.

Les fluctuations de l'élévation de la surface libre (jusqu'à deux fois supérieures à la hauteur moyenne de l'intumescence) engendrées par ce phénomène ondulatoire ont une importance primordiale sur les estimations de l'impact d'une rupture de barrage en terme de zones inondables. Il en est de même des variations de vitesse qui peuvent

jouer un rôle important sur les forces de cisaillement à l'origine du transport de sédiments et de l'érosion des berges.

Cette étude a donc pour objet de développer un modèle numérique unidimensionnel capable de simuler la formation des ondes de Favre à la tête des intumescences, générées par une rupture de barrage, ainsi que leur comportement lors de leur propagation vers l'aval.

Une forme générale des équations de Boussinesq est employée afin de permettre une estimation de l'influence des différents termes qui la composent.

Le schéma explicite Two-Four, sur lequel est fondé le modèle, est étudié dans un premier temps avec les équations de Saint Venant. Comme l'incorporation du terme de pente du canal fait défaut dans la littérature pour l'application du schéma à la résolution des équations de Saint Venant, une approximation de la discrétisation de ce terme est proposée, approximation qui sera soumise à validation au fil de la présente étude. Le schéma est ensuite modifié afin de pouvoir tenir compte des termes additionnels de Boussinesq.

L'étude réalisée dans un cadre unidimensionnel (canal rectangulaire de section uniforme) est finalement étendue au domaine bidimensionnel pour tenter une brève exploration de l'influence de la variation de géométrie des canaux sur le comportement des ondes de Favre.

Le premier chapitre de ce mémoire propose une revue de littérature sommaire concernant les ondes de Favre et les équations de Boussinesq. Le deuxième chapitre est composé d'une démonstration des équations de Boussinesq à deux dimensions pour un canal horizontal dans lequel le frottement est négligé. Les termes de

frottement et de pente du canal sont ensuite pris en compte. Les équations sont finalement simplifiées dans le but d'obtenir une expression à une dimension, puis adaptées aux variables de profondeur d'eau et de débit spécifique unitaire choisies pour leur résolution. Dans le troisième chapitre, la discrétisation des équations de Saint Venant par le schéma Two-Four est abordée ainsi que l'extension du schéma à la résolution des équations de Boussinesq. Quelques exemples de validation pour des écoulements permanents sont aussi rapportés. Le quatrième chapitre expose les résultats et commentaires des simulations numériques. Enfin, le cinquième chapitre rend compte des efforts accomplis pour une extension du modèle au cas bidimensionnel.

## CHAPITRE I: REVUE DE LITTÉRATURE

L'étude théorique des ondes de translation dans les canaux réalisée par Favre (1935), qui complète les travaux de Boussinesq (1877), fut validée par une importante campagne d'essais menée au Laboratoire de L'École Polytechnique Fédérale de Zurich. En particulier, une analyse poussée des ondulations constituant la tête d'une intumescence positive, dans différentes conditions d'écoulement, permit à Favre de caractériser leurs amplitudes maximales et longueurs d'ondes sous forme de graphes (en fonction de la profondeur d'eau moyenne au niveau de l'intumescence). Selon lui, le rapport de la hauteur moyenne de l'intumescence à la profondeur initiale permet de distinguer deux domaines: celui des ondes déferlantes et celui des ondes non déferlantes. Dans le cas des ondes non déferlantes, à mesure que l'intumescence se propage, les ondes se forment les unes à la suite des autres pour tendre chacune, progressivement, vers un état stable caractéristique des conditions d'écoulement.

Abbott et Rodenhuis (1972) ont simulé numériquement la formation des ressauts hydrauliques ondulatoires à l'aide d'un modèle implicite aux différences finies basé sur une formulation simplifiée des équations de Boussinesq. Les auteurs constatent une forte sensibilité du modèle aux erreurs de troncature. Une méthode de filtrage est donc employée afin de déterminer, de façon précise, les longueurs d'ondes et les amplitudes des ondulations secondaires. Les résultats semblent être en étroite corrélation avec ceux obtenus expérimentalement par Favre. Cependant, Abbott et Rodenhuis considèrent que la valeur critique de hauteur de l'intumescence, par rapport à la profondeur initiale de l'écoulement, ne permet pas de distinguer un domaine de déferlement d'un domaine de non déferlement des ondes. Cette valeur critique ne peut

donc pas constituer, selon eux, un critère de stabilité. Ainsi, tout ressaut ondulatoire doit finir par déferler.

El Kayloubi (1994) a présenté un modèle numérique, fondé sur les équations simplifiées de Boussinesq, adapté à la simulation des écoulements unidimensionnels en canal rectangulaire à fond horizontal. Son étude numérique et expérimentale des ondes secondaires de Favre consécutives à la rupture d'un barrage souligne l'importance de la prise compte de l'hypothèse de Boussinesq pour l'obtention d'une estimation réaliste des profondeurs d'eau au niveau de l'onde positive.

Prüser et Zielke (1994) ont été les premiers, au cours d'une étude théorique et numérique validée par des expériences en laboratoire (Treske, 1994), à analyser l'influence de la profondeur d'eau sur le comportement des ondes de Favre. L'amplitude des ondes sur les cotés d'un canal trapézoïdal se révèle être supérieure à celles que l'on peut observer en son centre. Le modèle (BOWAM) utilisé repose sur une discrétisation implicite en différences finies d'équations de Boussinesq simplifiées, obtenues par une approche inspirée de celle de Peregrine (1967). Les auteurs ne considèrent pas les phénomènes liés au développement et à l'altération des ondes de Favre lors de leur propagation le long des canaux. Ainsi, aucune observation expérimentale ne permet de vérifier l'hypothèse de Abbott et Rodenhuis (1972) sur l'instabilité des ondes, hypothèse formulée selon des considérations reposant sur les résultats des simulations numériques de ces derniers. Cependant, les données expérimentales de Treske (1994) confirment les résultats obtenus par Favre.

Ces différentes études représentent l'essentiel des recherches expérimentales menées sur les ondes de Favre ou sur les équations de Boussinesq appliquées à la simulation des ondulations secondaires.

Les travaux de ces dernières années, se rapportant aux équations de Boussinesq, concernent davantage les applications liées à l'étude de la propagation de la houle au voisinage des côtes. Basco (1987) fait état des différentes approches existantes pour leur dérivation ainsi que des méthodes connues pour leur résolution numérique dans son ouvrage consacré à la modélisation numérique des écoulements à surface libre rapidement variés.

Dernièrement, Nwogu (1993) a proposé un nouveau système d'équations de Boussinesq issues d'une dérivation fondée sur l'approche conservatrice. Le schéma implicite employé semble bien reproduire le comportement des ondes lors de leur propagation en profondeur intermédiaire et en faible profondeur.

Gharangik et Chaudhry (1991), dans une étude numérique et expérimentale du ressaut hydraulique, comparent les résultats de simulations obtenus par deux schémas numériques explicites, le schéma de MacCormack pour la résolution des équations de Saint Venant et le schéma Two-Four appliqué aux équations de Saint Venant et de Boussinesq. Les termes permanents de Boussinesq ne semblent pas affecter de façon significative la nature de la solution.

## CHAPITRE II: ÉQUATIONS DE BOUSSINESQ

Les expressions des équations de Boussinesq sont nombreuses dans la littérature. Leur forme varie suivant la méthode de dérivation employée pour leur obtention et l'ordre des termes que l'on choisit de considérer.

Basco (1987) présente trois méthodes:

- le développement asymptotique utilisé par Peregrine (1967),
- le principe de variation,
- la méthode conservatrice.

Selon Basco, la méthode conservatrice présente l'avantage d'être la simple et de reposer sur un nombre d'approximations restreint. La solution des équations sous cette forme est plus générale dans le sens où elle permet d'obtenir une description des écoulements continus ou discontinus (c'est-à-dire comportant des ressauts hydrauliques, des ondes de chocs...).

Chaudhry (1993) propose une démonstration des équations unidimensionnelles de Boussinesq sous forme conservatrice aisément généralisable au cas bidimensionnel. Dans sa démonstration, les variables sont la profondeur d'eau  $h$  et les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse moyenne en fonction de la profondeur. Après dérivation, les équations seront légèrement modifiées afin de remplacer les variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  par  $H$ , qui représente toujours la profondeur d'eau,  $U$  et  $V$  (désignant le débit spécifique unitaire dans les directions  $x$  et  $y$ ).

## 2.1 Hypothèses de démonstration

La démonstration suppose qu'il s'agit d'un canal à fond plat, sans frottement. Les vitesses dans les directions x et y, respectivement  $u(x, y, t)$  et  $v(x, y, t)$ , sont uniformes sur la profondeur de l'écoulement. Il s'agit de la vitesse moyenne sur la profondeur. En revanche, l'hypothèse de Boussinesq (1877) revient à considérer que la composante de vitesse verticale  $w$ , nulle sur le fond du canal, varie linéairement sur la profondeur pour atteindre une valeur maximale à la surface.

## 2.2 Démonstration des équations bidimensionnelles de Boussinesq

Les équations d'Euler pour un écoulement incompressible à trois dimensions sont

l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 2.1$$

l'équation de quantité de mouvement selon x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad 2.2$$

l'équation de quantité de mouvement selon y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad 2.3$$

l'équation de quantité de mouvement selon z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad 2.4$$

où P désigne la pression, g l'accélération gravitationnelle et  $\rho$  la masse volumique du fluide considéré.

### 2.2.1 Équation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité 2.1 selon l'axe z, du fond du canal ( $z=0$ ) à la surface libre ( $z=h$ ) donne

$$\int_{z=0}^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad 2.5$$

en appliquant la règle de Liebnitz et en considérant la vitesse w nulle sur le fond ( $w=0$ ), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^h u dz - u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=0}^h v dz - v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + w_s = 0 \quad 2.6$$

où l'indice s désigne la surface libre et l'indice f le fond du canal.

h étant fonction de x, y et t, l'accélération à la surface libre peut s'écrire

$$w_s = \frac{dh}{dt} \Big|_{z=s} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + v_s \frac{\partial h}{\partial y} \quad 2.7$$

En remplaçant  $w_s$  par sa valeur dans l'équation 2.6 et en intégrant selon  $z$  les vitesses moyennes  $u$  et  $v$  (constantes selon  $z$ ), nous obtenons

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad 2.8$$

$u(x,y,t)$  et  $v(x,y,t)$  ne sont pas des fonctions de  $z$ , donc leurs dérivées selon  $x$  et  $y$  ne le sont pas non plus. L'équation 2.1 peut donc s'écrire

$$w = z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad 2.9$$

L'équation 2.8 peut aussi être formulée comme suit

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad 2.10$$

Ainsi, l'équation 2.9 devient

$$w = -\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) z \quad 2.11$$

### 2.2.2 Équation de quantité de mouvement selon z

A partir de l'équation d'Euler 2.4 de quantité de mouvement selon z et de l'équation de continuité 2.1, en multipliant chaque terme de l'équation 2.4 par la variable z ( $z > 0$ ) et en considérant que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad 2.12$$

nous obtenons, après rangement des termes,

$$\frac{\partial wz}{\partial t} + \frac{\partial uwz}{\partial x} + \frac{\partial vwz}{\partial y} + \frac{\partial w^2 z}{\partial z} + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - w^2 = \frac{P}{\rho} \quad 2.13$$

L'intégration de l'équation 2.13 sur la profondeur donne

$$\int_{z=0}^h \frac{\partial wz}{\partial t} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial uwz}{\partial x} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial vwz}{\partial y} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial w^2 z}{\partial z} dz + \int_{z=0}^h gz dz + \int_{z=0}^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz \quad 2.14$$

$$- \int_{z=0}^h w^2 dz = \int_{z=0}^h \frac{P}{\rho} dz$$

En appliquant de nouveau la règle de Liebnitz et en remplaçant  $w_s$  par son expression 2.7, l'expression devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z=0}^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^h uwz dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=0}^h vwz dz + \frac{1}{2} gh^2 - \int_{z=0}^h w^2 dz = \int_{z=0}^h \frac{P}{\rho} dz \quad 2.15$$

### 2.2.3 Équation de quantité de mouvement selon x

A partir de l'équation d'Euler 2.2 de quantité de mouvement selon x et de l'équation de continuité 2.1, nous pouvons poser

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad 2.16$$

après intégration sur la profondeur d'eau

$$\int_{z=0}^h \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial uv}{\partial y} dz + \int_{z=0}^h \frac{\partial uw}{\partial z} dz + \int_{z=0}^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = 0 \quad 2.17$$

En appliquant la règle de Liebnitz et en simplifiant l'équation, on obtient

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^h \frac{P}{\rho} dz = 0 \quad 2.18$$

Nous pouvons maintenant remplacer le terme

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^h \frac{P}{\rho} dz$$

par sa valeur d'après l'équation 2.15, d'où

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h + \frac{1}{2} gh^2}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{z=0}^h wz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^h uwz dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=0}^h vwz dz - \int_{z=0}^h w^2 dz \right) = 0 \quad 2.19$$

Après intégration et simplification des différents termes, nous obtenons

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h + \frac{1}{2} gh^2}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -u \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -v \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) = 0 \quad 2.20$$

Finalement, avec l'équation 2.10, et après réarrangement des termes, l'équation de quantité de mouvement selon x s'écrit

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{1}{3} h^3 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \right) + u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial uvh}{\partial y} = 0 \quad 2.21$$

### 2.2.4 Équation de quantité de mouvement selon y

Le principe de démonstration est le même que celui permettant d'obtenir l'équation 2.21. Ainsi, l'équation d'Euler 2.3 de quantité de mouvement selon y devient

$$\frac{\partial v h}{\partial t} + \frac{\partial u v h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 - \frac{1}{3} h^3 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \right) + u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad 2.22$$

Les équations 2.8, 2.21 et 2.22 forment donc les équations de Boussinesq pour un écoulement bidimensionnel dans un canal horizontal à fond plat.

## 2.3 Équations générales bidimensionnelles de Boussinesq

### 2.3.1 Termes de frottement et de pente du canal

Les équations de Boussinesq obtenues précédemment ne sont complètes que si l'on tient compte du terme de friction  $S_f$  et du terme de pente du canal  $S_0$ .

Gharangik et Chaudhry (1991) considèrent comme valide l'hypothèse d'approximation du terme de frottement dans les équations de Boussinesq par la formule de Manning (pour les équations non permanentes). Les travaux de Prüser et Zielke (1994) confirment cette hypothèse.

Le membre de droite de l'équation 2.21 de quantité de mouvement selon x devient

$$S_x = gh(S_{0x} - S_{fx}) = gh \left( -\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \quad 2.23$$

et celui de l'équation 2.22 de quantité de mouvement selon y devient

$$S_y = gh(S_{0y} - S_{fy}) = gh \left( -\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \quad 2.24$$

n désignant le coefficient de Manning et  $z(x,y)$  la fonction d'élévation du fond du canal.

## 2.4 Équations générales unidimensionnelles de Boussinesq

### 2.4.1 Forme compacte

L'obtention des équations générales unidimensionnelles est directe

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \quad 2.25$$

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{1}{3} h^3 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = gh \left( -\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n^2 u |u|}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \quad 2.26$$

### 2.4.2 Forme développée

En développant les trois termes de Boussinesq, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) & 2.27 \\
 & - \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - \frac{1}{3} h^3 u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
 & = g h \left( - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n^2 u |u|}{h^{\frac{4}{3}}} \right)
 \end{aligned}$$

On constate que l'on retrouve l'équation de quantité de mouvement de Saint Venant selon x par omission des six termes additionnels de Boussinesq.

### 2.5 Changement de notation

Afin de retrouver la forme des équations de Saint Venant utilisées par Garcia et Kahawita (1985), nous choisissons de remplacer les variables indépendantes de profondeur d'eau  $h(x,t)$  et de vitesse moyenne sur la profondeur  $u(x,t)$  par celles de profondeur d'eau (inchangée)  $H(x,t)$  et de débit spécifique  $U(x,t)$  définies par

$$H(x,t) = h(x,t) \quad 2.28$$

$$U(x,t) = h(x,t)u(x,t) \quad 2.29$$

Les équations générales de Boussinesq prennent donc la forme suivante

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad 2.30$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{H} + \frac{1}{2} g H^2 \right) \\ & - \frac{1}{3} H^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} - H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} - \frac{1}{3} h^2 U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \\ & + \frac{1}{3} H^3 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = gh \left( -\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n^2 U |U|}{H^3} \right) \end{aligned} \quad 2.31$$

L'utilisation de la variable de débit spécifique rend plus aisée l'imposition de conditions aux frontières.

L'ordre dans lequel sont rangés les termes de Boussinesq de l'équation 2.31 reste inchangé. Il nous permettra par la suite de les désigner comme étant les termes de Boussinesq 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

### CHAPITRE III: DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS

Afin de pouvoir effectuer l'étude de la propagation des ondes de Favre sur de grands domaines, nous nous intéressons, en particulier, aux schémas numériques explicites qui présentent l'avantage d'être plus simples à mettre en oeuvre et de requérir moins d'espace mémoire lors du calcul.

En raison de la présence de termes du troisième ordre dans les équations de Boussinesq, Abbott (1979) recommande l'emploi d'un schéma numérique au troisième ordre dans l'espace, de façon à minimiser les erreurs de troncature lors de l'approximation des équations par différences finies. Pour ce qui est des dérivées temporelles, Basco (1989) suggère l'utilisation d'un schéma au deuxième ordre dans le temps.

Nous orientons notre choix vers le schéma Two-Four de Gottlieb et Turkel (1976). Ce schéma, du type prédicteur-correcteur, approximant les dérivées au deuxième ordre dans le temps et au quatrième ordre dans l'espace, est dispersif. Cette caractéristique lui confère une bonne stabilité pour l'étude d'écoulements comportant des discontinuités.

Il a été appliqué, en hydraulique, par Gharangik et Chaudhry (1991) pour un écoulement unidimensionnel dans un canal rectangulaire (de largeur unitaire) et horizontal.

### 3.1 Discrétisation des équations de Saint Venant-Schéma Two-Four

La discrétisation de Gharangik et Chaudhry (1991) ne tient pas compte du terme de pente  $S_0$  du canal. Elle est reprise dans les paragraphes suivants en utilisant comme variables de résolution la profondeur d'eau  $H(x, t)$  et le débit spécifique unitaire  $U(x, t)$ .

Pendant le calcul, le prédicteur et le correcteur sont calculés à chaque pas de temps, l'un à la suite de l'autre, sur l'ensemble du domaine. Comme ils comportent chacun soit une différence finie vers l'avant, soit une différence finie vers l'arrière, l'utilisation de chaque type de différence est alternée à chaque itération temporelle.

Pour illustrer la procédure de discrétisation des équations de Saint Venant, le prédicteur est détaillé dans sa "forme avant" (différence finie en fonction des noeuds  $i, i+1, i+2$ ) et le correcteur, dans sa "forme arrière" (noeuds  $i, i-1, i-2$ ).

#### 3.1.1 Prédicteur avant

##### 3.1.1.1 Équation de continuité

$$H_i^p = H_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} [(U_{i+2}^k) - 8(U_{i+1}^k) + 7(U_i^k)] \quad 3.1$$

### 3.1.1.2 Équation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned}
 U_i^p = U_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} & \left\{ \left[ \frac{(U_{i+2}^k)^2}{H_{i+2}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i+2}^k)^2 \right] - 8 \left[ \frac{(U_{i+1}^k)^2}{H_{i+1}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i+1}^k)^2 \right] \right. \\
 & \left. + 7 \left[ \frac{(U_i^k)^2}{H_i^k} + \frac{1}{2} g (H_i^k)^2 \right] \right\} \\
 & + \Delta t g H_i^k \left( S_0 - \frac{n^2 U_i^k |U_i^k|}{(H_i^k)^{10/3}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3.1.2 Correcteur

#### 3.1.2.1 Équation de continuité

$$H_i^c = H_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} [-7(U_i^p) + 8(U_{i-1}^p) - (U_{i-2}^p)] \tag{3.3}$$

### 3.1.2.2 Équation de quantité de mouvement

$$U_i^c = U_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} \left\{ \begin{aligned} & -7 \left[ \frac{(U_i^p)^2}{H_i^p} + \frac{1}{2} g (H_i^p)^2 \right] + 8 \left[ \frac{(U_{i-1}^p)^2}{H_{i-1}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i-1}^p)^2 \right] \\ & - \left[ \frac{(U_{i-2}^p)^2}{H_{i-2}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i-2}^p)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad 3.4$$

$$+ \Delta t g H_i^p \left( S_0 - \frac{n^2 U_i^p |U_i^p|}{(H_i^p)^{10/3}} \right)$$

L'étape au temps  $k+1$  se termine par le calcul des valeurs  $H^{k+1}$  et  $U^{k+1}$

$$H_i^{k+1} = \frac{(H_i^p + H_i^c)}{2} \quad 3.5$$

et

$$U_i^{k+1} = \frac{(U_i^p + U_i^c)}{2} \quad 3.6$$

Cependant, aucune mention n'est faite, dans la littérature, d'une discrétisation du terme de pente pour une élévation variable du fond du canal.

### 3.1.3 Terme de pente du canal

Soit  $Z(x)$  la fonction d'élévation du fond du canal.

La discrétisation du terme  $ghS_0$  de Garcia et Kahawita (1985), pour le schéma de MacCormack, est algébriquement exacte dans le sens où elle permet d'annuler un à un les termes des équations de quantité de mouvement lorsque la vitesse initiale de l'écoulement est nulle. Si l'on considère un lac de bathymétrie variable, sans vitesse initiale, dans un domaine fermé (sans débit entrant, ni sortant), le modèle ne générera donc pas de vitesses parasites.

Par contre, il n'existe pas, pour le schéma Two-Four, de discrétisation exacte équivalente du terme  $S_0$ .

Une des approximations possibles, par différence finie, du terme

$$gH\left(-\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \quad 3.7$$

est la suivante: par exemple lorsque la dérivée

$$\frac{\partial\left(\frac{U^2}{H} + \frac{1}{2}gH^2\right)}{\partial x} \quad 3.8$$

est calculée par différence avant, à l'aide des noeuds  $i$ ,  $i+1$  et  $i+2$ , le terme 3.7 peut être exprimé sous la forme

$$g\frac{(H_i^k + H_{i+1}^k)}{2}\left(\frac{7Z_i - 8Z_{i+1} + Z_{i+2}}{6\Delta x}\right) \quad 3.9$$

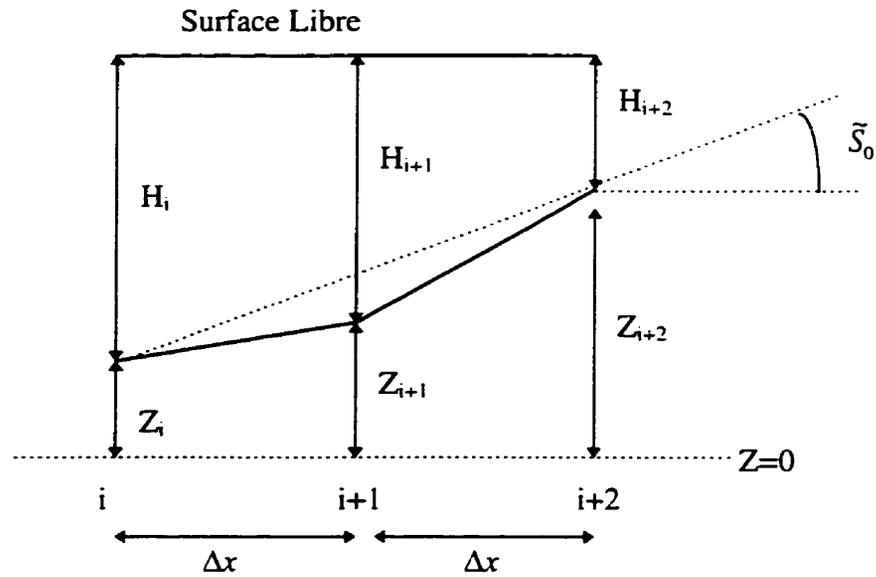


Figure 3.1: Discrétisation du terme de pente

Lorsque la vitesse est nulle sur tout le domaine, pour une élévation totale quelconque de la surface libre, on remarque d'après la figure 3.1 que

$$H_i^k + Z_i^k = H_{i+1}^k + Z_{i+1}^k = H_{i+2}^k + Z_{i+2}^k \quad 3.10$$

L'équation 3.2 devient alors (les composantes de vitesse étant nulles)

$$U_i^p = U_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} \left\{ \left[ +\frac{1}{2} g(H_{i+2}^k)^2 \right] - 8 \left[ +\frac{1}{2} g(H_{i+1}^k)^2 \right] + 7 \left[ +\frac{1}{2} g(H_i^k)^2 \right] \right\} \quad 3.11$$

$$+ \Delta t g \frac{(H_i^k + H_{i+1}^k)}{2} \frac{(Z_{i+2} - 8Z_{i+1} + 7Z_i)}{6\Delta x}$$

Après simplifications, l'équation 3.11 devient

$$U_i^p - U_i^k = \frac{\Delta t}{6\Delta x} \frac{1}{2} g (H_{i+1}^k - H_{i+2}^k) (H_i^k - H_{i+2}^k) \quad 3.12$$

En considérant  $\tilde{S}_0$  comme étant la pente moyenne entre  $H_i$  et  $H_{i+2}$  (voir figure 3.1)

$$U_i^p - U_i^k = \frac{\Delta t}{6\Delta x} \frac{1}{2} g (\tilde{S}_0 \Delta x) (2\tilde{S}_0 \Delta x) = \Delta t \Delta x \tilde{S}_0^2 \quad 3.13$$

nous obtenons une estimation du terme d'erreur généré par cette approximation de discrétisation du terme de pente.

L'approximation semble donc raisonnable puisque les hypothèses de dérivation des équations de Saint Venant supposent que la pente du canal soit faible ( $S_0 \ll 1$ ). Cependant, l'introduction du terme de pente entraîne systématiquement une erreur d'arrondi susceptible de ne pas préserver les caractéristiques de précision du schéma Two-Four.

### 3.1.4 Terme de viscosité turbulente

Afin de pouvoir pleinement comparer les comportements du schéma Two-Four et du schéma de MacCormack, il est intéressant d'inclure le terme de viscosité turbulente présent dans les équations de Saint Venant (Garcia et Kahawita, 1985)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{H} + \frac{1}{2} g H^2 \right) = gh \left( -\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n^2 U |U|}{H^{10/3}} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 2.14$$

$\varepsilon$  désigne le coefficient de viscosité turbulente.

La discrétisation se fait à l'aide d'une différence centrée à l'ordre 4.

Par exemple, pour le prédicteur arrière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 U_i^p = U_i^k + \frac{\Delta t}{6\Delta x} & \left\{ \begin{aligned} & -7 \left[ \frac{(U_i^k)^2}{H_i^k} + \frac{1}{2} g (H_i^k)^2 \right] + 8 \left[ \frac{(U_{i-1}^k)^2}{H_{i-1}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i-1}^k)^2 \right] \\ & - \left[ \frac{(U_{i-2}^k)^2}{H_{i-2}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i-2}^k)^2 \right] \end{aligned} \right\} & 3.15 \\
 + \Delta t g \frac{(H_i^k + H_{i-1}^k)}{2} & \left( \frac{(-7Z_i + 8Z_{i-1} - Z_{i-2})}{6\Delta x} - \frac{n^2 U_i^k |U_i^k|}{(H_i^k)^{\frac{10}{3}}} \right) \\
 + \Delta t \varepsilon \frac{(-U_{i-2}^k + 16U_{i-1}^k - 30U_i^k + 16U_{i+1}^k - U_{i+2}^k)}{12\Delta x^2} &
 \end{aligned}$$

### 3.1.5 Domaine de calcul du schéma Two-Four et frontières

Gharangik et Chaudhry (1991) n'utilisent le schéma Two-Four que pour le calcul aux noeuds situés à l'intérieur du domaine, le schéma de MacCormack servant pour les noeuds proches des frontières. Ainsi, pour un canal comportant  $n$  sections équidistantes, le schéma Two-Four est utilisé pour les noeuds  $i=3$  à  $(n-2)$ .

Cependant, il semble préférable d'avoir recours au même schéma sur tout le domaine. En effet, des simulations de rupture de barrage réalisées sur de longues durées de calcul révèlent la présence d'oscillations parasites aux points de jonction des deux

schémas. Comme les erreurs d'arrondis ne sont pas les mêmes, des différences entre deux variables supposées égales apparaissent et s'amplifient progressivement.

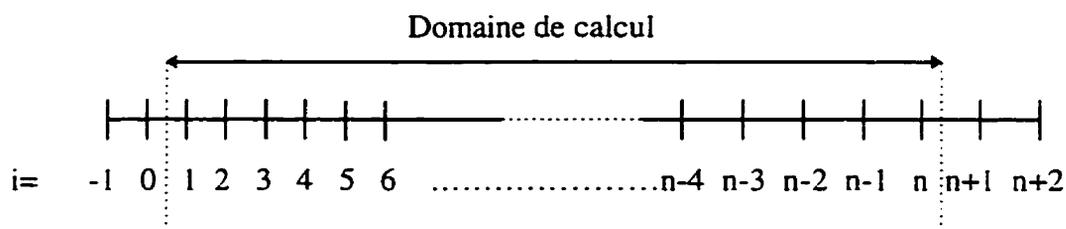


Figure 3.2: Domaine de calcul du schéma Two-Four

Ainsi, pour les frontières, l'approche de Garcia et Kahawita (1985) a été adoptée et étendue pour le schéma Two-Four. Afin de satisfaire à la condition de flux constant aux frontières, deux noeuds fictifs sont ajoutés (figure 3.2) à l'amont et à l'aval selon les règles suivantes

$$H_{i-1}=H_2, H_0=H_1, H_{n+1}=H_n, H_{n+2}=H_{n-1}$$

et

$$U_{i-1}=U_2, U_0=U_1, U_{n+1}=U_n, U_{n+2}=U_{n-1}$$

Les premières dérivées des variables H et U sont donc nulles. Le schéma Two-Four peut maintenant être utilisé sur l'ensemble du domaine.

Goldberg (1977), à la suite des travaux de Gottlieb et Turkel (1976), a proposé une méthode d'extrapolation des frontières par polynôme de Lagrange préservant l'ordre du schéma. Cependant, sa mise en oeuvre génère des oscillations numériques peu physiques dès qu'une onde se rapproche des frontières. Cette démarche a donc été abandonnée.

### 3.1.6 Stabilité du schéma Two-Four

Le schéma Two-Four est un schéma explicite. Pour être stable, il doit satisfaire la condition de Courant-Friederichs-Lewy, tout comme le schéma de MacCormack. Cependant, le critère de stabilité est plus restrictif (Gottlieb et Turkel, 1976) dans le cas du schéma Two-Four.

$$C_n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \max \left( \frac{|U|}{H} + \sqrt{gH} \right) \right] \leq \frac{2}{3} \quad 3.16$$

Ce rapport  $C_n$  doit être inférieur ou égal à 1 dans le cas du schéma de MacCormack (Garcia et Kahawita, 1985) .

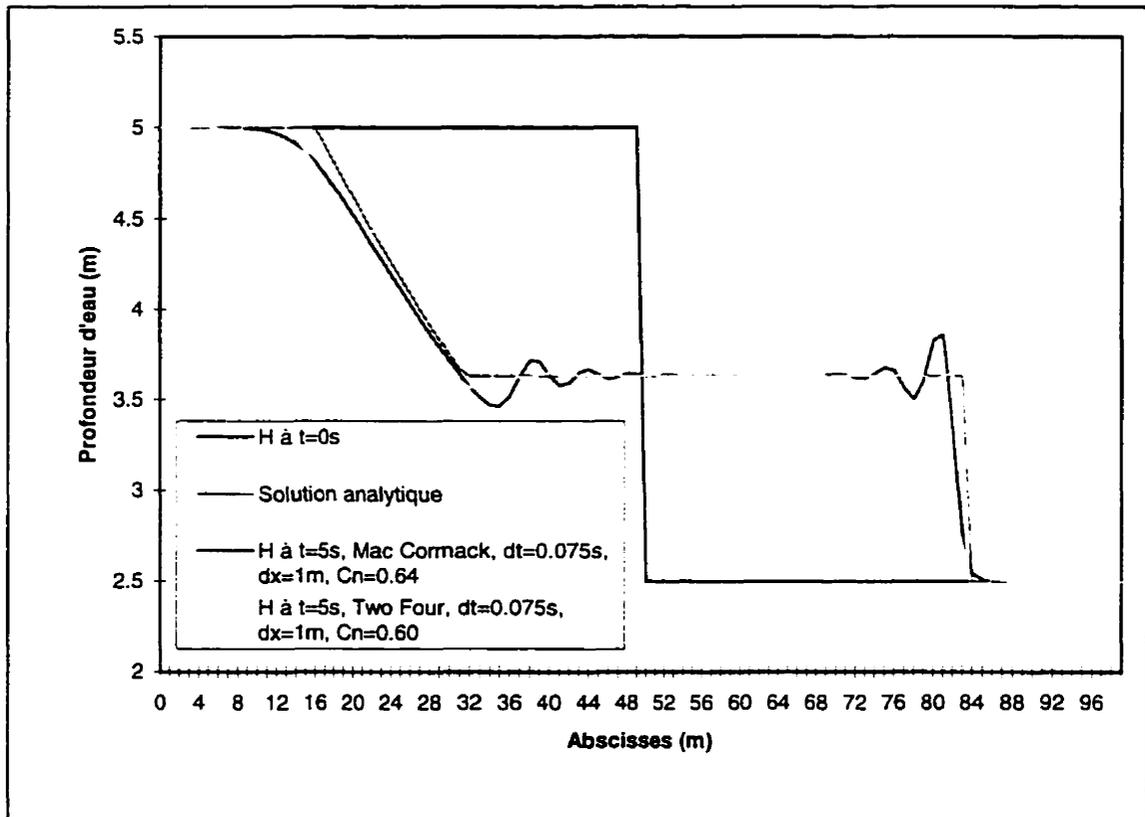
### 3.1.7 Validation du schéma Two-Four avec le schéma de MacCormack

#### 3.1.7.1 Modélisation de l'onde de rupture de barrage

La modélisation de la rupture d'un barrage permet d'observer le comportement d'un schéma numérique en régime non permanent et rapidement varié ainsi que sa capacité à capturer les ondes de choc.

La simulation a été réalisée à l'aide du schéma Two-Four et du schéma de MacCormack (appliqués aux équations de Saint Venant) en canal rectangulaire, à fond horizontal et sans frottement. La solution analytique de ce problème a été calculée afin d'apprécier la validité des profils d'élévation de la surface libre obtenus numériquement. Les pas de temps ( $dt=0.075s$ ) et d'espace ( $dx=1m$ ), identiques pour les deux types de simulations, ont été choisis de façon à satisfaire les conditions de

convergence des deux schémas. Les profils d'élévation de la surface libre, 5s après la rupture, sont présentés à la figure 3.3 pour un barrage d'une profondeur initiale à l'amont de 5m et de profondeur initiale à l'aval de 2.5m. Le débit spécifique initial est nul sur tout le domaine.



**Figure 3.3:** Modélisation de l'onde de rupture de barrage

La figure 3.4 illustre en détail la tête de l'onde positive de la figure 3.3.

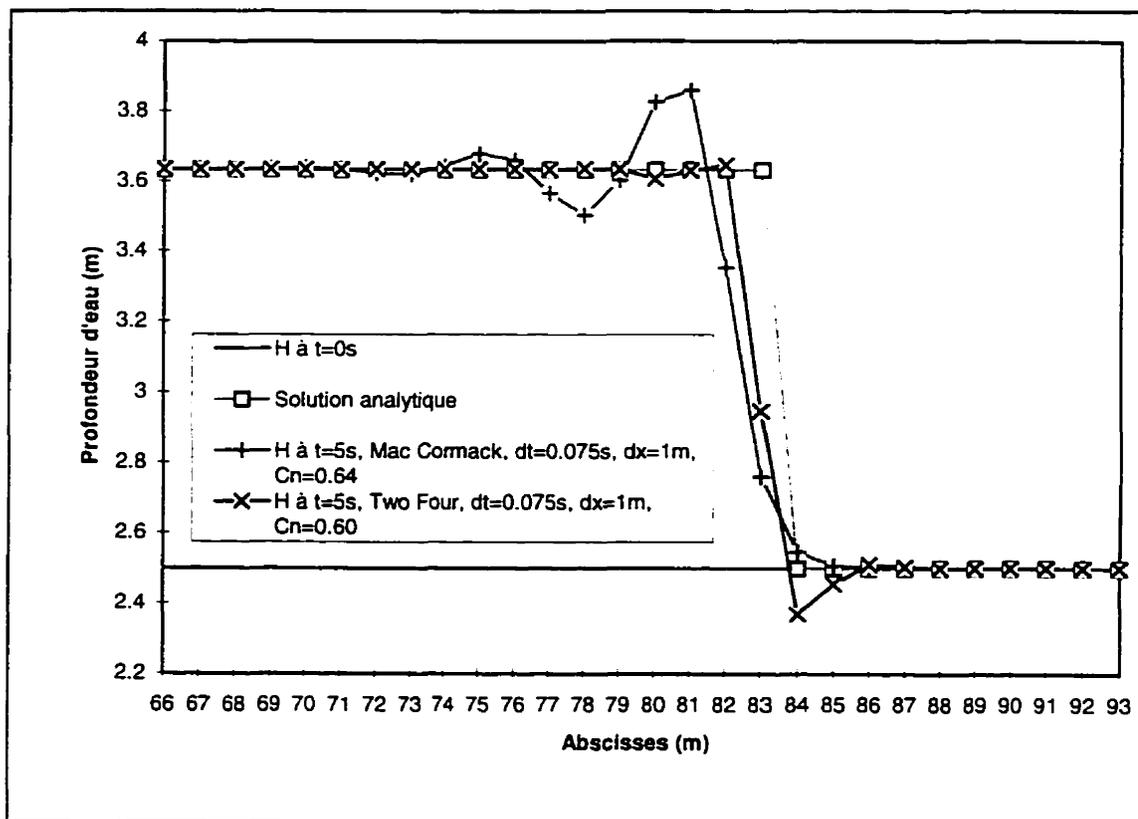


Figure 3.4: Détail de la tête de l'onde positive

Dans l'ensemble, les deux schémas numériques produisent des solutions très proches de la solution analytique. On remarque que les oscillations numériques présentes à la base de l'onde négative sont d'amplitudes plus faibles dans le cas du schéma Two-Four et qu'elles sont même presque absentes de l'onde positive. Inversement, ce schéma tend à générer des oscillations de faibles amplitudes à l'avant des ondes positives et négatives. Ces différences s'expliquent par les caractéristiques numériques des deux schémas. Le schéma de MacCormack est diffusif alors que le schéma Two-Four est dispersif.

### 3.1.7.2 Courbe de remous pour un canal horizontal comportant un seuil

Des simulations de convergence de la solution vers les conditions d'écoulement permanent, en régime fluvial, sont réalisées à l'aide des deux schémas numériques (MacCormack et Two-Four) pour un canal horizontal, sans frottement, comportant un seuil d'une longueur de 480m et d'une hauteur de 0.3m.

Ce test permet de vérifier la stabilité du schéma ainsi que sa capacité à respecter la loi de conservation de l'énergie totale.

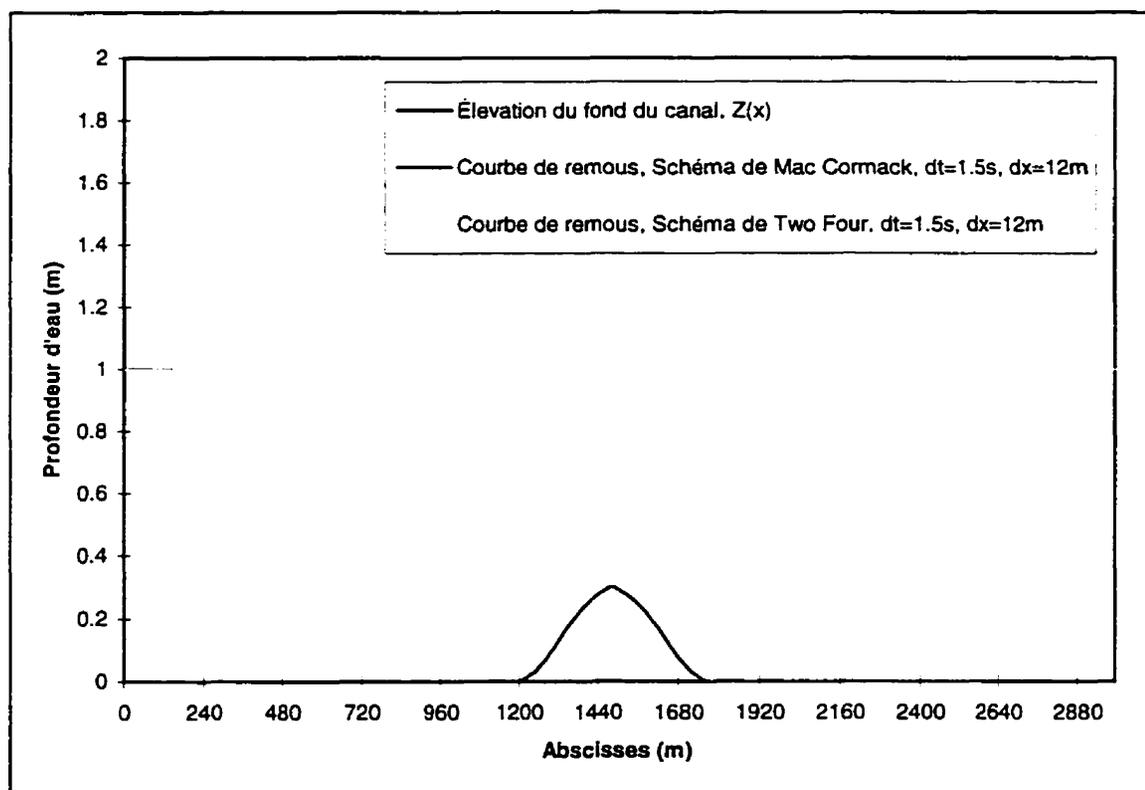


Figure 3.5: Courbes de remous au passage d'un seuil

Les conditions initiales sont une élévation constante de la surface libre ( $H+Z=1\text{m}$ ) et un débit spécifique nul sur tout le domaine. Ensuite, un débit spécifique constant ( $U=1\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ) est imposé à la frontière en amont. A la frontière à l'aval, dans un premier temps, l'hypothèse de flux constant est utilisée afin de permettre aux oscillations numériques de quitter le domaine. Puis, comme il s'agit d'un écoulement fluvial, une profondeur constante de  $H=1\text{m}$  est imposée.

Après 200 secondes, les deux modèles convergent vers la solution permanente présentée à la figure 3.5. La figure 3.6 montre en détail les courbes de remous obtenues avec les deux schémas.

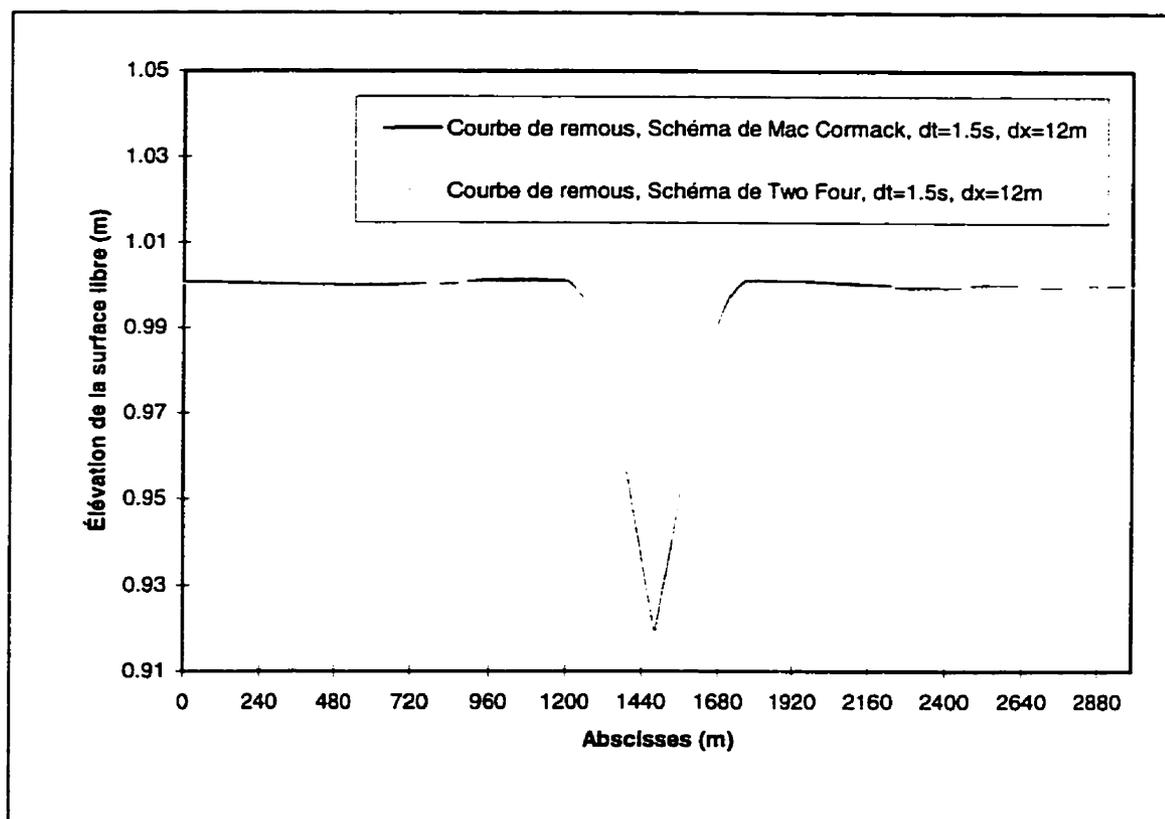


Figure 3.6: Détail des courbes de remous au passage d'un seuil

Bien que l'échelle verticale soit plus petite qu'à la figure 3.5, on remarque que les deux solutions restent presque confondues et qu'elles convergent bien vers la valeur de profondeur d'eau au niveau du seuil trouvée théoriquement.

### 3.1.7.3 Courbe de remous dans un canal à pente constante avec frottement

Afin de comparer les comportements des deux schémas lorsque l'on considère à la fois le terme de frottement et le terme de pente du canal, les courbes de remous d'un écoulement fluvial graduellement varié sont calculées.

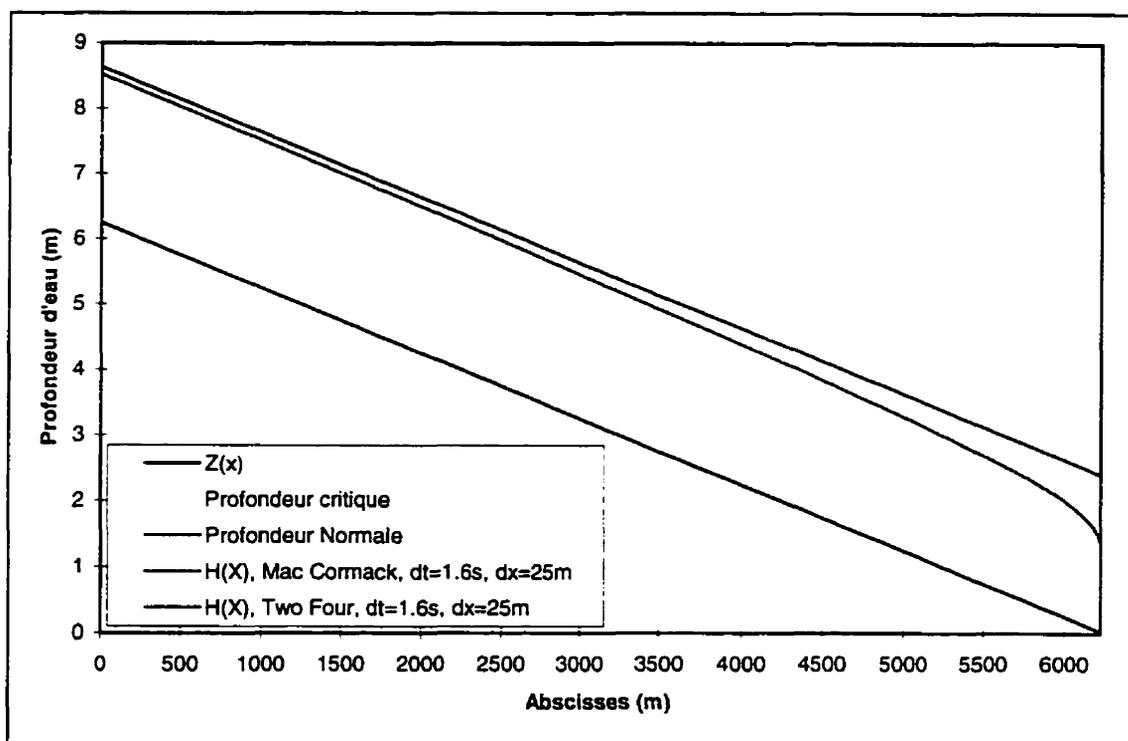


Figure 3.7: Courbes de remous de type M2

La pente est constante ( $S_0=0.001$ ), le coefficient de Manning vaut  $n=0.025$  et le débit spécifique imposé en amont est  $U=5\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ . La profondeur critique est égale à  $H_c=1.366\text{m}$  et la profondeur normale  $H_n=2.386\text{m}$ .

Comme la pente étant douce, l'imposition d'une profondeur d'eau à l'aval légèrement supérieure à la profondeur critique conduit théoriquement (Henderson, 1966) à générer une courbe de remous du type M2. Les résultats des simulations sont donnés à la figure 3.7.

Les courbes obtenues avec le schéma Two-Four et le schéma de MacCormack sont confondues. La profondeur d'eau en amont tend vers la valeur de profondeur normale et le profil de la surface libre correspond bien à celui d'une courbe de type M2.

### 3.2 Méthodes de résolution des équations de Boussinesq

L'approche de Gharangik et Chaudhry (1991) consiste en une résolution directe des équations de Boussinesq à l'aide du schéma Two-Four. Mais comme l'étude ne porte que sur des écoulements permanents, le terme de Boussinesq, fonction du temps (voir l'équation de Boussinesq de quantité de mouvement 2.26, dans sa forme compacte), est omis. Pour l'étude d'écoulements non permanents de rupture de barrage, le terme de Boussinesq, auparavant négligé, doit être considéré. Or l'ajout de celui-ci à la formulation de Gharangik et Chaudhry rend le schéma numérique très instable.

Une autre démarche consiste à résoudre, dans un premier temps, les équations de Saint Venant avec le prédicteur et le correcteur Two-Four, puis, dans un deuxième temps, à corriger la valeur de débit spécifique précédemment obtenue au moyen d'une estimation de la valeur des termes de Boussinesq. Cette correction forme une sorte de schéma semi-implicite puisque les termes de Boussinesq, ainsi évalués, sont fonction du temps précédent ( $H^k$  et  $U^k$ ) et de l'estimation des valeurs  $H^{k+1}$  et  $U^{k+1}$  obtenues avec les équations de Saint Venant. Cette technique a été mise au point par Beauchemin (1994) dans le cadre des travaux de El Kayloubi (1994) afin de modéliser la formation des ondes de Favre dans les écoulements unidimensionnels en canal horizontal et rectangulaire. Les équations sur lesquelles repose ce modèle sont les équations de Boussinesq simplifiées dont la démonstration est détaillée par Abbott (1979).

La méthode de résolution de Beauchemin est reprise dans ce projet mais appliquée, cette fois, aux équations conservatrices complètes de Boussinesq. Une modification est aussi apportée à la méthode de calcul puisque la correction, par les termes de Boussinesq, du terme de débit spécifique de Saint Venant a maintenant lieu à la fin du

calcul de prédicteur Two-Four et à la fin du calcul du correcteur Two-Four. La procédure de résolution est résumée par la figure 3.8.

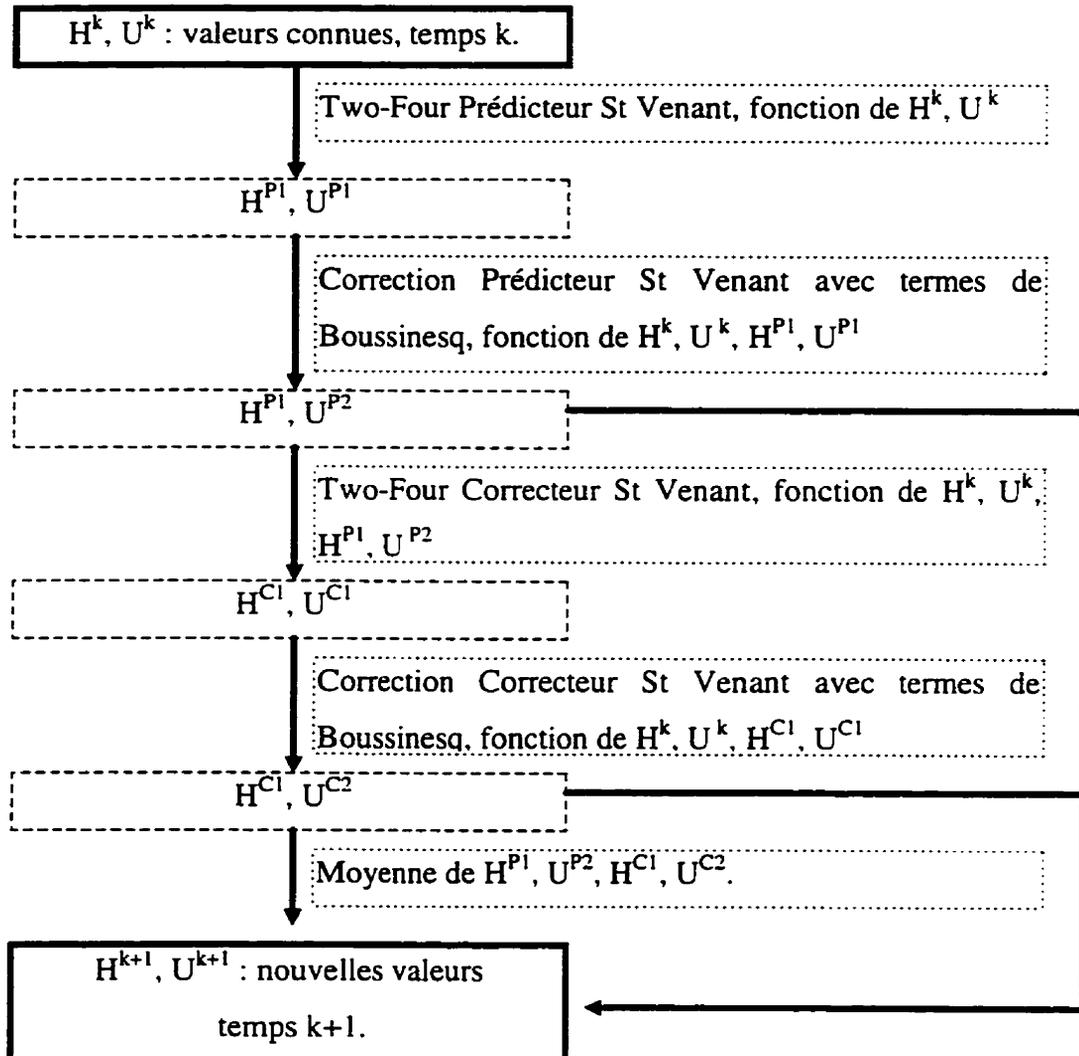


Figure 3.8: Description de la méthode de résolution des équations de Boussinesq

### 3.3 Détail de la discrétisation des termes de Boussinesq

Les six termes de Boussinesq suivants

$$\beta = -b_1 \frac{1}{3} H^3 \frac{\partial^3 \frac{U}{H}}{\partial t \partial x^2} - b_2 H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 \frac{U}{H}}{\partial t \partial x} - b_3 \frac{1}{3} h^2 U \frac{\partial^3 \frac{U}{H}}{\partial x^3} + b_4 \frac{1}{3} H^3 \frac{\partial \frac{U}{H}}{\partial x} \frac{\partial^2 \frac{U}{H}}{\partial x^2} - b_5 H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 \frac{U}{H}}{\partial x^2} + b_6 H^2 \frac{\partial H}{\partial x} \left( \frac{\partial \frac{U}{H}}{\partial x} \right)^2 \quad 3.1$$

proviennent des équations complètes de Boussinesq dans leur forme développée. Les six variables  $b_i$  ( $i=1$  à  $6$ ) de l'équation 3.1 sont ajoutées dans le schéma numérique. De valeur nulle ou égale à l'unité, ces coefficients permettent d'inclure ou de négliger chacun des termes.

La discrétisation des six termes est accomplie au moyen de différences finies centrées à l'ordre 4 (donc incluant cinq noeuds:  $i-2$ ,  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ ,  $i+2$ ) pour les dérivées spatiales. Les dérivées temporelles sont obtenues par approximation par différences finies arrières au premier ordre.

Comme le schéma reste instable malgré sa forme semi-implicite, pour chaque noeud  $i$ , une moyenne pondérée de la somme des termes de Boussinesq en ce noeud est effectuée avec la somme des termes de ses trois voisins de droite ( $i+3$ ,  $i+2$ ,  $i+1$ ) et de gauche ( $i-3$ ,  $i-2$ ,  $i-1$ ), selon l'approche de Beauchemin (1994). Ainsi, si l'on s'intéresse, par exemple, à la correction de la valeur de débit spécifique de prédicteur, l'évaluation de la moyenne

$$\bar{\beta}_i^p = \frac{(a\beta_{i+3}^p + b\beta_{i+2}^p + c\beta_{i+1}^p + d\beta_i^p + e\beta_{i-1}^p + f\beta_{i-2}^p + g\beta_{i-3}^p)}{(a + b + c + d + e + f + g)} \quad 3.2$$

permet de corriger la valeur  $U^{p1}$

$$U_i^{p2} = U_i^{p1} + \bar{\beta}_i^p \quad 3.2$$

Plusieurs valeurs de pondération ont été essayées, mais le facteur influençant le plus la stabilité du schéma est celui du nombre de voisins pris en compte lors du calcul de la moyenne. Le schéma reste instable lorsque ce nombre est inférieur à six.

### 3.4 Validation du schéma Two-Four Boussinesq

L'introduction d'une moyenne dans la procédure de résolution des équations de Boussinesq rendant impossible la démonstration mathématique rigoureuse de la stabilité et de la convergence du schéma numérique, celles-ci doivent être prouvées de façon qualitative.

Les tests de validation du schéma Two-Four pour les équations de Saint Venant sont repris pour la validation du schéma Two-Four appliqué aux équations de Boussinesq. Les résultats de ce schéma sont comparés à ceux obtenus avec le schéma de MacCormack pour des conditions de simulation identiques.

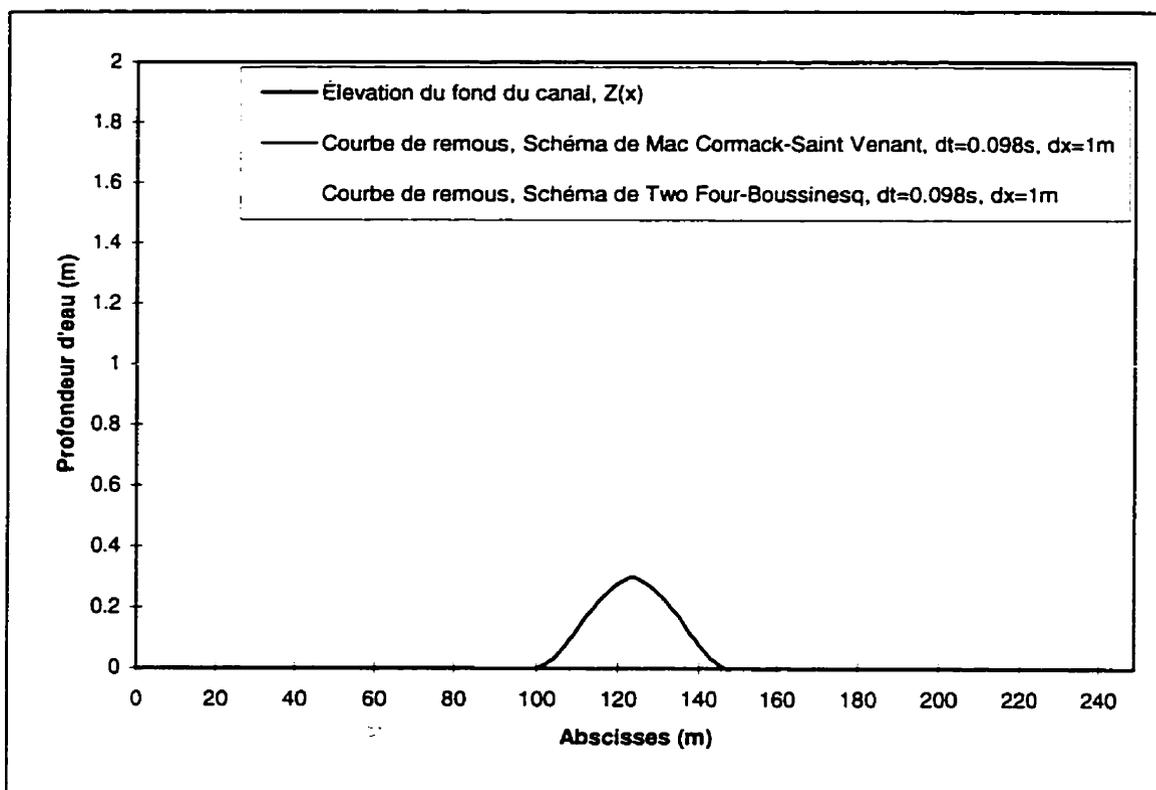
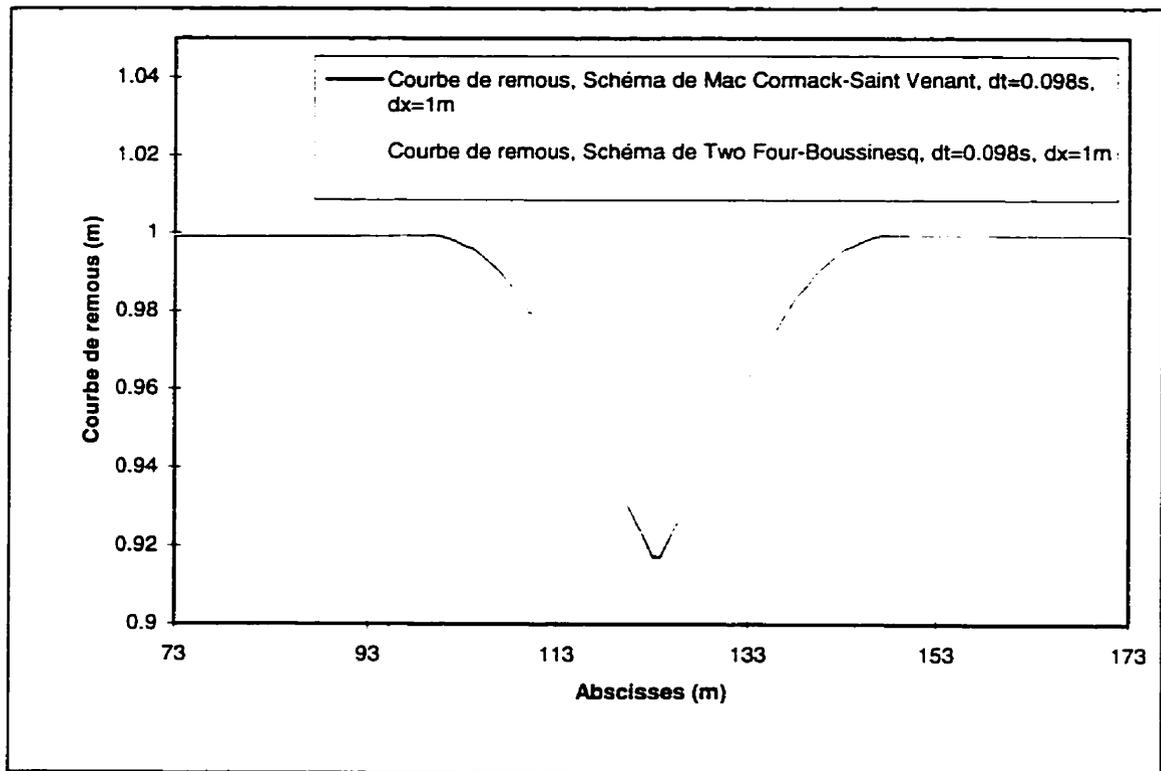


Figure 3.9: Courbes de remous au passage d'un seuil

La figure 3.9 illustre les solutions obtenues pour les deux schémas avec des pas de temps  $dt=0.098s$  et d'espace  $dx=1m$ . Les conditions initiales sont une élévation constante de la surface libre ( $H+Z=1m$ ) et un débit spécifique nul sur tout le domaine, à l'exception de la frontière à l'amont à laquelle on impose un débit spécifique constant  $U=1\text{ m}^2.s^{-1}$ .

Cette fois, la pente du seuil est plus forte mais, même dans ce cas plus critique ( $S_0=0.01$ ), les deux schémas aboutissent à des résultats identiques comme en témoigne la figure 3.10 qui présente un détail de la courbe de remous de la figure 3.9.



**Figure 3.10:** Détail des courbes de remous au passage du seuil

Le test de calcul de la courbe de remous de type M2 est également effectué dans un canal de pente constante ( $S_0=0.001$ ). Le coefficient de Manning vaut  $n=0.025$  et le débit spécifique imposé en amont est  $U=5\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . La profondeur critique est donc toujours égale à  $H_c=1.366\text{m}$  et la profondeur normale à  $H_n=2.386\text{m}$ .

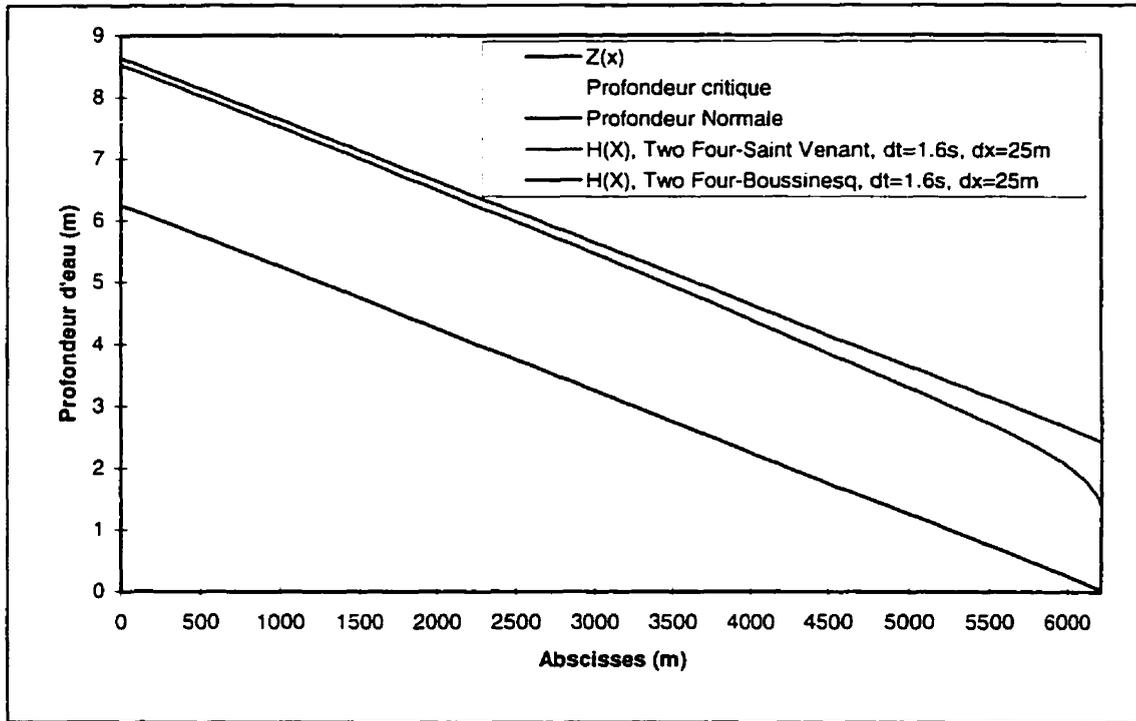


Figure 3.11: Courbes de remous du type M2

Les résultats, présentés à la figure 3.11, montrent la stabilité du schéma Two-Four appliqué aux équations de Boussinesq et sa capacité de convergence vers la solution d'écoulements permanents. L'influence des termes de Boussinesq paraît négligeable dans ces différents problèmes. En effet, dans chacun des cas abordés, la courbure des lignes de courant est relativement faible. Il n'y a aucune discontinuité de la profondeur d'eau ou de la vitesse au sein de ces écoulements. Ainsi, les termes de Boussinesq sont supposés être de faible amplitude.

## CHAPITRE IV: SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Après discrétisation des équations de Boussinesq et validation du schéma numérique, il est maintenant possible de simuler la formation des ondes de Favre sur une intumescence positive consécutive à une rupture de barrage.

### 4.1 Modélisation des ondes de Favre dans un cas parfait de rupture de barrage

Afin de tester la capacité du modèle à reproduire la dynamique de formation des ondes de Favre dans le contexte des ruptures de barrage, les premières simulations sont réalisées dans des conditions simples. Le canal est horizontal, le frottement est négligé et le débit spécifique initial à l'amont et à l'aval du barrage est nul. Ces hypothèses sont résumées à la figure 4.1.

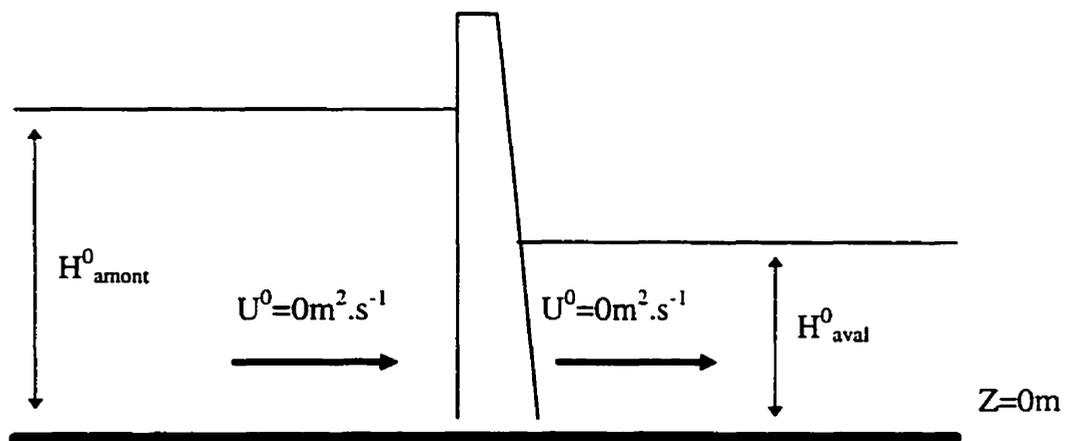


Figure 4.1: Conditions initiales de simulation

Les conditions initiales, au temps  $t=0s$ , imposées dans le modèle sont présentées à la figure 4.2.

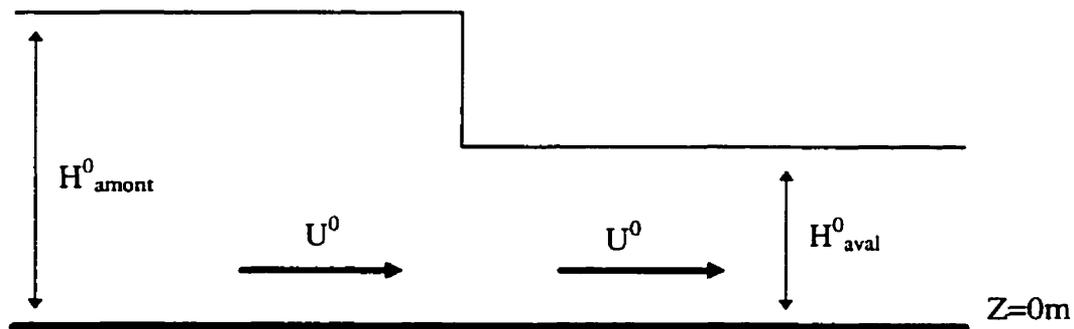


Figure 4.2: Conditions initiales du schéma numérique

Le débit spécifique  $U$  est nul en chacun des noeuds du domaine et la profondeur d'eau  $H$  comporte une discontinuité au niveau du barrage.

Les conditions aux frontières sont celles du flux constant; les premières dérivées de  $H$  et de  $U$  sont nulles. Ce type de conditions aux frontières, qui s'applique bien dans le cas d'un canal dans lequel le frottement est négligé, permet de laisser passer les ondes positives et négatives aux frontières en minimisant les réflexions non physiques.

#### 4.1.1 Résultats bruts de simulation

Lorsque les valeurs de profondeurs initiales à  $t=0s$  sont  $H^0_{amont}=3.5m$  et  $H^0_{aval}=2.5m$ , pour un pas d'espace  $dx=1m$  et un pas de temps  $dt=0.098s$ , on obtient les profils de la surface libre illustrés par la figure 4.3. Cette figure présente les courbes de remous calculées aux temps  $t=13s$ ,  $t=26s$  et  $t=40s$ .

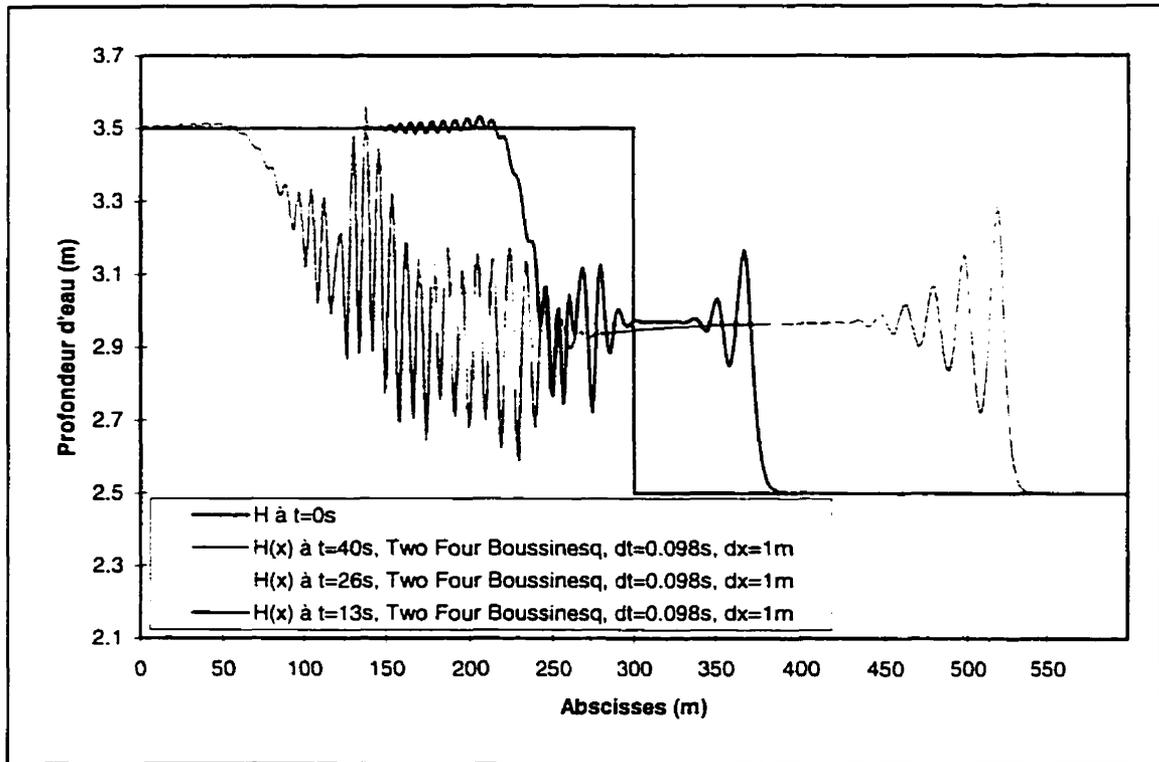


Figure 4.3: Ondes de rupture de barrage et ondes de Favre

Le modèle reproduit de façon convenable la formation des ondes de Favre à la tête de l'onde positive.

Comme le mentionnent Abbott et Rodenhuis (1972), "les ondes qui se créent derrière un ressaut sont formées une à une, de sorte que le nombre total d'ondes qui existent en un instant donné est proportionnel au temps  $T$  écoulé depuis la formation du ressaut".

Ce résultat est clairement visible à la figure 4.3. A  $t=13s$ , trois ondes de Favre sont observées, à  $t=26s$ , il y en a quatre et, à  $t=40s$ , elles sont au nombre de cinq.

Cependant, un indéniable problème d'oscillations numériques apparaît à la base de l'onde négative. Ces oscillations s'amplifient très rapidement dans le temps, pour dégrader progressivement la solution. Évidemment, ces ondulations n'ont rien de physique puisque le profil théorique de la surface libre au niveau de l'onde négative (reliant la surface en amont non perturbée et le profil horizontal du début de l'onde positive) est du type parabolique. Aucune oscillation n'y a été observée expérimentalement.

Les termes additionnels de Boussinesq du schéma numérique semblent amplifier les oscillations numériques apparaissant déjà à la base de l'onde négative avec les schémas de MacCormack et Two-Four appliqués aux équations de Saint Venant (voir figure 3.3).

#### **4.1.2 Viscosité turbulente**

Une tentative d'ajout de viscosité turbulente (termes du deuxième ordre des équations de Saint Venant, utilisés lors du calcul du prédicteur et du correcteur Two-Four, et avant correction par les termes de Boussinesq) a permis d'atténuer les oscillations numériques, mais l'amplitude des ondes de Favre en a été affectée. Elles disparaissent progressivement lorsque la simulation se prolonge dans le temps. C'est pourquoi l'emploi de la viscosité artificielle est préférable à celui de la viscosité turbulente.

### 4.1.3 Viscosité artificielle

#### 4.1.3.1 Flux Corrected Transport

La méthode du Flux Corrected Transport (FCT) de Boris et Book (1976) se prête bien à l'étude de problèmes oscillatoires contrairement à la méthode de Jameson, Schmidt et Turkel (1981). Alors que la viscosité de Jameson n'est composée que d'une étape de diffusion, la viscosité FCT comporte une deuxième étape d'anti-diffusion. Cette caractéristique permet, tout en atténuant les oscillations numériques, d'éviter d'écarter les pics de la solution recherchée.

La méthode FCT est appliquée après intégration des équations au temps  $t+\Delta t$ , en  $N$  noeuds, et fonction du temps  $t$ .

Étape de diffusion au temps  $t+\Delta t$

$$\bar{f}_i(t + \Delta t) = f_i(t + \Delta t) + \kappa [f_{i+1}(t + \Delta t) - 2f_i(t + \Delta t) + f_{i-1}(t + \Delta t)] \quad 4.1$$

$f$  désigne la variable de profondeur de l'écoulement.

Étape d'anti-diffusion de  $\bar{f}_i(t + \Delta t)$  selon la règle

$$f_i(t + \Delta t) = \bar{f}_i(t + \Delta t) - \left( D_{i+\frac{1}{2}} - D_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad 4.2$$

où  $D_{j+1/2}$  est obtenu d'après la sélection

$$D_{i+\frac{1}{2}}^1 = S \max \left[ 0, \min \left( S \Delta_{i-\frac{1}{2}}, \left| D_{i+\frac{1}{2}}^1 \right|, S \Delta_{i+\frac{3}{2}} \right) \right] \quad 4.3$$

avec

$$D_{i+\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} [f_{i+1}(t + \Delta t) - f_i(t + \Delta t)] \quad 4.4$$

$$S = \text{signe} \left( \Delta_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad 4.5$$

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = \bar{f}_{i+1}(t + \Delta t) - \bar{f}_i(t + \Delta t) \quad 4.6$$

#### 4.1.3.2 Two-Four Saint Venant et FCT

La simulation de rupture de barrage réalisée pour la validation du schéma Two-Four appliqué aux équations de Saint Venant est complétée afin d'illustrer les effets de la viscosité FCT sur le profil de la solution.

Les conditions de simulation, sont  $H_{\text{amont}}^0 = 5\text{m}$ ,  $H_{\text{aval}}^0 = 2.5\text{m}$ ,  $U^0 = 0\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $dt = 0.75\text{s}$ ,  $dx = 1\text{m}$ ,  $\kappa(\text{FCT}) = 0.1$ .

Les profils avec et sans viscosité FCT sont comparés à la solution analytique des équations de Saint Venant à la figure 4.4.

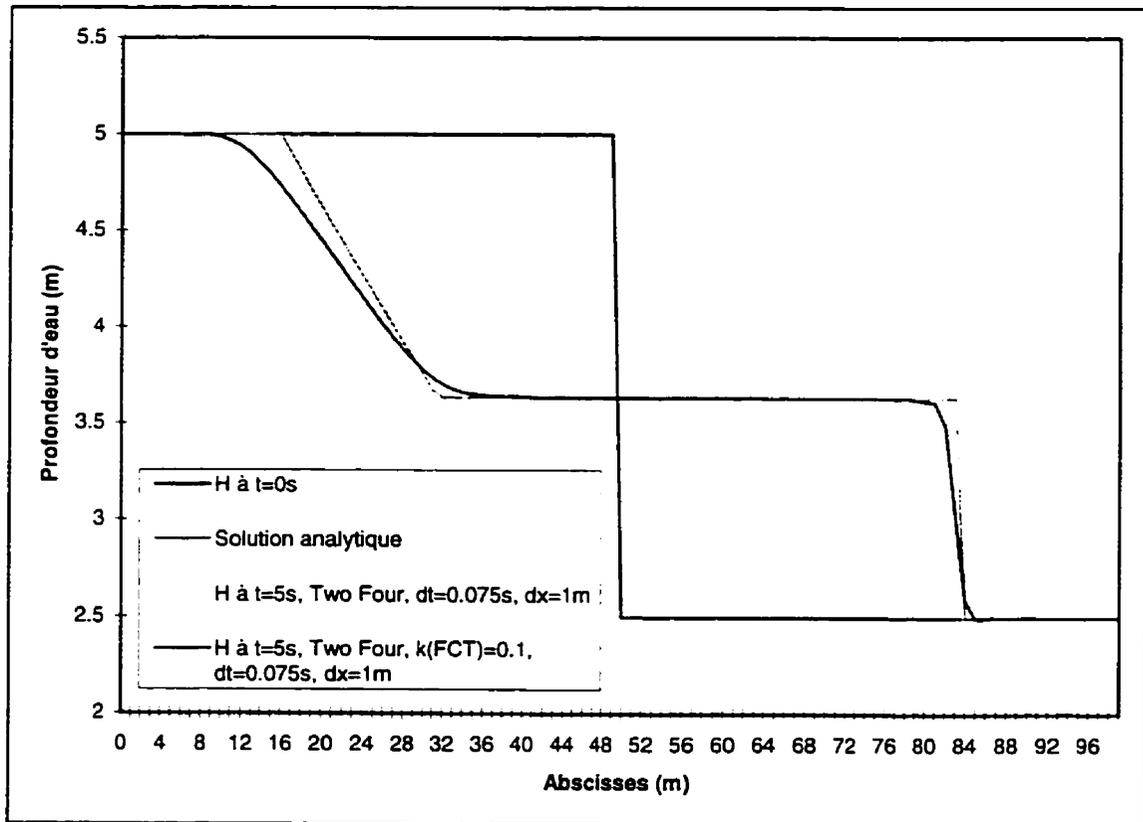


Figure 4.4: Influence de la viscosité FCT sur la solution des équations de St Venant

La viscosité FCT élimine donc, pour les équations de Saint Venant, les oscillations générées par le schéma Two-Four à la base de l'onde négative.

#### 4.1.3.3 Two-Four Boussinesq et FCT

En ajoutant maintenant la procédure de viscosité artificielle FCT aux conditions de simulation des ondes de Favre dans le cas simple du paragraphe 4.1.1 (soit à  $t=0s$ :  $H^0_{\text{amont}}=3.5m$ ,  $H^0_{\text{aval}}=2.5m$ ,  $dx=1m$ ,  $dt=0.098s$  et  $\kappa(\text{FCT})=0.1$ ), on obtient finalement les profils de la surface libre de la figure 4.5. Les courbes de remous sont calculées aux temps  $t=13s$ ,  $t=26s$  et  $t=40s$ .

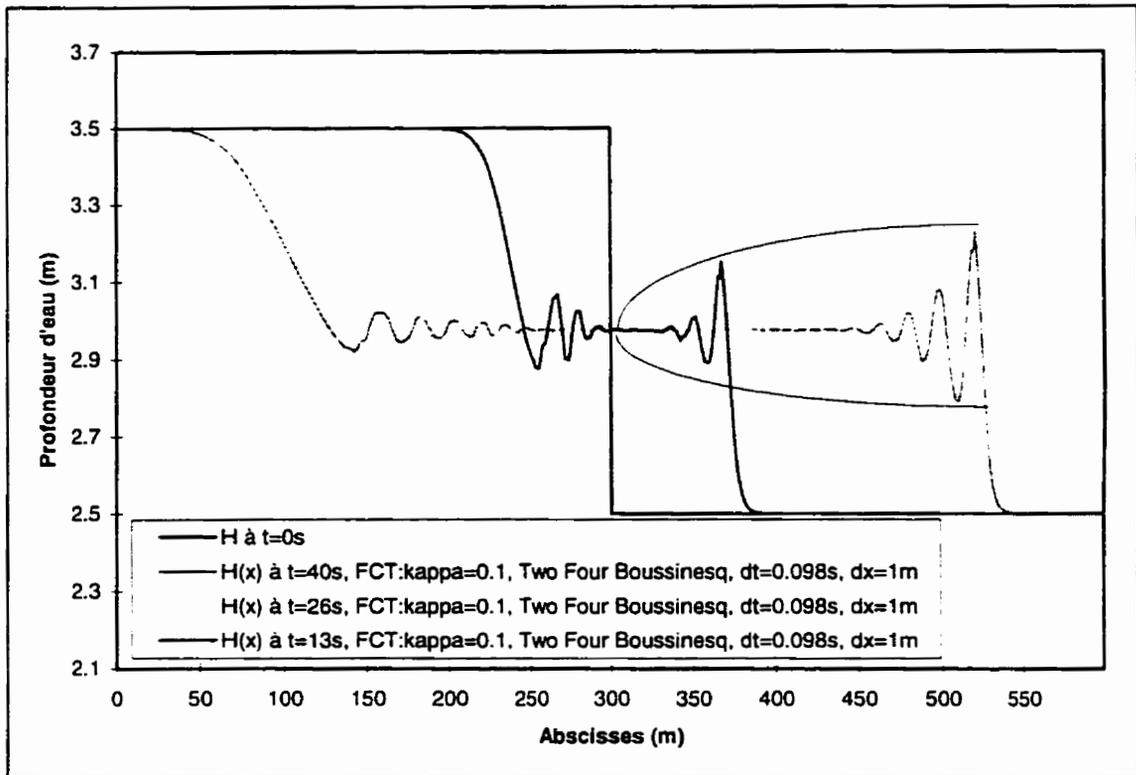


Figure 4.5: Ondes de rupture de barrage et ondes de Favre, viscosité FCT

Les oscillations parasites à la base de l'onde négative sont très nettement estompées par la viscosité artificielle. Leur amplitude n'augmente plus dans le temps; au contraire, elle tend même à diminuer.

En revanche, l'amplitude des ondes de Favre est assez peu affectée par la viscosité artificielle et leur longueur d'onde reste inchangée comme en témoigne la figure 4.6.

Ces deux effets constituent l'intérêt premier dû à l'introduction de la viscosité artificielle.

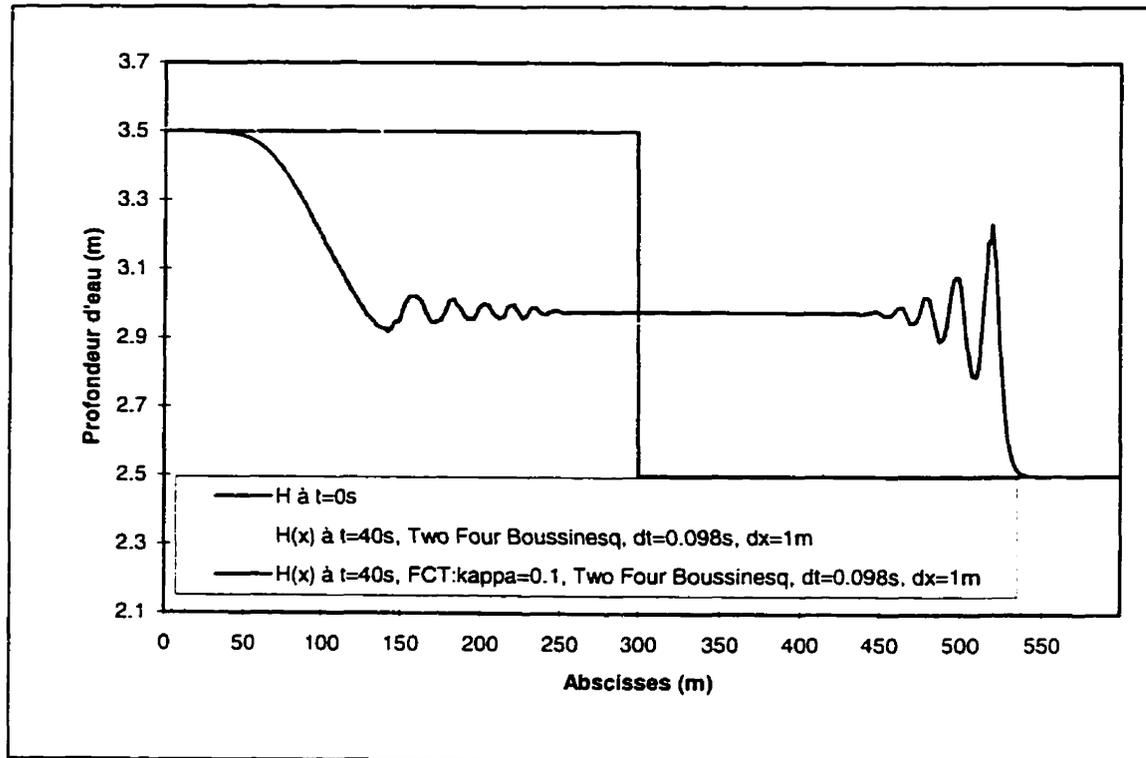


Figure 4.6: Comparaison des profils de la surface libre avec et sans viscosité FCT

L'intérêt second de la viscosité artificielle provient du fait qu'elle permet de stabiliser la solution des équations de Boussinesq. En effet, l'enveloppe (courbes noires de la figure 4.5) qui encadre les valeurs d'amplitudes maximales des ondes de Favre, a tendance à s'élargir progressivement.

Ce comportement physique a été observé expérimentalement par Favre (1935). Les ondes se forment une à une pour atteindre petit à petit leur amplitude maximale.

Cependant, l'amplitude des ondes générées par le modèle numérique ne tend pas toujours vers une valeur limite, en particulier dans le cadre de simulations réalisées pour des cas parfaits (frottement négligé). Ainsi, l'ajout de viscosité artificielle permet de contrôler ce phénomène. La valeur du coefficient de diffusion  $\kappa$  de la méthode FCT

est considérée adéquate lorsqu'elle permet de stabiliser l'amplitude maximale des ondes générées, sans les laminar, au cours de leur propagation.

## 4.2 Simulations numériques et expériences de Favre

### 4.2.1 Nomenclature de Favre

La figure 4.7 résume les conventions adoptées par Favre pour l'analyse de ses expériences. Les notations,  $H$  pour la profondeur initiale de l'écoulement permanent auquel se superpose l'intumescence,  $h^*$  pour la hauteur maximale des ondes de Favre,  $h'$  pour la hauteur moyenne de l'onde positive et  $e$  pour la longueur d'onde des ondulations secondaires, sont reprises fidèlement dans la suite de l'étude.

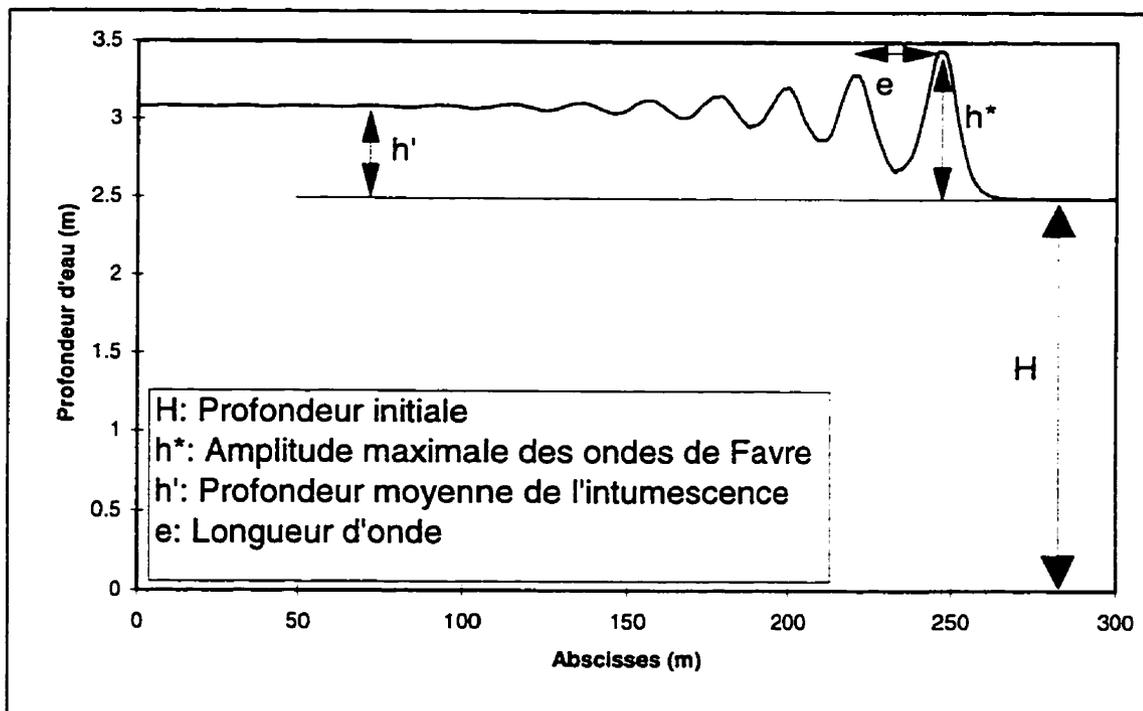


Figure 4.7: Nomenclature de Favre

Pour comparer les résultats du schéma numérique Two-Four à ceux obtenus expérimentalement par Favre (1935), une série de simulations est exécutée dans le cas d'un canal horizontal où le frottement est négligé.

On produit différentes conditions d'écoulement en faisant varier la hauteur d'eau initiale  $H^0_{\text{amont}}$ , en amont du barrage, pour une valeur de profondeur initiale en aval  $H^0_{\text{aval}}$  constante.

Lors d'une première série de simulations, ces conditions de hauteur d'eau sont associées à un débit initial nul et, dans une deuxième série, un débit initial constant est imposé sur l'ensemble du domaine.

#### 4.2.2 Débit spécifique initial nul

La hauteur initiale  $h^0_{\text{amont}}$  est soumise à des variations comprises entre 2.75m et 3.95m, ce qui permet de produire des intumescences de différentes hauteurs, tout en s'assurant que l'on demeure bien dans le domaine des ondes de Favre non déferlantes.

Les simulations sont effectuées dans des domaines de 4000 noeuds avec un pas d'espace  $\Delta x=1\text{m}$ , soit 2000m en amont et en aval du barrage. Pour chaque simulation, une valeur de  $\Delta t$  est choisie (de façon à respecter la condition de Courant-Friederichs-Lewy), ainsi qu'une valeur pour le coefficient  $\kappa(\text{FCT})$  conformément aux recommandations énoncées au paragraphe 4.1.3.3.

La figure 4.8 illustre les résultats d'une des simulations, en comparant le profil obtenu par le schéma Two-Four Boussinesq et le schéma Two-Four Saint Venant pour les

mêmes conditions de simulation ( $\kappa=0.11875$ ,  $\Delta t=0.098$ ,  $\Delta x=1\text{m}$ ,  $h^0_{\text{amont}}=3.75\text{m}$ ,  $h^0_{\text{aval}}=2.5\text{m}$ ).

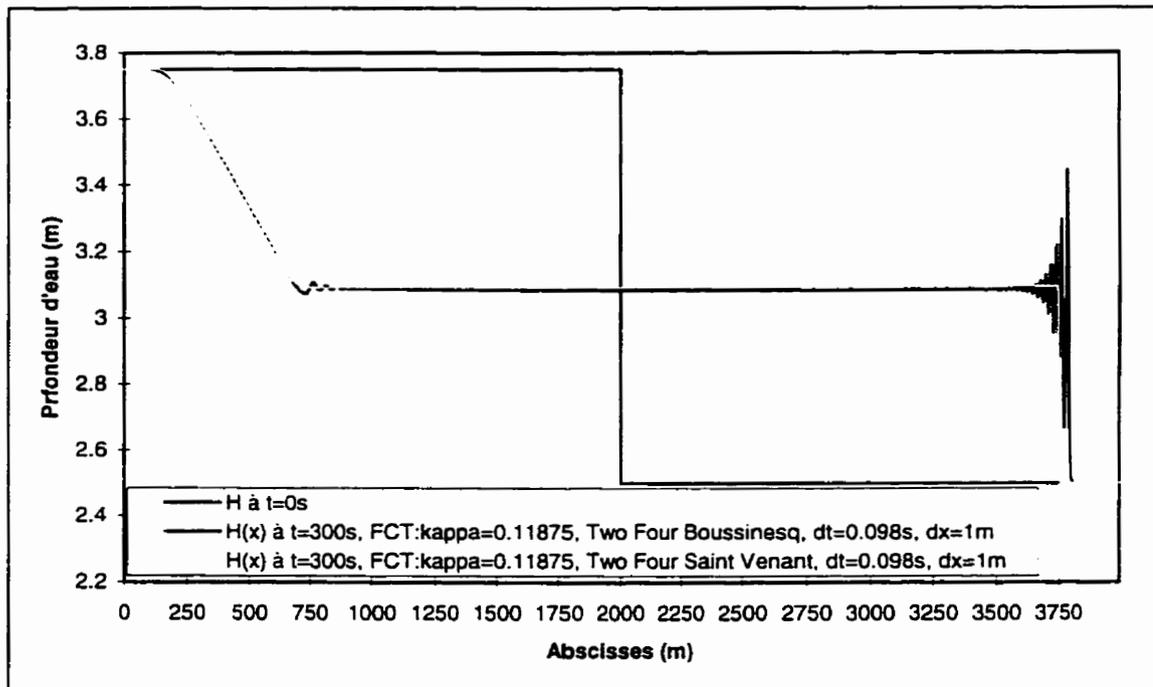


Figure 4.8: Formation des ondes de Favre

La figure 4.9 détaille la tête de l'onde positive. La célérité de l'intumescence, lorsque l'on tient compte des hypothèses de Boussinesq, est à peine supérieure (environ 2 à 3%) à celle obtenue par résolution des équations de Saint Venant.

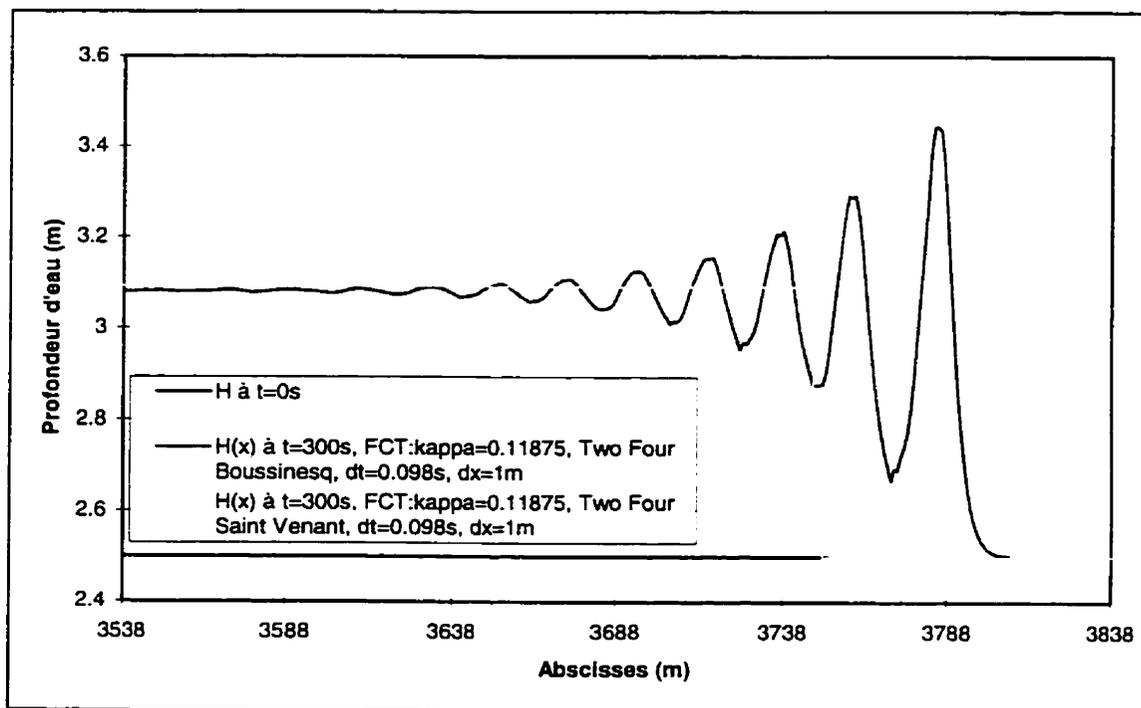


Figure 4.9: Détail de l'onde positive

Or, d'après Treske (1994), les études expérimentales révèlent que la célérité de l'onde positive n'est pas affectée de façon significative par les ondulations secondaires. Les résultats numériques recueillis sont donc conformes aux observations expérimentales.

#### 4.2.3 Influence du débit spécifique constant

Les simulations sont ensuite répétées, mais cette fois en imposant un débit initial constant sur tout le domaine. La valeur du débit correspond à une vitesse initiale d'environ  $0.5 \text{ m.s}^{-1}$  en aval du barrage.

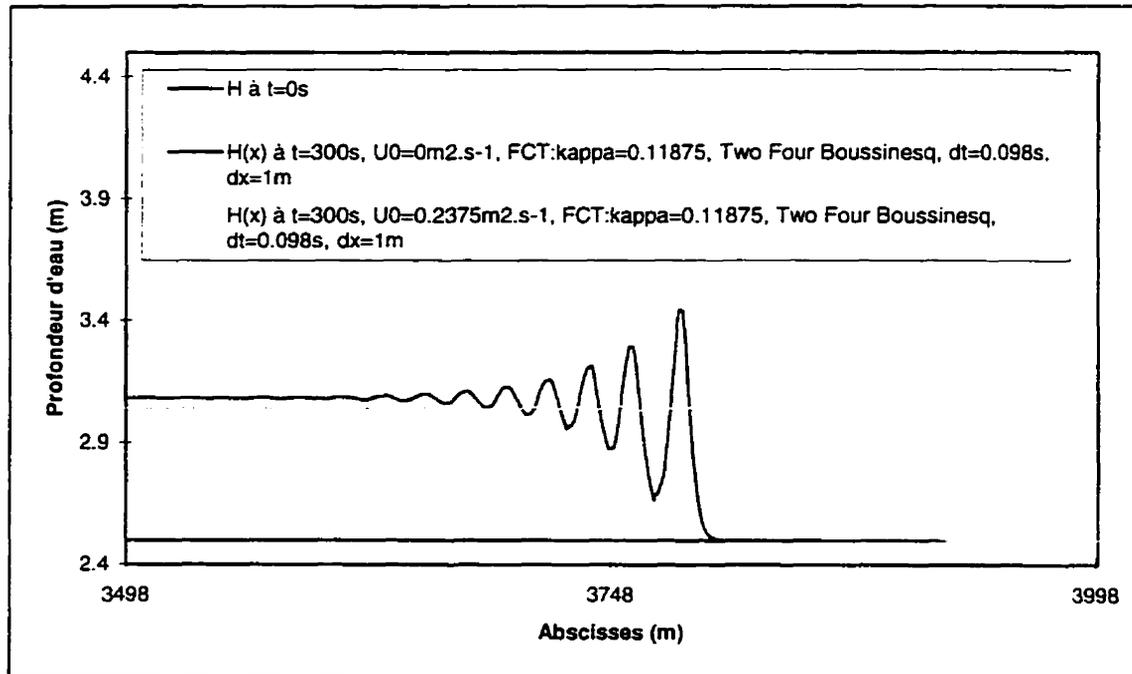


Figure 4.10: Influence du débit spécifique initial sur les ondes de Favre

La figure 4.10 permet de comparer les profils d'élévation de la surface libre obtenus dans les mêmes conditions de simulation avec et sans débit initial. Le débit affecte à la fois la hauteur moyenne  $h'$  de l'intumescence et la hauteur maximale  $h^*$ .

#### 4.2.4 Diagrammes de Favre

Les résultats des différentes simulations, avec et sans débit initial, sont reportés sur les diagrammes de Favre qui ont été obtenus expérimentalement d'après des mesures effectuées dans un canal de faible rugosité (la valeur du coefficient de Manning est d'environ 0.01).

Le premier de ces diagrammes (figure 4.11) donne la hauteur relative maximale à prévoir (rapport  $h^*/h'$ ) des ondes secondaires en fonction de la hauteur relative moyenne de l'intumescence (rapport  $h'/H$ ).

La valeur 0.28 du rapport  $h'/H$  sépare les domaines de déferlement et de non déferlement des ondes secondaires.

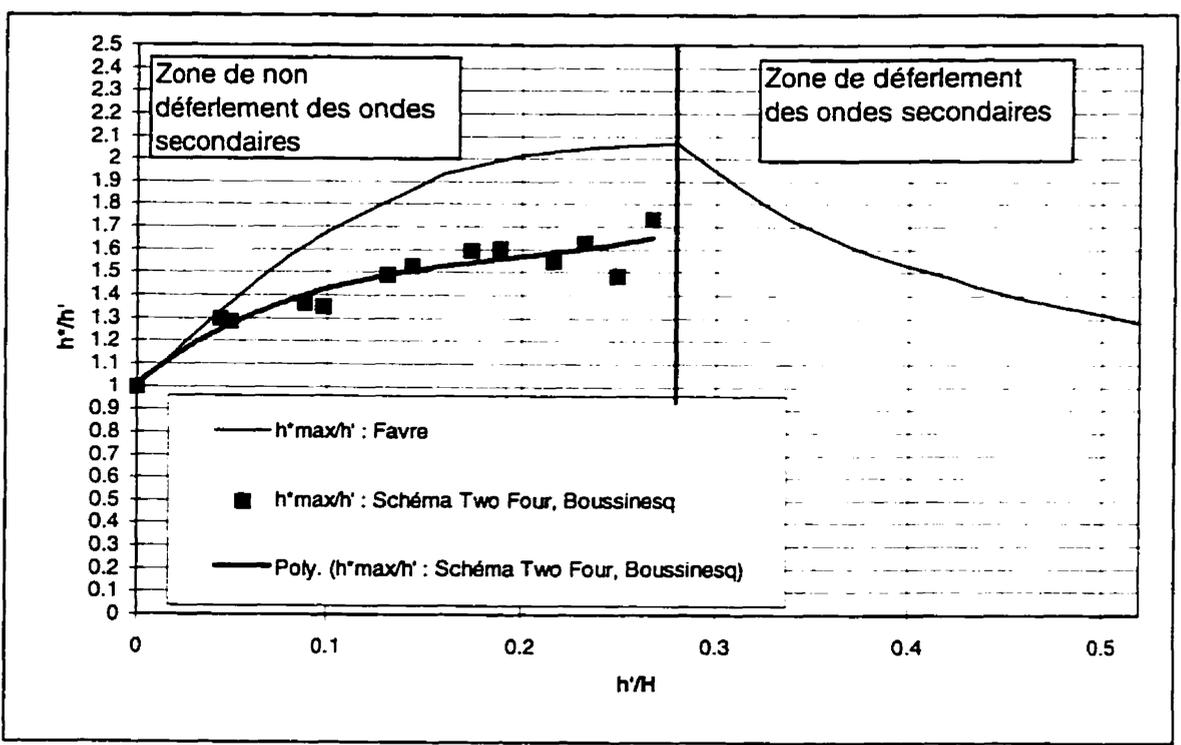


Figure 4.11: Diagramme de Favre d'amplitude maximale des ondes secondaires

Bien que les points correspondant aux résultats des simulations ne concordent pas avec la courbe de Favre, la courbe d'interpolation polynomiale de ces valeurs numériques a cependant un comportement similaire à cette dernière. Elle est croissante et d'allure logarithmique.

De plus, les points situés au voisinage de la frontière de déferlement ( $h'/H=0.28$ ) sont plus éloignés de la courbe d'interpolation. Dans cette région, le modèle numérique devient plus instable, ce qui explique ces fluctuations.

En revanche, sur le reste du domaine de non déferlement des ondes, le schéma numérique produit des résultats cohérents, qu'il s'agisse de simulations avec ou sans débit initial. Ainsi, même si le débit initial a tendance à diminuer l'amplitude maximale des ondes, la hauteur maximale obtenue reste tout de même en accord avec le rapport de hauteur moyenne de l'intumescence.

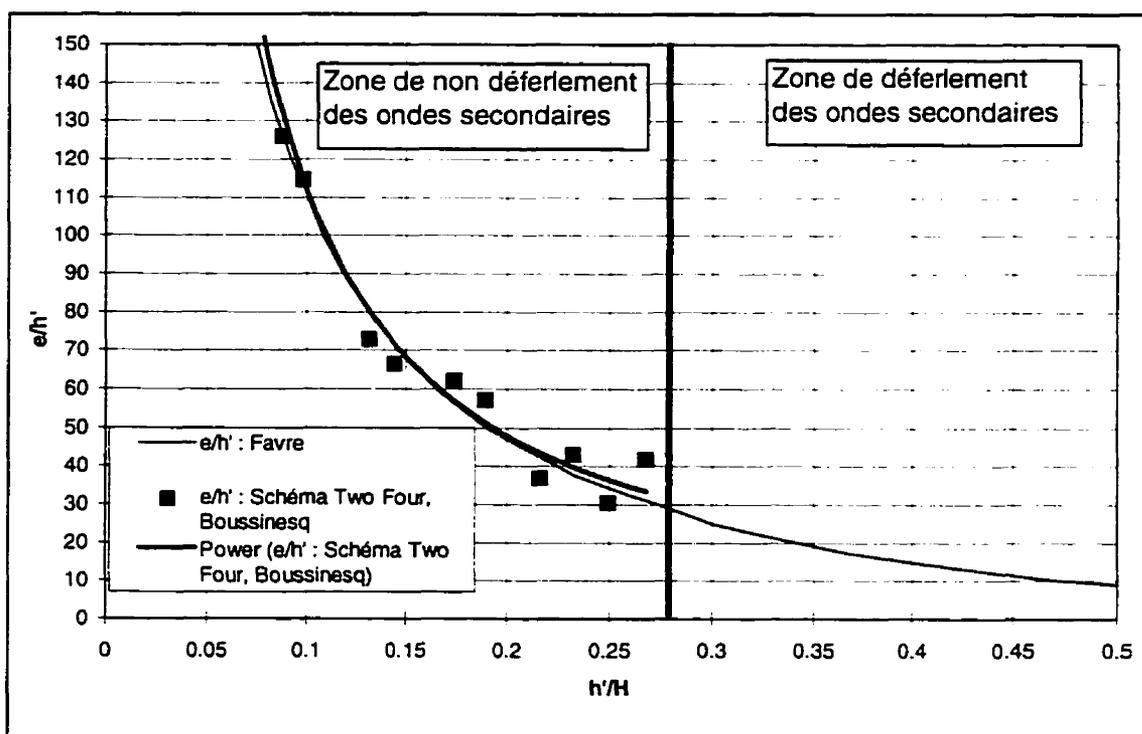


Figure 4.12: Diagramme de Favre, longueurs d'ondes

Le deuxième diagramme de Favre (figure 4.12) représente la longueur d'onde relative des ondulations secondaires en fonction du rapport  $h'/H$ . Les résultats numériques sont de nouveau comparés aux résultats de Favre.

Pour ce qui est de la longueur d'onde des ondulations de Favre, le schéma numérique donne des résultats très convenables. Les points obtenus par simulation sont placés de part et d'autre de la courbe de Favre et la courbe d'interpolation (de type hyperbolique, notée "Power" à la figure 4.12) des valeurs numériques est presque confondue avec cette dernière.

En conclusion, bien que le schéma Two-Four produise des ondes dont les amplitudes sont inférieures à celles des ondes de Favre observées expérimentalement, les longueurs d'onde générées sont assez fidèles à la réalité.

Compte tenu de la nature physique des résultats numériques, il semble raisonnable de supposer que les ondulations secondaires générées par le modèle ne sont pas des oscillations purement numériques causées par une instabilité due à l'ajout des termes correcteurs de Boussinesq aux équations de Saint Venant.

### **4.3 Influence du terme de pente du canal**

L'étude de l'influence de la bathymétrie sur la géométrie des ondes secondaires de Favre est difficile en raison de la nature de l'écoulement qui est rapidement varié. Lorsque l'intumescence se propage dans un canal à fond horizontal et qu'elle rencontre un seuil, des instabilités apparaissent immédiatement à la surface de l'écoulement. Une onde négative accompagnée d'oscillations se forme et se propage

vers l'amont. Ainsi, l'intumescence qui franchit le seuil est d'une hauteur inférieure à celle de l'intumescence initiale.

La figure 4.13 présente les profils de la surface libre, à différents instants, pour une étude de la propagation d'une intumescence générée par une rupture de barrage (profondeurs initiales  $H^0_{\text{amont}}=3.75\text{m}$ ,  $H^0_{\text{aval}}=2.5\text{m}$ ) dans un canal horizontal comportant un seuil de 1.5m de hauteur.

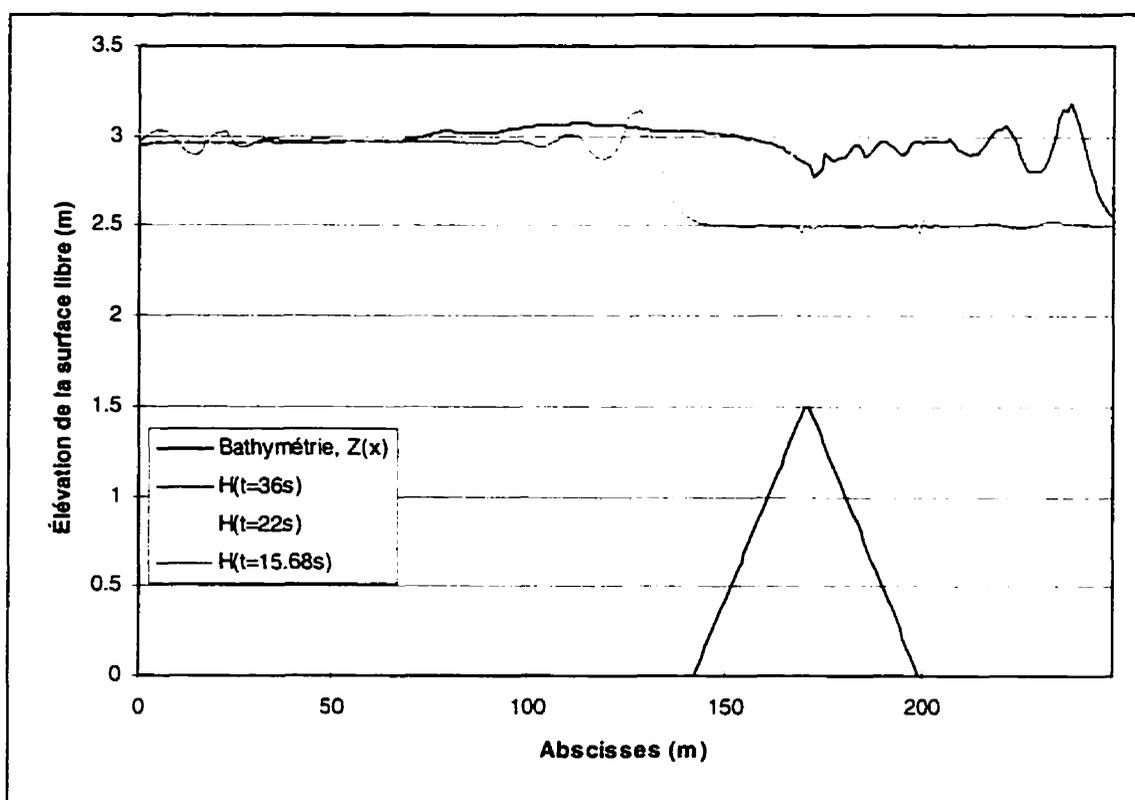


Figure 4.13: Évolution de l'amplitude des ondes secondaires au passage d'un seuil

L'onde négative apparaît sur la courbe de remous au temps  $t=36\text{s}$  et une diminution de la profondeur d'eau se produit au niveau du seuil, comme dans le cas d'un écoulement permanent.

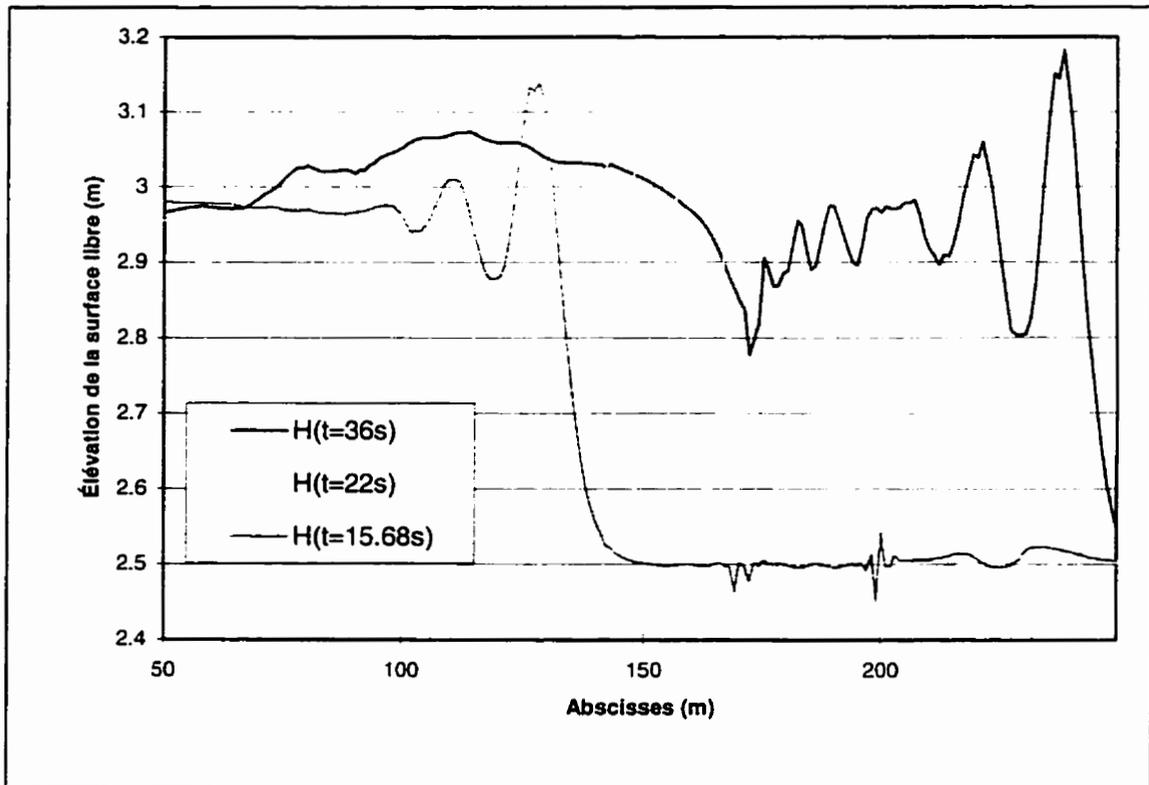


Figure 4.14: Détail des courbes de remous au passage du seuil

La figure 4.14, détail de la figure 4.13, montre nettement l'augmentation de l'amplitude des ondes de Favre au passage du seuil (courbe au temps  $t=22s$ ).

#### 4.4 Influence de la rugosité du canal sur les ondes de Favre

Pour l'étude de l'effet de la rugosité du canal sur les ondes de Favre, une importante série de simulations de rupture en canal horizontal, à débit initial nul, est mise en oeuvre. Les conditions de simulation du paragraphe 4.2.2 (variation de la profondeur initiale  $H_{\text{amont}}^0$  entre 2.75m et 3.95m) sont identiques mais affectées, dans chaque cas,

de cinq valeurs différentes au coefficient de Manning. Ce coefficient prendra les valeurs 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 et 0.05.

Pour un barrage d'une hauteur initiale à l'amont de 3.75m et d'une hauteur à l'aval de 2.5m, après un temps de simulation de 300s, on obtient les profils représentés sur la figure 4.15.

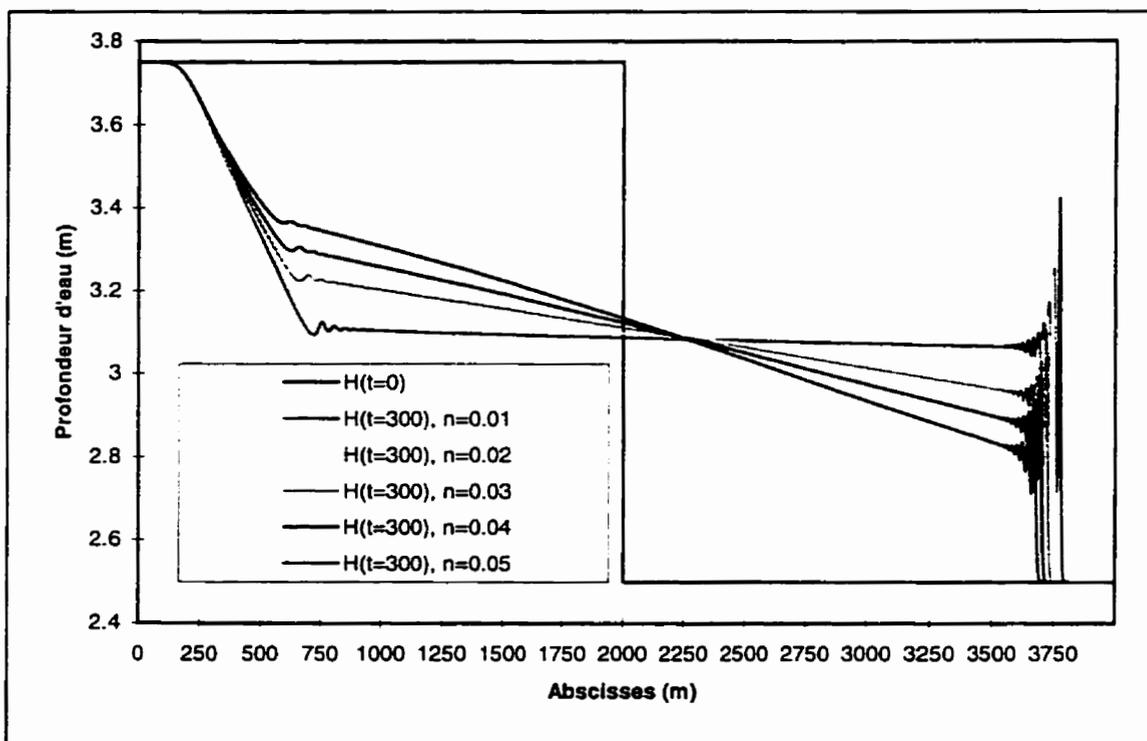


Figure 4.15: Courbes de remous pour différentes valeurs de coefficient de Manning

Plus les pertes de charge par frottement sont importantes et plus la pente de la ligne d'eau est raide. De plus, au cours de la propagation de l'intumescence, la profondeur moyenne du front de l'onde positive diminue et l'amplitude des ondes de Favre décroît.

La figure 4.16 illustre en détail les courbes de remous à la tête des ondes positives.

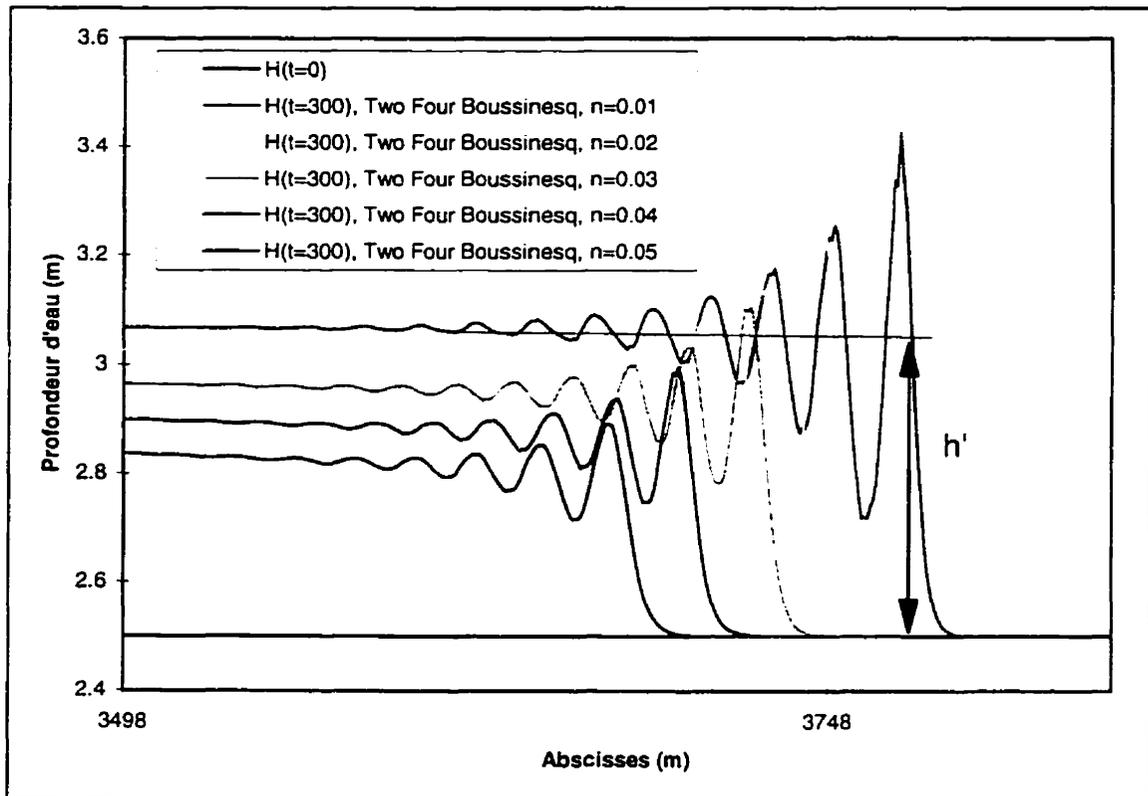


Figure 4.16: Détail des têtes des ondes positives

Au niveau du front d'onde, la profondeur de l'écoulement est d'autant plus faible que le coefficient de Manning est important. Cette diminution de la profondeur d'eau affecte directement la célérité de l'intumescence.

Par ailleurs, on note aussi que la longueur d'onde des ondulations secondaires est conservée, quelle que soit la valeur du coefficient de Manning.

Afin de mieux mettre en évidence l'effet de la rugosité sur les ondes de Favre, les amplitudes maximales relatives des ondes, en fonction de la profondeur moyenne relative de l'écoulement, sont reportées sur le diagramme de Favre.

#### 4.4.1 Diagramme de Favre d'amplitude relative maximale

La figure 4.17 permet une comparaison des courbes obtenues dans différentes conditions de simulations (variation de la profondeur d'eau initiale à l'amont), pour des coefficients de Manning de 0.01, 0.03 et 0.05, avec la courbe générée lorsque le frottement est négligé.

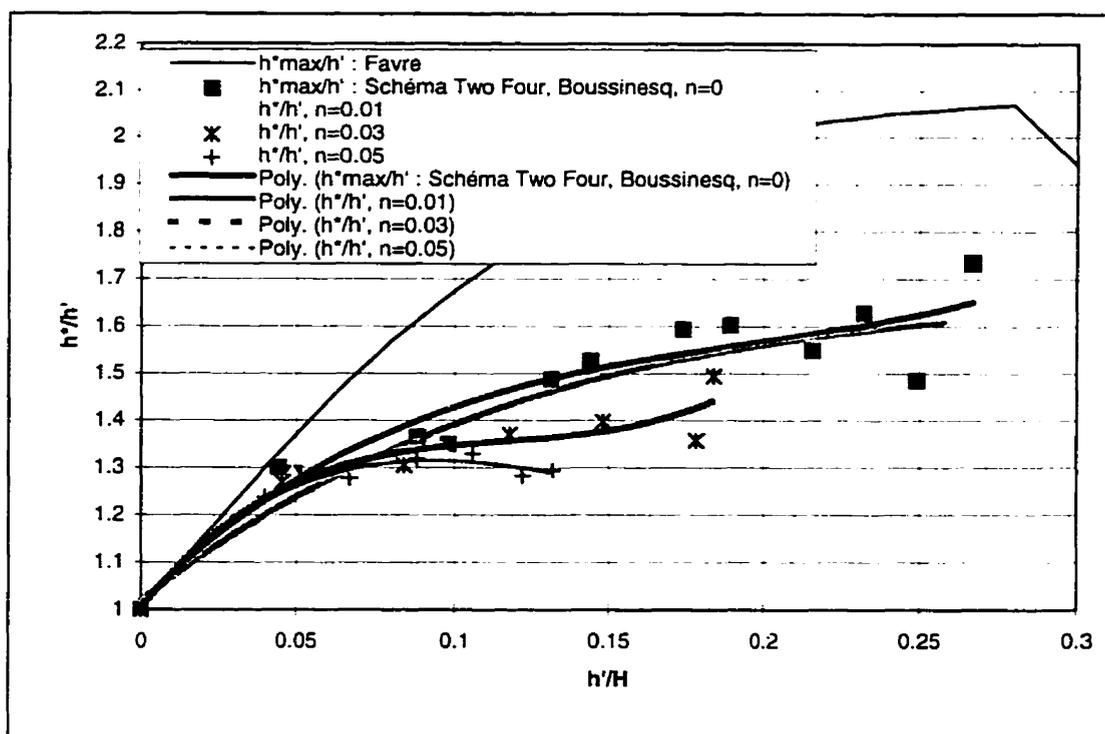


Figure 4.17: Diagramme de Favre et influence du coefficient de Manning

La figure 4.18 met en lumière les résultats des simulations pour les coefficients de Manning de 0.02 et 0.04, comparés à la courbe produite pour un coefficient de frottement nul.

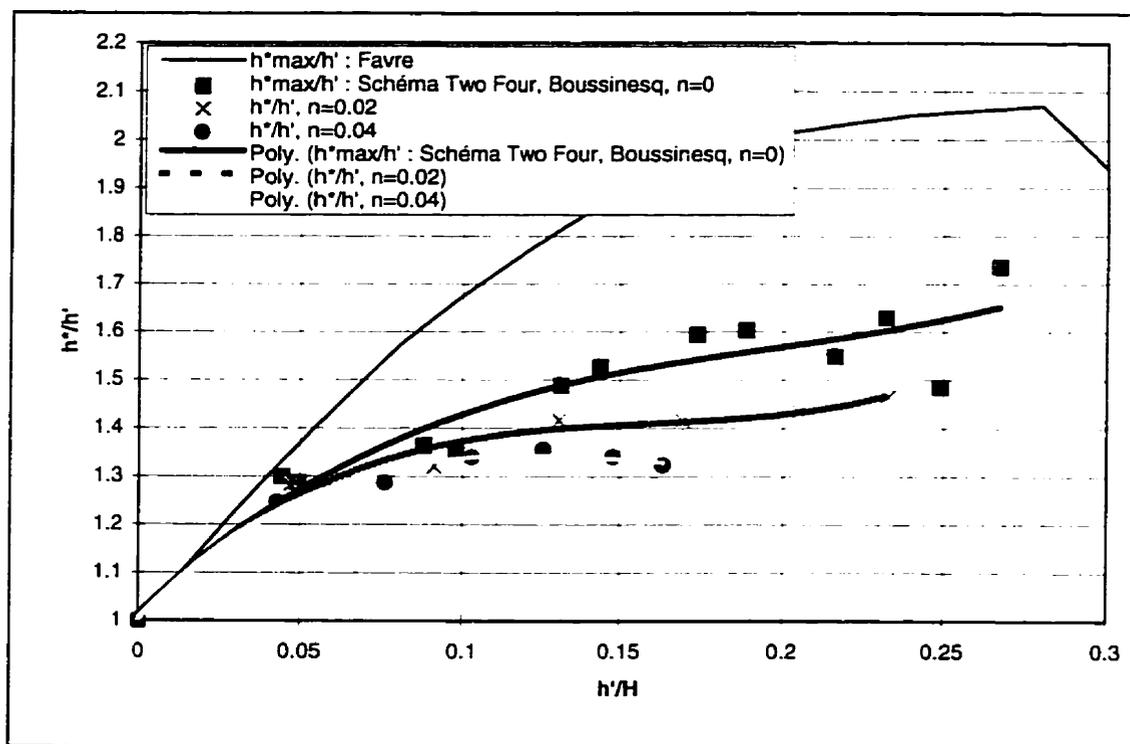


Figure 4.18: Diagramme de Favre et influence du coefficient de Manning

Comme la profondeur moyenne de l'intumescence diminue dès que le coefficient de Manning augmente, le rapport  $h'/H$  diminue, lui aussi, en conséquence. Ainsi, la courbe des amplitudes maximales relative n'occupe plus que la portion située la plus à gauche du domaine de non déferlement des ondes.

De plus, comme la variation de l'amplitude maximale des ondes n'est pas proportionnelle à cette diminution de hauteur moyenne d'intumescence, la pente de la courbe tend à s'infléchir à mesure que le coefficient de Manning augmente. Ce

changement de pente est d'autant plus prononcé que le rapport  $h'/H$  est grand. Ainsi, ce sont surtout les ondes d'amplitude maximale relative importante (pour des conditions de frottement nul) qui sont laminées par le frottement. Lorsque le rapport  $h'/H$  est inférieur à 0.1, toutes les courbes d'interpolation sont proches les unes des autres.

#### **4.4.2 Diagramme de Favre de longueur d'onde relative**

La conservation de la longueur d'onde des ondulations, malgré l'introduction du frottement qui affecte la profondeur moyenne de l'intumescence, ayant été observée, les points des différentes simulations sont reportés sur le deuxième diagramme de Favre.

La figure 4.19 confronte les résultats expérimentaux de Favre à ceux des simulations numériques.

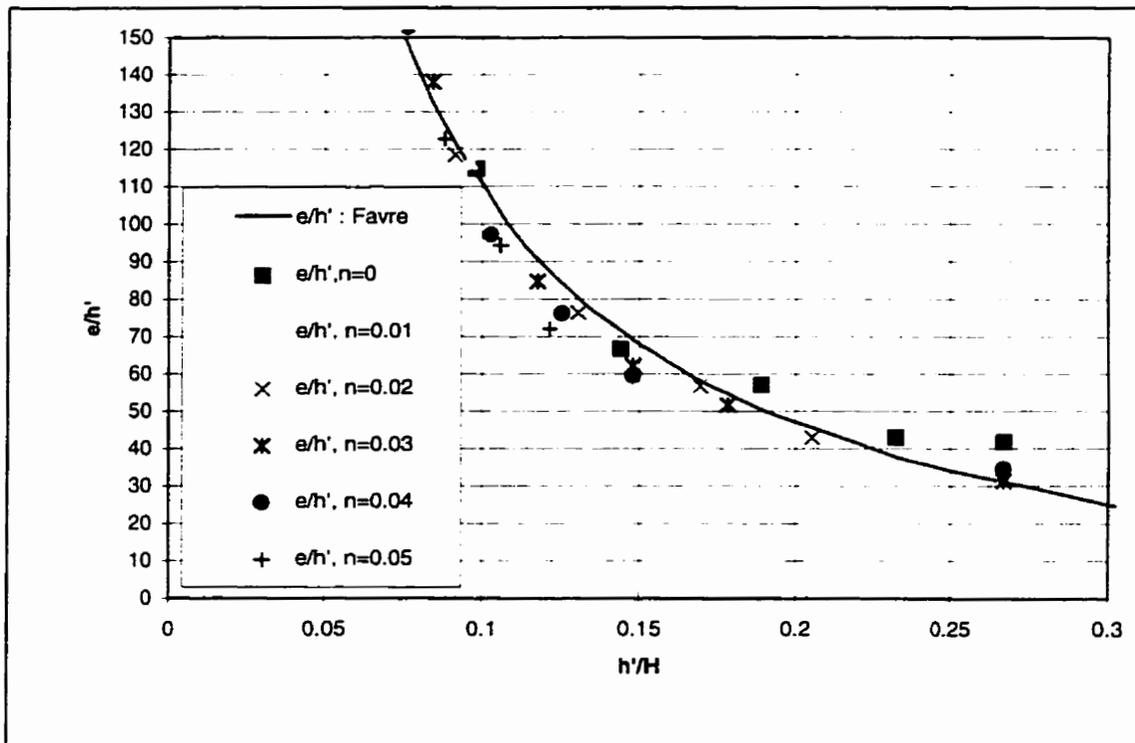


Figure 4.19: Diagramme de Favre de longueur d'onde et influence du Manning

Bien que le rapport  $h'/H$  varie, la valeur du rapport  $e/h'$  reste physique. Les points obtenus pour les simulations numériques sont toujours situés au voisinage de la courbe expérimentale de Favre.

Pour mettre en valeur l'influence prépondérante du frottement sur les ondes de grande amplitude (pour les conditions de simulation sans frottement), l'évolution de l'amplitude relative maximale en fonction du coefficient de Manning, pour des mêmes conditions de hauteur initiale amont, est représentée sur la figure 4.20.

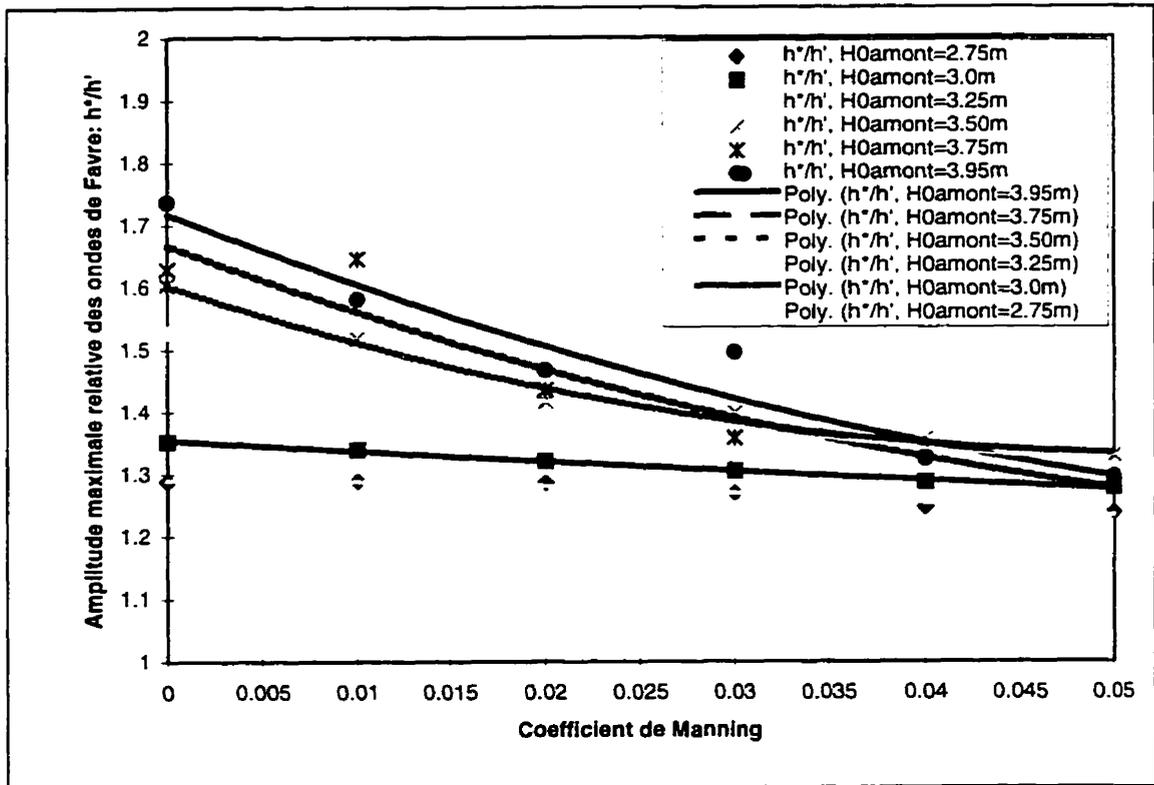


Figure 4.20: Amplitudes maximales relatives des ondes en fonction du Manning

La pente de décroissance de l'amplitude maximale est plus forte pour les ondes qui sont plus proches des conditions de déferlement.

#### 4.5 Ordre de grandeur des termes de Boussinesq et précision requise du schéma

##### 4.5.1 Valeur relative des six termes

L'étude de l'ordre de grandeur des valeurs des six termes correctifs de Boussinesq, ajoutés à l'équation de quantité de mouvement de Saint Venant, révèle que les termes 1, 2 et 3 sont les termes prépondérants. Leurs valeurs absolues sont toujours classées dans l'ordre décroissant 1, 3 et 2.

Inversement, les termes 4, 5 et 6 ont des valeurs presque négligeables. On les a conservés cependant par la suite car il a été observé expérimentalement que leur ajout tend à stabiliser le schéma pour des simulations effectuées sur de grandes durées d'étude.

La figure 4.21 éclaire les résultats de deux simulations réalisées avec des paramètres identiques mais en considérant soit la totalité des termes de Boussinesq, soit les trois termes principaux ou uniquement le terme 1.

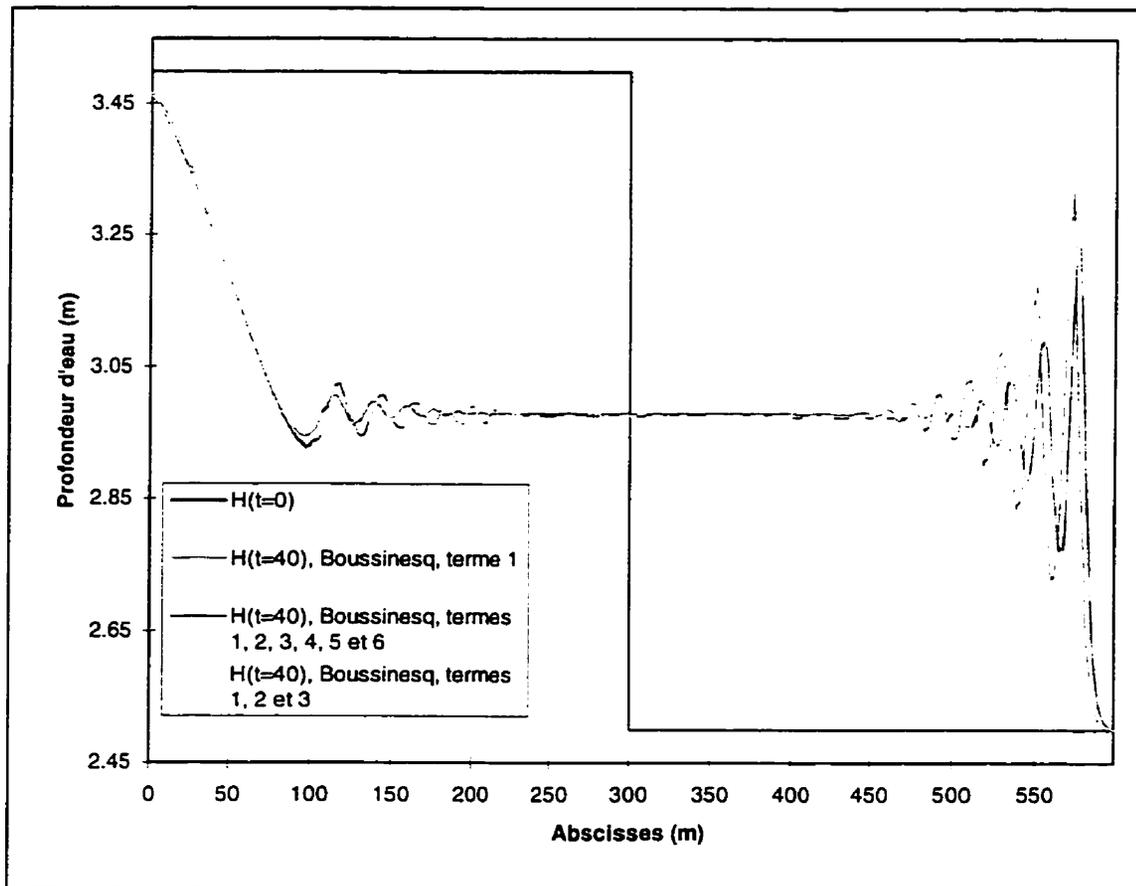


Figure 4.21: Termes prépondérants des équations de Boussinesq

L'inclusion des termes 2 et 3 à la résolution des équations de Boussinesq dans leur forme simplifiée, c'est-à-dire ne comprenant que le terme 1, change radicalement la nature de la solution. Même si l'estimation de l'amplitude maximale des ondes en souffre légèrement, puisqu'on s'écarte un peu plus de la valeur expérimentale qui lui est supérieure, les longueurs d'ondes générées sont plus proches des observations de Favre.

En revanche, l'ajout de la totalité des termes (termes 4, 5 et 6) ne modifie qu'à peine la solution. Une amélioration de la stabilité du schéma est cependant notée avec la prise en compte de tous les termes lorsque la durée de simulation devient importante. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de toujours maintenir les six termes dans la résolution unidimensionnelle.

#### **4.5.2 Ordre de précision du schéma numérique**

Abbott (1979) recommande l'emploi d'un schéma numérique d'un ordre supérieur ou égal au troisième ordre, pour l'approximation des dérivées dans l'espace, afin d'éviter que les erreurs de troncature ne soient d'un ordre supérieur à celui des termes de Boussinesq.

Dans le dernier test, deux ruptures de barrage sont simulées dans les mêmes conditions de pas de temps, de pas d'espace et de coefficient de viscosité, mais en utilisant, pour le calcul du prédicteur et du correcteur appliqués aux équations de Saint Venant, dans un cas le schéma Two-Four et dans l'autre le schéma de MacCormack. Ces deux estimations du prédicteur et du correcteur de Saint Venant sont ensuite corrigées à l'aide de la même procédure d'estimation des termes de Boussinesq.

La figure 4.22 permet la comparaison des profils de la tête de l'onde positive pour les deux types de simulations.

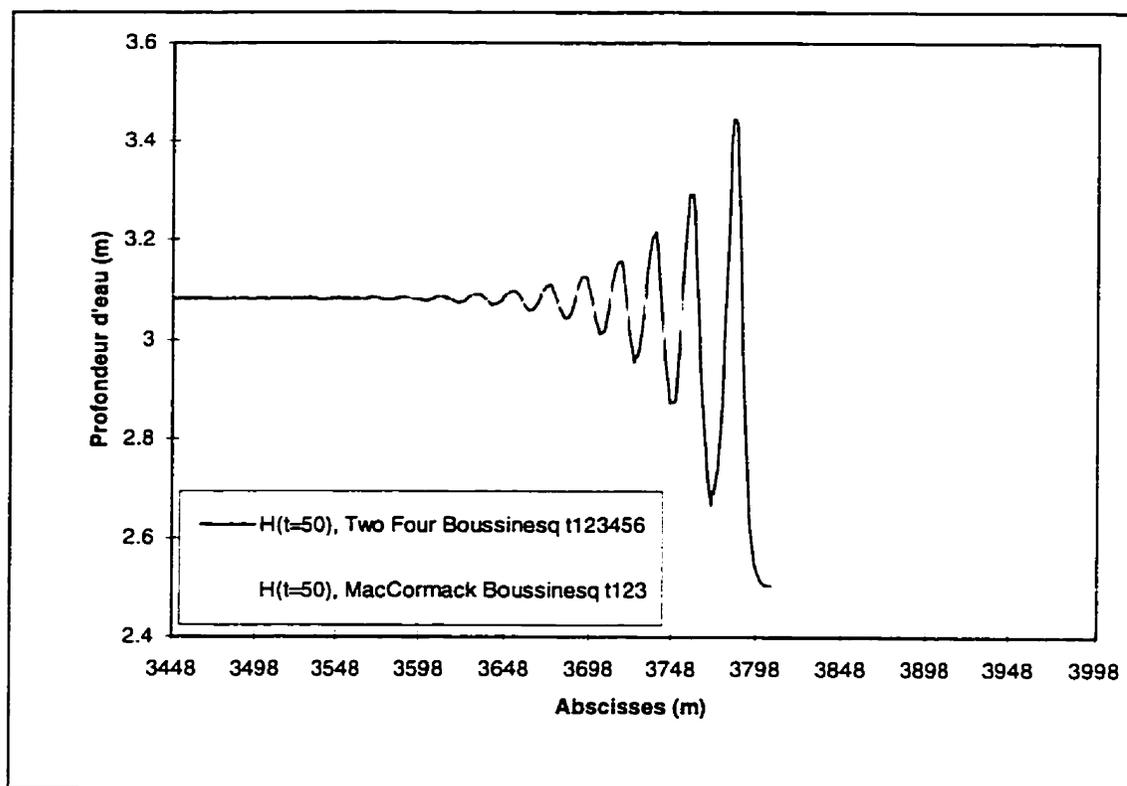


Figure 4.22: Modélisation des ondes secondaires avec le schéma de MacCormack

Le schéma de MacCormack permet de générer des ondes de Favre sur le front d'onde, mais leurs amplitudes sont inférieures à celles obtenues avec le schéma Two-Four.

Gottlieb et Turkel (1976) considèrent que le schéma Two-Four permet, par rapport au schéma de MacCormack, d'obtenir à la fois un ordre de précision supérieur et d'éviter le déphasage de la solution. Même si cette hypothèse n'est peut-être plus valide après une correction de la solution par une moyenne de la somme des termes de Boussinesq,

elle offre cependant une explication vraisemblable au déphasage des solutions de la figure 4.22.

Finalement, cette dernière simulation apporte une preuve supplémentaire de la validité du modèle Two-Four appliqué aux équations de Boussinesq. Les ondulations que l'on pouvait soupçonner être d'origine purement numérique, causées par des instabilités du schéma, sont obtenues au moyen de deux schémas d'ordres différents; l'un étant diffusif, le schéma de MacCormack et l'autre dispersif, le schéma Two-Four. Il est donc peu probable que deux solutions équivalentes soient obtenues avec les mêmes instabilités alors que ces solutions proviennent de schémas dont les caractéristiques numériques sont différentes.

Au terme de cette étude de la modélisation numérique unidimensionnelle des équations complètes de Boussinesq et de l'influence des différents paramètres sur le comportement des ondes secondaires de Favre, une extension du schéma numérique au domaine des écoulements à deux dimensions est proposée.

## CHAPITRE V: MODÉLISATION BIDIMENSIONNELLE

Les hypothèses simplificatrices permettant une étude des écoulements à surface libre dans un cadre unidimensionnel cessent rapidement d'être valides dès lors que des variations significatives de la géométrie des canaux interviennent.

Bien que la condition de continuité de la masse soit toujours satisfaite, celle de la continuité de la quantité de mouvement ne l'est plus que de façon approximative. Les forces exercées sur le fluide, par exemple lors d'une contraction du canal, et qui sont très importantes pour les écoulements rapidement variés, ne peuvent être prises en compte par la modélisation à une dimension. Il est alors préférable d'avoir recours à une approche bidimensionnelle du problème.

Selon Gottlieb et Turkel (1976), la technique du "time splitting" peut être appliquée au schéma Two-Four pour la résolution d'équations hyperboliques et paraboliques dans un espace à deux dimensions, en préservant son ordre de précision.

Le schéma Two-Four étant présenté comme une généralisation à un ordre supérieur dans l'espace du schéma de MacCormack, le développement, qui suit, du modèle bidimensionnel appliqué aux équations de Saint Venant s'inspire très largement des travaux de Garcia et Kahawita (1985).

### 5.1 Schéma Two-Four et équations de Saint Venant

La méthode de résolution “à pas fractionnaire” du schéma de MacCormack est adaptée au schéma Two-Four. L’opérateur en différences finies permettant le calcul des valeurs des variables  $H_{i,j}^{k+1}$ ,  $U_{i,j}^{k+1}$  et  $V_{i,j}^{k+1}$  au temps  $t+\Delta t$ , en fonction des valeurs de ces mêmes variables au temps  $t$ , est obtenu par combinaison des opérateurs suivants

$$W_{i,j}^{k+1} = Lx(\Delta t_x)Ly(\Delta t_y)Ly(\Delta t_y)Lx(\Delta t_x)W_{i,j}^k \quad 5.1$$

où

$$\Delta t_x = \Delta t_y = \frac{\Delta t}{2} \quad 5.2$$

$W$  désigne l’ensemble des variables  $H$ ,  $U$  et  $V$ .

Chaque opérateur  $Lx$  et  $Ly$  est composé d’un prédicteur et d’un correcteur. Les valeurs  $H$ ,  $U$  et  $V$ , issues du produit d’un opérateur et des valeurs de ces variables au temps précédent, sont calculées en effectuant la moyenne des évaluations successives du prédicteur et du correcteur. L’opérateur suivant est ensuite appliqué aux nouvelles variables  $H$ ,  $U$  et  $V$  ainsi obtenues.

A titre d’exemple, l’opérateur  $Lx$  (prédicteur arrière, correcteur avant) et l’opérateur  $Ly$  (prédicteur arrière, correcteur avant) sont détaillés.

### 5.1.1 Lx Prédicteur Arrière

#### 5.1.1.1 Équation de continuité selon x, prédicteur

$$H_{i,j}^p = H_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left[ -7(U_{i,j}^k) + 8(U_{i-1,j}^k) - (U_{i-2,j}^k) \right] \quad 5.3$$

#### 5.1.1.2 Équations de quantité de mouvement selon x, prédicteur

$$U_{i,j}^p = U_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left\{ \begin{aligned} & -7 \left[ \frac{(U_{i,j}^k)^2}{H_{i,j}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i,j}^k)^2 \right] + 8 \left[ \frac{(U_{i-1,j}^k)^2}{H_{i-1,j}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i-1,j}^k)^2 \right] \\ & - \left[ \frac{(U_{i-2,j}^k)^2}{H_{i-2,j}^k} + \frac{1}{2} g (H_{i-2,j}^k)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad 5.4$$

$$+ \Delta t_x g \frac{(H_{i,j}^k + H_{i-1,j}^k)}{2} \left( \frac{(-7Z_{i,j} + 8Z_{i-1,j} - Z_{i-2,j})}{6\Delta x} - \frac{n^2 U_{i,j}^k \sqrt{(U_{i,j}^k)^2 + (V_{i,j}^k)^2}}{(H_{i,j}^k)^{10/3}} \right)$$

$$+ \Delta t_x \varepsilon \frac{(-U_{i-2,j}^k + 16U_{i-1,j}^k - 30U_{i,j}^k + 16U_{i+1,j}^k - U_{i+2,j}^k)}{12\Delta x^2}$$

$$V_{i,j}^p = V_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left\{ \begin{aligned} & -7 \left[ \frac{(U_{i,j}^k V_{i,j}^k)}{H_{i,j}^k} \right] + 8 \left[ \frac{(U_{i-1,j}^k V_{i-1,j}^k)}{H_{i-1,j}^k} \right] - \left[ \frac{(U_{i-2,j}^k V_{i-2,j}^k)}{H_{i-2,j}^k} \right] \end{aligned} \right\} \quad 5.5$$

$$+ \Delta t_x \varepsilon \frac{(-V_{i-2,j}^k + 16V_{i-1,j}^k - 30V_{i,j}^k + 16V_{i+1,j}^k - V_{i+2,j}^k)}{12\Delta x^2}$$

## 5.1.2 Lx Correcteur Avant

### 5.1.2.1 Équation de continuité selon x, correcteur

$$H_{i,j}^c = H_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left[ +7(U_{i,j}^p) - 8(U_{i+1,j}^p) + (U_{i-2,j}^p) \right] \quad 5.6$$

### 5.1.1.2 Équations de quantité de mouvement selon x, correcteur

$$U_{i,j}^c = U_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left\{ +7 \left[ \frac{(U_{i,j}^p)^2}{H_{i,j}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i,j}^p)^2 \right] - 8 \left[ \frac{(U_{i+1,j}^p)^2}{H_{i+1,j}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i+1,j}^p)^2 \right] + \left[ \frac{(U_{i+2,j}^p)^2}{H_{i+2,j}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i+2,j}^p)^2 \right] \right\} \quad 5.7$$

$$+ \Delta t_x g \frac{(H_{i,j}^p + H_{i+1,j}^p)}{2} \left( \frac{+7Z_{i,j} - 8Z_{i+1,j} + Z_{i+2,j}}{6\Delta x} - \frac{n^2 U_{i,j}^p \sqrt{(U_{i,j}^p)^2 + (V_{i,j}^p)^2}}{(H_{i,j}^p)^{10}} \right)$$

$$+ \Delta t_x \varepsilon \frac{(-U_{i-2,j}^p + 16U_{i-1,j}^p - 30U_{i,j}^p + 16U_{i+1,j}^p - U_{i+2,j}^p)}{12\Delta x^2}$$

$$V_{i,j}^c = V_{i,j}^k + \frac{\Delta t_x}{6\Delta x} \left\{ +7 \left[ \frac{(U_{i,j}^p V_{i,j}^p)}{H_{i,j}^p} \right] - 8 \left[ \frac{(U_{i+1,j}^p V_{i+1,j}^p)}{H_{i+1,j}^p} \right] + \left[ \frac{(U_{i+2,j}^p V_{i+2,j}^p)}{H_{i+2,j}^p} \right] \right\} \quad 5.8$$

$$+ \Delta t_x \varepsilon \frac{(-V_{i-2,j}^p + 16V_{i-1,j}^p - 30V_{i,j}^p + 16V_{i+1,j}^p - V_{i+2,j}^p)}{12\Delta x^2}$$

### 5.1.3 Ly Prédicteur Arrière

#### 5.1.3.1 Équation de continuité selon y, prédicteur

$$H_{i,j}^p = H_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left[ -7(V_{i,j}^k) + 8(V_{i,j-1}^k) - (V_{i,j-2}^k) \right] \quad 5.9$$

#### 5.1.3.2 Équations de quantité de mouvement selon y, prédicteur

$$U_{i,j}^p = U_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left\{ -7 \left[ \frac{(U_{i,j}^k V_{i,j}^k)}{H_{i,j}^k} \right] + 8 \left[ \frac{(U_{i,j-1}^k V_{i,j-1}^k)}{H_{i,j-1}^k} \right] - \left[ \frac{(U_{i,j-2}^k V_{i,j-2}^k)}{H_{i,j-2}^k} \right] \right\} \quad 5.10$$

$$+ \Delta t_y \varepsilon \frac{(-U_{i,j-2}^k + 16U_{i,j-1}^k - 30U_{i,j}^k + 16U_{i,j+1}^k - U_{i,j+2}^k)}{12\Delta y^2}$$

$$V_{i,j}^p = V_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left\{ -7 \left[ \frac{(V_{i,j}^k)^2}{H_{i,j}^k} + \frac{1}{2} g(H_{i,j}^k)^2 \right] + 8 \left[ \frac{(V_{i,j-1}^k)^2}{H_{i,j-1}^k} + \frac{1}{2} g(H_{i,j-1}^k)^2 \right] \right\} \quad 5.11$$

$$- \left[ \frac{(V_{i,j-2}^k)^2}{H_{i,j-2}^k} + \frac{1}{2} g(H_{i,j-2}^k)^2 \right]$$

$$+ \Delta t_y g \frac{(H_{i,j}^k + H_{i,j-1}^k)}{2} \left( \frac{(-7Z_{i,j} + 8Z_{i,j-1} - Z_{i,j-2})}{6\Delta y} - \frac{n^2 V_{i,j}^k \sqrt{(U_{i,j}^k)^2 + (V_{i,j}^k)^2}}{(H_{i,j}^k)^{\frac{10}{3}}} \right)$$

$$+ \Delta t_y \varepsilon \frac{(-V_{i,j-2}^k + 16V_{i,j-1}^k - 30V_{i,j}^k + 16V_{i,j+1}^k - V_{i,j+2}^k)}{12\Delta y^2}$$

### 5.1.4 Ly Correcteur Avant

#### 5.1.4.1 Équation de continuité selon y, correcteur

$$H_{i,j}^c = H_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left[ +7(V_{i,j}^p) - 8(V_{i,j+1}^p) + (V_{i,j+2}^p) \right] \quad 5.12$$

#### 5.1.4.2 Équations de quantité de mouvement selon y, correcteur

$$U_{i,j}^c = U_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left\{ +7 \left[ \frac{(U_{i,j}^p V_{i,j}^p)}{H_{i,j}^p} \right] - 8 \left[ \frac{(U_{i,j+1}^p V_{i,j+1}^p)}{H_{i,j+1}^p} \right] + \left[ \frac{(U_{i,j+2}^p V_{i,j+2}^p)}{H_{i,j+2}^p} \right] \right\} \quad 5.13$$

$$+ \Delta t_y \varepsilon \frac{(-U_{i,j-2}^p + 16U_{i,j-1}^p - 30U_{i,j}^p + 16U_{i,j+1}^p - U_{i,j+2}^p)}{12\Delta y^2}$$

$$V_{i,j}^c = V_{i,j}^k + \frac{\Delta t_y}{6\Delta y} \left\{ +7 \left[ \frac{(V_{i,j}^p)^2}{H_{i,j}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i,j}^p)^2 \right] - 8 \left[ \frac{(V_{i,j+1}^p)^2}{H_{i,j+1}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i,j+1}^p)^2 \right] \right\} \quad 5.14$$

$$+ \left[ \frac{(V_{i,j+2}^p)^2}{H_{i,j+2}^p} + \frac{1}{2} g (H_{i,j+2}^p)^2 \right]$$

$$+ \Delta t_y g \frac{(H_{i,j}^p + H_{i,j+1}^k)}{2} \left( \frac{(+7Z_{i,j} - 8Z_{i,j+1} + Z_{i,j+2})}{6\Delta y} - \frac{n^2 V_{i,j}^p \sqrt{(U_{i,j}^p)^2 + (V_{i,j}^p)^2}}{(H_{i,j}^p)^{\frac{10}{3}}} \right)$$

$$+ \Delta t_y \varepsilon \frac{(-V_{i,j-2}^p + 16V_{i,j-1}^p - 30V_{i,j}^p + 16V_{i,j+1}^p - V_{i,j+2}^p)}{12\Delta y^2}$$

### 5.1.5 Alternance des opérateurs

Pour éviter d'introduire une direction préférentielle au sein de l'écoulement, les deux séquences d'opérateurs sont alternées à chaque pas de temps.

Lorsque la variable d'itération temporelle est paire, la séquence de calcul est

Lx Prédicteur Arrière, Correcteur Avant  
 Ly Prédicteur Arrière, Correcteur Avant  
 Ly Prédicteur Avant, Correcteur Arrière  
 Lx Prédicteur Avant, Correcteur Arrière

et lorsqu'elle est impair, elle devient

Ly Prédicteur Arrière, Correcteur Avant  
 Lx Prédicteur Arrière, Correcteur Avant  
 Lx Prédicteur Avant, Correcteur Arrière  
 Ly Prédicteur Avant, Correcteur Arrière

### 5.1.6 Condition de stabilité

De même que pour le schéma Two-Four unidimensionnel, on s'assure que la condition CFL est respectée pour chaque opérateur (donc pour chaque intervalle de temps  $\Delta t/2$ ), soit,

pour l'opérateur  $L_x$

$$C_n = \frac{\Delta t_x}{\Delta x} \left[ \max \left( \frac{|U|}{H} + \sqrt{gH} \right) \right] \leq \frac{2}{3} \quad 5.15$$

et pour l'opérateur  $L_y$

$$C_n = \frac{\Delta t_y}{\Delta y} \left[ \max \left( \frac{|V|}{H} + \sqrt{gH} \right) \right] \leq \frac{2}{3} \quad 5.16$$

### 5.1.7 Conditions aux frontières

La technique de génération de deux noeuds images (situés de l'autre côté de la frontière) développée pour le modèle à une dimension est généralisée à l'ensemble des frontières (étanches et ouvertes) dans le cas bidimensionnel.

En effet, lorsque le schéma Two-Four est utilisé pour le calcul des noeuds situés à l'intérieur du domaine et que le schéma de MacCormack est employé pour les noeuds proches des frontières, comme le préconisent Gharangik et Chaudhry (1991), d'importantes instabilités numériques apparaissent.

Les frontières au travers desquelles le flux est non nul (débit entrant ou sortant) sont traitées de la même façon que dans le cas du modèle unidimensionnel. En revanche, pour les frontières étanches, suivant la valeur du coefficient de viscosité turbulente, deux cas doivent être distingués.

### 5.1.7.1 Terme de viscosité turbulente $\epsilon$ nul

Lorsque les termes de viscosité turbulente sont négligés, les composantes parallèles aux frontières des vitesses du noeud situé à l'intérieur du domaine et du noeud image, sont égales. Par contre, les composantes perpendiculaires sont opposées de façon à satisfaire la condition de flux nul au travers des parois. La figure 5.1 résume ces conditions.

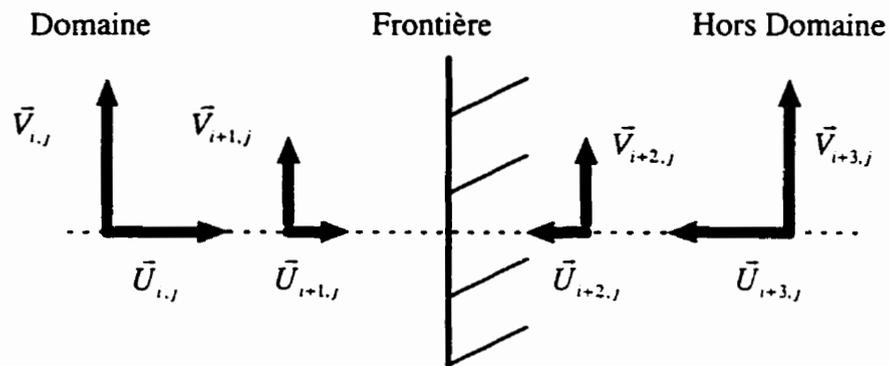


Figure 5.1: Frontière étanche, viscosité turbulente nulle

### 5.1.7.2 Terme de viscosité turbulente $\epsilon$ non nul

Quand les termes de viscosité turbulente sont pris en compte, la condition de non glissement aux parois doit être satisfaite. Les vitesses tangentielles du noeud image et du noeud intérieur au domaine sont alors opposées. La composante perpendiculaire reste opposée. La figure 5.2 illustre ces hypothèses.

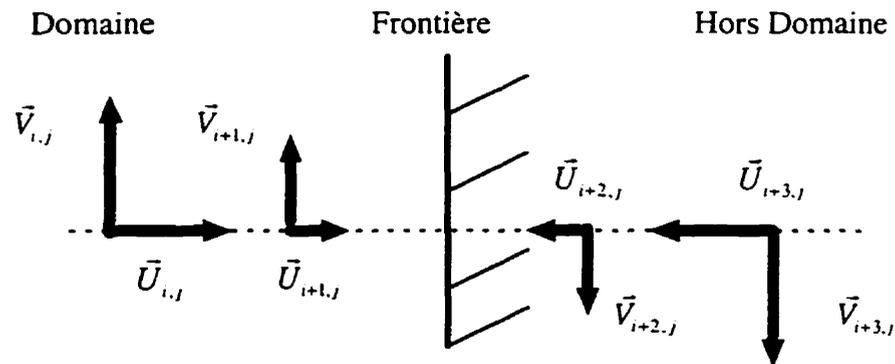


Figure 5.2: Frontière étanche, viscosité turbulente non nulle

## 5.2 Validation du schéma Two-Four Saint Venant

Le schéma Two-Four, appliqué aux équations bidimensionnelles de Saint Venant, a été validé par comparaison de ses résultats avec ceux produits par le schéma de MacCormack soumis aux mêmes conditions de simulation.

Plusieurs tests de simulation d'écoulements à caractère unidimensionnel en canal rectangulaire de section constante (canaux à pente variable, avec ou sans frottement) ont par ailleurs été réalisés avec les modèles à une dimension et à deux dimensions.

Les deux modèles génèrent des solutions identiques. La méthode de traitement des frontières ne semble pas affecter la nature de la solution.

De plus, le schéma Two-Four et le schéma de MacCormack aboutissent à des solutions identiques lorsqu'il s'agit d'écoulements permanents et à des solutions en étroite corrélation pour des écoulements rapidement variés.

Les différences entre les deux schémas ne se manifestent que localement, dans les régions de l'écoulement à fort gradient. Le caractère dispersif du schéma Two-Four tend en effet à "lisser" la solution dans les régions dans lesquelles le schéma de MacCormack génère des oscillations.

La figure 5.3 montre une solution du schéma de MacCormack à l'instant  $t=2s$  pour des conditions de simulation de rupture de barrage de  $H^0_{\text{amont}}=3.5m$ ,  $H^0_{\text{aval}}=2.5m$ ,  $dt=0.196$ ,  $dx=1m$ , viscosités artificielle et turbulente nulle. La rupture est partielle, seule la partie centrale du barrage disparaît (environ un tiers de largeur du canal).

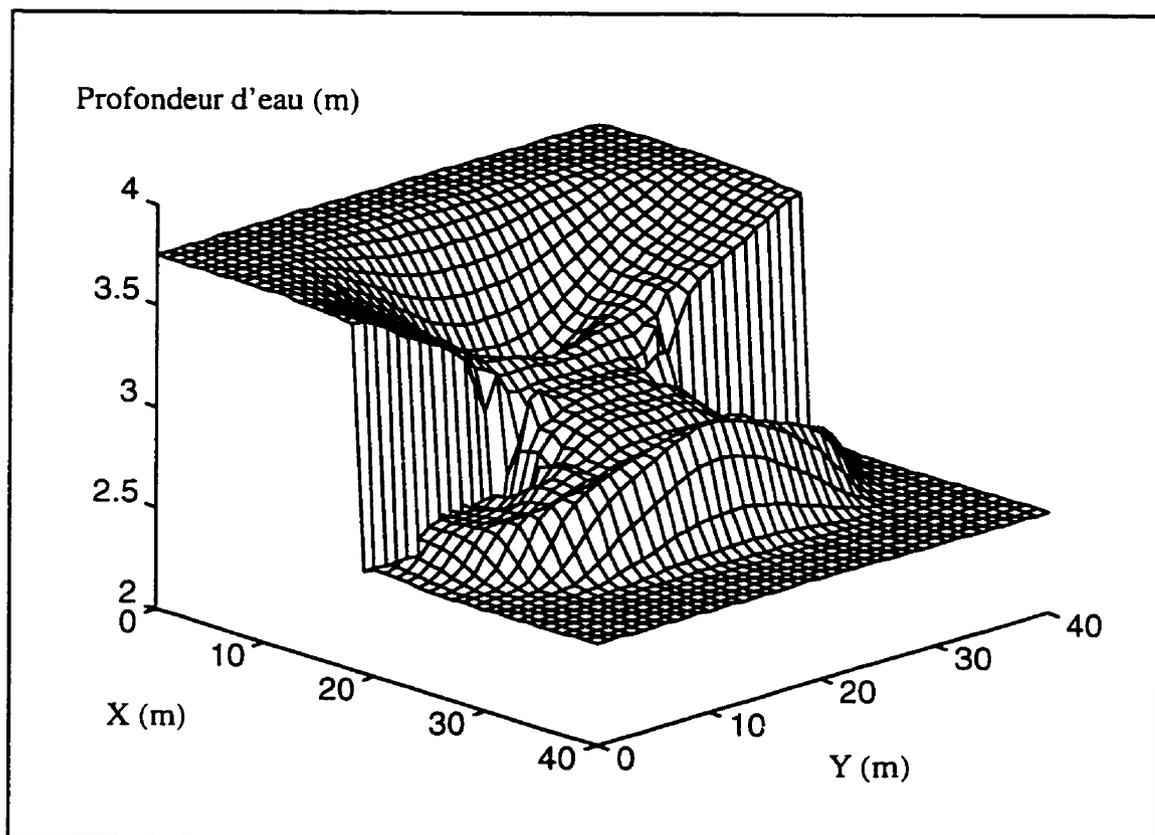


Figure 5.3: Simulation de rupture, Schéma de MacCormack

La solution du schéma Two-Four pour les mêmes conditions est présentée à la figure 5.4.

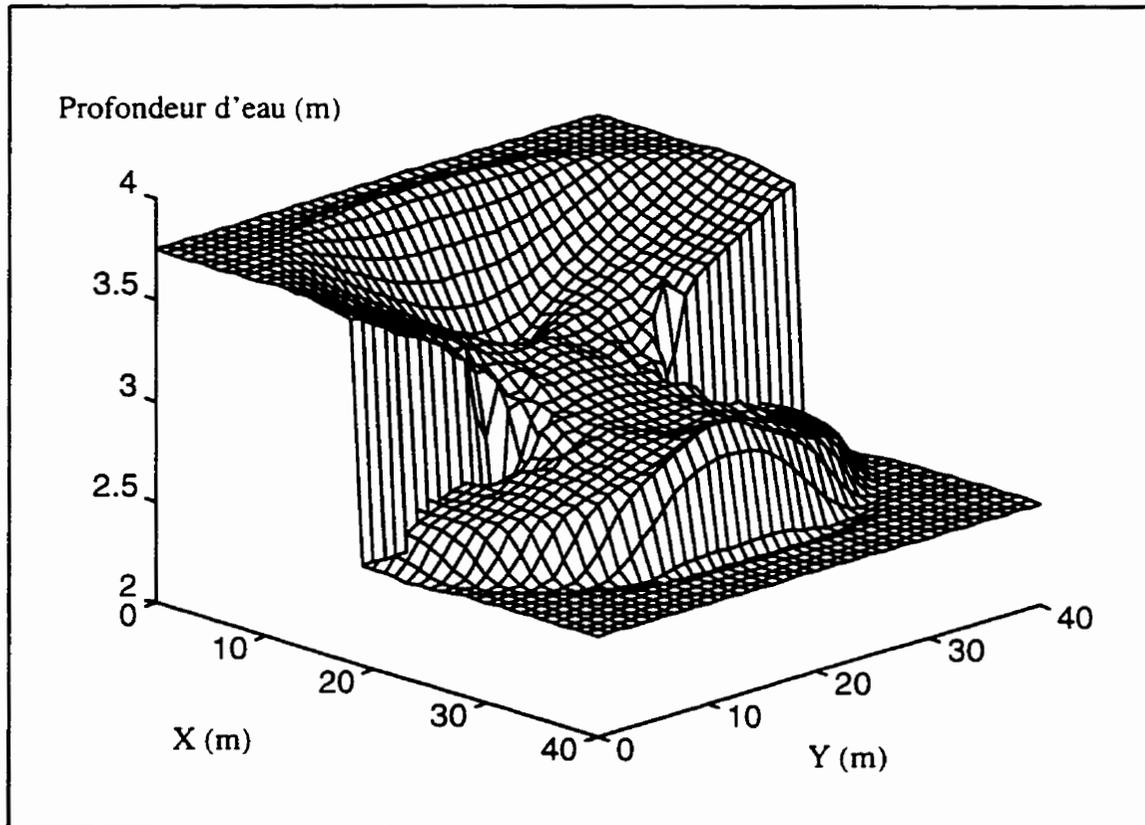


Figure 5.4: Simulation de rupture, Schéma Two-Four

Le front d'onde positive est un peu plus raide dans le cas du schéma Two-Four et les oscillations à la surface de l'intumescence sont moins marquées. De plus, comme dans le cas des simulations dans le cadre unidimensionnel, la base de l'onde positive et la tête de l'onde négative comportent une légère ondulation que le schéma de MacCormack ne produit pas.

Mais, dans l'ensemble, les résultats des deux schémas sont semblables puisque la célérité de l'intumescence et sa profondeur moyenne sont les mêmes.

Finalement, la figure 5.5 illustre le champ de vitesse de la solution à l'instant  $t=2s$  pour le schéma Two-Four.

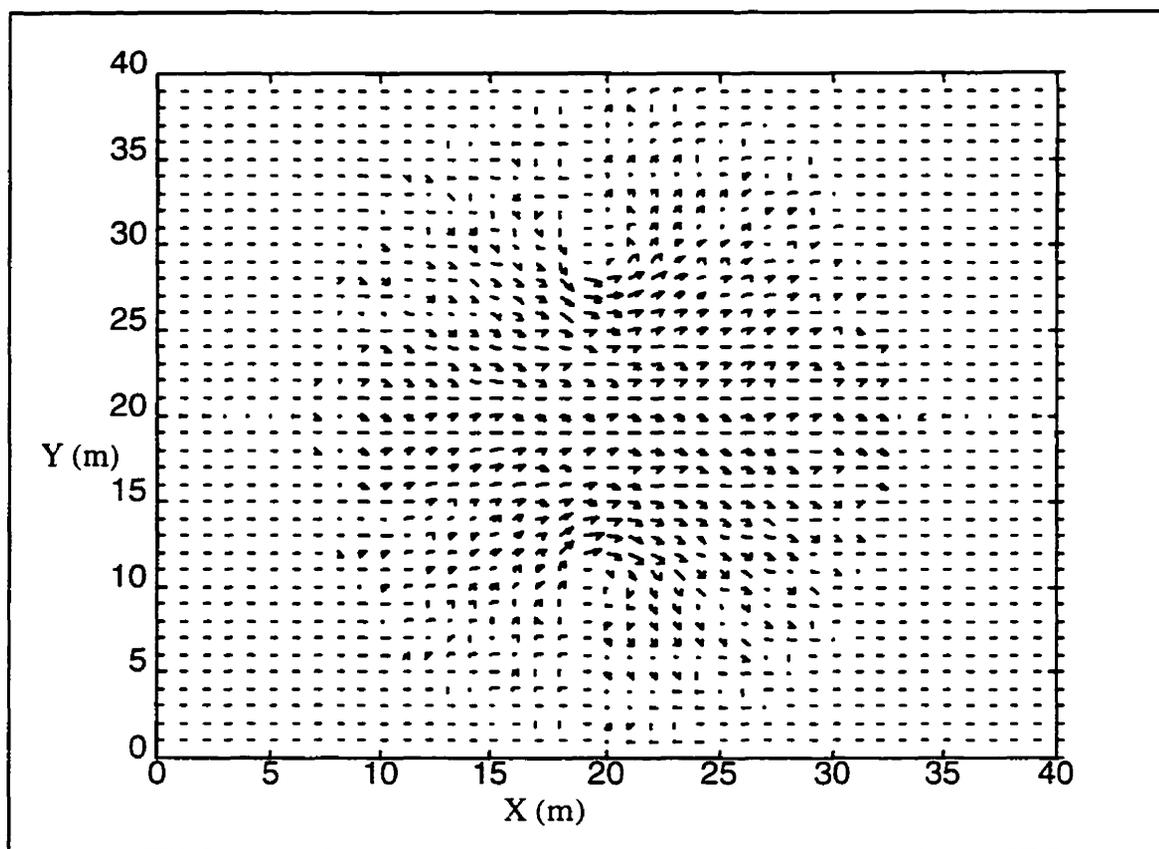


Figure 5.5: Champ de vitesses, Schéma Two-Four

Les vitesses sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie du domaine. Le schéma Two-Four ne semble donc pas générer de direction préférentielle dans l'écoulement.

### **5.3 Schéma Two-Four et équations de Boussinesq**

#### **5.3.1 Simplification des équations de Boussinesq**

La structure de résolution du schéma Two-Four, fondée sur un traitement séparé des directions X et Y, rend impossible l'évaluation des dérivées croisées des équations bidimensionnelles de Boussinesq (voir équations 2.21 et 2.22). Les termes sont donc négligés et, compte tenu de cette approximation, seuls les trois termes prépondérants de Boussinesq sont incorporés aux équations.

#### **5.3.2 Méthode de résolution des équations de Boussinesq**

La procédure de correction de la solution des équations de Saint Venant est la même que celle du modèle unidimensionnel.

Après chaque évaluation des variables H, U et V par le prédicteur ou le correcteur, les variables de débit spécifique U et V sont modifiées par ajout des termes de Boussinesq calculés en fonction des dernières valeurs obtenues.

Bien que les conditions aux frontières du modèle bidimensionnel permettent de calculer la valeur des trois termes de Boussinesq en chacun des noeuds du domaine, la moyenne de la somme de ces différents termes (voir équation 3.2) ne peut cependant être effectuée au voisinage des frontières. Le terme correcteur de Boussinesq est donc omis près des frontières. Cette approximation affecte un peu l'élévation des ondes de Favre près de la frontière, mais le résultat est dans l'ensemble satisfaisant dans la mesure où les dimensions du domaine sont suffisamment importantes.

### **5.3.3 Viscosité artificielle FCT**

Afin de pouvoir contrôler l'influence de la viscosité artificielle sur le modèle bidimensionnel et de reproduire le mieux possible les résultats des simulations réalisées pour la résolution de problèmes à une dimension, la procédure de viscosité artificielle FCT est appliquée séparément dans les deux directions de l'écoulement. Il est ainsi possible d'affecter au modèle des valeurs du coefficient de diffusion  $\kappa(\text{FCT})$  plus proches de celle imposée dans le modèle à une dimension.

### **5.3.4 Validation du schéma Two-Four Boussinesq**

Des simulations de rupture de barrage, en canal rectangulaire de section constante, sont produites avec les modèles à une dimension et à deux dimensions. A l'exception des zones situées au voisinage des frontières (puisque les termes de Boussinesq y sont négligés), les solutions sont parfaitement identiques si la viscosité n'est pas mise en jeu. Dès que cette dernière intervient, les amplitudes des ondes peuvent varier légèrement d'un modèle à l'autre puisqu'il est difficile d'ajuster les valeurs des coefficients  $\kappa$  du modèle bidimensionnel à celle du modèle unidimensionnel.

## 5.4 Simulation de la propagation des ondes de Favre en canal de section variable

### 5.4.1 Élargissement graduel de la section rectangulaire du canal

L'étude de l'influence de la variation de largeur du canal débute dans un canal de section rectangulaire. Dans le premier tronçon, la largeur est constante (20m) sur une distance de 140m, puis elle augmente à raison de 2m tous les 10m pour atteindre finalement une largeur de 40m dans le dernier tronçon de 60m de long.

Une intumescence est générée dans le canal grâce à la simulation d'une rupture de barrage. La profondeur initiale à l'amont ( $H_{\text{amont}}^0=3.75\text{m}$ ) s'étend sur les 30 premiers mètres du canal, le reste du domaine ayant une profondeur de 2.5m.

Pour éviter qu'une onde parasite ne vienne perturber la simulation, les frontières ouvertes sont définies avec la condition de première dérivée nulle. L'onde négative peut ainsi quitter le domaine vers l'amont sans perturber le reste de l'écoulement.

Les profondeurs d'eau sont enregistrées à chaque pas de temps en trois points situés sur l'axe de symétrie du domaine (sonde<sub>1</sub> en  $x_1=140\text{m}$ ,  $y_1=20\text{m}$ ; sonde<sub>2</sub> en  $x_2=190\text{m}$ ,  $y_2=20\text{m}$ ; sonde<sub>3</sub> en  $x_3=240\text{m}$ ,  $y_3=20\text{m}$ ). La figure 5.6 présente la géométrie du domaine, la position du barrage et celles des sondes.

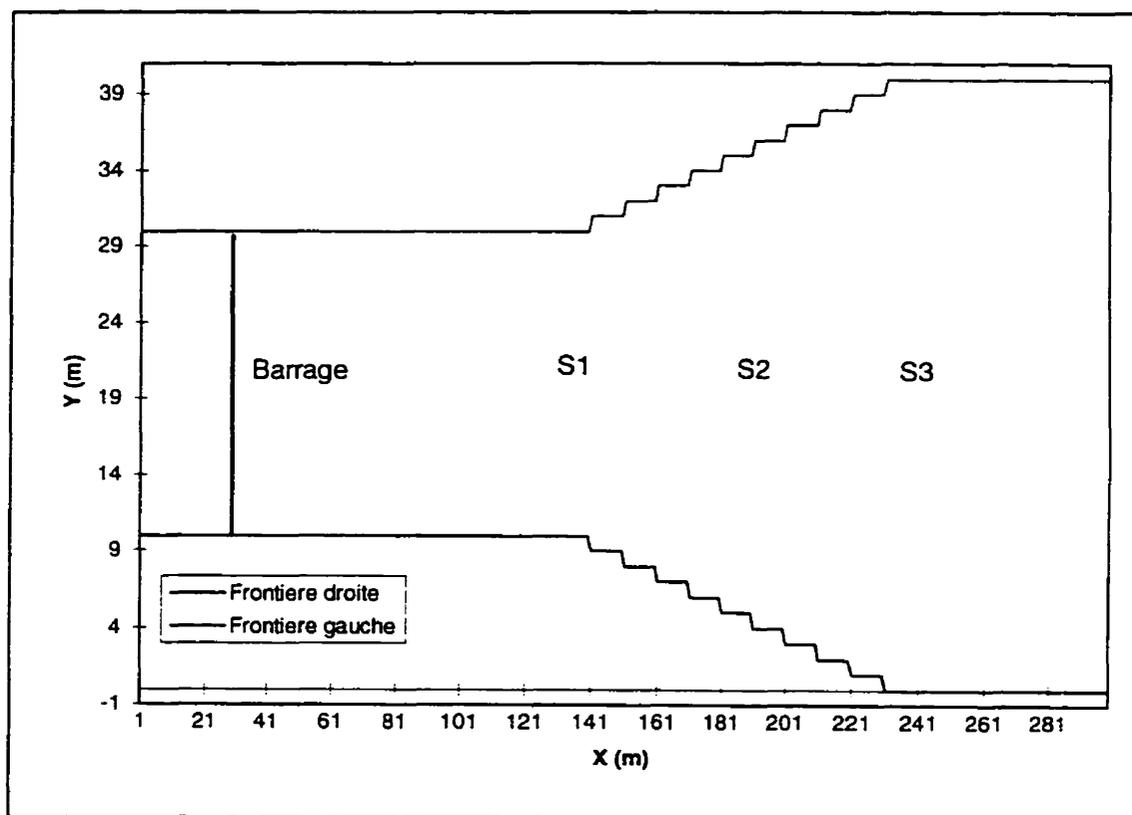


Figure 5.6: Géométrie du premier domaine de section variable

Les enregistrements des trois sondes (profondeur d'eau en fonction du temps) sont donnés à la figure 5.7.

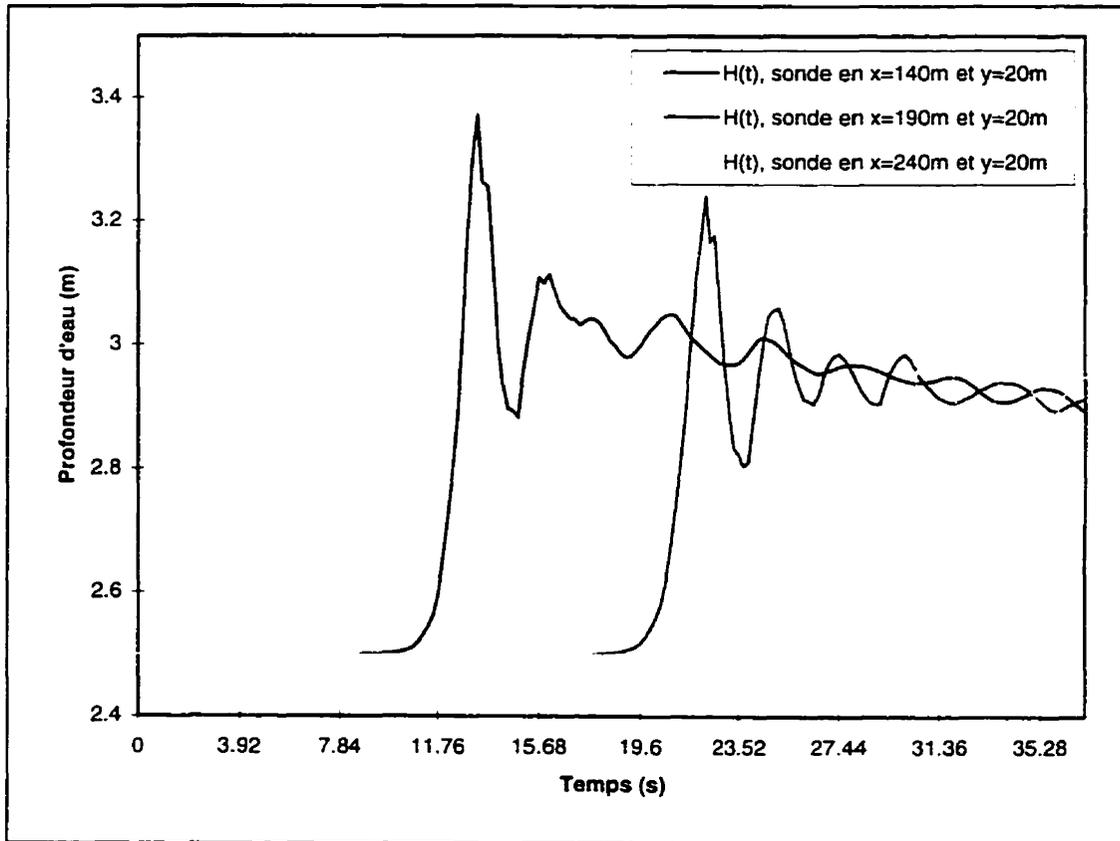


Figure 5.7: Évolution du front d'ondes au cours de la propagation

Le premier enregistrement du profil de l'intumescence à la sonde 1 montre que les ondes de Favre n'ont pas eu le temps de se développer parfaitement lors de la propagation de l'intumescence sur les 110 premiers mètres du canal, mais l'amplitude maximale de la première onde est tout de même significative et proche de sa valeur maximale.

Comme le prouvent des simulations fondées sur les équations de Saint Venant, la profondeur moyenne de l'intumescence diminue progressivement à mesure que le canal s'élargit. Cependant, l'amplitude des ondes de Favre diminue aussi. Même si l'amplitude maximale de la première ondulation est supérieure à la valeur fournie par

le modèle pour des conditions équivalentes du rapport  $h'/H$ , cette valeur retrouve sa normale au niveau de la troisième sonde.

La variation de géométrie qui provoque un changement de la profondeur moyenne relative  $h'/H$  de l'intumescence influence aussi l'amplitude maximale des ondes secondaires de Favre qui évoluent conformément à la courbe du premier diagramme de Favre.

Les longueurs d'onde augmentent mais ne parviennent pas tout à fait à atteindre, sur une courte distance, la valeur de la courbe de Favre.

La figure 5.8 met en évidence la forme du front de l'onde positive au cours de sa propagation dans la section de largeur variable.

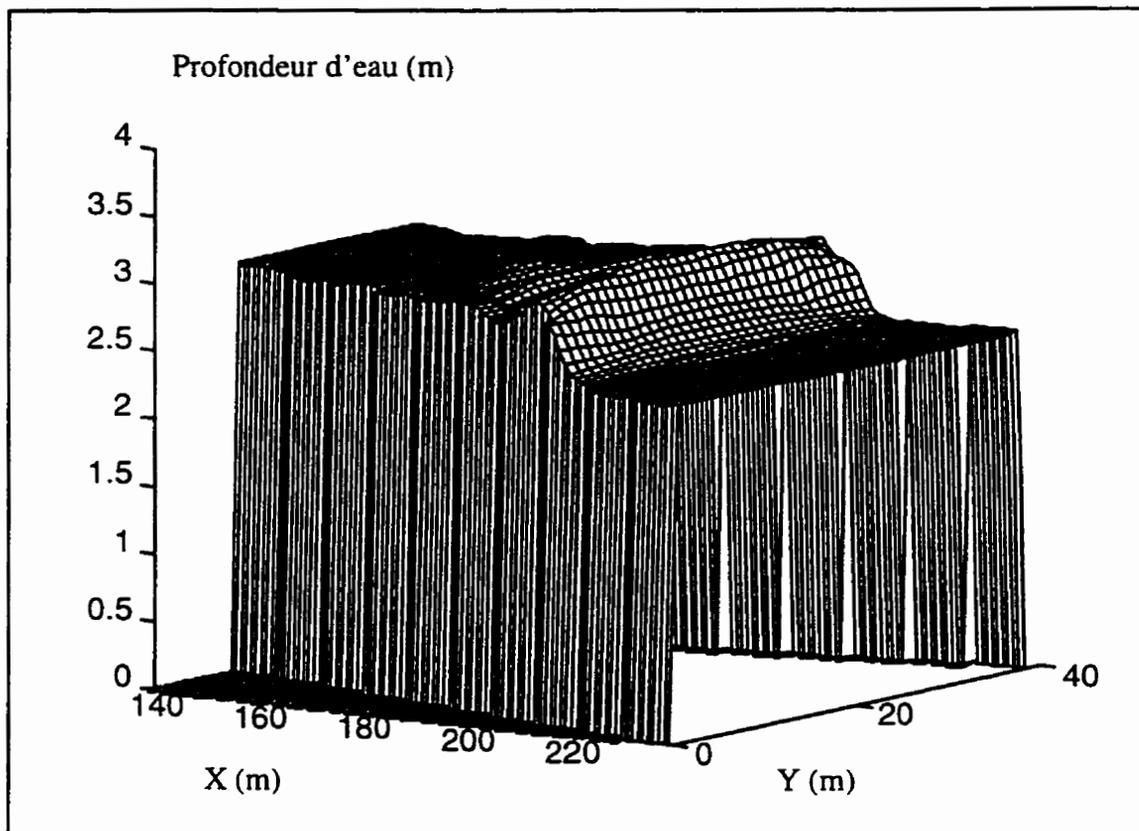


Figure 5.8: Front d'ondes dans le tronçon de section variable

#### 5.4.1 Rétrécissement graduel de la section rectangulaire du canal

La deuxième étude est menée dans un canal rectangulaire d'une largeur de 40m sur ses 140 premiers mètres. La section varie ensuite de 2m tous les 10 mètres pour atteindre un largeur finale constante de 20m (voir figure 5.9).

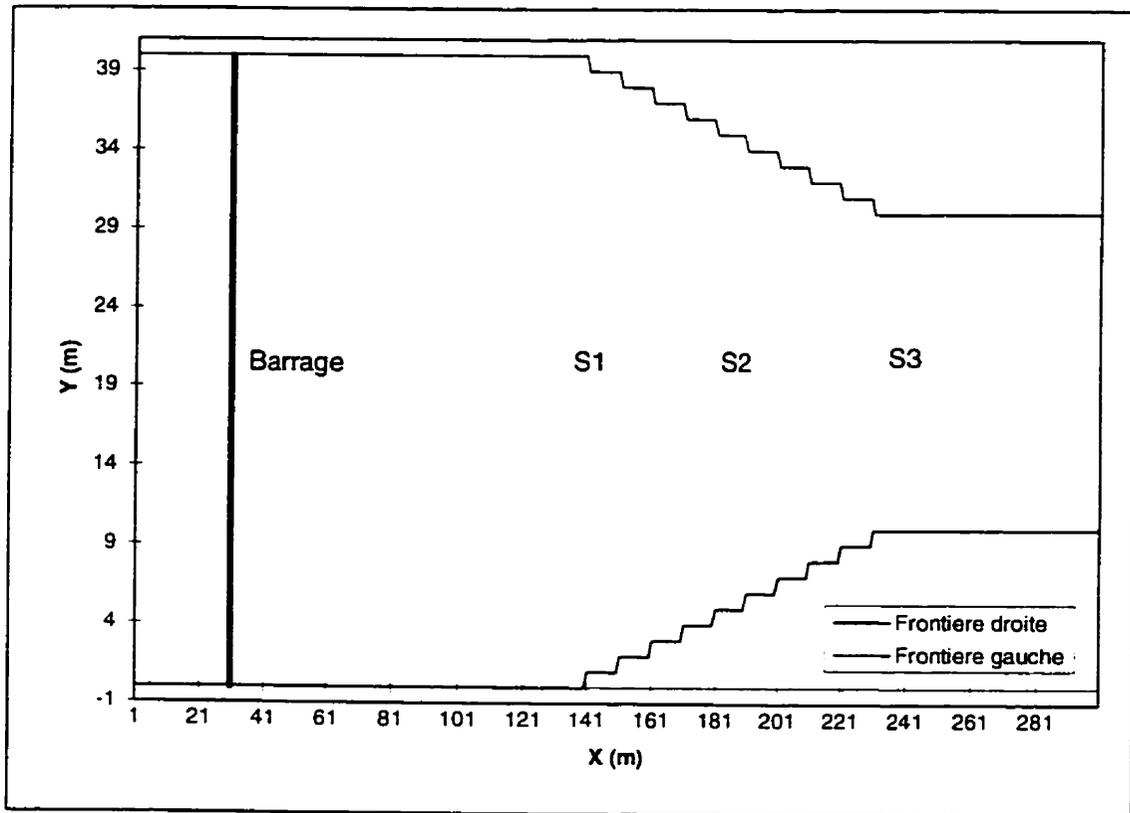
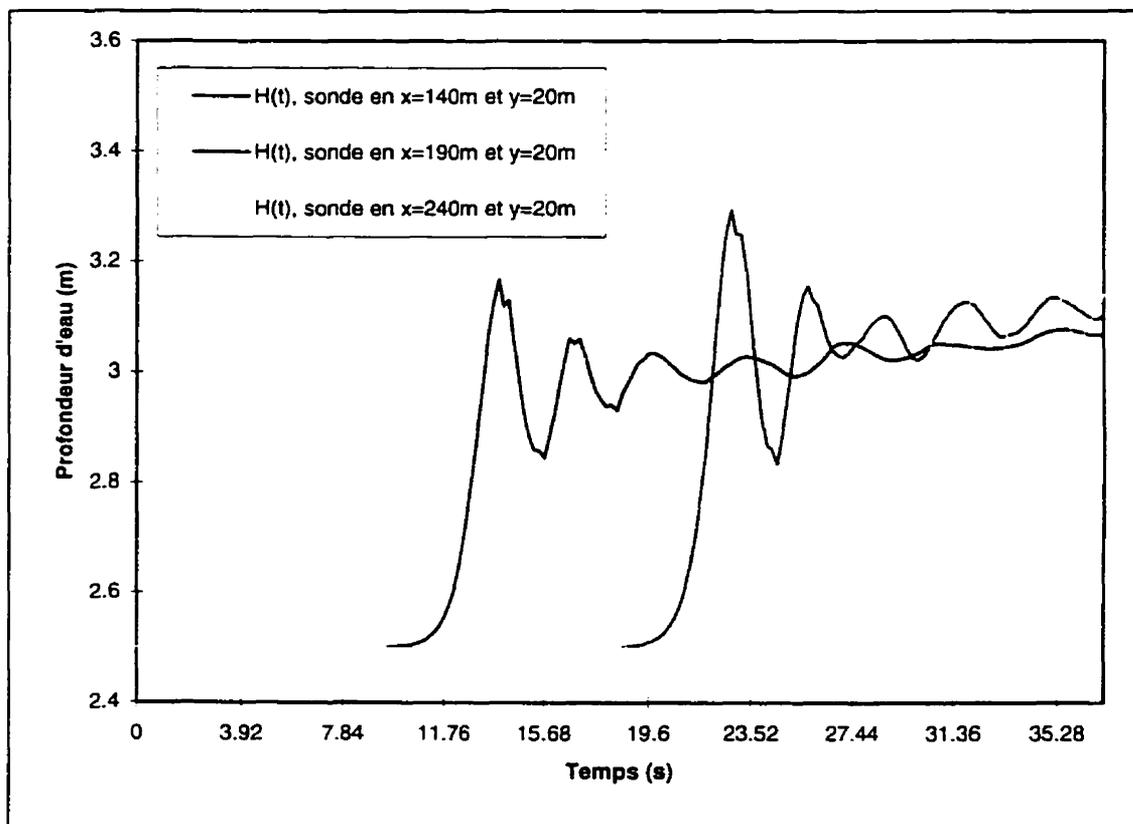


Figure 5.9: Géométrie du deuxième domaine de section variable

Une rupture de barrage est simulée, toujours à l'amont du domaine. Cette fois, la hauteur à l'amont du barrage est de 3.5m et de 2.5m sur le reste du domaine. Les sondes 1, 2 et 3 occupent les mêmes positions que lors de la simulation précédente.

Leurs enregistrements sont reportés à la figure 5.10.



**Figure 5.10:** Évolution du profil de la tête de l'intumescence

Comme le fait apparaître la figure 5.11, la profondeur moyenne de l'intumescence augmente de 0.2m entre le début et la fin du tronçon de section variable, contrairement au comportement qu'aurait un écoulement fluvial en régime permanent dans ce même type de section.

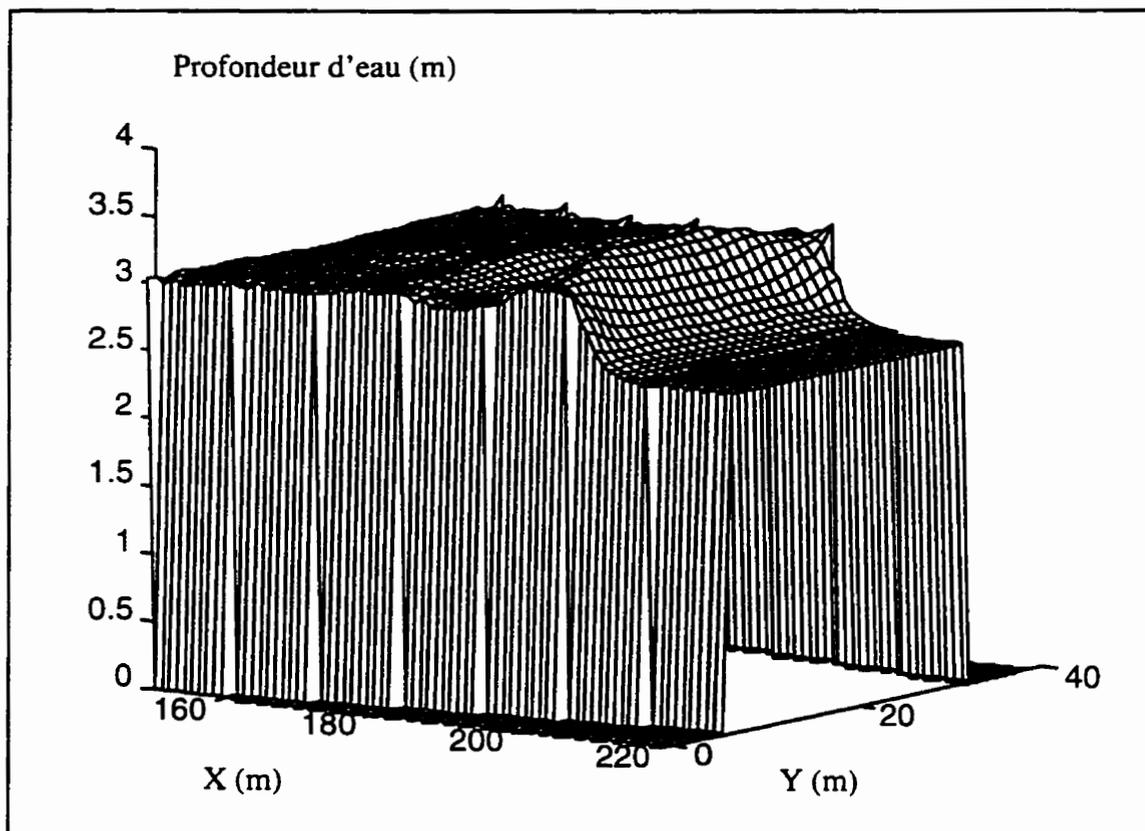


Figure 5.11: Ondes dans le tronçon de section variable

L'analyse des amplitudes maximales des ondes, de leurs longueurs d'onde et de la profondeur moyenne de l'intumescence montre que la nature des ondes de Favre est modifiée ( $h^*/h'$  augmente et  $e/h'$  diminue) à mesure que le rapport  $h'/H$  augmente et ce, conformément au diagramme de Favre.

### 5.5 Propagation des ondes de Favre en canal trapézoïdal

Pour la dernière série de simulations, une rupture de barrage est représentée dans un canal rectangulaire largeur de 30m dont la section se transforme progressivement en une section trapézoïdale. L'élévation de la bathymétrie est alors maximale sur les côtés et atteint une valeur de 1.5m. La zone de transition (située entre les abscisses  $x=900\text{m}$  et  $x=950\text{m}$ ) de la bathymétrie séparant les deux types de sections est représentée à la figure 5.12.

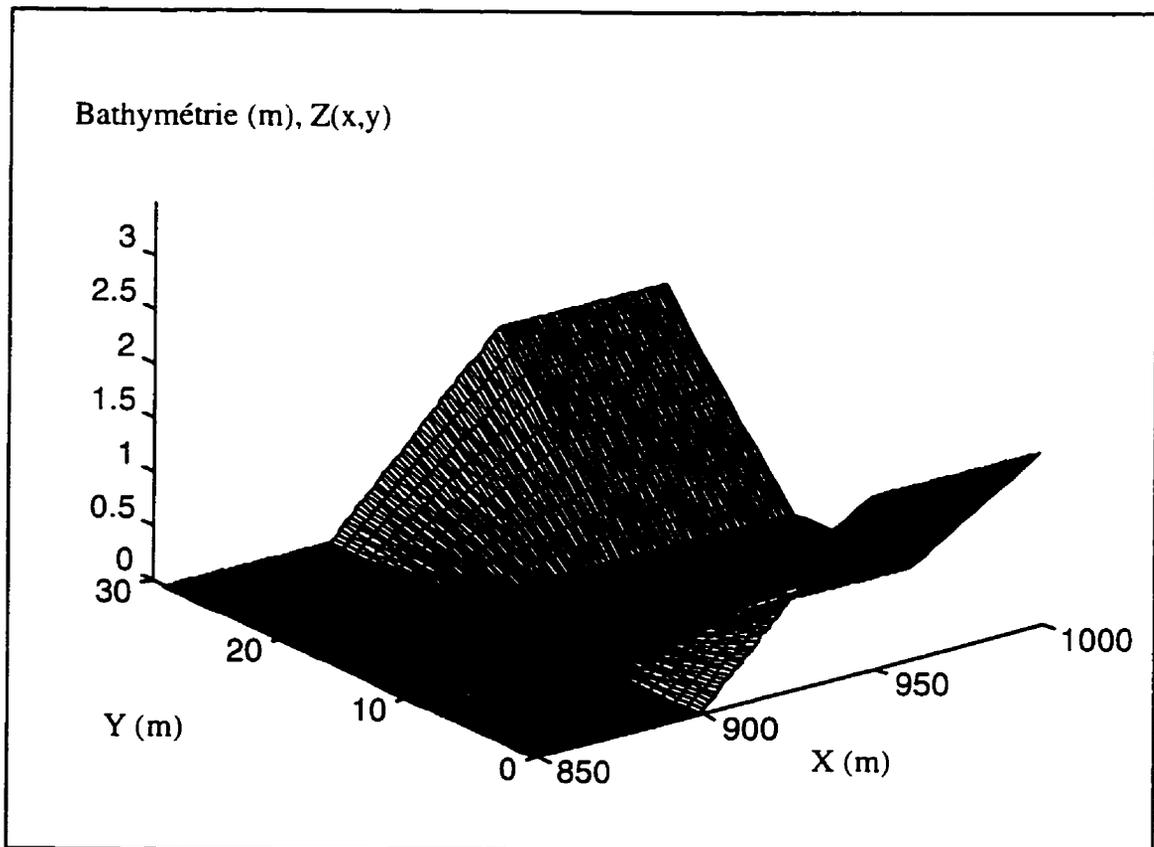


Figure 5.12: Évolution de la bathymétrie du canal

Sur un domaine de 1200m, les conditions initiales sont une profondeur d'eau de 3.75m, sur les 600 premiers mètres situés à l'amont, et une élévation constante de la surface libre pour le reste du domaine de 2.5m.

La figure 5.13 montre l'élévation de la surface libre juste avant que la première ondulation ne franchisse la zone de transition.

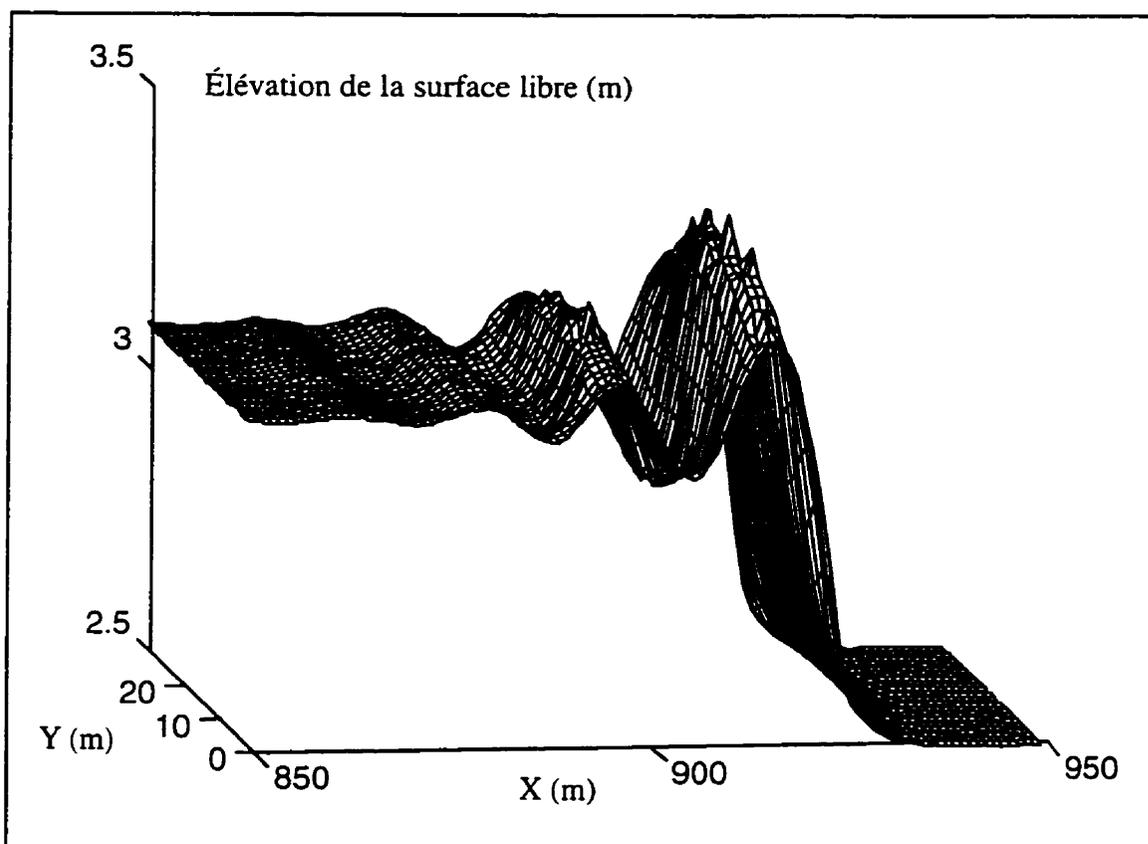


Figure 5.13: Ondes de Favre dans le tronçon du canal de section rectangulaire

Le profil de la surface est légèrement cambré (selon la direction Y), en particulier au niveau de la première onde, car les termes de Boussinesq ne sont pas calculés pour les

noeuds proches des frontières. Cette approximation ne gêne cependant pas l'apparition des ondes.

La figure 5.14 montre l'effet de la variation de bathymétrie qui commence à se faire sentir puisque la première onde de Favre vient de franchir la zone de transition.

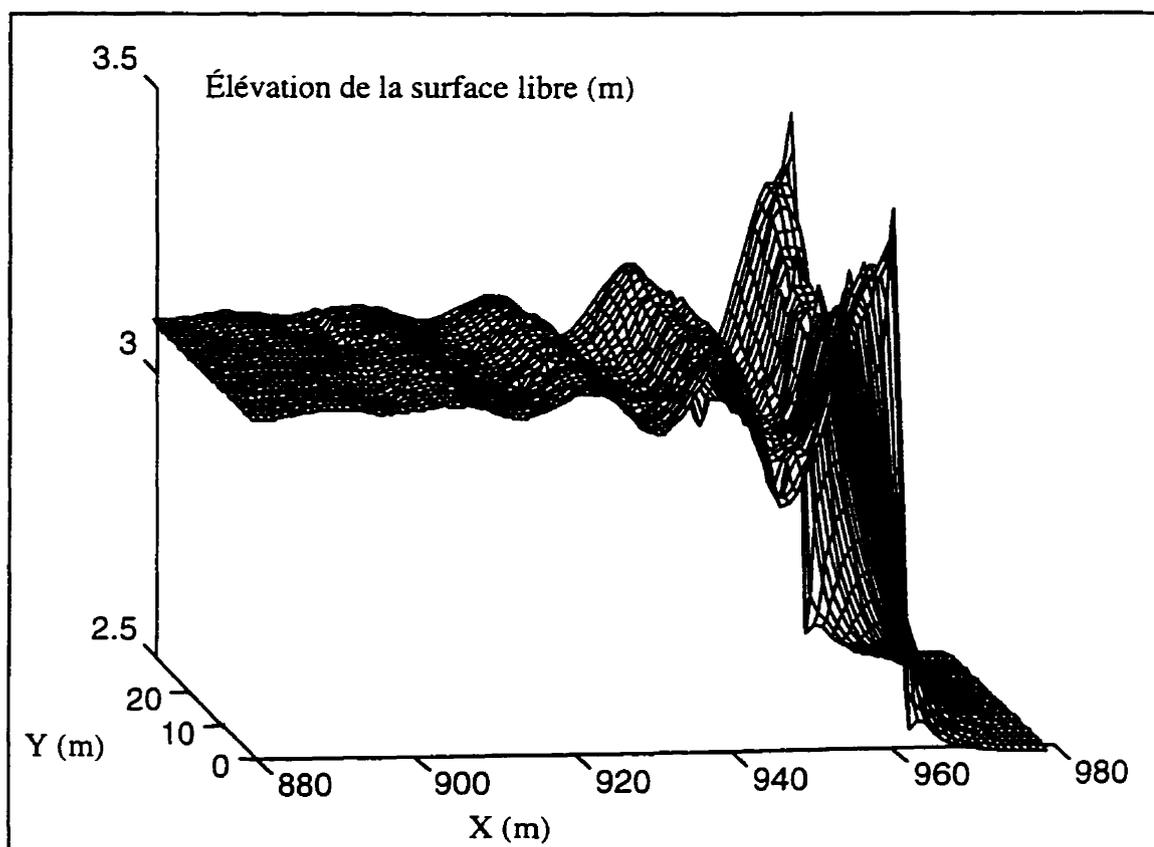


Figure 5.14: Influence de la bathymétrie sur la première ondulation secondaire

L'onde principale se cambre fortement suite à une augmentation de l'élévation de la surface libre sur les côtés du canal.

La figure 5.15 montre l'ensemble du train d'ondes secondaires qui viennent de franchir la zone de transition.

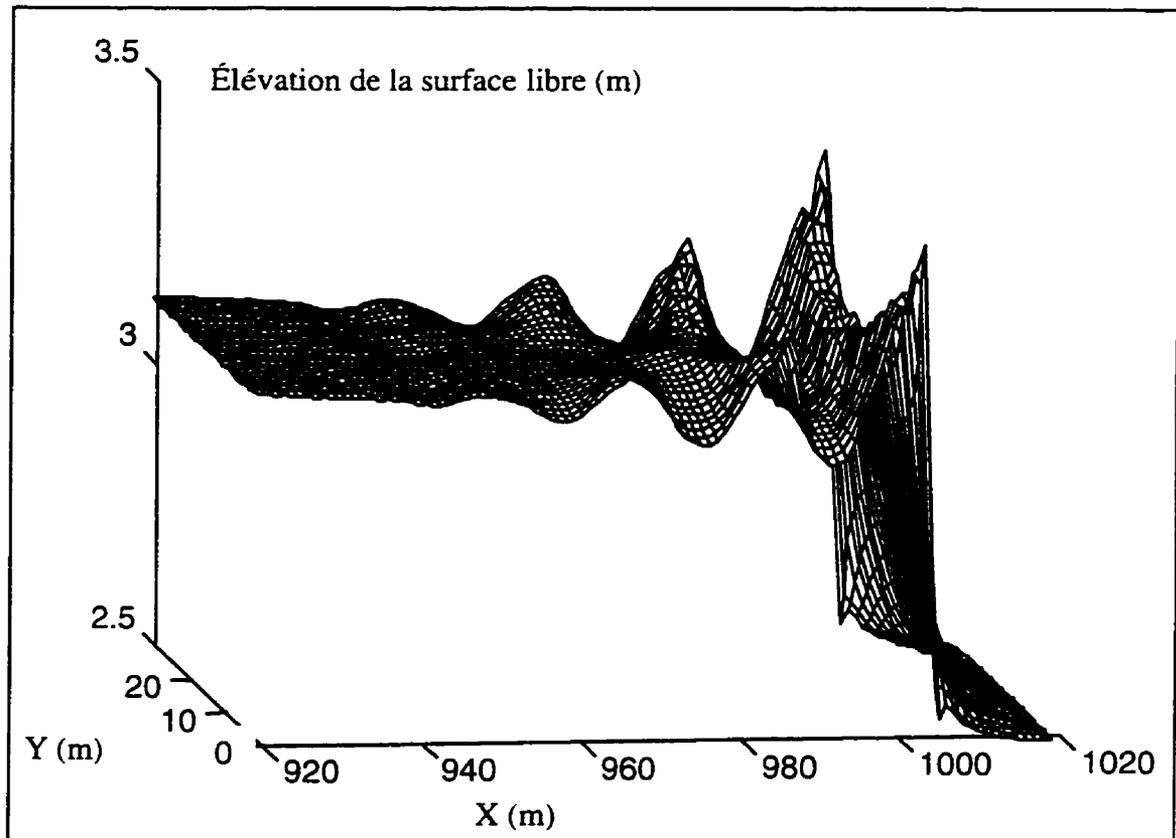


Figure 5.15: Train d'ondes de Favre après passage de la zone de transition

Une partie de l'onde négative qui se forme au passage du seuil est visible entre les abscisses 920m et 940m.

Toutes les ondes secondaires sont déformées par le changement de bathymétrie. L'écoulement qui était auparavant unidimensionnel devient réellement bidimensionnel.

La figure 5.16 présente finalement l'allure du train d'ondes lorsqu'il s'est stabilisé après propagation sur une distance de plus de 80m dans le tronçon de section trapézoïdale.

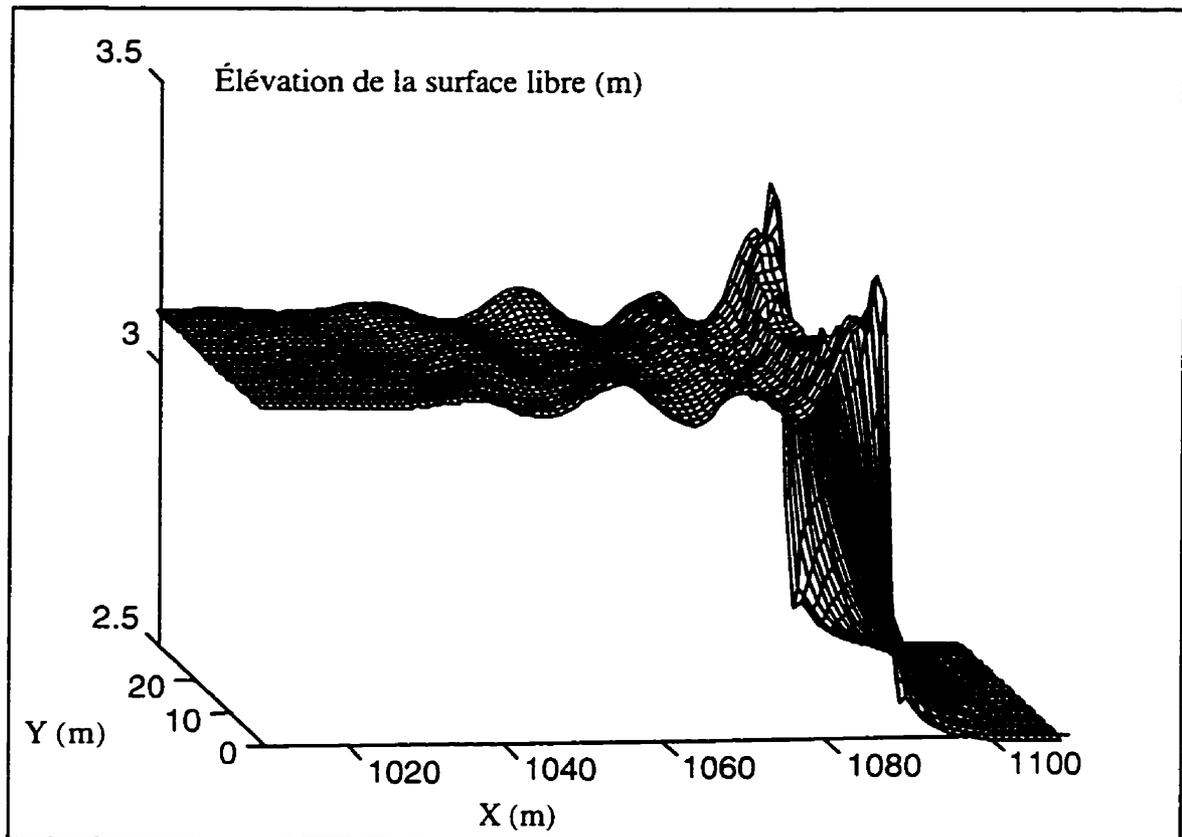


Figure 5.16: Ondes de Favre en canal trapézoïdal

A l'exception de la première ondulation, les amplitudes des autres crêtes sont maximales aux frontières et voisines de la profondeur moyenne au centre du canal. De même, les ventres des ondes, d'élévation minimale aux frontières, ont une élévation presque égale à l'élévation moyenne de l'intumescence au centre de la section transversale.

L'amplitude aux frontières de la première ondulation, là où l'élévation de la bathymétrie est maximale, est pratiquement le triple de celle de cette même onde au centre du canal (selon Y). Ce résultat est en accord avec les études expérimentales de Treske (1994) qui ont révélé cette cambrure des ondes dans la direction transversale.

La figure 5.17 montre un détail de l'élévation de la surface libre de la figure 5.16, au niveau de la troisième ondulation.

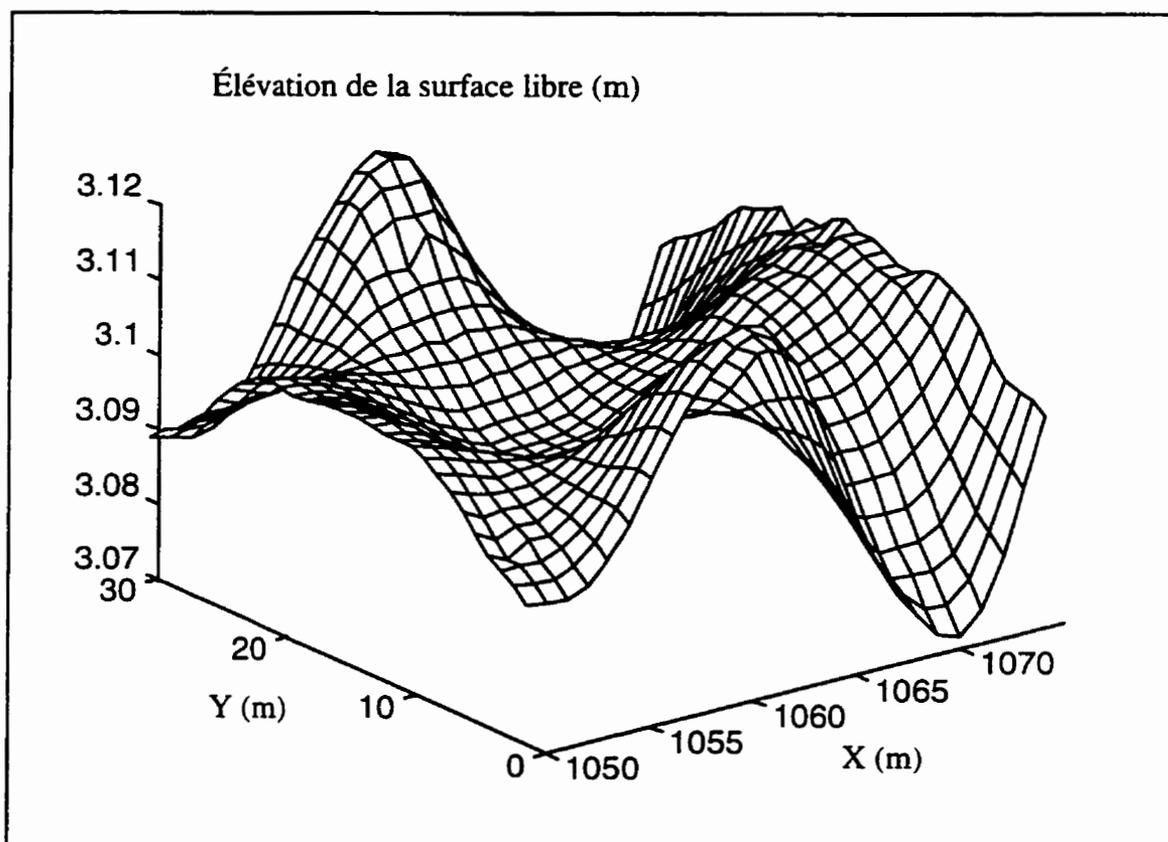


Figure 5.17: Détail de la troisième ondulation secondaire

La cambrure apparaît nettement puisque l'onde est presque en opposition de phase au centre du canal par rapport aux côtés.

Enfin, la figure 5.18 représente le champ de vitesses correspondant à la zone de l'écoulement, détaillée à la figure 5.17.

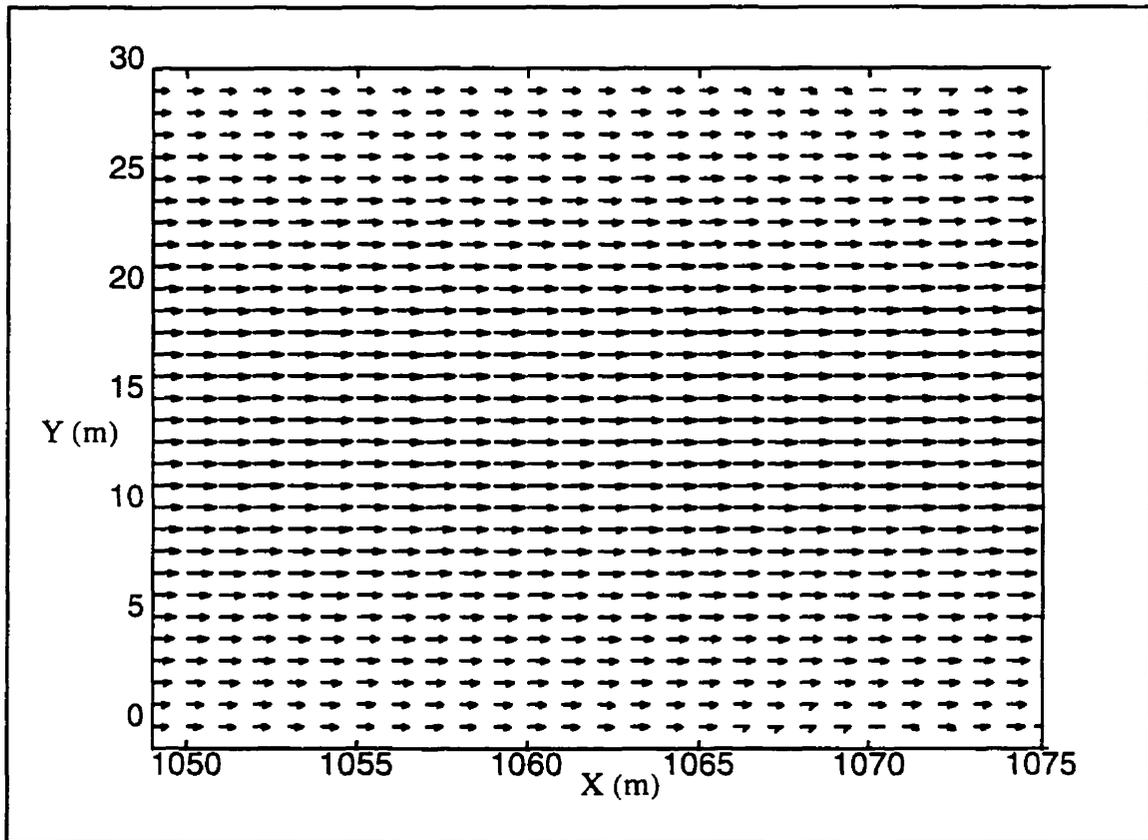


Figure 5.18: Champ de vitesses au niveau de la troisième ondulation

L'étude de la figure 5.18 semble clairement révéler la symétrie du champ de vitesses selon l'axe de symétrie du canal. Par ailleurs, la figure fait aussi apparaître de faibles vitesses normales à la direction X de l'écoulement, vitesses générées par les ondulations secondaires.

De plus, bien que les fluctuations de la composante de vitesse selon l'axe X soient difficilement discernables à la figure 5.18, une variation d'environ  $0.1\text{m.s}^{-1}$  autour de la valeur moyenne de  $u$  ( $1.27\text{m.s}^{-1}$ ) est observée.

Ces fluctuations de vitesses, mises en valeur par la modélisation, laissent présager de l'importance de la modification, par les ondes secondaires de Favre, de la nature du transport solide au sein de l'écoulement. Ce phénomène oscillatoire pourrait mettre en suspension des particules que la vitesse moyenne, générée par le passage de l'intumescence, n'est pas supposée arracher du lit du canal.

## CONCLUSION

L'objet des travaux présentés dans ce mémoire était de développer un modèle numérique unidimensionnel simple permettant l'étude, sur de grands domaines de calcul, de la formation des ondes de Favre en tête d'intumescence de rupture de barrage et l'analyse de l'évolution des caractéristiques de ces ondulations secondaires (amplitudes et longueurs d'ondes) en fonction des paramètres de l'écoulement (profondeur d'eau initiale, débit initial, rugosité du canal, bathymétrie). Le modèle devait être fondé sur les équations complètes de Boussinesq afin qu'une estimation de l'importance relative de ses différents termes pût être réalisée.

La résolution des équations de Boussinesq a été accomplie au moyen du schéma explicite en différences finies Two-Four (au deuxième ordre dans le temps et au quatrième ordre dans l'espace) par correction semi-implicite de la solution des équations de Saint Venant avec une approximation des valeurs des termes additionnels de Boussinesq.

Comme il n'existait pas, dans la littérature, de discrétisation du terme de pente des équations de Saint Venant pour le schéma Two-Four, une approximation de celle-ci a été proposée.

Des six termes des équations développées de Boussinesq, seuls les deux termes permanents et le terme comportant une dérivée spatiale au troisième ordre ont présenté des valeurs d'un ordre de grandeur véritablement significatif. La prise en compte de ces trois termes améliore la nature de la solution des équations simplifiées de Boussinesq (Abbott, 1979) au niveau des longueurs d'onde des ondulations secondaires.

Un large éventail de simulations numériques a prouvé le bon comportement du modèle unidimensionnel dans des conditions variées d'écoulements permanents et non permanents. En particulier, la modélisation des ondes de rupture de barrage a permis l'observation de la formation des ondes de Favre et de leur multiplication au cours de leur propagation. Bien que les amplitudes maximales obtenues soient inférieures à celles observées expérimentalement (Favre, 1935), leur hauteur (en fonction de la hauteur relative moyenne de l'intumescence) varie cependant conformément à la courbe du premier diagramme de Favre. Le caractère diffusif du schéma Two-Four est vraisemblablement à l'origine de la sous-estimation des amplitudes maximales générées. La moyenne de la somme des termes de Boussinesq servant à stabiliser la solution joue certainement aussi un rôle dans la nature de ce résultat. En revanche, les longueurs d'onde des ondulations secondaires correspondent fidèlement à celles du deuxième diagramme de Favre.

Au regard des résultats encourageants des simulations unidimensionnelles, l'extension à un modèle à deux dimensions a été proposée afin de permettre l'étude d'écoulements dans un canal de géométrie plus complexe.

A l'exception des zones situées au voisinage des frontières, dans lesquelles la moyenne de la somme des termes de Boussinesq ne peut être calculée, ce deuxième modèle offre des résultats équivalents à ceux du modèle unidimensionnel.

Les simulations réalisées en canal trapézoïdal ont permis l'observation d'une cambrure des ondes secondaires dans la direction transversale de l'écoulement due à une augmentation de la hauteur de la surface libre sur les côtés du canal et ce, conformément aux observations expérimentales de Treske (1994).

De manière générale, il a été démontré que les diverses contraintes exercées sur l'écoulement non permanent d'onde de rupture de barrage (variation du débit initial, de la rugosité du canal, de la largeur de sa section et de sa bathymétrie) induisent systématiquement une variation de la profondeur relative moyenne de l'intumescence. Les amplitudes maximales et les longueurs d'onde des ondulations secondaires de Favre en sont donc directement affectées puisqu'elles sont fonction de cette même profondeur moyenne.

Bien que l'amplitude maximale des ondes soit toujours sous évaluée, le modèle unidimensionnel et le modèle à deux dimensions simulent, dans tous les cas traités, une dynamique d'écoulement de laquelle résulte une transformation des ondes en accord avec celle suggérée par les courbes des diagrammes de Favre.

Cette étude pourrait être avantageusement complétée par des essais en laboratoire. Il reste en effet plusieurs domaines à explorer expérimentalement et notamment la nature de l'évolution dans le temps des caractéristiques des ondes de Favre lors de leur propagation.

L'influence de la rugosité du canal peut être étudiée et, dans la mesure où les expériences en laboratoire permettent une calibration du modèle, l'influence de la variation de largeur sur le comportement des ondes, observée lors des simulations numériques, pourrait être validée.

L'implantation d'une procédure dans le modèle Two-Four Boussinesq, traitant de l'aspect du transport solide, constituerait enfin un atout. En effet, les écoulements instationnaires, tels que les intumescences de rupture de barrage au sein desquelles les ondes secondaires de Favre induisent une fluctuation des vitesses, ont un impact sur la mise en suspension et le charriage des sédiments.

**ANNEXE: RÉFÉRENCES**

ABBOTT, M. B., RODENHUIS, G.S. (1972). A numerical simulation of the undular hydraulic jump. Journal of Hydraulic Research, 10, 239-257.

ABBOTT, M. B. (1979). Computational hydraulics. Elements of the free surface flows. Pitman publishing limited, London, England, 51-55.

BASCO, D. R. (1987). Computation of rapidly varied, unsteady, free-surface flow. U.S. Geological Survey WRI 83-4284.

BEAUCHEMIN, P. (1994). Modélisation mathématique bidimensionnelle des processus de formation dynamique des couverts de glace en rivière. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

BORIS, J. P., BOOK, D. L. (1976). Flux-Corrected-Transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. Journal of Computational Physics. 11, 38-69.

BOUSSINESQ, J. (1877). Essais sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Tome 3, Paris.

CHAUDHRY, M. H. (1993). Open-channel flow. Prentics Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 284-288.

EL KAYLOUBI, A. (1994). Étude numérique et expérimentale des ondes secondaires de Favre consécutives à la rupture d'un barrage. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

FAVRE, H. (1935). Étude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts. Dunod, Paris.

GARCIA, R., KAHAWITA, R. A. (1985) Numerical solution of the Saint Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 6, 259-274.

GHARANGIK, A. M., CHAUDHRY, M. H. (1991) Numerical simulation of hydraulic jump. Journal of Hydraulic Engineering, 117, 9, 1195-1211.

GOLDBERG, M., (1977). On boundary extrapolation theorem by Kreiss, 31, 138, 469-477.

GOTTLIEB, D., TURKEL, E., (1976). Dissipative two-four methods for time-dependent problems. Mathematics of Computation, 30, 136, 703-723.

HENDERSON, F. M. (1966). Open Channel Flow. Collier MacMillan Publishers. London, 88-124.

JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E. (1981). Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using the Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA 14<sup>th</sup> Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, AIAA-81-1259.

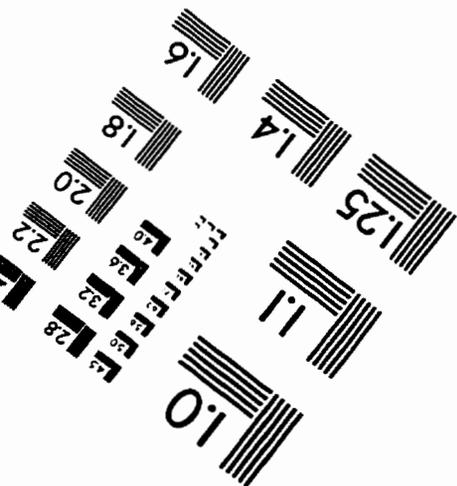
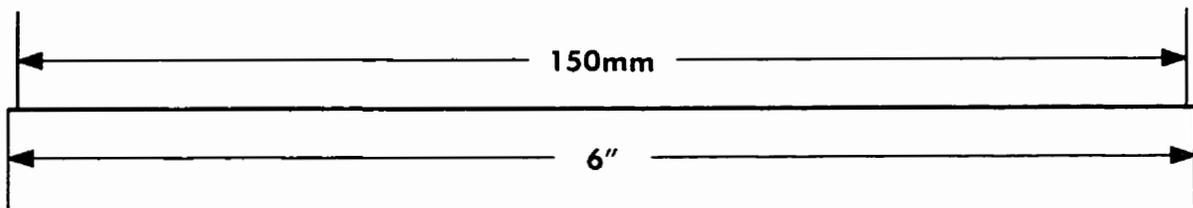
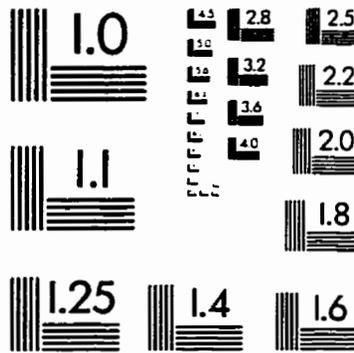
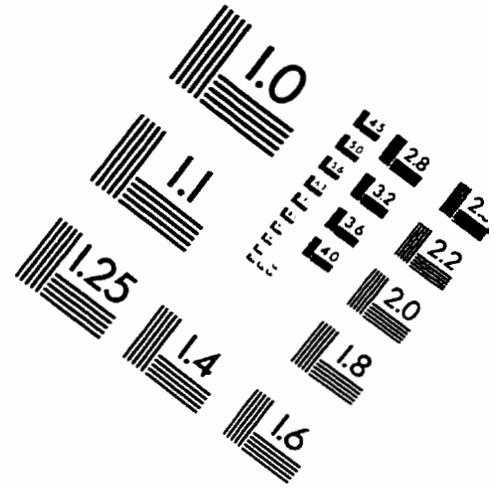
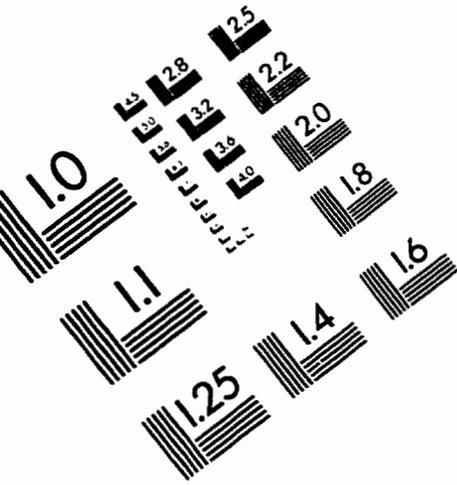
NWOGU, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 119, 6, 618-638.

PEREGRINE, D. H. (1967). Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics, 27, 4, 815-827.

PRÜSER, H. H., ZIELKE, W. (1994). Undular bores (Favre waves) in open channels-theory and numerical simulations. Journal of Hydraulic Research, 32, 3, 337-354.

TRESKE, A. (1994). Undular bores (Favre waves) in open channels-experimental studies. Journal of Hydraulic Research, 32, 3, 354-370.

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



**APPLIED IMAGE, Inc**  
 1653 East Main Street  
 Rochester, NY 14609 USA  
 Phone: 716/482-0300  
 Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

