Un peu d'épistémologie élémentaire, un clin d'oeil à Ferdinand Gonseth. L'exemple de l'enseignement de la numération à l'école élémentaire.

François Conne

UN PEU D'EPISTEMOLOGIE ELEMENTAIRE : CLIN D'OEIL A FERDINAND GONSETH. LœEXEMPLE DE LœENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION A LœECOLE ELEMENTAIRE.

François Conne

Juin 1987

INTRODUCTION

Réfléchissant ces derniers temps aux questions relatives à la numération, j'en viens à rencontrer un passage dans un mémoire d'étudiante, je cite :

En lisant une *Histoire des Mathématiques* *de Marcel Boll (...), nous avons, en tant qu'enseignante relevé une citation qui a retenu toute notre attention : «Il est difficile de concevoir l'importance du principe de position, tellement il nous est devenu familier. Ce principe est si simple que l'écolier le plus borné le comprend aujourd'hui sans peine » (p. 16) Nous avons trouvé cette affirmation tellement absurde et en contradiction avec notre expérience de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, que cela nous a incité à essayer de montrer que le système de notation positionnelle est en fait très complexe et que justement les enfants les plus intelligents peuvent avoir des problèmes pour transcrire ou déchiffrer un nombre.*

Je comprends la réaction de madame Thorel (cette étudiante). Et je dois dire qu'elle s'en est très bien inspirée comme le témoigne la qualité de son mémoire. Mais je conçois aussi qu'on puisse parler comme monsieur Boll. Non pas que je veuille me faire l'avocat du diable, mais parce que derrière une affirmation si tranchée se profile une question très importante, et ma foi fort délicate à traiter. De quels aspects tenir compte dans l'enseignement ? Qu'est-ce qui sera dit évident ? Selon quels critères départager ce qu'il est important de connaître, de comprendre, de ce qui n'est qu'aspect mineur ? Enfin, qu'est-ce qui mérite d'être enseigné ou de n'être qu'évoqué, en classe, si l'occasion se présente, ou encore qui ne mérite pas de mention ? C'est donc en quelque sorte la question de l'ampleur à donner aux contenus d'enseignement. Et nous voyons ainsi que cette question est liée à celle de l'évidence, celle de ce qui nous paraît pouvoir ou non aller de soi.

Celui qui suivra l'avis de M. Boll se simplifie la vie, avec lui, l'enseignement de la numération restera sommaire. Celui qui au contraire se rangera à l'avis de Mme Thorel aura plus de fil à retordre. C'est peut-être le prix à payer pour une attitude attentive aux difficultés des élèves. Comment choisir la bonne attitude ? C'est cette question que j'aimerais traiter maintenant, en restant dans l'exemple de la numération.

UN DIALOGUE FICTIF

Pour entrer dans l'examen de cette question, je vous propose un dialogue. Non pas celui qu'auraient pu tenir Mme Thorel et M. Boll, laissons-les, mais celui que deux personnages, deux enseignants de l'école primaire par exemple, pourraient tenir. A chaque personnage, j'ai donné un nom. Le premier, **le crédule**, commencera en reprenant l'argument de M. Boll cité ci-dessus. Le second, **l'incrédule**, réagira, lui, tout d'abord comme Mme Thorel. Puis le dialogue se poursuivra selon une logique que je vois en ce problème. Qu'il soit bien clair que ces noms ne valent que pour souligner le désaccord de nos deux protagonistes et rappeler qu'ils ne partagent pas les mêmes évidences. D'ailleurs, ces noms sont interchangeables.

Scène 1 - Crédule par conjecture.

Le crédule *(retrouvant sans le savoir la formule de M. Boll)*

Il est difficile de concevoir l'importance du principe de position, tellement il nous est devenu familier. Ce principe est si simple que l'écolier le plus borné le comprend aujourd'hui sans peine.

L'incrédule

Non ! Votre affirmation est absurde. Le système de notation positionnelle est en fait très complexe. Et justement, les enfants les plus intelligents peuvent avoir des problèmes pour transcrire ou déchiffrer des nombres.

Le crédule

Mais que me chantez-vous donc là ? Pour écrire un nombre ne suffit-il pas de savoir aligner des chiffres ?

L'incrédule

Justement, rien d'autre que la place des symboles n'y indique la valeur ! C'est dans cet implicite que toute la complexité du système de position réside.

Le crédule

Mais je vous le répète, il suffit d'aligner des chiffres. Le nombre ne se fait-il pas ainsi, tout seul ?

L'incrédule

Encore faut-il être capable de maîtriser l'écriture, c'est-à-dire de transcrire les nombres et les déchiffrer. Entendez donc bien ce que je dis !

Le crédule *(il s'arrête un instant, comme pour réfléchir)*

Soit, je vous l'accorde, il y a quelque chose là-dessous. Mais il s'agit en définitive d'une simple traduction d'un langage parlé dans le code chiffré, ou vice versa.

L'incrédule

Pas n'importe quel code, ne vous fiez pas aux apparences ! Un code qui a ses règles propres, d'une efficacité sans conteste. Pensez donc : avec ses dix symboles, les chiffres, vous pouvez exprimer tous les nombres ! Alors que la langue s'empêtre vite dans ses termes, les millions, milliards etc. Savez-vous parler les grands nombres ? Et comment dites-vous les décimaux ? Assurément, cette puissance du code écrit est déjà inscrite dans les règles qui le gouvernent. Et considérez donc l'histoire ! Le temps qu'il aura fallu aux civilisations pour l'élaborer !

Le crédule *(crédule, donc se méfiant des sophistes)*

Je ne trouve pas à vous répondre immédiatement. Mais vous ne m'avez encore pas convaincu !

Les deux personnages se quittent.

Scène 2 - À incrédule, incrédule et demi.

Quelques temps plus tard, ils renouent leur discussion.

On dirait que le crédule a changé d'avis.

Le crédule

Ah mais, vous m'avez fait réfléchir ! J'ai même dû consulter un ouvrage spécialisé. Ce ne fut pas inutile, tenez, lisez !

Le crédule tend un texte à l'incrédule.

« La numération parlée comporte de nombreuses anomalies : on dit vingt et un et non vingt-un, soixante-dix et non septante, quatre-vingts et non octante (ni comme il pourrait encore se dire plus économiquement, huit-dix sur le modèle de huit cents, huit mille, etc.). On peut également dire mille deux cents ou douze cents, deux millions cinq cent mille ou deux millions cinq, etc.

Mais au-delà de ces exemples qui montrent que la part de mémorisation est plus grande qu'on ne pourrait le penser, le principe de la numération parlée est double puisque y apparaissent à la fois les puissances de la base et les coefficients multiplicateurs de ces puissances, que ce soit de façon distincte (deux mille, trois cents, dix, sept) ou en un seul mot (soixante où l'on pourrait dire logiquement «six-dix», treize là où on pourrait avoir «dix-trois»).

Dans tous les cas, le 0 écrit n'est jamais lu (2 003 se lit deux mille trois) et lorsque le coefficient de la puissance de la base la plus élevée est un, il n'est pas prononcé (1 000 se lit mille et non «un mille»). Comme la numération chinoise, notre numération parlée décompose le nombre : 2 308 se lit spontanément (2 x 1 000) + (3 x 100) + 8, deux mille trois cent huit. Enfin quand nous arrivons aux nombres supérieurs à mille, nous observons que ce système fonctionne à la fois en base dix et en base mille. Si on lit le nombre: 34 207 454 on lit trente quatre (comme si rien ne suivait) puis million, deux cent sept mille quatre cent cinquante quatre. Ce qui correspond à la décomposition:

$(34.10^6) + (207.10^3) + 454$ ou $34.(10^3)^2 + 207.(10^3) + 454$

Mille apparaît donc comme nouvelle base, mais on utilise toujours la base dix pour écrire les coefficients des puissances de mille. Ceci est à rapprocher du système d'écriture des nombres qui mesurent le temps où l'on trouve la combinaison du système sexagésimal et du système décimal. Cette particularité de la numération parlée a des conséquences dans notre pratique intuitive de la comparaison des nombres : si nous comparons oralement des petits nombres (par exemple 65 et 87), nous ne sommes pas réellement sortis de la comptine qui met «quatre-vingt-sept» après «soixante-cinq» dans la suite des «noms» de nombres que nous avons appris. En revanche la comparaison de grands nombres (23 203 et 8 312) se fait directement par comparaison des puissances de la base et de leur coefficient. Le critère qui joue si pertinemment à l'écrit (la longueur de l'écriture) n'est évidemment pas valable oralement («neuf cent quatre-vingt dix-neuf» est beaucoup plus long à dire et beaucoup plus petit que «mille»). »

L'incrédule *(ayant lu)*

Eh bien soit. Et qu'en concluez-vous?

Le crédule

Tout se complique, il faut enseigner systématiquement la numération parlée. Si l'on ne s'assure pas de cela, certains élèves auront toujours de grandes difficultés scolaires avec ces notions élémentaires mais fondamentales. Vous aviez raison, mon cher, je me range à votre avis !

L'incrédule

Eh là ! Tout doux l'ami ! Je n'ai jamais prétendu qu'il fallait aussi enseigner les particularités de la numération parlée. Qu'allez-vous imaginer !

Le crédule

Bon, reprenons, "rien n'est simple", c'est vous-même qui me l'avez dit n'est-ce pas ? Moi, je vous montre maintenant que "tout se complique".

L'incrédule

A mon tour d'être intrigué, et de vous demander une pause. Je m'en vais consulter mes ouvrages de référence. Retrouvons-nous demain, voulez-vous?

Scène 3 - Où crédule et incrédule se perdent en conjectures.

Les deux personnages se retrouvent le lendemain.

Le crédule

Alors, sommes-nous d'accord maintenant ?

L'incrédule

Non, pas vraiment ! J'ai trouvé autre chose, tenez, lisez!

Il tend alors un autre texte à son compagnon.

« e) prendre en compte la numération parlée et ses caractéristiques propres

Comme l'analysent les auteurs de « Apprentissages des mathématiques à l'école élémentaire » (Ermel 1977), la numération parlée a ses caractéristiques propres. Le lecteur trouvera dans l'annexe 5 la présentation de ces caractéristiques. Un certain décalage existe entre les règles d'écriture des nombres et leurs règles de lecture. Cela ne va pas sans poser de problèmes aux élèves, problèmes sur lesquels les moyens d'enseignement romand de mathématiques restent silencieux. Chaque enseignant est amené à y faire face lorsque le cas se présente. L'élève est ainsi conduit à faire fonctionner deux systèmes de règles de numération : le système écrit et le système oral. Le premier fait l'objet d'un apprentissage systématique alors que le second est censé s'acquérir spontanément sur le tas. Son caractère hybride, du fait qu'il combine notamment l'utilisation de la base mille (pour l'énoncé des grands nombres) et de la base dix le rend mathématiquement peu intéressant, d'où le silence à son propos. D'un point de vue mathématique, la numération parlée n'est qu'un accident de parcours requis par la communication orale. C'est une pratique usuelle commode, mais rien de plus. Du point de vue de l'élève, la maîtrise de la numération parlée relève d'un apprentissage comme un autre.

Faut-il alors préconiser, comme le font les auteurs cités ci-dessus, un apprentissage systématique en la matière ? Le risque que la programmation de cet apprentissage soit coûteuse est qu'elle ne fasse qu'alourdir un enseignement déjà trop chargé est certain. Le fait que la numération parlée relève de l'environnement culturel quotidien (scolaire et extrascolaire) permet d'approcher cet apprentissage de manière informelle, selon une modalité analogue à l'élargissement, par l'enfant, de ses connaissances lexicales dans la langue maternelle. Cela ne signifie pas qu'une intervention didactique ne soit pas nécessaire, mais, au lieu d'être programmée, elle peut n'intervenir qu'en cas de nécessité, selon les circonstances.

Cela requiert que les enseignants soient attentifs et parfaitement au fait des particularités de la numération parlée, particularités avec lesquelles l'adulte est tant familiarisé, qu'il ne les perçoit souvent plus.

En résumé, prendre en compte la numération parlée signifie, dans notre perspective, ne pas sous-estimer l'apprentissage qu'elle requiert de l'élève, sans toutefois en faire l'objet d'un apprentissage méthodique. »

Le crédule a fini sa lecture, l'incrédule l'interroge.

L'incrédule

Alors voilà qui est bien clair, n'est-ce pas, cette position moyenne est aussi la mienne.

Le crédule

Ah ! Ah ! Vous avez les mêmes références que moi. Voyez-vous, cet extrait que je vous avais montré était tiré lui aussi de l'ouvrage de J.-F. Perret. J'avais lu ce passage, mais ne l'avais pas retenu comme tout à fait convaincant. De plus, on pourrait retourner l'argument pour critiquer l'enseignement de la numération écrite elle-même. Nous rejoindrions ainsi le camp des sceptiques pour qui, à l'école, on veut en faire beaucoup trop pour la numération.

L'incrédule

Mais pas du tout ! L'avis de Mr. Perret est clair, et en plus il est motivé ! Votre rapprochement est injuste !

Le crédule

Bon, reprenons donc. Lors de notre première discussion, je vous disais en substance : « Former un nombre écrit se limite à aligner des chiffres ». Puis je vous concédais que reconnaître un nombre écrit, ou encore savoir effectivement transcrire le nombre auquel on pense revient, finalement, à bien maîtriser les règles de la numération parlée. La position n'entre pas en ligne de compte là-dedans. Le nombre écrit est assimilé au nombre parlé. Rien de plus naturel puisque la première connaissance des nombres nous vient de la comptine, même si celle-ci se base en grande partie sur un apprentissage par cî ur. Pour la plupart, la langue précède l'écrit.

L'incrédule

Quels propos étranges ! Ainsi, selon vous, apprendre à écrire les nombres, c'est apprendre à les parler ? Votre extravagance de pensée m'inquiète, é

Le crédule *(l'interrompant avec vivacité)*

é mais dites-moi seulement où le principe de position intervient?

L'incrédule

Mais bon sang ! Dans l'ordre dans lequel vous alignez et regroupez les chiffres !

Le crédule

Moi, je pense que c'est une simple convention d'écriture. La numération parlée suit d'ailleurs un ordre identique.

L'incrédule

L'allemand inverse l'ordre pour les dizaines : «drei und zwanzig».

Le crédule

Nous n'en sommes pas à une inversion près, celle-là n'est d'ailleurs que locale, et l'ordre reste univoquement déterminé.

L'incrédule

Bon, alors, relisez vos propres sources. Voyez ce que dit ERMEL, passons sur le zéro, regardez simplement la question de la longueur du code. Dans l'écrit, plus le code comporte de chiffres, pour les nombres entiers, plus il désigne un grand nombre. Ce n'est pas le cas dans le parlé.

Le crédule

Est-ce là une des fameuses règles de votre « système de numération de position »? N'est-ce pas plutôt une conséquence secondaire, voire mineure ? Mais cela m'amène à vous poser une autre question plus importante : les règles sur lesquelles les élèves s'appuient pour traiter les codes sont-elles forcément les règles que détermine votre analyse formelle ?

L'incrédule

Je ne vous suis plus.

Le crédule

C'est pourtant simple, connaître la numération peut-il se résumer à connaître les règles du modèle que vous lui assignez ?

L'incrédule

Vous voudriez donc leur enseigner plus ? Cela ne suffit-il pas ?

Le crédule (*restant un instant bouche bée***)**

Votre ironie me fait prendre conscience du cours tortueux de nos échanges. Et voilà que, sans me rendre compte, j'ai à nouveau changé d'avis. Attendez ... tout était d'abord simple ... puis tout me paru plus compliqué ... mais je vous reproche à vous, non pas de simplifier, mais ... comment dire é de réduire.

L'incrédule *(perdant patience)*

Ah ! C'est déjà assez compliqué comme ça !... rendez-vous compte ... pour l'élève ! Pour le maître ! Lorsqu'ils échangent en classe, simplifions ! Oui, n'en ayons pas crainte, et vous de grâce reposez-vous les méninges !

Le crédule

Pas avant d'avoir fait le bilan au moins ! Notre discussion ne va certes pas de soi é Certes, finalement, la réponse é nous la saurons é par notre pratique. Alors, nous verrons bien si nous l'avons. Mais j'espérais pouvoir trouver par l'analyse quelqu'instrument utile. Et puis attention, vous n'êtes toujours pas convaincant. Vous-même n'êtes plus si assuré !

L'incrédule

Je dois vous avouer que je me fatigue ... et j'ai l'impression désagréable de ne pas sortir d'un débat d'opinion. ... J'ai de la peine à vous suivre ... vous m'êtes pourtant bien sympathique ...

Le crédule *(coupant net)*

Merci c'est gentil, cela ne m'avance guère pourtant ... mais quand même, vous m'encouragez à tenter un premier bilan. Voilà donc ce qui me contrarie. D'un côté, je conçois l'apprentissage des notions élémentaires comme assez naturel, se développant cahin caha, avec plus ou moins de bonheur, qui passe aisément du très simple à quelque chose d'un petit peu plus complexe. C'est la gentille comptine, les noms de nombres que l'on retient d'abord dans un certain désordre, selon les consonances, puis les premiers comptages, les écritures chiffrées que l'on trace ou lit, etc ... Lorsque j'essaye de décrire ce mouvement d'une manière plus analytique, moins champêtre, je commence cependant à me perdre, je m'empêtre dans les termes, soudainement, rien ne va plus comme il me semblait avant. Pire encore, à chaque nouvelle tentative d'élucidation, les maillons entrevus sont démultipliés par l'effet d'une analyse, ma foi trop puissante et trop féconde. Je n'arrive pas à intégrer en une vision nette toutes les facettes qui commencent à miroiter.

D'un autre côté, si, au lieu de partir de la suite des apprentissages, je me fixe sur une analyse formelle, abstraite, du système, toujours simple pour les notions qui nous occupent, je ne gagne pas grandôchose d'utile pour mon enseignement. Que j'essaye de m'en inspirer, et mes élèves ne me suivent plus, ou, s'ils semblent enfin comprendre, et manier ce que je leur propose, cet apprentissage reste isolé, il ne va pas se nicher parmi les connaissances naturelles de l'enfant.

Voilà d'où viennent ma perplexité et l'oscillation de mes avis. Si je suis l'élève et son parcours, je me perds dans l'analyse. Si je cherche à réaliser une analyse formelle dans mon enseignement, l'apprentissage échappe à mon contrôle.

L'incrédule

Splendeur et décadence de la Didactique des Mathématiques !

Le crédule

Eh, dites-moi plutôt quelle numération utile au sage vous aimeriez à faire apprendre? L'écrite, l'orale, toutes deux, aucune ? Allez dites une bonne fois !

L'incrédule

Et pourquoi ne nous contenterions-nous pas d'**<u>enseigner</u>** tout simplement ? Allons! Pour ma part, je m'estime désormais suffisamment informé, je saurai aussi être attentif. Cela suffira, qui sait ? Et je rejoins en ceci l'avis de J.F.Perret.

Le crédule *(lyrique)*

Faites, allons, enseignons! Dœaccord, même si je garde le souci de vouloir m'informer encore et toujours, é **<u>informons nous donc à enseigner, enseignons donc pour voir!</u>**

L'incrédule *(se retournant soudainement inquiet)*

Malheureux baissez donc la voix! Si on nous entendait! Plus d'un jugerait vos propos irresponsables.

Le crédule *(en aparté)*

Alors que c'est tout le contraire é **(***plus haut***)** mais je reste peu assuré ... j'aimerais une fois disposer d'un bon cadre d'interprétation.

L'incrédule le regarde avec un air d'amusement, puis fait une moue d'approbation.

Ils se serrent la main puis sortent, en vous saluant cher public.

Fin du dialogue.

CONCLUSION

Ainsi donc nos deux personnages décident de *lever le pied*, et de s'en remettre à leur expérience, ou plus précisément à l'information qu'elle leur dispensera. Ils décident en quelque sorte de déplacer leur établi sur une autre scène, dans un autre lieu, dans l'horizon de leur expérience pratique (au sens général du terme). Cette décision est pleinement justifiée, mais ne serait-elle pas prise que ce déplacement aurait lieu quand même, tôt ou tard. On conçoit bien qu'une trop forte dose d'analyse, trop féconde, donne le vertige, laisse trop d'incertitude. N'oublions pas que leur réflexion de tout à lœheure visait avant tout à les rendre plus efficaces dans leur enseignement. En d'autres termes, à ce point de leurs spéculations, une décentration est souhaitable. Mais comment s'y prendre ? Déplacer son champ de réflexion sur la pratique seule n'est pas une issue pour ce genre d'impasse. Les réponses aux questions: « Quelle numération enseigner ? », ou encore plus généralement : « Jusqu'où faut-il pousser les analyses et les explications? », ne s'y trouvent pas. Il est, de plus illusoire de croire que la pratique enseignante est libre, à côté, indépendante. Toutes les descriptions de manuels et de leçons montrent, au contraire, la forte propension qu'a l'enseignant à se laisser prendre à la logique des dispositifs qu'il a mis en place pour faire apprendre et comprendre, quand ce n'est pas justement ce qu'il cherche. Enfin, l'impasse où nos personnages se trouvent ne tient ni à un manque d'information, ni à un esprit peu disponible ! Ce qui est en cause ici, ce n'est pas que l'on soit trop théorique, car on court le danger analogue de verser dans le pratique. Ce qui se joue, c'est la relation qu'entretiennent les deux horizons considérés (théorique / expérimental). J'emprunte cette expression d'horizon à F. Gonseth (1949), et vous laisse sur cette ouverture à sa philosophie.

Références

1. Thorel-Cornut, Problèmes liés à la numération : utilisation d'un compteur en 2P-3P mémoire de licence, Faculté de psychologie et des sciences de lœducation, Genève, 1984, 11p.
2. M. Boll, Histoire des mathématiques, Que sais-je?, Paris, Puf 1963
3. La numération parlée. Extrait de Ermel Apprentissages mathématiques à l'école primaire, cycle préparatoire, Sermap-OCDL, 1977, pp. 89-90, cité par J-F Perret, annexe 5, p. 277, de « Comprendre l'écriture des nombres ».
4. J-F Perret, Comprendre l'écriture des nombres, Peter Lang, 1985, pp. 246-247.
5. F. Gonseth, La géométrie et le problème de lœspace. Fac. IV, La synthèse dialectique. Griffon, 1949, pp. 12-45.