

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME DE SIMULATION EN  
DYNAMIQUE DES FLUIDES BASÉ SUR LA MÉTHODE DE BOLTZMANN  
SUR RÉSEAU

JÉRÔME GUIET  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MAI 2009



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-53905-7  
*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-53905-7

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME DE SIMULATION EN  
DYNAMIQUE DES FLUIDES BASÉ SUR LA MÉTHODE DE BOLTZMANN  
SUR RÉSEAU

présenté par: GUIET Jérôme

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GARON André, Ph.D., président

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TEYSSEDOU Alberto, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. TRÉPANIÉRIER Jean-Yves, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche, Marcelo Reggio, pour son soutien passionné et la confiance qu'il m'a témoigné. J'ai beaucoup appris grâce à ses conseils et remarques, il a veillé à ce que cette maîtrise se passe le mieux possible et je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également mon codirecteur, Alberto Teysedou, pour son aide, sa confiance et ses conseils. Les discussions avec lui m'ont permis d'éclaircir mes pensées et d'avancer.

J'aimerais aussi remercier Fernando Villalpando et Stéphane Étienne pour leur contribution lors de certaines de mes études.

Je suis cordialement reconnaissant envers mes parents et ma famille pour leur support tout au long de cette maîtrise.

Enfin je remercie mes collègues de travail, pour avoir patiemment répondu à mes diverses interrogations mais surtout pour la très bonne ambiance de travail qui a régné au quotidien.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente la méthode de Boltzmann sur réseau permettant la simulation numérique d'écoulements par une approche mésoscopique des fluides avec l'utilisation de distributions de probabilité. Son principe de fonctionnement est défini par une discrétisation géométrique, temporelle et dans l'espace de phase, de l'équation de transport de Boltzmann associée à l'utilisation de réseaux. La mise en oeuvre d'une telle formulation pour effectuer des simulations en deux dimensions se réduit alors à une variation continue du champ discrétisé des distributions sur le réseau par la succession de deux étapes : collision, propagation. Les caractéristiques macroscopiques des écoulements simulés y sont alors déduites par un bilan des distributions sur chaque cellule constituant le réseau. Cette méthode dans sa formulation de base présente l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre, c'est un schéma linéaire, intrinsèquement instationnaire et qui par sa formulation évolue de façon à atteindre le maximum d'entropie. L'algorithme de base, une technique de raffinement des réseaux, ainsi qu'une technique particulière de traitement des conditions frontières courbes, ont été implémentés afin de vérifier la capacité de la méthode à effectuer des simulations complexes en dynamique des fluides. Le programme ainsi développé a présenté de bon résultats, dans sa formulation de base et améliorée, pour la simulation de cas classiques en dynamique des fluides, à savoir l'étude de l'écoulement dans une cavité entraînée et l'observation du lâché alterné de tourbillons en aval d'un cylindre dans un canal. Pour la simulation d'écoulements autour de corps aérodynamiques, les simulations autour de profils NACA propres et déformées par formation de givre ont présentée des résultats en accord avec ceux proposés par d'autres méthodes de simulation en régime stationnaire, les résultats en régime instationnaire étant un peu plus éloignés. Enfin les capacités de la méthode à traiter le déplacement d'objets solides sur le réseau ont été vérifiées avantageusement par l'observation de la remonté libre d'une particule dans

un fluide. En conclusion, malgré quelques limites, la méthode de Boltzmann sur réseau telle que nous l'avons implémentée a fourni des résultats encourageants et présente une nouvelle alternative pour simuler des écoulements complexes.

## ABSTRACT

This thesis presents the lattice Boltzmann method which enables to conduct flow simulations through a mesoscopic approach using particle distribution functions. This method is based on a geometrical, temporal, and phase space discretization of the continuum Boltzmann transport equation and a specific lattice. The evolution of the field of distribution functions allows flow simulations in two dimension, following two steps : collision, streaming. The macroscopic characteristics of flow are then deduced by summing the distributions on each cell constitutive of the lattice. In its basic formulation this method is simple to implement, intrinsically unsteady and evolves toward a state reaching maximum entropy. The basic algorithm, a multi-block technique, and a specific treatment of curved boundary conditions were implemented to test the ability of the method to achieve complex flow simulations. The computational program so developed provided good results in its basic and improved formulation, simulating classical test cases, the lid-driven cavity and the formation of vortex in a channel in the wake of a cylinder. The simulations around complex profiles, with the study of flow around clean and ice-accreted airfoils, compared with other numerical methods, showed good agreement at steady state, the unsteady simulations were less satisfying. Finally, the ability of the method to take in account moving objects was established with the study of free rising particles in fluid. In conclusion, despite some limitations, the lattice Boltzmann method we implemented provided hopeful results and shows an alternative way to conduct complex flow simulations.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	.xviii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	.xxiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	3
1.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	4
1.2 Simulation d'écoulements au niveau microscopique par la méthode des automates de gaz sur réseau . . . . .	6
1.3 Des automates de gaz sur réseau à la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	9
1.4 Méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	10
1.5 But et objectifs . . . . .	12
CHAPITRE 2 THÉORIE ASSOCIÉE À LA MÉTHODE DE BOLTZ- MANN SUR RÉSEAU . . . . .	14
2.1 Principe de base de la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	14

2.2	Équation de transport de Boltzmann et ses simplifications . . . . .	16
2.2.1	Équation de transport de Boltzmann . . . . .	17
2.2.2	Opérateur de collision $Q(f)$ . . . . .	19
2.2.3	H théorème de Boltzmann et les distributions à l'équilibre . . . . .	21
2.2.4	Modèle BGK pour la collision . . . . .	24
2.3	L'équation de Boltzmann sur réseau . . . . .	25
2.3.1	Discrétisation de l'équation continue de Boltzmann . . . . .	26
2.3.2	Discrétisation de l'espace des vitesses . . . . .	29
2.3.3	Approximation de la distribution à l'équilibre . . . . .	32
2.3.4	Discrétisation du type D2Q9 de l'équation de Boltzmann . . . . .	33
2.4	Méthode de Boltzmann sur réseau BGK . . . . .	35
2.4.1	Principe de la méthode de Boltzmann sur réseau D2Q9 . . . . .	36
2.4.2	Développement de Chapman-Enskog . . . . .	37
2.4.3	Propriétés numériques de la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	40
2.4.3.1	Précision . . . . .	40
2.4.3.2	Stabilité . . . . .	41
2.4.3.3	Lien entre précision, stabilité et temps simulé . . . . .	42
CHAPITRE 3 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOLTZMANN		
SUR RÉSEAU D2Q9 . . . . . 44		
3.1	Simulation avec le modèle D2Q9 . . . . .	44
3.1.1	Adimensionalisation des paramètres . . . . .	45
3.1.2	Concepts de collision et de propagation . . . . .	47
3.1.3	Algorithme de base de la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	51
3.2	Conditions aux limites appliquées au modèle D2Q9 . . . . .	52
3.2.1	Conditions initiales . . . . .	54
3.2.2	Conditions frontières . . . . .	54
3.2.2.1	Conditions frontières mésoscopiques . . . . .	55

3.2.2.2	Conditions frontières macroscopiques . . . . .	58
3.2.2.3	Conditions frontières libres . . . . .	62
3.3	Améliorations de la méthode de Boltzmann sur réseau D2Q9 . . . . .	63
3.3.1	Conditions frontières curvilignes . . . . .	63
3.3.2	Réseaux à plusieurs niveaux imbriqués . . . . .	66
3.3.2.1	Théorie des réseaux de plusieurs niveaux . . . . .	66
3.3.2.2	Déplacement de raffinements sur un réseau grossier . . . . .	73
3.3.3	Calcul des efforts s'appliquant à un objet . . . . .	75
 CHAPITRE 4 SIMULATIONS NUMÉRIQUES PAR LA MÉTHODE DE BOLTZMANN SUR RÉSEAU . . . . .		78
4.1	Cavité entraînée, vérification de la formulation de base de la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	78
4.1.1	Description du problème . . . . .	79
4.1.2	Résolutions par la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	80
4.1.3	Résultats . . . . .	81
4.2	Cylindre dans un canal, vérification des améliorations de la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	91
4.2.1	Description du problème . . . . .	92
4.2.2	Résolution par la méthode de Boltzmann sur réseau . . . . .	93
4.2.3	Résultats . . . . .	94
4.3	Profils NACA, comparaison à d'autres méthodes de simulation . . . . .	98
4.3.1	Description du problème . . . . .	98
4.3.2	Profil NACA0012 . . . . .	100
4.3.3	Profil NACA63-415, propre et déformé par formation de givre . . . . .	105
4.4	Remontée libre d'une particule dans un fluide par poussée d'Archimède . . . . .	111
4.4.1	Description du problème . . . . .	111
4.4.2	Déplacement d'une particule sur un réseau de Boltzmann . . . . .	114

4.4.3	Résolution par la méthode de Boltzmann sur réseau . . . .	116
4.4.4	Résultats . . . . .	119
CONCLUSION . . . . .		126
RÉFÉRENCES . . . . .		130
ANNEXES . . . . .		135

## LISTE DES TABLEAUX

TABLE 3.1	Conversions entre unités physiques et unités de réseau. . . .	46
TABLE 4.1	Stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds et différentes techniques d'imposition du glissement avec $\bar{u}_T = 0.1$ . . . . .	82
TABLE 4.2	Stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds et différentes techniques d'imposition du glissement avec $\bar{u}_T = 0.05$ . . . . .	82
TABLE 4.3	Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de $64 \times 64$ et $128 \times 128$ avec $\bar{u}_T = 0.1$ .	85
TABLE 4.4	Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de $64 \times 64$ et $128 \times 128$ avec $\bar{u}_T = 0.05$ .	86
TABLE 4.5	Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de $256 \times 256$ avec $\bar{u}_T = 0.1$ . . . .	87
TABLE 4.6	Différentes caractéristiques des domaines de simulation pour le cas du cylindre dans un canal. . . . .	94
TABLE 4.7	Nombres de Strouhal caractérisant les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à $Re = 100$ . . . . .	98
TABLE 4.8	Coefficients de portance et traînée pour le profil NACA0012 à $Re = 500$ , $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	101
TABLE 4.9	Coefficients aérodynamiques de l'écoulement autour du profil NACA63-415 propre et givré à $Re = 500$ , $\alpha = 0^\circ, 8^\circ$ . . . . .	110

TABLE 4.10	Période des oscillations des coefficients aérodynamiques autour du profil NACA63-415 propre et givré à $Re = 500$ , $\alpha=0^\circ$ , $8^\circ$ . . . . .	110
TABLE I.1	Différents paramètres des simulations effectuées pour le cas de la cavité entraînée de $20cm \times 20cm$ . . . . .	135
TABLE III.1	Différentes caractéristiques du domaine de simulation pour l'étude de l'écoulement autour du profil d'aile NACA0012. .	139
TABLE III.2	Différentes caractéristiques des domaines de simulation pour l'étude de l'écoulement autour du profil d'aile NACA63-415.	140

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1	Réseau de cellules du modèle HPP. . . . .	6
FIGURE 1.2	Propagation des particules sur le réseau du modèle HPP. . .	7
FIGURE 1.3	Condition de collision entre des particules sur réseau HPP. .	7
FIGURE 2.1	Représentation dans le plan de deux particules pré et post- collision. . . . .	21
FIGURE 2.2	Quelques exemples de discrétisation de l'espace de phase. . .	31
FIGURE 2.3	Maille élémentaire du réseau D2Q9. . . . .	33
FIGURE 3.1	Représentation simplifiée de l'activité microscopique sur un domaine fluide $\Omega$ . . . . .	48
FIGURE 3.2	Discrétisation d'un domaine fluide $\Omega$ par un réseau D2Q9 adimensionalisé. . . . .	48
FIGURE 3.3	Collision sur une cellule $[i, j]$ . . . . .	49
FIGURE 3.4	Propagation des distributions post-collision depuis une cel- lule $[i, j]$ . . . . .	50
FIGURE 3.5	Propagation des distributions post-collision vers une cellule $[i, j]$ définissant l'état $\bar{t} + 1$ . . . . .	51
FIGURE 3.6	Algorithme de base de la méthode de Boltzmann sur réseau.	53
FIGURE 3.7	Distributions manquantes après collision et propagation sur une cellule au bord du domaine. . . . .	55
FIGURE 3.8	Renvois périodiques des distributions dans le cas d'un canal.	56
FIGURE 3.9	Prise en compte d'un profil d'aile sur le réseau. . . . .	57
FIGURE 3.10	Renvois directs des distributions sur une cellule. . . . .	57
FIGURE 3.11	Frontière curviligne. . . . .	64
FIGURE 3.12	Raffinement autour d'un profil d'aile. . . . .	67
FIGURE 3.13	Interface entre deux réseaux de différentes finesses. . . . .	69

FIGURE 3.14	Partie élémentaire de l'algorithme de la méthode de Boltzmann sur réseau avec raffinement du domaine. . . . .	71
FIGURE 3.15	Algorithme de la méthode de raffinement de domaine. . . . .	72
FIGURE 3.16	Déplacement d'un réseau fin sur un réseau grossier. . . . .	75
FIGURE 4.1	Schéma d'une cavité entraînée. . . . .	79
FIGURE 4.2	Temps de relaxation en fonction de la finesse du réseau et du nombre de Reynolds ainsi que la stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour CFFEQ (à gauche) et CFZH (à droite). . . . .	83
FIGURE 4.3	Position des différentes recirculations pour le cas de la cavité entraînée. . . . .	88
FIGURE 4.4	Coupes des champs de vitesse dans une cavité entraînée pour $Re = 1000$ , différentes résolution de réseau et CFFEQ. . . . .	89
FIGURE 4.5	$E_2$ pour différentes simulations avec différents maillages, différentes méthodes d'imposition des conditions frontières, différentes vitesses de glissement. . . . .	90
FIGURE 4.6	Schéma du domaine du cylindre dans un canal. . . . .	92
FIGURE 4.7	Vorticité de l'écoulement sur le domaine du cylindre dans un canal à $Re = 100$ . . . . .	95
FIGURE 4.8	Évolution du coefficient de traînée au cours du temps pour les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à $Re = 100$ . . . . .	96
FIGURE 4.9	Évolution du coefficient de portance au cours du temps pour les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à $Re = 100$ . . . . .	96
FIGURE 4.10	Schéma du domaine de calcul et des différents raffinements pour le profil NACA0012. . . . .	99

FIGURE 4.11	Lignes de courant et position des coupes le long du profil NACA0012. . . . .	102
FIGURE 4.12	Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à $x = 0$ . . . . .	102
FIGURE 4.13	Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à $x = 0.25$ . . . . .	103
FIGURE 4.14	Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à $x = 0.5$ . . . . .	103
FIGURE 4.15	Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à $x = 0.75$ . . . . .	104
FIGURE 4.16	Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à $x = 1$ . . . . .	104
FIGURE 4.17	Profil NACA63-415 propre et déformé par formation de glace au bord d'attaque. . . . .	105
FIGURE 4.18	Répartition des $C_p$ sur le profil NACA63-415 propre et givré à $\alpha=0^\circ$ . . . . .	106
FIGURE 4.19	Répartition des $C_p$ sur le profil NACA63-415 propre et givré à $\alpha=8^\circ$ . . . . .	107
FIGURE 4.20	Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance et traînée pour le profil NACA63-415 à $\alpha=28^\circ$ . . .	108
FIGURE 4.21	Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance et traînée pour le profil NACA63-415 givré à $\alpha=28^\circ$ . . .	109
FIGURE 4.22	Formation de vortex à l'arrière du profil NACA63-415 à $Re = 500$ et $\alpha=28^\circ$ . . . . .	109
FIGURE 4.23	Schéma du domaine de simulation pour le cas de la remontée d'une particule dans un fluide. . . . .	112

FIGURE 4.24	Variation de la vitesse verticale et latérale d'une particule lâchée dans un de fluide avec $D = 1 \text{ mm}$ , $\Delta\rho = 800$ , $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . . . . .	119
FIGURE 4.25	Variation de la vitesse verticale et latérale d'une particule lâchée dans un de fluide avec $D = 1 \text{ mm}$ , $\Delta\rho = 800$ , $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . . . . .	120
FIGURE 4.26	Comparaisons des vitesses terminales de remontée d'une particule pour deux viscosités, $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , et deux rapports de densité différents, $\rho_p = 500 \text{ kg}/\text{m}^3$ et $\rho_p = 200 \text{ kg}/\text{m}^3$ dans un fluide de densité $\rho_f = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ . . . . .	122
FIGURE 4.27	Parallèle entre la remontée en zigzag de la particule et la remontée d'une bulle d'air. . . . .	124
FIGURE 4.28	Vitesse terminale, forme, et trajectoire d'une bulle en fonction de son diamètre <sup>[7]</sup> . . . . .	125
FIGURE I.1	Champs de vitesses pour la cavité entraînée à $\text{Re}=100$ , $\bar{u}_T = 0.1$ . . . . .	136
FIGURE I.2	Champs de vitesses pour la cavité entraînée à $\text{Re}=1000$ , $\bar{u}_T = 0.1$ . . . . .	136
FIGURE I.3	Champs de vitesses pour la cavité entraînée à $\text{Re}=2500$ , $\bar{u}_T = 0.1$ . . . . .	137
FIGURE II.1	Champs de vitesses pour la formation de tourbillons en aval d'un cylindre dans un canal à $\text{Re}=100$ , $\bar{u}_{ent} = \frac{1}{3} 0.1$ . . . . .	138
FIGURE III.1	Composantes horizontale et verticale de vitesse autour du profil NACA63-415 propre à $\text{Re}=500$ , $\alpha=0^\circ$ . . . . .	141
FIGURE III.2	Composantes horizontale et verticale de vitesse autour du profil NACA63-415 givré à $\text{Re}=500$ , $\alpha=0^\circ$ . . . . .	141

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

<i>BGK</i>	Bhatnagar, Gross et Krook
<i>CFL</i>	Courant-Friedrichs-Lewy
<i>CFZF</i>	Condition frontière de Zou et He
<i>CFFEQ</i>	Condition frontière imposant $f^{eq}$
<i>DnQm</i>	Cellule élémentaire en n dimensions, à m vitesses
<i>FCHC</i>	Face-Centered Hypercube
<i>FHP</i>	Frish, Hasslacher et Pomeau
<i>HPP</i>	Hardy, Pazzis et Pomeau
<i>LBGK</i>	Lattice Bhatnagar, Gross et Krook
<i>NACA</i>	National Advisory Committee for Aeronautics
<i>RafnBB</i>	n raffinements, renvoie directe (Bounceback)
<i>RafnCB</i>	n raffinements, condition frontière courbe

**Caractères usuels**

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$	vecteur accélération
<i>A</i>	amplitude
<i>B</i>	paramètre d'impacte
<i>c</i>	vitesse sur réseau, corde
$c_s$	vitesse du son sur le réseau
$\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$	vecteur vitesse associé à une distribution
<i>C</i>	nombre de Courant
$C_d$	coefficient de traînée
$C_l$	coefficient de portance
<i>D</i>	diamètre

$e$	énergie interne
$\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$	vecteur vitesse normalisé associé à une distribution
$E$	énergie
$E_2$	erreur relative
$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$	distribution de probabilité
$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$	vecteur force
$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$	vecteur des forces volumiques
$H$	quantité H
$I$	matrice identité
$J$	moment d'inertie
$k_B$	constante de Boltzmann
$lt$	unité de temps de réseau
$lu$	unité de longueur de réseau
$L$	longueur
$L_c$	longueur caractéristique
$m$	masse moléculaire, masse
$M$	moment d'une force
$Ma$	nombre de Mach
$n$	nombre de particules sur un domaine
$P$	pression
$q$	source interne de chaleur
$Q$	opérateur de collision
$Re$	nombre de Reynolds
$St$	nombre de Strouhal
$t$	temps

$T$	température
$T_{ps}$	période
$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$	vecteur vitesse
$U$	composante horizontale de vitesse normalisée
$U_{term}$	vitesse terminale
$V$	volume d'un domaine, composante verticale de vitesse normalisée
$w_i$	poids des distributions d'équilibre
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	coordonnées cartésiennes

### Lettres grecques

$\chi$	facteur d'interpolation
$\Delta$	distance d'un noeud fluide à une parois
$\Delta t$	pas de temps
$\Delta x$	pas géométrique
$\epsilon$	nombre de Knudsen
$\phi$	angle azimutal
$\kappa$	conductivité thermique
$\lambda$	libre parcours moyen, longueur d'onde
$\mu$	viscosité dynamique
$\nu$	viscosité cinématique
$\theta$	angle de collision de deux particules
$\rho$	densité massique
$\sigma$	section efficace
$\tau$	temps caractéristique de relaxation adimensionnalisé

$\tau^*$	temps caractéristique de relaxation
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses
$\omega$	angle solide, vorticité
$\Omega$	domaine de simulation
$\Omega_k$	sous domaine de simulation

### Indices et exposants

0	valeur initiale
$Ar$	valeur se rapportant à la poussée d'Archimède
$\alpha$	composante du vecteur coordonnées
$eq$	valeur à l'équilibre
$ent$	valeur en entrée
$f, f$	valeur se rapportant à un réseau fin valeur se rapportant aux frottements
$F$	valeur sur une cellule de fluide
$g, g$	valeur se rapportant à un réseau grossier valeur se rapportant à la gravité
$G$	valeur de glissement, valeur appliquée au centre de gravité
$i$	valeur discrétisée dans l'espace des vitesses
$k$	valeur discrétisée spatialement
$lim$	valeur limite
$max$	valeur maximale
$moy$	valeur moyenne
$M$	valeur à une interface fluide/solide

$P$	valeurs sur une paroi
$p$	valeurs se rapportant à une particule
$ref$	valeur de référence
$rel$	valeur relative
$simul$	valeur simulée
$S$	valeur sur une cellule solide
$T$	transposée
$T$	tangentielle
*	quantité adimensionnelle de Wallis
-	quantité en unité de réseau
$\sim$	quantité post collision

### Symboles

$ln$	logarithme népérien
$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial}{\partial}$	dérivée partielle

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DONNÉES COMPLÉMENTAIRES DU CAS DE LA CAVITÉ ENTRAÎNÉE . . . . .	135
ANNEXE II	DONNÉES COMPLÉMENTAIRES POUR LE CAS DU CYLINDRE DANS UN CANAL . . . . .	138
ANNEXE III	DONNÉES COMPLÉMENTAIRES POUR LE CAS D'ÉCOULEMENTS AUTOUR DE PROFILS D'AILES NACA . . . . .	139

## INTRODUCTION

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique en dynamique des fluides assisté par ordinateur issue historiquement de la catégorie des automates de gaz sur réseau. Depuis ses premières bases théoriques, posées à la fin des années 1980, elle a été continuellement perfectionnée et enrichie afin de pouvoir simuler des écoulements de plus en plus complexes avec de plus en plus de précision. Contrairement aux méthodes traditionnelles basées sur les équations de Navier-Stokes tels que les éléments finis, volumes finis ou les différences finies, la méthode de Boltzmann sur réseau se fonde sur le niveau mésoscopique des écoulements. Cette approche originale s'effectue par l'utilisation de distributions de probabilité visant à évaluer le comportement microscopique des fluides afin d'en déduire les champs macroscopiques de vitesse et de pression.

De part son approche particulière, cette méthode bénéficie d'un certain nombre d'atouts comme sa relative simplicité de mise en application, un caractère intrinsèquement transitoire, la mise en oeuvre d'un schéma respectant l'augmentation de l'entropie et une grande flexibilité pour la prise en compte de divers phénomènes physiques. Cette méthode donc semble être une bonne alternative aux techniques classiques basées sur les équations de Navier-Stokes. Nous nous sommes donc penché plus en détail sur la méthode de Boltzmann sur réseau et nous l'avons implémentée en langages Fortran et Matlab.

Dans un premier temps une revue bibliographique permettra de situer la méthode de Boltzmann sur réseau par rapport aux méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes. Nous soulignerons également les développements historiques des automates de gaz sur réseau ayant aboutis à cette méthode. Au chapitre 2 nous étudierons les fondements théoriques de la méthode, principalement son lien avec

l'équation de Boltzmann et les différentes modifications apportées pour pouvoir effectuer des simulations en dynamique des fluides. Le chapitre 3 présente ensuite la mise en application de la méthode de Boltzmann sur réseau d'un point de vue numérique. Nous expliquerons le principe particulier de collision et propagation sur réseau qui sont caractéristiques de cette méthode ainsi que les techniques permettant de définir les domaines pour la simulation d'écoulements. L'algorithme de base ainsi que différentes techniques d'amélioration des performances et capacités de la méthode y seront détaillées. Au chapitre 4 nous validerons et analyserons les performances de notre implémentation de la méthode. Ce chapitre comporte deux études de validation préliminaires qui sont l'écoulement dans une cavité entraînée, pour vérifier la précision et la stabilité de la méthode, puis l'observation du lâché de tourbillons en aval d'un cylindre dans un canal, pour vérifier le caractère transitoire de la méthode. Après ces premières étapes de validation nous utiliserons notre programme couplé à différentes améliorations de la méthode de base pour simuler des cas plus complexes, à savoir l'écoulement autour de profils d'ailes NACA et notamment autour de profils de pales d'éoliennes NACA63-415 déformés ou non par la formation de givre sur le bord d'attaque. Durant cette étude nous confronterons nos résultats à ceux proposés par d'autres méthodes de simulation en dynamique des fluides. Enfin, nous exploiterons la relative simplicité et flexibilité de la méthode de Boltzmann sur réseau pour évaluer le déplacement d'objets solides dans un fluide. Nous observerons plus précisément la remontée de particules dans une colonne de fluide par la poussée d'Archimède, les résultats obtenus seront confrontés à des résultats obtenus expérimentalement. Nous concluons enfin sur les atouts et les défis de la méthode de Boltzmann sur réseau.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'étude des fluides concerne une grande variété de types d'écoulements, cela s'étend de la simple étude d'écoulements laminaires dans des tubes, vers l'étude de la formation de tourbillons en aval d'obstacles, ou encore l'étude de la turbulence. Ces écoulements peuvent être monophasiques, diphasiques, compressibles ou incompressibles. Un grand nombre d'écoulements ont été étudiés en détail par l'expérimentation, mais l'utilisation de modèles numériques de différentes sortes capables de les simuler constitue un axe d'étude important dans ce domaine. Pour ces simulations numériques deux composantes doivent être prises en compte :

- **Le modèle mathématique** : Généralement un système d'équations aux dérivées partielles définit par diverses considérations théoriques comme la conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou encore de l'énergie. Il définit le lien entre différentes quantités caractéristiques du fluide considéré. Il permet d'évaluer l'influence de ces paramètres les uns sur les autres lors de l'évolution de l'écoulement.
- **Le modèle numérique** : Par différentes méthodes ce dernier permet d'approximer les équations différentielles du modèle mathématique et de les résoudre. Différents modèles peuvent être utilisés tels que les éléments finis, les volumes finis, les différences finies.

En dynamique des fluides le modèle mathématique le plus communément utilisé est constitué par les équations de Navier-Stokes. Le fluide y est considéré comme un domaine continu observé à un niveau macroscopique dont les grandeurs caractéristiques sont liées par un système d'équations aux dérivées partielles. Bien que

très largement utilisée cette méthode néglige à tort ou à raison une très grande partie de la nature des écoulements, à savoir qu'ils sont le fruit d'un très grand nombre de molécules interagissant les unes avec les autres de façon plus ou moins ordonnée. Nous allons donc premièrement présenter les équations de Navier-Stokes en tant que modèle mathématique de référence puis dans un second temps nous évoquerons d'autres types de modèles mathématiques et numériques basés sur ce caractère moléculaire des fluides, ce sont les modèles du type automates de gaz sur réseau desquels a émergé il y a une vingtaine d'année la méthode Boltzmann sur réseau.

### 1.1 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont les équations de base utilisées en dynamique des fluides, elles permettent de définir des écoulements en établissant des liens entre les grandeurs macroscopiques. Dans cette optique un fluide peut se décrire par, la densité  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $P$ , l'énergie totale par unité de masse  $E$  et la température  $T$ . Ces grandeurs sont liées les unes aux autres par divers fondements physiques, à savoir la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie d'un système. Il en résulte quelques formules, l'équation de continuité pour la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

l'équation pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) = \rho \mathbf{g} \quad (1.2)$$

et l'équation pour la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P) \mathbf{u} - \kappa \nabla T - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})^T) = \rho (q + \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

Dans ce système d'équations constituant les équations de Navier-Stokes  $\mathbf{g}$  représente les forces volumiques,  $\kappa$  la conductivité thermique du fluide,  $q$  les sources internes de chaleur et  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses.

Ces relations générales (équations (1.1-1.3)) se simplifient ou se complètent avec des lois constitutives selon le type d'écoulement considéré. Que ce soit pour des écoulements composés de une ou plusieurs phases, laminaires ou turbulents, avec ou sans influence de la température, tous peuvent se définir à l'aide des équations de Navier-Stokes sous différentes formes avec ou sans ajout de nouvelles relations entre les paramètres.

Cependant, ces types d'écoulements sont la représentation d'états microscopiques similaires régis par les mêmes relations physiques et dont les interactions entre molécules selon les cas aboutissent à des états macroscopiques différents. Pour évaluer le comportement des fluides d'une façon plus générale, la détermination de cet état microscopique duquel découle une grande variété d'écoulements à notre échelle serait avantageux. Cette idée est à l'origine d'une catégorie de modèles de simulations numériques du type automates cellulaires qui ont donné naissance à la méthode de Boltzmann sur réseau.

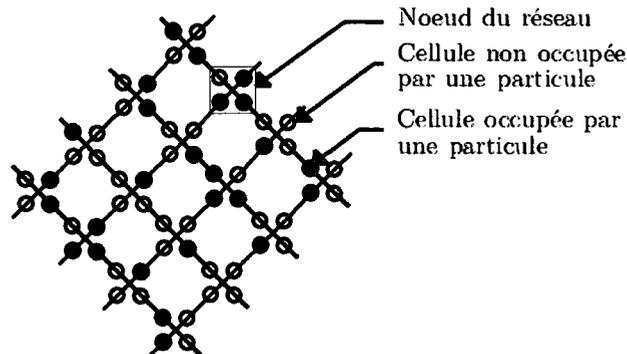


FIGURE 1.1 Réseau de cellules du modèle HPP.

## 1.2 Simulation d'écoulements au niveau microscopique par la méthode des automates de gaz sur réseau

Contrairement aux méthodes de simulation numérique basées sur des équations différentielles liant les propriétés macroscopiques des fluides, l'idée serait de déduire les champs de vitesse, pression ou température, par simulation des interactions entre molécules. Tel les écoulements réels de gaz et liquides, le comportement du fluide se déduirait en considérant l'évolution élémentaire des molécules en interaction les unes avec les autres. Les premières applications de cette idée ont donné lieu au développement de différentes méthodes regroupées dans la catégorie des automates de gaz sur réseau <sup>[40]</sup>.

Inspiré des automates cellulaires <sup>[32; 44]</sup> les automates de gaz sur réseau ont émergé avec les recherches de Hardy, de Pazzis et Pomeau en 1973 <sup>[17; 18]</sup> avec le modèle HPP. Par cette méthode le domaine fluide est représenté par un réseau régulier où pour chaque noeud quatre cellules liées à quatre directions permettent de stocker ou non une particule virtuelle de fluide, figure 1.1. Ces cellules y sont soit pleines, soit vides, selon qu'une molécule s'y trouve ou non, et elles interagissent de façon ordonnée avec les cellules des noeuds de leur voisinage.

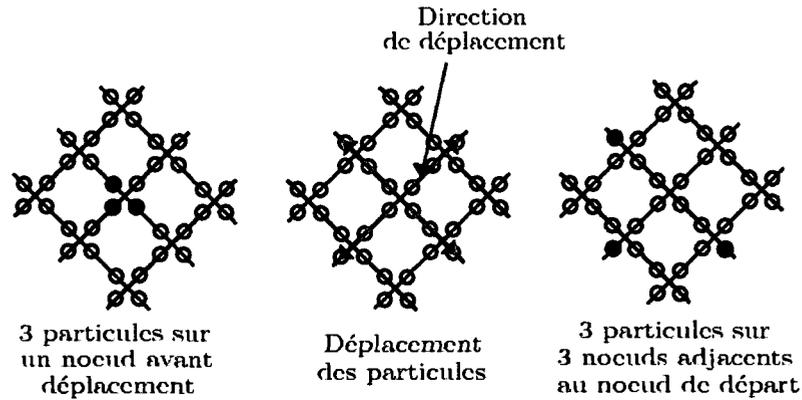


FIGURE 1.2 Propagation des particules sur le réseau du modèle HPP.

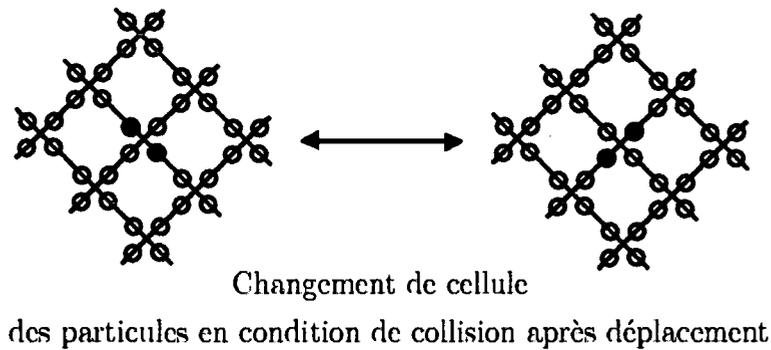


FIGURE 1.3 Condition de collision entre des particules sur réseau HPP.

L'évolution de l'écoulement se détermine par le déplacement des particules fictives sur les cellules. Celles-ci s'y propagent de noeud adjacent en noeud adjacent selon l'une des quatre directions caractéristiques du réseau de discrétisation. Ces directions, dites de propagation, correspondent au lien entre une cellule d'un noeud et la même cellule sur un noeud voisin. Elles illustrent de façon très simplifiée les possibilités de déplacement que possèdent les molécules d'un fluide à un instant donné. Ce déplacement des particules est illustré figure 1.2 pour un cas particulier.

Il arrive parfois que des particules occupent les cellules d'une maille dans une configuration particulière évoquant le cas où elles se percuteraient. Cette configuration,

dite de collision, modifie la trajectoire initiale des particules, comme les boules d'un jeu de billard qui changent de trajectoire lorsqu'elles se percutent. Dans le cas du modèle HPP ceci s'exprime par une redistribution des particules sur les cellules de la maille où se passe la collision, la figure 1.3 illustre ce cas particulier.

Ainsi, en effectuant une succession de propagations des particules avec la modification locale des cellules dans les cas de collision comme illustré figure 1.3, cette méthode tente de simuler le comportement d'un fluide en se basant sur son comportement moléculaire. A la fin d'une telle simulation nous avons un réseau sur lequel un certain nombre de particules sont placées en des positions précises avec des directions spécifiques et des vitesses associées dans lesquelles elles doivent se déplacer. A partir de la connaissance de ces vitesses et positions il est possible d'évaluer la masse et la quantité de mouvement sur chaque noeud du réseau. Il suffit simplement de compter le nombre de cellules occupées pour la masse (maximum 4) et de les multiplier avec les composantes de leurs vitesses associées pour la quantité de mouvement.

Cette méthode très simple essaye d'assimiler un fluide à des particules se déplaçant sur un réseau et interagissant les unes avec les autres selon une règle très élémentaire de collision. Cependant ces premiers pas de la simulation d'écoulements à l'échelle microscopique sont très approximatifs et ne permettent pas d'obtenir des résultats correspondant à ceux obtenus par les équations de Navier-Stokes.

A partir du principe d'automate de gaz sur réseau, différentes améliorations du modèle HPP ont permises à Frish, Hasslacher et Pomeau <sup>[14]</sup> d'améliorer la méthode en 1986 et de créer la méthode FHP. La clef de cette amélioration résidait dans la définition du réseau sur lequel se déplacent les particules, ce dernier doit posséder suffisamment de symétries pour assurer l'isotropie. C'est à partir de cette considération qu'un grand nombre de modifications ont permises de faire évoluer

les automates de gaz sur réseau comme nouvelle méthode de simulation numérique jusqu'à aboutir à la méthode de Boltzmann sur réseau.

### 1.3 Des automates de gaz sur réseau à la méthode de Boltzmann sur réseau

Avec les avancées de Frish, Hasslacher et Pomeau <sup>[14]</sup> un certain nombre de règles plus précises qu'avec le modèle HPP, notamment pour la prise en compte des collisions, permettaient dans une certaine mesure de simuler le mouvement macroscopique de fluide par des simulations du type automates de gaz sur réseau. Cette méthode basée sur le comportement primaire de molécules permettait de retrouver le comportement macroscopique d'écoulements incompressibles simples en deux dimensions (FHP) et trois dimensions (FCHC) <sup>[8]</sup> mais un grand nombre de problèmes la rendait peu efficace.

La transition des méthodes de gaz sur réseau vers la méthode de Boltzmann sur réseau s'effectua par les travaux de McNamara et Zanetti <sup>[29]</sup>. L'occupation des cellules alors représentée de façon binaire, occupé par une molécule ou étant vide, fut améliorée en remplaçant ce caractère booléen par des distributions continues du type Fermi-Dirac. Cependant avec cette méthode les règles de collision entre particules limitaient toujours la simulation car les changements de viscosité du fluide simulé étaient impossibles.

Higuera et Jiménez <sup>[19]</sup> proposèrent alors d'exprimer les relations de collision par un opérateur linéarisé afin d'améliorer la prise en compte du type de fluide en modifiant la viscosité de ce dernier en fonction des paramètres de simulation. Ensuite les distributions de type Fermi-Dirac furent remplacées par des distributions de Boltzmann permettant de considérer les particules non plus individuellement mais

par paquets de mêmes propriétés.

Finalement l'opérateur de collision définissant l'interaction entre les particules fut remplacé par le modèle BGK, Bhatnagar, Gross et Krook <sup>[3]</sup> de collision. Cet opérateur à temps de relaxation unique suggéré par Chen et al. <sup>[6]</sup>, Koelman <sup>[24]</sup> et Qian, D'Humières et Lallemand <sup>[34]</sup> permet de définir en permanence la collision sur chaque noeud en fonction des caractéristiques du fluide et des distributions de Boltzmann au lieu d'utiliser des tables exprimant l'ensemble des possibilités comme avec le modèle HPP ou FHP.

A partir d'un modèle élémentaire où le fluide était simulé par le déplacement de molécules de cellule en cellule sur un réseau, différentes améliorations des éléments clés de la méthode, à savoir le déplacement des molécules et la collision, ont permises de créer la méthode de Boltzmann sur réseau, et notamment sa variante du type BGK. Le principe de base est le même que le principe du modèle HPP, un réseau liant différents noeuds d'un maillage par des vitesses associées, non plus des particules mais des paquets de particules se déplaçant de cellule en cellule et une collision qui ne s'applique plus ponctuellement en quelques points du domaine mais sur tout le domaine et de façon continue. Lorsque ces paquets de particules sont considérés dans leur ensemble et moyennés sur le domaine, il permettent de connaître les caractéristiques du fluide d'un point de vue macroscopique et proposent des résultats similaires à ceux obtenus par une approche basée sur les équations de Navier-Stokes.

#### 1.4 Méthode de Boltzmann sur réseau

La méthode de Boltzmann sur réseau <sup>[37; 40]</sup> constitue un modèle mathématique et un modèle numérique permettant de simuler des écoulements de fluide tout

comme les méthodes basées sur les équations de Navier-Stokes. Comme nous l'avons mentionné, l'originalité par rapport aux méthodes classiques vient du fait qu'elle ne considère pas le fluide d'un point de vue macroscopique mais se base sur sa mécanique au niveau microscopique. Elle est de plus associée à une technique spécifique de propagation de l'information avec l'utilisation de réseaux.

Les méthodes basées sur l'équation de Navier-Stokes ainsi que la méthode de Boltzmann sur réseau représentent ainsi deux alternatives à la simulation numérique en dynamique des fluides, chacune basée à des échelles différentes de l'écoulement. Pour cette dernière le modèle mathématique a été construit au cours des années à partir de différents théorèmes de physique statistique et de la cinétique des gaz, il définit la majeure partie des types d'écoulements à partir de quelques relations liant des paquets de molécules de fluide. En pratique ce caractère général du modèle est simplifié pour les applications du modèle numérique dans un souci de performance de simulation.

D'un point de vue numérique la méthode de Boltzmann sur réseau présente de nombreux avantages. Tout d'abord, malgré la complexité apparente de simuler les échelles microscopiques de fluides, la formulation basée sur des paquets de molécules à un niveau mésoscopique associée à des simplifications de la collision rend le modèle très simple à mettre en application. Cette simplicité algorithmique permet la résolution simplifiée d'écoulements complexes comme par exemple les écoulements diphasiques. Elle bénéficie également d'un traitement simple des conditions aux limites, ceci facilite le traitement de problèmes dans des géométries complexes comme par exemple les écoulements poreux. Un autre des atouts de cette méthode est son caractère local, la simulation d'écoulements est basée sur une évolution des caractéristiques de cellules indépendantes interagissant uniquement avec leur proche voisinage. Une telle méthode de simulation se prête très bien à des calculs en parallèle augmentant considérablement les capacités du modèle. Notons égale-

ment que la solution obtenue tend vers un état à l'équilibre qui maximise l'entropie. Un dernier avantage est son caractère transitoire par définition, la même méthode s'avère avantageuse aussi bien pour des simulations en régime stationnaire, qu'instationnaire.

La méthode de Boltzmann sur réseau possède un certain nombre d'atouts mais également des désavantages, elle est sujette à diverses restrictions liées à son développement ne lui permettant actuellement pas de traiter des écoulements compressibles ou limitant ses applications à des problèmes à très haut nombre de Reynolds.

Ces avantages et inconvénients ne représentent pas une liste exhaustive des capacités de la méthode de Boltzmann sur réseau mais ils illustrent certains des axes de recherche à suivre pour l'amélioration de la méthode et de son applicabilité, nous soulignerons certains de ces aspects dans ce mémoire. La méthode de Boltzmann sur réseau ne constitue en rien un substitut aux techniques actuelles de simulation en dynamique des fluides, mais ses qualités et son approche originale de la simulation en dynamique des fluides justifie qu'elle puisse être considérée comme une alternative. Dans ce mémoire nous allons donc étudier plus en détail les fondements de cette dernière et tenter de souligner son intérêt à travers divers cas.

## 1.5 But et objectifs

Le but de ce mémoire est d'appliquer la méthode de Boltzmann sur réseau pour la simulation numérique d'écoulements fluides et de vérifier qu'elle peut constituer une bonne alternative pour évaluer certains types d'écoulement. Pour atteindre ce but les objectifs sont les suivants :

- Développer l'algorithme de base de la méthode ainsi que différentes méthodes visant à améliorer ses performances.

- Implémenter la méthode et la valider en vérifiant sa capacité à simuler des problèmes classiques en simulation numérique d'écoulements fluides.
- Utiliser la méthode pour la simulation d'écoulements autour de profils NACA propres puis déformés par la formation de givre afin de confronter ses performances à d'autres méthodes de résolution numérique en dynamique des fluides.
- Utiliser la méthode pour la simulation de la remontée d'une particule dans un fluide par la poussée d'Archimède et confronter les résultats obtenus à l'expérience.

## CHAPITRE 2

### THÉORIE ASSOCIÉE À LA MÉTHODE DE BOLTZMANN SUR RÉSEAU

Issue de la catégorie des automates de gaz sur réseau la méthode de Boltzmann sur réseau a été développée pour modéliser l'écoulement de fluides en se basant sur des théorèmes de physique statistique et de cinétique des gaz. L'équation fondamentale de ce développement est l'équation de transport de Boltzmann. Dans ce chapitre nous allons nous pencher sur la manière par laquelle la dérivation de cette équation et un raisonnement inspiré des automates de gaz sur réseau permet d'évaluer le comportement général de fluides. Pour y parvenir nous allons d'abord analyser comment à partir de cette équation de transport et par l'utilisation de quantités appelées distributions de probabilité  $f$ , il est possible de déterminer des quantités macroscopiques comme la vitesse, la masse, ou l'énergie. Ensuite nous verrons de quelle façon la discrétisation de l'équation de transport de Boltzmann permet de définir le modèle de Boltzmann sur réseau. Nous nous pencherons plus précisément sur la méthode retenue pour effectuer les simulations, à savoir le modèle D2Q9 (2 dimensions et 9 distributions de probabilité). Enfin, dans le cadre de l'étude de ce modèle, nous observerons certaines propriétés numériques de ce dernier, principalement concernant sa stabilité et efficacité.

#### 2.1 Principe de base de la méthode de Boltzmann sur réseau

Avant de nous attarder sur la formulation mathématique des équations de Boltzmann et de Boltzmann sur réseau, il est bon de nous pencher sur l'idée issue des

automates de gaz sur réseau <sup>[40]</sup> qui est présente derrière les formules mathématiques.

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, le comportement macroscopique d'un fluide dépend directement de son comportement microscopique. Dans un espace à trois dimensions, pour définir le comportement global exacte de ce fluide sur un domaine  $\Omega$  nous pourrions donc considérer la position  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , et la vitesse  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , de chaque particule ainsi que l'influence qu'elles exercent les unes sur les autres. Déterminer l'évolution temporelle de l'écoulement sur  $\Omega$  composé de  $n$  particules reviendrait donc à observer  $n$  points dans un espace à six dimensions (position et vitesse), et d'en évaluer l'évolution en considérant les interactions entre chaque particule. Pour une application numérique une telle approche devient vite inconcevable vu le nombre de variables, pour l'air, par exemple, à pression et température normales le nombre de particules est de  $n = 5.3 \cdot 10^{19}$  pour un volume de  $V_\Omega = 1 \text{ cm}^3$ . Une approche plus raisonnable consiste donc à étudier les molécules non pas individuellement mais par groupes sur des sous domaines indépendants  $\Omega_k$  tels que  $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ .

Ces sous domaines  $\Omega_k$ , pouvant être appelés cellules, regroupent chacun à un instant donné un nombre de molécules  $n_k < n$  qui est amené à varier au cours du temps. Ces variations dépendent de l'activité microscopique du fluide sur la cellule, à savoir des vitesses de chaque particules ainsi que des interactions qu'elles exercent les unes sur les autres à l'intérieur de  $\Omega_k$ . Pour réduire le nombre d'inconnues il est possible au sein de ces cellules de regrouper les  $n_{k,i}$  molécules de vitesse identique  $\mathbf{c}_i = (c_{i,x}, c_{i,y}, c_{i,z})$  de manière à ce que  $\sum_i n_{k,i} = n_k$ . Sur un sous domaine ces paquets de particules interagissent alors les uns avec les autres, l'interaction la plus importante étant la collision entre particules de vitesse ou trajectoire différentes. Il peut également s'agir de l'action de forces extérieures. Entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + \Delta t$  ces interactions s'expriment par une variation du

nombre de molécules  $n_{k,i}$  des groupes de molécules de même vitesse. En exprimant ces variations par une fonction  $\Delta_{k,i}$  il est possible de résumer le raisonnement qui vient d'être suivi par l'équation (2.1) :

$$n_{k,i}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = n_{k,i}(\mathbf{x}, t) + \Delta_{k,i} \quad (2.1)$$

avec à un même instant  $t$

$$n = \sum_k \left( \sum_i n_{k,i} \right) \quad (2.2)$$

Le problème initial à l'échelle microscopique a donc été simplifié et allégé en considérant des groupes de particules de vitesses similaires à un niveau mésoscopique interagissant les uns avec les autres. Le nombre d'inconnues sur  $\Omega$  est donc bien moins important. Nous verrons que pour un maillage adapté et en considérant les différentes interactions entre groupes de particules dans les cellules et entre cellules il est possible de déduire l'état global sur chaque sous-domaine  $\Omega_k$  et d'en déduire le comportement macroscopique d'écoulements fluides.

Nous allons maintenant voir comment cette vision simplifiée de l'activité microscopique de fluide et l'équation (2.1) vont permettre de définir l'équation de transport de Boltzmann.

## 2.2 Équation de transport de Boltzmann et ses simplifications

A partir du concept de groupes de particules de caractéristiques communes précédemment évoqué, nous allons voir comment le comportement mésoscopique d'un écoulement peut être formulé et simplifié en considérant les mécanismes liant les particules les unes aux autres.

### 2.2.1 Équation de transport de Boltzmann

Nous avons évoqué la possibilité de regrouper les particules en des paquets de particules de caractéristiques communes. Dans un cadre plus général pour ce regroupement nous exprimons les  $n_{k,i}$  particules du sous domaine  $\Omega_k$  de vitesse  $\mathbf{c}_i$  par une quantité  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, t)$  [4; 33; 40], appelée fonction densité de probabilité, telle que  $n_{k,i} = n_0 f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$  corresponde au nombre de particules se trouvant dans un petit domaine  $\Omega_k = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$  autour de la position  $\mathbf{x}$ , possédant une petite gamme de vitesses  $\mathbf{c}_i + d\mathbf{c}$  autour de la vitesse  $\mathbf{c}_i$ , le tout à un instant précis  $t$ .

Comme mentionné à la section 2.1 ce nombre de particules peut varier entre deux pas de temps consécutifs du fait d'interactions entre particules par collision. Cette variation s'exprime par l'équation (2.3) correspondant à (2.1) avec l'utilisation des fonctions de distributions pour une vitesse  $\mathbf{c}$ .

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c}, t + dt) d\mathbf{x} d\mathbf{c} = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c} + Q(f) d\mathbf{x} d\mathbf{c} dt \quad (2.3)$$

Le terme  $Q(f) d\mathbf{x} d\mathbf{c} dt$  illustre la variation du nombre de molécules par collision de la même façon que  $\Delta_{k,i}$ ,  $Q(f)$  est appelé opérateur de collision.

En divisant l'équation (2.3) par  $d\mathbf{x} d\mathbf{c} dt$  et en faisant tendre  $dt$  vers 0 on obtient une formulation plus générale de la relation entre les fonctions de distribution, c'est l'équation de transport de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla_x f = Q(f) \quad (2.4)$$

Il est important de remarquer que dans ce cas nous avons uniquement pris en compte l'influence des collisions entre particules sans l'effet d'une force externe pour la variation du nombre de molécules d'un même groupe. Si cela était le cas

il faudrait rajouter un terme à l'équation. Ainsi pour l'influence d'une force quelconque  $\mathbf{F}$  l'équation deviendrait :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \nabla_{\mathbf{c}} f = Q(f) \quad (2.5)$$

Étant donné que dans ce mémoire nous n'avons pas utilisés de forces externes, pour simplifier le développement nous n'évoquerons pas ce cas.

A partir des fonctions de distributions de l'équation (2.4), et puisque la formule  $n_{k,i} = n_0 f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$  correspond à un nombre de particules autour de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{c}$ , il est possible de déduire les grandeurs macroscopiques sur un volume unitaire en intégrant  $f$  sur l'ensemble des vitesses  $\mathbf{c}$  que prennent les différentes particules en  $\mathbf{x}$ . Ainsi en connaissant  $m$ , la masse moléculaire d'une particule et  $\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{c} - \mathbf{u}$  sa vitesse relative par rapport à un fluide de vitesse  $\mathbf{u}$ , l'expression :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int m f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (2.6)$$

définit la densité massique du fluide  $\rho$ , tandis que :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int m \mathbf{c} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (2.7)$$

définit la vitesse du fluide  $\mathbf{u}$ , et finalement :

$$\rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int m \mathbf{u}_{rel}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (2.8)$$

définit l'énergie interne  $e$ . Il est possible d'exprimer cette énergie interne par  $e = \frac{3}{2} k_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température en Kelvin. Cette définition de  $e$  nous sera utile ultérieurement.

A partir d'une considération sur des paquets de molécules aux caractéristiques de

vitesse précises, par la théorie cinétique des gaz et l'équation de Boltzmann il est donc possible de déduire le comportement macroscopique d'un fluide. Il manque cependant un élément important évoqué sans trop de détails, l'opérateur de collision  $Q(f)$ , comment les distributions interagissent les unes avec les autres suite à des interactions entre les particules ?

### 2.2.2 Opérateur de collision $Q(f)$

L'opérateur de collision illustre la variation au cours du temps des distributions  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ , c'est à dire qu'il est directement lié à la nature du gaz ou fluide considéré, il est lié à l'activité microscopique de ce dernier. La détermination de  $Q(f)$  [4; 33; 40] se résume à évaluer le nombre de molécules entrant en collision et changeant de trajectoire ou vitesse à un endroit précis, entre deux pas de temps, entre deux états donnés. Un tel calcul n'est pas aisé du fait du très grand nombre d'inconnues qui interviennent, mais de la détermination de cet opérateur de collision dépend la justesse de la formulation mathématique (2.4) ou (2.5).

Pour le développement de l'équation de Boltzmann sur réseau nous considérons une définition simplifiée de cet opérateur, les approximations choisies sont les suivantes :

- L'opérateur de collision est déterminé pour le cas d'un gaz dilué où seul les collisions entre deux particules sont considérées.
- Les particules sont supposées indépendantes avant et après la collision. C'est à dire que l'influence des molécules les une sur les autres est négligée hormis lorsqu'il y a collision.
- La collision est supposée ponctuelle et instantanée et elle n'est pas influencée par des forces extérieures.

Ces simplifications sont restrictives car en théorie les particules s'influencent les unes les autres en permanence. Il est cependant supposé que ce domaine d'influence est restreint au proche voisinage de ces dernières et ainsi la collision correspond à l'interaction de ces domaines d'influence. En résumé avec de telles simplification la collision de deux particules ressemble à la collision de deux boules d'un jeu de billard. La physique de ce phénomène et le lien entre les états pré et post-collision pour déduire une distribution  $f_a$  se résument par l'équation suivante :

$$Q(f_a) = \int \int (f'_a f'_b - f_a f_b) c_{rel} \sigma(c_{rel}, \theta) d\omega d\mathbf{c}_b \quad (2.9)$$

Cette équation fait le lien entre les vitesses de groupes de particules  $a$  et  $b$  avant la collision  $\mathbf{c}'$  et après  $\mathbf{c}$  tel que  $f'_a = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_a, t)$ ,  $f'_b = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_b, t)$ ,  $f_a = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_a, t)$ ,  $f_b = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_b, t)$ . D'autre part  $c_{rel} = |\mathbf{c}_a - \mathbf{c}_b| = |\mathbf{c}'_a - \mathbf{c}'_b|$  est la vitesse relative entre les particules avant et après la collision et  $\sigma$  représente la section efficace différentielle, elle exprime d'une certaine façon l'interaction entre les particules des groupes  $a$  et  $b$ . Cette dernière se définit en fonction d'un paramètre d'impacte  $B$  et d'un angle  $\theta$  tel que :

$$\sigma(c_{rel}, \theta) = \frac{B(c_{rel}, \theta) dB}{\sin(\theta) d\theta} \quad (2.10)$$

Les paramètres  $B$  et  $\theta$  ainsi que la collision entre deux particules sont illustrés figure 2.1. Enfin  $d\omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$  est l'angle solide sur lequel on intègre  $\sigma$  avec  $\phi$  l'angle azimutal afin de déterminer la collision en considérant toutes les directions.

Pour résumer, l'équation (2.9) exprime donc le lien entre une distribution  $f_a = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_a, t)$  et les autres distributions en un point. Cet opérateur de collision représente un cas très particulier de collision, cependant la formulation mathématique obtenus reste assez compliquée et la résolution exacte d'un tel opérateur de collision est difficilement envisageable pour une simulation pratique d'écoulements. Nous allons donc voir qu'un modèle encore plus simpliste introduit par Bhatnagar, Gross

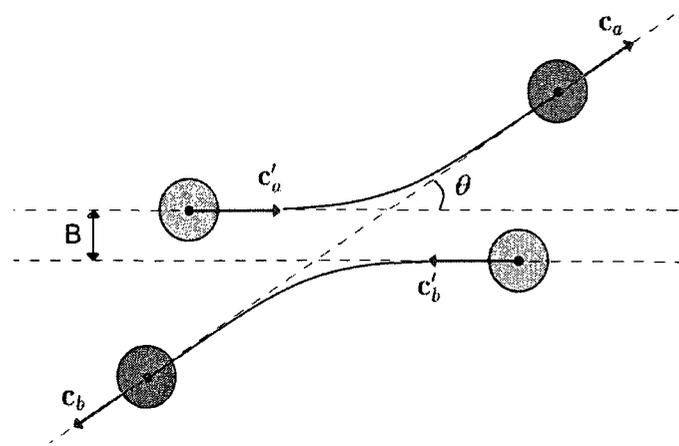


FIGURE 2.1 Représentation dans le plan de deux particules pré et post-collision.

et Krook <sup>[3]</sup>, communément appelé modèle BGK, a été retenu pour la méthode de Boltzmann sur réseau. Avant de nous pencher sur ce modèle plus simple il est nécessaire de définir une quantité importante, déduite de (2.9) et de considérations sur l'entropie d'un système, c'est à dire la distribution à l'équilibre  $f^{eq}$ .

### 2.2.3 H théorème de Boltzmann et les distributions à l'équilibre

L'équation de Boltzmann (2.4), couplée avec l'opérateur de collision exprimé par l'équation (2.9), décrit la variation de distributions  $f$  de molécules d'un gaz dilué. Dans le but d'alléger une telle formulation de la collision nous allons définir une distribution de probabilité particulière, la distribution à l'équilibre notée  $f^{eq}$ .

Pour comprendre ce qu'elle représente, il suffit d'imaginer un gaz dans une boîte possédant initialement un champ de vitesses quelconque qui est observé pendant un certain temps. Aucune force, ni aucune vitesse, ni aucun échange thermique n'est imposé. D'un point de vue macroscopique le gaz devrait idéalement atteindre un état de stagnation total au bout d'une très longue période d'observation. D'un point de vue microscopique ceci se traduirait par un état d'agitation des molé-

cules statistiquement constant et complètement uniforme. De façon similaire, si au lieu d'une boîte nous considérons un canal avec un fluide s'écoulant uniformément à l'intérieur, au bout d'un certain temps l'écoulement devrait être parfaitement uniforme et d'un point de vue microscopique l'agitation des molécules serait là encore statistiquement constante. D'un point de vue mésoscopique ces états s'illustreraient alors par des distributions  $f$  constantes pour chaque vitesse  $\mathbf{c}$ , ce sont ces distributions qui sont appelées distributions d'équilibre.

Malgré là encore l'impossibilité d'obtenir une solution exacte et précise nous allons voir comment elles ont été évaluées en effectuant quelques considérations sur l'entropie du système. Pour ce faire il est tout d'abord nécessaire de considérer la fonction  $H(t)$  [33; 40].

$$H(t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \ln(f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{c} \quad (2.11)$$

Cette quantité varie en sens inverse de l'entropie et représente à une constante près l'inverse de celle-ci [33].

En dérivant cette équation par rapport au temps et en remplaçant le terme  $\partial f / \partial t$  qu'il en résulte en utilisant l'équation de Boltzmann (2.4), ainsi que l'opérateur de collision précédemment évoquée (2.9),  $H(t)$  devient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (\ln f_a + 1) (-\mathbf{c}_a \nabla_x f_a) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_a + \int (f'_a f'_b - f_a f_b) c_{rel} \sigma(c_{rel}, \theta) (\ln f_a + 1) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{c}_b d\mathbf{c}_a \quad (2.12)$$

Après diverses considérations physiques et mathématiques [4; 33] il s'avère que seul le terme de collision contribue à  $\partial H / \partial t$ . De plus par l'utilisation de l'inverse de la collision (2.9), à savoir l'opérateur  $Q$  exprimant la collision de particules entre un état  $\mathbf{c}_a, \mathbf{c}_b$  pré-collision et  $\mathbf{c}'_a, \mathbf{c}'_b$  post-collision (section 2.2.2), il est possible de

déduire la formule :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{4} \int (f'_a f'_b - f_a f_b) \sigma \ln \left( \frac{f_a f_b}{f'_a f'_b} \right) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{c}_a d\mathbf{c}_b \quad (2.13)$$

Enfin, à partir de cette formule une étude du signe des différents termes la constituant <sup>[4; 33]</sup> permet de déduire la relation très simple :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \quad (2.14)$$

Cette formule constitue le théorème H de Boltzmann qui stipule par opposition à  $H$  que l'entropie d'un gaz sans corrélation qui satisfait à l'équation de Boltzmann ne peut qu'augmenter au cours du temps <sup>[33]</sup>. Il s'avère que cette augmentation converge vers un état d'équilibre, comme celui évoqué précédemment. À cet équilibre l'entropie ne varie plus, cet état correspond au cas particulier où  $\partial H/\partial t = 0$  et dans ce cas :

$$f'_a f'_b = f_a f_b \quad \text{ou} \quad \ln f'_a + \ln f'_b = \ln f_a + \ln f_b \quad (2.15)$$

Ceci revient donc à dire que  $\ln f$  est une quantité conservée avec la collision de deux particules. Étant donné que les quantités conservées entre l'état initial et l'état final d'une collision sont la masse, la quantité de mouvement et l'énergie,  $\ln f$  ne peut être qu'une combinaison linéaire de ces invariants <sup>[33]</sup>.

$$\ln f = A'' + \mathbf{B}m\mathbf{c} - D\frac{1}{2}m\mathbf{c}^2 \quad (2.16)$$

qui se reformule :

$$f = A' \exp \left[ \mathbf{B}m\mathbf{c} - D\frac{1}{2}m\mathbf{c}^2 \right] = A \exp \left[ -\frac{mD}{2} \left( \mathbf{c} - \frac{\mathbf{B}}{D} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

Avec  $A''$  et  $A'$ ,  $A$  et  $D$  des scalaires et  $\mathbf{B}$  un vecteur. Il est possible de déduire ces constantes pour compléter la formule. Il suffit d'utiliser la définition de la densité  $\rho = \int m f d\mathbf{c}$  (2.6), de la vitesse  $\mathbf{u} = (\int m \mathbf{c} f d\mathbf{c}) / \rho$  (2.7), et enfin à partir de (2.8) pour l'énergie par unité de volume  $\frac{3}{2} k_B T = (\frac{1}{2} \int m \mathbf{u}_{rel}^2 f d\mathbf{c}) / \rho$ . Après calcul des constantes l'équation (2.17) devient :

$$f = f^{eq} = \frac{\rho}{m} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(\mathbf{c} - \mathbf{u})^2}{2k_B T} \right) \quad (2.18)$$

Cette distribution particulière est la distribution de Maxwell [4; 5; 33]. Présentée ici comme la solution à l'équilibre de l'équation de Boltzmann (2.4) avec la collision (2.9), elle est d'après le théorème H la distribution particulière vers laquelle une distribution  $f$  quelconque doit tendre.

La distribution à l'équilibre (2.18) est un élément clef de la méthode de Boltzmann sur réseau. Elle constitue un moyen de déduire un état mésoscopique associé à un état macroscopique donné et elle permet de définir un opérateur de collision  $Q$  plus simple que celui présenté par l'équation (2.9).

#### 2.2.4 Modèle BGK pour la collision

L'équation de Boltzmann précédemment détaillée décrit l'évolution de fonctions de distribution  $f$  d'un fluide. A partir de ces fonctions de distribution il est alors simple de déduire les quantités macroscopiques caractérisant l'écoulement en effectuant les intégrations (2.6), (2.7) et (2.8). Cependant, malgré la simplicité apparente de ce raisonnement, la pratique est compliquée par la forme de l'opérateur de collision  $Q(f)$  (équation (2.9)).

Néanmoins la précision que ce dernier permet de déduire à un niveau microscopique peut être inutile pour la détermination d'un état macroscopique, or c'est cette

dernière échelle que la méthode de Boltzmann sur réseau cherche à déterminer. Dans notre étude nous utilisons donc  $Q(f)$  simplifié à nouveau de façon à ce que seul une valeur moyenne du précédent opérateur soit retenue :

$$Q(f) = -\frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\tau^*} \quad (2.19)$$

Cette opérateur de collision proposé par Bhatnagar, Gross et Krook <sup>[3; 37]</sup> exprime la collision comme une relaxation des distributions  $f$  vers l'équilibre donné par  $f^{eq}$  (2.18). Celui-ci est exprimé en fonction de la densité, vitesse, et température du fluide considéré au point d'évaluation de la collision. Cette relaxation est pondérée par un temps  $\tau^*$  de l'ordre du temps moyen entre deux collisions pour une particule. Ce temps exprime en quelque sorte la viscosité du fluide auquel se rapportent les distributions, nous reviendrons sur sa détermination ultérieurement. Cette vision simplifiée de la collision sera retenue pour la suite de ce mémoire, elle s'avère suffisante pour exprimer les caractéristiques d'un fluide ou gaz quelconque et garantir la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Maintenant que nous avons présentés l'équation de Boltzmann avec un modèle simplifié de collision ainsi que quelques fondements de cette dernière, nous allons voir comment cette équation peut être discrétisée et adaptée de façon à pouvoir simuler des écoulements de fluides.

### 2.3 L'équation de Boltzmann sur réseau

Les formulations générales évoquées dans la section précédente sont des équations continues, c'est à dire, équation de Boltzmann, détermination de la masse volumique, de la quantité de mouvement. Pour l'application numérique il est maintenant nécessaire de simplifier ces équations pour pouvoir traiter un nombre fini de

variables tout en conservant la fiabilité des résultats. Nous allons donc regarder la détermination de l'équation de Boltzmann sur réseau, à vitesses discrètes, à partir de l'équation continue de Boltzmann.

Pour alléger la notation nous allons désormais utiliser les abréviations  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, t) = f_i(t)$ ,  $f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, \mathbf{c}_i, t + \Delta t) = f_i(t + \Delta t)$  avec  $\mathbf{c}_i$  une vitesse précise, nous noterons  $f_i^{eq}$  de même.

Comme définit précédemment nous retenons l'équation de Boltzmann (2.4) avec l'opérateur de collision simplifié BGK (2.19) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla_{\mathbf{x}} f = -\frac{1}{\tau^*} (f - f^{eq}) \quad (2.20)$$

où  $f$  est la fonction de distribution au temps  $t$ , à la position  $\mathbf{x}$  pour la vitesse microscopique  $\mathbf{c}$ . Le paramètre  $\tau^*$  représente le temps de relaxation pour la collision déterminé en fonction du fluide considéré et  $f^{eq}$  correspond à la distribution de Maxwell (2.18).

Les propriétés hydrodynamiques du fluide tel que la densité  $\rho$  et la vitesse  $\mathbf{u}$  peuvent être calculées à partir des moments de  $f$  définis par les équations (2.6) et (2.7). Comme nous l'avons évoqué, la fonction de distribution à l'équilibre pour un état donné est déduite de ces propriétés.

Pour pouvoir utiliser ces équations pour des simulations d'un point de vue numérique il est nécessaire de les discrétiser.

### 2.3.1 Discrétisation de l'équation continue de Boltzmann

L'équation simplifiée (2.20) permet d'évaluer la variation des distributions dépendant de l'espace, de leur vitesse et du temps. Pour une résolution numérique cette

équation se discrétise selon chaque paramètre [12; 37; 40].

Tout d'abord le spectre infini des vitesses  $\mathbf{c}$  associées aux distributions en un point doit être discrétisé pour ne considérer qu'un nombre fini de vitesses,  $\mathbf{c}_i = (c_{i,x}, c_{i,y}, c_{i,z})$  en trois dimensions avec l'indice  $i$  représentant la discrétisation. Cette discrétisation est un élément clef de la méthode de Boltzmann sur réseau car elle doit s'effectuer de façon à conserver les quantités globales de l'écoulement. Nous évoquerons sa détermination dans un prochain chapitre. De l'équation continue de Boltzmann nous obtenons alors l'équation discrète de Boltzmann :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \nabla_x f_i = -\frac{1}{\tau^*} (f_i - f_i^{eq}) \quad (2.21)$$

Pour déterminer l'équation de Boltzmann sur réseau les dérivées temporelles et spatiales sont discrétisées à leur tour pour une vitesse  $\mathbf{c}_i$  :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \quad (2.22)$$

pour le temps avec  $\Delta t$  le pas de temps.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = \frac{f_i(x_\alpha + \Delta x_\alpha, t + \Delta t) - f_i(x_\alpha, t + \Delta t)}{\Delta x_\alpha} \quad (2.23)$$

pour l'espace avec  $\Delta x_\alpha$  le pas géométrique dans la direction  $\alpha$  d'un repère cartésien.

En substituant les équation (2.22) et (2.23) en trois dimensions dans l'équation de

Boltzmann discrète (2.21) nous déduisons :

$$\begin{aligned}
& \frac{f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + c_{i,1} \frac{f_i(x_1 + \Delta x_1, t + \Delta t) - f_i(x_1, t + \Delta t)}{\Delta x_1} \\
& + c_{i,2} \frac{f_i(x_2 + \Delta x_2, t + \Delta t) - f_i(x_2, t + \Delta t)}{\Delta x_2} \\
& + c_{i,3} \frac{f_i(x_3 + \Delta x_3, t + \Delta t) - f_i(x_3, t + \Delta t)}{\Delta x_3} \\
& = -\frac{1}{\tau^*} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t))
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour lier les différents paramètres entre eux et pour pouvoir en quelque sorte suivre les groupes de particules (héritage des automates de gaz sur réseau) le pas géométrique et le pas de temps sont choisis de façon à définir la vitesse  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{c}_i \Delta t$ . Cette relation implique que pendant un pas de temps  $\Delta t$  les groupes de particules représentés par les distributions se déplaceront de exactement un pas de discrétisation géométrique, cette vision rejoint les méthodes de gaz sur réseau et notamment la méthode HPP évoquées au chapitre 1.2. Une telle relation entre les paramètres nécessitera diverses considérations pour le choix des discrétisation lors des simulations, nous reviendrons sur ce point ultérieurement. L'équation (2.24) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + \frac{f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t)}{\Delta t} \\
& = \frac{f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \\
& = -\frac{1}{\tau^*} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t))
\end{aligned} \tag{2.25}$$

La discrétisation aboutit donc à une relation très simple entre les fonctions densité de probabilité pour une même vitesse  $\mathbf{c}_i$ , c'est l'équation de Boltzmann BGK sur réseau, ainsi :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau^*} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \tag{2.26}$$

Cette formulation explicite est divisée en deux parties représentant l'interprétation physique de la théorie. D'abord un transport des distributions le long des vitesses de discrétisation (membre de gauche de l'équation) ou d'un point de vue plus qualitatif, un déplacement des paquets de particules de vitesse similaire de maille en maille de la discrétisation géométrique, c'est la propagation. Ensuite cette propagation est pondérée par une variation du nombre d'individus du fait des interactions entre particules (membre de droite de l'équation), c'est la collision.

Nous venons donc de déduire l'équation de Boltzmann BGK sur réseau par discrétisation de l'équation de Boltzmann continue. Cependant cette formulation s'applique pour une vitesse particulière après discrétisation du spectre infini des vitesses que peuvent prendre les distributions, il est maintenant nécessaire de se pencher sur cette étape, quelle discrétisation choisir pour définir le spectre des vitesses associées aux distributions ?

### 2.3.2 Discrétisation de l'espace des vitesses

L'équation de Boltzmann sur réseau (2.26) s'applique pour des fonctions de distribution  $f$  de même vitesse  $\mathbf{c}_i$ . Elle s'applique également à partir d'une discrétisation spatiale et temporelle étroitement liée à cette vitesse de façon à avoir un déplacement de cellule en cellule comme avec le modèle HPP (Chapitre 1.2). Il y a théoriquement une infinité de groupes de particules de vitesses  $\mathbf{c}$  différentes, sur un domaine de simulation il faut donc discrétiser cet ensemble de vitesses en considérant des ensembles moyens de façon à ce que le maillage (ou réseau) associé à ces vitesses puisse assurer le déplacement des distributions à chaque pas de temps, le tout en garantissant la conservation des quantités de base sur le domaine.

Contrairement à la discrétisation spatiale temporelle qui peut être adaptée de

façon à avoir moins d'influence sur l'écoulement à des échelles élevées devant celle du raffinement, la discrétisation de l'espace des vitesses doit pouvoir moyenner l'ensemble du spectre de vitesse par quelques valeurs. Cette discrétisation s'effectue selon divers critères <sup>[37; 40]</sup> :

- L'isotropie de la discrétisation. Cette dernière se vérifie par divers considérations mathématiques <sup>[40]</sup> et permet de définir si un ensemble de vitesses est suffisamment invariant par rotation.
- La conservation de la masse de la méthode de Boltzmann associée à une discrétisation.
- La conservation de la quantité de mouvement de la méthode de Boltzmann associée à une discrétisation.
- La conservation de la quantité d'énergie de la méthode de Boltzmann associée à une discrétisation.

Plusieurs types de discrétisations permettent de garantir ces propriétés de façon satisfaisante, des exemples couramment employés en 1, 2 et 3D sont respectivement la discrétisation D1Q3 (1D et 3 vitesses de discrétisation), D2Q9 (2D et 9 vitesses de discrétisation) et D3Q19 (3D et 19 vitesses de discrétisation). La représentation de ces discrétisations peut être visualisée à la figure 2.2. Dans le cadre de ce mémoire nous allons uniquement nous pencher sur le modèle D2Q9. Ce modèle sera utilisé pour des simulations en deux dimensions sans prise en compte du rôle de la température.

Maintenant que nous avons présenté l'équation de Boltzmann sur réseau ainsi que la discrétisation des vitesses du réseau D2Q9, nous allons voir les différentes adaptations permettant de mettre en oeuvre ce modèle. Avant cela nous allons voir une simplification utilisée par la méthode de Boltzmann sur réseau, c'est à dire la simplification de la distribution à l'équilibre.

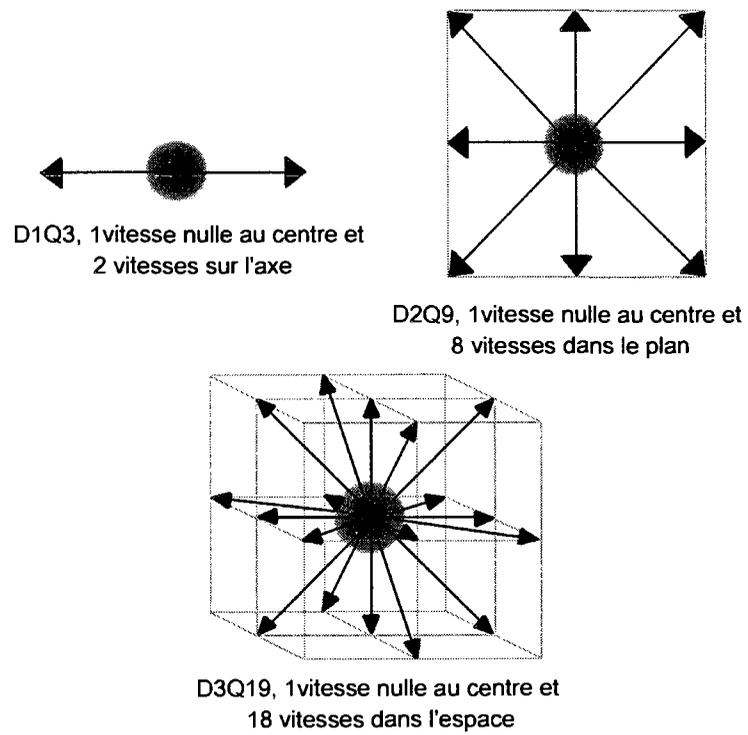


FIGURE 2.2 Quelques exemples de discrétisation de l'espace de phase.

### 2.3.3 Approximation de la distribution à l'équilibre

La formulation de la distribution à l'équilibre comme nous l'avons présenté correspond pour le modèle BGK à celle de la distribution de Maxwell (2.18). Pour la méthode de Boltzmann cette formule peut être simplifiée en fonction des vitesses discrétisées par un développement en série de Taylor de l'exponentielle par rapport à  $\mathbf{u}$  [37; 39; 40] :

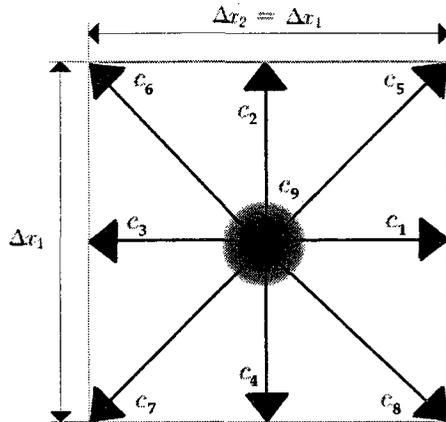
$$\begin{aligned}
 f^{eq}(\mathbf{0} + \mathbf{u}) &= \beta \exp \left[ \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}}{k_B T} - \frac{\mathbf{u}^2}{2k_B T} \right] \\
 &= f^{eq}(\mathbf{0}) + \mathbf{u} f^{eq'}(\mathbf{0}) + \frac{\mathbf{u}^2}{2} f^{eq''}(\mathbf{0}) + O(\mathbf{u}^3) \\
 &= \beta \left( 1 + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}}{k_B T} + \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})^2}{2(k_B T)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2k_B T} \right)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

avec  $\beta = \frac{\rho}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \exp \left[ \frac{-(\mathbf{c})^2}{2k_B T} \right]$ . Une telle approximation est applicable pour des écoulements quasi-incompressibles à faible nombre de Mach. Pour ce cas la formulation générale de la distribution à l'équilibre devient donc :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \exp \left[ \frac{-(\mathbf{c})^2}{2k_B T} \right] \left( 1 + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}}{k_B T} + \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})^2}{2(k_B T)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2k_B T} \right) \tag{2.28}$$

Il est notable que la partie correspondant à  $\beta$  dans cette équation équivaut à la distribution de Maxwell pour une vitesse  $\mathbf{u}$  nulle. Ainsi la distribution  $f^{eq}$  pour une vitesse  $\mathbf{u}$  quelconque est exprimée comme proportionnelle à une distribution à l'équilibre où  $\mathbf{u} = 0$ , où les distributions exprimeraient un état où le fluide serait statique.

Cette formulation simplifiée va maintenant nous permettre d'adapter intégralement l'équation de Boltzmann à une discrétisation particulière de l'espace des vitesses, la discrétisation D2Q9.



Vitesses verticales ou horizontales de norme  $c$ .

$$c_{1,2}, c_{3,4} = (\pm c, 0), (0, \pm c)$$

Vitesses transversales de norme  $\sqrt{2}c$ .

$$c_{5,6,7,8} = (\pm c, \pm c)$$

Vitesse nulle pour les particules immobiles.

$$c_9 = (0, 0)$$

FIGURE 2.3 Maille élémentaire du réseau D2Q9.

### 2.3.4 Discrétisation du type D2Q9 de l'équation de Boltzmann

Nous avons vu que pour des applications numériques l'équation de Boltzmann a été discrétisée dans l'espace, le temps et l'espace des vitesses. Ces différentes discrétisations sont liées les unes aux autres par une dépendance du pas géométrique au pas de temps en fonction de la vitesse de discrétisation  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{c}_i \Delta t$ .

Comme nous l'avons mentionné, dans le cadre de ce mémoire nous utiliserons un unique type de réseau 2D, c'est à dire le réseau D2Q9 (2 dimensions et 9 vitesses de discrétisation). La forme des cellules élémentaires de ce réseau est précisée à la figure 2.3, ainsi que les vitesses associées à chaque direction.

Connaissant cette discrétisation il est maintenant possible d'explicitier divers formulations générales abordées précédemment pour les adapter à ce réseau [37; 40].

Tout d'abord, les grandeurs macroscopiques sont liées aux distributions par les intégrales (2.6) et (2.7). Ainsi pour un réseau D2Q9 à 9 vitesses, l'intégrale devrait pouvoir être réduite à une somme finie sur les  $i$  vitesses de discrétisation en un

point à un instant donné, c'est à dire :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1,9} f_i(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad (2.29)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1,9} \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{c} f(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad (2.30)$$

pour déterminer respectivement la densité et la vitesse sur un volume unitaire. Il faut noter que la masse  $m$  des particules est considérée unitaire dans ces formules.

Un autre élément important, déjà largement évoqué, est la distribution à l'équilibre  $f^{eq}$ . Sa définition a précédemment été précisée et simplifiée pour aboutir à l'équation (2.28) pour le modèle BGK déduite des distributions de Maxwell (2.18). Avec la discrétisation des vitesses il est possible d'associer des distributions  $f_i^{eq}$  à chaque vitesse  $\mathbf{c}_i$ . Ceci permet de déduire une formulation discrète des distributions à l'équilibre sous la forme suivante :

$$f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = \rho \frac{w_i}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{k_B T} + \frac{(\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2}{2(k_B T)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2k_B T} \right) \quad (2.31)$$

Comme évoqué dans la section précédente, ces distributions locales sont formulés comme une variation par rapport à un équilibre où l'écoulement est statique au niveau macroscopique. Pour chaque vitesse  $\mathbf{c}_i$  l'équilibre est exprimé par des poids  $w_i$ .

La détermination de ces poids  $w_i$  dépend de la discrétisation des vitesses utilisées et donc du type de réseau utilisé. Pour les obtenir il suffit d'appliquer à ces distributions  $w_i$ , traduisant un écoulement stagnant, les contraintes d'isotropie, conservation de masse, quantité de mouvement et énergie, utilisées pour le choix de la discrétisation de vitesse. Avec les vitesses  $\mathbf{c}_i$  correspondant à celles du réseau

D2Q9 (figure 2.3) il est possible d'obtenir <sup>[40]</sup> :

$$\begin{aligned}
 \frac{w_{1,2,3,4}}{\rho_0} &= \frac{1}{9} \\
 \frac{w_{5,6,7,8}}{\rho_0} &= \frac{1}{36} \\
 \frac{w_9}{\rho_0} &= \frac{4}{9} \\
 \frac{k_B T}{m} &= \frac{c^2}{3} = c_s^2
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

où  $c_s$  exprime la vitesse du son sur le réseau. Avec ces dernières remarques spécifiques au réseau D2Q9, nous venons de finaliser la détermination des équations de la méthode de Boltzmann sur réseau telles que nous allons les utiliser pour réaliser un code de simulation d'écoulements fluides.

Nous allons maintenant résumer les différents éléments de la méthode BGK de Boltzmann sur réseau D2Q9 et apporter quelques compléments sur ses caractéristiques numériques.

## 2.4 Méthode de Boltzmann sur réseau BGK

A partir de la discrétisation de l'équation de Boltzmann, nous avons présenté un modèle pouvant être utilisé pour effectuer des simulations sur un domaine fluide en se basant sur le transport de distributions de probabilité  $f$  sur un réseau associé. Avant de nous concentrer plus précisément sur la mise en application de ce modèle nous allons résumer les éléments clef puis nous observerons rapidement sa validité et ses limites.

### 2.4.1 Principe de la méthode de Boltzmann sur réseau D2Q9

Nous avons présenté un ensemble de relations permettant d'effectuer la simulation d'un écoulement de fluide par déplacement de distributions de probabilité de cellule en cellule dans l'esprit des automates de gaz sur réseau.

A partir d'un état connu des distributions  $f_i$  au temps  $t$ , il est possible de déduire les grandeurs macroscopiques de l'écoulement :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1,9} f_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.33)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1,9} \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.34)$$

Ces grandeurs macroscopiques permettent de définir un équilibre idéal vers lequel les distributions devraient tendre. Les distributions à l'équilibre idéal  $f_i^{eq}$  sont exprimées de façon discrète pour chaque vitesse  $c_i$  du réseau en  $\mathbf{x}$  à  $t$  :

$$\begin{aligned} f_{i=1,2,3,4}^{eq}(\rho, \mathbf{u}) &= \frac{\rho}{9} \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) \\ f_{i=5,6,7,8}^{eq}(\rho, \mathbf{u}) &= \frac{\rho}{36} \left( 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) \\ f_{i=9}^{eq}(\rho, \mathbf{u}) &= \frac{4\rho}{9} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tel que déjà exprimé, les distributions  $f_i(t)$  devraient tendre vers ces équilibres  $f_i^{eq}(t)$  pendant  $\Delta t$ . Cette propriété est caractérisée par une relaxation en fonction d'un temps caractéristique  $\tau^*$  qui illustre la variation des distributions entre  $f_i(t)$  et  $f_i(t + \Delta t)$ . Cette étape, appelée collision, est représentée par le membre de droite de l'équation de Boltzmann discrétisée (2.36) :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau^*} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.36)$$

Enfin, en plus d'une variation des populations associées à chaque distribution  $f_i$  pendant  $\Delta t$ , celles-ci se déplacent selon chaque vitesse  $c_i$  et passent d'une position  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$ . Cette dernière étape, la propagation, apparaît également dans l'équation (2.36) et correspond au transport des groupes de particules le long de  $c_i$ .

A la fin de ce raisonnement un nouvel état de la fonction  $f$  est connue à  $t + \Delta t$ . A partir de celui-ci un nouvel état macroscopique peut être déduit, puis un nouvel équilibre idéal, et ainsi l'état  $t + 2\Delta t$ , et les suivants.

Cette procédure constitue la méthode de Boltzmann sur réseau que nous étudierons plus précisément lors de sa mise en oeuvre d'un point de vue algorithmique au chapitre suivant. Avant cela, il est important de vérifier que ces quelques équations très simples puissent bel et bien être utilisées pour des simulations d'écoulements fluides, comme le font les équations de Navier-Stokes. De plus, il faut encore expliciter un paramètre important, le temps de relaxation  $\tau^*$ . Ces dernières étapes du développement de l'équation de Boltzmann sur réseau vont s'effectuer par une rapide étude du développement de Chapman-Enskog.

### 2.4.2 Développement de Chapman-Enskog

L'expansion de Chapman-Enskog, présenté dans la référence <sup>[40]</sup>, également appelé analyse multi-échelle, est un développement qui permet de lier l'équation de transport de Boltzmann aux équations de Navier-Stokes. A partir de ce développement il est possible d'explicitier certains termes non directement présents dans l'équation de Boltzmann discrétisée, à savoir le temps de relaxation  $\tau^*$  et la pression  $P$ .

Le principe de ce développement est de considérer que l'écoulement macroscopique correspond à la vision moyenne d'un écoulement mésoscopique perturbé. Ces per-

turbations s'expriment en fonction du nombre de Knudsen  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{\lambda}{L_c} \quad (2.37)$$

Il correspond au ratio entre la distance moyenne entre deux collision de particules et la longueur macroscopique caractéristique du système simulé. Le terme  $\lambda$  définit la distance parcourue par une particule entre deux collisions avec d'autres particules. Elle caractérise en quelque sorte la densité de particules et indirectement la viscosité du fluide.  $L_c$  de son côté précise les dimensions du domaine macroscopique, elle peut par exemple définir la taille d'un obstacle. Notons que pour considérer comme continu le fluide entourant un obstacle il faut  $\epsilon < 1$ .

Avec ces éléments les différents paramètres de l'équation de Boltzmann sur réseau (2.36), soit  $t$ ,  $\mathbf{x}$  et  $f_i$ , sont segmentés en différents contributions pour différentes échelles de l'écoulement plus ou moins petites les unes par rapport aux autres, se rapportant à différents phénomènes représentés comme l'advection ou la diffusion. Les différentes variables sont de la forme :

$$v = \sum_n v_n \epsilon^n \quad (2.38)$$

Suite à un développement de Taylor au second ordre de l'équation de Boltzmann sur réseau (2.36) avec la formulation (2.38) pour les différents paramètres, en observant séparément les contributions des différentes composantes en  $\epsilon^n$ , il est possible de déduire les équations caractéristiques de l'écoulement au niveau macroscopique.

Ainsi il est possible de déduire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.39)$$

et l'équation du mouvement sans force extérieure :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2.40)$$

Ces équations s'obtiennent avec un développement de Taylor au premier ordre de l'équation de Boltzmann sur réseau après changement des variables selon l'équation (2.38). Dans ce premier développement la pression  $P$  a été définie telle que :

$$P = \frac{k_B T}{m} \rho \quad (2.41)$$

ou encore comme :

$$P = \frac{c^2}{3} \rho = c_s^2 \rho \quad (2.42)$$

d'après les relations (2.32). Ensuite, en étudiant le second ordre du développement de l'équation de Boltzmann sur réseau les relations précédentes sont précisées et les équations de Navier-Stokes en régime incompressible et sans considération de forces extérieures sont retrouvées :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.44)$$

De cette dernière, le lien entre le temps de relaxation  $\tau^*$  et sa formulation adimensionnelle  $\tau = \frac{\tau^*}{\Delta t}$  avec la viscosité cinématique  $\nu$  est obtenu par analogie lors du développement :

$$\nu = \frac{c^2}{3} \left( \tau^* - \frac{\Delta t}{2} \right) = \frac{c^2 \Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (2.45)$$

Nous venons donc d'aborder le principe de l'analyse multi-échelle <sup>[40]</sup>. Cette analyse permet de souligner le lien entre les équations de Navier-Stokes incompressibles (2.43, 2.44) et l'équation de Boltzmann BGK. Cette étude permet de compléter

le lien entre les mondes macroscopiques et microscopiques en explicitant le lien entre viscosité cinématique  $\nu$  et temps caractéristique de relaxation  $\tau^*$ . Un temps caractéristique adimensionné a également été défini et sera désormais utilisé.

Nous avons donc terminé la présentation des différentes équations de la méthode de Boltzmann sur réseau. Cependant un certain nombre de suppositions et simplifications ont été utilisées et bien qu'élégante la formulation de Boltzmann BGK sur réseau D2Q9 possède un certain nombre de limitations.

### 2.4.3 Propriétés numériques de la méthode de Boltzmann sur réseau

La méthode de Boltzmann sur réseau par une discrétisation judicieuse de l'équation de Boltzmann se réduit à quelques équations simples et un réseau associé. Maintenant il est bon d'aborder quelques une de ses propriétés numériques liées à un tel développement [37; 40].

#### 2.4.3.1 Précision

Le terme précision fait référence à l'erreur introduite par le remplacement des opérateurs différentiels de l'équation de Boltzmann par des différences finies. D'un point de vue spatial aussi bien que temporel, la formulation de la méthode par l'association des distributions à des vitesses de discrétisation opposées implique une précision d'ordre deux en espace et en temps [37]. Cependant une telle précision concerne la méthode au coeur du fluide, avec l'imposition des conditions frontières le non respect de la symétrie des cellules sur les bord peut affecter cette précision, notamment spatialement.

### 2.4.3.2 Stabilité

Cette propriété doit être considérée en permanence pour la réalisation de simulations numériques par la méthode de Boltzmann sur réseau comme avec toute autre méthode de simulation numérique.

La première condition de stabilité concerne la capacité que possède la méthode à transporter l'information et elle s'exprime par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), dont le nombre de Courant est :

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (2.46)$$

Étant donné le lien entre le pas de temps et le pas géométrique  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{c}_i \Delta t$ , imposé lors de la définition du réseau, la condition CFL se réduit à  $C = M < 1$ ,  $M$  représentant le nombre de Mach. D'après la définition de la méthode et notamment des distributions d'équilibre cette condition de stabilité devrait être automatiquement remplie si la condition d'incompressibilité  $M \ll 1$  de la définition des distributions d'équilibre a bien été respectée. Nous verrons qu'en pratique la vitesse  $\mathbf{c}_i$  est normalisée à 1, ainsi la condition CFL et d'incompressibilité se réduisent à une condition sur la vitesse  $u \ll 1$ .

Une autre condition de stabilité bien plus problématique en application concerne la limitation sur le temps de relaxation  $\tau$  et indirectement la viscosité. Selon le type de fluide représenté et le pas de discrétisation utilisé le temps caractéristique de la collision varie entre la limite inférieure  $1/2$ , représentant une viscosité quasi nulle, et la limite supérieure  $+\infty$  pour une viscosité quasi infinie. Au voisinage de ces bornes la méthode de Boltzmann sur réseau devient fortement instable, ces instabilités pouvant se former initialement à proximité des zones de discontinuités comme les frontières solides ou fluide du domaine ou à proximité de vortex

dans l'écoulement. Cette contrainte sur la viscosité constitue une limitation pour les simulations d'écoulements à haut nombre de Reynolds et turbulents, certaines méthodes de prise en compte de la turbulence [9; 28; 37; 42] peuvent cependant palier ce problème dans une certaine mesure.

Ces quelques considérations sur la stabilité sont à retenir pour la mise en application de la méthode de Boltzmann sur réseau car elles représentent les principales sources d'instabilité d'une simulation.

### 2.4.3.3 Lien entre précision, stabilité et temps simulé

Pour conclure notre étude de la méthode de Boltzmann sur réseau présentée au cours de ce chapitre et avant de voir comment cette dernière est utilisée en pratique pour la simulation d'écoulements, nous allons rapidement nous pencher sur quelques considérations générales utiles pour une mise en application efficace de la méthode de Boltzmann sur réseau. Afin d'employer la méthode de Boltzmann sur réseau de façon optimale il est important d'avoir à l'esprit les considérations suivantes.

Les différents paramètres caractéristiques du réseau, à savoir le pas géométrique  $\Delta x$ , le pas de temps  $\Delta t$  et le temps de relaxation  $\tau$  sont liés les uns aux autres par les relations  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{c}_i \Delta t$  et  $\nu = \frac{c^2 \Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right)$ . Ainsi, pour une simulation sur un domaine quelconque, plus le pas  $\Delta x$  est petit, plus la simulation sera précise mais plus le pas  $\Delta t$  sera court, plus l'évolution temporelle de la simulation sera longue. Inversement un pas géométrique grand impliquera un pas de temps grand, la simulation évoluera alors plus rapidement mais sera moins précise. Maintenant que la précision a été évaluée il faut également souligner la stabilité de la simulation. On note que la diminution de  $\Delta t$  génère inversement une augmentation du temps de relaxation. Ainsi, lorsque une simulation est caractérisée par un temps de relaxation

trop petit la limite de stabilité  $\tau = 1/2$  est approchée. Inversement une simulation stable peut devenir instable si les pas  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont trop agrandis.

Ces quelques notions sur les liens entre les paramètres du réseau sont importantes pour un emploi optimisé du modèle de Boltzmann sur réseau lors de son utilisation pour la simulation d'écoulements.

Maintenant que nous avons défini les équations de la méthode de Boltzmann sur réseau nous allons voir comment les implémenter en pratique.

## CHAPITRE 3

### APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOLTZMANN SUR RÉSEAU D2Q9

Dans le chapitre précédent nous avons défini une discrétisation temporelle et spatiale de l'équation de transport de Boltzmann pour déduire l'équation de Boltzmann sur réseau. Nous avons observé qu'à partir de considérations sur le comportement de molécules, ou plutôt groupes de molécules, il est possible de relier ces derniers au comportement global du fluide. Dans ce second chapitre nous allons retenir l'équation qui a été définie et nous allons voir de quelle façon cette dernière peut être programmée pour simuler des écoulements. Nous effectuerons ensuite diverses précisions nécessaires pour utiliser le modèle comme tout autre méthode de simulation : l'imposition de conditions frontières, l'évaluation des efforts s'appliquant sur des parois solides, l'utilisation de raffinements.

#### 3.1 Simulation avec le modèle D2Q9

Pour commencer nous allons reprendre les équations du modèle de Boltzmann sur réseau D2Q9 (section 2.4.1) et voir de quelle façon s'applique les techniques de collision, propagation. Mais, avant cela il est important d'aborder l'adimensionalisation des équations.

### 3.1.1 Adimensionalisation des paramètres

Jusqu'à présent, nous avons présenté l'équation de Boltzmann sur réseau dans un système d'unités physiques. Cependant, pour des raisons de simplification de son implémentation elle est généralement utilisée de façon adimensionnelle par l'utilisation d'un système d'unités basé sur le réseau.

Les distributions de probabilité  $f$  ainsi que le temps de relaxation  $\tau$  sont de par leur définition déjà des quantités en unités de réseau, ces dernières restent donc les mêmes pour le reste de notre étude. Pour ce qui est des quantités modifiées elles seront désormais formulées avec une barre ( $\bar{\quad}$ ) au dessus de la variable.

La base de l'adimensionalisation se réduit au fait que les pas géométrique  $\Delta x$  et temporel  $\Delta t$  ne sont plus utilisés physiquement, mais en terme d'unités de réseau. Nous avons donc les quantités  $\bar{\Delta x} = 1$  et  $\bar{\Delta t} = 1$  définissant le réseau. De par leur définition, les vitesses de discrétisation du réseau D2Q9 sont alors basées sur la vitesse  $\bar{c} = \frac{\bar{\Delta x}}{\bar{\Delta t}} = 1$ . Ces variables de réseau permettent également de définir la coordonnée  $\bar{x}$  et le temps  $\bar{t}$  adimensionnels.

La densité du fluide est également normalisée en fonction de la densité physique du fluide  $\rho_0$  tel que  $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1$ . Nous avons vu que la méthode est quasi-incompressible, selon la masse volumique du fluide choisit  $\bar{\rho}$  devrait donc rester constante et unitaire. Cependant, l'incompressibilité n'est pas parfaite et une légère variation par rapport à l'unité est en permanence observée.

Ainsi, à partir de ces différentes considérations d'adimensionalisation les équations de base du modèle de Boltzmann sur réseau D2Q9, formules (2.33), (2.34), (2.35) et (2.36) deviennent :

$$\bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \sum_{i=1,9} f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \quad (3.1)$$

TABLE 3.1 Conversions entre unités physiques et unités de réseau.

Variabes	Physiques	Sur réseau	Relation
Densité	$\rho$	$\bar{\rho}$	$\rho = \rho_0 \bar{\rho}$
Distribution	$f_i$	$f_i$	—
Temps de relaxation	$\tau^*$	$\tau$	$\tau^* = \Delta t \tau$
Pas géométrique	$\Delta x$	$\bar{\Delta x} = 1$	—
Pas de temps	$\Delta t$	$\bar{\Delta t} = 1$	—
Vitesse sur réseau	$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\bar{c} = 1$	—
Viscosité	$\nu = \frac{c^2 \Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right)$	$\bar{\nu} = \frac{1}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right)$	$\nu = c \Delta x \bar{\nu}$
Coordonnées	$\mathbf{x}$	$\bar{\mathbf{x}}$	$\mathbf{x} = \Delta x \bar{\mathbf{x}}$
Temps	$t$	$\bar{t}$	$t = \Delta t \bar{t}$
Vitesse	$\mathbf{u}$	$\bar{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u} = c \bar{\mathbf{u}}$
Accélération	$\mathbf{a}$	$\bar{\mathbf{a}}$	$\mathbf{a} = \frac{c}{\Delta t} \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{g} = \frac{c}{\Delta t} \bar{\mathbf{g}}$
Masse	$m$	$\bar{m}$	en 2D $m = \rho_0 \Delta x^2 \bar{m}$

$$\bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \sum_{i=1,9} \mathbf{e}_i f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} f_{i=1,2,3,4}^{eq}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{\bar{\rho}}{9} \left( 1 + 3\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{u}} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{u}})^2 - \frac{3}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 \right) \\ f_{i=5,6,7,8}^{eq}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{\bar{\rho}}{36} \left( 1 + 3\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{u}} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{u}})^2 - \frac{3}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 \right) \\ f_{i=9}^{eq}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) &= \frac{4\bar{\rho}}{9} \left( 1 - \frac{3}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f_i(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i, \bar{t} + 1) = f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau} \left( f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) - f_i^{eq}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \right) \quad (3.4)$$

où les  $\mathbf{e}_i$  représentent les vecteurs de discrétisation  $\mathbf{c}_i$  normalisés.

La pression et la viscosité s'expriment à leur tour à partir des équations (2.42), (2.45) :

$$\bar{P} = \frac{\bar{\rho}}{3} \quad (3.5)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (3.6)$$

Ces équations simplifiées sont celles que nous allons programmer afin de simuler des écoulements fluides. Le tableau 3.1 résume l'adimensionalisation, le lien entre chaque grandeur physique et la grandeur associée en dimensions du réseau.

Cette étape constitue une simple généralisation des équations ainsi qu'une simplification en normalisant les grandeurs sur le réseau. Dans la partie résultats de ce mémoire (Chapitre 4) nous verrons quelques exemples pratiques pour illustrer le raisonnement à suivre pour passer de grandeurs physiques aux grandeurs de simulation en unités de réseau lors d'applications concrètes.

A partir de ces formules simplifiées nous allons maintenant reprendre les explications de la section 2.4.1 sur le fonctionnement de la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous allons voir sa mise en oeuvre et le principe algorithmique de collision, propagation.

### 3.1.2 Concepts de collision et de propagation

Le domaine d'étude une fois discrétisé géométriquement avec un réseau régulier de mailles D2Q9 se résume à un nombre fini de cellules où l'activité microscopique du fluide est considérée par l'utilisation de 9 distributions associées à 9 vitesses de discrétisation (figures 3.1 et 3.2). L'évaluation de l'évolution de ces distributions suit le raisonnement de collision et de propagation. Dans les équations adimensionnalisées, la collision illustre la variation des distributions entre deux pas de temps consécutifs  $\bar{t}$  et  $\bar{t} + 1$ , c'est le membre de droite de l'équation (3.4). Cette étape permet de définir un état post-collision  $\tilde{f}_i$  à  $\bar{t} + 1$  associé à une distribution particulière  $f_i$  à  $\bar{t}$ . La figure 3.3 illustre cette modification sur la cellule de coordonnées  $[i, j]$  :

$$\tilde{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1) = f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) - \frac{1}{\tau} \left( f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) - f_i^{eq}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \right) \quad (3.7)$$

Par la collision les 9 distributions sur une cellule sont modifiées. Nous remarquons à la figure 3.3, que les distributions dans chaque direction sont représentés par des flèches de tailles différentes. Ceci est seulement employé dans le but de noter leur grandeur et ne doit pas être confondu avec leurs vitesses de propagation qui elles

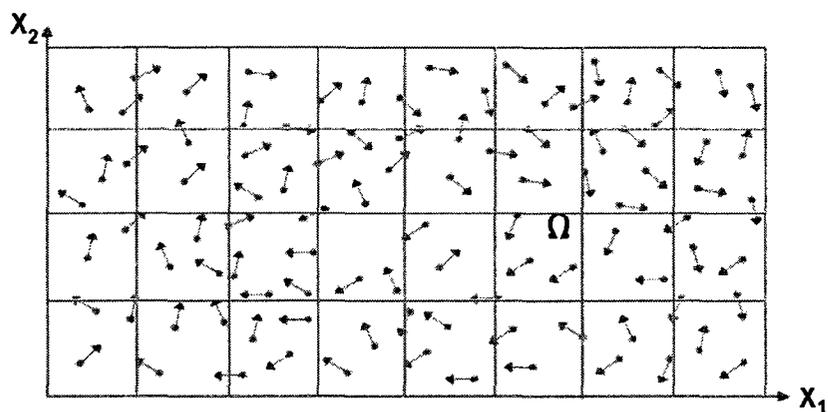


FIGURE 3.1 Représentation simplifiée de l'activité microscopique sur un domaine fluide  $\Omega$ .

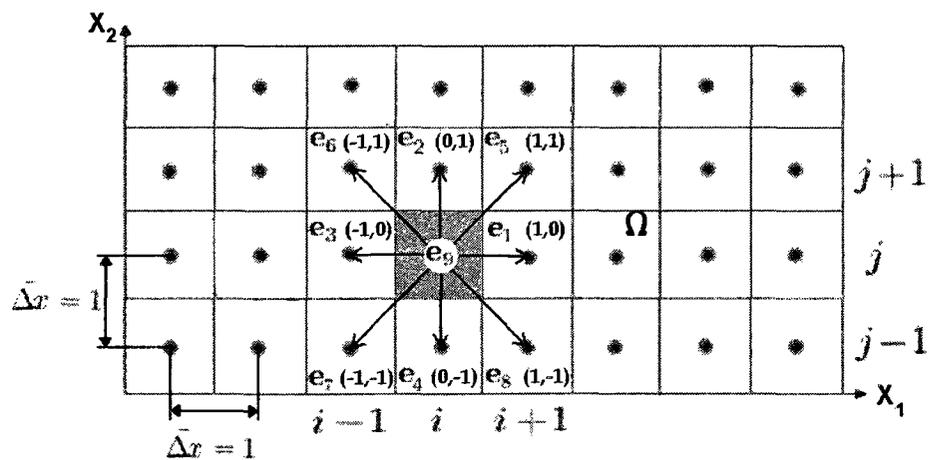
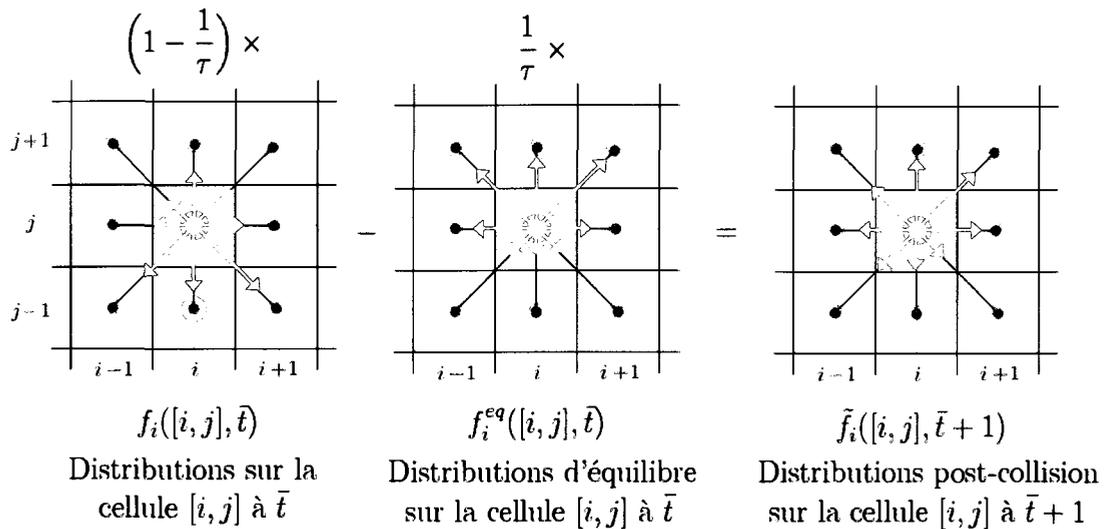


FIGURE 3.2 Discrétisation d'un domaine fluide  $\Omega$  par un réseau D2Q9 adimensionné.

FIGURE 3.3 Collision sur une cellule  $[i, j]$ .

ont été fixées lors de la détermination du réseau D2Q9.

Cette étape représente donc l'influence qu'exercent les distributions les unes sur les autres et évalue les variations que devraient subir ces dernières lors de l'étape suivante appelée propagation.

Une fois l'étape de collision appliquée à l'ensemble du domaine, les distributions post-collision  $\tilde{f}_i$  doivent être propagées pour compléter le pas de temps. Ces dernières doivent se déplacer d'exactly une cellule le long de leur vitesse associée  $\mathbf{e}_i$ . Cette étape revient à compléter l'application de l'équation (3.4) :

$$f_i(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_i, \bar{t} + 1) = \tilde{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1) \quad (3.8)$$

Cette propagation des distributions entre deux pas de temps consécutifs est illustrée à la figure 3.4. Pour chaque cellule les 8 distributions sont copiées sur la cellule adjacente dans la direction des vecteurs de discrétisation du réseau (figure 2.3), le 9<sup>ème</sup> groupe correspondant aux particules statiques n'est pas propagé.

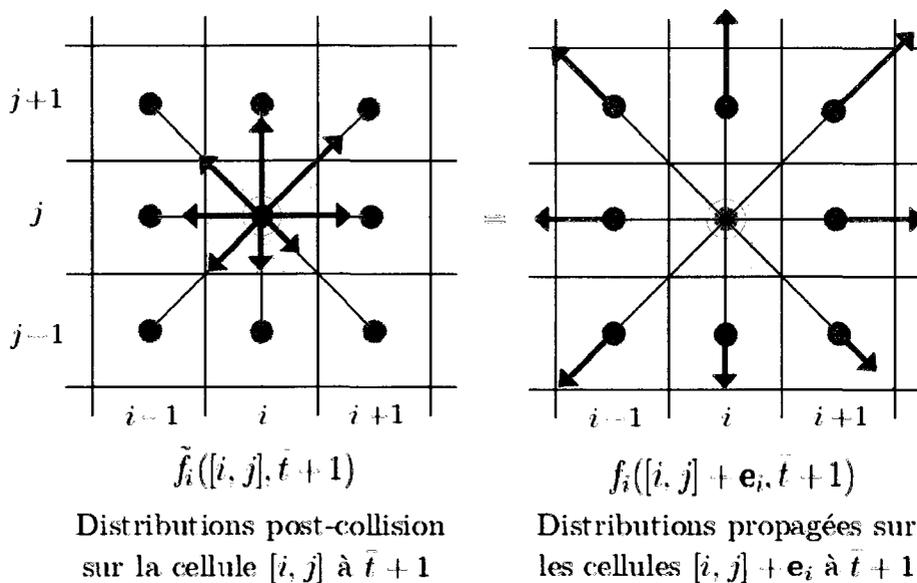


FIGURE 3.4 Propagation des distributions post-collision depuis une cellule  $[i, j]$ .

Une fois cette propagation appliquée à toute les cellules du domaine, un nouvel état à  $\bar{t} + 1$  sera défini pour chaque cellule par la propagation depuis ses 8 cellules adjacentes. La détermination de ce nouvel état pour une cellule  $[i, j]$  est illustré à la figure 3.5. Sur celle-ci, l'image de gauche illustre l'ensemble des distributions post-collision sur la cellule  $[i, j]$  et ses cellules adjacentes. Sur l'image de droite, après la propagation, les cellules adjacentes ont chacune contribué à définir l'état  $\bar{t} + 1$  sur la cellule  $[i, j]$  par la propagation d'une distribution dans chaque direction (distributions en bleu).

Ainsi ce processus de collision et de propagation représente l'évolution de l'écoulement sur le domaine entre deux pas de temps  $\bar{t}$  et  $\bar{t} + 1$  en séparant l'équation (3.4) en deux étapes. Pour effectuer une simulation il suffit de recommencer ces étapes pour le nombre de pas de temps à simuler.

Avec l'adimensionalisation et les concepts de collision et de propagation nous avons résumé la base de la méthode de Boltzmann sur réseau. Il s'agit des étapes simples

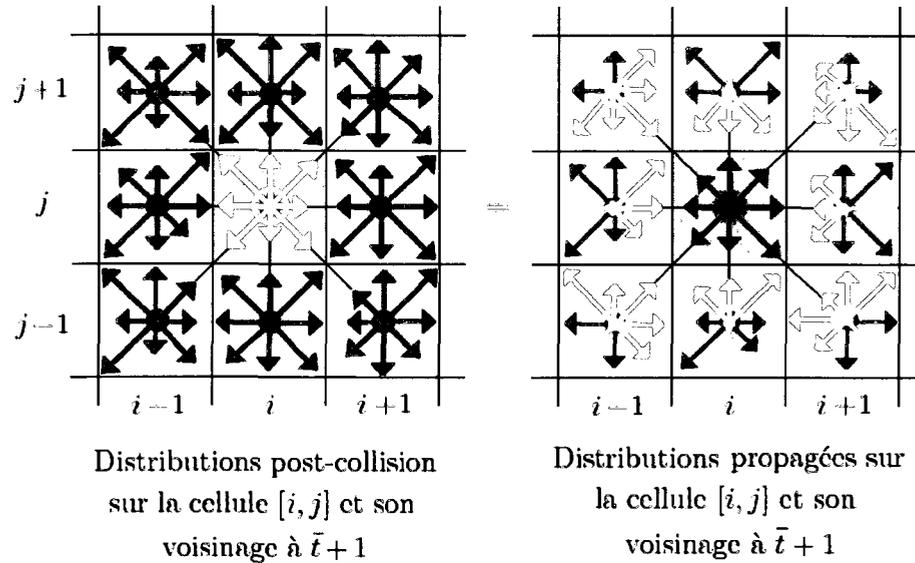


FIGURE 3.5 Propagation des distributions post-collision vers une cellule  $[i, j]$  définissant l'état  $\bar{t} + 1$ .

qui permettent la simulation d'écoulements.

### 3.1.3 Algorithme de base de la méthode de Boltzmann sur réseau

Nous allons résumer comment les différentes étapes et concepts présentés jusqu'à maintenant se succèdent lors d'une simulation [38; 40].

– **Discrétisation du domaine de simulation et adimensionalisation des paramètres.** (sections 3.1.2, 3.1.1)

– **Définition d'un état initial.**

Cet état initial se détermine en fonction de la densité  $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} = 0)$  et des vitesses macroscopiques  $\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} = 0)$  sur le domaine. Un écoulement stagnant ou une solution particulière peuvent être imposés, nous expliquerons comment dans la section 3.2 dédié aux conditions aux limites.

– **Etape de collision.** (section 3.1.2)

Passage de  $f_i(\bar{t})$  à  $\tilde{f}_i(\bar{t} + 1)$ .

- **Etape de propagation.** (section 3.1.2)

Déplacement de  $\tilde{f}_i(\bar{t} + 1)$  à  $f_i(\bar{t} + 1)$ .

- **Prise en compte des conditions frontières, imposition de forces volumiques.**

Tel que nous le verrons section 3.2, les distributions  $f_i(\bar{t} + 1)$  peuvent être modifiées sur certaines cellules à cette étape.

- **Détermination de l'état macroscopique à  $\bar{t} + 1$ .**

Les  $f_i(\bar{t} + 1)$  connues désormais sur tout le domaine permettent de déduire la densité  $\bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1)$  et les composantes de la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1)$  par sommation des distributions selon les équations (3.1) et (3.2).

- **Nouvelle itération en temps  $\bar{t} = \bar{t} + 1$ .**

A partir de cette étape, à  $\bar{t} + 1$  le domaine est complètement défini, aussi bien à un niveau mésoscopique que macroscopique. Pour passer au temps  $\bar{t} + 2$  il suffit de reprendre le raisonnement et de calculer un nouvel état post-collision et ainsi de suite. La simulation se terminera lorsque le nombre souhaité d'itérations sera effectuée ou qu'un critère d'arrêt sera atteint.

Ces quelques étapes du raisonnement de base à suivre pour mettre en application la méthode de Boltzmann sur réseau sont schématisées par un algorithme présenté à la figure 3.6. Cet algorithme de calcul représente l'essentiel de la méthode de Boltzmann sur réseau. Pour compléter la méthode nous allons maintenant voir un point important non encore détaillé, l'imposition des conditions aux limites.

### 3.2 Conditions aux limites appliquées au modèle D2Q9

Une infinité d'états microscopiques peuvent caractériser un même état macroscopique, étant donné que les distributions sont une formulation moyennée de cette

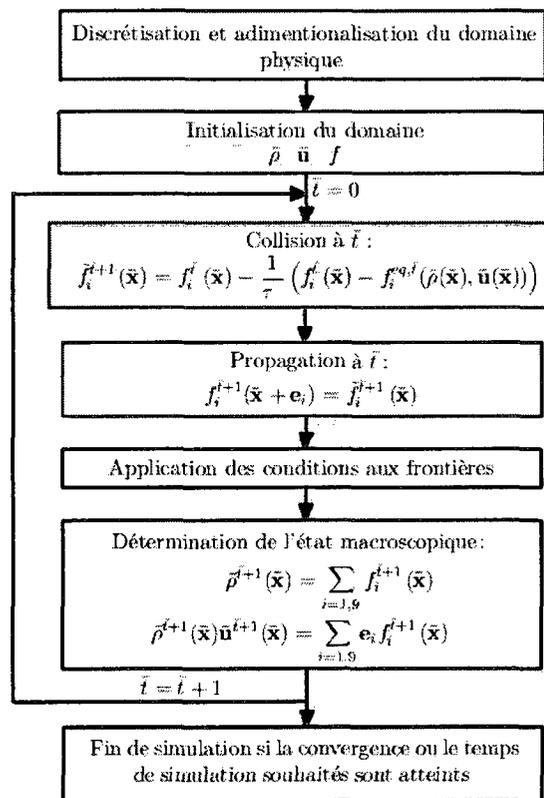


FIGURE 3.6 Algorithme de base de la méthode de Boltzmann sur réseau.

activité microscopique du fluide une infinité de combinaisons des distributions discrétisées peuvent ainsi donner un même champ de vitesse ou de pression. Quelles distributions imposer sur une paroi ou un domaine pour représenter une vitesse, pression, sans affecter l'état mésoscopique ?

### 3.2.1 Conditions initiales

Pour ce cas il y a peu de possibilités pour le choix des distributions. Le seul état qui peut être défini pour un champ de vitesse donné et un champ de pression sans autres informations sont les distributions à l'équilibre définies par les équations (3.3) [37; 40]. Cet état macroscopique initial peut être le cas d'un fluide stagnant ou bien possédant une vitesse constante ou encore une solution obtenue par d'autres méthodes.

### 3.2.2 Conditions frontières

Pour ce second cas nous possédons alors plus d'information sur le fluide au niveau mésoscopique. Lors de la résolution sur un domaine par la méthode de Boltzmann sur réseau, les distributions sur un noeud entre deux pas de temps sont déduites des conditions sur les noeuds fluides adjacents. Si un noeud se trouve sur le bord du domaine, l'absence de noeuds fluides adjacents dans certaines directions générera le manque de certaines distributions pour définir l'état du fluide sur la paroi. Un cas particulier où un noeud sur une paroi ne peut être complètement défini du fait du manque de trois distributions  $f_5$ ,  $f_2$  et  $f_6$  après la collision et la propagation est présenté figure 3.7. L'imposition de conditions frontières consiste à compléter ces distributions manquantes ou à imposer un nouveau jeu de distributions aux limites du domaine de façon à représenter une condition souhaitée de vitesse, pression, etc.

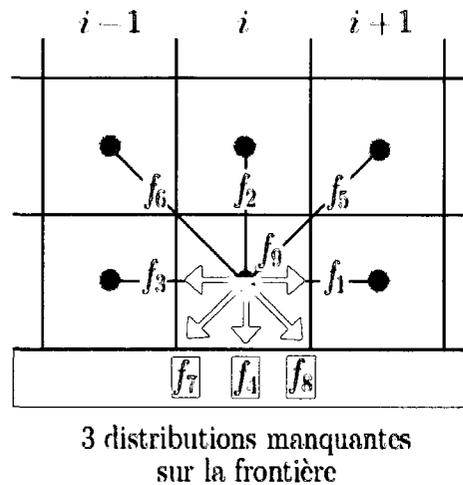


FIGURE 3.7 Distributions manquantes après collision et propagation sur une cellule au bord du domaine.

Différents types de conditions frontières peuvent être utilisées, certaines élémentaires ne se basent que sur des considérations mésoscopiques concernant le fluide, c'est le cas des conditions frontières périodiques ou de non glissement à la paroi [37; 38; 40]. D'autres plus complètes permettent de "choisir" un état mésoscopique à partir de la connaissance de la vitesse ou pression [16; 21; 26; 37; 38; 40; 43].

### 3.2.2.1 Conditions frontières mésoscopiques

Ces premières sont les plus simples et les plus stables, elles exploitent très bien les principes de collision et de propagation de la méthode de Boltzmann sur réseau.

- **Les conditions frontières périodiques** [37; 38] : Ce type de condition frontière est utilisé dans le cas particulier de milieux infinis car elles permettent de boucler les frontières les unes aux autres. Les distributions sortant du domaine d'un côté  $y$  sont juste renvoyées sur les noeuds du côté opposé. Pour le cas d'un canal infini que les distributions  $f_1$ ,  $f_8$  et  $f_5$  correspondant à une sortie du fluide sur les noeuds du côté Est sont directement transférés aux distributions  $f_1$ ,  $f_8$ ,  $f_5$

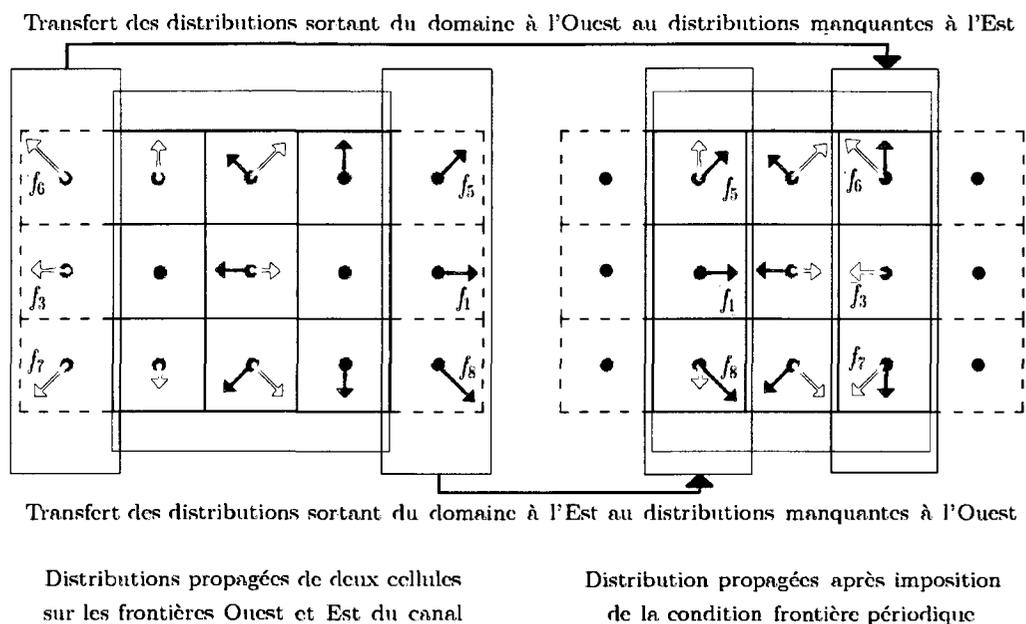


FIGURE 3.8 Renvoi périodique des distributions dans le cas d'un canal.

sur le côté Ouest (figure 3.8). Un raisonnement similaire peut s'appliquer dans chaque direction. Ce type de condition frontière est très simple, elle nécessite peu de calculs, et ne génère pas d'instabilités. Son utilisation reste cependant restreinte à quelques cas.

- **Les conditions frontières du type paroi solide** [37; 38] : Ce type de frontière est utile pour représenter la condition de non glissement pariétal à l'interface entre un fluide et un solide. Pour la programmation de cette dernière la paroi solide est définie tout comme le fluide par des cellules appartenant au réseau (figure 3.9).

Les cellules se situant dans le solide sont appelés cellules solides et les cellules dans le fluide cellules fluides. Pour un lien (ou plus exactement une direction de propagation)  $i$ , entre un noeud fluide et un noeud solide adjacent, nous pouvons imposer la condition frontière appelée méthode de renvoi directe. Elle consiste à renvoyer les distributions  $f_i$  allant du fluide vers le solide sur leur noeud fluide de départ dans la direction directement opposée. Plus simplement entre deux pas

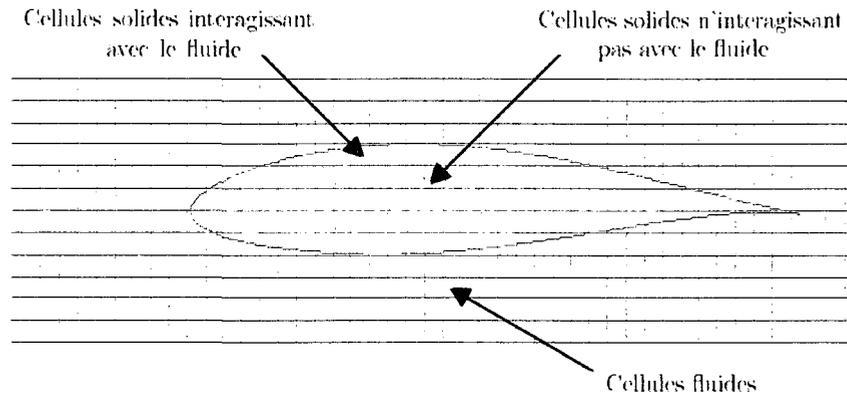


FIGURE 3.9 Prise en compte d'un profil d'aile sur le réseau.

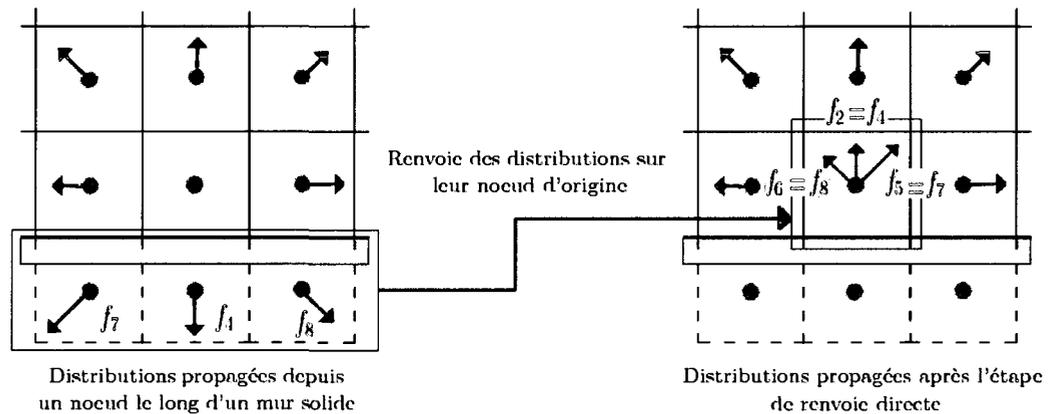


FIGURE 3.10 Renvoi directe des distributions sur une cellule.

de temps avec la méthode de renvoie directe, la propagation le long de la paroi s'effectue telle que :

$$f_{-i}(\bar{x}, \bar{t} + 1) = \tilde{f}_i(\bar{x}, \bar{t} + 1) \quad (3.9)$$

où  $-i$  représente la direction opposée à  $i$ , par exemple si  $i = 6$ ,  $-i = 8$ . Une telle prise en compte de la paroi solide garantit une vitesse nulle au niveau de l'interface fluide solide. Le principe du renvoie directe est illustré figure 3.10.

Nous avons présenté la technique du renvoie directe sur un mur lisse (figure 3.10), mais cette dernière s'applique aussi bien pour des coins que des angles solides avec la réflexion de 1 à 7 distributions. Cette méthode appliquée sur des parois

situés à mi-chemin entre noeuds solides et noeuds fluides maintient parfaitement les caractéristiques numériques de la méthode. Par sa précision et simplicité cette technique permet à la méthode de Boltzmann sur réseau d'être efficace pour la résolution directe de problème dans des géométries complexes, comme par exemple les écoulements en milieu poreux. Cependant, dans certains cas son incapacité à suivre parfaitement le bord de la paroi peut être une source d'imprécision, notamment quand la paroi solide est curviligne. Cette approximation, dite en escalier, est illustrée à la figure 3.9. Nous verrons que différentes techniques utilisant des interpolations ont été développées pour palier à ce problème.

Nous allons maintenant nous pencher sur une autre catégorie de conditions frontières plus complexes, mais nécessaires pour imposer des quantités macroscopiques sur les limites du domaine afin d'élargir le champ d'application de la méthode.

### 3.2.2.2 Conditions frontières macroscopiques

Une grande variété de façons d'imposer des grandeurs macroscopiques aux parois ont été développées [16; 21; 26; 37; 38; 43], chacune possédant ses avantages ou inconvénients en terme de stabilité ou précision. Nous allons rapidement présenter certaines d'entre elles retenues pour les applications numériques.

- **Conditions frontières de Zou et He** [43] : La méthode proposée par Zou et He s'applique aux parois lisses, elle permet de compléter les trois distributions manquantes en fonction de l'état macroscopique souhaité à la paroi et en fonction des six distributions déjà obtenues des cellules adjacentes. Pour expliquer le principe de fonctionnement de la méthode nous considérons le cas particulier d'un canal pour lequel nous voulons imposer une entrée de fluide à la vitesse  $\mathbf{u}_0 = [u_{x,0}, u_{y,0}]$  sur la face latérale Ouest. Après la propagation sur le domaine, de façon similaire à ce qui est illustré à la figure 3.7, les distributions  $f_2, f_3, f_4$ ,

$f_6$ ,  $f_7$  et  $f_9$  sont connues, les distributions  $f_1$ ,  $f_5$  et  $f_8$  sont à déterminer.

Pour la résolution on utilise la définition de l'état macroscopique donné par les équations (3.1) et (3.2), sur les noeuds de la frontière on a donc les relations :

$$f_1 + f_5 + f_8 = \rho - (f_2 + f_3 + f_4 + f_6 + f_7 + f_9) \quad (3.10)$$

$$f_1 + f_5 + f_8 = \rho u_{x,0} + (f_3 + f_6 + f_7) \quad (3.11)$$

$$f_5 - f_8 = \rho u_{y,0} - (f_2 - f_4 + f_6 - f_7) \quad (3.12)$$

La densité  $\rho$  sur chaque noeud de la paroi, donc indirectement la pression sur chaque cellule, découle de ces relations et est explicitée par la formule :

$$\rho = \frac{1}{1 - u_{x,0}} [f_9 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.13)$$

Maintenant que l'état macroscopique à obtenir est complètement déterminé, une supposition permet d'expliciter les distributions correspondantes, à savoir que la variation par rapport à l'équilibre des distributions normales à la paroi soit constante.

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \quad (3.14)$$

Cette contrainte permet de choisir un état mésoscopique particulier pour compléter les distributions manquantes en fonction d'un état macroscopique voulu. De la définition des distributions à l'équilibre, équations (3.3), la distribution normale à la paroi  $f_1$  s'exprime en fonction de  $f_3$  et (3.13) :

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho u_{x,0} \quad (3.15)$$

A partir des relations (3.11) et (3.12) on déduit les deux distributions encore

manquantes

$$f_5 = f_7 + \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}\rho u_{x,0} + \frac{1}{2}\rho u_{y,0} \quad (3.16)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u_{x,0} - \frac{1}{2}\rho u_{y,0} \quad (3.17)$$

En connaissant la vitesse en entrée nous avons donc complété les distributions manquantes de façon à définir un état macroscopique voulu sur la paroi en entrée. Un raisonnement similaire peut s'appliquer sur les autres parois si l'on souhaite imposer une vitesse à la frontière qu'elle soit normale, tangentielle ou avec un angle d'entrée.

Maintenant si au lieu de la vitesse c'est la pression que nous souhaitons imposer, un raisonnement similaire est suivi. De la même façon que pour la vitesse, à partir des formules (3.1), (3.2) et (3.14), les distributions manquantes sur la paroi peuvent être complétées en connaissant la densité  $\rho_0$  déduite de la pression à imposer  $P_0 = c_s^2 \rho_0 = \frac{\rho_0}{3}$ .

Ainsi, par cette méthode il est possible d'imposer des vitesses, des pressions, et par différentes combinaisons des conditions imposées il est possible de générer des écoulements par différence de pression, imposition de profils de vitesse particuliers ou imposition de vitesses de glissement.

D'un point de vue numérique ce type de conditions aux limites présente l'avantage d'être précise. En revanche elle s'avère plus instable lorsque le temps caractéristique du fluide  $\tau$  est proche de  $\frac{1}{2}$ .

- **Conditions frontières basées sur l'utilisation de distributions à l'équilibre** [26; 37] : Cette seconde méthode complète tout simplement les distributions manquantes à la paroi par l'imposition des distributions à l'équilibre (3.3) associées à l'état macroscopique à définir. Un écoulement idéal représentant l'état macroscopique voulu est en quelque sorte imposé à la limite. Comme précédemment, il est possible d'imposer soit les composantes de vitesse et utiliser une densité extrapolée depuis les noeuds fluides adjacents ou soit imposer la densité

et utiliser une vitesse extrapolée des noeuds fluides adjacents. Cette méthode est très simple à implémenter et est plus stable que celle de Zou et He.

Cependant avec cette méthode une légère vitesse de glissement à la frontière existe en permanence, ceci peut être néfaste pour la précision du modèle. Il est possible de corriger ce glissement par une amélioration de la méthode proposée par Inamuro <sup>[21]</sup> mais bien que plus précise cette amélioration perd en stabilité à haut Reynolds et est de plus plus lourde en calculs.

- **Autres types de conditions frontières** <sup>[16; 26]</sup> : Un certain nombre d'autres méthodes d'application des conditions aux frontières ont été proposées, chacune présentant des propriétés différentes en terme de stabilité et précision. Certaines évalue les gradients de vitesse au frontière par différence finies, d'autres interpolent les distributions à partir des noeuds adjacents à la paroi. De manière générale ces méthodes sont plus lourdes à appliquer numériquement mais selon les applications souhaitées peuvent s'avérer utiles. La référence <sup>[26]</sup> présente certaines de ces méthodes ainsi que celles précédemment évoquées et les confrontent les unes aux autres. Dans ce mémoire nous nous limiterons aux méthodes déjà détaillées.

L'ensemble des conditions frontières représentent l'une des faiblesses de la méthode de Boltzmann sur réseau. Selon les techniques choisies les frontières peuvent être source d'imprécision, de perturbation de l'écoulement ou encore à l'origine du renvois d'ondes parasites du fait d'un manque de perméabilité <sup>[23]</sup>. Généralement ces imprécisions apparaissent aux limites de définition du temps de relaxation  $\tau$  et notamment dans le cas d'écoulements très peu visqueux.

Une dernière catégorie de conditions frontières qui peuvent être appliquées et que nous avons largement employées sont les frontières libres.

### 3.2.2.3 Conditions frontières libres

Ce type de condition limite permet de définir une frontière du domaine fluide par un simple prolongement de celui-ci. Cette méthode s'applique aux bords du domaine lorsque l'écoulement est développé, les distributions y sont alors complétées de telle façon que le gradient de vitesse normal à la paroi considérée soit nul.

D'un point de vue mésoscopique ce type de méthode consiste à copier les distributions de l'avant dernière rangée de cellules sur la dernière. Si l'indice de la dernière rangée de cellules est  $k$ , pour imposer la condition frontière libre on recopie donc toutes les distributions des cellules de l'avant dernière rangée  $k - 1$  sur la rangée  $k$ .

$$f_i(\bar{x}_k, \bar{t}) = f_i(\bar{x}_{k-1}, \bar{t}) \quad (3.18)$$

Cette méthode, bien que simple et commode, est valable et précise pour des écoulements quasi constants à la frontière. Dans le cas contraire ce type de frontière peut influencer l'écoulement, le déformer, ou conduire à une divergence de la simulation.

Comme précédemment ce type de conditions frontières sont elles aussi bien souvent à l'origine du renvoi d'ondes parasites du fait d'un manque de perméabilité [23; 37].

Nous venons d'observer un certain nombre de méthodes pour imposer les conditions aux limites pour la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous allons maintenant nous pencher sur quelques améliorations de la méthode permettant d'augmenter ses performances.

### 3.3 Améliorations de la méthode de Boltzmann sur réseau D2Q9

Dans ce chapitre nous avons jusqu'à maintenant présenté la méthode de Boltzmann sur réseau dans sa formulation la plus simple. Cette méthode est facile à implémenter mais s'applique à un réseau Cartésien de finesse régulière. Il devient alors délicat d'obtenir une bonne précision de résolution, notamment le long de parois courbes, sans gaspiller trop de temps de simulation. Nous allons voir comment ce dilemme peut être traité.

#### 3.3.1 Conditions frontières curvilignes

Pour la prise en compte d'obstacles à géométries complexes la méthode de renvoi directe des distributions peut être appliqué au niveau de chaque cellule solide. Cependant, comme l'illustre pour un profil d'aile la figure 3.9, la prise en compte d'objets aux bords arrondis peut s'avérer assez grossière et le caractère rugueux d'obstacles ainsi représentés peut affecter l'influence de l'interface fluide solide sur l'ensemble de l'écoulement. Il est possible de corriger cette influence en raffinant le maillage mais ceci entraîne alors une augmentation du temps de simulation.

Nous allons donc voir une méthode qui permet de considérer plus précisément les conditions frontières courbes. Différents modèles ont été proposés <sup>[22]</sup>, celui que nous avons retenu est une amélioration effectuée par Mei et al <sup>[30]</sup> d'un modèle proposé par Filippova et Hänel <sup>[13]</sup>.

Ce type de frontière est illustrée à la figure 3.11. Par cette méthode le traitement des distributions rebondissant contre une paroi courbe est effectué en fonction du rapport de distances  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{|\bar{\mathbf{x}}_F - \bar{\mathbf{x}}_P|}{|\bar{\mathbf{x}}_F - \bar{\mathbf{x}}_S|} \quad (3.19)$$

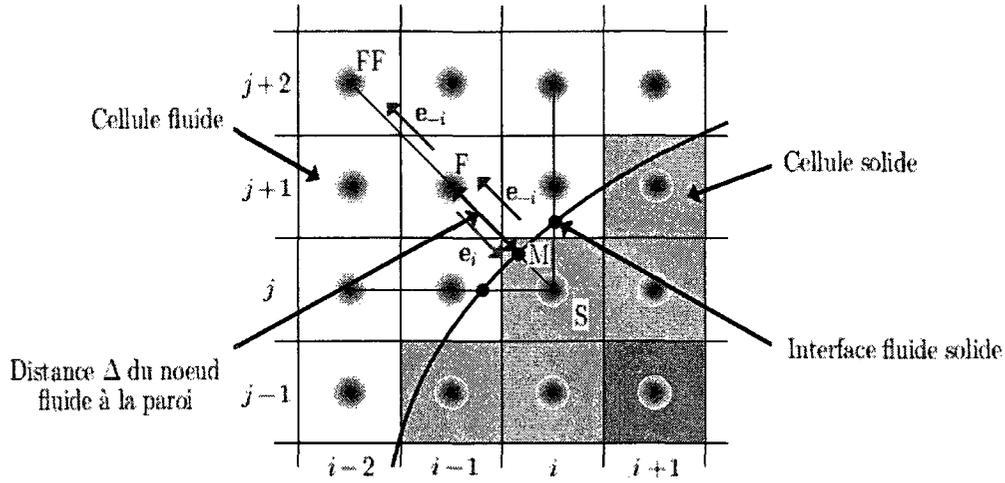


FIGURE 3.11 Frontière curviligne.

Les indices  $F$ ,  $P$  et  $S$  caractérisent respectivement les coordonnées associées à des noeuds dans le fluide, sur la paroi et dans le solide.

En connaissant ce rapport  $\Delta$  la méthode de prise en compte des surfaces courbes permet de traiter avec une meilleure précision que la méthode de renvoie directe la valeur des distributions réfléchies sur la paroi. Ainsi pour des distributions se propageant le long de la vitesse  $\mathbf{e}_i$ , renvoyées par rebond et devant être propagées selon la direction  $\mathbf{e}_{-i}$ , Filippova et Hänel <sup>[13]</sup> ont proposés la formule :

$$\tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t} + 1) = (1 - \chi)\tilde{f}_i(\bar{\mathbf{x}}_F, \bar{t}) + \chi f_i^{(*)}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t}) - 2w_i\bar{\rho}\frac{3}{c^2}(\mathbf{e}_{-i} \cdot \bar{\mathbf{u}}_P) \quad (3.20)$$

où  $\chi$  est un facteur à déterminer en fonction de  $\Delta$  contrôlant l'interpolation linéaire entre  $\tilde{f}_i(\bar{\mathbf{x}}_F, \bar{t})$  et  $f_i^{(*)}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t})$ , par une fonction de distribution à l'équilibre fictive définie par :

$$f_i^{(*)}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t}) = w_i\bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}_F, \bar{t}) \left[ 1 + \frac{3}{c^2}\mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_{SF} \frac{9}{2c^4}(\mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_F)^2 - \frac{3}{2c^2}\bar{\mathbf{u}}_F \cdot \bar{\mathbf{u}}_F \right] \quad (3.21)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}_F = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}_F, \bar{t})$  la vitesse du fluide sur la cellule de fluide et  $\bar{\mathbf{u}}_{SF}$  une vitesse

déterminée de diverse façons selon la valeur de  $\Delta$ .

Cette méthode ressemble à une simple interpolation de la distribution par rapport à la distance à la paroi mais son développement est en définitive plus complet. Il a été formulé à partir d'une analyse du type Chapman-Enskog <sup>[13]</sup> des distributions et en les approximant en fonction de deux suppositions, le temps caractéristique de l'écoulement est large devant le temps d'advection à l'échelle du réseau, le pas du réseau doit être petit devant la longueur caractéristique de l'écoulement.

Avec le modèle de Filippova et Hänel <sup>[13]</sup> le facteur  $\chi$  et la vitesse de référence  $u_{SF}$  sont alors définis par :

$$\bar{\mathbf{u}}_{SF} = \frac{(\Delta - 1)}{\Delta} \bar{\mathbf{u}}_F + \frac{1}{\Delta} \bar{\mathbf{u}}_P, \text{ avec } \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau}, \text{ pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{SF} = \bar{\mathbf{u}}_F, \text{ avec } \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau - 1}, \text{ pour } \Delta < \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

avec  $\tau$  le temps de relaxation de collision. Ces relations permettent un gain en précision par rapport au simple renvoi directe des distributions. Pour nos applications nous avons utilisés ces équations mais avec une amélioration proposée par Mei et al <sup>[30]</sup>. Cette modification concerne les facteurs qui viennent d'être présentés.

$$\bar{\mathbf{u}}_{SF} = \left(1 - \frac{3}{2\Delta}\right) \bar{\mathbf{u}}_F + \frac{3}{2\Delta} \bar{\mathbf{u}}_P, \text{ avec } \chi = \frac{2(2\Delta - 1)}{(2\tau + 1)}, \text{ pour } \Delta \geq \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{SF} = \bar{\mathbf{u}}_{FF}, \text{ avec } \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{\tau - 2}, \text{ pour } \Delta < \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

Ainsi les équations (3.20), (3.21) et (3.24) ou (3.25) que nous venons de présenter permettent de prendre en considération les frontières curvilignes avec une meilleure approximation. En revanche le nombre de calculs à effectuer est bien plus important que dans une formulation de base.

Nous allons maintenant nous pencher sur une autre technique pouvant améliorer les performances de la méthode, aussi bien dans la prise en compte des frontières que pour un gain en précision des résultats, il s'agit des réseaux à plusieurs niveaux.

### 3.3.2 Réseaux à plusieurs niveaux imbriqués

Pour certains types de simulations la finesse du maillage du domaine fluide est nécessaire en quelques zones précises, comme par exemple autour d'objets de forme complexe. Afin d'économiser du temps de simulation et pour éviter d'avoir à raffiner l'intégralité du domaine inutilement nous allons présenter une méthode permettant d'effectuer un tel raffinement, tout en garantissant la conservation des grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

#### 3.3.2.1 Théorie des réseaux de plusieurs niveaux

Différentes méthodes de divers natures peuvent être utilisées pour simuler la communication entre des réseaux de différentes finesses [10; 13; 35]. En ce qui nous concerne nous avons retenu une méthode proposée par Chopard et Dupuis [10] qui effectue le lien entre les différents niveaux de réseaux par un transfert des distributions  $f$  d'un niveau de maillage à l'autre tout en conservant les quantités macroscopiques caractéristiques à l'interface. Cette méthode correspond à une amélioration d'une technique initialement proposée par Filippova et Hänel [13].

Tout d'abord, le raffinement de certaines zones d'un domaine de simulation consiste à superposer des maillages de différentes finesses et de les faire communiquer les uns avec les autres en assurant la continuité de la pression, vitesse et viscosité. Une telle superposition des réseaux autour d'un profil d'aile NACA est illustré par la figure 3.12. Dans ce cas deux pas géométriques caractérisent un tel raffinement, un

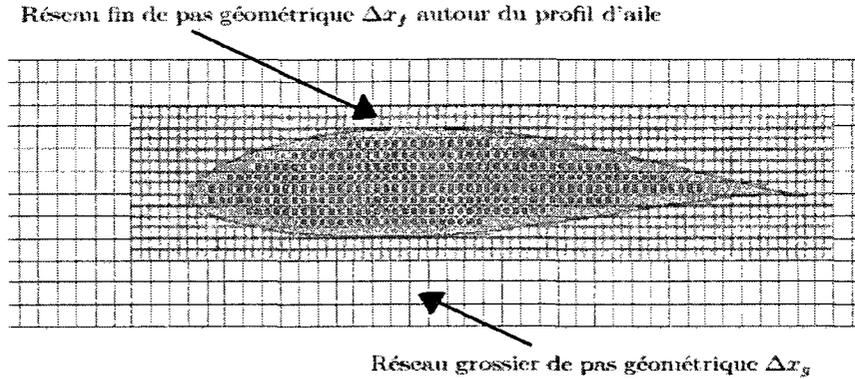


FIGURE 3.12 Raffinement autour d'un profil d'aile.

pas grossier  $\Delta x_g$  pour le réseau global et un pas plus fin  $\Delta x_f$  pour la zone raffinée, le taux de raffinement  $y$  est alors de  $m = \Delta x_g / \Delta x_f = 2$ .

Avec une telle approche les deux réseaux de différentes finesses peuvent être considérés indépendamment pour effectuer les étapes de collision et de propagation. Pour maintenir la cohérence géométrique et temporelle de la simulation, il est alors nécessaire de faire communiquer les distributions passant d'un réseau à l'autre aux pas de temps communs par un traitement spécifique à l'interface entre réseaux. Plus précisément, afin de conserver la cohérence de la méthode de Boltzmann sur réseau sur les deux niveaux de maillage il est nécessaire de maintenir le rapport  $c = \Delta x_g / \Delta t_g = \Delta x_f / \Delta t_f$ . Ainsi une diminution du pas géométrique sur le raffinement par un facteur  $m$  entraînera une subdivision du temps par  $m$  pour le pas temporel. En plus de cette distinction d'échelles de simulation sur chaque niveau de raffinement, le temps de relaxation caractéristique doit être adapté sur chaque réseau pour garantir une viscosité constantes sur le domaine. D'après la formulation de la viscosité cinématique (2.45) :

$$\nu = \frac{c^2 \Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) = \frac{c^2 \Delta t_g}{3} \left( \tau_g - \frac{1}{2} \right) = \frac{c^2 \Delta t_f}{3} \left( \tau_f - \frac{1}{2} \right) \quad (3.26)$$

qui permet de déduire une relation entre les temps de relaxation sur chaque réseau :

$$\tau_f = m \left( \tau_g - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

Nous avons en quelque sorte deux réseaux indépendants d'échelles différentes, chacun garantissant une même viscosité. Pour pouvoir simuler de façon continue sur tout le domaine il est alors nécessaire d'adapter les distributions se propageant d'un niveau à l'autre du raffinement. Ce lien s'effectue par des considération sur la variation par rapport à l'équilibre des distributions au niveau de l'interface. Pour le passage d'une cellule fine à grossière en un même point du réseau cette relation s'exprime :

$$f_i^g = f_i^{eq} + f_i^{neq,g} = f_i^{eq} + \frac{m\tau_g}{\tau_f} f_i^{neq,f} = f_i^{eq} + \frac{m\tau_g}{\tau_f} (f_i^f - f_i^{eq}) \quad (3.28)$$

Inversement pour le passage d'une cellule grossière à une fine :

$$f_i^f = f_i^{eq} + \frac{\tau_f}{m\tau_g} (f_i^g - f_i^{eq}) \quad (3.29)$$

A partir des relations (3.27), (3.28) et (3.29), le lien entre les distribution ainsi que le lien entre les viscosités à deux niveaux de maillages différents à un même instant sont explicités.

Nous allons maintenant voir comment ces relations sont utilisées en pratique pour le traitement de l'interface entre deux réseaux. Pour ce faire nous allons regarder de plus près la communication entre deux réseaux avec un taux de raffinement  $m = 2$  (figure 3.13). Le réseau grossier et le réseau plus fin se chevauchent à l'interface, ce qui permet le traitement du transfert des distributions entre les raffinements en complétant les distributions manquantes aux frontières de chaque réseau. Les étapes de collision et de propagation sur les deux réseaux se succèdent alors ainsi :

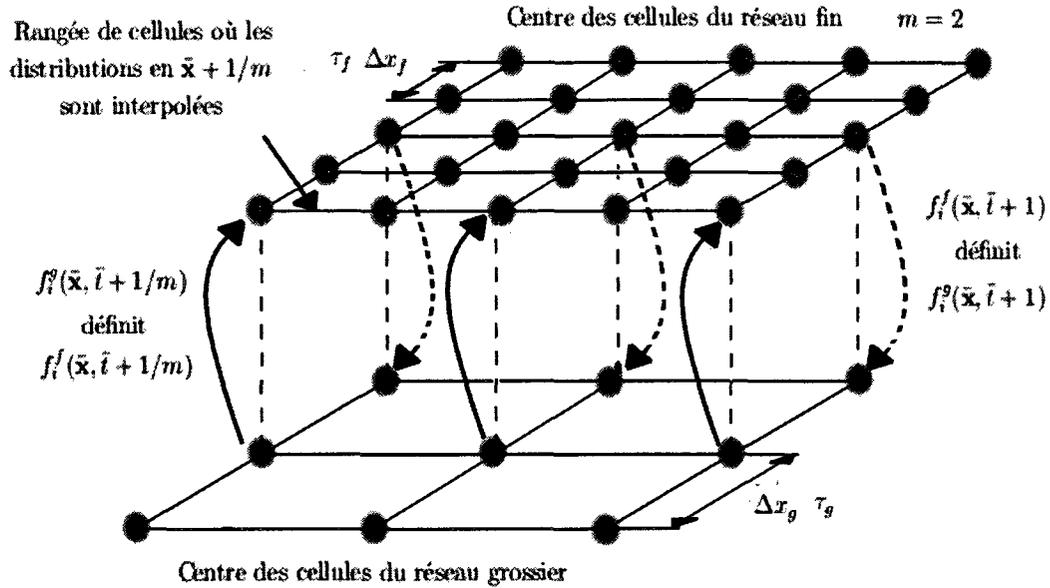


FIGURE 3.13 Interface entre deux réseaux de différente finesses.

- **Collision et propagation sur le réseau grossier** : A partir d'un instant  $\bar{t}$  où les distributions sont connues sur tout le domaine la collision et la propagation sur le réseau grossier permettent de définir les distributions à un instant  $\bar{t} + 1$ . Le réseau fin est lui toujours défini à l'instant  $\bar{t}$ .
- **Première étape de collision et de propagation sur le réseau fin** : Les distributions à  $\bar{t}$  sur le réseau fin sont connues, après collision et propagation les distributions à  $\bar{t} + 1/m = \bar{t} + 1/2$  sont toutes déterminées. Le lien avec le réseau grossier s'effectue par transfert des distributions  $f_i^g(\bar{x}, \bar{t} + 1)$ , selon la relation (3.29), à la frontière du réseau fin. Étant donné que seul les distributions à  $\bar{t}$  et  $\bar{t} + 1$  sont déterminées,  $f_i^f(\bar{x}, \bar{t} + 1/m)$  est obtenue par interpolation temporelle entre ces valeurs. Un tel transfert est valable pour les distributions des cellules coïncidant sur le réseau fin et le réseau grossier  $f_i^f(\bar{x}, \bar{t} + 1/m)$ , les distributions  $f_i^f(\bar{x} + 1/m, \bar{t} + 1/m)$  des cellules du réseau fin n'étant pas encore déterminées sont alors interpolées géométriquement des distributions connues en  $\mathbf{x}$ .

- **Seconde étape de collision et de propagation sur le réseau fin** : Les distributions à  $\bar{t} + 1/2$  sur le réseau fin ont été toutes déterminées. Après une nouvelle étape de collision et propagation les distributions à  $\bar{t} + 1$  sont à leur tour évaluées sur le raffinement. Comme à l'étape précédente, le lien entre les deux réseaux est alors traité par application de la formule (3.29), à partir des distributions  $f_i^g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1)$ , sur les cellules de la frontière du réseau fin communes avec celles du réseau grossier. Là encore une interpolation géométrique des distributions  $f_i^f(\bar{\mathbf{x}} + 1/m, \bar{t} + 1)$  est effectuée en fonction des valeurs  $f_i^f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t} + 1)$ . L'état mésoscopique sur le réseau fin à  $t + 1$  est maintenant intégralement défini.
- **Compléter le réseau grossier à  $\bar{t} + 1$**  : Pour terminer le passage de  $\bar{t}$  à  $\bar{t} + 1$ , à l'interface entre réseaux les distributions des cellules à la frontière du réseau grossier sont évaluées à partir des distributions des cellules coïncident sur le réseau fin. Ce transfert d'information s'effectue par la relation (3.28). Le champ des distributions sur chaque niveau de maillage est alors complètement défini à  $\bar{t} + 1$

Nous venons de détailler le mode de prise en compte des raffinements sur un domaine pour un taux de raffinement de  $m = 2$ . Pour un taux  $m$  quelconque les étapes de collision et de propagation sur le réseau fin seront répétées  $m$  fois afin de faire coïncider l'évolution temporelle de l'écoulement sur chaque réseau. Les interpolations temporelles et spatiales s'effectueront alors autant de fois que nécessaire pour déterminer les distributions à la frontière du réseau fin.

Cette méthode de maillages de différents niveaux peut s'appliquer avec autant de niveaux de maillages souhaité et autant de coefficients  $m$  de raffinement voulus, la limitation de leur nombre sera lié à la précision de l'interpolation pour l'évaluation des données manquantes. Le raisonnement qui vient d'être suivi s'incorpore dans l'algorithme élémentaire de la méthode de Boltzmann sur réseau (figure 3.14) et est présenté à la figure 3.15.

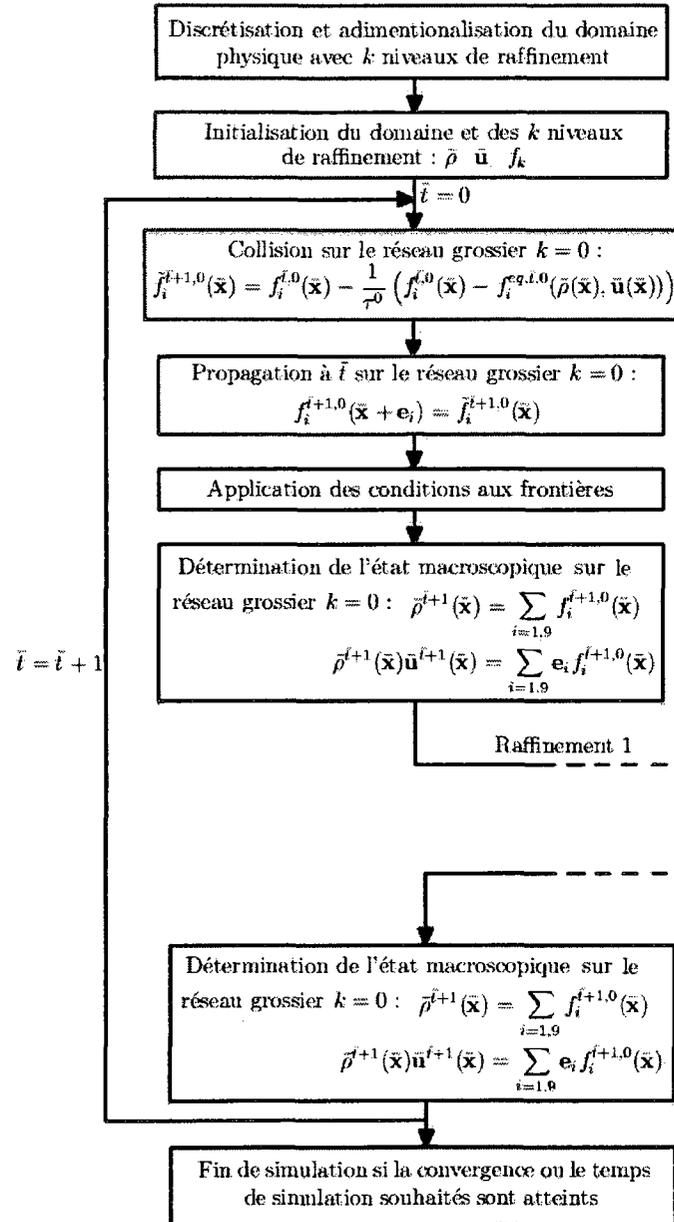


FIGURE 3.14 Partie \u00e9l\u00e9mentaire de l'algorithme de la m\u00e9thode de Boltzmann sur r\u00e9seau avec raffinement du domaine.

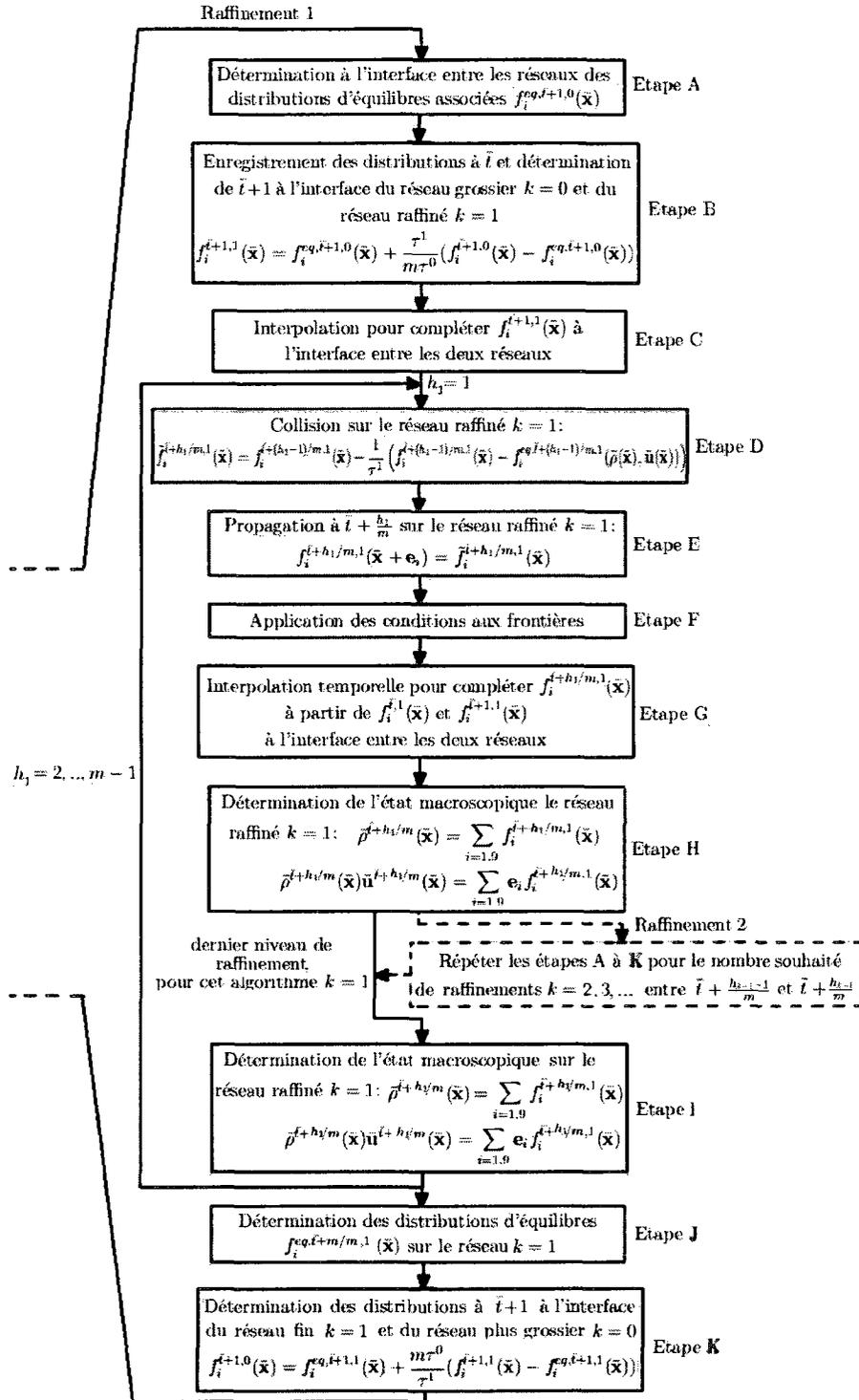


FIGURE 3.15 Algorithme de la méthode de raffinement de domaine.

La technique ainsi présentée a de nombreux avantages. Elle peut être utilisée pour raffiner les simulation dans les zones de forte variation de l'écoulement ou pour suivre plus précisément le contour d'un profil. Elle peut également être utilisée de façon à accélérer les simulation en déclenchant la méthode en cours de simulation comme évoqué dans la référence [27]. Enfin, elle présente un avantage pour les écoulements faiblement visqueux car en appliquant un raffinement dans certaines zones elle peut permettre de corriger les instabilités générées par un temps de relaxation caractéristique du fluide proche de  $1/2$  en augmentant ce dernier avec le raffinement selon la relation (3.27).

Avant de terminer nos observations sur les réseaux de divers niveaux nous allons rapidement aborder une propriété de ce type d'approche, à savoir le déplacement des raffinements sur un maillage plus grossier.

### 3.3.2.2 Déplacement de raffinements sur un réseau grossier

Ce point particulier dans l'application des réseaux de plusieurs niveaux nous a été utile dans l'étude d'objets en déplacement.

Les réseaux à niveaux multiples se résument par une prise en compte indépendante des différents niveaux de maillage, chacun possédant des propriétés macroscopiques différentes mais définissant un état macroscopiques similaires. La complexité de cette approche se situe dans la communication à l'interface entre les réseaux car différents traitements sur les distributions sont nécessaires pour garantir une cohérence temporelle sur tout le domaine.

Par les équations (3.27), (3.28) et (3.29) un lien directe entre les réseaux et les noeuds coïncidant sur chaque niveau de maillage a été formulé de façon à maintenir un état macroscopique continu. Il est maintenant simple d'imaginer qu'au lieu de

considérer le raffinement fixé, celui-ci se déplace à différents pas de temps en suivant par exemple le déplacement d'un objet dans le domaine. Le traitement de ce cas, illustré à la figure 3.16, suit les étapes suivant :

- **Déplacement du raffinement** : A partir d'un domaine complètement défini à un instant  $\bar{t}$  le déplacement d'un raffinement correspond à un décalage dans une direction quelconque d'une ou plusieurs rangées du réseau grossier.
- **Compléter les noeuds grossier découverts par le déplacement** : Avec le déplacement un certain de noeuds correspondant au réseau fin sont découverts et correspondent alors au niveau grossier de maillage. L'état des distributions pour ces nouveaux noeuds appartenant au maillage grossier s'effectue tout simplement par transfert des distributions initialement adaptées à un maillage fin par application de l'équation (3.28). Sur ces nouveaux noeuds l'état macroscopique est le même mais l'état mésoscopique est adapté au nouveau niveau de maillage. Le temps de relaxation sur ces nouveaux noeuds est alors  $\tau_g$ .
- **Effacer les noeuds du raffinement qui ont été découverts** : Les distributions sur les cellules du réseau fin qui ont été découvertes par le déplacement ne sont plus nécessaires pour la simulation, elles sont donc effacées.
- **Compléter les noeuds fins apparus avec le raffinement** : En ce qui concerne les noeuds du réseau fin qui sont apparus avec le déplacement, les distributions associées à ces noeuds du réseau fin coïncidant à des noeuds du réseau grossier sont donc complété par application de l'équation (3.29). Pour compléter l'état mésoscopique du raffinement ainsi apparus une interpolation spatiale est ensuite utilisée. Le temps de relaxation associé sur les nouveaux noeuds est alors  $\tau_f$ .
- **Effacer les noeuds du réseau grossier qui ont été couverts** : Les distributions associées aux cellules du réseau grossier qui ont été recouvertes par déplacement du réseau fin ne sont plus nécessaire et sont donc effacée. Le domaine est désormais complètement défini à l'instant  $\bar{t}$  avec une nouvelle position du

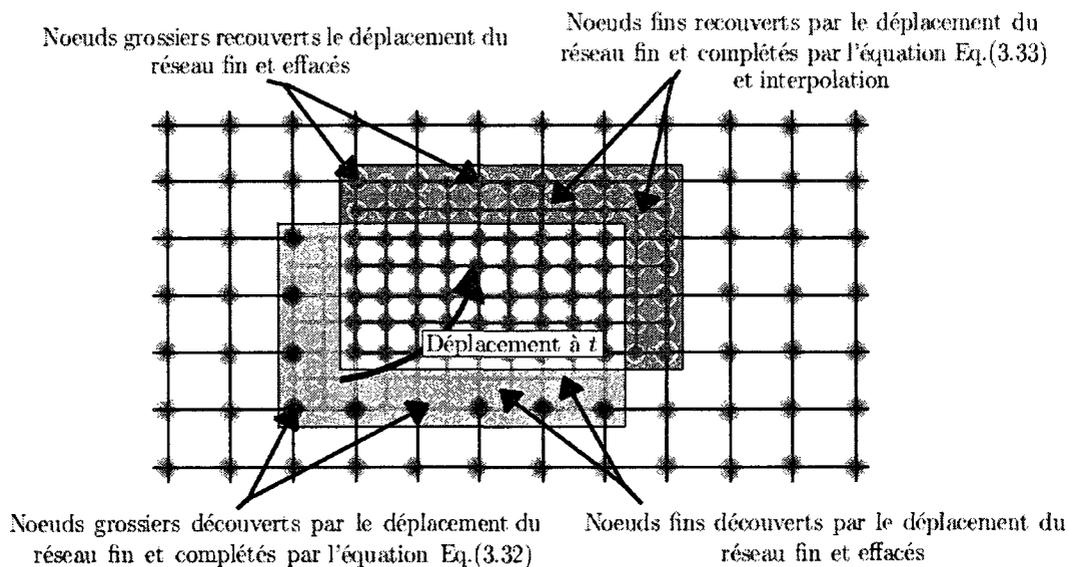


FIGURE 3.16 Déplacement d'un réseau fin sur un réseau grossier.

raffinement, le passage à l'instant  $\bar{t} + 1$  s'effectue comme détaillé précédemment.

Une telle technique peut s'avérer utile pour suivre le déplacement d'un objet autour duquel un certain niveau de finesse est nécessaire.

### 3.3.3 Calcul des efforts s'appliquant à un objet

Différentes techniques existent pour évaluer les composantes des efforts s'appliquant à un objet, certaines utilisant les grandeurs macroscopiques, d'autres n'observant que la contribution des distributions. La méthode que nous avons retenue est celle proposée par Mei et al <sup>[31]</sup>, pour sa simplicité. Celle-ci évalue les efforts qu'exerce un fluide sur un objet en sommant l'ensemble des efforts appliqués par chaque distribution ou plus précisément chaque groupe de particules rebondissant sur la paroi de l'objet.

Ainsi, la contribution d'une distribution post-collision  $\tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t} + 1)$  interférant avec une paroi solide comme à la figure 3.11 à la section 3.3.1 s'exprime à un même

instant :

$$\mathbf{e}_i \left[ \tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t} + 1) + \tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S + \mathbf{e}_{-i}, \bar{t} + 1) \right] \quad (3.30)$$

en notant  $\tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t} + 1)$  la distribution post-collision à un instant  $\bar{t} + 1$  se propageant du solide vers le fluide et en notant  $\tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S + \mathbf{e}_{-i}, \bar{t} + 1)$  la distribution post-collision sur la cellule fluide adjacente se propageant dans la direction  $-i$ . L'effort total est alors calculé par sommation de l'ensemble de ces contributions autour d'objet ou le long d'une paroi :

$$\mathbf{F} = \sum_{\mathbf{x}_S} \sum_{i \neq 0} \mathbf{e}_i \left[ \tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S, \bar{t} + 1) + \tilde{f}_{-i}(\bar{\mathbf{x}}_S + \mathbf{e}_{-i}, \bar{t} + 1) \right] \quad (3.31)$$

Par la connaissance de  $\mathbf{F}$  il est alors possible de déduire les coefficients aérodynamiques que sont la traînée  $C_d$  et la portance  $C_l$  :

$$C_d = \frac{F_y}{\frac{1}{2} u_{ref}^2 L_{ref} \rho_{ref}} \quad (3.32)$$

$$C_l = \frac{|F_x|}{\frac{1}{2} u_{ref}^2 L_{ref} \rho_{ref}} \quad (3.33)$$

Avec  $u_{ref}$ ,  $L_{ref}$  et  $\rho_{ref}$ , respectivement la vitesse de référence, la longueur de référence et la densité de référence pour la normalisation de ces coefficients.

Dans l'analyse des résultats de simulations effectuées par la méthode de Boltzmann sur réseau nous utiliserons également le coefficient de pression  $C_p$  :

$$C_p = \frac{|P - P_{ref}|}{\frac{1}{2} u_{ref}^2 \rho_{ref}} \quad (3.34)$$

avec  $P = c_s^2 \rho$  et  $P_{ref}$  la pression de référence déduite de  $\rho_{ref}$ .

En plus de l'observation des coefficients caractéristiques nous verrons également que la connaissance de ces efforts nous permettra d'effectuer le déplacement d'un

objet sur le réseau, nous reviendrons sur ce point dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Dans ce chapitre nous avons donc vu de quelle façon la méthode de Boltzmann sur réseau s'implémente pour la simulation d'écoulements fluides. Nous allons maintenant utiliser le programme qui en a été tiré pour effectuer divers simulations par la méthode de Boltzmann sur réseau.

## CHAPITRE 4

### SIMULATIONS NUMÉRIQUES PAR LA MÉTHODE DE BOLTZMANN SUR RÉSEAU

Dans les chapitres précédents nous avons expliqués les bases théoriques et l'algorithme de la méthode de Boltzmann sur réseau, pour une formulation simplifiée, puis après l'ajout de différentes techniques permettant d'améliorer les performances de la méthode. Dans ce dernier chapitre nous allons étudier les résultats obtenues après programmation de ces différents algorithmes. Nous allons tout d'abord vérifier la précision et les capacités de la méthode pour traiter une application simple, celle d'une cavité entraînée. Nous validerons ensuite les différentes améliorations du code de base, ainsi que le caractère transitoire de la méthode, par l'étude du cas d'un cylindre 2D dans un canal. Enfin nous utiliseront notre programme pour la réalisation de simulations plus complexes, à savoir l'écoulement autour d'un profil NACA63-415 givré et la remontée d'une particule dans une colonne de fluide par poussée d'Archimède. Nous comparerons nos résultats à ceux obtenus par le logiciel commercial Fluent dans le cas du profil d'aile et à des résultats d'expérience dans le cas de la particule en déplacement.

#### 4.1 Cavité entraînée, vérification de la formulation de base de la méthode de Boltzmann sur réseau

Ce premier test nous permettra de vérifier la formulation de base de la méthode de Boltzmann sur réseau (Algorithme 3.6). Il s'agit de l'étude de l'écoulement dans une cavité carré avec entraînement du fluide par glissement de la paroi supérieure.

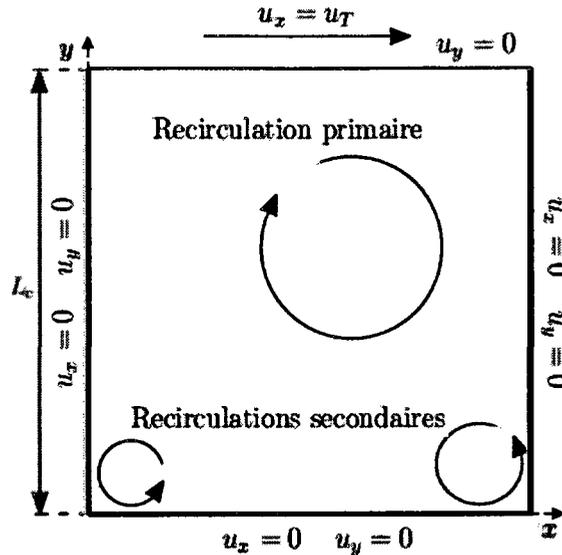


FIGURE 4.1 Schéma d'une cavité entraînée.

#### 4.1.1 Description du problème

Le cas test de la cavité entraînée est une simulation très souvent étudiée en dynamique des fluides assisté par ordinateur. En deux dimensions ce problème correspond à un domaine carré possédant quatre parois solides. Trois fixes avec une condition de non glissement  $\mathbf{u}_P = \mathbf{0}$ . Sur la quatrième, on impose une vitesse tangentielle constante  $\mathbf{u}_G = (0, u_T)$  aux couches de fluide qui lui sont proches. L'écoulement initialement stagnant est alors entraîné et se développe en une zone de recirculation principale, au centre, avec selon le nombre de Reynolds des zones de recirculation secondaires, dans les coins de la cavité. Un tel domaine de simulation est schématisé par la figure 4.1.

Le nombre de Reynolds  $Re$  pour ce cas est déterminé en fonction de la largeur  $L_c$  de la cavité, la vitesse tangentielle imposée  $u_T$ , et la viscosité cinématique du fluide  $\nu$  :

$$Re = \frac{L_c u_T}{\nu} \quad (4.1)$$

Afin de vérifier notre algorithme et notre programme nous allons simuler cette cavité pour trois nombres de Reynolds différents,  $Re = 100$ ,  $Re = 1000$  et  $Re = 2500$ . Pour chacun des cas nous allons comparer les performances de la méthodes en fonction, de la résolution de la discrétisation du domaine, du type de conditions frontières imposées pour générer le glissement.

#### 4.1.2 Résolutions par la méthode de Boltzmann sur réseau

Avant d'analyser les résultats nous allons étudier comment les conditions aux limites macroscopiques, présentées dans la section précédente, sont imposées pour un domaine discrétisé par un réseau de Boltzmann. Le raisonnement qui suit est détaillé pour un cas particulier mais l'ensemble des conditions imposées ont été déterminées selon le même raisonnement et sont explicitées dans le tableau I.1 de l'annexe I.

La difficulté consiste à bien effectuer l'adimensionalisation des paramètres utilisés dans la méthode de Boltzmann sur réseau en fonction du nombre de Reynolds imposé (section 3.1.1).

Nous souhaitons simuler un écoulement à  $Re = 100$ , dans une cavité de largeur  $L_c = 20 \text{ cm}$ , avec une vitesse d'entraînement de  $u_T = 0.1 \text{ m/s}$ , la viscosité cinématique correspondante étant de  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . En unités de réseau, pour garantir que  $c = 1$  conformément au modèle adimensionalisé, la vitesse choisie est  $\bar{u}_T = 0.1 \text{ lu/lt}$  qui est juste assez petite pour respecter la contrainte d'écoulement quasi-incompressible mentionné à la section 2.4.3.2. Nous pouvons choisir le nombre de cellules de discrétisation de la cavité, par exemple  $\bar{L}_c = 64 \text{ lu}$  pour une largeur, le pas géométrique est alors  $\Delta x = L_c/\bar{L}_c = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  et avec  $c = 1$  nous déduisons le pas de temps  $\Delta t = \Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . Reste à déduire le temps de relaxation

caractérisant cet écoulement par la relation  $\nu = \frac{c^2 \Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right)$ , pour le cas choisit  $\tau = 0.692$ .

Nous venons d'expliciter les paramètres du modèle de Boltzmann sur réseau en nous basant sur une discrétisation de la largeur de la cavité en  $\bar{L}_c = 64 lu$ , nous aurions pu procéder inversement en imposant le temps de relaxation  $\tau$  et en déduisant la discrétisation associée. La vitesse elle ne peut être modifiée, il faut maintenir  $c = 1$ .

Maintenant que les paramètres du réseau sont obtenus, la simulation s'effectue par une succession de collisions et de propagations avec  $\tau = 0.692$ . L'influence de la paroi solide est effectuée par renvoi direct des distributions (section 3.2.2.1), le glissement lui est obtenu par deux méthodes (section 3.2.2.2), celle proposée par Zou et He <sup>[43]</sup> (CFZH) et celle utilisant les distributions à l'équilibre <sup>[26; 37]</sup> (CFFEQ).

Nous allons observer les résultats des diverses simulation pour différents nombres de Reynolds, et ce pour les deux méthodes d'imposition du glissement (tableau I.1).

### 4.1.3 Résultats

L'ensemble des simulations ont été effectuées pour un nombre de 100,000 itérations. Ces simulations vont nous permettre de vérifier la capacité de la méthode de Boltzmann sur réseau à résoudre le problème classique de la cavité entraînée.

Les premières observations que nous effectuons concernent l'influence du temps de relaxation sur la stabilité de la méthode. Les tableaux 4.1 et 4.2 résument l'ensemble des simulations effectuées et explicite celles présentant des instabilités ou ayant divergées selon la méthode d'imposition du glissement (CFZH ou CFFEQ),

TABLE 4.1 Stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds et différentes techniques d'imposition du glissement avec  $\bar{u}_T = 0.1$ .

Cavité avec CFFEQ ou CFZH	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 2500$
$64 \times 64$ CFFEQ	Stable	Stable	Divergente
$128 \times 128$ CFFEQ	Stable	Stable	Instable
$256 \times 256$ CFFEQ	Stable	Stable	Stable
$64 \times 64$ CFZH	Stable	Divergente	Divergente
$128 \times 128$ CFZH	Stable	Divergente	Divergente

TABLE 4.2 Stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds et différentes techniques d'imposition du glissement avec  $\bar{u}_T = 0.05$ .

Cavité avec CFFEQ ou CFZH	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 2500$
$64 \times 64$ CFFEQ	Stable	Instable	Divergente
$128 \times 128$ CFFEQ	Stable	Stable	Divergente
$64 \times 64$ CFZH	Instable	Divergente	Divergente
$128 \times 128$ CFZH	Stable	Divergente	Divergente

la vitesse de glissement  $\bar{u}_T$ , et selon le temps  $\tau$  associé. Ces deux tableaux associés aux paramètres de simulation sont résumés par les courbes illustrées à la figure 4.2. En confrontant ces différents résultats plusieurs remarques peuvent être formulées :

- Il apparaît tout d'abord que plus le nombre de Reynolds simulé est élevé, plus les simulations sont globalement instables. Ceci conforte les remarques concernant les limites de la méthode pour les écoulements fortement visqueux, plus le nombre de Reynolds est élevé, plus le temps de relaxation est proche de  $\tau = \frac{1}{2}$ , plus les simulations sont instables. Un moyen de gagner en stabilité pour un même nombre de Reynolds ou plus précisément d'augmenter le temps de relaxation consiste à augmenter la finesse du raffinement et donc de diminuer le pas de temps.
- Un autre point concerne l'utilisation de diverses vitesses de glissement pour simuler un même nombre de Reynolds. Plus la vitesse de glissement est faible, par exemple  $\bar{u}_T = 0.05$ , plus le temps de relaxation associé sera proche de la

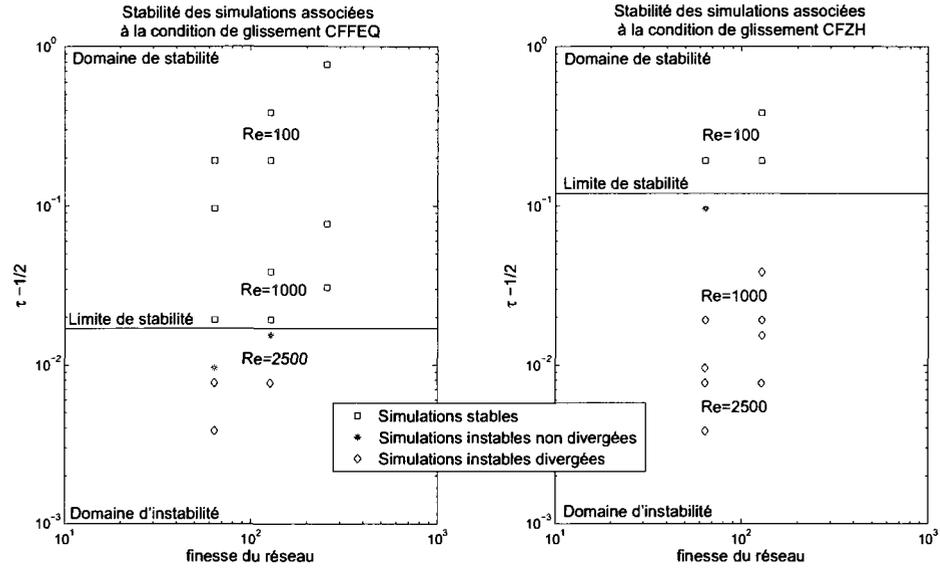


FIGURE 4.2 Temps de relaxation en fonction de la finesse du réseau et du nombre de Reynolds ainsi que la stabilité des simulations sur une cavité entraînée pour CFFEQ (à gauche) et CFZH (à droite).

limite  $\tau = \frac{1}{2}$  et donc de manière générale les simulations seront plus sujettes à des instabilités que celles effectuées à une vitesse de glissement de  $\bar{u}_T = 0.1$ . Cependant, plus la vitesse de glissement est élevée, moins la contrainte d'incompressibilité sera respectée et pour des vitesses trop élevées supérieures à  $\bar{u}_T = 0.1$  les simulations risquent d'être instables ou imprécises. Pour le choix des vitesses caractéristiques il faut trouver le juste milieu entre stabilité et précision en respectant l'incompressibilité,  $\bar{u}_{T,max} = 0.1$ .

- Un dernier point à souligner concerne les techniques d'imposition du glissement, deux méthodes ont été testées, il s'avère que pour des temps de relaxation proches de  $\tau = \frac{1}{2}$  la méthode CFFEQ basée sur l'utilisation de distributions à l'équilibre est généralement plus stable que la méthode CFZH de Zou et He. Cette observation confirme que pour chaque type de conditions frontières différentes propriétés de stabilité peuvent être observées (section 3.2.2.2). Pour le cas particulier de la cavité entraînée il semble possible de déduire empiriquement un temps de relaxa-

tion limite pour les deux méthodes. D'après la figure 4.2 nous pouvons évaluer  $\tau_{lim} = 0.512$  avec CFFEQ et  $\tau_{lim} = 0.62$  avec CFZH. Ces temps bien que spécifiques au problème de la cavité donnent cependant un ordre d'idée de la limitation d'autres types d'écoulements du fait des conditions au limites.

Maintenant que nous avons souligné le lien entre, nombre de Reynolds, raffinement, temps de relaxation et stabilité, nous allons vérifier la précision des résultats des simulations. Pour ce faire nous allons comparer plusieurs valeurs caractéristiques de l'écoulement aux résultats obtenus dans les références [11; 15].

Nous observons tout d'abord la position des vortex qui se sont formés au sein de la cavité. Selon le nombre de Reynolds et la finesse de la discrétisation spatiale plusieurs recirculations se forment, entre 1 et 6, leur position est détaillée à la figure 4.3. La position de ces recirculations pour nos simulations sont résumées tableaux 4.3, 4.4, 4.5, et comparées aux données de référence. Les valeurs sont exprimés par rapport à une largeur de cavité unitaire, la vorticité  $\omega$  mentionnée dans les tableaux est elle calculée telle que :

$$\omega = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

A partir de ces résultats quelques observations peuvent être faites :

- Pour les simulations n'ayant pas divergées les positions des différentes recirculations détaillées tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, sont très proches des résultats de référence. Quelque soit les paramètres employés pour définir le domaine, le glissement, l'imposition du glissement, les solutions sont similaires.
- Une autre remarque concerne le gain naturel en précision des résultats avec l'augmentation du raffinement. Plus le maillage de la cavité est fin, plus le nombre de vortex évalués est important, pour le réseau le plus fin  $256 \times 256$  à un nombre de Reynolds de 1000 et 2500 le raffinement permet ainsi d'observer des vortex non observables sur un réseau de  $128 \times 128$ . Il est cependant notable qu'un des

TABLE 4.3 Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de  $64 \times 64$  et  $128 \times 128$  avec  $\bar{u}_T = 0.1$ .

Cavité	Vortex	$Re = 100$	$Re = 1000$
Références	VortP : $(x, y)$	(0.7344, 0.6172)	(0.5300, 0.5650)
	$\omega$	-3.166	-2,0655
	VD1 : $(x, y)$	(0.9453, 0.0625)	(0.8633, 0.1114)
	$\omega$	$3.307 \cdot 10^{-2}$	1.1155
	VG1 : $(x, y)$	(0.0313, 0.0391)	(0.0899, 0.0789)
	$\omega$	$1.5551 \cdot 10^{-2}$	0.3534
$64 \times 64$ CFFEQ	VortP : $(x, y)$	(0.7320, 0.6211)	(0.5320, 0.5703)
	$\omega$	-3.059	-2.093
	VD1 : $(x, y)$	(0.9547, 0.0609)	(0.8734, 0.1125)
	$\omega$	$2.806 \cdot 10^{-2}$	1.013
	VG1 : $(x, y)$	-	(0.0960, 0.0797)
	$\omega$		0.3135
$64 \times 64$ CFZH	VortP : $(x, y)$	(0.7320, 0.6273)	-
	$\omega$	-3.178	-
	VD1 : $(x, y)$	(0.9531, 0.6718)	-
	$\omega$	$3.126 \cdot 10^{-2}$	-
	VG1 : $(x, y)$	-	-
	$\omega$		
$128 \times 128$ CFFEQ	VortP : $(x, y)$	(0.7352, 0.6160)	(0.5351, 0.5640)
	$\omega$	-3.030	-2.028
	VD1 : $(x, y)$	(0.9531, 0.0625)	(0.8742, 0.1171)
	$\omega$	$2.944 \cdot 10^{-2}$	1.025
	VG1 : $(x, y)$	(0.0375, 0.0390)	(0.0902, 0.0789)
	$\omega$	$1.430 \cdot 10^{-2}$	0.3304
$128 \times 128$ CFZH	VortP : $(x, y)$	(0.7371, 0.6195)	-
	$\omega$	-3.125	-
	VD1 : $(x, y)$	(0.9453, 0.0609)	-
	$\omega$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	-
	VG1 : $(x, y)$	(0.0391, 0.0375)	-
	$\omega$	$1.448 \cdot 10^{-2}$	

TABLE 4.4 Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de  $64 \times 64$  et  $128 \times 128$  avec  $\bar{u}_T = 0.05$ .

Cavité	Vortex	$Re = 100$	$Re = 1000$
Références	VortP : $(x, y)$	(0.7344, 0.6172)	(0.5300, 0.5650)
	$\omega$	-3.166	-2,0655
	VD1 : $(x, y)$	(0.9453, 0.0625)	(0.8633, 0.1114)
	$\omega$	$3.307 \cdot 10^{-2}$	1.1155
	VG1 : $(x, y)$	(0.0313, 0.0391)	(0.0899, 0.0789)
$\omega$	$1.5551 \cdot 10^{-2}$	0.3534	
$64 \times 64$ CFFEQ	VortP : $(x, y)$	(0.7313, 0.6242)	—
	$\omega$	-3.128	—
	VD1 : $(x, y)$	(0.9547, 0.0625)	—
	$\omega$	$2.876 \cdot 10^{-2}$	—
	VG1 : $(x, y)$	—	—
$\omega$	—	—	
$64 \times 64$ CFZH	VortP : $(x, y)$	(0.7359, 0.6234)	—
	$\omega$	-3.156	—
	VD1 : $(x, y)$	(0.9531, 0.06406)	—
	$\omega$	$2.864 \cdot 10^{-2}$	—
	VG1 : $(x, y)$	—	—
$\omega$	—	—	
$128 \times 128$ CFFEQ	VortP : $(x, y)$	(0.7336, 0.6188)	(0.5351, 0.5640)
	$\omega$	-3.096	-2.034
	VD1 : $(x, y)$	(0.9500, 0.0625)	(0.8742, 0.1171)
	$\omega$	$3.176 \cdot 10^{-2}$	1.046
	VG1 : $(x, y)$	(0.0375, 0.0375)	(0.0910, 0.0789)
$\omega$	$1.358 \cdot 10^{-2}$	0.3372	
$128 \times 128$ CFZH	VortP : $(x, y)$	(0.7363, 0.6191)	—
	$\omega$	-3.134	—
	VD1 : $(x, y)$	(0.9453, 0.0625)	—
	$\omega$	$3.440 \cdot 10^{-2}$	—
	VG1 : $(x, y)$	(0.0375, 0.0375)	—
$\omega$	$1.352 \cdot 10^{-2}$	—	

TABLE 4.5 Position des différentes recirculations dans une cavité entraînée selon le nombre de Reynolds et les paramètres de simulation pour un raffinement de  $256 \times 256$  avec  $\bar{u}_T = 0.1$ .

Cavité	Vortex	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 2500$
Références	VortP : $(x, y)$	(0.7344, 0.6172)	(0.5300, 0.5650)	(0.5200, 0.5433)
	$\omega$	-3.166	-2, 0655	-1.9696
	VD1 : $(x, y)$	(0.9453, 0.0625)	(0.8633, 0.1114)	(0.8350, 0.0914)
	$\omega$	$3.307 \cdot 10^{-2}$	1.1155	1.9290
	VG1 : $(x, y)$	(0.0313, 0.0391)	(0.0899, 0.0789)	(0.0850, 0.1100)
	$\omega$	$1.5551 \cdot 10^{-2}$	0.3534	0.9665
	VD2 : $(x, y)$	-	(0.9914, 0.0064)	(0.9900, 0.0100)
	$\omega$	-	$-0.7707 \cdot 10^{-2}$	$-1.595 \cdot 10^{-2}$
	VG2 : $(x, y)$	-	(0.0050, 0.0050)	(0.0064, 0.0064)
	$\omega$	-	$-0.2980 \cdot 10^{-2}$	$-0.9380 \cdot 10^{-2}$
256 × 256 CFFEQ	TG1 : $(x, y)$	-	-	(0.0433, 0.8600)
	$\omega$	-	-	1.3212
	VortP : $(x, y)$	(0.7344, 0.6172)	(0.5332, 0.5644)	(0.5234, 0.5390)
	$\omega$	-3.028	-1.998	-2.058
	VD1 : $(x, y)$	(0.9492, 0.0605)	(0.8672, 0.1132)	(0.8440, 0.0937)
	$\omega$	$3.052 \cdot 10^{-2}$	1.096	1.744
	VG1 : $(x, y)$	(0.0351, 0.0371)	(0.0859, 0.0781)	(0.0879, 0.1094)
	$\omega$	$1.402 \cdot 10^{-2}$	0.3515	0.8596
	VD2 : $(x, y)$	-	(0.9941, 0.0059)	(0.9941, 0.0097)
	$\omega$	-	$-0.7324 \cdot 10^{-2}$	$-1.148 \cdot 10^{-2}$
256 × 256 CFFEQ	VG2 : $(x, y)$	-	-	-
	$\omega$	-	-	-
	TG1 : $(x, y)$	-	-	(0.0390, 0.8828)
$\omega$	-	-	1.001	

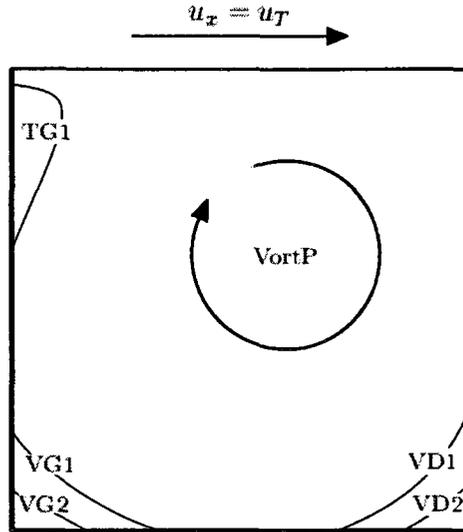


FIGURE 4.3 Position des différentes recirculations pour le cas de la cavité entraînée.

vortex référencé n'a pas été représenté par les simulations.

En plus de l'observation des recirculations, la figure 4.4 illustre quelques coupes de la cavité à  $Re = 1000$  comparées à la référence <sup>[11]</sup>. Ces coupes correspondent à la composante de vitesse normalisée  $U = u_x/u_T$  le long de la verticale divisant la cavité en deux et la composante  $V = u_y/u_T$  le long de l'horizontale divisant la cavité en deux. Ces résultats confirment la bonne précision de la méthode de Boltzmann sur réseau sur l'ensemble du domaine.

Pour compléter notre étude de la cavité entraînée, notamment pour souligner la précision de résultats selon les cas simulés, nous allons nous pencher sur l'erreur d'approximation en fonction de la finesse du maillage, du type de condition de glissement imposée, et des paramètres de simulation. Pour cette dernière étude nous analysons la norme  $L_2$  de l'erreur relative (4.3) dans le cas de simulations à  $Re = 100$ .

$$E_2 = \frac{\left[ \int_{\Omega} (u_{simul}(\mathbf{x}) - u_{ref}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2}}{\left[ \int_{\Omega} u_{ref}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]^{1/2}} \quad (4.3)$$

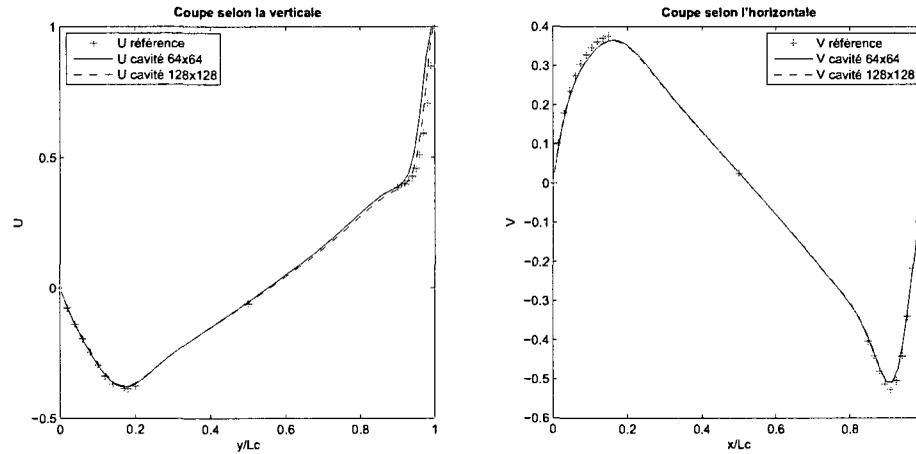


FIGURE 4.4 Coupes des champs de vitesse dans une cavité entraînée pour  $Re = 1000$ , différentes résolution de réseau et CFFEQ.

Cette erreur est estimée en considérant les composantes horizontales de vitesse normalisées  $u_{simul} = u_x/u_T$  le long de la verticale divisant la cavité en deux, avec comme valeur de références  $u_{ref}$ , les valeurs proposées par Ghia et al. [15]. L'évaluation de cette erreur pour différents maillages,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$  et  $128 \times 128$ , est présentée à la figure 4.5 pour un même temps physique de simulation de l'écoulement dans la cavité. Trois cas sont comparés : un cas avec une condition frontière CFFEQ et une vitesse de glissement  $\bar{u}_T = 0.05$  ; un cas avec la condition frontière CFFEQ et  $\bar{u}_T = 0.1$  ; un cas avec la condition frontière CFZH et  $\bar{u}_T = 0.1$ . Pour garantir la cohérence temporelle entre les simulation et comparer l'écoulement dans la cavité à un même temps physique, le champs de vitesses sur le réseau  $128 \times 128$  est celui obtenu après 50,000 itérations, pour le réseau  $64 \times 64$  celui obtenu après 25,000 itérations, et pour le réseau  $32 \times 32$  celui obtenu après 12,500 itérations.

Plusieurs points peuvent être soulignés d'après la figure 4.5.

- Tout d'abord concernant le type de condition frontière générant le glissement, l'erreur d'approximation des simulations effectuées avec imposition du glissement par la méthode CFFEQ est plus importante que celle des simulations utilisant

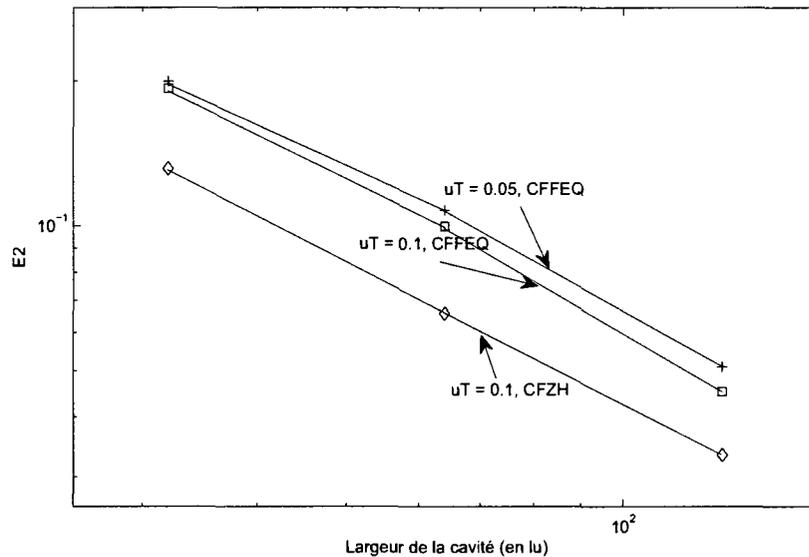


FIGURE 4.5  $E_2$  pour différentes simulations avec différents maillages, différentes méthodes d'imposition des conditions frontières, différentes vitesses de glissement.

la méthode CFZH pour imposer la vitesse tangentielle ; comme mentionné à la section 3.2.2.2.

- Une seconde remarque concerne le choix de la vitesse de glissement imposée. Il s'avère que pour un même nombre de Reynolds plus le glissement est faible,  $\bar{u}_T = 0.05$  plutôt que  $\bar{u}_T = 0.1$ , moins les résultats sont précis pour un même temps de simulation et une même méthode d'imposition du glissement. Ainsi plus la vitesse sera élevée, plus la simulation convergera vite, cependant l'augmentation de la vitesse est limitée par la contrainte d'incompressibilité  $\bar{u}_T \ll 1$ , au risque de compromettre la simulation si cette limitation n'est pas respectée.

En conclusion nous venons de voir que la méthode de Boltzmann sur réseau permet de résoudre avec précision le cas de la cavité entraînée pour différents nombres de Reynolds. Nous avons également souligné et confirmé quelques caractéristiques de la méthode et du type de condition frontière employée. Il en ressort l'importance du temps de relaxation  $\tau$  pour la stabilité et son lien étroit avec les paramètres de

simulation. Il y a également l'importance du choix des conditions frontières selon les caractéristiques de l'écoulement et un compromis entre stabilité et précision, ainsi les conditions frontières du type CFFEQ génèrent plus de stabilité mais moins de précision que les frontières du type CFZH et inversement. Étant donné que l'ensemble des simulations réalisées ultérieurement nécessitent de faibles temps de relaxation, pour garantir la stabilité, nous utiliserons la condition frontière CFFEQ pour l'imposition de vitesses.

En guise de complément des données obtenues pour l'étude de l'écoulement dans une cavité entraînée les champs de vitesse pour les simulations sur le réseau le plus fin  $256 \times 256$  sont disponibles en Annexe I.

#### **4.2 Cylindre dans un canal, vérification des améliorations de la méthode de Boltzmann sur réseau**

Avec le cas test de la cavité entraînée, nous venons de vérifier le bon fonctionnement de notre programme utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau et nous avons souligné quelques caractéristiques importantes de la méthode. Afin d'améliorer l'algorithme élémentaire, nous l'avons modifié pour pouvoir prendre en compte les parois curvilignes selon la méthode proposée à la section 3.3.1 ainsi que pour l'utilisation de réseaux de différents niveaux présenté section 3.3.2. Nous allons vérifier la validité de ces implémentations en étudiant le cas d'un cylindre dans un canal.

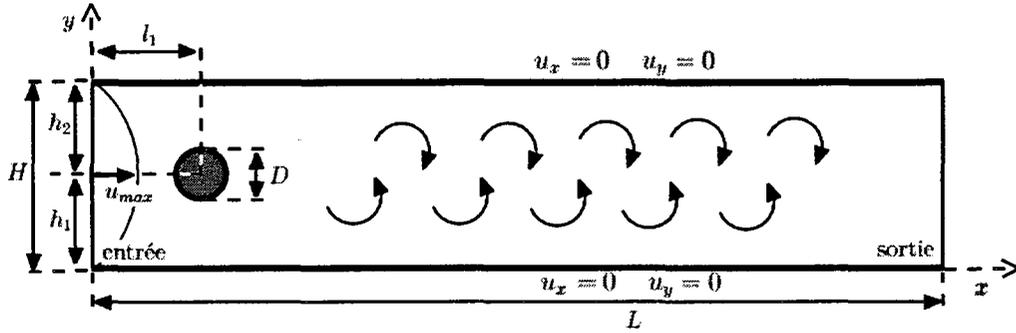


FIGURE 4.6 Schéma du domaine du cylindre dans un canal.

#### 4.2.1 Description du problème

Ce cas bidimensionnel est constitué d'un cylindre solide placé au milieu d'un canal. La présence du cylindre permet d'observer différents écoulements particuliers selon le nombre de Reynolds de la simulation, dans notre cas nous allons observer le développement de tourbillons en aval du cylindre à un Reynolds de  $Re = 100$  et le lâché alterné de ces derniers. Le domaine de simulation est détaillé à la figure 4.6.

Ce domaine est constitué d'un canal avec les parois inférieures et supérieures imposées solides sans glissement pariétal ( $\mathbf{u}_P = \mathbf{0}$ ) par la méthode de renvoie directe (section 3.2.2.1). La sortie est supposée assez loin de l'obstacle pour imposer une paroi libre par simple recopie des distributions (section 3.2.2.3). A l'entrée du canal nous considérons un écoulement pleinement développé. Un profil parabolique est donc appliqué par utilisation des distributions d'équilibres associées  $f^{eq}(\mathbf{u}_{ent}, \rho_{ent})$  (section 3.2.2.2), avec  $\rho_{ent}$  extrapolée de la première rangée de cellules à l'intérieur du canal et  $\mathbf{u}_{ent}$  définie tel que :

$$\mathbf{u}_{ent} = \left( \frac{4 u_{max} y (H - y)}{H^2}, 0 \right) \quad (4.4)$$

où  $H$  représente la hauteur du canal. Enfin pour ce qui est du cylindre : il est de diamètre  $D = L_c$  ; une paroi solide avec condition de non glissement y est

appliquée; son centre est légèrement décalé par rapport à l'axe du canal afin de générer le lâché alterné de tourbillons.

Nous allons effectuer des simulations pour une même discrétisation du domaine et nous allons étudier la validité de l'utilisation de conditions frontières curvilignes à la place d'un simple renvoi directe des distributions. Nous validerons également notre méthode de raffinement en imposant un ou deux réseaux plus fins au voisinage du cylindre. Pour comparer nos résultats, nous observerons l'évolution des paramètres aérodynamiques de portance et traînée calculés selon la méthode présentée section 3.3.3. Nous les comparerons à ceux obtenus dans d'autres études [36; 41].

#### 4.2.2 Résolution par la méthode de Boltzmann sur réseau

Les simulations de ce cas test sont effectuées pour un nombre de Reynolds  $Re = 100$  afin d'observer la formation d'une allée de tourbillons en aval du cylindre et pour vérifier le caractère transitoire de la méthode de Boltzmann sur réseau tout en étudiant l'influence des diverses améliorations de l'algorithme.

L'adimensionalisation des paramètres s'effectue comme précédemment, le domaine physique possède les dimensions  $L = 2.2 \text{ m}$ ,  $h_1 = l_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 21 \text{ cm}$ ,  $D = L_c = 10 \text{ cm}$  et  $u_{max} = 0.1 \text{ m/s}$ . La vitesse maximale du profil parabolique en entrée est donc  $\bar{u}_{max} = 0.1 \text{ lu/lt}$  suffisamment petit pour garantir l'incompressibilité. La discrétisation spatiaux temporelle choisit est  $\Delta x = \Delta t = 0.01$ , le domaine est donc constitué de  $\bar{L} = 220$  cellules horizontalement et  $\bar{H} = 41$  verticalement, le cylindre possédant sur le réseau grossier un diamètre de  $\bar{D} = 10$  cellules. Reste à expliciter les temps de relaxation associé. Etant donné les grandeurs physiques choisies, pour un nombre de Reynolds  $Re = (2/3 u_{max} L_c)/\nu$  la viscosité cinématique physique est de  $\nu = 6.67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} = c^2 \Delta t / 3 (\tau - 1/2)$ , soit un temps de relaxation de

TABLE 4.6 Différentes caractéristiques des domaines de simulation pour le cas du cylindre dans un canal.

	Cas 1 : Raf0BB	Cas 2 : Raf0CB	Cas 3 : Raf1BB	Cas 4 : Raf1CB	Cas 5 : Raf2CB
Raffinements	0	0	1	1	2
Taux de raffinement	- -	- -	$m_1 = 4$ -	$m_1 = 4$ -	$m_1 = 4$ $m_2 = 4$
Temps de relaxation pour chaque raffinement	$\tau_0 = 0.52$ - -	$\tau_0 = 0.52$ - -	$\tau_0 = 0.52$ $\tau_1 = 0.58$ -	$\tau_0 = 0.52$ $\tau_1 = 0.58$ -	$\tau_0 = 0.52$ $\tau_1 = 0.58$ $\tau_2 = 0.82$
Méthode de prise en compte de l'obstacle	Renvoie directe Sec 3.2.2.1	Paroi courbe Sec 3.3.1	Renvoie directe Sec 3.2.2.1	Paroi courbe Sec 3.3.1	Paroi courbe Sec 3.3.1

$\tau = 0.52$ . Ce temps obtenu est proche de la limite de  $1/2$  mais devrait être suffisant pour garantir la stabilité.

Avec ces paramètres les simulations ont été effectuées dans diverses configurations, avec ou sans raffinement, avec ou sans prise en compte des parois curvilignes pour la frontière du solide. Ces différentes configurations testées sont détaillées dans le tableau 4.6.

### 4.2.3 Résultats

Pour les différents cas traités nous avons comparé deux paramètres caractéristiques de cet écoulement, l'évolution du coefficient de traînée  $C_d$  et l'évolution du coefficient de portance  $C_l$  (section 3.3.3). La vitesse et la densité moyenne à l'entrée du canal définissent les grandeurs de référence  $u_{ref}$  et  $\rho_{ref}$ , le diamètre du cylindre représente lui la longueur de référence  $L_{ref}$ . La variation de ces deux coefficients au cours du temps est représentée aux figures 4.8 et 4.9.

Avant de comparer les résultats obtenus il est bon de souligner que les coefficients

illustrent bien le décollement et le lâché périodique de tourbillons figure 4.7. Nous remarquerons que la variation de ces coefficients n'est pas parfaitement régulière. Cette observation s'explique par le fait que le cylindre n'est pas placé parfaitement au centre du canal, qu'ils se forment par le dessous ou le dessus les tourbillons ne sont donc pas exactement de la même taille et influencent plus ou moins la traînée et la portance.



FIGURE 4.7 Vorticité de l'écoulement sur le domaine du cylindre dans un canal à  $Re = 100$ .

Nous allons maintenant voir et confronter les résultats obtenus selon les différents cas. Tout d'abord, concernant les simulations sans raffinement Raf0BB et Raf0CB, nous remarquerons que dans chaque cas  $C_d$  est fortement survalu  par rapport aux données de référence [36; 41], les oscillations du  $C_l$  présentent elles une amplitude moins importante que dans la référence. Un tel résultat peut s'expliquer simplement par un manque important de finesse de raffinement autour du cylindre ce qui change complètement la forme de l'obstacle. Concernant la différence entre les méthodes de traitement des conditions frontières, la prise en compte des parois curvilignes Raf0CB donne des résultats plus proches des données de référence que le simple renvoie direct Raf0BB pour la traînée, pour la portance nous observons l'inverse. Concernant l'évolution temporelle les deux cas testés illustrent une variation similaire des coefficients.

Avec un premier raffinement de rapport  $m = 4$  (Cas Raf1BB et Raf1CB) l'évolution des coefficients s'approche des données de référence. Dans ce cas l'utilisation de conditions frontières par simple renvoie directe sous évalue légèrement la traînée,

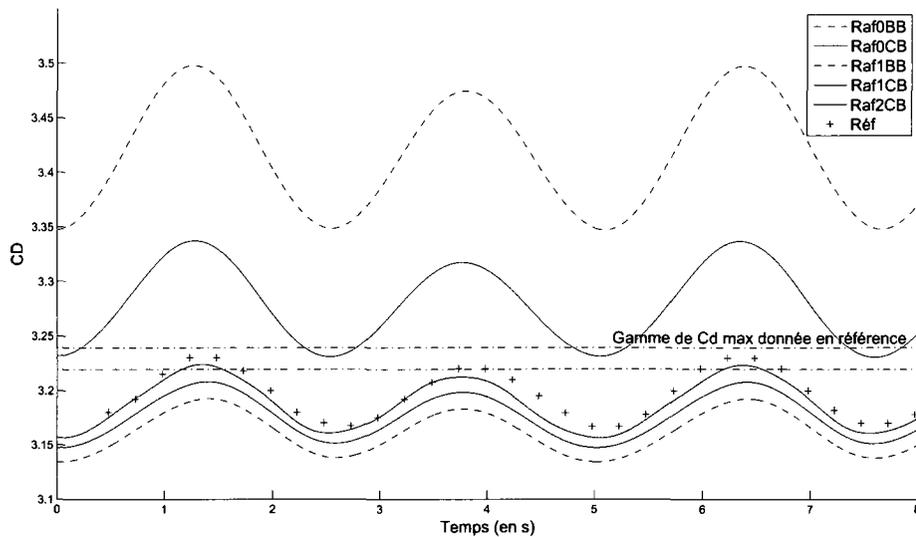


FIGURE 4.8 Évolution du coefficient de traînée au cours du temps pour les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à  $Re = 100$ .

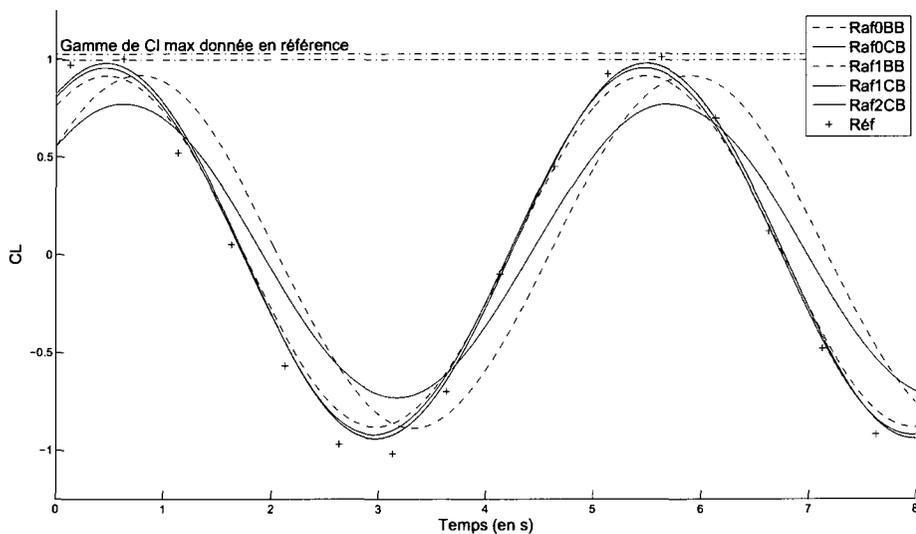


FIGURE 4.9 Évolution du coefficient de portance au cours du temps pour les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à  $Re = 100$ .

la portance est elle relativement bien évaluée. Pour le cas Raf1CB l'utilisation de conditions frontières curvilignes est cette fois globalement plus précise que le simple renvoie directe, malgré un écart avec les données de référence les valeurs maximales de  $C_d$  et  $C_l$  tendent vers celles-ci. L'utilisation du raffinement d'autre part ne semble pas affecter la période des oscillations.

Le dernier cas avec deux raffinements de rapport  $m = 4$  est lui appliqué uniquement avec une prise en compte des parois curvilignes étant donné que c'est le cas pour lequel le plus de précision est envisageable. La variation des coefficients  $C_d$  et  $C_l$  (figures 4.8 et 4.9) est en bon accord avec les données de comparaison, notamment pour les valeurs maximales des coefficients en comparaisons avec la gamme de valeurs proposées en référence <sup>[36]</sup>. L'étude de la formation de tourbillons en aval d'un cylindre dans un canal à  $Re = 100$  est donc bien prise en compte par la méthode de Boltzmann sur réseau, notamment avec l'utilisation de raffinements autour du cylindre et avec la prise en compte des parois courbes. Pour souligner la bonne correspondance temporelle des résultats nous allons observer le nombre de Strouhal associé à ces simulations.

$$St = \frac{L_c}{u_{moy} T_{ps}} \quad (4.5)$$

avec la longueur caractéristique de l'écoulement  $L_c = D$ , la vitesse moyenne  $u_{moy} = 2/3 u_{max}$  et la période  $T_{ps}$  des oscillations des coefficients  $C_d$  et  $C_l$ . Les différentes valeurs du nombre de Strouhal associées aux simulations Raf0BB, Raf0CB, Raf1BB, Raf1CB et Raf2CB sont résumées dans le tableau 4.7 et comparées aux données de la référence <sup>[36]</sup>. Les valeurs obtenues y sont en relativement bon accord avec la référence ce qui confirme la bonne évaluation du caractère instationnaire d'une telle simulation.

Après avoir vérifié la formulation élémentaire de la méthode de Boltzmann sur ré-

TABLE 4.7 Nombres de Strouhal caractérisant les différentes simulations pour un cylindre dans un canal à  $Re = 100$ .

Cas simulé	Nombre de Strouhal
Référence <sup>[36]</sup>	$St = 0.30$
Raf0BB	$St = 0.2935$
Raf0CB	$St = 0.2959$
Raf1BB	$St = 0.2988$
Raf1CB	$St = 0.2990$
Raf2CB	$St = 0.2990$

seau avec l'étude de l'écoulement dans une cavité entraînée nous venons de vérifier, avec le cas du cylindre, le bon fonctionnement de notre programme amélioré. En annexe II les champs de vitesse concernant cet écoulement dans le cas le plus précis Raf2CB sont disponibles en guise de complément.

Nous allons désormais mettre à profit notre programme basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau, ainsi que les différentes améliorations de l'algorithme de base, afin d'effectuer des simulations plus complexes.

### 4.3 Profils NACA, comparaison à d'autres méthodes de simulation

Les premiers écoulements plus complexes simulés sont l'écoulement autour de profils d'ailes propres, puis déformés par la formation de givre, le tout à un nombre de Reynolds de 500.

#### 4.3.1 Description du problème

Pour ce problème nous considérons le profil d'aile placé au milieu d'un domaine rectangulaire. Les simulations étant effectuées pour un nombre de Reynolds de 500, le temps de relaxation associé risque d'être relativement faible, donc, pour favoriser

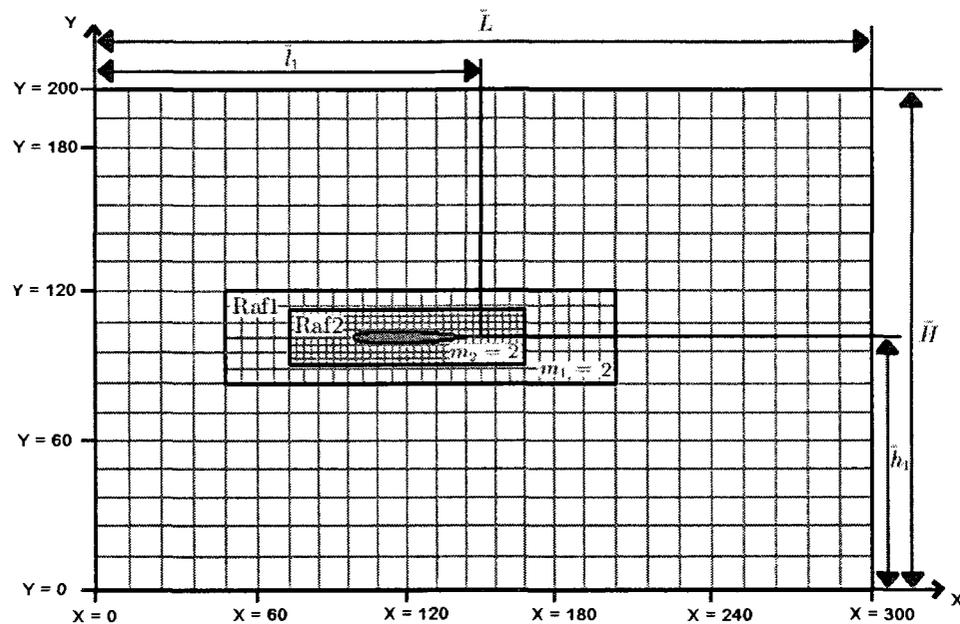


FIGURE 4.10 Schéma du domaine de calcul et des différents raffinements pour le profil NACA0012.

la stabilité des simulations, l'entrée de vitesse est imposée uniformément en complétant les distributions manquantes par détermination des distributions d'équilibre (section 3.2.2.2). Les autres limites du domaine sont elles imposées libres (section 3.2.2.3). Étant donné la présence de conditions frontières libres, le domaine doit être suffisamment grand pour que ces dernières n'influencent pas trop l'écoulement et soient placées assez loin des zones de variation de l'écoulement. Pour ce faire et pour une économie de temps de simulation, nous utilisons également une succession de raffinements autour du profil (section 3.3.2). Enfin, pour garantir la précision des simulations et du calcul des coefficients caractéristiques de chaque profil, le traitement des parois curvilignes est évalué par la méthode proposée à la section 3.3.1. Le domaine de simulation ainsi que la position des raffinements successifs est schématisé à la figure 4.10.

Sur un tel domaine nous allons effectuer des simulations sur différents profils d'ailes :

le profil symétrique NACA0012 dans un premier temps pour une estimation de la validité de la méthode et du choix du domaine de simulation ; le profil NACA63-415 non givré et givré pour effectuer des comparaisons avec Fluent. L'adimensionalisation est similaire aux cas précédents, le nombre de Reynolds de référence est  $Re = 500$ , la longueur caractéristique de l'écoulement est  $L_c = c$ , la longueur de la corde des profils NACA, la vitesse de référence est la vitesse en entrée  $\mathbf{u}_{ent} = (0.1 \text{ m/s}, 0) = (0.1 \text{ lu/lt}, 0)$ . A partir de ces paramètres différents domaines ont été générés de divers dimensions selon l'angle d'attaque du profil par rapport à l'écoulement global. Les caractéristiques de ces domaines de simulation pour les différents tests effectués sont détaillés dans les tableaux III.1 et III.2 de l'annexe II.

#### 4.3.2 Profil NACA0012

Avant de comparer les résultats de la méthode de Boltzmann sur réseau à ceux de Fluent pour le profil de pales d'éoliennes NACA63-415, nous avons vérifié que la méthode telle que nous l'avons implémentée est capable de traiter adéquatement les profils du type NACA et que la détermination des coefficients caractéristiques de traînée  $C_d$  et portance  $C_l$  est suffisamment bonne. Pour ces vérifications nous avons donc simulé l'écoulement à  $Re = 500$  autour d'un profil symétrique NACA0012 (tableau III.1) et comparé à des résultats déjà existant <sup>[20]</sup>.

Diverses données ont été comparées, à commencer par différentes coupes des composantes horizontales  $U = \bar{u}_x/u_{ent}$  et verticales  $V = \bar{u}_y/u_{ent}$  de la vitesse normalisée le long de la corde du profil NACA0012. La position de ces dernières, illustrée à la figure 4.11, est à  $x = 0\%$ ,  $x = 25\%$ ,  $x = 50\%$ ,  $x = 75\%$  et  $x = 100\%$  de la corde. Ces coupes de vitesse sont elles représentées aux figures 4.12 à 4.16 et comparées aux données de référence obtenues par les programmes de simulation en dynamique

TABLE 4.8 Coefficients de portance et traînée pour le profil NACA0012 a  $Re = 500$ ,  $\alpha=0^\circ$ .

Méthodes	$C_d$	$C_l$
CFL3D	0.1741	$0.538 \cdot 10^{-5}$
Powerflow	0.1807	$-0.211 \cdot 10^{-3}$
LBGK	0.1752	$0.50 \cdot 10^{-4}$

des fluides CFL3D et Powerflow. CFL3D est un résolveur basé sur une résolution par volumes finis des équations de Navier-Stokes, Powerflow est un programme commercial basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau. Une observation rapide de toutes ces figures nous indique que les résultats obtenus par notre programme (LBGK) sont comparables aux valeurs de référence.

Nous avons ensuite observé les différents coefficients caractéristiques de cet écoulement, à savoir les coefficients de traînée  $C_d$  et de portance  $C_l$  (section 3.3.3). La vitesse et la densité moyenne à l'entrée du domaine définissent les grandeurs  $u_{ref}$  et  $\rho_{ref}$ , la longueur de la corde  $c$  la longueur de référence  $L_{ref}$ . Les valeurs obtenues sont résumés dans le tableau 4.8, ils se comparent favorablement aux données de la référence [20].

Ce premier cas d'application de la méthode de Boltzmann sur réseau à un profil NACA donne des résultats proches des données de référence. Nous allons maintenant nous pencher sur l'étude des caractéristiques aérodynamiques d'un profil de pale d'éolienne NACA63-415 et observer l'influence de la formation de givre.

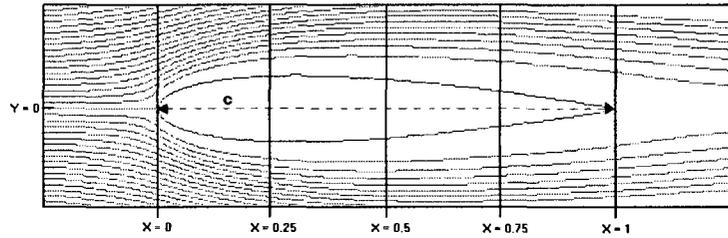


FIGURE 4.11 Lignes de courant et position des coupes le long du profil NACA0012.

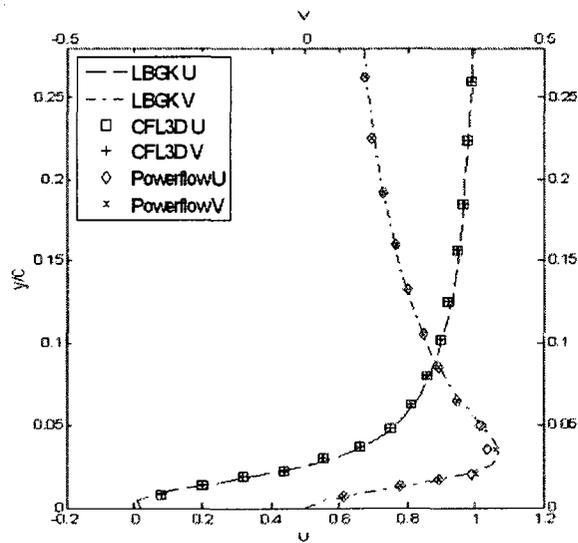


FIGURE 4.12 Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à  $x = 0$ .

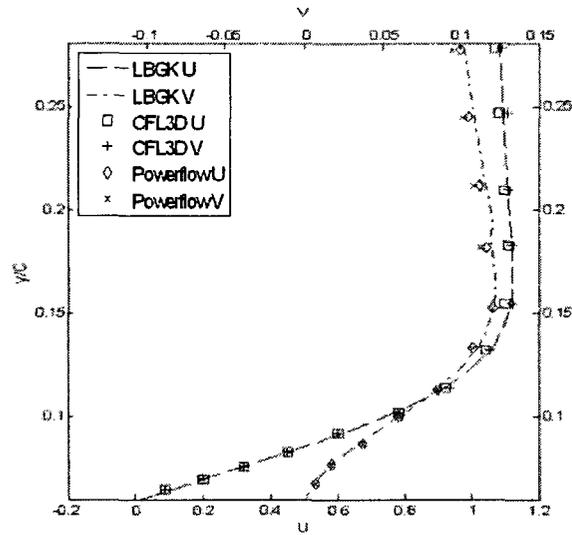


FIGURE 4.13 Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à  $x = 0.25$ .

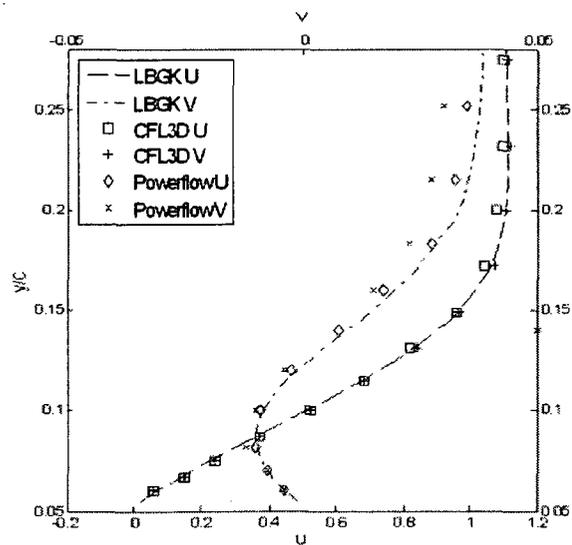


FIGURE 4.14 Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à  $x = 0.5$ .

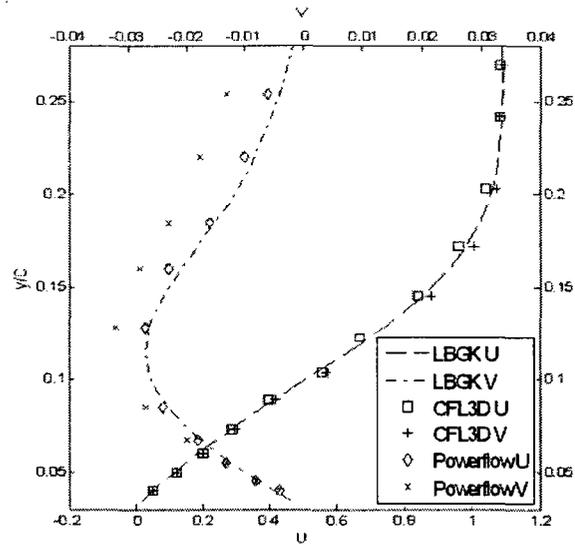


FIGURE 4.15 Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à  $x = 0.75$ .

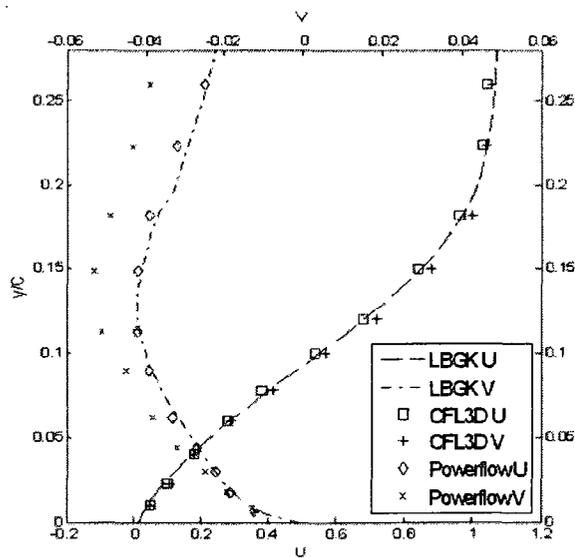


FIGURE 4.16 Composantes horizontales et verticales de vitesse le long du profil NACA0012 à  $x = 1$ .

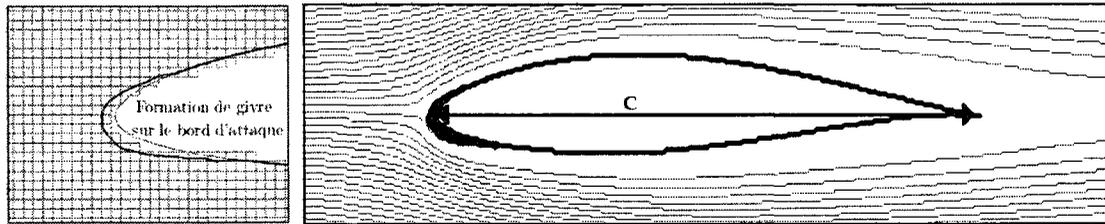


FIGURE 4.17 Profil NACA63-415 propre et déformé par formation de glace au bord d'attaque.

#### 4.3.3 Profil NACA63-415, propre et déformé par formation de givre

Le but de ce cas est de tester la capacité du programme à prendre en compte des géométries complexes en régime stationnaire et instationnaire. Étant donné que des données expérimentales de référence pour de tels cas ne sont pas disponibles, nous allons comparer nos résultats à ceux obtenus par des simulations avec le logiciel commercial Fluent. Le domaine de simulation ainsi que les paramètres des simulations ont été précédemment illustrés et détaillés, à la figure 4.10 et dans le tableau III.2. Pour le modèle Fluent un domaine de type C a été employé avec les mêmes caractéristiques physiques.

La géométrie du profil NACA63-415, propre et modifié par formation de givre, est illustrée à la figure 4.17. Chaque profil a été testé à différents angles d'attaque,  $\alpha=0^\circ$ ,  $8^\circ$  et  $28^\circ$ , ceci va nous permettre de confronter les résultats proposés par les deux méthodes, LBGK et Fluent, pour différents régimes d'écoulement.

Ainsi, la première simulation à  $\alpha=0^\circ$  donne des résultats stationnaires aussi bien pour les simulations sous Fluent qu'avec notre programme. La comparaison de deux méthodes s'effectue à travers une observation des coefficients aérodynamiques caractérisant l'écoulement, à commencer par l'étude de la répartition du coefficient de pression  $C_p$ . Le  $C_p$  le long du profil propre ainsi que déformé par la formation de givre est présenté à la figure 4.18. Les valeurs de la portance et traînée associée sont

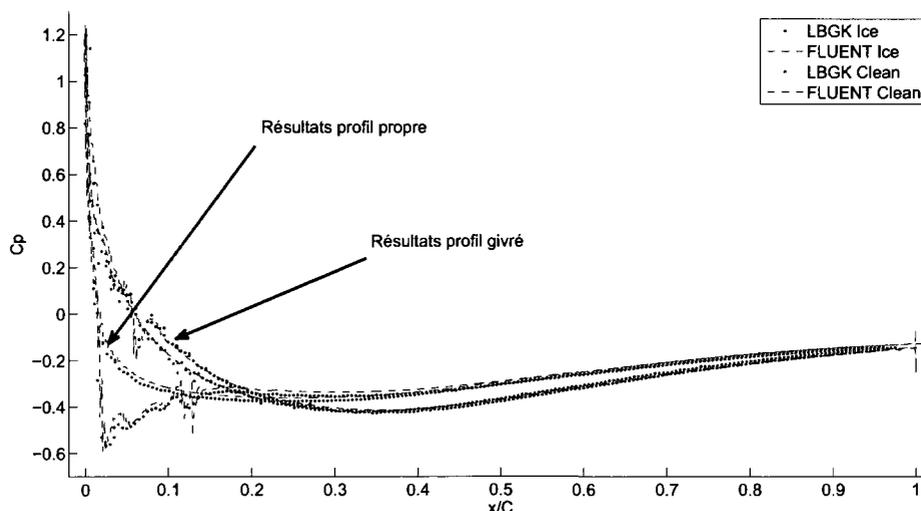


FIGURE 4.18 Répartition des  $C_p$  sur le profil NACA63-415 propre et givré à  $\alpha=0^\circ$ .

détaillées dans le tableau 4.9. Pour ce cas stationnaire les deux méthodes présentent des résultats similaires.

Dans un second temps des simulation à un angle d'attaque de  $\alpha=8^\circ$  ont été réalisées. Pour ce cas, Fluent propose des résultats correspondant à un écoulement stationnaire alors que notre programme présente un écoulement instationnaire. Cette instationnarité s'illustre par de petites oscillation de l'écoulement dans le sillage du profil. Pour pouvoir comparer les résultats des deux méthodes nous prenons la valeurs moyenne des différents paramètres obtenus par simulation avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Comme pour le cas à  $\alpha=0^\circ$  la répartition des  $C_p$  le long du profil sont illustrés à la figure 4.19 pour le profil NACA63-415 propre, et déformé par formation de givre. Les  $C_d$  et  $C_l$  correspondants sont résumés dans le tableau 4.9. Dans ce second cas, malgré la différence de régime, la répartition du coefficient de pression évalué par chaque méthode est relativement similaire, la formation de givre semble là encore bien évaluée. Pour ce qui est des coefficients de portance et traînée, malgré le fait que les résultats observés soient du même ordre, les valeurs

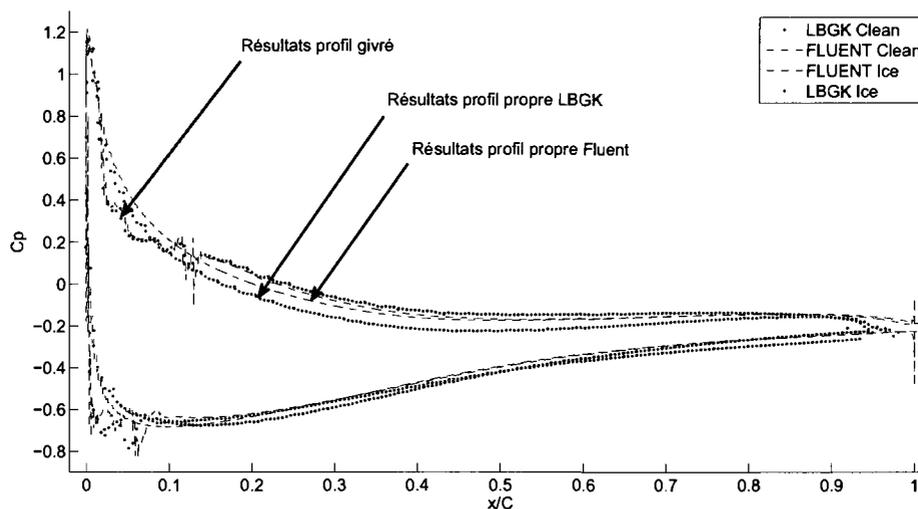


FIGURE 4.19 Répartition des  $C_p$  sur le profil NACA63-415 propre et givré à  $\alpha=8^\circ$ .

simulées présentent un écart non négligeable, principalement pour l'évaluation du  $C_l$ .

Finalement, pour compléter l'étude du profil NACA63-415, nous avons effectué des simulation à un angle d'attaque de  $\alpha=28^\circ$ . Pour ce dernier cas à fort angle d'incidence, les résultats obtenus par les deux méthodes sont instationnaires. Pour ce dernier cas nous allons donc nous concentrer sur l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques  $C_d$  et  $C_l$ . Les résultats obtenus sont illustrés à la figure 4.20 pour le cas du profil propre et à la figure 4.21 pour le profil déformé par formation de givre. Les oscillations périodiques des coefficients illustrent la formation et le lâché régulier de tourbillons dans le sillage du profil (Figure 4.22). Dans chaque cas l'évolution temporelle des coefficients suit un comportement globalement similaire sur une période, cependant un écart important entre les amplitudes de l'un des deux pics de portance génère ensuite un écart constant entre les coefficients, aussi bien  $C_d$  que  $C_l$ , jusqu'à ce qu'un nouveau pic de portance commence à se former. D'autre part, concernant l'évaluation des coefficients pour le cas givré, il apparaît

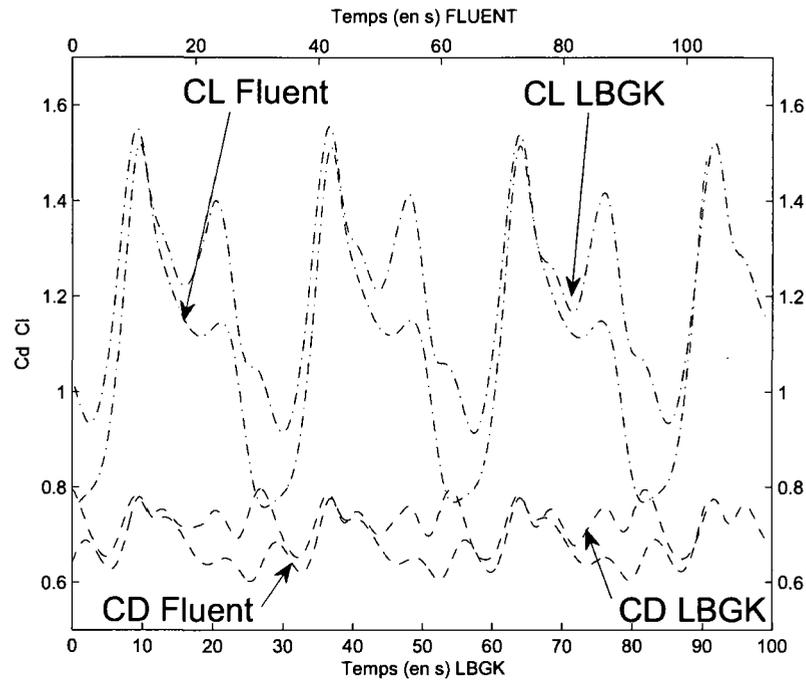


FIGURE 4.20 Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance et traînée pour le profil NACA63-415 à  $\alpha=28^\circ$ .

que l'augmentation de la traînée et de la portance avec le givrage est bien plus forte avec les simulations par la méthode de Boltzmann sur réseau comparativement à Fluent. Une dernière remarque peut être formulée pour l'observation des résultats, il s'agit de la période des oscillations illustrant la formation et le lâché régulier de tourbillons. Ces dernières, résumées dans le tableau 4.10, sont similaires mais globalement plus courtes pour les simulations par la méthode de Boltzmann sur réseau.

En conclusion pour l'étude du profil NACA63-415, notre programme basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau, propose des résultats similaires à ceux donnés par la simulation avec le logiciel Fluent, notamment à faible angle d'attaque, la prise en compte de la présence de givre y étant relativement bonne. Il est encourageant de remarquer que malgré l'importante différence d'approche entre les deux

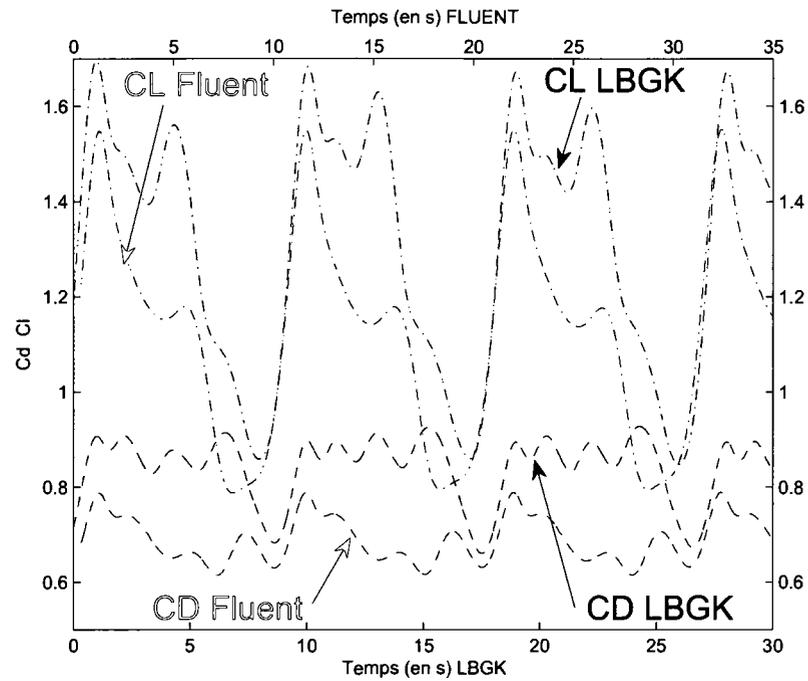


FIGURE 4.21 Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance et traînée pour le profil NACA63-415 givré à  $\alpha=28^\circ$ .



FIGURE 4.22 Formation de vortex à l'arrière du profil NACA63-415 à  $Re = 500$  et  $\alpha=28^\circ$ .

TABLE 4.9 Coefficients aérodynamiques de l'écoulement autour du profil NACA63-415 propre et givré à  $Re = 500$ ,  $\alpha=0^\circ$ ,  $8^\circ$ .

Cas	Méthodes	$C_d$	$C_l$
Propre, $0^\circ$	Fluent	0.1809	-0.0057
	LBGK	0.1861	-0.0079
Givré, $0^\circ$	Fluent	0.1824	-0.0068
	LBGK	0.1872	-0.0215
Propre, $8^\circ$	Fluent	0.2022	0.3622
	LBGK	0.210	0.3860
Givré, $8^\circ$	Fluent	0.2029	0.3639
	LBGK	0.2089	0.3392

TABLE 4.10 Période des oscillations des coefficients aérodynamiques autour du profil NACA63-415 propre et givré à  $Re = 500$ ,  $\alpha=0^\circ$ ,  $8^\circ$ .

Méthodes	période profil propre	période profil givré
Fluent	30.9 s	10.9 s
LBGK	27.9 s	9.05 s

méthodes, au niveau du modèle mathématique et aussi au niveau du maillage, les résultats obtenus sont similaires. Cependant, nous avons observé certains écarts non négligeables lors de l'analyse à fort angle d'attaque, lorsque la solution devient instationnaire. Ce dernier cas demande une étude plus approfondie afin de vérifier la qualité des résultats obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau.

L'annexe III fournit quelques résultats supplémentaires sur l'étude de l'écoulement autour du profil NACA63-415. Nous allons maintenant finir notre travail par l'étude d'un autre cas complètement différent, à savoir la remontée par poussée d'Archimède d'une particule dans un fluide.

## 4.4 Remontée libre d'une particule dans un fluide par poussée d'Archimède

La méthode de Boltzmann sur réseau, ainsi que l'algorithme que nous avons développé, ont jusqu'à maintenant fournis des résultats correspondant favorablement avec l'expérimentation ou des méthodes de simulation basées sur les équations de Navier-Stokes. Nous allons maintenant nous pencher sur un dernier cas d'étude permettant de mettre à profit le caractère transitoire de la méthode ainsi que sa relative simplicité dans le traitement d'objets en mouvement. Cette étude concerne la simulation de la remontée libre d'une particule dans une colonne de fluide par la poussée d'Archimède.

### 4.4.1 Description du problème

Le but final de cette étude est l'évaluation du comportement et des caractéristiques de la remontée libre d'une bulle de gaz dans un fluide. Étant donné le niveau de développement de notre algorithme utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau, ce cas est complexe à simuler, notamment à cause du caractère diphasique d'un tel écoulement. Nous avons donc effectué diverses simplifications nous écartant du problème initial mais permettant d'observer, par la méthode de Boltzmann sur réseau, divers phénomènes caractéristiques de la remontée libre de particules par la poussée d'Archimède.

Le domaine de simulation utilisé représente une section d'un volume de fluide et est détaillé à la figure 4.23.

Pour réduire le temps de calcul, au lieu de simuler la remontée d'une particule initialement immobile dans un fluide stagnant en considérant l'intégralité du do-

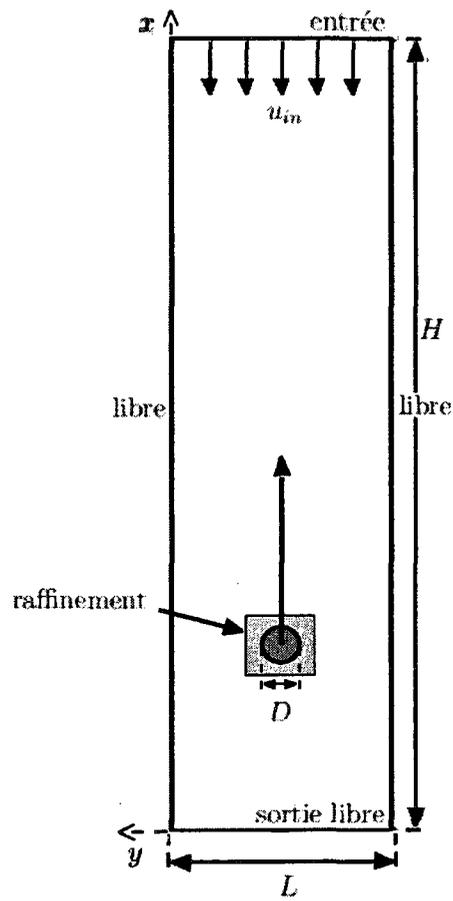


FIGURE 4.23 Schéma du domaine de simulation pour le cas de la remontée d'une particule dans un fluide.

maine parcouru par la particule, nous avons définis le domaine de façon à ce que le déplacement total de la particule soit relativement faible. Pour ce faire nous avons considéré un domaine en deux dimensions, une entrée constante de vitesse est imposée dans la direction opposée de la direction de montée de l'objet (section 3.2.2.2), les autres limites du domaine sont assimilées à des frontières libres (section 3.2.2.3). L'objet est considéré comme une sphère solide représentée en deux dimensions par un disque avec une condition de non glissement à la paroi et avec prise en compte de la frontière curviligne (section 3.3.1). Dans un souci de précision et de stabilité, un raffinement du réseau autour de l'objet est également appliqué (section 3.3.2). Par une telle approche les simulations se déroulent comme suit :

- **Lancement de l'écoulement** : A partir d'un domaine initialisé stagnant une vitesse  $\mathbf{u}_{ent}$  légèrement inférieure à la vitesse terminal de remontée de la particule est imposée à la frontière supérieure du domaine. Cette vitesse terminale de remontée correspond à la vitesse maximale qu'atteint un objet en chute libre, ou inversement, remontant par la poussée d'Archimède <sup>[25]</sup>. L'imposition de cette dernière permet de ralentir la remontée de l'objet et donc de réduire la dimension du domaine. Durant cette étape initiale des simulation la particule est alors placée immobile au centre du canal. Avec le domaine fluide qui vient d'être présenté, la simulation ressemble au cas du cylindre dans un canal (section 4.2.1).
- **Détachement de l'objet** : Une fois l'écoulement développé sur le domaine de simulation l'objet est considéré libre et par bilan des forces auxquelles il est sujet il commence à se déplacer sur le réseau par la poussée d'Archimède.
- **Remontée de l'objet** : Une fois détaché, le corps remonte librement dans la colonne de fluide jusqu'à atteindre une vitesse stable de remontée. Cette vitesse constitue un paramètre physique important et porte le nom de vitesse terminale notée  $U_{term}$ .

Avec ce type de domaine et raisonnement pour la simulation de la remontée libre

d'une particule, il apparaît divers points n'ayant pas encore été abordé : l'évaluation du bilan des forces appliquées à la particule et le déplacement d'objets sur un réseau.

#### 4.4.2 Déplacement d'une particule sur un réseau de Boltzmann

Le problème de la remontée d'une particule par la poussée d'Archimède nécessite l'évaluation du déplacement d'objets sur un réseau. Nous allons voir comment se déplacement est généré et comment il est modélisé numériquement.

Tout d'abord pour engendrer le déplacement de la particule, ou plus précisément du disque de diamètre  $L_c = D$  par lequel cette dernière est représentée sur le réseau, une simple application du principe fondamental de la dynamique est effectuée :

$$m\mathbf{a}_p = \sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{Ar} - \mathbf{F}_g - \mathbf{F}_f \quad (4.6)$$

$$J_G\dot{\omega}_p = \sum M_G(\mathbf{F}) \quad (4.7)$$

où l'accélération  $\mathbf{a}_p$  de l'objet est dépendante de la poussée d'Archimède  $\mathbf{F}_{Ar} = \rho_p V_p \mathbf{g}$ , de la gravité  $\mathbf{F}_g = \rho_f V_p \mathbf{g}$ , le tout équilibré par les frottements visqueux  $\mathbf{F}_f$  et en fonction de la masse  $m = \rho_p V_p$  de la particule en déplacement. L'accélération angulaire  $\dot{\omega}_p$  dépend elle de la résultante du moment des forces appliquées à la particule  $M_G(\mathbf{F})$  et du moment d'inertie de la particule  $J_G$ , le tout appliqué à son centre. Ces différentes forces s'appliquent à la sphère de diamètre  $L_c = D$  dont le disque visible sur le domaine représente une section. C'est à cette dernière que le volume  $V_p$  se réfère. Les densités  $\rho_f$  et  $\rho_p$  caractérisent respectivement la densité massique du fluide et de la particule.

Pour une cohérence des grandeurs utilisées et de la méthode, les paramètres de

l'équation (4.6) sont tous adimensionalisés en unités de réseau (section 3.1.1) :

$$\bar{m} \bar{\mathbf{a}}_p = \bar{\rho}_p \bar{V}_p \bar{\mathbf{g}} - \bar{\rho}_f \bar{V}_p \bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{F}}_f \quad (4.8)$$

$$\bar{J}_G \dot{\bar{\omega}}_p = \sum \bar{M}_G(\bar{\mathbf{F}}) \quad (4.9)$$

Avec cette nouvelle formulation, les efforts visqueux  $\bar{\mathbf{F}}_f$  correspondent au efforts évalués par la méthode présentée section 3.3.3.

Entre deux pas de temps le déplacement de la particule est alors déduit de l'accélération  $\bar{\mathbf{a}}_p$  ainsi obtenue, la rotation de la particule sur elle déduite de  $\dot{\bar{\omega}}_p$ .

Maintenant que nous avons évoqué comment déterminer le déplacement de la particule, nous allons voir comment ce dernier s'effectue. Comme nous l'avons mentionné, la particule est définie sur un raffinement, le déplacement de cette dernière à partir d'une position à  $\bar{t}$  s'effectue donc en deux étapes : un déplacement sur le raffinement, puis pour que le raffinement puisse suivre la bulle, un déplacement du raffinement sur le réseau grossier.

- **Déplacement sur le raffinement** : Entre chaque pas de temps de simulations, soit entre chaque étape de collision propagation, le déplacement  $\Delta \mathbf{x}_p$  de la particule sur le réseau fin est évalué. Par la méthode de prise en compte des conditions frontières curvilignes (section 3.3.1), nous pouvons définir précisément à chaque pas de temps la position exacte de l'obstacle par rapport aux noeuds fluides alentours. La position de la particule est donc évaluée à chaque pas de temps en déplaçant son centre  $\mathbf{X}_G(\bar{t} + 1) = \mathbf{X}_G(\bar{t}) + \Delta \mathbf{x}_p$ , modifiant ainsi la prise en compte des conditions frontières courbes. Il arrive que lors de ce déplacement certains noeuds fluides soient recouverts et deviennent solides, inversement certains noeuds solides deviennent fluides. Dans le premier cas les distributions associées au noeud recouvert sont tout simplement écrasées. Pour les noeuds découverts,

les distributions manquantes sont elles déterminées par imposition des distributions à l'équilibre associées en utilisant une vitesse sur le noeud ainsi qu'une densité interpolée à partir des noeuds fluides environnants. Cette méthode de déplacement est relativement simpliste, elle peut être une source d'erreur ou de perturbations du fait de l'importance des interpolations, le choix des paramètres de simulation aura une influence importante sur ce traitement.

- **Déplacement du raffinement** : Une fois le déplacement de la particule appliqué sur le réseau raffiné, pour que la précision de la définition de la particule soit maintenue il est nécessaire que le raffinement se déplace à son tour pour suivre l'objet libre sur le domaine. Ainsi lorsque le déplacement sur le réseau fin correspond à  $m$  cellules,  $m$  étant le taux de raffinement, ceci correspond à un déplacement de une cellule sur le réseau grossier. Le raffinement est alors déplacé de cette unité de réseau selon la méthode présentée section 3.3.2.2. Au cour de cette étape la particule sera elle recentrée sur le raffinement.

Une fois ces différents déplacements effectués l'ensemble du domaine est défini au temps  $\bar{t} + 1$ , champs des distributions et position de la particule. La simulation peut alors se poursuivre à partir de ce nouveau domaine.

Maintenant que la méthode de déplacement de l'objet sur un réseau a été précisée nous allons expliciter le domaine de simulation ainsi que les paramètres des différentes simulations effectuées.

#### 4.4.3 Résolution par la méthode de Boltzmann sur réseau

Ce type de simulation d'un objet en déplacement libre sur un réseau a pour objectif d'évaluer le comportement d'une particule solide remontant librement dans une colonne de fluide. Nous avons vu que pour une économie de temps de calcul, le domaine est fortement réduit et l'objet est libéré dans un écoulement initialement

développé en fonction d'une vitesse en entrée légèrement inférieure et en sens opposé à la vitesse terminale que devrait atteindre la particule.

L'évaluation de la vitesse terminale est un élément clef de la simulation, elle va permettre de définir le domaine de simulation de façon optimale et constituera une valeur de référence importante pour la comparaison des résultats. Dans notre étude nous avons utilisé en guise de référence un ensemble de corrélations permettant d'évaluer cette vitesse terminale de la particule, celles-ci ont été proposées suite à l'expérimentation par Wallis <sup>[25]</sup> en 1974. Ces corrélations permettent d'évaluer la vitesse terminale de remontée d'une sphère solide en fonction de nombres adimensionnels. Le rayon adimensionnel :

$$r^* = \frac{D}{2} \left( \frac{\rho_f g (\rho_f - \rho_p)}{\mu^2} \right)^{1/3} \quad (4.10)$$

avec  $D$  le diamètre de la particule,  $g$  la valeur de l'accélération de la pesanteur,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide environnant et les densité du fluide  $\rho_f$  et de la particule  $\rho_p$ .

Avec les mêmes variables caractérisant le fluide la vitesse adimensionnelle est :

$$u^* = U_{term} \left( \frac{\rho_f^2}{\mu g (\rho_f - \rho_p)} \right)^{1/3} \quad (4.11)$$

où  $U_{term}$  est la vitesse terminale à évaluer.

A partir de ces grandeurs différentes relations permettent de lier le rayon adimensionnel avec la vitesse et permettent donc d'évaluer la vitesse terminale de la particule

en fonction des paramètres caractéristiques du fluide :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } r^* < 1.25 \quad u^* &= \frac{2}{9} r^{*2} \\
 \text{Si } 1.5 \leq r^* < 10 \quad u^* &= 0.307 r^{*1.21} \\
 \text{Si } 10 \leq r^* < 36 \quad u^* &= 0.693 r^{*0.858}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Différentes simulations ont été conduites pour diverses caractéristiques du fluide et de la particule. La définition des paramètres sur chaque réseau suit un raisonnement similaire à ce qui a été fait pour les simulations précédentes, nous allons plus précisément détailler un cas particulier.

Pour le cas d'une particule de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$ , densité  $\rho_p = 200 \text{ kg/m}^3$ , dans un fluide de densité  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  et viscosité cinématique  $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , avec une accélération de la pesanteur de  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  le raisonnement suivi est le suivant. Tout d'abord la vitesse terminale de remonté de la particule se déduit du rayon adimensionnel obtenu pour de telles conditions (4.10),  $r^* = 3.398$ , d'après les corrélations (4.12),  $u^* = 0.307 r^{*1.21} = 1.349$ , et donc la vitesse terminale attendue est  $U_{term} = 0.0458 \text{ m/s}$ . Cette vitesse permet de définir la vitesse en entrée de la section de colonne de fluide présentée (section 4.4.1),  $\mathbf{u}_{ent} = (-0.025 \text{ m/s}, 0) = (-0.25 \text{ lu/lt})$  tel que  $|\mathbf{u}_{ent}| < U_{term}$ . La discrétisation du domaine s'effectue comme suit, le diamètre  $D$  de la particule est, par exemple, divisé sur le réseau grossier en  $\bar{D} = 10 \text{ lu}$ , ainsi  $\Delta x_g = \Delta t_g = 10^{-4}$ , le domaine global associé a été choisit de hauteur  $H = 300 \text{ lu}$  et largeur  $L = 100 \text{ lu}$ . De tous ces paramètres et avec le tableau des adimensionalisations (section 3.1.1), il est possible de déduire les caractéristiques du réseau permettant d'effectuer la simulation. Notamment de vérifier le temps de relaxation associé, dans ce cas  $\tau = 0.65$ . Le taux de raffinement  $m$  autour de la particule permet de jouer sur les paramètres de simulations en fonction des cas, nous avons alors  $\Delta x_f = \Delta t_f = 10^{-4}/m$ . Généralement plus le rapport de densité entre la particule et le fluide environnant est

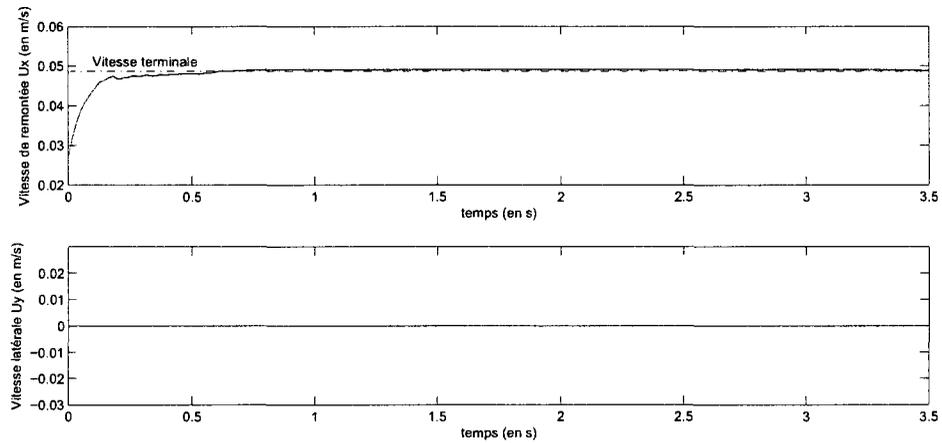


FIGURE 4.24 Variation de la vitesse verticale et latérale d’une particule lâchée dans un de fluide avec  $D = 1 \text{ mm}$ ,  $\Delta\rho = 800$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

important plus il sera nécessaire d’augmenter ce rapport de raffinement.

Un ensemble de simulations ont été effectuées pour différentes caractéristiques du fluide et de la particule, nous allons maintenant observer les résultats obtenus.

#### 4.4.4 Résultats

Les diverses simulations ont permis de comparer aux valeurs des corrélations les vitesses terminales qu’atteignent les particules lors des simulations.

Tout d’abord nous allons regarder la variation temporelle de la vitesse verticale de remonté  $u_x - u_{ent}$ , par rapport à l’état stagnant, ainsi que la vitesse latérale de ces particules  $u_y$ , le tout étant exprimé en fonction du temps de simulation. Les courbes présentées dans les figures 4.24 et 4.25, représentent deux solution particulières générant deux trajectoires différentes des particules.

Les courbes de la figure 4.24 illustrent le cas de la remontée d’une particule de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$  et densité  $\rho_p = 200 \text{ kg/m}^3$  dans un fluide de densité  $\rho_p =$

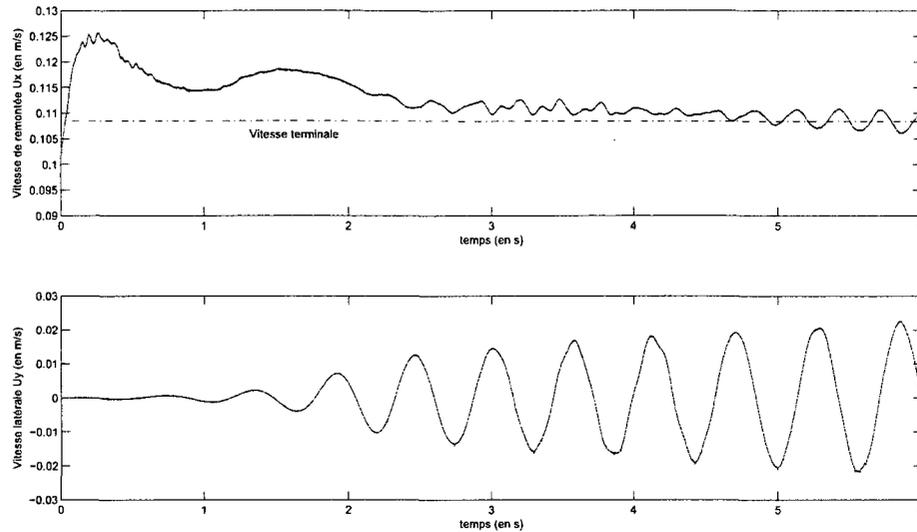


FIGURE 4.25 Variation de la vitesse verticale et latérale d'une particule lâchée dans un de fluide avec  $D = 1 \text{ mm}$ ,  $\Delta\rho = 800$ ,  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$1000 \text{ kg/m}^3$  et viscosité cinématique  $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Ici la particule est accélérée par poussée d'Archimède jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse limite, la vitesse terminale de remontée  $U_{term}$ . Le résultat ici observé est  $U_{term} = 0.049 \text{ m/s}$ , la vitesse prédite par les corrélations de Wallis étant  $U_{term}^{ref} = 0.046 \text{ m/s}$ . Dans ce premier cas la composante latérale de la vitesse de remontée est nulle, la particule remonte selon un droite.

Les courbes de la figure 4.25 illustrent le cas de la remontée d'une particule de diamètre  $D = 1 \text{ mm}$  et densité  $\rho_p = 200 \text{ kg/m}^3$  dans un fluide de densité  $\rho_p = 1000 \text{ kg/m}^3$  et viscosité cinématique  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Avec ces paramètres la particule commence aussi à accélérer du fait des forces gravitationnelles puis après avoir atteint un maximum sa vitesse de remontée diminue en même temps que la particule se met à osciller latéralement. Au bout d'un certain temps de simulation ces oscillations deviennent régulières, la particule remonte à une vitesse moyenne suivant une trajectoire en zigzag. Dans ce second cas la vitesse moyenne à laquelle la

remontée s'effectue correspond à la vitesse terminale de remontée  $U_{term} = 0.108 m/s$  pour ce cas. La valeur proposée par les corrélations est  $U_{term}^{ref} = 0.098 m/s$ .

Les deux cas qui viennent d'être détaillés illustrent deux situations typiques des différentes simulations effectuées et des types de solutions observées. Nous remarquerons que pour ces deux cas les vitesses terminales évaluées sont raisonnablement en bon accord avec les valeurs proposées par les corrélations expérimentales de Wallis [25]. Pour compléter l'observation des résultats proposés par notre programme, l'ensemble des vitesses terminales évaluées et comparées aux valeurs suggérées par les corrélations de Wallis sont résumées sur la figure 4.26.

Pour ces simulations les résultats sont en bon accord avec les valeurs de référence, même quand les particules suivent une trajectoire en zigzag, comme nous pouvons le remarquer dans le domaine supérieur de chaque graphique. Il semble cependant que pour les cas où les particules ne suivent plus une trajectoire rectiligne un écart se creuse entre résultats simulés et résultats de référence. Cet écart peut provenir d'imprécisions de notre algorithme à des vitesses élevées, du domaine utilisé, ou bien de la différence entre les simulations en deux dimensions et le phénomène réel où la remontée de la particule ne suit pas une trajectoire en zigzag mais en spirale.

Nous soulignerons que ces résultats concernent des simulations pour de faibles rapports de densités, pour de petites particules. Il s'avère que plus ce rapport augmente ou plus la particule est grosse, plus la vitesse terminale atteinte est élevée ou le cas échéant plus l'amplitude des oscillations de la particule est grande. Pour des rapports de densités élevés ou pour de grosses particules la simulation avec notre programme est sujette à l'instabilité. Un moyen de faire face à ce problème dans une certaine mesure est d'augmenter le raffinement autour du cylindre. La simulation stable avec le plus grand rapport de densité que nous avons réussi à atteindre est une particule de diamètre  $D = 1 mm$ , de densité  $\rho_p = 100 kg/m^3$

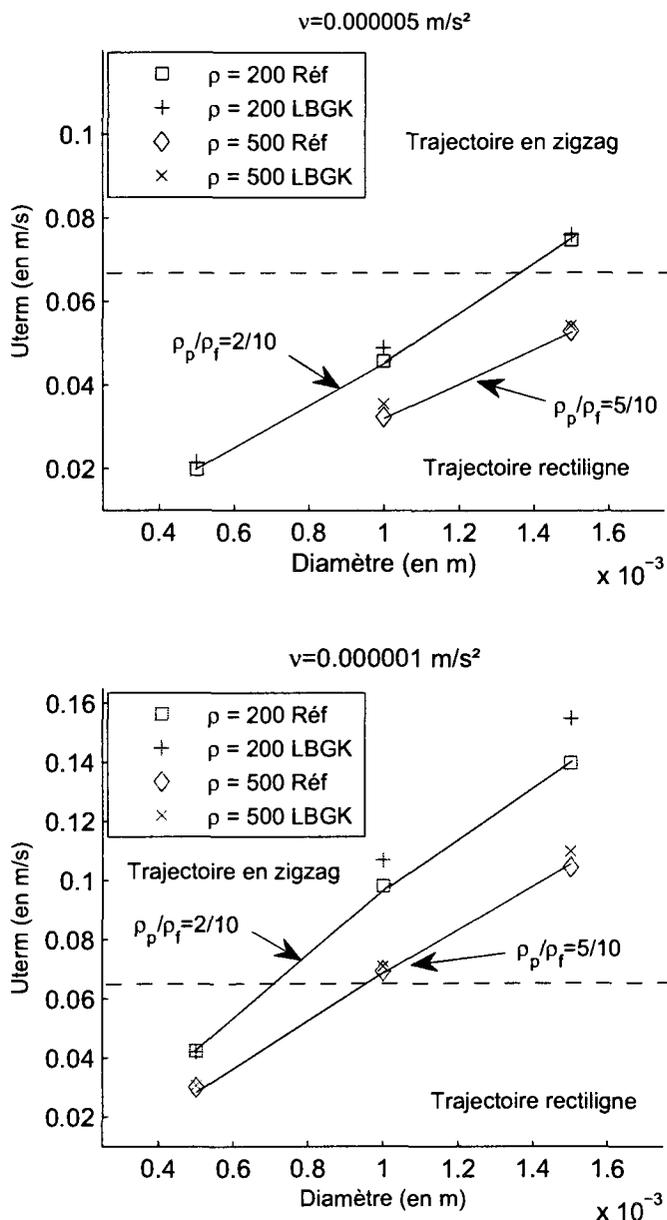


FIGURE 4.26 Comparaisons des vitesses terminales de remontée d'une particule pour deux viscosités,  $\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , et deux rapports de densité différents,  $\rho_p = 500 \text{ kg}/\text{m}^3$  et  $\rho_p = 200 \text{ kg}/\text{m}^3$  dans un fluide de densité  $\rho_f = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

dans un fluide de densité  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  pour une viscosité cinématique de  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Pour ce dernier cas, afin d'illustrer la trajectoire en zigzag de certaines simulations, nous avons effectué un parallèle avec des données expérimentales. La figure 4.27 compare les trajectoires obtenus par simulation comparées à un résultat d'expérience pour le cas de la remontée d'une bulle d'air <sup>[1; 2]</sup>. Pour la simulation numérique la vitesse terminale évaluée est de  $U_{term} = 0.112 \text{ m/s}$ , la vitesse de référence proposée par les corrélations de Wallis étant  $U_{term}^{ref} = 0.1062 \text{ m/s}$ . Les données expérimentales concernent une bulle de  $D = 1.34 \text{ mm}$  de vitesse terminale  $U_{term} = 0.352 \text{ m/s}$  remontant dans une colonne d'eau stagnante à  $T = 28.5^\circ\text{C}$ .

Nous observons qu'en régime établi aussi bien la particule que la bulle suivent une trajectoire suivant des oscillations régulières, où plus précisément une remontée en spirale pour le cas expérimental avec des longueurs d'ondes semblables. Cette comparaison illustre la capacité de notre modèle à représenter ce phénomène malgré sa simplicité algorithmique. Cependant malgré des longueurs d'onde similaires  $\lambda = 58.7 \text{ mm}$  simulé et environ  $\lambda = 62.5 \text{ mm}$  expérimentale, les deux cas comparés diffèrent fortement, notamment pour l'amplitude  $A$ . La simulation propose  $A = 0.35 \text{ mm}$  contre des oscillations de l'ordre de  $A = 1 \text{ cm}$  pour l'expérience. Ces larges différences peuvent s'expliquer par la très grande différence entre les simulations : différence des conditions expérimentales ; différence de rapport de densité ; simulation bidimensionnelle contre un problème en trois dimensions ; glissement à la paroi d'une bulle de d'air ; forme ellipsoïdale d'une bulle d'air de  $D = 1.34 \text{ mm}$  (comme illustré figure 4.28).

Pour cette dernière catégorie de simulations notre programme a présenté une bonne évaluation de la vitesse de remontée d'une particule. L'évaluation des trajectoires en zigzag sont elles moins certaines, étant donné le manque de données de référence

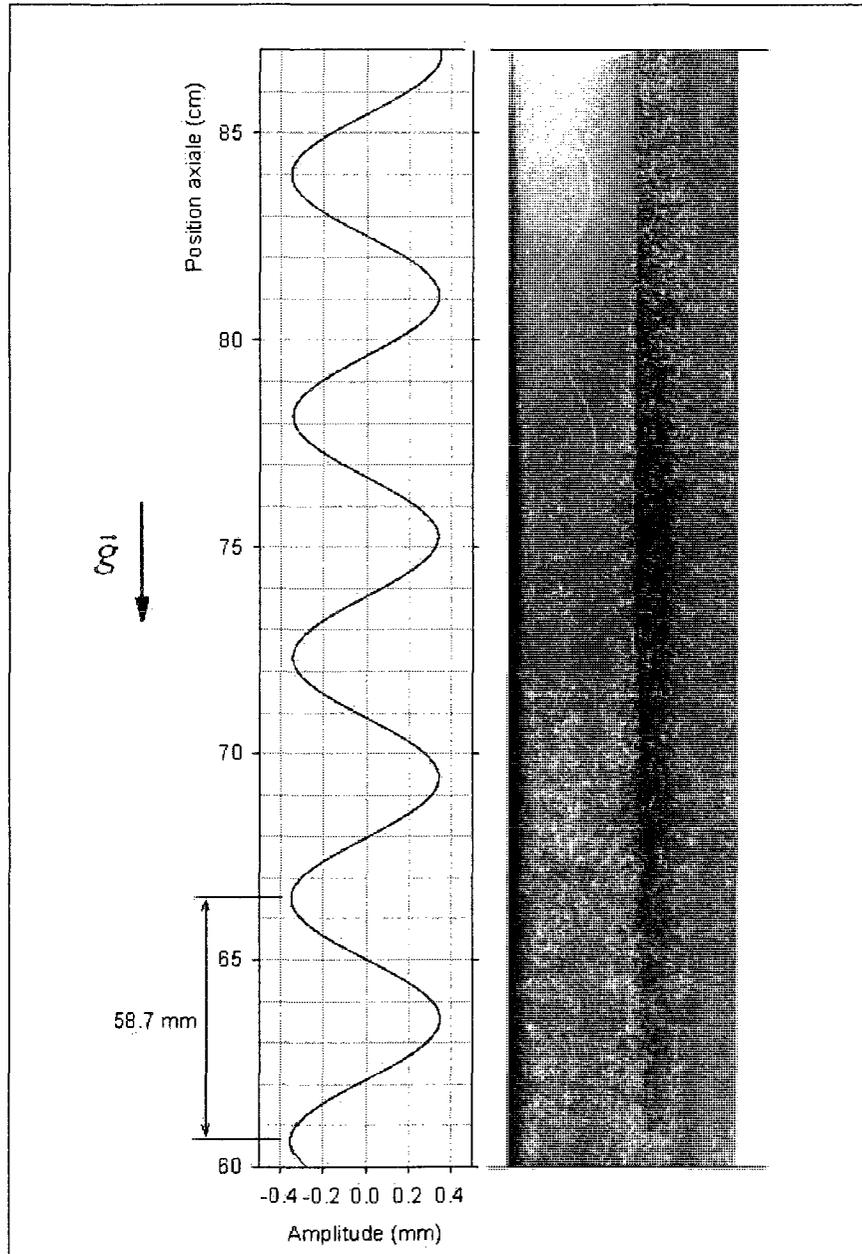


FIGURE 4.27 Parallèle entre la remontée en zigzag de la particule et la remontée d'une bulle d'air.

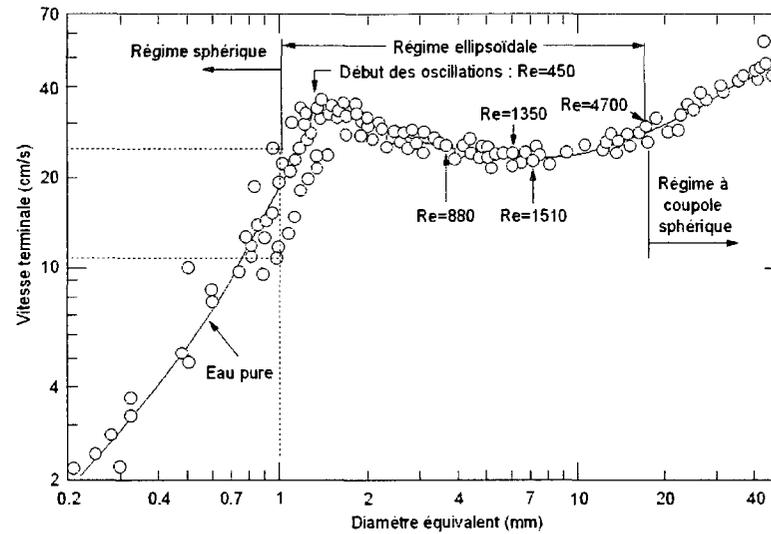


FIGURE 4.28 Vitesse terminale, forme, et trajectoire d'une bulle en fonction de son diamètre [7].

traitant ce problème. Avec une améliorations des performances du programme, des simulations en trois dimensions ou l'utilisation d'une approche diphasique du problème, la simulation plus précise du comportement de bulles ou d'écoulements avec de multiples particules est envisageable.

## CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de développer un algorithme de simulation en dynamique des fluides basé sur la méthode mésoscopique de Boltzmann sur réseau. L'algorithme de base, couplé à différentes méthodes améliorant les performances, devait être testé afin de vérifier la capacité de la méthode à effectuer des simulations d'écoulements.

Afin de palier à certaines limitations de la méthode de Boltzmann sur réseau, notamment son fonctionnement sur des réseaux Cartésiens, ou encore son instabilité pour des écoulements caractérisés par de faibles temps de relaxation, différentes techniques visant à améliorer la précision des simulations autour de profils aérodynamiques ont été présentées et programmées.

Plusieurs simulations ont alors été conduites avec l'algorithme ainsi obtenu. Les premières représentaient des cas test classiques simples : écoulement dans une cavité entraînée, simulation autour d'un cylindre dans un canal. Ces essais ont permis de vérifier les bonnes propriétés de la méthode pour la simulation d'écoulements à faible nombre de Reynolds, aussi bien en régime stationnaire que transitoire. La méthode de Boltzmann sur réseau ainsi appliquée a présentée des résultats avec une bonne évaluation spatiale et temporelle des écoulements. De ces études quelques remarques générales sur la méthode en sont ressorties : la forte dépendance de la méthode à la définition du temps caractéristique de relaxation et dans le même esprit la dégradation des solutions avec l'augmentation du nombre de Reynolds ; l'influence importante du choix des conditions frontières sur la stabilité et la précision des résultats ; la fiabilité de l'utilisation de réseaux multiples imbriqués pour le raffinement de certaines régions du domaine fluide.

Après les premiers tests correspondant favorablement avec les valeurs de références,

l'algorithme développé a été utilisé pour la simulation de cas plus complexes afin de mettre à profit les améliorations de la méthode de base, à savoir l'utilisation de raffinements et la prise en compte des parois curvilignes. La première application dans cette optique fut la simulation d'écoulements autour de profils d'ailes NACA0012, puis NACA63-415 propres et déformés par formation de givre au bord d'attaque, le tout à différents angles d'attaque. Les résultats ainsi obtenus furent comparés à d'autres méthodes basées sur le modèle macroscopique de Navier-Stokes ou de Boltzmann sur réseau. Notre programme a présenté une bonne correspondance des résultats pour les simulations notamment en régimes stationnaire, à faible angle d'attaque. L'évaluation des coefficients aérodynamiques de traînée et portance ainsi que la prise en compte des petites déformations induites par la formation de givre au bord d'attaque s'accordaient favorablement avec les données de comparaison, confirmant ainsi la fiabilité de la méthode et ce malgré une approche très différentes dans la résolution de tels problèmes. En revanche pour les simulations engendrant un écoulement instationnaire, à savoir pour de forts angles d'attaque du profil, bien que similaires, les différentes solutions obtenues présentaient des écarts.

Le dernier problème simulé avait pour but de souligner la forte flexibilité de la méthode avec l'observation de la remontée libre dans un fluide d'une particule entraînée par la poussée d'Archimède. Ce type de simulation malgré sa complexité physique est relativement simple à implémenter par la méthode de Boltzmann sur réseau grâce à la manière de traiter les conditions frontières et la flexibilité des réseaux. Ce type de simulation a permis d'un point de vue numérique de vérifier la capacité du traitement de déplacement d'objets sur un réseau de Boltzmann, et d'un point de vue physique, d'observer les trajectoires suivies par des particules de diverses densités remontant librement dans un fluide. Les résultats obtenus furent en accord avec les quelques données de référence disponibles, notamment pour l'observation de la vitesse terminale de remontée. Cependant, concernant les

trajectoires suivies des études supplémentaires seraient envisageables, avec pour objectif final l'observation de la remontée d'une bulle de gaz dans une colonne de fluide.

La méthode de Boltzmann sur réseau ainsi implémentée pour effectuer diverses simulations en dynamique des fluides a globalement donné des résultats encourageants. Maintenant qu'elle est la place et le rôle de cette méthode par rapport aux méthodes de simulation numérique ? Comme nous l'avons vu la simulation d'écoulements à faible nombre de Reynolds, aussi bien stationnaires qu'instationnaires, semble être relativement bien évaluée par la méthode. Ainsi en mettant à profit les atouts de la définition mésoscopique, à savoir une relative simplicité de fonctionnement, un traitement simple des conditions frontières solides, une bonne flexibilité pour la prise en compte de déplacement d'objets, la méthode peut être avantageuse pour les écoulements poreux, diphasiques, ou dans des géométries complexes. D'autre part, nous n'en avons pas parlé dans ce mémoire, mais l'indépendance des cellules les unes par rapport aux autres et la communication simple entre ces dernières confère à la méthode de Boltzmann une forte capacité à être utilisée en calcul parallèle, les performances de la méthode en seraient ainsi fortement améliorées. Pour ce qui est des inconvénients de la méthode, principalement sa faiblesse pour l'évaluation des écoulements faiblement visqueux, la simulation d'écoulements à haut nombre de Reynolds et turbulents est encore difficile, quelques techniques visant à corriger ces faiblesses existent mais un effort doit encore être fourni pour résoudre ce type de problème. Enfin un dernier domaine d'application où la méthode ne peut tout simplement pas s'appliquer est la simulation d'écoulements compressibles. De part sa définition la méthode n'est tout simplement pas apte à évaluer de tels écoulements.

En conclusion la méthode de Boltzmann sur réseau peut donc représenter une alternative aux méthodes déjà éprouvées de simulation en dynamique des fluides

basées sur les équations de Navier-Stokes, elle peut même s'avérer avantageuse pour certains cas, mais un effort important reste encore à fournir pour augmenter son champ d'application et sa compétitivité vis à vis des techniques existantes.

## RÉFÉRENCES

- [1] Aybers, N. M., et Tapucu, A. (1969). The motion of gas bubbles rising through stagnant liquid. *Wärme-Stoffübertrag*, **2**, 118-128.
- [2] Aybers, N. M., et Tapucu, A. (1969). Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid. *Wärme-Stoffübertrag*, **2**, 171-177.
- [3] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., et Krook, M. (1954). A model for collision processes in gases. I. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, **94**(3), 511-525.
- [4] Buick, J. (1997). *Lattice Boltzmann methods in interfacial wave modelling*. PhD thesis, The University of Edinburgh.
- [5] Chapman, S., et Cowling T. G. (1970). *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University Press.
- [6] Chen, S., Chen, H., Martinez, D., et Matthaeus, W. (1991). Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics. *Physical Review Letters*, **67**(27), 3776-3779.
- [7] Clift, R., Grace, J. R., et Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, New York.
- [8] D'Humieres, D., Lallemand, P., et Frisch, U. (1986). Lattice gas models for 3D hydrodynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, **2**(4), 291-297.
- [9] Dong, Y. H., Sagaut, P., et Marie, S. (2008). Inertial consistent subgrid model for large-eddy simulation based on the lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, **20**(3), 035104-1-12.
- [10] Dupuis, A. et Chopard, B. (2003). Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm. *Physical Review E*, **67**(6), 066707.

- [11] Erturk, E., Corke, T. C., et Gökçöl, C. (2005). Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **48**, 747–774.
- [12] Escobar, R. A., Ghai, S. S., Jhon, M. S., et Amon, C. H. (2006). Multi-length and time scale thermal transport using the lattice boltzmann method with application to electronics cooling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **49**(1-2), 97–107.
- [13] Filippova, O. et Hänel, D. (1998). Grid refinement for lattice-BGK models. *Journal of Computational Physics*, **147**(1), 219–228.
- [14] Frisch, U., Hasslacher, B., et Pomeau, Y. (1986). Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Physical Review Letters*, **56**(14), 1505–1508.
- [15] Ghia, U., Ghia, K. N., et Shin, C. T. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, **48**(3), 387–411.
- [16] Guo, Z., Zheng, C., et Shi, B. (2002). An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, **14**(6), 2007–2010.
- [17] Hardy, J., de Pazzis, O., et Pomeau, Y. (1976). Molecular dynamics of a classical lattice gas : Transport properties and time correlation functions. *Physical Review A*, **13**(5), 1949–1961.
- [18] Hardy, J., Pomeau, Y., et de Pazzis, O. (1973). Time evolution of a two-dimensional model system. I. invariant states and time correlation functions. *Journal of Mathematical Physics*, **14**(12), 1746–1759.
- [19] Higuera, F. J. et Jimenez, J. (1989). Boltzmann approach to lattice gas simulations. *EPL (Europhysics Letters)*, **9**(7), 663–668.
- [20] Imamura, T., Nakamura, T., Suzuki, K., et Yoshida, M. (2005). Flow simulation around an airfoil by lattice Boltzmann method on generalized coordinates. *AIAA Journal*, **43**, 1968–1973.

- [21] Inamuro, T., Yoshino, M., et Ogino, F. (1995). A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Physics of fluids*, **7**(12), 2928–2930 .
- [22] Kao, P. H., et Yang, R. J. (2008). An investigation into curved and moving boundary treatments in the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, **227**(11), 5671–5690.
- [23] Kim, D., Kim, H. M., Jhon, M. S., Vinay III, S. J., et Buchanan, J. (2008). A characteristic non-reflecting boundary treatment in lattice Boltzmann method. *Chinese Physics Letters*, **25**(6), 1964–1967.
- [24] Koelman, J. M. V. A. (1991). A simple lattice Boltzmann scheme for Navier-Stokes fluid flow. *EPL (Europhysics Letters)*, **15**(6), 603–607.
- [25] Kolev, N. I. (2007). *Multiphase Flow Dynamics 2. Thermal and Mechanical Interactions*. Springer Berlin Heidelberg.
- [26] Latt, J., Chopard, B., Malaspinas, O., Deville, M. O., et Michler, A. (2008). Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, **77**, 056703.
- [27] Lin, C. L. et Lai, Y. G. (2000). Lattice Boltzmann method on composite grids *Physical Review E*, **62**, 2219–2225.
- [28] Mazzocco, F., Arrighetti, C., Bella, G., Spagnoli, L., et Succi, S. (2000). Multiscale lattice Boltzmann schemes. *International Journal of Modern Physics C*, **11**, 233–245.
- [29] McNamara, G. R., et Zanetti, G. (1988). Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physic Review Letters*, **61**(20), 2332–2335.
- [30] Mei, R., Luo, L. S., et Shyy, W. (1999). An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, **155**, 307–330.
- [31] Mei, R., Shyy, W., Yu, D., et Luo, L. S. (2002). Force evaluation in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, **65**, 041203.

- [32] Neumann, J. V. (1966). *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Champaign, IL, USA.
- [33] Ngô, C., et Ngô, H. (2001). *Physique statistique, introduction*. Dunod, 2ème édition.
- [34] Qian, Y. H., D’Humières, D., et Lallemand, P. (1992). Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *EPL (Europhysics Letters)*, **17**(6), 479–484.
- [35] Rohde, M., Kandhai, D., Derksen, J. J., et Van den Akker, H. E. A. (2006). A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice Boltzmann schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **51**, 439–468.
- [36] Schäfer, M. , et Turek, S. (1996). Benchmark computations of laminar flow around cylinder. *Notes in Numerical Fluid Mechanics*, **52**, 547–566.
- [37] Succi, S. (2001). *The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press.
- [38] Sukop, M. C., et Thorne, D. J. (2005). *Lattice Boltzmann modeling : An introduction for geoscientists and engineers*. Springer, Berlin.
- [39] Thürey, N. (2003). A single-phase free-surface lattice boltzmann method. Master’s thesis, IMMD10 University of Erlangen-Nuremberg.
- [40] Wolf-Gladrow, D. A. (2000). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models : an introduction*. Springer, Berlin.
- [41] Yu, D., Mei, R., et Shyy, W. (2002). A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **39**, 99–120.
- [42] Yu, H., Girimaji, S. S., et Luo, L. S. (2005). DNS and LES of decaying isotropic turbulence with and without frame rotation using lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, **209**(2), 599–616.
- [43] Zou, Q., et He, X. (1997). On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*, **9**, 1591–1598.

[44] Zuse, K. (1970). *Calculating space*. MIT Project MAC.

## ANNEXE I

DONNÉES COMPLÉMENTAIRES DU CAS DE LA CAVITÉ  
ENTRAÎNÉE

TABLE I.1 Différents paramètres des simulations effectuées pour le cas de la cavité entraînée de 20cm × 20cm.

	Re = 100	Re=1000	Re=2500
Maillage 64 × 64 noeuds	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.692$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.5192$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.50768$
Maillage 64 × 64 noeuds	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.596$	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.5096$	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.50384$
Maillage 128 × 128 noeuds	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.884$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.5384$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.51536$
Maillage 128 × 128 noeuds	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.692$	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.5192$	$\bar{u}_T = u_T = 0.05 \text{ m/s}$ $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta t = 1.5625 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ $\tau = 0.50768$
Maillage 256 × 256 noeuds	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ $\Delta t = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ $\tau = 1.268$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ $\Delta t = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ $\tau = 0.5768$	$\bar{u}_T = u_T = 0.1 \text{ m/s}$ $\nu = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ $\Delta x = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ $\Delta t = 7.8125 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ $\tau = 0.53072$

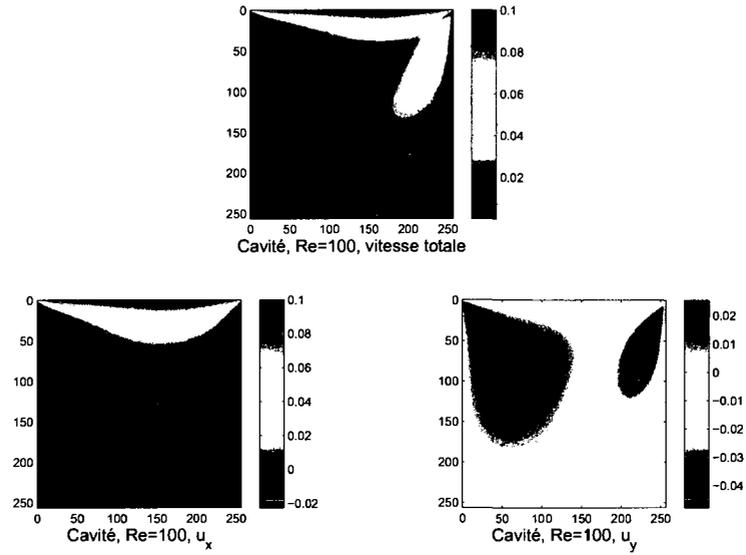


FIGURE I.1 Champs de vitesses pour la cavité entraînée à  $Re=100$ ,  $\bar{u}_T = 0.1$ .

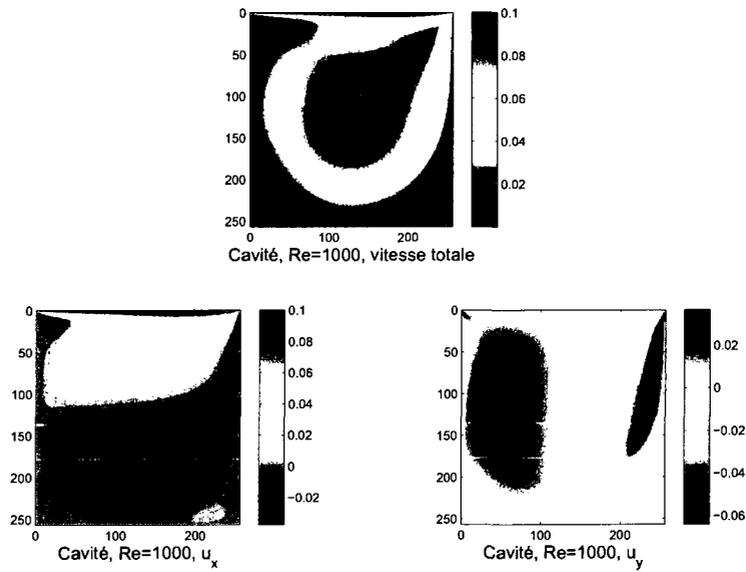


FIGURE I.2 Champs de vitesses pour la cavité entraînée à  $Re=1000$ ,  $\bar{u}_T = 0.1$ .

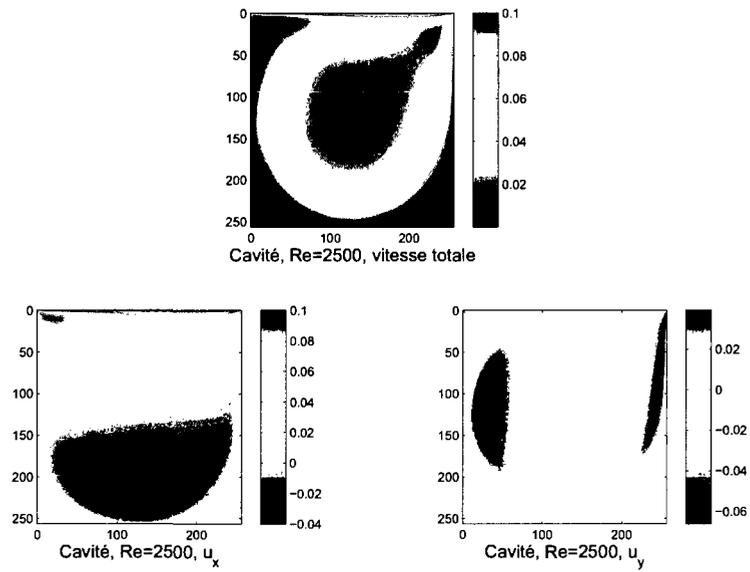


FIGURE I.3 Champs de vitesses pour la cavité entraînée à  $Re=2500$ ,  $\bar{u}_T = 0.1$ .

## ANNEXE II

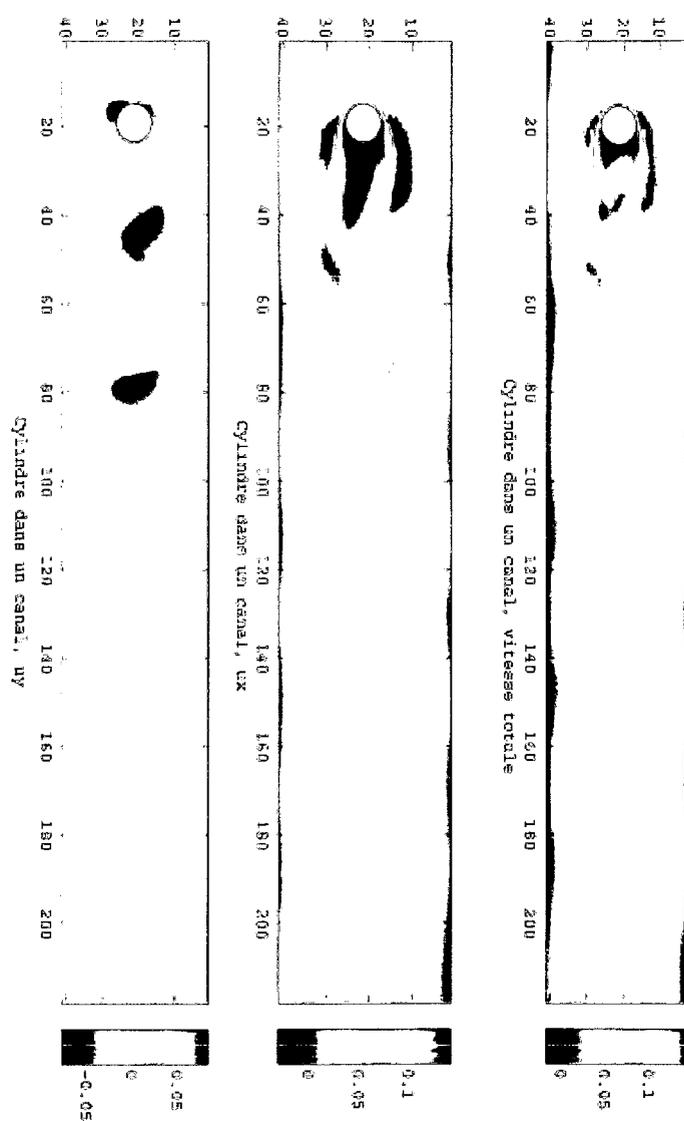
DONNÉES COMPLÉMENTAIRES POUR LE CAS DU CYLINDRE  
DANS UN CANAL

FIGURE II.1 Champs de vitesses pour la formation de tourbillons en aval d'un cylindre dans un canal à  $Re=100$ ,  $\bar{v}_{ent} = \frac{1}{3} 0.1$ .

## ANNEXE III

**DONNÉES COMPLÉMENTAIRES POUR LE CAS  
D'ÉCOULEMENTS AUTOUR DE PROFILS D'AILES NACA**

TABLE III.1 Différentes caractéristiques du domaine de simulation pour l'étude de l'écoulement autour du profil d'aile NACA0012.

Angle d'attaque	0°
NACA 0012	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.0785 m$ $L = 0.471 m$ $H = 0.314 m$ $\Delta x = 1.57 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 1.57 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 15.7 \cdot 10^{-6} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 300$ $\bar{H} = 200$ $\bar{l}_1 = 150$ $\bar{h}_1 = 100$ $\tau_{0,1,2} = 0.53, 0.56, 0.62$

TABLE III.2 Différentes caractéristiques des domaines de simulation pour l'étude de l'écoulement autour du profil d'aile NACA63-415.

Angle d'attaque	0°	8°	28°
NACA 63-415 Propre	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.6 m$ $L = 3.6 m$ $H = 4.8 m$ $\Delta x = 12 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 12 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 12.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 300$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 150$ $\bar{h}_1 = 200$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.6 m$ $L = 3.6 m$ $H = 4.8 m$ $\Delta x = 12 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 12 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 12.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 300$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 140$ $\bar{h}_1 = 200$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.6 m$ $L = 7.2 m$ $H = 4.8 m$ $\Delta x = 12 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 12 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 12.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 600$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 180$ $\bar{h}_1 = 180$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$
NACA 63-415 givré	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.2 m$ $L = 1.2 m$ $H = 1.6 m$ $\Delta x = 4 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 4 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 4.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 300$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 150$ $\bar{h}_1 = 200$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.2 m$ $L = 1.2 m$ $H = 1.6 m$ $\Delta x = 4 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 4 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 4.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 300$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 150$ $\bar{h}_1 = 200$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$	$nRaf = 2$ $m_1 = m_2 = 2$ $L_c = 0.2 m$ $L = 2.4 m$ $H = 1.6 m$ $\Delta x = 4 \cdot 10^{-3} m$ $\Delta t = 4 \cdot 10^{-3} s$ $\nu = 4.0 \cdot 10^{-5} m^2/s$ $\bar{L}_c = 50$ $\bar{L} = 600$ $\bar{H} = 400$ $\bar{l}_1 = 180$ $\bar{h}_1 = 200$ $\tau_{0,1,2} = 0.53,$ $0.56, 0.62$

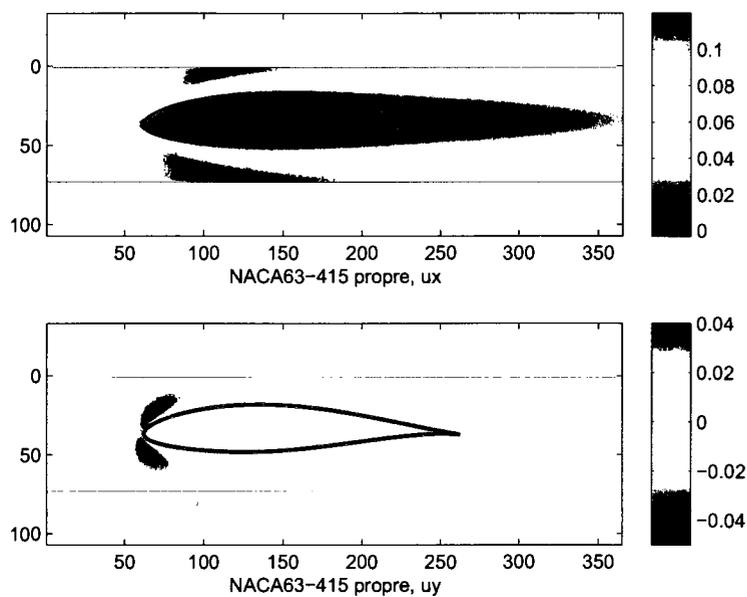


FIGURE III.1 Composantes horizontale et verticale de vitesse autour du profil NACA63-415 propre à  $Re=500$ ,  $\alpha=0^\circ$ .

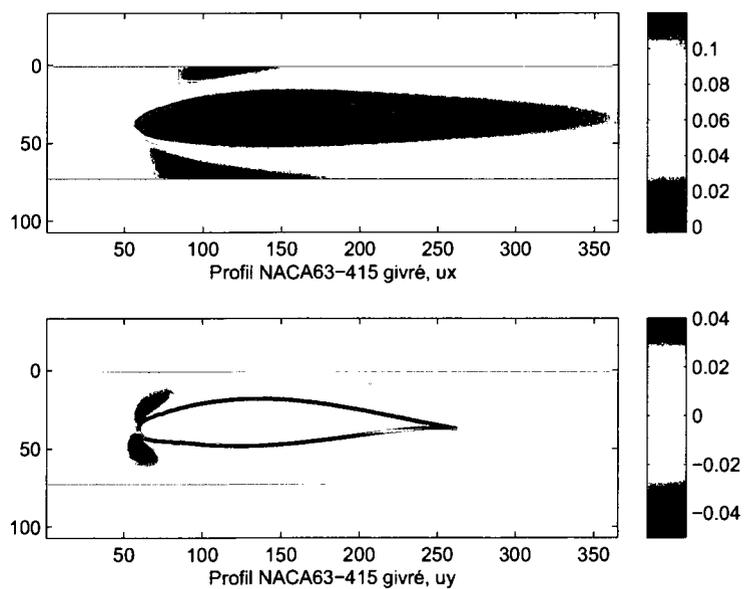


FIGURE III.2 Composantes horizontale et verticale de vitesse autour du profil NACA63-415 givré à  $Re=500$ ,  $\alpha=0^\circ$ .