Espacio, Tiempo y Forma, Serie VI, Geografía, t. IV, 1991, págs. 13-78

La técnica factorial y su aplicación en el campo geográfico

JOSÉ MIGUEL SANTOS PRECIADO *

1. INTRODUCCIÓN

Cada vez resulta más frecuente que el investigador de las ciencias sociales disponga de un volumen de información creciente y difícil de manipular. En el campo de la ciencia geográfica, esta circunstancia se manifiesta en la disponibilidad de una extensa matriz de datos (lugares × variables) (fig. 1), resultado de la medición de un conjunto de atributos o características en una base o retícula espacial.

La reducción del tamaño de esta matriz geográfica puede realizarse comprimiendo la dimensión de sus dos direcciones perpendiculares. La disminución del número de columnas, lugares o individuos geográficos se puede lograr fácilmente mediante la agregación de los mismos en unidades espaciales de orden superior. Así, sería posible agrupar las secciones censales en barrios, o estos últimos en distritos, y, continuando en orden ascendente en municipios, provincias, regiones, países, etc. La agregación simplifica el trabajo científico de la interpretación, pero a costa de una importante pérdida de la información. No siempre, además, es posible realizar esta operación. En ocasiones, el mismo problema que tratamos de investigar nos obliga a la elección de un nivel de escala determinado y el mosaico espacial que sirve de receptáculo a la recogida de la información nos viene impuesto de antemano.

* Departamento de Geografía. UNED.

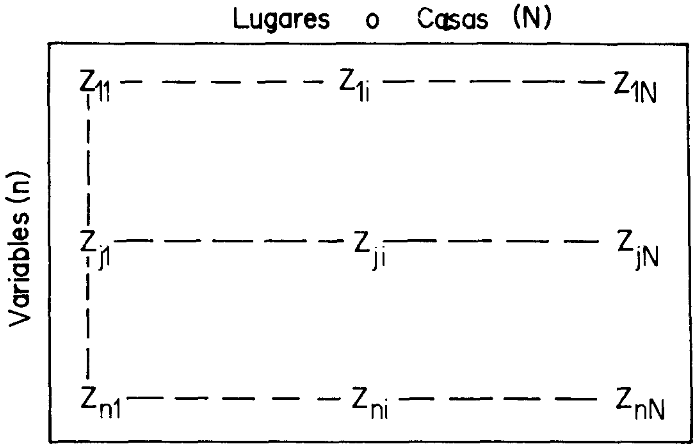

Fig. 1. Matriz geográfica (variables × lugares)
Fuente: Elaboración Personal (E.P.)

A veces, resulta más sencillo reducir el número de filas o variables. El análisis factorial es un método estadístico que pretende, precisamente, sintetizar la información en un número de variables mínimo e imprescindible. Aparecen en Geografía frecuentes ejemplos de la existencia de una información redundante. Si con la finalidad de estudiar las características de un determinado paisaje agrario hemos seleccionado datos relativos a la altitud, volumen de precipitaciones, porcentaje de pastos, etc., es muy probable que estas diferentes variables estén expresando una misma realidad, que podría ponerse de manifiesto mediante una única variable que represente a todas ellas. De la misma manera, es fácil encontrar, en un estudio urbano, una elevada correspondencia entre el nivel de salarios, el número de automóviles por cada cien habitantes y la calidad de vivienda por poner otro ejemplo de características similares. A estas nuevas variables, capaces de concentrar la información las denominamos factores.

Fácilmente, se habrá podido adivinar que la perspectiva del análisis factorial es doble:

a) Por una parte, este procedimiento estadístico permite progresar en lo que se ha venido denominando como «economía de la descripción» (MATHER, P. 1976). Se pretendería, por tanto, evitar la redundancia de la información.

b) Pero, además, y esto es quizás lo más importante, esta primera orientación no impide la utilización del método desde una óptica explicativa, bien en la interpretación de los resultados obtenidos (relación entre el grupo de variables representativas de cada factor), bien en la elaboración de una hipótesis previa, para la que se seleccionan una serie de variables de partida.

El modelo matemático subyacente en la técnica factorial no es sencillo, por lo que nos hemos propuesto, en un intento de hacerla accesible, al máximo, realizar nuestra exposición a distintos niveles. Para ello, en una primera etapa, describiremos las principales fases que integran el modelo factorial de forma intuitiva, utilizando un ejemplo sencillo que nos sirva, tanto para comprobar las principales relaciones matemáticas del mismo, como para facilitar la interpretación de los resultados de tan importante técnica estadística. Separamos, en un apéndice técnico final, una exposición más detallada del método, pensando en aquellas personas que estén interesadas en profundizar en los fundamentos de este procedimiento de análisis.

Consideramos, sin embargo, que el objetivo principal de este trabajo es el de ayudar a comprender aquellas fases del método factorial que menos tienen que ver con su contenido matemático, a saber: el planteamiento de la problemática que el mismo puede ayudar a solucionar y la interpretación de los resultados obtenidos en cada circunstancia de análisis concreto. Con esta finalidad, desarrollaremos varios ejemplos específicos sobre las diversas perspectivas en las que el modelo factorial es utilizado.

II. EL MODELO DEL ANÁLISIS FACTORIAL. LAS RELACIONES FUNDAMENTALES

Ya hemos indicado, en la introducción, que el objetivo básico del análisis factorial consiste en transformar la primitiva matriz geográfica (variables × lugares) de dimensión $n \times N$ (n equivale al número de variables y N al de lugares) en una nueva matriz geográfica (factores × lugares), de dimensión más reducida $m \times N$, donde las nuevas variables o factores concentren la información de manera sintética (fig. 2).

El primer problema que se presenta en el modelo factorial es el de descubrir cuál es el número de factores mínimo (m), capaz de sustituir a

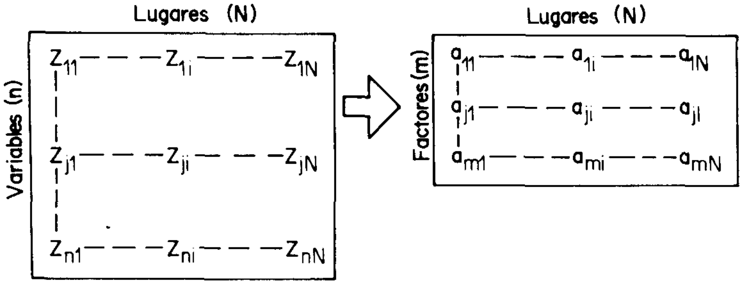

Fig. 2. El objetivo básico del A.F.: la reducción de tamaño de la matriz de datos
Fuente: E.P.

las variables de partida. Teóricamente, al menos, este problema como vamos a comprobar, puede tener una solución exacta.

En lenguaje geométrico, el más accesible desde un punto de vista intuitivo, podemos representar, gráficamente, a cada variable, por un vector de módulo unitario (longitud igual a la unidad). La relación de cada dos variables, medida por el coeficiente de correlación de Pearson, equivale al coseno del ángulo formado por ambos vectores representativos de las variables, situados en un origen común (fig. 3).

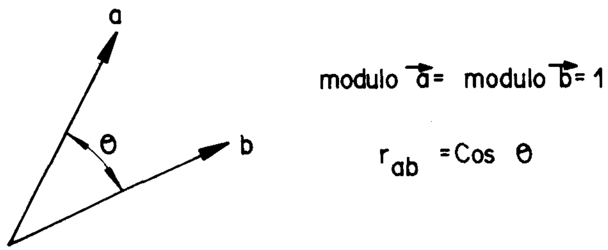

Fig. 3. Representación gráfica de variables. Significado geométrico del coeficiente de correlación de Pearson
Fuente: E.P.

De acuerdo al propio significado del coeficiente de Pearson, su valor puede variar entre los valores extremos de 1 y −1, pudiéndose presentar diversas situaciones (fig. 4):

— Las variables 1 y 2 tendrían una correlación máxima positiva, igual a la unidad, al tener la misma dirección y ser nulo el ángulo que forman (cos 0° = 1).

— Las variables 1 y 3 tendrían una correlación máxima negativa, igual a −1, al estar situadas en la misma dirección, pero en sentidos opuestos (cos 180° = −1).

— Las variables 1 y 4 tendrían una correlación nula, al ser perpendiculares entre sí ($\cos 90° = 0$).

— Las variables 1 y 5 tendrían una correlación mayor que las variables 1 y 6, al estar más próximas y ser inferior al ángulo que forman (si $\theta_1 < \theta_2$, $\cos \theta_1 > \cos \theta_2$).

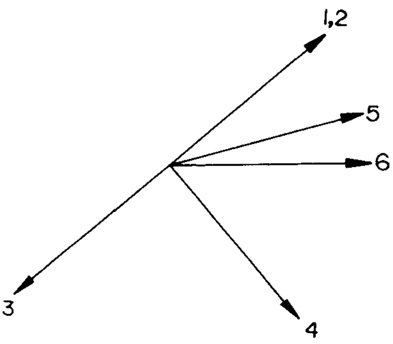

Fig. 4. Significado geométrico del coeficiente de correlación de Pearson
Fuente: E.P.

Quiere esto significar, que las «n» variables del caso general a que nos estamos refiriendo formarían una estructura relacional, entre cada dos variables, de manera, que el ángulo que formaran, cumpliría la condición de que su coseno fuera igual al coeficiente de correlación de Pearson de ambas variables. Si el número de variables fuera únicamente dos, su representación sobre un plano sería muy sencilla, tal como vimos en la figura 3. Sin embargo, si el número de variables fuera de tres se necesitaría, en general, un espacio de tres dimensiones para poder representarlas, ya que los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3, resultantes de las relaciones entre cada dos variables no tienen porqué cumplir la relación $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ (situación en la que las tres variables estarían representadas en un plano) y los vectores formarían un ángulo triedro (fig. 5).

A partir de tres variables, y de manera general, sería ya imposible representar geométricamente la posición entre ellas, al necesitarse un espacio de más de tres dimensiones.

Con objeto de facilitar la explicación, supongamos un ejemplo de seis variables, de manera que sus correlaciones hagan posible la representación en un mismo plano. Teóricamente, es posible imaginar esta situación, que, normalmente, necesitaría de un espacio de seis dimensiones. Si los vectores representativos de cada variable ocuparan las posiciones

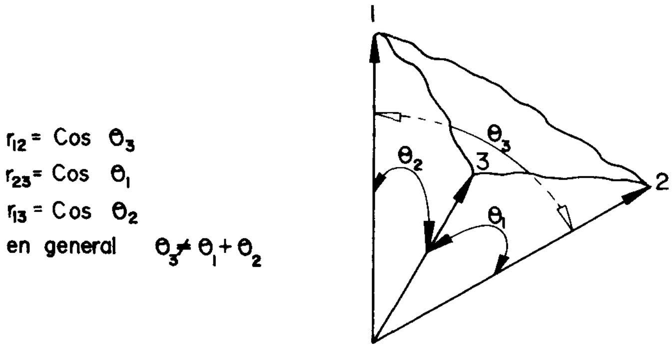

Fig. 5. Disposición general de tres variables
Fuente: E.P.

de la figura 6, las correlaciones entre cada dos variables podrían ser ordenadas según una matriz cuadrada, simétrica (ya que el coeficiente de correlación entre i y j es equivalente al existente entre j e i; rij = rji), y de valores unitarios en la diagonal (ya que el coeficiente de correlación de Pearson de una variable consigo misma es igual a la unidad).

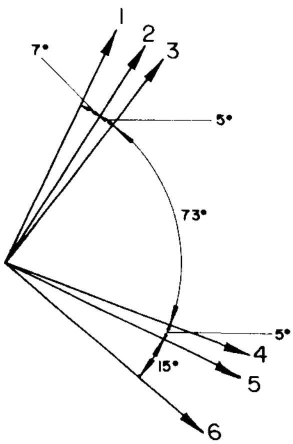

Fig. 6. Estructura de variables
Fuente: E.P.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & \cos 0^\circ & \cos 7^\circ & \cos 12^\circ & \cos 85^\circ & \cos 90^\circ & \cos 105^\circ \\
2 & \cos 7^\circ & \cos 0^\circ & \cos 5^\circ & \cos 78^\circ & \cos 93^\circ & \cos 98^\circ \\
3 & \cos 12^\circ & \cos 5^\circ & \cos 0^\circ & \cos 73^\circ & \cos 78^\circ & \cos 93^\circ \\
4 & \cos 85^\circ & \cos 78^\circ & \cos 73^\circ & \cos 0^\circ & \cos 5^\circ & \cos 20^\circ \\
5 & \cos 90^\circ & \cos 93^\circ & \cos 78^\circ & \cos 5^\circ & \cos 0^\circ & \cos 15^\circ \\
6 & \cos 105^\circ & \cos 98^\circ & \cos 93^\circ & \cos 20^\circ & \cos 15^\circ & \cos 0^\circ \\
\hline
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0{,}993 & 0{,}978 & 0{,}087 & 0 & -0{,}259 \\
 & 1 & 0{,}996 & 0{,}208 & -0{,}052 & -0{,}139 \\
 & & 1 & 0{,}292 & 0{,}208 & -0{,}052 \\
 & & & 1 & 0{,}996 & 0{,}940 \\
 & & & & 1 & 0{,}965 \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

Si lográramos, por tanto, como en el caso de la figura 7 poder colocar los vectores en un mismo plano, habríamos encontrado la posibilidad de reducir a dos dimensiones el fenómeno manifestado por las seis variables diferentes. En otras palabras, podríamos seleccionar dos únicos ejes de referencia, perpendiculares e independientes (correlación nula entre ellos), a partir de los cuales poder expresar las relaciones existentes entre el conjunto de todas las variables. Estos dos ejes (I y II) se corresponderían con los dos factores de la estructura simple.

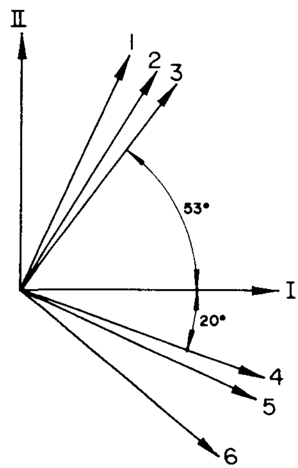

Fig. 7. Situación de la estructura de variables respecto a la estructura factorial
Fuente: E.P.

En esta primera fase del análisis factorial, interesa, principalmente, descubrir el número de factores o nuevas variables que son capaces de estructurar la información de partida. Estos factores estarían relacionados con las antiguas variables según una matriz, denominada «matriz factorial», de forma que las relaciones de cada factor con cada variable se correspondería con el coeficiente correlación de Pearson existente entre ambos. En el caso que nos ocupa, y de acuerdo a los ángulos que cada variables forma con los ejes factoriales, esta matriz factorial sería la siguiente:

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & \text{I} & \text{II} \\
\hline
1 & \cos 65^\circ & \cos 25^\circ \\
2 & \cos 58^\circ & \cos 32^\circ \\
3 & \cos 53^\circ & \cos 37^\circ \\
4 & \cos 20^\circ & \cos 110^\circ \\
5 & \cos 25^\circ & \cos 115^\circ \\
6 & \cos 40^\circ & \cos 130^\circ \\
\hline
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
0{,}423 & 0{,}906 \\
0{,}530 & 0{,}848 \\
0{,}602 & 0{,}799 \\
0{,}940 & -0{,}342 \\
0{,}906 & -0{,}423 \\
0{,}766 & -0{,}642
\end{bmatrix}
$$

Quizás, sea éste el momento de adelantar el significado clave de la matriz factorial, tan importante para interpretar los resultados de esta técnica de análisis. La varianza de cada variable (que es tanto como decir la diversidad, en esa variables, de los diversos lugares) es igual a la unidad, debido a que en la matriz de puntuacionez Z, las variables se presentan tipificadas (media nula y varianza unitaria). Una de las relaciones fundamentales del análisis factorial indica que este valor unitario se corresponde con la suma de los cuadrados de los coeficientes factoriales pertenecientes a cada variable. En nuestro caso, es fácil comprobar esta relación para las seis variables:

$$
\begin{gathered}
0{,}423^2 + 0{,}906^2 = 1 \\
0{,}530^2 + 0{,}848^2 = 1 \\
0{,}602^2 + 0{,}799^2 = 1 \\
0{,}940^2 + (-0{,}342)^2 = 1 \\
0{,}906^2 + (-0{,}423)^2 = 1 \\
0{,}766^2 + (-0{,}642)^2 = 1
\end{gathered}
$$

Por tanto, la varianza total del conjunto de las variables sería igual a 6 y se repartiría entre los dos factores, de acuerdo a la suma de cuadrados de los coeficientes factoriales. La parte de la varianza explicada por el primer factor sería pues:

$$0{,}423^2 + 0{,}530^2 + 0{,}602^2 + 0{,}940^2 + 0{,}906^2 + 0{,}766^2 = 3{,}113$$

que expresada de forma porcentual sería:

$$\frac{3{,}113}{6} \times 100 = 51{,}88\ \%$$

El resto de la varianza estaría, lógicamente, concentrada en el otro factor:

$$0{,}906^2+0{,}848^2+0{,}799^2+(-0{,}342)^2+(-0{,}423)^2 +(-0{,}642)^2=2{,}8864$$

$$\frac{2{,}8864}{6}\times 100=48{,}12\ \%$$

Esta primera fase del análisis factorial se conoce con el nombre de factorización y en ella se pretende descubrir el número de factores (inferior al de variables), capaz de explicar la varianza total. En la realidad, es muy difícil encontrar una estructura relacional entre las variables que cumpla esta condición, por lo que deberemos contentarnos con hallar el número mínimo de factores que explique el máximo de la varianza, despreciando aquellos que no alcanzan un valor aceptable (en general los que no alcanzan, tan siquiera, el valor 1, que tendrían, por tanto, una fuerza explicativa inferior al de cualquier variable).

La segunda fase de la técnica factorial es la rotación. Consiste la misma en producir un giro de los ejes factoriales con el objetivo de conseguir que la relación entre los factores y las variables sea o bien máxima (próxima a la unidad en valor absoluto) o bien mínima (próxima a cero). Esta nueva operación intenta encontrar el significado de cada factor, deducido de las variables con las que tiene mayor semejanza. Siguiendo con el ejemplo anterior, si realizáramos un giro de 30° de los ejes factoriales en el sentido de las agujas del reloj, la nueva situación de las variables respecto a ellos sería la de la figura 8.

La matriz de correlaciones entre las variables continuaría siendo la misma, ya que la posición relativa entre ellas no habría variado, aunque sí lo habría hecho la matriz factorial:

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & \text{I} & \text{II} & \\
\hline
1 & \cos 95^\circ & \cos 5^\circ & \\
2 & \cos 88^\circ & \cos 2^\circ & \\
3 & \cos 83^\circ & \cos 7^\circ & \\
4 & \cos 10^\circ & \cos 80^\circ & = \\
5 & \cos 5^\circ & \cos 85^\circ & \\
6 & \cos 10^\circ & \cos 100^\circ & \\
\hline
\end{array}
\begin{bmatrix}
0{,}087 & 0{,}996 \\
0{,}035 & 0{,}999 \\
0{,}122 & 0{,}993 \\
0{,}985 & 0{,}1736 \\
0{,}996 & 0{,}087 \\
0{,}985 & -0{,}1736
\end{bmatrix}$$

De esta nueva situación, podría deducirse la existencia de una fuerte

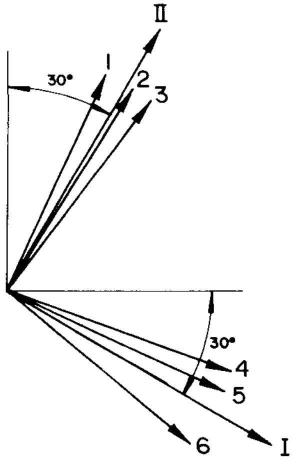

Fig. 8. Rotación de los ya factoriales respecto a la estructura de las variables.

relación entre las variables 4, 5 y 6 con el factor I y de las variables, 1, 2 y 3 con el factor II. El significado de cada factor estaría relacionado, en consecuencia, con alguna característica común a dichas variables.

Al realizar la operación de la rotación, el porcentaje de la varianza explicado por cada factor puede variar, aunque se conserva el valor total. Así, para el factor I, la varianza sería en este caso:

$$(-0{,}087)^2 + 0{,}035^2 + 0{,}122^2 + 0{,}985^2 + 0{,}996^2 + 0{,}985^2 = 2{,}9560$$

$$\frac{2{,}9560}{6} \times 100 = 49{,}27\ \%$$

Mientras que en el segundo factor, se concentraría la varianza restante.

$$0{,}996^2 + 0{,}999^2 + 0{,}993^2 + 0{,}1736^2 + 0{,}087^2 + (-0{,}1736)^2 = 3{,}0441$$

$$\frac{3{,}0441}{6} \times 100 = 50{,}73\ \%$$

El análisis factorial concluiría, al menos en su parte técnico-matemática, obteniendo la matriz de las notaciones factoriales; es decir, aquellos valores de los factores o nuevas variables, en cada uno de los lugares o elementos espaciales de referencia.

A modo de recapitulación, podemos señalar la existencia en el modelo factorial de cuatro fases perfectamente diferenciadas (figura 9). Serían ellas:

1) Preparación del material empírico, base de la investigación (matríz geográfica o matriz de puntuaciones).

2) Factorización (obtención de la matriz factorial).

3) Rotación (obtención de la matriz factorial rotada).

4) Interpretación de los resultados (tanto de la matriz de notaciones factoriales como de la matriz factorial rotada).

Las fases segunda y tercera son puramente mecánicas y pueden obtenerse los resultados, mediante la aplicación de un programa informático, después de seleccionar el procedimiento de cálculo más adecuado, tanto para la factorización (método de los factores principales o componentes principales, etc.) como para la rotación (varimax, biqmartimin, oblicua, etc.) (ver anexo final). Sin embargo, el éxito o fracaso en la apli-

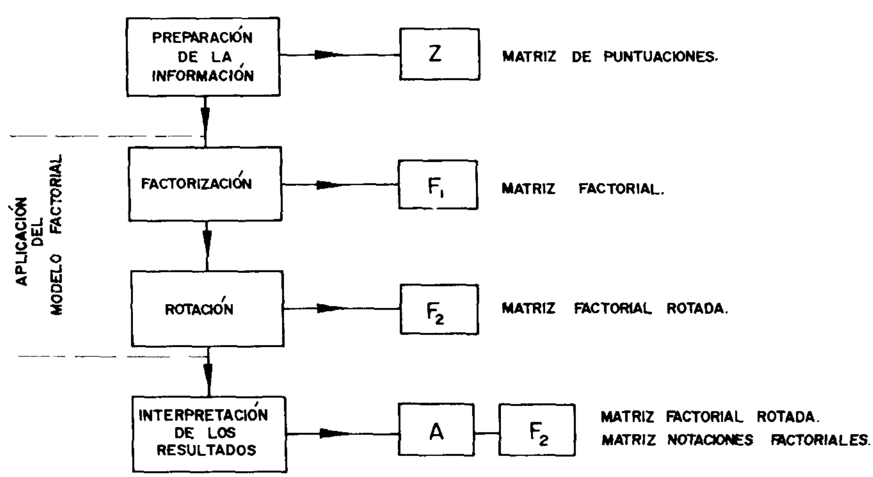

Fig. 9. Fases del análisis factorial.

cación de la técnica factorial se encuentra en la fase previa o de selección de las variables y de las unidades espaciales de partida y en la fase última de interpretación de los resultados. Una selección inadecuada de las variables, tanto en número como en significado, así como de las unidades espaciales de referencia, puede introducir elementos espúreos que distorsionen los resultados alcanzados.

De momento, en el siguiente apartado, vamos a exponer varios ejemplos específicos, donde puede deducirse la utilidad y el campo de aplicación de esta técnica estadística.

III. LA APLICACIÓN DEL MODELO FACTORIAL EN EL CAMPO GEOGRÁFICO

La aplicación del modelo factorial a una matriz de datos (variables x lugares) es independiente del problema científico que se desea resolver. Tanto la fase precedente, de selección de las variables y de los individuos geográficos, como la posterior, de interpretación de los resultados, aparecen como fundamentales frente a la utilización mecánica del modelo estadístico.

El análisis factorial se viene usando de dos maneras diferentes, según exista o no una teoría previa que guíe la investigación. El planteamiento más fructífero del método sería aquel que partiera del conocimiento del proceso que genera la covariación, con vistas a formular hipótesis acerca de la estructura causal existente entre las variables observadas y los factores. De acuerdo a esta vía de actuación, se trataría de intervenir en la selección de las variables y lugares de recogida de la información (primera fase del análisis factorial), mediante, al menos, un esquema teórico orientador de la realidad geográfica. Así mismo, en la cuarta y última fase de aplicación del modelo factorial, se confirmarían, por la regularidad de los resultados obtenidos, las hipótesis establecidas en la fase inicial de la investigación (fig. 10).

En el caso contrario, nos hallaríamos frente a un análisis factorial exploratorio, que, normalmente, pretende realizar un sondeo en una elevada masa de información, con la esperanza de encontrar las dimensiones fundamentales que expliquen la mayor parte de la covarianza de las variables de partida. En esta vía de empleo, se invierte el orden natural que debe presidir toda investigación racional. Se intenta deducir, a «posteriori», por los resultados finales, relaciones interesantes desde el punto

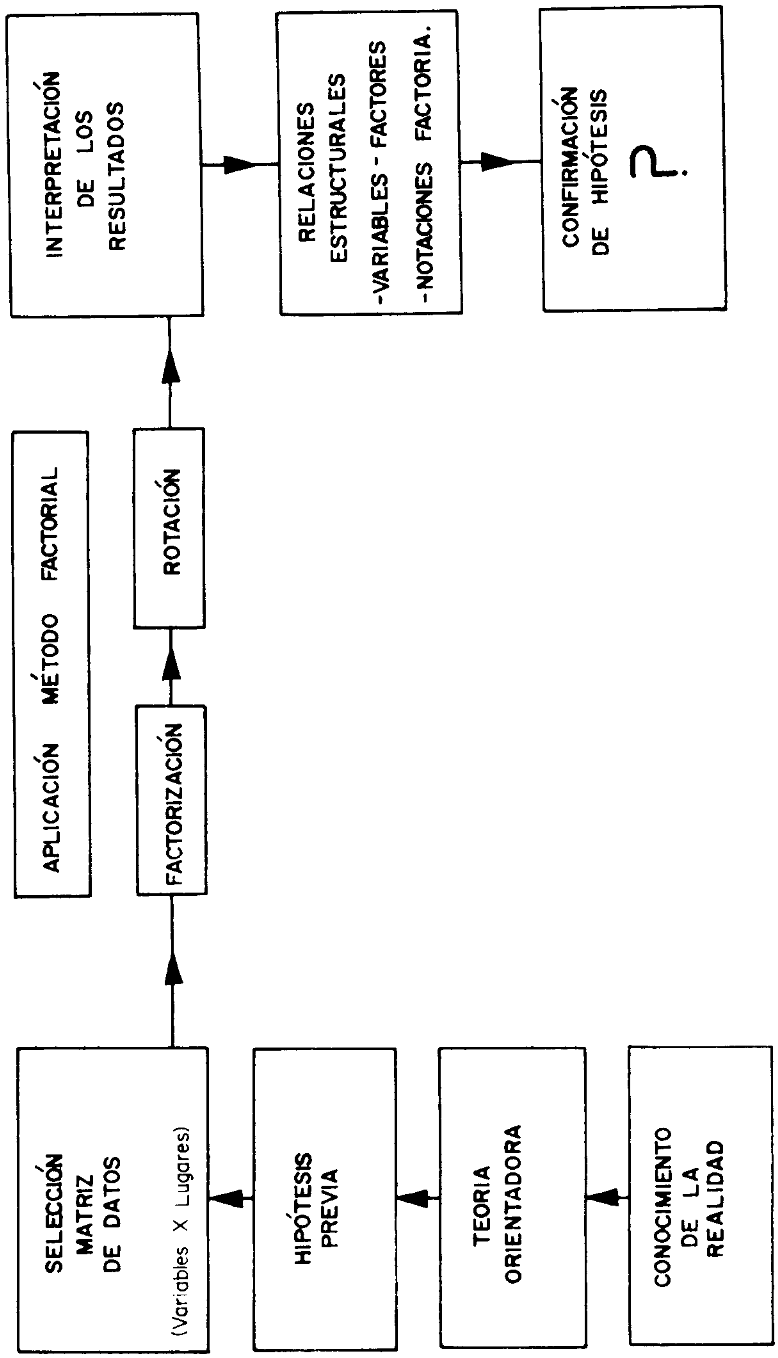

Fig. 10. Fases del modelo factorial, con una teoría orientadora de la realidad.

de vista geográfico. Se corre el riesgo, sin embargo, de reflejar más los factores espúreos derivados de la propia información existente que los rasgos básicos del fenómeno que se desea describir.

Esta manera de actuar puede estar justificada, en algunas ocasiones, para depurar la matriz de datos inicial y como forma de sugerir, mediante un tratamiento inductivo de la misma, las relaciones fundamentales que explican la organización de la información (fig. 11). Es raro, sin embargo, que el análisis exploratorio se realice sin que la selección de las variables obedezca a una idea preconcebida sobre la realidad, aunque no quede explicitada de forma suficiente.

Desde una óptica explicativa, el modelo factorial viene utilizándose de diferentes maneras:

1. En primer lugar, la técnica factorial se aplica en la elaboración de un esquema teórico general, siempre que determinadas dimensiones fundamentales confirmen la existencia de una estructura espacial dominante e invariante, tanto espacial como temporalmente. Esta perspectiva teórica general ha sido empleada en el análisis de las estructuras urbanas, con un carácter inductivo (ecología factorial), tratando de encontrar las dimensiones básicas de la diferenciación interna de la ciudad a partir de una elevada masa de información contenida en los censos de población. Los resultados han confirmado la existencia de tres factores principales, que pueden interpretarse como indicadores del estatus socio-económico, del estatus familiar y de la composición étnica. Este esquema resulta modificado según las coordenadas socio-económicas y culturales del área donde se realiza el análisis, así como por las características específicas de la información introducida.

2. Una segunda aplicación del método factorial ha sido la confirmación de una hipótesis previamente establecida, dentro de un esquema teórico que conduzca la investigación. No se trata, por tanto, de corroborar una teoría general permanente, como ocurriría en el caso anterior, sino de hacer explícitos determinados aspectos parciales de la realidad. La elevada correlación de un grupo de variables entre sí y con un factor determinado, o la regularidad espacial de los individuos geográficos en un factor concreto pueden corroborar la existencia de alguna relación geográfica previamente planteada.

3. Por último, la Geografía, como cualquier otra disciplina, se plantea la necesidad de clasificar, en un limitado número de categorías, los objetos con los que trabaja. Constituye, normalmente, esta operación, la primera fase de la investigación, definida como taxonómica y su objetivo desde un punto de vista geográfico puede ser doble. Se trataría de reducir el número de objetos geográficos (ciudades, municipios, áreas espaciales

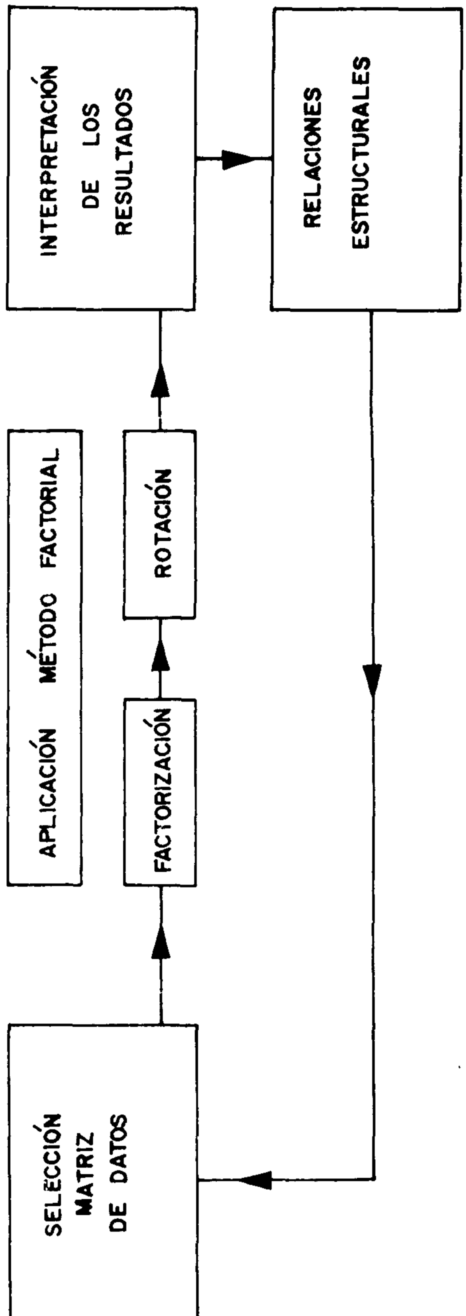

Fig. 11. Aplicación sucesiva del modelo factorial, con el objetivo de depurar la información o sugerir una nueva matriz de datos.

homogéneas en uso del suelo... etc.), bien con la idea de encontrar unos objetos teóricos-tipo que concentraran los principales rasgos de la diversidad observada en la realidad (clasificación tipológica), bien buscando el agrupamiento de los mismos en unidades geográficas, contigüas espacialmente, y de características semejantes (regionalización).

El análisis factorial se muestra a este respecto como un método particularmente favorable a la consecución de ambos objetivos. En el primer caso, porque por su propia esencia, este modelo estadístico logra obtener mediante los factores, las dimensiones básicas de un conjunto de variables, que bien seleccionadas, pueden ser interpretadas como los rasgos fundamentales de un objetivo tipo teórico. En el segundo, porque la capacidad de síntesis del modelo factorial permite concentrar la información, fase previa necesaria en toda metodología de regionalización.

Con objeto de facilitar la comprensión de las diversas vías de aplicación anunciadas, vamos a detallar los resultados obtenidos en tres ejemplos concretos. Con esta finalidad, realizamos, en primer lugar, una introducción a la problemática que queremos analizar, deteniéndonos a continuación en las dos fases fundamentales de la técnica factorial: la selección de las variables de partida y el análisis de los resultados.

3.1. El análisis de la estructura urbana: el caso del municipio de Parla

a) Introducción

Parla es un municipio del suroeste de Madrid, situado a 20 km del centro de la capital, cuyo crecimiento se ha visto condicionado por la expansión metropolitana desde mediados de los años sesenta. La dinámica urbana de la aglomeración madrileña se vio revitalizada, desde aquella fecha, como consecuencia de la concentración de la población y recursos en determinadas áreas del país, fenómeno característico en el paso de una sociedad agraria a otra de carácter industrial.

La configuración territorial de estas grandes áreas metropolitanas se ha producido en diversas etapas, con una diferenciación funcional progresiva en el espacio y una contínua expansión hacia el exterior. En una primera fase, el crecimiento se centró en el propio municipio de Madrid, pero a partir de 1960 se produjo un salto hacia los municipios colindantes situados en la proximidad. De esta manera, los terrenos cercanos a sus núcleos urbanos fueron destinados a la edificación de viviendas e industrias, aprovechando la abundancia de suelo urbanizable y su reducido precio respecto al centro de la metrópoli. El sector suroeste madrileño, por sus especiales condiciones urbanísticas (lugar tradicional de asentamiento de la industria, suelo favorable a la construcción, red articulada de carreteras, etc.), fue convirtiéndose en una zona segregada de la ciudad, especializada en las funciones residencial e industrial y capaz de albergar un porcentaje importante de las clases trabajadoras que inmigraban a Madrid procedentes del campo, o bien de matrimonios jóvenes de menores recursos económicos que eran expulsados por el mecanismo del mercado desde el centro hacia la periferia. La difusión de este fenómeno metropolitano alcanzó, en primer lugar, a los municipios situados a menor distancia de la capital (Getafe, Leganés y Alcorcón) y a continuación, una vez ocupada la mayor parte de su suelo edificable, en una segunda fase, a los municipios más alejados de la segunda corona metropolitana (Móstoles, Fuenlabrada y Parla) (fig. 12).

Esta breve historia del desarrollo urbano del suroeste madrileño, nos va a servir de marco introductorio para analizar la estructura urbana del municipio de Parla, utilizando para ello la técnica factorial. Tanto la se-

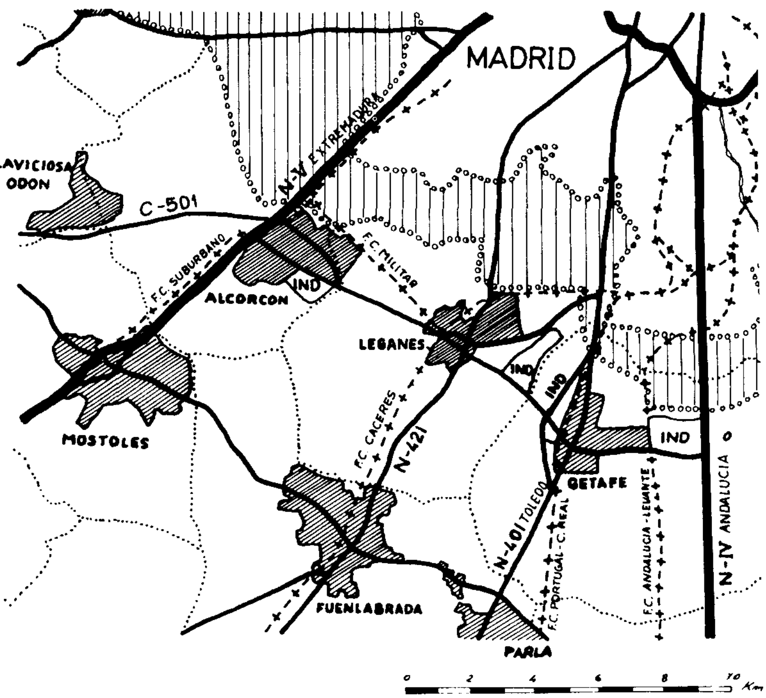

Fig. 12. Situación de los municipios del sector suroeste metropolitano madrileño. Fuente: E.P.

lección de las variables de partida como la interpretación de los resultados la realizaremos a la luz del conocimiento de la realidad urbana de esta importante zona de la ciudad, no de manera aislada, sino global, como parte integrante de la estructura metropolitana.

b) Planteamiento del problema: selección de las variables del análisis

El crecimiento del municipio de Parla, como hemos podido deducir de la introducción anterior, se concentró, temporalmente, en un reducido número de años. En 1960, su población apenas alcanzaba la cifra de 1.800 habitantes, presentando su espacio edificado las características de un núcleo rural típico, con un reducido índice de crecimiento, lo que permitía albergar, sin grandes problemas, el nuevo tejido urbano generado. El cambio en el modelo de crecimiento tuvo lugar durante la década de los años sesenta, primero de forma lenta, hasta casi finales del período y luego de manera más rápida, hasta alcanzar en 1970 un volumen de población de 10.317 habitantes. Sin embargo, el despegue definitivo del municipio aconteció durante la década siguiente, momento del salto de determinadas funciones urbanas a los municipios de la segunda corona metropolitana. A comienzos de los años ochenta, el municipio de Parla tenía una población de 56.318 habitantes, situación que prácticamente no se ha modificado durante la última década.

El débil incremento de la población, en este último período (fig. 13), ha sido más la consecuencia del crecimiento natural que de las corrientes migratorias procedentes del exterior.

La estructura urbana del municipio se ha ido configurando, en primer término, en el casco urbano antiguo, al ser derribadas las anteriores edificaciones rurales siendo sustituidas por otras de varias plantas de altura. La trama viaria se ha mantenido en esta parte de la ciudad, con una tipología de edificios irregulares, donde al lado de viviendas unifamiliares y viejas casas rurales se encuentran edificios de cuatro o cinco plantas, muy heterogéneas, que rompen la uniformidad anterior. Pero donde verdaderamente se ha transformado el municipio, ha sido en el espacio que rodea al antiguo núcleo urbano, donde la existencia de suelo abundante ha permitido la materialización de operaciones inmobiliarias de gran tamaño, dirigidas a una población, en general, de bajos recursos económicos.

Presuponemos, por tanto, ya de partida, que los factores espaciales que van a servir para explicar la distribución espacial diferenciada de la población (en sus características demográficas y sociales) son: por una parte, el distinto momento de llegada al municipio, lo que se va a traducir en una diferenciación territorial de la estructura por edad, y por otro lado, las diferencias existentes en su nivel socio-económico. Teniendo en cuenta, que el mayor crecimiento se produjo en la década 1970-80, hemos seleccionado como importantes (desde la perspectiva de 1981, fecha del censo cuyos datos han sido empleados) los períodos de llegada al municipio en los dos lustros anteriores (0-4 años y 5-9 años de residencia respectivamente). Asimismo, los grupos de edad representados son los que poseen un mayor peso relativo en la estructura por edad del año 1981 (ver Cuadro I), que constituyen los grupos de personas que inmigraron masivamente al municipio durante los años setenta.

CUADRO I. ESTRUCTURA POR EDAD DEL MUNICIPIO DE PARLA (1981)

GRUPO DE EDAD	VALORES PORCENTUALES
0-4	17,5
5-9	13,2
10-14	8,6
15-19	5,7
20-24	8,0
25-29	13,4
30-34	11,2
35-39	6,8
40-44	4,4
45-49	3,3
50-54	2,4
55-59	1,7
60-64	1,1
65 y más	2,7

Fuente: Ayuntamiento de Parla.

Por todos estos motivos, fueron elegidas las 17 variables siguientes:

Estructura de la población por edad

1. Porcentaje de población de edad comprendida entre 0-4 años.
2. Porcentaje de población de edad comprendida entre 15-24 años.
3. Porcentaje de población de edad comprendida entre 25-34 años.
4. Porcentaje de población de edad comprendida entre 35-44 años.
5. Porcentaje de población de 65 años y más.

Tiempo de residencia en el municipio

6. Porcentaje de población cuya llegada al municipio se produjo entre 0-4 años.
7. Porcentaje de población cuya llegada al municipio se produjo entre 5-9 años.
8. Porcentaje de población cuya llegada al municipio se produjo hace más de 20 años.
9. Porcentaje de población natural del municipio.

Nivel de Instrucción

10. Porcentaje de población con titulación media y superior.
11. Porcentaje de población con título de BUP.
12. Porcentaje de población con título de FP.

Nivel socio-económico

13. Porcentaje de población de profesionales liberales y técnicas.
14. Porcentaje de población femenina de profesionales liberales y técnicas.
15. Porcentaje de población, jefes y personal administrativo medio y superior.
16. Porcentaje de trabajadores manuales de la industria y la construcción.

Otra variable

17. Porcentaje de población nacida en Madrid, de edad superior a los 19 años.

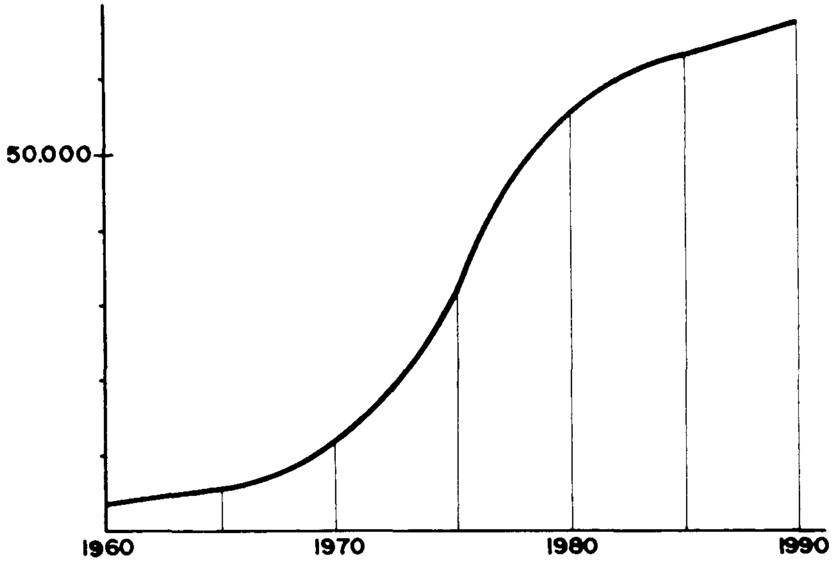

Fig. 13. Crecimiento de la población (municipio de Parla).
Fuente: E.P.

Los grupos de variables seleccionados se justifican, al suponer que los matrimonios jóvenes de edad comprendida entre 25 y 34 años, con niños de reducida edad, deben oponerse, tanto a la población de más edad, naturales del municipio, como a los matrimonios de edad superior a los 35 años, que debieron inmigrar unos años antes. Por su parte, diversas variables capaces de medir el nivel de instrucción y el nivel socioeconómico de la población deben reflejar, suficientemente, los agrupamientos naturales que se producen debido a este factor fundamental de la diferenciación residencial. El mercado de la vivienda, zonificado dentro de la ciudad, discrimina espacialmente los colectivos de personas de nivel de renta superior respecto a los de nivel más bajo. Por último, la variable 17 constituye un índice de medida de la población, que procedente de Madrid ha cambiado su lugar de residencia por la del municipio de Parla, y que en un porcentaje importante deben ser matrimonios jóvenes incapaces de obtener una vivienda en la capital adecuada a sus posibilidades económicas.

Las unidades espaciales se corresponden con las secciones censales definidas administrativamente para el municipio. En la figura 14 pueden apreciarse los 32 casos del análisis, habiéndose diferenciado con trazo más grueso el límite del casco urbano antiguo. Esta frontera de separación nos va a servir para interpretar con mayor facilidad los resultados obtenidos.

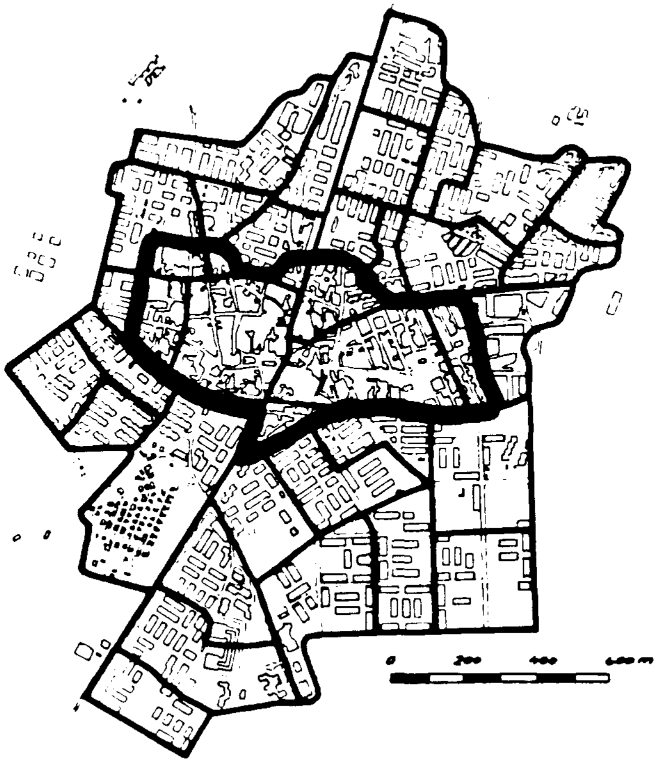

Fig. 14. Secciones censales del municipio de Parla y delimitación del casco antiguo. Fuente: Ayuntamiento de Parla y E.P.

c) Interpretación de los resultados

La matriz factorial correspondiente a la matriz de datos (17 variables × 32 lugares) es la del cuadro II. La acumulación de la varianza en los tres primeros factores es muy elevada, alcanzando el 81,38 %.

La existencia de estos tres factores fundamentales permite deducir algunas importantes conclusiones:

1. Ante la ausencia de datos relativos a la composición étnica, los dos primeros factores reflejan, en parte, los tradicionales índices de la mayoría de estudios de ecología factorial: el estatus socio-económico o rango social (factor 2) y el estatus familiar (factores 1 y 3). Este último, que, en general, aparece fuertemente correlacionado con la estructura demográfica, se presenta a su vez diferenciado en dos partes: una relativa

CUADRO II. MATRIZ FACTORIAL. MUNICIPIO DE PARLA.

	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3
Naturales del municipio	0,958	0,0	0,0
Población residente 20 años y más	0,956	0,0	0,0
Población de 65 años y más	0,951	0,0	0,0
Población procedente de Madrid	−0,872	0,277	−0,266
Población de edad 0-4 años	−0,718	0,0	−0,648
Población residente 0-4 años	−0,587	0,0	−0,750
Población de edad 25-34 años	−0,578	0,0	−0,623
Nivel instrucción título medio y superior	0,0	0,881	0,0
Población femenina (técnicos)	−0,316	0,837	0,0
Población total (técnicos)	−0,375	0,809	0,0
Nivel instrucción BUP	0,273	0,780	−0,413
Jefes y personal admitvo. medio y superior	0,0	0,762	0,0
Trabajadores manuales	0,0	−0,673	0,447
Nivel instrucción FP	−0,468	0,621	0,0
Población de edad 5-14 años	0,0	0,0	0,959
Población de edad 35-44 años	0,0	0,0	0,881
Población residente 5-9 años	−0,363	0,0	0,682
Varianza explicada	5,459	4,330	4,046
Porcentaje de varianza	32,11 %	25,47 %	23,80 %
Porcentaje acumulado	32,11 %	57,58 %	81,38 %

Fuente: E.P. Los valores inferiores a 0,250 se han igualado a cero

a los matrimonios más jóvenes (factor 1) y otro el de los matrimonios que inmigraron con anterioridad (factor 3).

2. El primer factor básico, de carácter bipolar, enfrenta a dos grupos de variables entre sí. Por una parte, estarían los matrimonio jóvenes con niños (cohortes de población de 25-34 años y 0-4 años de edad), y por otra, la población más envejecida (población de 65 años y más), natural del municipio. Esta oposición no refleja sino la componente dinámica del momento de llegada al municipio (elevada correlación positiva con la población residente hace más de 20 años y negativa con la que llegó los últimos cinco años).

3. El segundo factor representa el estatus social superior, circunstancia que se manifiesta en la elevada correlación positiva con las categorías socio-económicas más altas (técnicos y profesiones liberales, total y femenina, y jefes y administrativos medios y superiores) y negativas con las categorías más bajas (trabajadores manuales). Así mismo, los niveles de instrucción reflejan el mismo contenido factorial (fuerte correlación con el nivel de titulación media y superior, BUP, en menor medida de FP).

4. Por último, el tercer factor diferencia y representa a la población

de edad intermedia (35-44 años) que ha llegado al municipio en una etapa anterior (5-9 años de residencia en el mismo) y cuyos hijos tiene una edad más avanzada (5-14 años). Este factor posee, además, correlaciones negativas con los matrimonios jóvenes con niños menores de cinco años, que caracterizaban al primer factor.

Las notaciones factoriales de los tres primeros factores vienen representadas en las figuras 15, 17 y 18 , lo que nos ayuda a establecer las características básicas de la estructura urbana de Parla:

— Puede apreciarse una clara dicotomía centro-periferia, con la población envejecida y natural del municipio, que lleva más años viviendo en el mismo, asentada en el casco antiguo (fig. 15). En el resto de la superficie edificada, externa, la expansión urbana ha tenido lugar, en un primer momento, hacia el Norte, rellenándose posteriormente los ensanches promovidos en el Sur de la ciudad. Esta situación puede apreciarse en el estado de la edificación correspondiente a los años 1972 y 1975

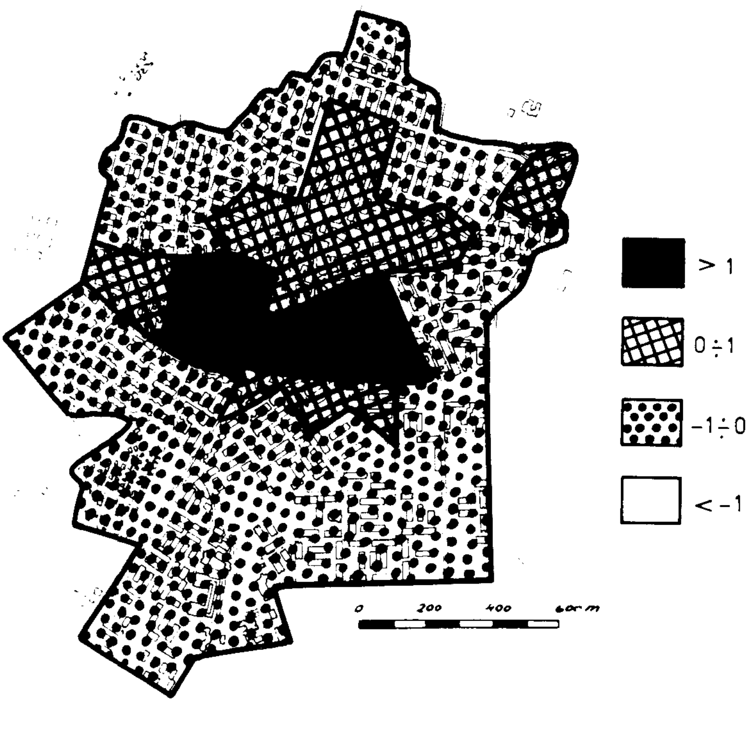

Fig. 15. Distribución espacial del factor 1. Parla.

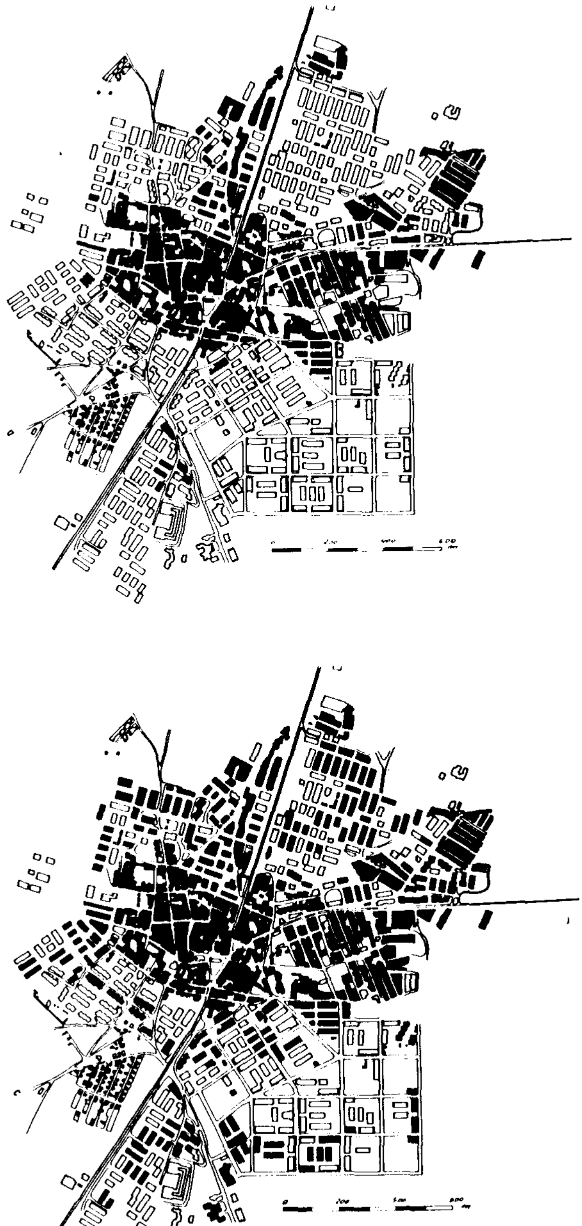

Fig. 16. Estado de la edificación. 1972 y 1975. Parla.

(fig. 16), obtenida mediante fotografía aérea, que muestre bien a las claras el desigual desarrollo urbano alcanzado por áreas de la ciudad.

Las diferentes fases de ocupación se ponen de manifiesto en las notaciones factoriales más bajas del primer factor, situadas al Sur del núcleo urbano residencial (que coinciden con la ocupación por matrimonios jóvenes venidos los últimos años, 1975-81, ya que el primer factor muestra una correlación negativa con los mismos). Por contra, el factor 3 manifiesta una desproporción de orden inverso, ocupando mayor superficie en el Norte que en el Sur (fig. 17). Obsérvese, así mismo, como las áreas en las que prodominan, relativamente, los matrimonios de 35-44 años, correspondientes a este factor, muestran gran paralelismo con las de mayor crecimiento durante el período 1972-75.

— En lo que respecta a las notaciones factoriales de segundo factor, la mayor accesibilidad, determinada por la proximidad a la carretera Ma-

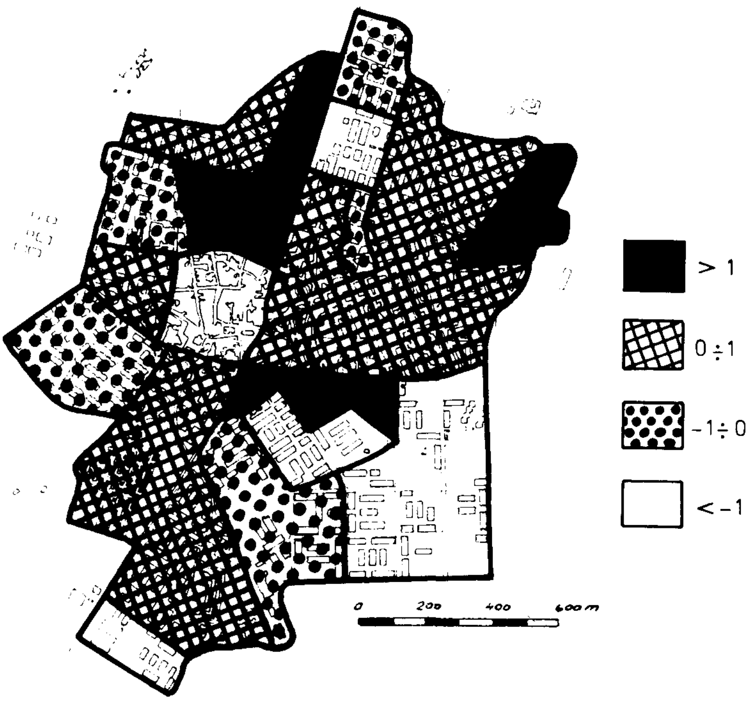

Fig. 17. Distribución espacial del factor 3. Parla

drid-Toledo, ha sido definitiva en la estructuración de la zona de mayor nivel social relativo (fig. 18).

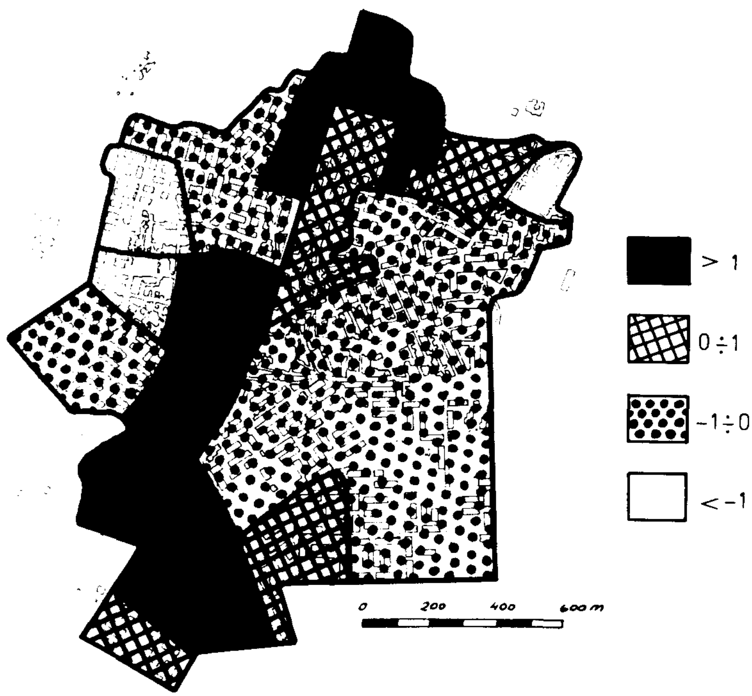

Fig. 18. Distribución especial del factor 2. Parla.

3.2. La confirmación de una hipótesis previamente planteada: la delimitación del Área Metropolitana de Madrid

a) Introducción

Este segundo ejemplo supone un intento de delimitar el área metropolitana madrileña, según criterios derivados de la funcionalidad diferencial adquirida por los municipios situados en la proximidad a la capital.

Las peculiaridades del fenómeno metropolitano traspasan las fronteras de un único país. Estas áreas, que como expusimos en el ejemplo anterior, integran un núcleo central y una serie de núcleos satélites, definen un gran mercado de producción y consumo, donde se establecen relaciones diarias cada vez más intensas de trabajo, recreo, compras, etc. La extensión de las mismas alcanza los límites, donde estas relaciones diarias son posibles, por lo que no es de extrañar que una mejora en los medios de transporte permita su expansión en el espacio.

La manera lógica de establecer los límites de una aglomeración metropolitana debería, según este criterio, partir de un conjunto de variables de flujos, que midieran la relación, que por motivos de trabajo, ocio y consumo diario, se establecen entre zonas fuertemente relacionadas entre sí. La dificultad de un estudio de esta naturaleza reside, a veces, en la inexistencia de datos que sobrepasen un área definida previamente. En el caso de Madrid, la ley del Área Metropolitana de 1963 definió, legalmente, un espacio metropolitano, integrado por 23 municipios, que, salvo ligeras modificaciones, sirven para recoger la información estadística de mayor interés del entorno de la ciudad. No es de extrañar, por tanto, que hayan surgido determinados municipios (Parla, Móstoles, Fuenlabrada y Alcalá de Henares, fundamentalmente), situados en el exterior del área metropolitana administrativa, con un acentuado dinamismo urbano y con una entidad suficiente como para poder ser considerados miembros integrantes de la misma.

Por este motivo, el intento de delimitar el área metropolitana madrileña, puede ser encarado desde presupuestos diferentes, aunque tratando de conservar el planteamiento básico subyacente en la primitiva idea. En consecuencia, podemos pensar que uno de los efectos principales del fenómeno metropolitano ha sido la concentración del empleo y de la población en áreas muy reducidas próximas al núcleo central. Si bien este hecho no garantiza por completo la integración de todas las unidades que cumplan estas características en un mercado común, podemos deducir indirectamente que la concentración del empleo y de la población debe producirse en las zonas que tengan un mayor nivel de relación entre sí.

b) Planteamiento del problema: selección de las variables del análisis

La posibilidad de integrar en un mismo factor varias variables que representen el fenómeno de la concentración de la población y el empleo en el espacio, así como su reflejo en unidades espaciales próximas a la capital, supondría la corroboración de la hipótesis planteada previamente. Con este motivo, hemos seleccionado variables que intentan sintetizar la concentración del empleo y población en 1980 (variables 1, 2, 3 y 11), el crecimiento de población de los espacios intercensales 1950-59, 1960-69 y 1970-79 (variables 4, 5 y 6), la estructura del empleo en 1980 (variables 8, 9, 13 y 17), la transformación de la estructura del empleo en la década 1970-79 (variables 12 y 18), la relación entre el empleo y la población (variables 16 y 19), la existencia de residencia secundaria (variables 14 y 15) y algunas características físicas como la altitud o la distancia a Madrid (variables 7 y 10). Constituyen todas ellas un compendio de información relativa al crecimiento de la población y el empleo, transformación del sector productivo y algunas otras características que pensamos podían *tener relación con el fenómeno metropolitano.*

Las variables eran las siguientes:

1. Población por unidad de superficie (1980).
2. Empleo terciario por unidad de superficie (1980).
3. Empleo secundario por unidad de superficie (1980).
4. Crecimiento intercensal de población 1960-69 (valor porcentual).
5. Crecimiento intercensal de población 1950-59 (valor porcentual).
6. Crecimiento intercensal de población 1970-79 (valor porcentual).
7. Distancia a Madrid en kms.
8. Porcentaje del empleo en el sector secundario (1980).
9. Porcentaje del empleo en el sector de la construcción (1980).
10. Altitud en metros.
11. Tamaño del empleo en trabajadores por planta (1980).
12. Incremento en porcentaje del terciario (1970-79).
13. Porcentaje del terciario-2 (Servicios Financieros, Administración Pública y Equipamiento) (1980).
14. Número de viviendas de residencia secundaria (1980).
15. Número de viviendas de residencia secundaria en construcción (1980).
16. Relación Empleo/Población (1970).
17. Porcentaje del Terciario-1 (Comercio, Hostelería y Transporte) (1980).
18. Incremento en porcentaje del secundario (1970-79).
19. Relación Empleo/Población (1980).

Respecto a las unidades espaciales, hemos utilizado la malla administrativa de los 177 municipios de la provincia de Madrid, excluyendo al municipio central de la capital, al tratarse de definir exclusivamente su área de influencia. De esta manera, se cubría una extensa superficie que sobrepasaba ampliamente el área metropolitana definida tradicionalmente.

c) Interpretación de los resultados

El análisis de los resultados, reflejados en la matriz factorial (Cuadro III) y en el vector de notaciones factoriales del primer factor (figura 19), permite comprobar la existencia de un alto nivel de satisfacción de la hipótesis planteada.

En primer lugar, cabe señalar, que los seis primeros factores reflejan casi las cuatro quintas partes de la varianza total y lo que es más importante, que el primer factor supone casi el 25 % de la variación total de los datos. Además, integra, en sí, las siete variables que suponen la concentración de la población y del empleo, así como el crecimiento intercensal de la población durante las décadas de los años cincuenta, sesenta y setenta, estando correlacionado negativamente con la distancia a Madrid. Este factor pone en evidencia que los municipios de la comunidad autónoma madrileña, que han concentrado en mayor proporción el empleo en el interior de sus límites administrativos (variables 2 y 3), son los que han visto crecer con mayor intensidad su población (variables 4, 5 y 6) y por tanto poseen un índice más elevado de densidad de población (variable 1), encontrándose en la proximidad de la capital (variable 7).

La cartografía de las notaciones factoriales de este primer factor completa al panorama antes esbozado:

— Existen 15 municipios con notaciones factoriales superiores a 0,5. Pertenecen a este grupo los principales municipios próximos a Madrid, que han visto concentrar en su superficie las funciones residencial e industrial. Se pueden agrupar en cuatro subzonas: los municipios de la zona industrial del Este de la ciudad (Coslada, S. Fernando de Henares, Torrejón de Ardoz y Alcalá de Henares), los de la zona industrial-residencial del Sur (Getafe, Leganés, Alcorcón, Parla, Fuenlabrada y Móstoles), el núcleo de municipios del Norte, cercanos a la carretera nacional Madrid-Burgos (Alcobendas y S. Sebastián de los Reyes) y el conjunto residencial del Oeste (Las Rozas, Majadahonda y Pozuelo de Alarcón).

— Un segundo grupo de 12 municipios presenta una notación factorial positiva e inferior a 0,5. Componen, este grupo, municipios pertenecientes al área metropolitana administrativa (Boadilla del Monte, Mejorada, Pinto y Villaviciosa de Odón) de más débil crecimiento y un conjunto

CUADRO III. MATRIZ FACTORIAL. DELIMITACIÓN DEL AMM

VARIABLES	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3	FACTOR 4	FACTOR 5	FACTOR 6
1	0,951	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,888	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,843	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	0,789	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,779	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	0,712	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
7	−0,534	0,529	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	−0,827	0,0	0,0	0,0	0,300
9	0,0	0,750	0,0	0,0	−0,442	0,0
10	0,0	0,644	−0,414	0,0	0,412	0,0
11	0,398	−0,561	0,0	0,0	0,323	0,312
12	0,0	0,0	0,989	0,0	0,0	0,0
13	0,0	0,0	0,986	0,0	0,0	0,0
14	0,0	0,0	0,0	0,941	0,0	0,0
15	0,0	0,0	0,0	0,938	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,747	0,0
17	0,0	0,0	0,0	0,0	0,719	0,0
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,866
19	0,0	0,0	0,0	0,0	0,303	0,840
Varianza	4,680	2,411	2,186	1,884	1,836	1,786
Porcentaje de varianza (%)	24,63	12,68	11,50	9,91	9,66	9,40
Porcentaje acumulado (%)	24,63	37,31	48,81	58,72	68,38	77,78

Los valores inferiores a 0,250 se han igualado a cero.

Fuente: E.P.

de municipios próximos a la capital, que se han beneficiado de la difusión espacial del dinamismo metropolitano (Arganda, Boalo, Colmenarejo, Collado Villalba, Humanes, Manzanares, Torrelodones y Valdemoro).

— Por último, el resto de los municipios poseen notaciones factoriales negativas, entre los que cabe destacar los que perteneciendo al área administrativa legal (Colmenar Viejo, Paracuellos del Jarama, Velilla San

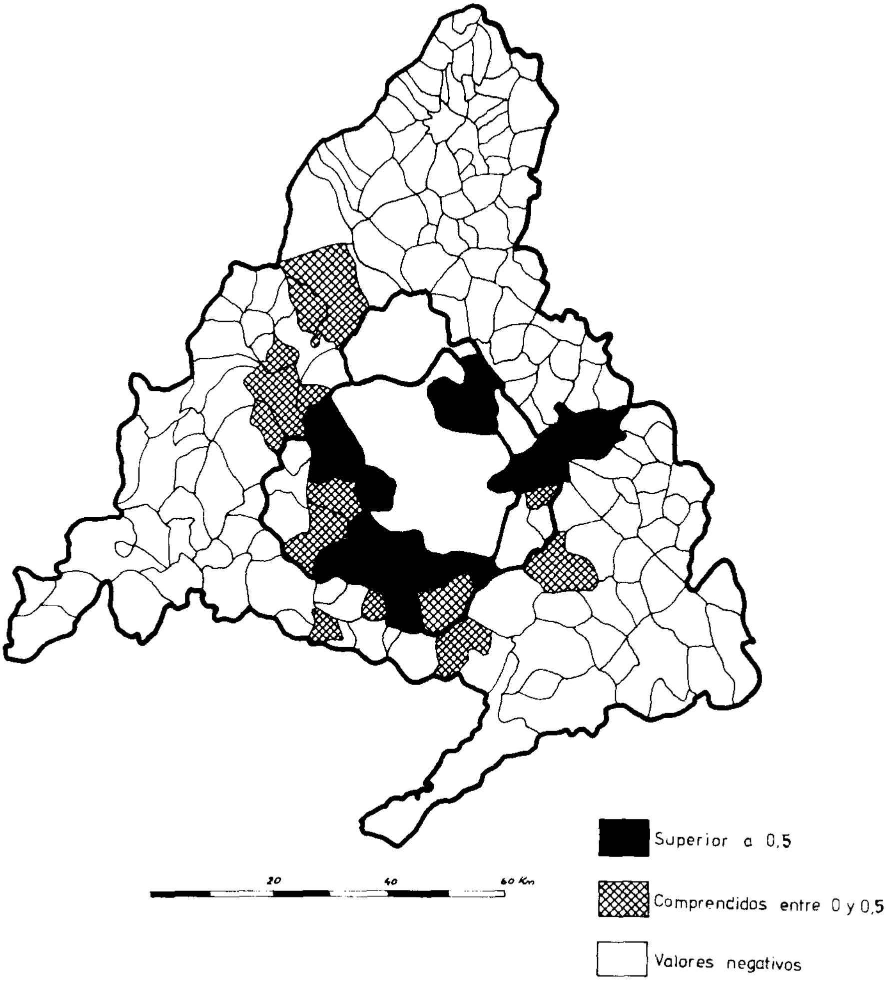

Fig. 19. Distribución espacial de las notaciones factoriales (factor 1)
Fuente: E.P.

Antonio, Villanueva del Pardillo, Villanueva de la Cañada, Brunete y Ribas del Jarama) no habrían alcanzado un mínimo nivel de desarrollo. En general, pertenecen a este grupo la mayoría de los municipios situados en la periferia de Madrid.

En conclusión, hemos comprobado la existencia de una fuerte y estrecha relación entre un conjunto de variables que expresan la concentración de la población y el empleo, lo que sirve para medir el grado de influencia de la capital madrileña en su entorno inmediato. Podemos afirmar, por tanto, que para una delimitación adecuada del Área Metropolitana de Madrid existen al menos 15 municipios, cuyo desarrollo diferencial respecto a los demás, los hace candidatos imprescindibles a pertenecer a un área de tales características.

3.3. Tipología de las unidades espaciales del análisis. Aplicación a los municipios del Área Metropolitana de Madrid, según nivel y tipo de empleo y el grado de dependencia respecto al exterior

a) Introducción

La configuración del modelo metropolitano en los países desarrollados ha estado dominada por la aparición de dos fenómenos, en apariencia contrapuestos, pero que obedecen, complementariamente, al mismo funcionamiento:

— La concentración, en determinadas áreas de cada país, de gran parte del empleo procedente del desarrollo económico, lo que ha originado un masivo éxodo del campo a la ciudad (fenómeno de implosión o centrípeto).

— La difusión, en el espacio circundante a cada gran ciudad, de una serie de funciones y actividades, localizadas en centros próximos, que han visto crecer de manera vertiginosa su población y que mantienen una estrecha relación con el centro, sin formar parte, por ello, de un continuo físico uniforme (fenómeno de explosión o centrífugo).

Como el desarrollo económico se ha producido de manera similar en la mayoría de las grandes urbes, las características de esta explosión difusa de las actividades ha producido una estructura urbana semejante, caracterizada por los siguientes rasgos comunes:

1. Concentración en el centro de la metrópoli del sector productivo terciario, sobre todo del terciario superior o decisional, así como de un cierto tipo de vivienda de lujo, hecho que ha provocado la expulsión hacia el exterior de las funciones industrial y residencial.

2. Localización de la industria en algunos municipios periféricos, sobre todo en aquélla que necesita un determinado tamaño en sus plantas e instalaciones.

3. Segregación residencial en el exterior de acuerdo a los niveles de renta, con un crecimiento explosivo de determinados municipios de la periferia, en donde las grandes inmobiliarias producen viviendas uniformes, de baja calidad y servicios.

4. Aparición del «commuter» o trabajador que encuentra empleo en un lugar diferente de su lugar de residencia. Este fenómeno viene determinado por la concentración desigual del empleo, lo que provoca que el centro se convierta en un lugar de atracción de las áreas periféricas, manteniendo éstas en sí un cierto grado de integración, superior al que mantienen con el resto. Ello motiva la aparición de ciudades dormitorio (bajo nivel de empleo interno) o ciudades-residenciales, con una población que, en parte, trabaja en el municipio de residencia (industria y servicios que el propio núcleo genera) y, en parte, debe desplazarse a otros municipios de su área de integración o al centro.

b) Planteamiento del problema: selección de las variables de análisis

La aglomeración urbana de Madrid ha llegado a convertirse en un área de estas características, donde la gran movilidad diaria es la consecuencia de la localización dispersa de las funciones económicas fundamentales. Administrativamente, el territorio metropolitano de Madrid estaba integrado por el municipio central, subdividido en 18 distritos, y 23 municipios circundantes. La estructura urbana madrileña se define por la especificidad funcional de cada una de estas unidades espaciales, en cuanto se refiere a la concentración y tipo de empleo, características residenciales, etc.

Con el ejemplo que exponemos a continuación pretendemos establecer una tipología de las 41 unidades geográficas, que ayude a comprender mejor la composición e interrelación de las unidades básicas que integran el área metropolitana de Madrid.

Para ello, hemos tratado de establecer, a nivel de cada unidad de análisis, la relación existente entre el nivel de integración en su área y su grado de dependencia del centro, la concentración y tipo de empleo y el tamaño del núcleo o zona, seleccionando diez variables, y aplicando la técnica factorial a la matriz resultante (10 variables × 41 lugares). Las variables elegidas han sido las siguientes:

1. Grado de integración de cada zona (porcentaje de población residente, que no se desplaza del núcleo o zona por motivos de trabajo).

2. Atracción del centro (porcentaje de población residente, que diariamente se desplaza al centro a trabajar).
3. Integración en su área (porcentaje de población residente, que tiene su puesto de trabajo en el área próxima incluido el propio núcleo o zona).
4. Nivel de integración del área (medido por la relación entre la población que trabaja en el centro y en el área de integración propia).
5. Tamaño del núcleo (población total).
6. Relación empleo/población.
7. Porcentaje de empleo en el secundario.
8. Porcentaje de empleo en el sector de la construcción.
9. Porcentaje de empleo en el sector terciario-1 (comercio, hostelería y transporte).
10. Porcentaje de empleo en el sector terciario-2 (servicios financieros, administración pública y equipamientos).

c) Interpretación de los resultados

La tabla del Cuadro IV contiene los datos de la matriz factorial (matriz de correlaciones entre las variables de partida y los factores obtenidos). Los porcentajes de varianza explicados son suficientemente expresivos de la existencia de un grado de correlación elevado entre las variables, ya que el primer factor explica el 30,8 % de la misma y entre los cuatro primeros el 82,01 %.

El significado de los factores hay que deducirlo de la correlación que cada uno de ellos presenta con las variables y que podemos concretar en:

— El primer factor tiene una elevada correlación positiva con las variables que miden la integración del núcleo y negativa con la atracción del centro y tamaño de núcleo. Este factor define el grado de integración de cada zona, observándose una alta correlación con el bajo tamaño del núcleo.

En general, como tendremos ocasión de observar, los núcleos más reducidos presentan un más alto grado de integración.

CUADRO IV. MATRIZ FACTORIAL. TIPOLOGÍA DE LAS UNIDADES DE ANÁLISIS

VARIABLES	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3	FACTOR 4
Integración en su municipio	0,918	0,0	0,0	0,0
Atracción Centro	–0,873	0,346	0,0	0,0
Tamaño Núcleo	–0,783	0,0	0,0	0,0
Integración en su área	–0,705	0,0	0,0	0,593
Porcentaje empleo terciario 2	0,0	0,952	0,0	0,0
Porcentaje empleo secundario	0,260	–0,856	–0,375	0,0
Porcentaje empleo construcción	0,0	0,0	0,772	0,407
Porcentaje empleo terciario 1	0,0	0,0	0,881	0,0
Relación empleo/población	0,0	0,0	0,0	0,896
Integración de su área	0,370	0,0	0,486	0,0
Porcentaje de varianza (%)	30,38	18,94	18,05	14,64
Porcentaje acumulado (%)	30,38	49,32	67,37	82,01

Fuente: E.P. Los valores inferiores a 0,250 se han igualado a cero.

— El segundo factor integra en sí la oposición existente entre el nivel de empleo secundario y el terciario-2. Su significado va unido a la diferenciación en el tipo de empleo.

— La misma consecuencia podemos deducir del tercer factor, en donde observamos que, aunque en menor grado, existe una oposición entre el nivel del empleo del secundario y de construcción con el terciario-1.

— Por último, el cuarto factor presenta un grado de relación estrecho con la concentración del empleo y lógicamente con la integración en su área.

Analizando las notaciones factoriales de las 41 zonas, podemos deducir las siguientes conclusiones:

1. Existe una separación clara, en los resultados del primer factor, entre los distritos de Madrid y los municipios del extrarradio. La integración de los distritos es lógicamente menor, por la mayor movilidad de los residentes en la capital, que les permite desplazarse a otros distritos o áreas diferentes a la suya propia. Dentro de estos distritos, el grado de integración es mayor en los distritos del centro (excepto la Arganzuela),

incluyendo el distrito de Moncloa, que componen un todo más integrado que el resto.

2. En los municipios de la periferia podemos establecer tres tipos. Aquellos de reducido tamaño pertenecientes al Area Metropolitana Oeste presentan en general un alto grado de integración, mientras que en los de mayor tamaño existe diferencia entre algunos municipios del Area Metropolitana Sur (Alcorcón, y Leganés, Móstoles y Parla) de bajo nivel y el resto, de un nivel de integración mayor.

3. Existe una diferenciación en la localización de los tipos de empleo. Los distritos del centro (excepto Arganzuela) presentan un alto nivel de concentración de empleo terciario, mientras que los distritos periféricos de la capital se dividen en los de mayor nivel del secundario (Carabanchel, Villaverde, Mediodía, Vallecas, San Blas y Hortaleza) y los del terciario (Latina, Fuencarral, Moratalaz, Ciudad Lineal y Moncloa). Por su parte, en los municipios del área metropolitana existe una relación clara entre mayor tamaño y mayor porcentaje del empleo secundario.

4. La concentración el empleo guarda una relación con el nivel de integración, como ya indicamos con anterioridad. Los distritos centrales presentan los índices más altos (destacando claramente el distrito Centro), así como los municipios del extrarradio de tamaño elevado y que poseían un elevado valor del factor primero.

Con estos datos hemos establecido una tipología que se refleja en las figuras 20 y 21, separadamente para los municipios y distritos. Los tipos resultantes son los siguientes:

— Tipo A: municipios con un relativamente alto índice de integración, cierto grado de concentración del empleo, tamaño de población elevado y tipo de empleo secundario. Son los municipios de Getafe, Fuenlabrada, Pinto, San Fernando, Torrejón, Alcalá, Alcobendas y San Sebastián de los Reyes.

— Tipo B: municipios de alto índice de integración, bajo grado de concentración del empleo, tamaño de población reducido y tipo de empleo terciario. Presentan estas características los municipios de Las Rozas, Brunete, Majadahonda, Boadilla, Pozuelo, Villaviciosa, Mejorada, Velilla, Paracuellos y Colmenar Viejo.

— Tipo C: municipios de bajo índice de integración y de concentración de empleo, tamaño de población elevado y tipo de empleo secundario. Pertenecen a este grupo los municipios de Alcorcón, Leganés, Móstoles y Parla.

Los distritos los hemos clasificado a su vez en otros tres tipos:

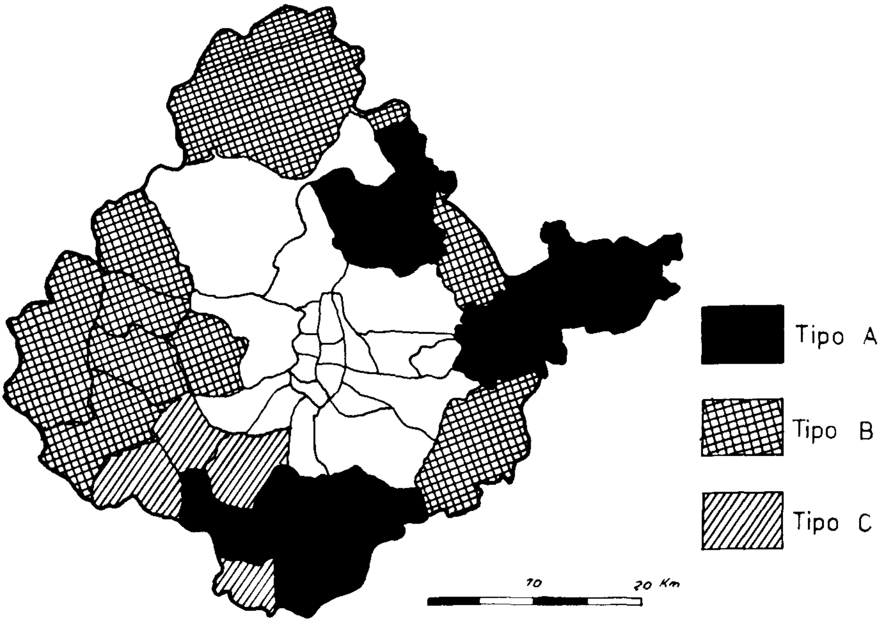

Fig. 20. Tipología municipios AMM
Fuente: E.P.

— Tipo D: distritos centrales de nivel de integración no muy elevado, pero superior al resto, alto nivel de concentración del empleo, siendo éste terciario. Pertenecen a este grupo los distritos de Centro, Retiro, Salamanca, Chamartín, Tetuán, Chamberí y Moncloa.

— Tipo E: distritos periféricos (a excepción de la Arganzuela) de bajo nivel de concentración de empleo en general, y tipo de empleo mayoritario secundario. Forman parte de este grupo los distritos de La Arganzuela, Carabanchel, Villaverde, Mediodía, Vallecas y San Blas.

— Tipo F: distritos periféricos de bajo nivel de concentración de empleo, destacando el terciario sobre el secundario. Integran este grupo los distritos de Fuencarral, Latina, Moratalaz y Ciudad Lineal.

El análisis de los resultados obtenidos nos permite concluir, señalando, que el área metropolitana de Madrid es un espacio altamente desequilibrado, con una gran concentración del empleo en el centro, sobre todo terciario, y de la industria y residencia en la periferia. La corona metropolitana constituye, además, un espacio segregado, donde los sec-

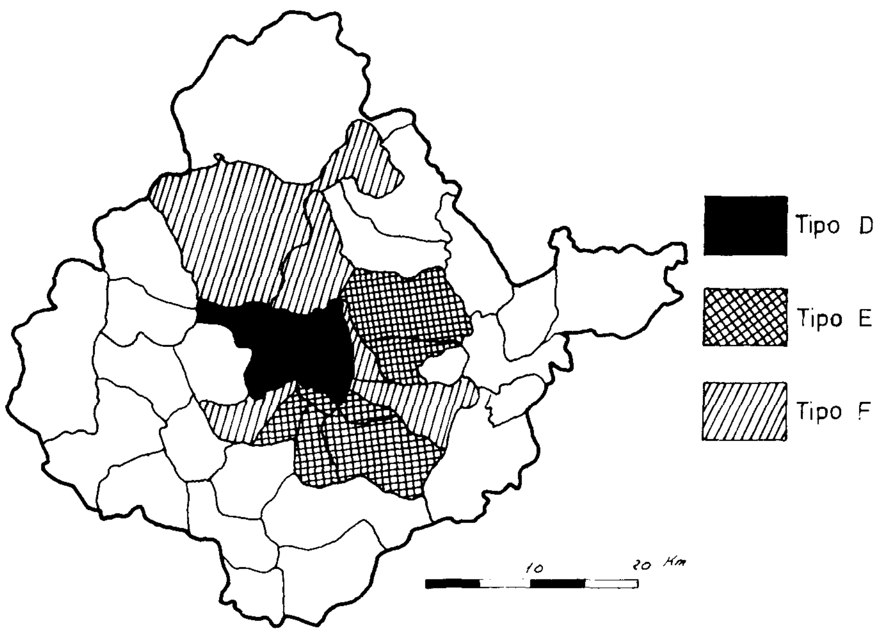

Fig. 21. Tipología distritos Madrid
Fuente: E.P.

tores del Este y Suroeste se han ido diferenciando, como lugares de residencia de las clases trabajadoras y los sectores Norte y Oeste a las clases de mayor nivel socio-económico.

4. ANEXO TÉCNICO

4.1. El modelo del análisis factorial: las relaciones fundamentales

El modelo factorial consiste en expresar los valores alcanzados por cada una de las variables de la matriz de puntuaciones (j) en un caso o individuo geográfico (i), Z_{ji}, como función lineal de los «m» factores (f_{jp}) y de los pesos adquiridos por cada factor en cada unidad de análisis (a_{pi}). Esta relación podría expresarse algebraicamente de la siguiente manera:

$$Z_{ji} = f_{j1} \; a_{1i} + f_{j2} \; a_{2i} + \ldots\ldots + f_{jp} \; a_{pi} + \ldots\ldots + f_{jm} \; a_{mi}$$

$$Z_{ji} = \sum_{p-1}^{m} f_{jp} \; a_{pi}$$

La misma relación expresada en lenguaje matricial sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1i} & \dots & Z_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{j1} & \dots & Z_{ji} & \dots & Z_{jN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{ni} & \dots & Z_{nN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{j1} & \dots & f_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mN} \end{bmatrix}$$

matriz puntuaciones	matriz factorial	matriz notaciones factoriales
n (variables) × N (individuos)	n (variables) × m (factores)	m (factores) × N (individuos)

$$Z = F \times A$$

Es fácil comprobar, que ambas expresiones (algebraica y matricial) son equivalentes, ya que el producto de una matriz de dimensiones $n \times m$ por otra de $m \times N$ es una nueva matriz de dimensiones $n \times N$, tal que cada elemento de la misma (Z_{ji}), es la suma de los productos de los elementos de una fila de la primera ($f_{j1} \dots f_{jm}$) por los elementos de una columna de la segunda ($a_{1i} \dots a_{mi}$).

Esta sería la expresión general del modelo factorial, que en sucesivas etapas iremos particularizando en los diversos modelos parciales existentes. El problema, tal como queda planteado, consiste en obtener, en primer término, los coeficientes factoriales de los diversos factores que integran la matriz factorial F y en una segunda fase la matriz de notaciones factoriales A, partiendo de la matriz de puntuaciones Z, tipificada. Antes de exponer más detalladamente el camino para obtener las matrices F y A, vamos a deducir alguna de las relaciones o ecuaciones fundamentales del modelo que nos van a servir para conseguirlo.

4.2. Las relaciones básicas del análisis factorial

Entre las propiedades básicas del análisis factorial podemos destacar las siguientes:

1. La varianza de cada variable (igual a la unidad al estar tipificada) se corresponde con la suma de los cuadrados de los coeficientes factoriales de dicha variable.

Así para la variable j se cumpliría:

$$\sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2 = f_{j1}^2 + \dots + f_{jp}^2 + \dots + f_{jm}^2 = 1$$

La contribución total del conjunto de los m factores sería, pues, igual al número total de variables existentes.

$$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2 = n$$

La demostración de esta propiedad es sencilla como veremos. Supongamos la variable j, cuya varianza es igual a la unidad.

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_{ji}^2 = 1$$

sustituyendo Z_{ji} por su valor $\sum_{p=1}^{m} f_{jp}\ a_{pi}$ resulta:

$$Z_{ji}^2 = \left(\sum_{p=1}^{m} f_{jp}\ a_{pi} \right)^2 = \sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2\ a_{pi}^2 + \sum_{p=1}^{m} f_{jp}\ a_{pi} \sum_{q=1}^{m} f_{jq}\ a_{qi}$$

$$p \neq q$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_{ji}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2\ a_{pi}^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{m} f_{jp}\ a_{pi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{m} f_{jq}\ a_{qi}$$

$$p \neq q$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{pi}^2 \sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2 + \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} f_{jp}\ f_{jq} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{pi}\ a_{qi}$$

Pero resulta que:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{pi}\ a_{qi} = 0$$

si los factores son independientes.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{pi}^2 = 1$$

al estar los factores tipificados.

En consecuencia:

$$\sigma_j^2 = \sum_{p=1}^{m} f_{jp}^2 = 1$$

que es lo que deseábamos demostrar.

2. Los coeficientes factoriales representan las correlaciones existentes entre las variables y los factores.

Supongamos, para demostrarlo que nos referimos a la primera variable Z_{1i} y al primer factor f_{1p}. De acuerdo con la ecuación fundamental del análisis factorial, podemos expresar para el elemento Z_{1i}:

$$Z_{1i} = f_{11}\ a_{1i} + f_{12}\ a_{2i} + \ldots + f_{1p}\ a_{pi} + \ldots + f_{1m}\ a_{mi}$$

Si multiplicamos ambos miembros por a_{1i} quedaría:

$$Z_{1i}\ a_{1i} = f_{11}\ a_{1i}^2 + f_{12}\ a_{1i}\ a_{2i} + \ldots + f_{1p}\ a_{1i}\ a_{pi} + \ldots + f_{1m}\ a_{1i}\ a_{mi}$$

ecuación válida para los N elementos $i = 1, N$.

Si obtenemos la media de todos los posibles productos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_{1i}\ a_{1i}}{N} = f_{11} \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}^2}{N} + \ldots + f_{ip} \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\ a_{pi}}{N} + \ldots + f_{1m} \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\ a_{mi}}{N}$$

al ser los factores independientes entre sí, se cumple:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\ a_{pi}}{N} = 0$$

y al estar tipificados:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}^2}{N} = 1$$

En consecuencia:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_{1i} \ a_{1i}}{N} = f_{1i}$$

El primer miembro representa el coeficiente de correlación de Pearson entre la primera variable y el primer factor, luego $r_{z1f1} = f_{11}$.

De la misma manera y para el resto de las variables y factores podríamos demostrar que:

$$f_{zjFp} = f_{jp}$$

3. Los elementos r_{jk} de la matriz de correlaciones R (matriz cuadrada y simétrica, cuyos elementos de la diagonal son iguales a la unidad) correspondientes a los coeficientes de correlación de Pearson existentes entre las variables j y k, pueden ser expresados por los coeficientes factoriales de la siguiente manera:

$$r_{jk} = \sum_{p=1}^{m} f_{jp} \cdot f_{kp}$$

Para demostrarlo, expresemos los valores de Z_{ji} y Z_{ki} según la ecuación fundamental:

$$Z_{ji} = f_{j1} \ a_{1i} + \ldots + f_{jp} \ a_{pi} + \ldots + f_{jm} \ a_{mi}$$

$$Z_{ki} = f_{k1} \ a_{1i} + \ldots + f_{kp} \ a_{pi} + \ldots + f_{km} \ a_{mi}$$

Multiplicando miembro a miembro resultaría:

$$Z_{ji} \ Z_{ki} = f_{j1} \ f_{k1} \ a^2_{1i} + \ldots + f_{ip} \ f_{kp} \ a^2_{pi} + \ldots + f_{jm} \ f_{km} \ a^2_{mi} + f_{j1} \ f_{k2} \ a_{1i} \ a_{2i} + \ldots$$

Hallando la media de todos los posibles productos en i:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_{ji} \ Z_{ki}}{N} = f_{j1} \ f_{k1} \frac{\sum_{i=1}^{N} a^2_{1i}}{N} + \ldots + f_{jp} \ f_{kp} \frac{\sum_{i=1}^{N} a^2_{pi}}{N} + \ldots + f_{jm} \ f_{km} \frac{\sum_{i=1}^{N} a^2_{mi}}{N}$$

$$+f_{j1}\, f_{k2} \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\; a_{2i}}{N} + \dots$$

Los factores:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{pi}^{2}}{N} = 1$$

mientras que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\; a_{2i}}{N} = 0$$

debido a la independencia. De todo ello resulta:

$$r_{jk} = f_{j1}\, f_{k1} + \dots + f_{jp}\, f_{kp} + \dots + f_{jm}\, j_{km}$$

como queríamos demostrar.

Matricialmente esta propiedad podríamos expresarla de la siguiente manera:

$$R = \frac{1}{N}\, Z \cdot Z'$$

Al ser $Z = F \cdot A$, quedaría:

$$R = \frac{1}{N}\, F \cdot A\, (F \cdot A)' = \frac{1}{N}\, F \cdot A \cdot A' \cdot F'$$

Al ser los factores independientes $A \cdot A' = N \cdot I$ (I, matriz unidad), luego:

$$R = \frac{1}{N}\, F \cdot N \cdot I \cdot F' = F \cdot F'$$

Es esta la propiedad fundamental del análisis factorial y la que nos abre el camino para encontrar la matriz factorial, elemento clave en la solución del problema. La matriz de correlaciones R es fácilmente conocida, al disponer de la matriz de puntuaciones Z. Se trataría, por tanto, de encontrar una matriz F que multiplicada por su traspuesta F' diera como resultado la matriz R. El problema se resuelve obteniendo los coeficientes del primer factor y sucesivamente los del segundo, tercero, etc. como veremos más adelante.

4.3. El modelo de los factores principales

Dentro de la transformación de variables de referencia que supone el análisis factorial, el modelo de los factores principales diferencia la existencia de una serie de factores comunes, los que están relacionados al menos con dos de las variables de partida, de aquellos otros específicos, únicamente relacionados con cada variable. Los factores comunes dan cuenta, por lo tanto, de la correlación existente entre las variables, mientras que los factores únicos se explican a partir de la varianza de cada una de las variables.

El nuevo modelo quedaría, pues, expresado de la siguiente manera:

$$Z_{ji} = \sum_{p=1}^{m} f_{jp} \; a_{pi} + b_j \; u_j$$

a) Introducción al problema de la obtención de los factores: el método diagonal

El punto de partida para la obtención de los factores es, como venimos señalando reiteradamente, la matriz de puntuaciones Z_{ji}. En el apartado siguiente, expondremos el algoritmo general de factorización, válido para realizar la primera fase del análisis, aunque a modo de introducción vamos a exponer a continuación el método diagonal que nos facilite la comprensión de los diversos pasos que es necesario acometer en este sentido. Se trata de un procedimiento particular del algoritmo general, pero aplicado a un ejemplo sencillo puede ayudarnos a entrever la filosofía subyacente a este método de análisis.

El problema a resolver es, indudablemente, la obtención de la matriz factorial, para lo cual vamos a aplicar la tercera propiedad fundamental del modelo factorial. Si fuéramos capaces de obtener los componentes del primer factor (f_{11}, f_{21}, ..., f_{j1}, ..., f_{k1}, ..., f_{n1}) podríamos calcular, que parte del mismo colabora en la matriz de correlaciones r_{jk}, que sería la parte correspondiente al primer sumando (f_{j1} f_{k1}).

$$r_{jk} = f_{j1}\, j_{k1} + f_{j2}\, f_{k2} + \dots\, f_{jm}\, f_{km}$$

Si descontáramos del total de cada coeficiente de correlación la parte correspondiente al primer factor, el resto $r_{jk \cdot 1}$ sería debido únicamente a los demás factores (2, 3, ... m):

$$r_{jk \cdot 1} = r_{jk} - f_{j1}\, f_{k1}$$

A continuación, calculando el segundo factor (por el método que veremos) f_{21}, f_{22}, ..., f_{j2}, ..., f_{k2}, ..., f_{n2}, la parte debida al mismo, que participa en cada coeficiente de correlación, sería el segundo sumando f_{j2} j_{k2}, que podría descontarse de la matriz factorial:

$$r_{jk \cdot 2} = r_{jk} - f_{j1}\, f_{k1} - f_{j2}\, f_{k2}$$

Continuando el procedimiento de manera sucesiva, llegaríamos, al final, a conseguir una matriz de correlaciones R reducida a cero.

El método diagonal, que únicamente utilizamos aquí por la facilidad del cálculo, consiste en elegir, como primer factor, la dirección correspondiente a una cualquiera de las variables de partida. Supongamos, que empleamos el ejemplo de la figura 22, con cuatro variables de partida situadas en un mismo plano.

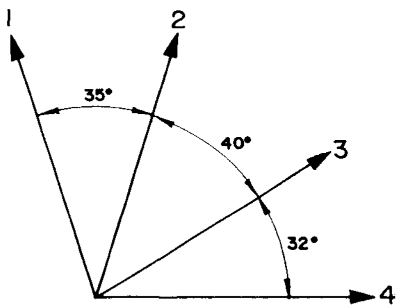

Fig. 22. Estructura de variables
Fuente: E. P.

La matriz de correlaciones R, debida a los coeficientes de correlación entre cada dos variables sería la siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 35^\circ & \cos 75^\circ & \cos 107^\circ \\ \cos 35^\circ & \cos 0^\circ & \cos 40^\circ & \cos 72^\circ \\ \cos 75^\circ & \cos 45^\circ & \cos 0^\circ & \cos 32^\circ \\ \cos 107^\circ & \cos 72^\circ & \cos 32^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8192 & 0{,}2588 & -0{,}2924 \\ 0{,}8192 & 1 & 0{,}7660 & 0{,}3090 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ -0{,}2924 & 0{,}3090 & 0{,}8480 & 1 \end{bmatrix}$$

Si eligiéramos la dirección de la variable 3, coincidiendo con el eje factorial I (fig. 23), los coeficientes factoriales del primer factor equivaldrían a los coeficientes de correlación de dicho factor con cada una de las cuatro variables (segunda propiedad del análisis factorial); es decir, serían los elementos de la tercera fila o columna de la matriz de correlaciones:

$$f_{11} = \cos 75^\circ = 0{,}2588$$
$$f_{21} = \cos 40^\circ = 0{,}7660$$
$$f_{31} = \cos 0^\circ = 1$$
$$f_{41} = \cos 32^\circ = 0{,}8480$$

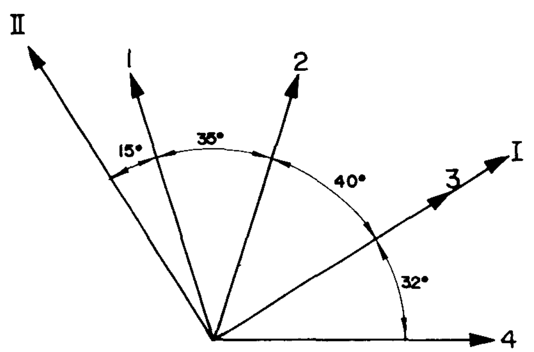

Fig. 23. Posición de los ejes factoriales respecto a la estructura de las variables
Fuente: E. P.

La contribución factorial f_{j1} f_{k1} en la matriz R, correspondiente al primer factor sería la siguiente:

$$f_{j1}\ j_{k1} = \begin{bmatrix} f_{11}\ f_{11} & f_{11}\ f_{21} & f_{11}\ f_{31} & f_{11}\ f_{41} \\ f_{21}\ f_{11} & f_{21}\ f_{21} & f_{21}\ f_{31} & f_{21}\ f_{41} \\ f_{31}\ f_{11} & f_{31}\ f_{21} & f_{31}\ f_{31} & f_{31}\ f_{41} \\ f_{41}\ f_{11} & f_{41}\ f_{21} & f_{41}\ f_{31} & f_{41}\ f_{41} \end{bmatrix}$$

$$f_{j1}\ f_{k1} = \begin{bmatrix} 0{,}0670 & 0{,}1982 & 0{,}2588 & 0{,}2195 \\ 0{,}1982 & 0{,}5868 & 0{,}7660 & 0{,}6496 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ 0{,}2195 & 0{,}6496 & 0{,}8480 & 0{,}7191 \end{bmatrix}$$

El residuo de la matriz de correlaciones $r_{jk\cdot 1}$, sería la diferencia entre la matriz R y la debida a los productos factoriales f_{j1} f_{k1}.

$$r_{jk\ \cdot\ 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8192 & 0{,}2588 & -0{,}2924 \\ 0{,}8192 & 1 & 0{,}7660 & 0{,}3090 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ -0{,}2924 & 0{,}3090 & 0{,}8480 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}0670 & 0{,}1982 & 0{,}2588 & 0{,}2195 \\ 0{,}1982 & 0{,}5868 & 0{,}7660 & 0{,}6496 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ 0{,}2195 & 0{,}6496 & 0{,}8480 & 0{,}7191 \end{bmatrix}$$

Como la diferencia de matrices equivale a la diferencia parcial de sus elementos correspondientes, tendríamos:

$$r_{jk\ \cdot\ 1} = \begin{bmatrix} 0{,}9330 & 0{,}6210 & 0 & -0{,}5119 \\ 0{,}6210 & 0{,}4132 & 0 & -0{,}3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5119 & -0{,}3406 & 0 & -0{,}2809 \end{bmatrix}$$

A continuación, seleccionamos el segundo factor, siguiendo una dirección perpendicular al anterior, de manera que ambos sean independientes entre sí. Entre las posibles soluciones hemos elegido la de la figura 23.

Los coeficientes factoriales del segundo factor equivaldrían, igual que en el primer caso, a los coeficientes de correlación con cada una de las variables:

$$\begin{aligned} f_{12} &= \cos 15^\circ = 0{,}9659 \\ f_{22} &= \cos 50^\circ = 0{,}6428 \\ f_{32} &= \cos 90^\circ = 0 \\ f_{42} &= \cos 122^\circ = -0{,}5299 \end{aligned}$$

La contribución de este segundo factor a la matriz de correlaciones R, sería la formada por los productos parciales $f_{j2} \cdot f_{k2}$:

$$f_{j2}\, f_{k2} = \begin{bmatrix} f_{12}\, f_{12} & f_{12}\, f_{22} & f_{12}\, f_{32} & f_{12}\, f_{42} \\ f_{22}\, f_{12} & f_{22}\, f_{22} & f_{22}\, f_{32} & f_{22}\, f_{42} \\ f_{32}\, f_{12} & f_{32}\, f_{22} & f_{32}\, f_{32} & f_{32}\, f_{42} \\ f_{42}\, f_{12} & f_{42}\, f_{22} & f_{42}\, f_{32} & f_{42}\, f_{42} \end{bmatrix}$$

$$f_{j2}\, f_{k2} = \begin{bmatrix} 0{,}9330 & 0{,}6210 & 0 & -0{,}5119 \\ 0{,}6210 & 0{,}4132 & 0 & -0{,}3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5119 & -0{,}3406 & 0 & 0{,}2809 \end{bmatrix}$$

Descontando los nuevos productos $f_{j2}\, f_{k2}$ del residuo de la matriz R, $r_{jk \cdot 1}$, quedaría:

$$r_{jk \cdot 2} = r_{jk \cdot 1} - f_{j2}\, f_{k2} = 0$$

Quiere esto significar, que con dos factores, únicamente, habríamos resuelto el problema. Coincide, además, con la solución geométrica, ya que la posición de las cuatro variables en un mismo plano evidenciaba la existencia de dos factores capaces de estructurar la información.

b) El algoritmo general de factorización

Como venimos señalando repetidamente el problema de la factorización consiste en obtener la matriz factorial a partir de la matriz de datos iniciales Z.

En el modelo factorial general ya expresamos, que la ecuación fundamental era:

$$Z = F \cdot A + U \cdot B$$

siendo F la matriz de los factores comunes y U la de los factores únicos.

Se trata, por tanto, de encontrar la matriz F, para lo cual conocemos la propiedad, deducida en el apartado 4.2., que la misma multiplicada por su transpuesta F′ debe coincidir con la matriz de correlaciones modificada R^* (matriz de correlaciones R, donde se han sustituido los elementos unitarios de la diagonal por las comunidades).

$$F \cdot F' = R^*$$
$$R^* = R - U^2$$

Comencemos por los factores comunes. Los pasos a seguir son semejantes a los expuestos en el ejemplo anterior pero con carácter más general. El problema consiste, en principio, en encontrar las notaciones del primer factor o primera columna de la matriz factorial que vamos a denominar F_1. Partimos, para ello, de la matriz Z_1, residuo de la matriz de puntuaciones Z al descontar la parte correspondiente a los factores únicos:

$$Z_1 = Z - U \cdot B = F \cdot A$$

Si conociéramos la matriz de notaciones factoriales A, la correlación con la matriz de puntuaciones sería la matriz factorial, siempre que la primera estuviera también tipificada y los factores fueran independientes:

$$R_{zA} = E(ZA') = E((FA + UB)\ A') =$$
$$= F\ E(A\ A') + B\ E(U \cdot A') = F \cdot R_{AA} = F$$

Pero, ¿cómo encontrar los valores de las notaciones factoriales tipificadas? El problema que se plantea, para el primer factor, es obtener un vector b_1, tal que:

$$A_1 = b'_1 \cdot Z_1$$

Las condiciones particulares del vector b_1, nos darán los diferentes métodos de la factorización.

En general, se puede partir de un vector β_1, cualquiera, que dará lugar a unos valores A_1^+, no tipificados, que pueden convertirse en tales al dividir el resultado por la raíz de la varianza

$$A_1^+ = \beta'_1\ Z_1$$
$$\sigma^2_{A_1^+} = E(A_1^+)^2 = E(\beta'_1\ Z_1)^2 = E(\beta'_1\ Z_1\ Z'_1\ \beta_1) =$$
$$= \beta'_1\ E(Z_1\ Z'_1)\ \beta_1 = \beta'_1\ R^*\ \beta_1$$
$$A_1 = \frac{A_1^+}{\sigma_{A_1^+}} = \frac{\beta'_1\ Z_1}{\sqrt{\beta'_1\ R^*\ \beta_1}}$$

en consecuencia:

$$b_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta'_1 \; R^* \; \beta_1}}$$

Una vez calculada A_1, la primera columna de la matriz factorial F_1 podría obtenerse hallando la correlación existente entre Z y A_1:

$$F_1 = R_{ZA_1} = E(Z\ A'_1) = E(Z\ Z'_1\ b_1) = E[Z(Z-UB)'] \ b_1 =$$
$$= [E(Z\ Z') - E\ (Z\ B')\ U']\ b_1 = (R - U\ U')\ b_1 = R^*\ b_1$$

Por tanto:

$$F_1 = R^* \cdot b_1 = R^* \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta'_1 \; R^* \; \beta_1}}$$

fórmula fundamental del algoritmo de factorización.

Obtenida la primera columna de la matriz factorial deberíamos repetir la operación calculando:

$$A_2 = b'_2\ Z_2$$

siendo $Z_2 = Z_1 - F_1\ A_1$, al separar la parte explicada por el primer factor, quedando la matriz de correlaciones residual:

$$R_2 = R^* - F_1\ F'_1$$

De la misma manera, habría que definir un factor provisional A_2^+ tal que $A_2^+ = \beta'_2 \cdot Z_2$:

$$A_2 = \frac{\beta'_2}{\sqrt{\beta'_2 \; R_2 \; \beta_2}} Z_2$$

$$\text{y } F_2 = R_2 \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta'_2 \; R_2 \; \beta_2}}$$

En pasos sucesivos lograríamos obtener el tercer factor:

$$R_3 = R_2 - F_2\ F'_2$$

$$F_3 = R_3 \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta'_3 \; R_3 \; \beta_3}}$$

y seguiríamos hasta que:

$$R_S = = R_{S-1} - F_{S-1} F'_{S-1}$$

$$F_S = R_S \frac{\beta_S}{\sqrt{\beta'_S \; R_S \; \beta_S}}$$

tal que la matriz $R_{S+1} = R_S - F_S \cdot F'_S$ fuera aproximadamente igual a cero.

c) Aplicación del algoritmo de factorización al método diagonal y al de componentes principales

Método diagonal

En el método diagonal, el vector β_1, seleccionado, es tal, que todos sus componentes son iguales a cero, excepto uno de ellos que equivale a la unidad. Con objeto de comprobar la aplicación del algoritmo general de factorización, utilizaremos el mismo ejemplo del apartado 4.3.a, en el que iremos exponiendo las sucesivas fases del método. Serían estos pasos los siguientes:

1. Cálculo del producto $\beta'_1 \; R \; \beta_1$.

Si suponemos que el vector β_1 tiene la tercera componente unitaria y las restantes nulas, el producto sería:

$$\beta'_1 \; R \; \beta_1 = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8192 & 0{,}2588 & -0{,}2924 \\ 0{,}8192 & 1 & 0{,}7660 & 0{,}3090 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ -0{,}2924 & 0{,}3090 & 0{,}8480 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El producto de un vector fila por la matriz será un vector fila, cuyos elementos son la suma de los productos de los elementos del vector por cada una de las columnas de la matriz.

$$\beta'_1 \; R \; \beta_1 = [0{,}2588 \;\; 0{,}7660 \;\; 1 \;\; 0{,}8480] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

2. Obtención de la primera columna de la matriz factorial F_1

$$F_1 = R \cdot \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta'_1 \cdot R \cdot \beta_1}} = R \cdot \frac{\beta_1}{1} = R \cdot \beta_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2588 \\ 0{,}7660 \\ 1 \\ 0{,}8480 \end{bmatrix}$$

3. Obtener el residuo matricial $R_2 = R - F_1 \cdot F'_1$

$$F_1 \cdot F'_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2588 \\ 0{,}7660 \\ 1 \\ 0{,}8480 \end{bmatrix} [0{,}2588 \quad 0{,}7660 \quad 1 \quad 0{,}8480] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0670 & 0{,}1982 & 0{,}2588 & 0{,}2195 \\ 0{,}1982 & 0{,}5868 & 0{,}7660 & 0{,}6496 \\ 0{,}2588 & 0{,}7660 & 1 & 0{,}8480 \\ 0{,}2195 & 0{,}6496 & 0{,}8480 & 0{,}7194 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = R - F_1 \cdot F'_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9330 & 0{,}6210 & 0 & -0{,}5119 \\ 0{,}6210 & 0{,}4132 & 0 & -0{,}3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5119 & -0{,}3406 & 0 & 0{,}2809 \end{bmatrix}$$

4. Seleccionamos un nuevo vector

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y calculamos el producto $\beta'_2 \, R_2 \, \beta_2$

$$\beta'_2 \, R_2 \, \beta_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0{,}9330 & 0{,}6210 & 0 & -0{,}5119 \\ 0{,}6210 & 0{,}4132 & 0 & -0{,}3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5119 & -0{,}3406 & 0 & 0{,}2809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$[0{,}6210 \quad 0{,}4132 \quad 0 \quad -0{,}3406] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0{,}4132$$

5. Obtenemos la segunda columna de la matriz factorial

$$F_2 = R_2 \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta'_2 \; R_2 \; \beta_2}} = \frac{\begin{bmatrix} 0,9330 & 0,6210 & 0 & -0,5119 \\ 0,6210 & 0,4132 & 0 & -0,3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5119 & -0,3406 & 0 & 0,2809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{0,4132}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,9330 & 0,6210 & 0 & -0,5119 \\ 0,6210 & 0,4132 & 0 & -0,3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5119 & -0,3406 & 0 & 0,2809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5557 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9660 \\ 0,6428 \\ 0 \\ -0,5299 \end{bmatrix}$$

6. Calculamos el residuo de la matriz de correlaciones

$$R_3 = R_2 - F_2 \cdot F'_2$$

$$F_2 \cdot F'_2 = \begin{bmatrix} 0,9660 \\ 0,6428 \\ 0 \\ -0,5229 \end{bmatrix} [0,9660 \;\; 0,6428 \;\; 0 \;\; -0,5299] =$$

$$\begin{bmatrix} 0,9330 & 0,6210 & 0 & -0,5119 \\ 0,6210 & 0,4132 & 0 & -0,3406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5119 & -0,3406 & 0 & 0,2809 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = 0$$

Por tanto, la matriz factorial F constaría de dos únicos factores y su valor sería:

$$F = \begin{bmatrix} 0,2588 & 0,9660 \\ 0,7660 & 0,6428 \\ 1 & 0 \\ 0,8480 & -0,5299 \end{bmatrix}$$

El método de los componentes principales

El modelo de los componentes principales intenta obtener los diversos factores (componentes) a partir de la matriz de correlaciones completa R. La consecución del primer factor se plantea con la premisa de maximizar la varianza explicada por el mismo. El vector β_1 debe cumplir pues la condición de que β'_1 R β_1 sea máxima.

Para que no exista indeterminación se fija como condición previa a cumplir por los vectores β, que $\beta' \cdot \beta = 1$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, definiríamos una función L, combinación lineal de la función a maximizar y de la ecuación de relación $\beta' \cdot \beta = 1$.

$$L = \beta' R \beta - \lambda(\beta' \beta - 1) = 0$$

Según demostró Lagrange, los óptimos de la función $\beta' R \beta$ se encuentran en el sistema de ecuaciones que resultan de hallar las derivadas parciales de L respecto a β, igualándolas a cero.

$$\frac{\delta L}{\delta \beta} = 2 R\beta - 2 \lambda\beta = 0$$

$$R\beta - \lambda\beta = 0$$

$$(R - I\lambda)\beta = 0$$

siendo I la matriz identidad.

Para que esta igualdad pueda darse con valores diferentes a cero debe cumplirse:

$$|R - I \lambda| = 0$$

de donde resultaría una ecuación de grado n en λ, denominada ecuación característica, latente o propia. Eligiendo el valor máximo de λ (eigenvalue, eigenvalor o autovalor), deduciríamos a continuación el valor correspondiente al vector β_1 (eigenvector) sabiendo que:

$$\left.\begin{aligned}(R - I\lambda)\beta = 0 \\ \beta'\beta = 0\end{aligned}\right\}$$

Por último, la primera columna de la matriz factorial F_1 sería:

$$F_1 = R \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta'_1 \; R \; \beta_1}} = \frac{\beta_1 \; \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \beta_1 \sqrt{\lambda_1}$$

ya que $R \beta_1 = \beta_1 \lambda$ y $\beta'_1 R \beta_1 = \beta'_1 \beta_1 \lambda = \lambda$.

Veamos el procedimiento con un ejemplo concreto. Supongamos la existencia de dos variables (fig. 24) cuya matriz de correlaciones sería:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 67^\circ\, 40' \\ \cos 67^\circ\, 40' & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica $|R - I\lambda| = 0$ tendría en este caso el siguiente valor:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 0{,}38^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0{,}8556 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3{,}4224}}{2} = \frac{2 \pm 0{,}76}{2} = \begin{cases} 1{,}38 & \lambda_1 = 1{,}38 \\ 0{,}62 & \lambda_2 = 0{,}62 \end{cases}$$

La solución a la ecuación característica son los dos eigenvalores 1,38 y 0,62. Eligiendo el mayor de ellos, calcularemos el eigenvector correspondiente, mediante el sistema de ecuaciones:

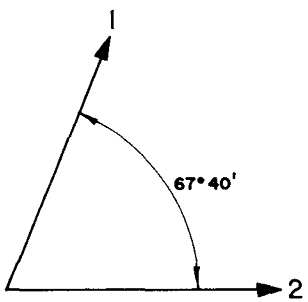

Fig. 24. Estructura de variables
Fuente: E.P.

$$\left.\begin{array}{r}(R-\lambda I)\beta=0\\ \beta'\ \beta=0\end{array}\right\}$$

En nuestro caso:

$$\left.\begin{array}{c}\left[\begin{bmatrix}1 & 0{,}38\\ 0{,}38 & 1\end{bmatrix}-1{,}38\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=0\\ [\beta_1\ \ \beta_2]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-0{,}38 & 0{,}38\\ 0{,}38 & -0{,}38\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=0\\ \beta_1^2+\beta_2^2=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}-0{,}38\beta_1+0{,}38\beta_2=0\\ \beta_1^2+\beta_2^2=1\end{array}\right\}$$

$$\beta_1=\beta_2;\qquad 2\ \beta_1^2=1;\qquad \beta_1=\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071$$

La primera columna de la matriz factorial será:

$$F_1=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}=\begin{bmatrix}0{,}7071\\ 0{,}7071\end{bmatrix}\sqrt{1{,}38}=\begin{bmatrix}0{,}8306\\ 0{,}8306\end{bmatrix}$$

La parte de la varianza explicada sería, de acuerdo a la primera propiedad del análisis factorial, la suma de los cuadrados de los coeficientes factoriales:

$$0{,}8306^2+0{,}8306^2=1{,}38$$

que equivale en este caso al valor del eigenvalor λ_1.

Al ser 0,8306 el coeficiente de correlación de cada una de las dos variables con el primer factor, ello significa que éste se encuentra en la bisectriz del angulo formado por ambas, como puede deducirse del valor del ángulo que forma con cada una de ellas (fig. 25):

$$\cos\alpha=0{,}8306;\qquad \alpha=33^\circ\ 50'$$

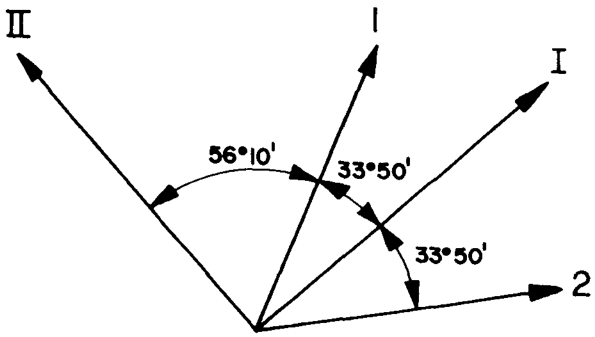

Fig. 25. Posición de los ejes factoriales respecto a la estructura de variable
Fuente: E.P.

La parte residual de la matriz de correlaciones sería:

$$R_2 = R - F_1\ F'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}8306 \\ 0{,}8306 \end{bmatrix} [0{,}8306 \quad 0{,}8306] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6899 & 0{,}6899 \\ 0{,}6899 & 0{,}6899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}31 & -0{,}31 \\ -0{,}31 & 0{,}31 \end{bmatrix}$$

El segundo eigenvalor debería cumplir, igualmente, la relación $|R - \lambda I| = 0$. Según ello:

$$\left\| \begin{bmatrix} 0{,}31 & -0{,}31 \\ -0{,}31 & 0{,}31 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0{,}31 - \lambda & -0{,}31 \\ -0{,}31 & 0{,}31 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0{,}31 - \lambda)^2 - 0{,}31^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 0{,}62\lambda = 0$$

$$\lambda = \begin{cases} 0{,}62 \\ 0 \end{cases}$$

Tomando el valor $\lambda_2 = 0{,}62$, calcularemos el eigenvector correspondiente:

$$\left.\begin{aligned}(R-\lambda I)\beta &= 0\\ \beta'\ \beta &= 1\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\begin{bmatrix} 0{,}31 & -0{,}31\\ -0{,}31 & 0{,}31\end{bmatrix} - 0{,}62\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = 0\\ &\beta_1^2+\beta_2^2=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix} -0{,}31 & -0{,}31\\ -0{,}31 & -0{,}31\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = 0\\ &\beta_1^2+\beta_2^2=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}-0{,}31\beta_1 - 0{,}31\beta_2 &= 0\\ \beta_1^2+\beta_2^2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\beta_1 = -\beta_2; \qquad 2\ \beta_1^2 = 1; \qquad \begin{aligned}\beta_1 &= 0{,}7071\\ \beta_2 &= -0{,}7071\end{aligned}$$

La segunda columna de la matriz factorial F_2 sería igual a:

$$F_2 = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}\sqrt{\lambda_2} = \begin{bmatrix}0{,}7071\\ -0{,}7071\end{bmatrix}\sqrt{0{,}62} = \begin{bmatrix}0{,}5567\\ -0{,}5567\end{bmatrix}$$

La parte de la varianza explicada por este segundo factor sería:

$$0{,}5567^2 + (-0{,}5567)^2 = 0{,}62$$

que coincide con el valor del segundo eigenvalor λ_2.

La posición del segundo factor puede deducirse, calculando los ángulos que forma con ambas variables:

$\cos \alpha_1 = 0{,}5567 \qquad \alpha_1 = 56°10'$

$\cos \alpha_2 = -0{,}5567 \qquad \alpha_2 = 123°50'$

En la figura 25 puede observarse que los dos factores son perpendiculares entre sí.

d) *Otros modelos de factorización*

Existen otros modelos de factorización diferentes, que no vamos a tratar en detalle, y para los que remitimos a obras especializadas.

En la práctica, el número de factores obtenidos coincide siempre con el de las variables iniciales. Se plantea, entonces, como separar el número más reducido de ellos que explique el máximo de la varianza. Ya hemos visto como se realiza esta operación en el método de los componentes principales. Otra solución consistiría en aplicar pruebas o tests del tipo de la χ^2, lo que se consigue en el método de la máxima verosimilitud (maximum likehood).

Algunos modelos no imponen a los factores la condición de ser ortogonales, lo que puede resultar, en determinados casos, más acorde con la realidad. La existencia de determinados factores correlacionados puede ser de aplicación preferente en estudios de ecología factorial, donde las características socioeconómicas de la población y su estructura de edad, factores considerados como independientes, pueden tener, sin embargo, una cierta relación entre sí. Los factores oblícuos pueden ser obtenidos directamente de las variables o bien derivados de ellas, en una segunda fase, a partir de una solución ortogonal.

Existen otra formas de aplicar el modelo factorial que no operan directamente a partir de la matriz de correlaciones. En este sentido podemos señalar el análisis factorial directo donde la matriz R es sustituida por una matriz cuadrada y simétrica, sea cual fuera su origen. En el campo de la Geografía, este método ha sido usado en el estudio de las relaciones de flujos entre los diversos elementos de una red. Las relaciones entre los mismos son sustituidas por un 1 si la relación existe y por un 0 si no es así, resultando una matriz de las características descritas, que puede ser utilizada para la realización del análisis factorial.

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	1
B	1	0	1	0	1
C	0	1	0	1	0
D	1	0	1	0	1
E	1	1	0	1	0

La matriz factorial deducida nos daría una referencia del índice de conexión existente entre los diversos lugares.

Otros métodos utilizados no cambian el modelo de relación lineal entre variables, base del modelo factorial, sino el orden de disponer la matriz inicial. El análisis factorial tradicional es el denominado R - mode, y consiste, como venimos repitiendo, en situar las «n» variables en filas y los «N» individuos en columnas y extraer, así, la matriz de correlaciones entre variables. Nada impide que el orden pueda ser alterado y que dispongamos los casos «N» en filas y las «n» en columnas (Q - mode), e incluso relacionemos las variables de un mismo lugar en diversos momentos del tiempo (P - mode) y otras combinaciones posibles (S - mode, 0 - mode y T - mode) como puede observarse en la figura 26.

Por último, señalar que existen otros métodos de análisis factorial, de relación no lineal, que han sido desarrollados en la obra de S. A. Mulaik (ver bibliografía adjunta).

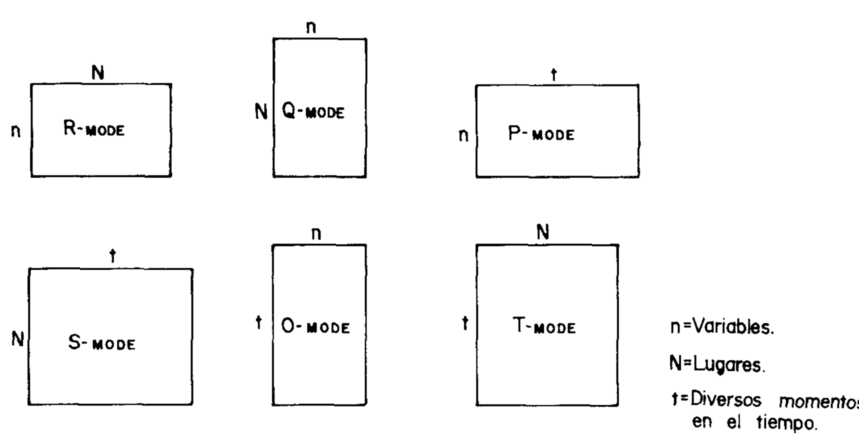

Fig. 26. Diferentes tipos de análisis factorial
Fuente: E.P.

4.4. La rotación

Hemos visto, como los diferentes métodos de factorización existentes pretenden obtener una nueva estructura de factores, que sustituya a la de variables y que permite ir concentrando en un número reducido de ellos la mayor parte de la varianza total disponible. Con ser importante esta operación, olvida, sin embargo, uno de los objetivos más importantes del análisis, a saber: la identificación y significación de los factores en un estudio concreto. Por este motivo, se pretende variar el criterio fundamental que condiciona la consecución de una determinada estructura factorial (maximizar la varianza explicada por cada factor) por otro que establezca una relación estrecha y directa de cada factor con un número reducido de variables, disminuyendo la relación con las demás a los límites menores posibles. De esta manera, se facilita la identificación.

Antes de nada, observemos, mediante un ejemplo sencillo, el significado algebraico de esta operación. En el apartado II pudimos descubrir intuitivamente la importancia de esta fase del análisis factorial. Se trataba, en realidad, de realizar un giro de los ejes de referencia factoriales que transformaba la primitiva matriz factorial en otra. Esta transformación pudo comprobarse ser el resultado de un giro de treinta grados entre los antiguos (eje I y II) y los nuevos ejes de referencia (ejes A y B) (fig. 27). La solución algebraica consiste en expresar las coordenadas del extremo de cada vector (componentes factoriales de cada variable) en función de los nuevos ejes. Esta operación resulta de multiplicar la antigua matriz factorial por otra, cuyos elementos son los coeficientes de correlación entre los ejes factoriales, antiguos y nuevos. Esta matriz multiplicadora sería pues:

$$\Lambda = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \boxed{\begin{array}{cc} \cos \varphi_{AI} & \cos \varphi_{BI} \\ \cos \varphi_{AII} & \cos \varphi_{BII} \end{array}} \end{array} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 120^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

La nueva matriz factorial se obtendría, entonces:

$$\begin{bmatrix} 0{,}423 & 0{,}906 \\ 0{,}530 & 0{,}848 \\ 0{,}602 & 0{,}799 \\ 0{,}940 & -0{,}342 \\ 0{,}906 & -0{,}423 \\ 0{,}766 & -0{,}642 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}087 & 0{,}966 \\ 0{,}035 & 0{,}999 \\ 0{,}122 & 0{,}993 \\ 0{,}985 & 0{,}174 \\ 0{,}996 & 0{,}087 \\ 0{,}985 & -0{,}174 \end{bmatrix}$$

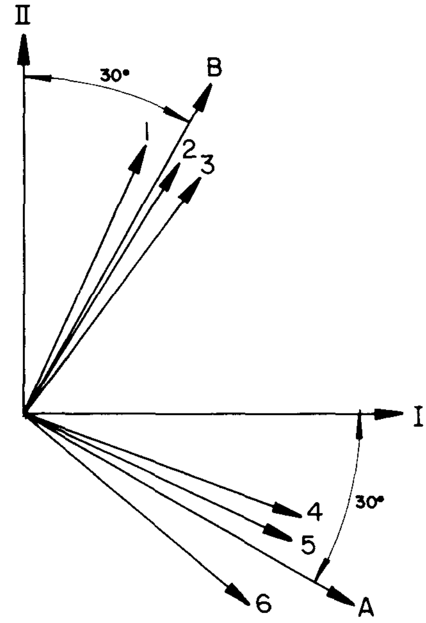

Fig. 27. Rotación de los ejes factoriales I y II a A y B
Fuente: E.P.

Si los ejes de rotación son perpendiculares entre sí, como en este caso, puede comprobarse que la matriz cumple la condición de que el producto por su traspuesta es la matriz identidad I;

La estructura de los ejes factoriales rotados puede ser oblicua, pasando de una estructura ortogonal a otra de ejes no perpendiculares. La forma de cálculo continuaría siendo semejante. Veámoslo con otro ejemplo.

Supongamos que la estructura de seis variables sea la de la figura 28, con dos ejes factoriales, I y II, ortogonales, que concentran el total de la varianza de los datos de partida. La matriz de la estructura factorial es:

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & \text{I} & \text{II} \\
\hline
1 & \cos 20^\circ & \cos 70^\circ \\
2 & \cos 30^\circ & \cos 60^\circ \\
3 & \cos 45^\circ & \cos 45^\circ \\
4 & \cos 145^\circ & \cos 55^\circ \\
5 & \cos 153^\circ & \cos 63^\circ \\
6 & \cos 163^\circ & \cos 73^\circ \\
\hline
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
0{,}940 & 0{,}342 \\
0{,}866 & 0{,}5 \\
0{,}707 & 0{,}707 \\
-0{,}819 & 0{,}574 \\
-0{,}891 & 0{,}454 \\
-0{,}956 & 0{,}292
\end{bmatrix}
$$

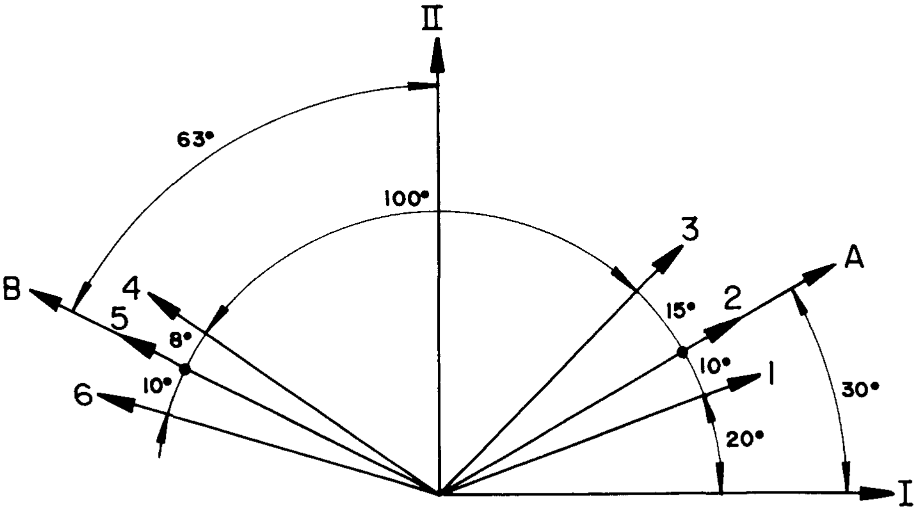

Fig. 28. Estructura de variable y de factores (primitivas y rotadas A y B)
Fuente: E.P.

La nueva matriz T, multiplicadora, para obtener la rotación a los ejes A y B, oblicuos, sería:

$$
T = \begin{array}{c|cc|}
 & \text{A} & \text{B} \\
\hline
\text{I} & \cos 30^\circ & \cos 153^\circ \\
\text{II} & \cos 60^\circ & \cos 63^\circ \\
\hline
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
0{,}866 & -0{,}891 \\
0{,}5 & 0{,}454
\end{bmatrix}
$$

Por tanto, el producto, daría la nueva matriz factorial:

$$\begin{bmatrix} 0{,}940 & 0{,}345 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \\ -0{,}819 & 0{,}574 \\ -0{,}891 & 0{,}454 \\ -0{,}956 & 0{,}292 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}891 \\ 0{,}5 & 0{,}454 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}985 & -0{,}681 \\ 1 & -0{,}545 \\ 0{,}966 & -0{,}309 \\ -0{,}423 & 0{,}990 \\ -0{,}545 & 1 \\ -0{,}682 & 0{,}985 \end{bmatrix}$$

que coincide con la matriz, cuyos componentes son los coeficientes de correlación entre las variables y los nuevos ejes A y B

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ \hline \cos 10^\circ & \cos 133^\circ \\ \cos 0^\circ & \cos 123^\circ \\ \cos 15^\circ & \cos 108^\circ \\ \cos 115^\circ & \cos 8^\circ \\ \cos 123^\circ & \cos 0^\circ \\ \cos 133^\circ & \cos 10^\circ \end{array} = \begin{bmatrix} 0{,}985 & -0{,}681 \\ 1 & -0{,}545 \\ 0{,}966 & -0{,}309 \\ -0{,}423 & 0{,}990 \\ -0{,}545 & 1 \\ -0{,}682 & 0{,}985 \end{bmatrix}$$

Según los criterios empleados en realizar la rotación obtendríamos los diferentes métodos existentes. La rotación ortogonal conserva la independencia de los factores y es la más frecuentemente utilizada. Dentro de la misma destaca especialmente la rotación varimax. Como el mismo nombre sugiere, se trata de maximizar la varianza de varias variables en torno al mismo eje factorial, minimizando la del resto.

Otros métodos como la quartimax, equamax, etc. conducen a resultados no muy diferentes.

BIBLIOGRAFÍA

BEGUIN, H. (1979): *Methods D'Analyse Geographique Quantitative,* París.

BOSQUE SENDRA, J., *et alii* (1988): *Aplicaciones de la Informática a la Geografía y las Ciencias Sociales.* Madrid, Ed. Síntesis, 319 págs.

CUADRAS, C. M. (1981): *Métodos de análisis multivariante.* Barcelona, Eunibar.

HARMAN, H. H. (1975): *Modern Factor Analysis.* Chicago, University of Chicago Press.

JOHNSTON, R. J. (1978): *Multivariate Statistical Analysis in Geography.* Londres, Longman.

MATHER, P. (1976): *Computational Methods of Multivariate Analysis in Physical Geography.* London, J. Wiley Sons, 215 págs.

MORRISON, D. F. (1976): *Multivariate Statistical Methods.* N. York, Mc Graw Hill.

MULAIK, S. A. (1972): *The foundations of factor analysis.* N. York, Mc Graw Hill.

SÁNCHEZ CARRIÓN, J. J. (edit) (1984): *Introducción a las técnicas de análisis multivariable aplicados a las ciencias sociales.* Madrid, CIS. 331 págs.

SANTOS PRECIADO, J. M. (1986): «Algunas consideraciones sobre la interpretación de resultados en el análisis factorial». *Boletín del Grupo de Métodos Cuantitativos en Geografía,* n. 4, Madrid, págs. 1-14.