Tulon ja osamäärän derivaatta lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Petteri Niemelä
2497187
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Tavoitteet **4**

2.1 Opetussuunnitelma 4

2.2 Habits of Mind 6

2.3 Tehtävätyypit 7

3 Oppikirjan perustelu **8**

3.1 Tulon derivaatta 8

3.2 Osamäärän derivaatta 10

3.3 Rationaalifunktiot 11

Lähdeluettelo **13**

A Tulon derivaatta **15**

A.1 Harjoitustehtävät: 18

B Osamäärän derivaatta **19**

B.1 Harjoitustehtävät: 23

C Rationaalifunktiot ja sovelluksia **24**

C.1 Harjoitustehtävät: 28

D Opettajan opas **29**

D.1 Ajankäyttö 29

D.2 Tulon derivaatta 29

D.3 Osamäärän derivaatta 30

D.4 Rationaalifunktiot 32

E Harjoitustehtävien vastaukset **34**

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston oppikirjaprojektia, jossa luodaan uutta opetusmateriaalia vapaaseen käyttöön lukion pitkän matematiikan kurssille MAA6 Derivaatta. Oppimateriaali koostuu kokonaisuudessaan seitsemästä osasta, joista tämä on kuudes. Uudet lukion opetussuunnitelman perusteet tulevat voimaan elokuussa 2021 [11], mikä johtaa muutoksiin myös oppimateriaaleissa. Kun tätä teosta aloitetaan kirjoittamaan, eivät suurimmat kotimaiset oppimateriaalin tuottajat ole vielä julkaisseet uuden opetussuunnitelman mukaisia oppikirjoja, joten tähän työhön päästään lähtemään niin sanotusti puhtaalta pöydältä.

Merkittäviä suuntaviivoja oppikirjaan antaa oppikirjaprojektin alussa yhdessä määrittelemämme tavoitteet koskien kahta asiaa. Ensiksi Habits of Mind artikkelin [3] pohjalta olemme päättäneet millaisia työskentelymetodeja tuemme. Toisaalta pyrimme käyttämään läpi oppikirjan yhtäläisiä tehtävätyyppejä, jotka olemme valinneet Malcolm Swanin artikkelin [13] pohjalta. Näiden yhteisten valintojen uskomme tekevän työstämme jokseenkin yhtenäisen oppimateriaalin, vaikkakin jokaisen seitsemän eri kirjoittajan kädenjälki tulee varmasti lopputuloksessa näkymään.

Yhteisten tavoitteiden, sekä opetussuunnitelman asettamien tavoitteiden lisäksi vaikutteita oppikirjaan on haettu ajankohtaisista didaktisista tutkimuksista, jotka antavat tutkimukseen nojaavaa pohjaa valinnoille, joita oppimateriaalia luotaessa on tehty.

Oppimateriaalin kappaleet painottavat opiskelijan pohdintaa ja päättelyä perinteisten laskurutiinia kehittävien esimerkkien ja harjoitustehtävien ylitse. Toki perinteisiä derivoimistehtäviäkin on erityisesti kappaleiden harjoitustehtävien yhteydessä.

2 Tavoitteet

Oppikirjalle on luonnollisia tavoitteita, jotka tulisi täyttyä opetussuunnitelman pohjalta. Tässä oppikirjaprojektissa on myös valittu yhteisiä tavoitteita, joita pyrimme toteuttamaan niin oppimistekniikoiden kuin tehtävätyyppien osalta.

Yhteisten tavoitteiden lisäksi myöhemmin esiteltävää oppimateriaalia on peilattu vahvasti derivaatan opettamiseen, sekä opiskeluun liittyviin artikkeleihin. Näiden pohjalta on pyritty muodostamaan oppimateriaalia, joka tukee tutkimusten nojalla hyväksi todettuja käytäntöjä.

2.1 Opetussuunnitelma

Lukio-opetusta ohjaa valtakunnalliset lukion opetussuunnitelman perusteet. Uudet opetussuunnitelman perusteet otetaan käyttöön syksyllä 2021 aloittavien opiskelijoiden kohdalla [10], ja tämä oppikirja on tehty tuon uuden opetussuunnitelman mukaan. Opetussuunnitelma sisältää niin kaikille oppiaineille yhteisiä tavoitteita, kuin jokaisen aineen ja jokaisen kurssin tavoitteet ja tärkeimmät sisällöt. Seuraavassa nostetaan esiin yleisistä tavoitteista erityisesti niitä, jotka ovat hyödynnettävissä tämän kurssin puitteissa.

Opetussuunnitelman yleisissä tavoitteissa käsitellään erilaisten oppimistyylien ja ongelmanratkaisutaitojen omaksumista ja oppimista. Tämän kurssin osalta esiin nousee viisi tavoitetta, joita voidaan erityisesti tukea tämän kurssin aikana:

- Opiskelija saa monipuolisia kokemuksia uuden tiedon ja osaamisen rakentamisesta laaja-alaisesti ja oppiainerajat ylittäen.
- Kehittää tiedonhankinta- ja soveltamistaitojaan sekä ongelmanratkaisutaitojaan.
- Saa kokemuksia tutkivasta oppimisesta sekä osallisuudesta tieteen ja tutkimuksen tekoon.
- Opetus rakentaa yhteisöllisyyttä, osallisuutta ja hyvinvointia vahvistamalla vuorovaikutus-, yhteistyö- ja ilmaisutaitoja.
- Saadaan kokemuksia vertaisoppimisesta tiimeissä ja projekteissa.

Kun yleisissä tavoitteissa käsitellään oppimistyylejä ja opiskelutaitoja, niin toinen kaikkia oppiaineita koskeva osio opetussuunnitelman perusteissa on laaja-alaisen osaamisen tavoitteet. Näitä tavoitteita tulisi opettaa kaikissa oppiaineissa yhteistyössä, esimerkiksi projektitöiden kautta. Seuraavassa lueteltuna nämä laaja-alaisen osaamisen tavoitteet:

- Globaali- ja kulttuuriosaaminen
- Hyvinvointiosaaminen

- Vuorovaikutusosaaminen
- Eettisyys ja ympäristöosaaminen
- Yhteiskunnallinen osaaminen
- Monitieteinen ja luova osaaminen.

Yleisten ja laaja-alaisten tavoitteiden lisäksi opetussuunnitelman perusteet määrittelee jokaiselle kurssille tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Tälle kurssille opetussuunnitelman perusteiden mukaan opiskelijan tavoitteet ovat:

- Tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla
- Omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta
- Ymmärtää derivaatan tulkinnan muutosnopeutena
- Kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- Osaa derivoida yhdistettyjä funktioita
- Hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä
- Osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä.

Opetussuunnitelman perusteet määrittelevät kurssin keskeisiksi sisällöiksi:

- Funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- Polynomi- ja rationaalifunktioiden sekä juurifunktioiden derivaatat
- Sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat
- Funktioiden tulon ja osamäärän derivointi
- Yhdistetty funktio ja sen derivointi
- Funktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

Verrattuna vanhoihin 2015 opetussuunnitelman perusteisiin [9] korostuu nyt ohjelmistot ja niiden käyttö. Aiemmin tavoitteena oli osata käyttää teknisiä apuvälineitä, joihin toki ohjelmistojen voidaan ajatella kuuluvan, mutta painotus lienee ollut enemmän symbolisissa laskimissa.

Keskeisissä sisällöissä on muutoksia enemmän. Kurssille on tullut uutena asiana sini- ja kosinifunktion derivaatat sekä yhdistetyn funktion derivaatta. Trigonometrisistä funktioista poikkeuksena vanhaan tangenttifunktion derivaatta on jätetty keskeisten sisältöjen ulkopuolelle. Edellä luetellut on aiemmin käsitelty myöhemmillä kursseilla. Toki nyt kurssin pituus on 1,5 kertainen vanhaan verraten.

2.2 Habits of Mind

Oppikirjan pohjana käytettiin erityisesti kahta artikkelia, joista ensimmäisessä Cuoco, Goldenberg ja Mark käsittelevät erilaisia oppijoiden ajatustapoja matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa [3]. Artikkelissa mainitaan kuusi erilaista ajatusmallia, jotka toimivat apuna matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Projektiryhmän kanssa valitsimme näistä kuudesta kolme ajatusmallia, joita pyrimme tukemaan oppikirjassamme niin tehtävien kuin teorian kautta. Näin saamme osaltamme seitsemästä kirjan osasta yhtenäisemmän kokonaisuuden, vaikka joka osalla onkin eri kirjoittaja.

- **Experimenters - kokeilijat**
  Matematiikan oppitunnit etenevät usein samalla kaavalla: tarkistetaan kotitehtävät, opiskellaan uusi teoria ja lasketaan harjoitustehtäviä uuteen teoriaan liittyen. Opiskelijoiden oma kokeileminen, ja sen kautta oivaltaminen puuttuu oman kokemukseni mukaan liian usein oppitunneilta kokonaan. Cuoco ja kumppanit esittävät tähän ongelmaan hyväksi lähestymistavaksi sitä, että opiskelijat lähtisivät itse etsimään ratkaisumallia uuteen ongelmaan [3]. Esimerkiksi on mahdollista kokeilla ratkaisumalleja, jotka on havaittu aiemmin toimiviksi samankaltaisten ongelmien kohdalla, muistaen samalla kriittinen suhtaututuminen tuloksiin ja pohdinta, onko tehtävässä jokin asia, miksi tämä ratkaisumalli ei tässä tehtävässä olisi validi.

- **Describers - kuvailijat**
  "Matematiikka on maailman universaalein kieli." Sanonta, jota usein toistetaan opiskeltaessa matemaattisia merkintöjä ja symboleja. Kuitenkin matematiikkaa pitää osata käsitellä myös omalla äidinkielellään, meidän tapauksessa suomeksi. Matemaattisen tekstin sanallistaminen onkin yksi ajatusmalli, jota pyrimme kirjassamme tukemaan. Sanallistamalla esimerkiksi ratkaisun eri vaiheita tai määritelmiä, voidaan Cuocon ja kumppaneiden mukaan saada lisää ymmärrystä opiskeltavaan asiaan [3]. Lisäksi opiskelijoiden on hyvä osata kertoa muille mitä he ovat ratkaisussaan tehneet. Mikäli he eivät osaa sanallistaa ratkaisuaan, jää helposti ilmaan kysymyksiä siitä, onko ratkaisussa kaikki oikein, ja onko opiskelija ymmärtänyt ongelman jota tehtävässä ratkaistaan, vai onko hän ainoastaan laskenut tehtävän mekaanisesti mallitehtävää mukaillen. Ryhmätyötaitojen merkitys kasvaa jatkossa niin koulumaailmassa, kuin työelämässä ja tällöin myös omien ratkaisujen sanallistaminen ja ajatusten jakaminen niistä tulevat myös matematiikan saralla nousemaan entistä suurempaan arvoon.

- **Visualizers - visualisoijat**
  "Jos et pääse tehtävässä liikkeelle, piirrä kuva." Ohje, jonka toivottavasti kaikki ovat kuulleet niin yläkoulun kuin lukion matematiikan tunneillaan. Visuaalinen esitys matemaattiseen ongelmaan voi usein tuoda opiskelijalle uusia ajatuksia siitä, kuinka ongelmaa voisi lähestyä. Geometria on selkeä osa-alue, jossa visuaalinen esitys auttaa, ja on usein lähes välttämätön tehtävän ratkaisemisessa. Visuaalinen esittäminen voi auttaa kuitenkin myös monien muiden aihealueiden tehtävissä. Derivaatan kohdalla puhutaan hyvin usein muutoksesta ja muutoksen nopeudesta, jota on monesti helppoa tutkia funktion graafista, joka on funktion visuaalinen esitys.

2.3 Tehtävätyypit

Toinen oppikirjan kannalta hyvin merkittävä artikkeli on Swanin erilaisia matematiikan tehtävätyyppejä esittelevä teos [13].Oppikirjaa varten valittiin yhdessä projektiryhmän kanssa tehtävätyyppejä koskien kolme yhteistä tavoitetta, joita pyritään toteuttamaan mahdollisuuksien mukaan kaikissa kirjan osissa. Oppimateriaalin pohdinta sekä harjoitustehtävien laatimisessa on tukeudettu Swanin artikkelista valittuihin seuraaviin kolmeen tehtävätyyppiin.

- **Erilaiset esitystavat - Swan 2**
  Matematiikassa samaa asiaa voidaan usein esittää monella eri tavalla. Esimerkiksi suora voidaan esittää ainakin seuraavilla tavoilla: yhtälönä ratkaistussa tai yleisessä muodossa, kuvaajana sekä kulmakertoimena ja vakioterminä. Ensimmäinen tehtävätyyppi on siis erilaisten esitystapojen yhdistäminen. Tutkimusten mukaan ylioppilailla yksi syy vaikeuksiin derivaatan ja integraalin opiskelussa on kykenemättömyys luoda yhteyttä symbolisen ja graafisen esityksen välille [5]. Tähän ongelmaan tämä tehtävätyyppi pureutuu hyvin, kun on mahdollista luoda yhteyksiä kuvaajien, funktioiden ja esimerkiksi sanallistettujen esitysten välille.

- **Matemaattisten väitteiden arvioiminen - Swan 3**
  "... tämän päivän ykkösluokkalaiset tulevat kohtaamaan valmistumisensa jälkeen ongelmia, joiden olemassa oloa ei vielä tiedosteta." [3]
  Opiskelijoita pitäisi opettaa kohtaamaan ongelmia, joiden olemassaolosta me emme vielä tiedä mitään. Kuinka se onnistuu? Mekaanisten laskutehtävien lisäksi opiskelijoiden olisikin opittava myös muita taitoja, jotka auttavat niin matemaattisten kuin muidenkin ongelmien kanssa. Opiskelijoille on hyvä antaa tehtäviä, joissa heidän täytyykin pohtia jonkin väitteen totuudenmukaisuutta sen sijaan, että he vain laskevat yhtälöstä jonkin lukuarvon, jonka myös laskukone osaa laskea. Tällaiset tehtävät kehittävät opiskelijan kykyä selittää, perustella ja todistaa erilaisia ilmiöitä [13]. Tällaisten tehtävien kohdalla on hyvä harjoitella myös opetussuunnitelman laaja-alaisten tavoitteiden vaatimaa vuorovaikutusosaamista, kun oppilaat pääsevät perustelemaan muille väitteiden paikkaansapitävyyttä.

- **Ratkaisujen analysointi - Swan 5**
  Kun saat ratkaistua tehtävän, pohdi onko vastauksesi järkevä. Tämän yleisen ohjeen voisi laajentaa koskemaan koko ratkaisun tarkastelua. Kun opiskelijat oppivat analysoimaan niin omia, kuin muidenkin tekemiä ratkaisuja, oppivat he samalla löytämään ratkaisuista yleisiä virheitä, tai hyviä toimintatapoja, jotka vievät usein ratkaisua eteenpäin. Myös useampien erilaisten ratkaisujen vertaileminen saman tehtävän kohdalla voi tuoda opiskelijalle lisää ratkaisumalleja, ja ennenkaikkea herättää siihen, että hyvin usein tehtävät voidaan ratkaista useilla eri tavoilla, eikä kannata jämähtää vain yhteen ratkaisumalliin. Yksi tapa haastaa opiskelijaa miettimään tarkemmin niin sanottujen mallitehtävien ratkaisuja, on lisätä näihin jotain pohdittavaa. Esimerkiksi sekoittamalla ratkaisun vaiheet, ja laittamalla opiskelijan järjestämään ne oikein, saadaan opiskelija pohtimaan tarkemmin ratkaisun eri vaiheita.

3 Oppikirjan perustelu

Tämän teoksen kohdalla on muistettava, että kyseessä on vain yksi seitsemästä kirjan osasta, jotka kaikki kuuluvat lukion kurssin MAA6 - derivaatta oppimateriaaliin. Oppimateriaalin eri osien sisällöt ovat karkeasti seuraavat:

1. Erotusosamäärä ja johdatus derivaattaan
2. Raja-arvo ja monomin derivaatta
3. Derivaatanfunktio, polynomin sekä sinin ja kosinin derivaatat
4. Funktion kulku ja jatkuvuus
5. Yhdistetty funktio ja sen derivaatta
6. **Tulon ja osamäärän derivaatta**
7. Eksponentti- ja logaritmifunktion derivaatta.

Tässä työssä tullaankin hyödyntämään oppimateriaalin kohdalla sitä, että tämä osio on seitsemästä kirjan osasta kuudes, ja näin ollen kurssilla on aiemmin opittu muun muassa polynomifunktion ja yhdistetyn funktion derivaatta, jotka oletetaan tämän vuoksi tutuiksi ja joita tullaan hyödyntämään tässäkin oppimateriaalissa. Lisäksi hyödynnetään luonnollisesti aiempien kurssien sisältöjä, joista selkeiten oppimateriaalissa esiintyy kurssilla MAA2 tutuksi tulleet rationaalifunktiot [10].

3.1 Tulon derivaatta

Polynomifunktion derivaatta on opetettu aiemmin kurssilla, ja täten sitä päästään hyödyntämään tämän oppimateriaalin alusta saakka tutustuessamme tulon derivaattaan. Tulon derivaatta tulee myöhemmin tässä oppimateriaalissa toimimaan perustana myös osamäärän derivaatalle, ja siksi tulon derivaatan johtaminen toteutetaan suoraan derivaatan määritelmästä erotusosamäärän raja-arvoa hyväksi käyttäen.

Tulon derivaattaa käsittelevä kappale lähtee liikkeelle pohdintatehtävällä A.1, jossa pohditaan mahdollista yhteyttä normaalimuotoisten sekä tulomuotoisten funktioiden derivaattojen välillä virheellisen ratkaisun kautta. Adams ja kumppanit kertovat, että niin sanottujen tahallisten virheiden käyttöä opetuksessa on tutkittu, ja oppimistulokset on koettu hyvinkin lupaaviksi [1]. Hästö ja Palkki kertovat kuitenkin lisäksi, että virheellisten ratkaisujen hyöty on koettu suuremmaksi, mikäli samassa yhteydessä verrataan kahta tai useampaa erilaista ratkaisua [7]. Tässä tehtävässä pyydämme oppilasta derivoimaan aiemmin oppimansa pohjalta saman lausekkeen, johon on oppimateriaalissa ratkaisu esitetty, jonka jälkeen hänen tulee analysoida ratkaisujen oikeellisuutta. Tehtävä tukee valitsemistamme yhteisistä tavoitteista *Habits of mind* -artikkelissa esiteltyä kokeilevaa ajatusmallia [3] oppilaan päästessä itse ratkaisemaan virheellisesti derivoidun funktion derivointia aiemmin oppimansa pohjalta. Tämän jälkeen oppilaalla on kaksi erilaista ratkaisua, joissa vieläpä päädytään eri vastauksiin, joten hän pääsee tehtävänannon mukaisesti analysoimaan näiden kahden ratkaisun eroja ja pohtimaan onko alkuperäinen ratkaisu oikein vai väärin. Täten tehtävä tukee samalla koko kirjaprojektia yhdistävää Swanin esittelemää tehtävätyyppiä *ratkaisujen analysointi*, ja siitä alakohtaa *i) Comparing different solution strategies* [13].

Pohdintatehtävässä A.1 päädytään huomaamaan, ettei tulomuotoista funktiota voida derivoida pelkästään tulon tekijöitä derivoimalla. Aiemmin kurssilla on tullut tutuksi derivaatan määritelmä sekä tähän liittyen erotusosamäärän raja-arvo. Onkin siis loogista siirtyä seuraavaksi tutkimaan määritelmää hyväksi käyttäen, kuinka tulomuotoinen funktio pitäisi oikeasti derivoida. Pohdintatehtävässä A.2 on annettu valmiiksi tulon derivaatan johtamisessa tarvittavat välivaiheet, mutta niiden järjestys on väärä. Oppilaan tehtävänä on jälleen analysoida annettua ratkaisua ja sen vaiheita tehtävätyypin *ratkaisujen analysointi*, ja siitä alakohdan *iii) Putting reasoning in order* [13] mukaisesti, ja pyrittävä järjestämään annetut välivaiheet loogiseen järjestykseen. Tehtävä tukee edellisen pohdintatehtävän mukaisesti kokeilevaa ajatusmallia [3], sillä välivaiheita on helppoa pyöritellä eri järjestykseen kokeilemalla ja etsimällä tämän jälkeen näiden välille loogista yhteyttä. Pohdintatehtävän A.2 jälkeen esitetään vielä saatu tulon derivoimiskaava lauseessa A.3.

Matematiikassa ollaan harvoin tilanteessa, jossa tehtävään on vain yksi mahdollinen ratkaisutapa, tai vastaukselle vain yksi mahdollinen esitystapa. Pohdintatehtävässä A.4 esitetäänkin yhteen ja samaan tehtävään kolme valmista ratkaisua, jotka on kaikki tehty hyödyntäen eri derivoimiskaavoja. Käytetyistä derivoimiskaavoista polynomifunktion derivaatta sekä yhdistetyn funktion derivaatta ovat tuttuja kurssin aiemmista osioista. Tulon derivaatta taas on esitelty juuri aiemmin, ja sitä päästään nyt hyödyntämään ensimmäistä kertaa. Tehtävä tukee valitsemistamme tehtävätyypeistä *matemaattisten väitteiden arviointia*, oppilaan arvioidessa muun muassa derivaatan oikeellisuutta, sekä *ratkaisujen analysointia*, kun oppilaan on selitettävä derivoiniin vaiheet sekä löydettävä käytetty derivoimiskaava. Tehtävään on tuotu myös yhtenä ulottuvuutena ryhmätyöskentely, jolloin tehtävä tukee myös opetussuunnitelman asettamaa yleistä tavoitetta vuorovaikutusosaamisen osalta [10]. Habits of mind artikkelin mukaisista tavoitteista tehtävä tukee erityisesti kuvailevaa oppimistyyliä, oppilaan päästessä sanallistamaan annettuja ratkaisuja.

Kappaleen harjoitustehtävät olisi mahdollista ratkaista myös polynomifunktion derivaattaa hyväksi käyttäen, jotta harjoitusta tulisi myös uuden teorian käyttöön, ohjataan tehtävissä käyttämään nimenomaan tulon derivoimiskaavaa.

3.2 Osamäärän derivaatta

Kirjan toisessa osassa siirrytään käsittelemään osamäärän derivaattaa. Osamäärän derivoimiskaava voidaan johtaa monella eri tavalla, ja teemmekin sen kappaleen edetessä kahta eri reittiä. Liikkeelle lähdetään pohdintatehtävällä B.1, jonka tarkoituksena on lähinnä tuoda opiskelijalle tutuksi seuraavaa tehtävää varten negatiivisten potenssien derivointi. Tässä hyödynnetään erotusosamäärän raja-arvoa, minkä on todettu olevan yksi derivaatta -kurssin vaikeimmista asioista [12]. Samalla tehtävä tukee Swanin artikkelin tehtävätyypeistä ratkaisun analysointia, opiskelijan päästessä pohtimaan millaisella välivaiheella saa sidottua edeltävän ja seuraavan välivaiheen yhteen [13]. Pohdintatehtävässä B.2 päästään johtamaan osamäärän derivoimiskaavaa, käyttäen hyväksi edellisessä kappaleessa johdettua tulon derivoimiskaavaa. Tässä tehtävässä oppilas törmää varsin lyhyehköön tehtävänantoon, jonka jälkeen alkaa hyvin todennäköisesti kokeilupainotteinen työ ratkaisun löytämiseen. Tehtävänannon niukkuus haastaa oppilaita kokeilemaan erilaisia tapoja pyöritellä annettua yhtälöä, jotta siitä saataisiin lopulta osamäärän derivaatta. Kirjan yhteiseksi tavoitteeksi Cuocon, Goldenbergin ja Markin artikkelista otettu kokeileva ajattelutapa sopii täten hyvin tähän tehtävään. Artikkelissa myös kannustetaan oppilaita matemaattisen ongelman kohdatessaan käyttämään strategioita, jotka ovat heille ennestään tuttuja, sekä yleensäkin leikittelemään erilaisilla ratkaisumalleilla [3]. Vaikka nyt tässä teoksessa ei olekaan täysin vastaavaa ratkaisutapaa tullut vastaan, voidaan hyvin olettaa yhtälönpyörittelyn olevan pitkän matematiikan kuudennella kurssilla jo tuttu ratkaisumalli. Tehtävän lopputulos esitellään vielä lauseen muodossa kohdassa B.3.

Kuten aiemmin todettiin, osamäärän derivoimiskaava voidaan johtaa eri tavoin. Mallitehtävässä B.5 jo aiemmin johdettu osamäärän derivoimiskaava johdetaan vielä uudestaan, käyttäen tällä kertaa hyväksi derivaattafunktion määritelmää ja erotusosamäärän raja-arvoa. Jotta tämä johto ei jäisi täysin irralliseksi, hyödynnetään sitä vielä myöhemmin kappaleen harjoitustehtävässä 3, jossa opiskelijan on sanallistettava valmista ratkaisua. Tämä harjoitustehtävä tukee erityisen hyvin yhteiseksi tavoitteeksi ottamaamme Habits of mind -artikkelin kuvailevaa ajattelun mallia. Cuoco ja kumppanit toteavat artikkelissaan matematiikan olevan monien ihmisten mielestä oma kielensä, mutta samalla oppilaan on tärkeää osata kertoa omalla äidinkielellään, mitä matemaattisin merkinnöin on kirjoitettuna [3]. Cuoco ja kumppanit toteavatkin, että oppimisen ja ymmärtämisen kannalta on hyvin tärkeä askel, että pystyy selittämään sanallisesti esimerkiksi tässä tehtävässä laskun vaiheet [3]. Toisaalta tämä harjoitustehtävä sivuaa myös Swanin artikkelissa esitettyä tehtävätyyppiä ratkaisujen analysoinnista *(Analysing reasoning and solutions)* [13].

Kappaleen toisessa pohdintatehtävässä, kohdassa B.6 opiskelijaa haastetaan jälleen sanallistamaan ratkaisua. Tämä tuo osaltaan tähän teokseen jatkumoa, sillä pohdintatehtävässä A.2 oli tehtävänä selittää todistuksen vaiheet auki samaan tapaan kuin nyt. Tehtävä tukeekin samaan tapaan valitsemaamme kurssin yhteistä tehtävätyyppiä, *ratkaisujen analysointi*. Poikkeuksena aiempaan, nyt tehtävä ohjeistetaan tekemään pareittain. Whitenack ja Yackel kertovat, että tällainen toimintamalli, pareittain tai koko luokan kesken vahvistaa merkittävästi opiskelijoiden mahdollisuutta kehittää matemaattisia argumentteja puolustamaan tai kumoamaan esitettyjä väitteitä [14]. Näin ollen tehtävän tarkoituksena on paitsi ymmärtää mitä todistuksen eri vaiheissa tapahtuu, myös herättää kussakin todistuksen vaiheessa toisen oppilaan ajatuksia siitä, onko parin selitys mahdollisesti oikein vai väärin. Tämänkaltainen tehtävä tukee Whitenackin ja Yackelin mukaan argumentaatiotaitojen lisäksi myös opiskelijoiden matemaattisia taitoja, kun heidän ainoa ratkaisunsa tehtävään ei ole se, mihin he itse päätyvät, vaan he kuulevat myös parinsa ratkaisun ja tämän matemaattisen perustelun tehtävään [14]. Osaltaan tämä tehtävä on myös tehty Habits of mind artikkelin yhteisen tavoitteen pohjalta, missä opiskelijoille pyritään luomaan mahdollisuuksia matematiikan kuvailemaseen ja sanallistamiseen (*describers*) [3].

Osamäärän derivaatta kappaleen viimeisessä pohdintatehtävässä esitellään funktio, jonka derivoimiseen vaaditaan niin yhdistetyn funktion, trigonometristen funktioiden, kuin myös osamäärän derivoimista. Näin ollen tehtävä kokoaa yhteen tämän kappaleen opeteltavan asian lisäksi myös kurssilla aiemmin opeteltuja asioita. Tehtävän tarkoituksena on lopulta määrittää funktion derivaatta, mutta ennen kuin opiskelija pääsee derivoimaan, pohjustetaan tehtävää kahdella kysymyksellä, joiden tarkoituksena on haastaa opiskelijan matemaattista argumentaatiota, auttaen samalla opiskelijoita ymmärtämään asian paremmin, joutuessaan avaamaan ajatusmalliaan muille luokassa. Opettajaa ohjataan käymään tehtävästä keskustelua luokassa, jolloin opiskelijat pääsevät perustelemaan jälleen näkemyksiään, mikä on edellä todetun mukaisesti hyväksi heidän argumentaatiotaitojensa kehittymiselle niin matematiikassa, kuin yleisestikin [14].

3.3 Rationaalifunktiot

Tämän kirjan viimeinen, eli kolmas kappale, käsittelee rationaalifunktioiden derivaattaa, sekä yleisesti derivaatan sovelluksia liittyen aiempiin kappaleisiin.. Osaltaan rationaalifunktioita on käsitelty jo edellisessä kappaleessa, kun opiskeltavana asiana oli osamäärän derivaatta, mutta nyt pyrimme tutustumaan rationaalifunktioihin, ja näiden derivaattaan yleisemmällä tasolla. Tässä teoksessa lähdetään oletuksella, että rationaalifunktiot ja muun muassa niiden määrittelyehdot ovat tuttuja jo kurssilta MAA2, jossa niitä opetussuunnitelman mukaan käsitellään [10].

Kappaleen ensimmäisessä tehtävässä C.1 lasketaan rationaalifunktiolle f derivaatta annetussa pisteessä, käyttäen hyväksi erotusosamäärän raja-arvoa. Tutkimuksissa on todettu, että usein lukion derivaatta kurssista nousee yksittäisenä vaikeana asiana esiin nimen omaan erotusosamäärän raja-arvon hyödyntäminen, ja sillä laskeminen [6] [12], tämän vuoksi pyrimme tällä tehtävällä lisäämään opiskelijoiden rutiinia erotusosamäärän raja-arvon hyödyntämisessä.

Pohdintatehtävä C.2 pohjautuu hyvin avoimeen tehtävänantoon, jossa opiskelijaa pyydetään kertomaan derivaatan perusteella funktiosta. Olennainen osa päättelyä on tässä funktion kulun ja derivaatan välinen yhteys. Kirjassa on aiemmin tehtävässä B.6 pohdittu kulun tutkimista osamäärän derivaatan yhteydessä. Tämä tehtävä mahdollistaakin opiskelijalle aiemmin opitun hyödyntämisen välittömästi seuraavassa kappaleessa. Tehtävässä myös kannustetaan opiskelijaa hyödyntämään derivaatan analysoinnissa geogebraa, jolloin tehtävä tukee myös opetussuunnitelman perusteiden tavoitteita, joissa mainitaan ohjelmistojen käyttö, muun muassa derivaatan tutkimisen sovellusten yhteydessä [10]. Ohjelmistojen, muun muassa geogebran käyttöä opetuksessa tukee myös Gavilan-Izquierdon ja kumppaneiden tutkimus, jossa todettiin derivaatan opetuksessa ohjelmistojen ja teknologian käytön antavan opiskelijoille paremmat mahdollisuudet muodostaa yhteyksiä derivaatan eri ominaisuuksien välille [4]. Esimerkiksi tässä tehtävässä opiskelija pystyy geogebran avulla mallintamaan derivaatan, ja yhdistämään tällöin derivaatta funktion, kuvaajan ja kurssilla opetettuja derivaatan ominaisuuksia toisiinsa.

Kappale jatkuu mallitehtävällä C.3, jossa pyritään selventämään merkkikaavion käyttämistä tilanteessa, jossa funktion derivaatta muodostuu useammasta tekijästä tulon ja/tai osamäärän kautta. Mallitehtävän sanomaa on pyritty vielä vahvistamaan lisäämällä mallitehtävän jälkeen huomautus C.4, joka korostaa tulon ja osamäärän tekijöiden merkkien määrittävän koko derivaatan merkin tällaisessa tilanteessa.

Pohdintatehtävässä C.5 opiskelijan tehtävänä on muodostaa derivaattafunktio, joka täyttää annetut ehdot. Tehtävä tukee oppikirjalle asettamistamme yhteisistä tavoitteista kokeilevaa oppimistyyliä [3]. Tehtävä tukee jälleen myös ohjelmistojen käyttöä mahdollistamalla geogebran hyödyntämisen tehtävää ratkaistaessa.

Kappaleen viimeinen tehtävä C.6 kokoaa yhteen koko tämän teoksen aiheita yhdistelytehtävän muodossa. Arzu ja kumppanit toteavat artikkelissaan, että oppilailla, joilla on vaikeuksia ymmärtää mitä derivaatta merkitsee eri tilanteissa, on vaikeuksia hahmottaa kokonaisuudessaan derivaatan merkitystä [2]. Tässä tehtävässä pyritäänkin tuomaan esille niin tämän kirjan aikana opittuja derivoimiskaavoja, kuin erilaisia derivaatan ominaisuuksia tangentintin kulmakertoimesta aidosti monotonisen funktion derivaataan.Tehtävä tukee siis nimenomaan Arzun ja kumppaneiden mainitsemaa derivaatan kokonaisvaltaista hahmottamista, ja pyrkii samalla luomaan yhteyksiä tämän kurssin eri osioiden välille esimerkiksi tangentin kulmakertoimen kautta, joka esitellään kurssin ensimmäisessä osassa [8].

Lähdeluettelo

[1] Adams, D., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S. Van Velsen, M. Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system, *Computers in Human Behavior*, 36:401-411, 2014

[2] Arzu, Aydogan Yenmez., Ayhan, Kursat Erbas. Zulal, Sahin. Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science Technology Education,* 11/2:177-188, 2015

[3] Cuoco, Al., Goldenberg, Paul E. & Mark, June. Habits of Mind: An Oraganizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15:375-402, 1996

[4] Gavilan-Izquierdo, Jose Maria., Garcia, Mercedes Martin-Molina, Veronica. Characterizing the Role of Technology in Mathematics Teachers' Practices When Teaching About the Derivative. *Computers in the Schools, Interdisciplinary Journal of Practise, Theory, and Applied Research*, Volume 38, 2021

[5] Hamidreza, Kashefi., Khadijeh, Rahimi., Mahani, Moktar., Mohd Salleh, Abu. & Nourooz, Hashemi. Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Deriatives and Integrals: A Conceptual Framework *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11/2:227-238, 2015

[6] Hähkiöniemi, Markus. The role of representations in learning the derivative. University of Jyväskylä, Department of mathematics and statistics. 2006

[7] Hästö, Peter & Palkki, Riikka. Mathematics teachers' reasons to use (or not) intentional errors. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16/2:263-282, 2018

[8] Liinamaa, Esa. Johdatus derivaattaan lukiossa. Oulun yliopisto, Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma. 2021

[9] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. 2015

[10] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. 2019

[11] Opetushallitus. Tietoa lukion opetussuunnitelman perusteiden uudistumisesta. *https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/tietoa-lukion-opetussuunnitelman-perusteiden-uudistumisesta*, Viitattu: 18.5.2020.

[12] Sirviö, Miia. Lukiolaisten kokemuksia Derivaatta-kurssin vaikeudesta: Opetuksen kehittäminen lukion pitkän matematiikan Derivaatta kurssille Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto. 2012

[13] Swan, Malcolm. *Colloborative Learning in Mathematics*. Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham 2006

[14] Whitenack, Joy. Yackel Erna. Making mathematical arguments in the primary grades: the importance of explaining and justifying ideas. (Principles and Standards) *Teaching Children Mathematics (Vol. 8, Issue 9)* National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

A Tulon derivaatta

Aiemmin kurssilla opitun perusteella osaat jo derivoida funktion $f(x) = (2x-3)(x^2+4)$, kunhan muokkaat sen ensin normaalimuotoon $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$. Tämä ei kuitenkaan ole pitkän päälle kovin tehokas tapa, eikä kaikissa tilanteissa edes mahdollista, täten seuraavaksi mietimme, kuinka tällaisen funktion voisi derivoida suoraan.

Polynomifunktion kohdalla derivoidaan erikseen jokaista termiä, kokeillaan siis tulon kohdalla voidaanko derivoida erikseen tulon tekijöitä.

Pohdinta A.1 Tulomuotoisesta funktiosta saat polynomifunktion kertomalla sulut auki, jolloin saat funktion muotoon $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. Tämän derivointi on tuttua kurssin alkupuolelta.

Oppilaille annettiin tehtäväksi derivoida funktio $f(x) = 3x^2(x-4)$.

Ollin ratkaisu tehtävään oli seuraava:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(3x^2) \cdot D(x-4) \\ &= 6x \cdot (1-0) \\ &= 6x \cdot 1 \\ &= 6x. \end{aligned}$$

Saatko saman derivaatan jos derivoit funktiota sen jälkeen kun olet muokannut polynomin avattuun muotoon? Onko Ollin ratkaisu oikein vai väärin?

Edellisen pohdinnan perusteella voimme todeta, että tulomuotoista funktiota emme voi derivoida pelkästään tulon tekijöitä derivoimalla. Ongelmaksi tämä muodostuu esimerkiksi funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ kohdalla, jota emme pysty pilkkomaan polynomin tavoin derivoitaviin osiin. Lähdetään siis tutkimaan derivaattafunktion määritelmän avulla, kuinka tällaista tulomuotoista funktiota pitäisi derivoida.

Pohdinta A.2 Derivaattafunktion määritelmän nojalla

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}.$$

Nyt $f(x) = g(x)h(x)$, missä $g(x)$ ja $h(x)$ ovat derivoituvia ja täten jatkuvia, joten voimme määritelmän avulla johtaa kaavan tulon derivaatalle.

Alla on tarvittavat välivaiheet, joiden kautta saadaan tulon derivaatan kaava määritettyä.

Järjestä välivaiheet **A-D** oikeaan järjestykseen **1-4** (kirjain-numero parein) tehtävän lopussa olevaan kohtaan "tulon derivaatan johtaminen".

Selitä, mitä missäkin laskun vaiheessa on tehty.

A. $g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

B. $\lim_{k \to 0} \frac{g(x+k)h(x+k) + g(x)h(x+k) - g(x)h(x+k) - g(x)h(x)}{k}$

C. $\lim_{k \to 0} \frac{g(x+k)h(x+k) - g(x)h(x)}{k}$

D. $\left(\lim_{k \to 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{k}\right)\left(\lim_{k \to 0} h(x+k)\right) + g(x)\left(\lim_{k \to 0} \frac{h(x+k) - h(x)}{k}\right)$

Tulon derivaatan johtaminen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1. \\ &= 2. \\ &= 3. \\ &= 4. \end{aligned}$$

Edellisen pohdintatehtävän nojalla osaamme derivoida myös tulomuotoisia funktioita.

Tulomuotoisen funktion derivaatta saadaan laskettua seuraavan kaavan mukaisesti:

Lause A.3 Olkoon $f(x) = g(x)h(x)$. Tällöin $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

Tutkitaan seuraavan tehtävän parissa, voidaanko samaa funktiota derivoida eri tavoin.

Pohdinta A.4 Muodostakaa parit ja tutkikaa kumpikin yhtä ratkaisua. Kerro parillesi tutkimastasi ratkaisustasi ja vertailkaa tutkimianne ratkaisuja seuraavien kysymysten pohjalta:

- Mitä derivoimiskaavaa siinä on käytetty?
- Mitä vaiheita derivointi sisältää?
- Onko derivointi tehty oikein?

1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)\cos(x) \\ &= \cos^2(x) \\ &= (\cos(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(x)(-\sin(x)) \\ &= -2\cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$

2:

$$f(x) = \cos(x)\cos(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x)\cos(x) + \cos(x)(-\sin(x)) \\ &= -\sin(x)(\cos(x) + \cos(x)) \\ &= -\sin(x)2\cos(x) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

A.1 Harjoitustehtävät:

Ratkaise seuraavat harjoitustehtävät hyödyntäen tulon derivoimiskaavaa.

1. Määritä polynomin $x(x+3)(5-x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,5]$. K11/5
2. Derivoi funktio $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
3. Derivoi funktio $f(x) = 2x\sin(x) - 4x^2\sin(x)$.
4. Maija rakentaa karitsoilleen aitauksen meren rantaan. Hänellä on käytettävissään aitamateriaalia enintään 100 metriä. Kuinka hänen tulisi määrittää suorakulmaisen aitauksen sivujen pituudet, jotta aitaus olisi pinta-alaltaan mahdollisimman suuri? Meren puoleista sivua ei tarvitse aidata.
5. Artisti myy lippuja keikalleen 10 euron hintaan. Hän on havainnut, että 1 euron hinnan lasku lisää lipunmyyntiä 10 kappaletta, kun taas 1 euron hinnan nosto vähentää lipunmyyntiä 10 kappaletta.
   - Mikä olisi artistin kannalta tuottavin lipunhinta, kun 10 euron hintaan lippuja myydään 550 kappaletta?
   - Paljonko enemmän artisti tienaa, kun lipun hinta on optimoitu?

B Osamäärän derivaatta

Tulon, eli kertolaskun käänteisoperaatio on tutusti jakolasku, eli osamäärä. Onkin luonnollista selvittää seuraavaksi, kuinka funktiota joka sisältää osamäärän derivoidaan.

Pohdinta B.1 Alla on johdettu erotusosamäärän raja-arvoa käyttäen derivaattafunktio funktiolle $f(x) = \frac{1}{x}$. Laskun välivaiheista osa on kuitenkin kadonnut. Päättele puuttuvat välivaiheet.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \ldots \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \ldots \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \ldots \\
&= \frac{-1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Pohdinta B.2 Olkoon

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)h(x)^{-1}.$$

Derivoi $f(x)$ käyttäen tulon ja yhdistetyn funktion derivoimiskaavoja.

Pohdinnan B.2 perusteella osamäärän derivaatta saadaan siis seuraavan kaavan mukaisesti:

Lause B.3 Olkoon $g(x)$ ja $h(x)$ funktioita siten, että $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Olkoon lisäksi $h(x) \neq 0$

ja sekä $g(x)$ että $h(x)$ derivoituvia. Tällöin

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

Edellä johdit osamäärän derivoimiskaavan käyttämällä tulon ja yhdistetyn funktion derivaattaa. Osamäärän derivaatta on toki mahdollista myös johtaa suoraan erotusosamäärään raja-arvosta.

Huomautus B.4 Sama asia voidaan joskus todistaa useammalla eri tavalla. Esimerkiksi nyt osamäärän derivoimiskaava on todistettu pohdintatehtävässä B.2 käyttäen hyväksi tulon derivaattaa, ja toisaalta mallitehtävässä B.5 suoraan derivaattafunktion määritelmää käyttäen.

Mallitehtävä B.5 Johda osamäärän derivoimiskaava erotusosamäärän raja-arvoa käyttäen.

Derivaattafunktion määritelmän nojalla:

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}.$$

Olkoon nyt $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, jolloin määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{g(x+k)}{h(x+k)} - \frac{g(x)}{h(x)}}{k} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{g(x+k)h(x)}{h(x+k)h(x)} - \frac{g(x)h(x+k)}{h(x)h(x+k)}}{k} && a) \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{g(x+k)h(x) - g(x)h(x+k)}{h(x)h(x+k)k} && b) \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{g(x+k)h(x) - g(x)h(x+k) + g(x)h(x) - g(x)h(x)}{h(x)h(x+k)k} && c) \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{(g(x+k) - g(x))h(x) - g(x)(h(x+k) - h(x))}{h(x+k)h(x)k} && d) \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{g(x+k)-g(x)}{k}h(x) - g(x)\frac{h(x+k)-h(x)}{k}}{h(x+k)h(x)} && e) \\
&= \frac{\lim_{k \to 0} \frac{g(x+k)-g(x)}{k}h(x) - g(x)\lim_{k \to 0} \frac{h(x+k)-h(x)}{k}}{\lim_{k \to 0} h(x+k)h(x)} && f) \\
&= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} && g)
\end{aligned}$$

Tämä vastaa lauseen B.3 osamääräfunktion derivoimiskaavaa.

Pohdinta B.6 Selitä sanallisesti parille, mitä missäkin mallitehtävän B.5 välivaiheessa a) - g) on tehty.

Pohdinta B.7 Olkoon

$$f(x) = \frac{(\sin(x))^2}{x}.$$

- Mitä derivoimiskaavoja tarvitset funktion $f(x)$ derivoimiseen?
- Mikä on funktion derivaatta?
- Tutkiessasi funktion kulkua, tarvitseeko sinun tutkia molempien, sekä nimittäjän, että osoittajan merkkiä?

B.1 Harjoitustehtävät:

1. Derivoi funktio $f(x) = \frac{2x-3}{x^3}$.
2. Derivoi funktio $f(x) = (x^2 + x)(x^2)^{-1}$.
3. Derivoi funktio $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
4. Määritä funktion $f(x) = \frac{5}{4+3\cos(2x)}$ suurin ja pienin arvo reaalilukujen joukossa. Millä argumentin arvoilla nämä saadaan? K01/6
5. Erään viruksen ilmaantuvuutta mallinnettaessa havaittiin sen noudattavan likimain funktiota $f(t) = \frac{2t^4+4t^3-t}{t^5+1} + 1$, missä t kuvaa aikaa kuukausina ensimmäisestä havaitusta tartunnasta. Myöhemmin havaittiin mallin olevan toimiva kahdeksan kuukautta ensimmäisestä tartunnasta.
   Mikä oli kyseisen mallin mukaan suurin viruksen ilmaantuvuus, ja milloin se todettiin?

C Rationaalifunktiot ja sovelluksia

Rationaalifunktiot ovat tulleet tutuksi jo kurssilla MAA2. Nyt tutustumme lisäksi rationaalifunktioiden derivaattaan.

Edellisessä kappaleessa käsittelimme osamäärän derivaattaa, ja funktiot joita tuolloin derivoimme, olivat tarkemmin ajatellen rationaalifunktioita. Rationaalifunktiohan oli funktio, joka koostuu kahden polynomin osamäärästä.

Pohditaan tässä kappaleessa rationaalifunktioita, ja niiden derivaattaa hiukan yleisemmin, kun edellisessä kappaleessa keskityimme siihen, kuinka tällaisia funktioita voidaan derivoida.

Pohdinta C.1 Olkoon

$$f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2}.$$

Määritä funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä $x = 0$, käyttäen erotusosamäärän raja-arvoa.

Pohdinta C.2 Olkoon

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+2x-2)}{(x^2+2)^2}.$$

Mitä pystyt kertomaan funktiosta derivaatan $f'(x)$ perusteella? Voit käyttää pohdinnassasi apuna geogebraa.

Mallitehtävä C.3

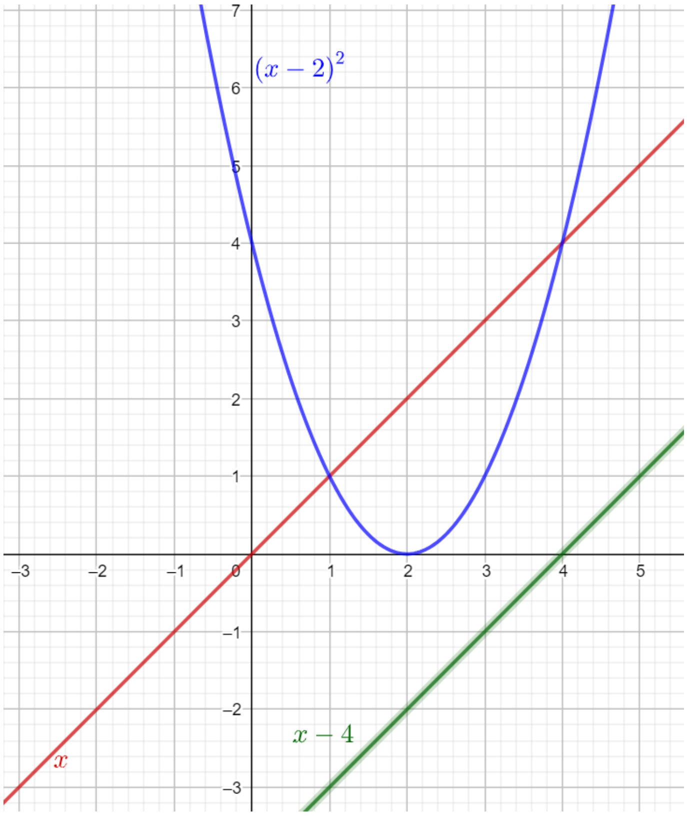
Tutkitaan yksinkertaisen esimerkin kautta, kuinka derivaatan merkki muodostuu, mikäli derivaatta koostuu useista tekijöistä.

Olkoon erään funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x)$ muotoa $\frac{h(x)g(x)}{i(x)}$, missä

$$h(x) = x - 4,\ g(x) = x \text{ ja } i(x) = (x-2)^2.$$

Tutki merkkikaavion avulla, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä.

Ratkaisu:
Funktioiden kuvaajat on piirrettynä geogebralla seuraavassa kuvassa:



Merkkikaaviota varten tarvitsemme nyt sekä osoittajan, että nimittäjän nollakohdat. Tutkitaan ensin osoittajaa.

Tulon nollasäännöllä derivaatan osoittaja $h(x)g(x) = 0$ jos $h(x) = 0$ tai $g(x) = 0$. Eli

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \text{tai} \quad x = 0.$$

Täten osoittajan nollakohdat ovat 0 ja 4.

Merkkikaaviota varten tarvitsemme vielä nimittäjän nollakohdan, jotta voimme päätellä myös nimittäjän merkit:

$$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Nyt saamme muodostettua merkkikaavion edellä määritettyjen nollakohtien ja geogebralla hahmotettujen kuvaajien nojalla.

Derivaatan merkkikaavio:

		0		2		4	
$h(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$g(x)$	$-$		$+$		$+$		$+$
$i(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		p.max*				p.min**	

* paikallinen maksimi
** paikallinen minimi

Nyt derivaatan merkkikaaviosta nähdään funktion olevan aidosti kasvava, kun $x \leq 0$ tai $x \geq 4$. Funktio on puolestaan aidosti vähenevä, kun $0 \leq x < 2$ tai $2 < x \leq 4$. Pisteessä $x = 2$ funktiota ei ole määritelty.

Huomautus C.4 Edellisessä mallitehtävässä derivaatan koostuessa useammasta tekijästä, voimme pohtia kunkin tekijän merkkiä erikseen, ja koota näistä derivaatan merkin. Derivaatta on negatiivinen mikäli tekijöissä on pariton määrä miinuksia, ja positiivinen jos miinuksia on parillinen määrä.

Pohdinta C.5 Muodosta sellainen derivaattafunktio $f'(x)$, että vastaavalle funktiolle $f(x)$ pätee kaikki seuraavat ehdot. Voit käyttää apuna geogebraa.

- Funktion $f(x)$ nimittäjän nollakohta on 0.
- Funktio $f(x)$ vaihtuu aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi, kun $x = 3$.
- Derivaattafunktion osoittaja on toisen asteen polynomi.
- $f'(6) = \frac{3}{2}$.

Pohdinta C.6 Yhdistä oikeat parit. Huomaa, että kirjaimin a) - g) merkitytyjä derivaattafunktioita on kaksi ylimääräistä.

1. Tulon derivoimiskaava
2. Osamäärän derivoimiskaava
3. Aidosti monotonista funktiota vastaava derivaatta
4. Derivaatta, joka vastaa funktiota, jolle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 7
5. Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x - 1}$ derivaatta

$a)\ f'(x) = \dfrac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{h(x)^2}$

$b)\ f'(x) = \dfrac{x^3 + 7x^2 - x + 7}{x^2 + 1}$

$c)\ f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

$d) f'(x) = \dfrac{-2x^3}{(x-1)^2}$

$e)\ f'(x) = 3$

$f) f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$

$g)\ f'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

C.1 Harjoitustehtävät:

1. Derivoi funktio $f(x) = \frac{6x^3+4x}{x+4}$.
2. Derivoi funktio $f(x) = (x^2 + 3x)(2x^3 + x)^{-1}$.
3. Määritä funktion $f(x) = \frac{4x^2}{6-x}$ ääriarvokohdat.
4. Etsi jokin ympyrälieriön mallinen esine ja laske sen pinta-ala sekä tilavuus. Tutki onko lieriön valmistamiseen käytettävän materiaalin pinta-ala optimoitu. Toisin sanoen, voiko tilavuudeltaan yhtä suuren lieriön valmistaa vähemmällä materiaalilla? Paljonko tarvittaisiin materiaalia vähimmillään lieriöön, jolla olisi vastaava tilavuus?
   Vinkki: $V = \pi r^2 h$.
5. Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus $H = 3R$. Kartion sisään on asetettuna suora ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde r, siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri. K82/7a

D Opettajan opas

D.1 Ajankäyttö

Tässä teoksessa esitettävät kolme kappaletta on suunniteltu siten, että ne pidetään kolmen 75 minuutin oppitunnin aikana, mutta mahdollista on myös pitää opetus 45 minuutin oppitunneilla. Tällöin käyttöön on ajateltu 5 oppituntia, joista tulon ja osamäärän derivaattaan molempiin käytetään 2 oppituntia ja rationaalifunktion derivaattaan ja sovelluksiin yksi.

Aihe	45′	75′
Tulon derivaatta	2	1
Osamäärän derivaatta	2	1
Rationaalifunktion derivaatta	1	1

D.2 Tulon derivaatta

Pohdintatehtävä A.1
Johdatteluna tulon derivaattaan on pohdintatehtävä, jossa pyritään tuomaan heti esille yleinen virhe laskettaessa tulon derivaattaa. Tarkoituksena on saada oppilas muokkaamaan polynomi perusmuotoon, ja derivoimaan käyttäen polynomien derivoimissääntöä aiemmin oppimaansa teoriaa käyttäen. Ratkaisuna oppilaan tulisi saada pohdintatehtävän ratkaisusta poikkeava derivaattafunktio, jolloin siirrytään pohtimaan kahden erilaisen ratkaisutavan oikeellisuutta. Tavoitteena on saada oppilas huomaamaan, ettei tulofunktiota voi lähteä derivoimaan pelkästään tulon tekijöitä derivoimalla. Tärkeää tämän tehtävän kohdalla on korostaa toisen ratkaisun virheellisyyttä, ettei opiskelijalle jää väärää mielikuvaa, että tuloa voisi derivoida tekijöittäin.

Pohdintatehtävä A.2
Oikea järjestys

1. C
2. B
3. D
4. A

- Vaiheessa **C** on kirjoitettu, mitä saadaan kun sijoitetaan tulofunktio derivaatan määritelmän erotusosamäärän raja-arvoon.

- Vaiheessa **B** on yhtälöstä lisätty ja vähennetty termi $g(x)h(x+k)$. Tämä on sallittua, koska $g(x)h(x+k) - g(x)h(x+k) = 0$.

- Vaiheessa **D** on järjestelty termejä, ottamalla yhteisiä tekijöitä. Myös raja-arvon laskusääntöjä on käytetty.

- Vaiheessa **A** edellinen vaihe on sievennetty derivaatan määritelmän mukaisesti.

Pohdintatehtävä A.4
Molemmat ratkaisut päätyvät samaan tulokseen, ja on tehty oikein. Pohdinnan tarkoituksena on saada opiskelijat sanallistamaan ratkaisuja siten, että he osaavat selittää suullisesti mitä ratkaisussa tapahtuu. Samalla matemaattinen osaaminen korostuu kun heidän on perusteltava matemaattiset vaiheet ratkaisuissa.

D.3 Osamäärän derivaatta

Pohdintatehtävä B.1 Kappale alkaa tehtävällä, jossa pohjustetaan seuraavaa tehtävää varten negatiivisen potenssin derivointi.
Johtaminen kokonaisuudessaan (merkityt (*) välivaiheet opiskelijan täydennettävä):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
* &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\
* &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
* &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= \frac{-1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Pohdintatehtävä B.2
Tehtävän tarkoituksena on, että oppilas johtaa osamäärän derivoimiskaavan manipuloimalla tulon derivoimiskaavaa. Tehtävässä päästään hyödyntämään myös kurssilla aiemmin opittua yhdistetyn funktion derivaattaa.

Todistus. Olkoon $f(x) = g(x)h^{-1}(x)$. Nyt tulon ja yhdistetyn funktion derivoimissääntöjen nojalla

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x)h(x)^{-1} + g(x)(-h(x)^{-2})h'(x) \\
&= g'(x)h(x)^{-1} - g(x)h(x)^{-2}h'(x) \\
&= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)h'(x)}{h(x)^2} \\
&= \frac{g'(x)h(x)}{h(x)^2} - \frac{g(x)h'(x)}{h(x)^2} \\
&= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}
\end{aligned}
$$

□

Pohdintatehtävä B.6
Tehtävässä on tarkoituksena toimia pareittain siten, että oppilaat selittävät toisilleen aina jokatoisen kohdan. On hyvä myös kannustaa oppilasta, joka ei ole selitysvuorossa, pohtimaan kriittisesti parin selitystä, ja mahdollisesti haastamaan tätä, mikäli on jossain kohtaa eri mieltä siitä, mitä laskussa on tehty.

Vastaukset tehtävään B.6 ovat:

a) Osoittajan nimittäjät on lavennettu samannimisiksi.
b) Sievennetty lauseke yhdeksi osamääräksi.
c) Vähennetty ja lisätty osoittajaan termi $g(x)h(x)$.
d) Otettu yhteiset tekijät $h(x)$ ja $g(x)$.
e) Siirretty nimittäjästä k, osoittajan nimittäjään molempiin osoittajan termeihin.
f) Käytetty raja-arvon laskusääntöjä, ja siirretty raja-arvo jokaiseen termiin osoittajassa ja nimittäjässä.
g) Laskettu raja-arvot ja sievennetty.

Pohdintatehtävä B.7
Vastaukset tehtävään:

- Derivointiin tarvitaan trigonometristen funktioiden, yhdistetyn funktion ja osamäärän derivoimiskaavaa.

- Funktion derivaatta on

$$f'(x) = \frac{\sin(x)(2x\cos(x) - \sin(x))}{x^2}.$$

- Käytettäessä osamäärän derivoimiskaavaa nimittäjän merkki on osamäärän derivaatassa aina positiivinen, johtuen toisesta potenssista, joten sillä ei ole merkitystä. Täten riittää tutkia osoittajan merkkiä. Nimittäjän merkillä kuitenkin voi olla merkitystä, mikäli nimittäjän muuttaa negatiivisen potenssin avulla osoittajaan, tai sieventää derivaattafunktiota ennen merkin tutkimista.

D.4 Rationaalifunktiot

Pohdintatehtävä C.1
Ratkaisu tehtävään:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2} - \frac{(2\cdot 0+2)}{0^2+2}}{x - 0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+2-x^2-2}{x^2+2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2+2x}{x^2+2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + 2x}{x(x^2 + 2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x + 2}{x^2 + 2} \\
&= \frac{-0 + 2}{0^2 + 2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Pohdintatehtävä C.2
Apukysymyksinä voi käyttää esimerkiksi seuraavia:

- Milloin funktio on kasvava, ja milloin vähenevä?
- Montako ääriarvokohtaa funktiolla on?

Tehtävää voi jatkaa hyvinkin pitkälle, muun muassa pohtimalla voidaanko ainoastaan derivaatasta päätellä, kuinka funktio käyttäytyy äärettömyydessä.
Integroimalla derivaatta saadaan funktioksi $f(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2} + C$.

Pohdintatehtävä C.5
Annettujen ehtojen kautta pääsee etenemään esimerkiksi seuraavasti:

- Funktion on oltava rationaalifunktio, jonka nimittäjän nollakohdat ovat $x = 0$.
- Funktion derivaatan nollakohta on $x = 3$.

- Derivaatan täytyy toteuttaa ehto $f'(6) = \frac{3}{2}$.

Mahdollisia vinkkejä derivaattafunktion luomiseen:

- Derivaatan merkkiin vaikuttaa ainoastaan osoittajan merkki (B.7).
- Derivaatan nimittäjä on funktion nimittäjä toiseen.
- Osoittajaa kannattaa lähteä muodostamaan yksinkertaisen toisen asteen polynomin pohjalta, kuten $ax^2 + c$.
- Derivaatta kulkee pisteiden $(0, 3$ ja $(6, \frac{3}{2})$ kautta.
- Yhtälöparia muodostettaessa derivaattafunktiota kannattaa käyttää muodossa $f'(x) = \frac{ax^2+c}{x^2}$.

Tähän tehtävään on paljon oikeita vastauksia, yksi mahdollinen derivaattafunktio on $f'(x) = \frac{2x^2-18}{x^2}$, johon päästään derivoimalla funktio $f(x) = \frac{2x^2+18}{x}$.

Pohdintatehtävä C.6
Oikeat vastaukset:
1. c)
2. g)
3. e)
4. b)
5. f)

Ylimääräisiksi siis jäävät a) ja d).

E Harjoitustehtävien vastaukset

A.1 Tulon derivaatta

1. Suurin arvo on 36 ja pienin -12.
2. $\cos^2(x) - \sin^2(x)$
3. $2(x - 2x^2)\cos(x) + 2(1 - 4x)\sin(x)$
4. Lyhyempi sivu 25 m ja rannan suuntainen pidempi sivu 50 m.
5. Lipun hinta 33 e, jolloin tuotto nousisi 5290 e.

B.1 Osamäärän derivaatta

1. $f'(x) = \frac{9-4x}{x^4}$.
2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
3. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
4. Suurin arvo 5, kun $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
   Pienin arvo on $\frac{5}{7}$, kun $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. Ilmaantuvuus suurimmillaan noin 3,8 mikä saavutettiin noin 1,2 kuukauden kuluttua ensimmäistä tartunnasta.

C.1 Rationaalifunktion derivaatta

1. $f'(x) = \frac{4(3x^3+18x^2+4)}{(x+4)^2}$
2. $f'(x) = \frac{-2x^2-12x+1}{(2x^2+1)^2}$
3. Paikallinen minimikohta 0 ja paikallinen maksimikohta 12.
4. Vastaus riippuu valitsemastasi lieriöstä.
   Pinta-alan funktioksi saadaan lieriölle $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
5. $r = \frac{3}{4}R$