



Solución numérica de la ecuación KdV utilizando representación de operadores diferenciales en base wavelet

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Denis Alberto Castro R

Darwin Aramburo P

Directores

Jairo Villegas G

Jorge Castaño B

Maestría en Matemáticas Aplicadas
Escuela de Ciencias.
Universidad EAFIT
Medellín

Agradecimientos

Denis Alberto Castro

Agradecer a Dios y a mi familia por esperar y animar mi proyecto de vida, a mis padres por su confianza brindada, a los directores de este trabajo Jairo Villegas G y Jorge Iván Castaño B por sus grandes enseñanzas en el campo investigativo, formación profesional y personal, a la Universidad EAFIT que forma en la investigación científica, a todos nuestros maestros de la maestría por el conocimiento enseñado.

Darwin Aramburo

Agradecer a los directores, Jairo Villegas G y Jorge Iván Castaño B por sus conocimientos y apoyo en todo momento durante la realización de esta Tesis. También brindamos un especial agradecimiento a todos los profesores que tuvimos en la maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT de Medellín los cuales nos ofrecieron valiosos aportes en nuestra formación profesional.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares y terminología	5
1.1. Introducción	5
1.2. Transformada de Fourier	8
1.2.1. Serie de Fourier	9
1.2.2. Transformada discreta de Fourier (DFT)	11
1.2.3. Transformada Rápida de Fourier (FFT)	12
1.3. Semigrupo de operadores lineales	13
2. Introducción a las wavelets	17
2.1. Introducción	17
2.2. Transformadas wavelets	18
2.2.1. Transformada wavelet continua	18
2.2.2. Transformada wavelet discreta	22
2.3. Análisis Multirresolución	24
2.4. Ecuación de escala	28
2.5. Construcción de la función de escala	30
2.6. Descomposición y reconstrucción	33
2.6.1. Algoritmo de descomposición	33
2.6.2. Algoritmo de reconstrucción	35

3. Representación de Operadores en Base Wavelet	37
3.1. La forma estándar y no estándar	37
3.2. Representación matricial	42
3.2.1. Representación matricial de la forma N-S de ∂_x	49
3.2.2. Representación wavelet de la función operador	53
4. Solución numérica de la ecuación KdV	61
4.1. La ecuación Korteweg-de Vries (KdV)	61
4.1.1. Derivación de la ecuación KdV	62
4.2. Algoritmo basado en wavelets	64
4.2.1. El enfoque de semigrupo	66
4.3. Resultados e Implementación	73
4.3.1. Implementación del método de solución	73
4.4. Conclusiones y recomendaciones	82
Bibliografía	85

Introducción

La idea de utilizar wavelets en la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales se da en virtud a que algunas propiedades de las wavelets son importantes en la construcción de algoritmos adaptativos. Un algoritmo de este tipo selecciona un conjunto minimal de aproximaciones en cada paso, de tal manera que la solución calculada sea lo suficientemente próxima a la solución exacta. Si queremos que la solución calculada sea suave en alguna región, sólo unos pocos coeficientes wavelet serán necesarios para obtener una buena aproximación de la solución en dicha región, es decir, solamente los coeficientes de bajas frecuencias cuyo soporte esté en esa región son los utilizados. De otro lado, los coeficientes grandes (en valor absoluto) se localizan cerca de las singularidades y esto nos permite definir criterios de adaptabilidad a través del tiempo de evaluación [9, 17, 47, 54]. Este trabajo se dirige fundamentalmente a encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones de evolución no lineales de la forma $u_t = \mathcal{L}u + \mathcal{N}f(u)$, donde \mathcal{L} y \mathcal{N} son operadores diferenciales [4, 6], $\mathcal{L}u$ es la parte lineal, mientras que $\mathcal{N}f(u)$ es el término no lineal de la ecuación. La función $f(u)$ en general, es no lineal, por ejemplo, $f(u) = u^r$. El trabajo busca dar respuesta problemas que surgen en diferentes áreas de las ciencias e ingeniería, véase por ejemplo, [15, 16, 34, 36, 40, 53].

El desarrollo de técnicas numéricas para la obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se ha incrementado en las últimas décadas. Recientemente métodos wavelets se están aplicando a la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, trabajos pioneros en esta

2 Introducción

dirección son los de Beylkin [3, 4], Dahmen [16, 17], Jaffard [36], Glowinski [29], Tanaka [53], Urban [54], Vasilyev [55].

El trabajo tiene como motivación inicial, estudiar métodos numéricos aplicados a la solución de problemas de valor inicial, en particular, utilizar procesos similares al método de los elementos finitos [11, 24, 37, 50, 51], pero usando nuevas herramientas como es la teoría wavelets [12, 54, 57]. Para tal fin, se estudiará la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) [22, 23, 39, 57]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x),\end{aligned}$$

donde α y β son constantes que usualmente se fijan como $\alpha = 6$ y $\beta = 1$. En consecuencia, en el presente trabajo se emplea la solución numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) para estudiar la interacción de soluciones tipo solitón bajo la perspectiva del análisis wavelets. Entre las principales características de los solitones se encuentra su posibilidad de propagarse como ondas de gran amplitud sin dispersión e interactuar entre ellas de forma tal que luego de la interacción cada onda recupera totalmente sus características previas a la interacción tal como si se hubiera tratado de partículas [22, 23].

Finalmente mencionemos también que las wavelets proporcionan un conjunto de herramientas flexibles para detectar problemas prácticos en ciencia e ingeniería. Entre estas herramientas se tienen la transformada wavelet que está asociada con el Análisis Multirresolución de una señal, es decir, a distintos niveles de resolución se tendrá una base de wavelets. Concretamente, cuanto mayor detalle se pretenda obtener en una señal (mayor resolución), mayor número de funciones por unidad de longitud se tendrán en la base de wavelets, véase por ejemplo, [7, 8, 19, 35, 52, 58, 59]. Además, no existe una transformada wavelet única, que resuelva todos los problemas a partir de la modelación del proceso y de un análisis a priori del tipo de señal tratada y del objetivo que se pretenda estudiar, como por ejemplo, compresión, eliminación del ruido o filtrar la señal. En cada caso, se busca la familia wavelets más apropiada tal como Haar, Daubechies, Coiflets, biortogonal u otra que mejor coincida con las características de la señal a estudiar, véase p.e., [10, 19, 26, 32, 43, 45].

El trabajo comienza con la descripción de la terminología necesaria para abordar los métodos aproximados en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, partiendo de los resultados básicos del análisis de Fourier. El

capítulo 2 es una introducción a la teoría wavelet, prestando especial interés a las transformadas wavelets tanto discretas como continuas y terminando con un corto estudio del análisis multirresolución y wavelets biortogonales. En el capítulo 3 se estudia la representación de operadores en base wavelet [2, 4, 31], y luego este método se aplica para resolver numéricamente la ecuación de Korteweg-de Vries, tema que se desarrolla en el capítulo 4.

CAPÍTULO 1

Preliminares y terminología

1.1. Introducción

En este corto capítulo se presentará alguna terminología necesaria para la lectura de esta monografía. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis de Fourier omitiendo sus pruebas, las cuales se pueden encontrar en algunos de los siguientes textos [7], [27], [48], [58], [59].

Recuerde que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene $L_2(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones cuadrado-integrables, cuya norma es

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio se dota con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones

6 Preliminares y terminología

(clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, donde

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$. Otro espacio que se utilizará es $\ell_2(\mathbb{Z})$, el de las sucesiones (x_j) , $j \in \mathbb{Z}$, tal que $\sum_j |x_j|^2 < \infty$.

Sea $F = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , V y W espacios normados (espacios vectoriales equipados con una norma). Un operador lineal es una función $T : V \rightarrow W$ tal que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, para cada $a, b \in F$ y cada $u, v \in V$. El operador T es continuo en u_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|u - u_0\|_V < \delta \quad \text{entonces} \quad \|Tu - Tu_0\|_W < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Si (1.1.1) se cumple para cada $u_0 \in V$ se dice que T es continuo en V . Si δ no depende del punto u_0 se dice que T es uniformemente continuo en V .

El operador T es acotado si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que $\|Tu\|_W \leq M\|u\|_V$ para cada $u \in V$. La prueba del siguiente resultado se encuentra en [49, Th 3, p. 150].

Proposición 1.1.1. *Sean V y W espacios normados. El operador $T : V \rightarrow W$ es continuo si y sólo si T es acotado.*

Sean V y W espacios de Banach. El operador $T : \mathcal{D}(T) \subset V \rightarrow W$, es cerrado si para cada sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(T)$ tal que $v_n \rightarrow v$ y $Tv_n \rightarrow w \in W$, cuando $n \rightarrow \infty$, implica que $v \in \mathcal{D}(T)$ y $w = Tv$.

$\mathcal{L}(V, W)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales y continuos (o acotados) de V en W . Además, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio normado, donde la norma se define por

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|_W}{\|u\|_V} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|,$$

para cada $u \in V$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. En donde $aT + bS$ se define por

$$(aT + bS)u = aTu + bSu,$$

para cada $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, $u \in V$ y cada $a, b \in F$.

Si $W = F$ entonces $\mathcal{L}(V, F)$ se llama el dual topológico de V y se denota por V' , es decir, $V' = \mathcal{L}(V, F)$ sus elementos se llaman funcionales

lineales continuos o formas lineales continuas sobre V . En consecuencia, $f \in V' \Leftrightarrow f : V \rightarrow F$ es una aplicación lineal y continua, es decir,

$$\|f(u)\| = |f(u)| \leq M\|u\|_V, \quad \text{para cada } u \in V, \quad \text{y } M > 0.$$

Es usual escribir $\langle f, u \rangle$ en lugar de $f(u)$.

$$\|f\|_{V'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_V}.$$

Un sistema de funciones $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\phi_j \in L_2(\mathbb{R})$, se llama ortonormal si

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_j(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \delta_{jk},$$

donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Es decir,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Un sistema ortonormal se llama una base en un subespacio V de $L_2(\mathbb{R})$ si cualquier función $f \in V$ tiene una representación de la forma

$$f(t) = \sum_j c_j \phi_j(t),$$

donde los coeficientes c_j satisfacen $\sum_j |c_j|^2 < \infty$. En lo que sigue se utilizará la notación $\sum_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}$, $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty}$, $\|f\|_{L_2} = \|f\|_2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

La función característica del conjunto A , χ_A , se define por

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A; \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

También se utilizará la notación $I\{A\}$ para denotar esta función y la llaman función indicadora.

El soporte de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, denotado $\text{sop}f$, se define por $\text{sop}f = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$.

1.2. Transformada de Fourier

En esta sección se recordará la definición y algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Definición 1.2.1. Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\omega \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f en ω se define por

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |e^{-it\omega}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$$

se tiene que la transformada de Fourier está bien definida. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier y se denota por \mathcal{F} ($\mathcal{F}(f) = \hat{f}$). La función \hat{f} es continua y tiende a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue). Es claro que $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

En general \hat{f} no es una función integrable, por ejemplo, para

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

se tiene

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-it\omega} dt = \left[\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right] = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} \notin L_1(\mathbb{R}).$$

Si $\hat{f}(\omega)$ es integrable, entonces existe una versión continua de f y se puede obtener la fórmula de inversión de Fourier

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.1)$$

La siguiente proposición recoge algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Proposición 1.2.1. Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces

1. $\widehat{(\tau_x f)}(\omega) = e^{-i\omega x} \hat{f}(\omega)$, donde $(\tau_x f)(t) = f(t - x)$.
2. $\widehat{(\tau_x \hat{f})}(\omega) = \widehat{(e^{ix(\cdot)} f)}$

3. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

4. Si $\epsilon > 0$ y $g_\epsilon(t) = g(\epsilon t)$ entonces $\hat{g}_\epsilon(\omega) = \epsilon^{-1} \hat{g}(\omega/\epsilon)$.

Otro resultado útil es el siguiente: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{fórmula de Plancherel}) \quad (1.2.2)$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \quad (\text{fórmula de Parseval}). \quad (1.2.3)$$

Por extensión, la transformada de Fourier se puede definir para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$. En virtud a que el espacio $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$. Luego, por isometría (excepto por el factor $1/2\pi$) se define \hat{f} para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, y las fórmulas (1.2.2) y (1.2.3) permanecen válidas para todo $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

En teoría de señales, la cantidad $\|f\|_2$ mide la energía de la señal, mientras que $\|\hat{f}\|_2$ representa el espectro de potencia de f .

Si f es tal que $\int_{\mathbb{R}} |t|^k |f(t)| dt < \infty$, para algún entero $k \geq 1$, entonces

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Recíprocamente, si $\int_{\mathbb{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < \infty$, entonces

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega). \quad (1.2.5)$$

1.2.1. Serie de Fourier

Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} . Se escribirá $f \in L_p(0, 2\pi)$ si

$$f(t)\chi_{[0, 2\pi]}(t) \in L_p(0, 2\pi), \quad p \geq 1.$$

Cualquier función f , 2π -periódica en \mathbb{R} , tal que $f \in L_2(0, 2\pi)$, se puede representar por una serie de Fourier convergente en $L_2(0, 2\pi)$

$$f(t) = \sum_n c_n e^{int},$$

donde los coeficientes de Fourier son dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

10 Preliminares y terminología

Se puede verificar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la serie, fórmula de sumación de Poisson,

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} \quad (1.2.6)$$

converge casi para todo t y pertenece a $L_1(0, 2\pi)$. Además, los coeficientes de Fourier de $S(t)$ están dados por

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-k).$$

En efecto, para ver la expresión (1.2.6), basta probar que

$$\int_0^{2\pi} \sum_k |f(t + 2k\pi)| dt < \infty.$$

Para la segunda parte se calculan los coeficientes de Fourier de $S(t)$, que son los valores de la transformada de Fourier de f en los enteros. Esto es, sea

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi),$$

entonces h es 2π -periódica y además, sus coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) \right] e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi)e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(z)e^{-in(z-2k\pi)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-inz} dz = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Como consecuencia de la fórmula de sumación de Poisson tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\omega} \quad (1.2.7)$$

donde f es una función tal que $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, continua, y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente.

1.2.2. Transformada discreta de Fourier (DFT)

Sea \mathcal{S}_N el conjunto de sucesiones periódicas de números complejos, con período fundamental N , cada elemento $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en \mathcal{S}_N puede ser considerado como una señal periódica $x[n] = x_n$ definida para valores discretos de tiempo, donde $x[n]$ es el valor de la señal en el momento $t = t_n$. Una sucesión x_n es periódica con período fundamental N , si $x_{n+N} = x_n$ para todo entero n .

Si $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ y $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ definimos la suma de x y y como $x + y$ y el producto por escalar como cx , en donde $(x + y)_n = x_n + y_n$ y $(cx)_n = cx_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{C}$. El conjunto \mathcal{S}_N forma un espacio vectorial bajo estas operaciones.

Sea $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$, la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de x es la sucesión $(\mathcal{F}_N \{x\})_k = \hat{x}_k$ donde

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

Si consideramos a x como la señal $x[n] = x_n$, la DFT de $x[n]$ se representa $x(k) = \mathcal{F}[x[n]]$. Hay que resaltar que la DFT de x también es periódica con período fundamental N , por lo tanto $\hat{x}_k \in \mathcal{S}_N$, y \mathcal{F}_N es un operador lineal de \mathcal{S}_N en \mathcal{S}_N .

Sea $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ y $\mathcal{F}_N(x) = \hat{x}$ donde

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

entonces $x = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x})$ se denomina la Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT) y está definida por

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$$

La Transformada Discreta de Fourier cumple las siguientes propiedades:

- **Traslaciones:** Si $x \in \mathcal{S}_N$ y $z_n = x_{n-j}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{F}_N \{z\}_k = e^{-\frac{i2\pi jk}{N}} \mathcal{F}_N \{x\}_k$.
- **Convolución:** Si $x \in \mathcal{S}_N$ y $h \in \mathcal{S}_N$ la sucesión $y = (x * h)_n = \sum_{j=0}^{N-1} x_j h_{n-j}$ también pertenece a \mathcal{S}_N , se denomina la “convolución” de las sucesiones x y h y $\mathcal{F}_N \{x * h\}_k = \mathcal{F}_N \{x\}_k \mathcal{F}_N \{h\}_k$.

1.2.3. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Utilizando la notación de señales y de acuerdo con la definición de la DFT, podemos descomponer la suma de la siguiente manera, si N es una potencia de 2.

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} = \sum_{n \text{ pares}} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} + \sum_{n \text{ impares}} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] e^{-\frac{i2\pi k(2r)}{N}} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] e^{-\frac{i2\pi k(2r+1)}{N}}$$

si hacemos $g[n] = x[2n]$ y $h[n] = x[2n+1]$ se tiene

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] e^{-\frac{i2\pi k(2n)}{N}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{-\frac{i2\pi k(2n+1)}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{\frac{N}{2}}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{i2\pi k}{N}}.$$

Por otro lado, haciendo $W_N = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$ tenemos

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad \text{y} \quad x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} W_N^k$$

si $g(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$ y $h(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$ entonces

$$x(k) = g(k) + h(k) W_N^k$$

donde $g(k)$ y $h(k)$ son periódicas con período fundamental $\frac{N}{2}$ y son las DFT de $g[n]$ y $h[n]$, que también son periódicas con período fundamental $\frac{N}{2}$. Por lo tanto, para $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ podemos escribir $x(k) = g(k) + h(k) W_N^k$ y para los valores de k tales que $\frac{N}{2} \leq k \leq N - 1$ éstos se pueden expresar como $k = m + \frac{N}{2}$ con $0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$ entonces $x(m + \frac{N}{2}) = g(m + \frac{N}{2}) + h(m + \frac{N}{2}) W_N^{m + \frac{N}{2}} = g(m) + h(m) W_N^{m + \frac{N}{2}}$.

De manera similar $g(k)$ y $h(k)$ se pueden expresar como

$$g(k) = p(k) + q(k) W_{\frac{N}{2}}^k \quad \text{y} \quad h(k) = r(k) + s(k) W_{\frac{N}{2}}^k$$

donde $p(k)$, $q(k)$, $r(k)$ y $s(k)$, son las DFT con período fundamental $\frac{N}{4}$ de las señales $p[n]$, $q[n]$, $r[n]$ y $s[n]$ con el mismo período, y tales que $p[n] = g[2n] = x[4n]$, $q[n] = g[2n + 1] = x[4n + 2]$, $r[n] = h[2n] = x[4n + 1]$ y $s[n] = h[2n + 1] = x[4n + 3]$.

Si N es una potencia de 2, siguiendo este procedimiento podemos hallar los valores de $x(k)$ a partir de los de $x[n]$, como en la definición, pero realizando menos operaciones, lo que hace este método más eficiente desde del punto de vista computacional. De acuerdo con Bogges [7], si $N = 2^L$, para hallar $x(k) = \mathcal{F}[x[n]]$ aplicando la definición se requieren N^2 multiplicaciones, mientras que aplicando la FFT se requieren aproximadamente $L 2^{L-1}$. Para $N = 2^3$, aplicando la definición se requieren 64 multiplicaciones, mientras que aplicando la FFT se requieren 12.

1.3. Semigrupo de operadores lineales

La teoría de semigroups se puede utilizar para resolver ecuaciones de evolución [25, 30, 44]. Estas ecuaciones aparecen en muchas disciplinas como la física, química, biología, ingeniería y economía. Las aplicaciones en estos campos, se describen por un problema de valor inicial (PVI) de una ecuación diferencial que puede ser ordinaria o parcial. Al analizar la evolución de un sistema o fenómeno en lugar de estudiar el PVI directamente, podemos hacerlo a través de la teoría de semigrupos. La teoría de semigrupos lineales proporciona condiciones necesarias y suficientes para determinar si un problema está bien puesto. Para un tratamiento más profundo sobre la teoría de semigrupos, puede consultarse los textos de Goldstein [30] o Pazy [46].

A manera de motivación sabemos que la función exponencial e^{at} , con $a \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, se define por la expresión

$$e^{at} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}.$$

Cuando $t \geq 0$ la exponencial es una función $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

14 Preliminares y terminología

- a) $E(0) = 1$
- b) $E(t + s) = E(t)E(s)$ para todo $t, s \geq 0$
- c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = 1$.

También sabemos que la función exponencial e^{at} se relaciona con el problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = au, \quad \text{con } u(0) = u_0$$

en virtud a que la solución de este PVI es

$$u(t) = e^{at}u_0.$$

De manera semejante la solución del sistema lineal

$$\frac{du}{dt} = Au + f, \quad \text{con } u(0) = u_0,$$

donde A es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n y f es una función conocida, es dada por

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds,$$

en este caso e^{tA} se define de forma similar a e^{at}

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Siguiendo en esta dirección no es difícil extender la exponencial al caso en que $A \in \mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$, con V un espacio de Banach, en donde la unidad es el operador identidad, $I : V \rightarrow V$. De este modo, la función $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(V)$, definida por $E(t) = e^{tA}$, con $A \in \mathcal{L}(V)$ y

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

y satisface las siguientes propiedades

- a) $E(0) = I$

b) $E(t + s) = E(t)E(s)$ para todo $t, s \geq 0$

c) $\| E(t) - I \| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0^+$.

Observe que esta última propiedad es una convergencia uniforme, pero esto implica la convergencia fuerte, es decir, $\| (E(t) - I)v \| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0^+$, para cada $v \in V$.

Nótese también que a diferencia del caso finito dimensional, no todo operador $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow V$ es continuo, en la práctica los operadores A son operadores diferenciales, es decir, involucran derivadas parciales, y estos operadores no son continuos, sin embargo tienen dominio denso en V y son operadores cerrados¹. En consecuencia, considerando un operador con tales propiedades (cerrado con dominio denso) se puede extender el concepto de función exponencial a través de la teoría de semigrupos de tal manera que las nuevas funciones conlleven a obtener soluciones al problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad \text{con } u(0) = u_0.$$

Definición 1.3.1. *Dado un espacio de Banach V , una familia de operadores lineales $(E_t)_{t \geq 0}$, $E_t : V \rightarrow V$ se llama un semigrupo fuertemente continuo sobre V (o semigrupo C_0) si son válidas las tres condiciones*

a) $E_0 = I$ (el operador identidad)

b) $E_{t+s} = E_t E_s$ para todo $t, s \geq 0$

c) $\| (E_t - I)v \| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0^+$, para todo $v \in V$.

En algunos textos denotan la familia de operadores como $\{E(t) : t \geq 0\}$.

Como ejemplo tenemos entonces, que si $V = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(V)$ y $E_t = e^{At}$. Resulta que E_t es un semigrupo fuertemente continuo sobre el espacio de dimensión finita \mathbb{R}^n . Se trata de las soluciones del problema

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad \text{con } u(0) = u_0.$$

¹Recuerde que un operador $A : \mathcal{D}(A) \subset V \rightarrow W$ es cerrado, con V y W espacios de Banach, si para cada sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(A)$ tal que $v_n \rightarrow v$ y $Av_n \rightarrow w \in W$, cuando $n \rightarrow \infty$, implica que $v \in \mathcal{D}(A)$ y $w = Av$.

16 Preliminares y terminología

Sea E_t un semigrupo de clase C_0 en V . El generador de E_t es el operador $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow V$, donde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ v \in V : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E_t v - v}{t} \text{ existe} \right\} \quad \text{y} \quad Av := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E_t v - v}{t}.$$

A modo de ejemplo, si $E_t = e^{tA}$, donde $A \in \mathcal{L}(V)$, el generador de e^{tA} es A . En efecto, para cada $v \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_t - I}{t} \right)(v) &= \left(\frac{e^{tA} - I}{t} \right)(v) = \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I}{t} \right)(v) \\ &= \left(\frac{I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I}{t} \right)(v) = \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}}{t} \right)(v) \\ &= \left(\frac{tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}}{t} \right)(v) = Av + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} v \\ &= Av + t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2} A^n}{n!} v \longrightarrow Av \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que si $A \in \mathcal{D}(A)$, el generador del semigrupo $\{E(t) : t \geq 0\}$ fuertemente continuo de operadores de $\mathcal{L}(V)$ y supongamos también que $f : [0, \infty) \rightarrow V$ es continua con derivada continua. Entonces el problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = Au + f, \quad \text{con } u(0) = u_0 \in \mathcal{D}(A), \quad t > 0$$

tiene solución única

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)f(s)ds.$$

CAPÍTULO 2

Introducción a las wavelets

2.1. Introducción

El origen de la descomposición de una señal en wavelets está en la necesidad de conocer las características y particularidades de la señal en diferentes instantes de tiempo. La principal virtud de las wavelets es que permite modelar procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene porqué ser suave [10], [19], [32], [45], [60], [61]. Una de las ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia pero no en tiempo, esto es, el análisis en frecuencia obtenido del análisis de Fourier es insensible a perturbaciones que supongan variaciones instantáneas y puntuales de la señal como picos debidos a conmutaciones o variaciones muy lentas como tendencias. En otras palabras, si f es una señal (f es una función definida en todo \mathbb{R} y tiene energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$). La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ proporciona la información global de la señal en el tiempo localizada en frecuencia. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

y la integración es sobre todo tiempo (véase p.e. [7], [27], [48]). Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto [19], [43], [45], [59].

En este capítulo se presenta una introducción a la teoría wavelets, en particular se estudiará la transformada wavelet y el análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$. Con este concepto se ilustra como construir otras bases wavelets, y además, permite analizar funciones (señales) en $L_2(\mathbb{R})$ en varias escalas (niveles de resolución) [8], [10], [19], [58]. Para ello, se utiliza versiones escaladas de un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$. Para tal descomposición de una función $f \in L_2(\mathbb{R})$, sólo se necesitan los coeficientes de la expansión de f en dicho conjunto ortonormal.

2.2. Transformadas wavelets

El análisis wavelets es un método de descomposición de una función o señal usando funciones especiales, las wavelets. La descomposición es similar a la de la transformada de Fourier, donde una señal $f(t)$ se descompone en una suma infinita de armónicos $e^{i\omega t}$ de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$, cuyas amplitudes son los valores de la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

El análisis de Fourier tiene el defecto de la no localidad: el comportamiento de una función en un conjunto abierto, no importa cuán pequeño, influye en el comportamiento global de la transformada de Fourier. No se captan los aspectos locales de la señal tales como cambios bruscos, saltos o picos, que se han de determinar a partir de su reconstrucción.

2.2.1. Transformada wavelet continua

La teoría wavelets se basa en la representación de una función en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función

fija ψ , que se llama la wavelet madre, en general no es senoidal. Esto es,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie $f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

Definición 2.2.1. *Una wavelet ψ es una función cuadrado integrable tal que la siguiente condición de admisibilidad se tiene*

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{2.2.1}$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de ψ .

Observación 2.2.1. Si además $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la condición (2.2.1) implica que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. En efecto, por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver p.e., [48]), $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ y la transformada de Fourier es continua, lo cual implica que $0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt$.

Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. La función dilatada y trasladada se define por

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Esta función se obtiene a partir de ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego, por traslación en b . Es claro que $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.

Definición 2.2.2. *Para $f, \psi \in L_2(\mathbb{R})$, la expresión*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \tag{2.2.2}$$

se llama la transformada wavelet de f .

20 Introducción a las wavelets

Por la desigualdad de Cauchy, se ve que $\mathcal{W}_\psi f$ es una función acotada con $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$. Note también que $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$.

La transformada wavelet $\mathcal{W}_\psi f$ de f puede ser descrita en términos del producto de convolución. Recordemos que la convolución de dos funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ se define por $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz$. Observe que esta fórmula está definida para al menos todo $t \in \mathbb{R}$, pero $f * g$ no necesariamente está en $L_2(\mathbb{R})$. Usando la notación $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$, se tiene $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = (f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)$. Note también que $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|}\hat{\psi}(a\omega)e^{-i\omega b}$. Estos hechos se aplicarán en la prueba de la siguiente proposición, la cual establece la fórmula de Plancherel para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.1. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisfice la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, las siguientes relaciones se tienen*

1. *Isometría:* $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}$
2. *Fórmula de inversión* $f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b)\psi_{a,b}(t)db \frac{da}{a^2}$

Demostración. 1. Es fácil verificar que $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\tilde{\psi}(a\omega)\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)|^2 db \frac{da}{a^2} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a| |\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot)\tilde{\psi}(a\cdot))(\omega)|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\
 &= C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = C_\psi \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Observe que se utilizó el teorema de Fubini y la fórmula de Plancherel para la transformada de Fourier [27].

2. Para simplificar los cálculos en la fórmula de inversión, suponga que

$f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot) \tilde{\psi}(a \cdot))(\omega) \psi_{a,b}(t) d\omega \\ &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega) \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

donde $g(b) := \psi_{a,b}(t)$. Ahora, la transformada inversa de Fourier de g es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(b) e^{i\omega b} db = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-ia\omega z} e^{i\omega t} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo e integrando respecto a $a^{-2} da$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = C_\psi f(t). \end{aligned}$$

□

Otro resultado de interés que se presentará en la siguiente proposición, es la fórmula de Parseval para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.2. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, se tienen*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2}$$

Demostración. Como $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)\}$ o de manera equivalente, $\mathcal{F}(f * \tilde{\psi}_{a,0})(\omega) = \sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} db = |a| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega,$$

22 Introducción a las wavelets

ahora, integrando respecto a $a^{-2}da$ se sigue

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\
 &= C_\psi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) d\omega = C_\psi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\
 &= C_\psi \langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})}.
 \end{aligned}$$

□

Nótese que se aplicó el teorema de Fubini y la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier.

En la siguiente proposición se listan algunas propiedades.

Proposición 2.2.3. *Sean ψ y φ wavelets y $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Entonces*

1. $\mathcal{W}_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha \mathcal{W}_\psi f(a, b) + \beta \mathcal{W}_\psi g(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{W}_{\alpha\psi + \beta\varphi} f(a, b) = \alpha \mathcal{W}_\psi f(a, b) + \beta \mathcal{W}_\varphi f(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{W}_\psi(T_c f)(a, b) = \mathcal{W}_\psi f(a, b - c)$, donde T_c es el operador traslación definido por $T_c f(t) = f(t - c)$.
4. $\mathcal{W}_\psi(D_c f)(a, b) = \sqrt{c} \mathcal{W}_\psi f(ca, cb)$, donde D_c es el operador dilatación definido por $D_c f(t) = \sqrt{c} f(ct)$.

2.2.2. Transformada wavelet discreta

La transformada wavelet continua introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $\mathcal{W}_\psi f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia de wavelets será ahora dada por

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Se utilizará la notación ψ_{jk} para denotar la wavelet ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, observe que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre si. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [8, 10].

Definición 2.2.3. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver por ejemplo, [19, 32] o [52] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (2.2.4)$$

en virtud de (2.2.3) y teniendo en cuenta que $f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, donde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Por lo tanto, para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ los coeficientes $d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$ se llama la *transformada wavelet discreta* de f . En consecuencia, la expresión (2.2.4) se puede escribir en forma alterna como $f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t)$. Esta serie se llama representación wavelet de f .

Un ejemplo clásico es la wavelet de Haar, la cual se define por

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

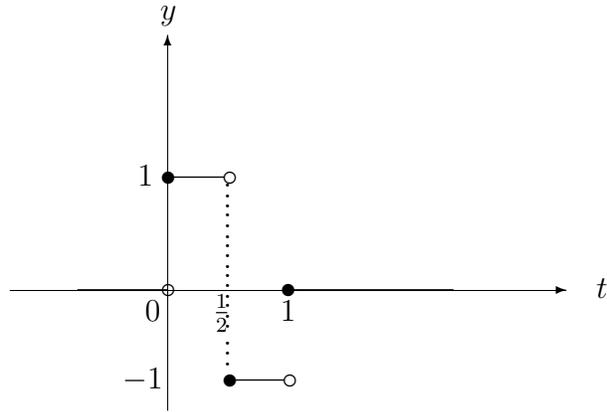


Figura 2.2.1

Observación 2.2.2. 1) $\psi_{jk}(t)$ es más apropiada para representar detalles finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $d_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuación sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .

2) Las wavelets gozan de la “propiedad zoom,” esto hace que las bases wavelet sean excelentes detectores de singularidades, en otras palabras, las singularidades producen coeficientes wavelet grandes.

3) La propiedad zoom es común en todos los sistemas wavelet, constituye la mayor diferencia con los sistemas de Fourier para la detección de singularidades. En problemas de teoría de señales, las singularidades llevan información esencial como la presencia de esquinas en las imágenes [10, 52]. Esto hace de las bases wavelet una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes, en detrimento del análisis de Fourier [8, 10, 43, 59].

4) Es interesante notar que $d_{j,k} = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre ψ .

2.3. Análisis Multirresolución

El sistema de Haar no es muy apropiado para aproximar funciones suaves. De hecho, cualquier aproximación de Haar es una función discontinua [19],

[32]. Se puede probar que si f es una función muy suave, los coeficientes de Haar decrecerán muy lentamente. Por tanto se pretende construir wavelets que tengan mejor propiedades de aproximación, y una forma de hacerlo es a través del análisis multirresolución (AMR) [19], [41], [42], [43], [45].

Sea $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, la familia de trasladadas de φ , $\{\varphi_{0k}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi_{0k}(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal (con el producto interno de $L_2(\mathbb{R})$). Acá y en lo que sigue $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) = D_{2^j}T_k\varphi(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $D_a f(t) = a^{1/2}f(at)$ y $T_a f(t) = f(t - a)$ son los operadores dilatación y traslación, respectivamente.

Se definen los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k) : \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}, \\ V_1 &= \left\{ h(t) = f(2t) : f \in V_0 \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ h(t) = f(2^j t) : f \in V_0 \right\}, j \in \mathbb{Z} \\ &= \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Note que φ genera la sucesión de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Suponga que la función φ se escoge de tal forma que los espacios estén encajados $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, y $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, estos dos hechos fundamentales hacen parte de la definición de análisis multirresolución.

Definición 2.3.1. *Un análisis multirresolución (AMR) en $L_2(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, en $L_2(\mathbb{R})$,*

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \quad \text{tales que}$$

1. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$,
4. $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$, $j \in \mathbb{Z}$,
5. Existe una función $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de funciones $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_0 .

La función φ se llama función de escala. En el espacio V_{j+1} las funciones (señales) se describen con más detalle que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio “más grande”. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución [10], [43]. Es usual reunir estos “sintonizadores finos” en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$. Sin embargo, la elección de estos subespacios no es única. Pero se puede escoger a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Es decir, $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$, $j \in \mathbb{Z}$, o de manera equivalente

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

Informalmente, esto quiere decir que si se tiene una función (señal) f a resolución 2^{j+1} y se proyecta a resolución inferior 2^j entonces

$$f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

acá P_j representa la proyección ortogonal en el espacio V_j donde se recoge la versión “suavizada” de f y la diferencia $f - P_j f$ representa el “detalle” de f , que está en W_j y se expresa como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$. Recuerde que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j (ver p.e., [7, 32, 58]).

El conjunto de funciones linealmente independientes φ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son las wavelets.

Por definición, el subespacio W_j es cerrado. Note también que si $f \in V_0$, entonces por 5 de la definición anterior se tiene $f(t) = \sum_k \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi(t)$. Además, por la ortogonalidad de $\{T_k \varphi(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\sum_k |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 = \|f\|_2^2$.

Observe que al aplicar la descomposición (2.3.1) en cada V_j se obtiene

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} \oplus W_{N-1} = V_{N-2} \oplus W_{N-2} \oplus W_{N-1} \\ &= \dots = V_{-N} \oplus \left(\bigoplus_{j=-N}^{N-1} W_j \right), \end{aligned}$$

y cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \oplus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j.$$

Usando las condiciones 1 y 2 de la definición de AMR se obtiene $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L_2(\mathbb{R})$.

Por definición, también los subespacios W_j satisfacen las condiciones 3 y 4 de la definición de AMR o de manera directa como se prueba en el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR y $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$. Entonces*

i) $f \in W_j \Leftrightarrow Tf \in W_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

ii) $f \in W_j \Leftrightarrow Df \in W_{j+1}$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f \in W_j$, esto significa que $f \in V_{j+1}$ y $\langle f, D_{2^j} T_k \varphi \rangle = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por la condición 3 y 4 de AMR, la primera relación es equivalente a $Tf \in V_{j+1}$ y $Df \in V_{j+2}$. Además de la relación $TD_2 = D_2T_2$, se sigue inmediatamente, que la segunda relación es equivalente a $\langle Tf, TD_{2^j} T_k \varphi \rangle = \langle Tf, D_{2^j} T_{k+2^j} \varphi \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Por tanto $Tf \in V_{j+1} \cap V_j^\perp$, y así, $Tf \in W_j$.

La segunda relación también es equivalente con $\langle Df, D_{2^{j+1}} T_k \varphi \rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, de lo cual se sigue que $Df \in V_{j+1}^\perp$ que junto con $Df \in V_{j+2}$ se obtiene $Df \in W_{j+1}$. \square

La siguiente proposición justifica los comentarios hechos arriba y es útil en futuros resultados.

Proposición 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR con función de escala φ . Entonces para cada $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto de funciones $\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_j .*

Demostración. Para probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ genera a V_j , se debe ver que toda $f(t) \in V_j$ se puede escribir como combinación lineal de funciones de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. La propiedad 3 de la definición de AMR, implica que la función $f(2^{-j} t)$ pertenece a V_0 y por tanto $f(2^{-j} t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Haciendo la transformación $t \mapsto 2^j t$, se tiene que $f(t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Resta probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Para ello se debe ver que

$$\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jm} \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}$$

o equivalentemente, $2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \delta_{km}$. Para establecer esta igualdad, basta hacer el cambio de variable $z = 2^j t$, para obtener

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - k) \overline{\varphi(z - m)} dz = \delta_{km},$$

en virtud de la propiedad 5 de la definición de AMR. \square

Los siguientes resultados se utilizan en la existencia de los sistemas AMR, bajo hipótesis apropiadas. Para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$,

- a) $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$, donde P_j es la proyección ortogonal sobre el espacio V_j .
- b) $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$.

En efecto, puesto que $\|P_j\| = 1$, basta probar el resultado para funciones en $L_2(\mathbb{R})$ con soporte compacto. Si f tiene soporte en $[-a, a]$, entonces al aplicar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski se tiene

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \right\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-a}^a f(t) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) dx \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \right) 2^{j/2} \left(\int_{-a}^a |\varphi(2^j t - k)| dt \right)^2 \\ &= \|f\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-2^j a - k}^{2^j a - k} |\varphi(z)| dz \right)^2. \end{aligned}$$

Si $2^j a < 1/2$, entonces estas integrales están definidas sobre intervalos ajenos cuya unión se escribe $\Omega_j = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (-2^j a - k, 2^j a - k)$, con $\cap_j \Omega_j = \mathbb{Z}$, el cual tiene medida cero. Por tanto, $\|P_j f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{\Omega_j} |\varphi(z)|^2 dz \rightarrow 0$, $j \rightarrow -\infty$, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

2.4. Ecuación de escala

Puesto que el conjunto $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal de V_0 entonces cada $f \in V_0$ se puede expresar como $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_{0n}$, $\varphi_{0n}(x) =$

$\varphi(x - n)$. Ahora, como $\varphi \in V_0$, y $V_0 \subset V_1$, se tiene entonces $\varphi \in V_1$. Pero la propiedad de dilatación implica que $\varphi(2^{-1}\cdot) \in V_0$. En consecuencia, se puede expandir

$$\varphi(2^{-1}t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(t - n), \quad t \in \mathbb{R},$$

para algunos coeficientes $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. O de manera equivalente,

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2t - n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4.1)$$

en donde las constantes de estructura (los (g_n)) satisfacen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 < \infty$. La relación (2.4.1) se llama ecuación de escala. Los coeficientes g_n constituyen un filtro $\mathbf{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ asociado a la función de escala.

Ejemplo 2.4.1. Si $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$, entonces claramente $\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1)$ es la ecuación de escala, con las constantes de estructura $g_0 = 1$, $g_1 = 1$ y $g_n = 0$, en otro caso.

A continuación se dan algunas propiedades de las constantes de estructura.

Proposición 2.4.1. *Los coeficientes de la ecuación de escala satisfacen las siguientes propiedades:*

$$g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - n)} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_{2n+k} = 2\delta_{0n} \quad (\text{delta de Kronecker}). \quad (2.4.3)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 = 2 \quad (2.4.4)$$

Si también $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi \neq 0$ y la ecuación (2.4.1) converge en $L_1(\mathbb{R})$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2. \quad (2.4.5)$$

Demostración. Puesto que $g_n/\sqrt{2}$ son los coeficientes de Fourier de $\varphi \in V_1$ con respecto a la base ortonormal $\sqrt{2}\varphi(2t - n)$, se tiene

$$\frac{g_n}{\sqrt{2}} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sqrt{2} \overline{\varphi(2t - n)} dt,$$

o lo que es lo mismo, $g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t-n)} dt$. De la propiedad 5 de la definición de AMR se tiene $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-n) \overline{\varphi(t)} dt = \delta_{0n}$. Al sustituir (2.4.1) y aplicar la identidad de Parseval y la ortogonalidad se tiene

$$\delta_{0n} = \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t-2n-k) \overline{\varphi(2t-m)} dt = \frac{1}{2} \sum_{2n+k=m} g_k \bar{g}_m,$$

lo cual es lo mismo que (2.4.3). En particular, si se toma $n = 0$ en la última expresión, se obtiene $\sum_{k=m} g_k \bar{g}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 2$. Si, además, se tiene $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$, entonces al integrar (2.4.1) término a término se llega

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t-n) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt,$$

al dividir por $\int_{\mathbb{R}} \varphi$ se obtiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2$. □

2.5. Construcción de la función de escala

Para construir la función de escala, es necesario encontrar los coeficientes g_n . Una forma de hacerlo es vía la transformada de Fourier, puesto que de manera directa es difícil (ver p. e., [19], [32]). En consecuencia, al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (2.4.1) se obtiene

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) P(e^{-i\omega/2}) \quad (2.5.1)$$

donde el polinomio P es dado por $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$.

Al iterar (2.5.1) se tiene $\hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = P(e^{-i\omega/2^2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^2}\right), \quad \hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) P(e^{-i\omega/2^2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^2}\right).$$

Continuando de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= P(e^{-i\omega/2}) \dots P(e^{-i\omega/2^n}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^n P(e^{-i\omega/2^j}) \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Para una función de escala dada φ , la ecuación precedente se tiene para cada n . En el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, la última ecuación se transforma

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}) \right) \hat{\varphi}(0).$$

Si φ satisface la condición de normalización $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, entonces $\hat{\varphi}(0) = 1$ y así,

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}). \quad (2.5.2)$$

Por tanto, si el producto $\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j})$ converge, entonces la función de escala queda determinada salvo un factor no nulo $\hat{\varphi}(0)$, que es su media. En consecuencia, la única función de escala asociada al filtro \mathbf{g} está dada por (2.5.2). Es decir, si la función P asociada al filtro \mathbf{g} cumple cierta propiedad de convergencia, entonces se tiene $\hat{\varphi}$ y, antitransformando, se obtiene φ . En resumen, se tiene

Proposición 2.5.1. *Sea \mathbf{g} un filtro y P el polinomio dado por $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$. Si la función Φ definida por $\Phi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(e^{-i\omega/2^j})$ está en $L_2(\mathbb{R})$ y verifica $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 0$. Entonces existe una función de escala φ asociada al filtro \mathbf{g} y determinada por $\hat{\varphi} = \Phi$ con $\int \varphi = 1$.*

La condición sobre la ortonormalidad de la base $\{\varphi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, se puede expresar en términos de los coeficientes g_k . En otras palabras, el sistema $\{\varphi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si la transformada de Fourier de φ satisface $2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$. En efecto, como $\varphi(t - k)$ forma una base ortonormal en V_0 , entonces al aplicar el teorema de Plancherel (ver p.e., [48]) se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{0m} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(t - m)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\hat{\varphi}(\omega) e^{-im\omega}} d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{im\omega} d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{im\omega} d\omega = \int_0^{2\pi} e^{im\omega} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 \right) d\omega. \end{aligned}$$

Sea $F(\omega) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\omega} F(\omega) d\omega = \delta_{0m} \quad (*)$$

32 Introducción a las wavelets

La función F es 2π -periódica ya que

$$F(\omega + 2\pi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi(k+1))|^2 = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi j)|^2 = F(\omega).$$

Como F es periódica, su serie de Fourier, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt}$, donde los coeficientes de Fourier son dados por $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) e^{-im\omega} d\omega$. Por tanto, la condición de ortonormalidad (*), es equivalente a $c_{-m} = \delta_{m0}$, lo cual a su vez es equivalente a $F(\omega) = 1$.

Como consecuencia de este resultado se tiene la siguiente condición necesaria sobre el polinomio $P(z)$ para la existencia de un AMR.

Corolario 2.5.1. *El polinomio $P(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$ satisface*

$$|P(e^{-it})|^2 + |P(e^{-i(t+\pi)})|^2 = 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.5.3)$$

Demostración. De los resultados anteriores se tiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ y $\hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \sum_{n \text{ par}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 + \sum_{n \text{ impar}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + (2k)2\pi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + (2k+1)2\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(|P(e^{-i(\frac{\omega}{2} + 2k\pi)})|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + |P(e^{-i(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi)})|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \right) \\ &= |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) + 2k\pi\right) \right|^2 \\ &= |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi} + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $1 = |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2$. □

Observe que (2.5.3) en términos de los coeficientes g_n está dado por

$$\frac{1}{4} \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_k e^{-i(n-k)t} + \frac{1}{4} \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_k (-1)^{n-k} e^{-i(n-k)t} = 1,$$

los términos impares se cancelan y por lo tanto se tiene

$$\sum_{n-k \text{ par}} g_n \bar{g}_k e^{-i(n-k)t} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{-2ijt} = 2$$

donde $c_j = \sum_{n-k=2j} g_n \bar{g}_k$, pero esto es válido para todo t , luego $c_j = 2\delta_j$. Por tanto, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_{n-2j} = 2\delta_j$ o equivalentemente $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \bar{g}_{n-2m} = 2\delta_{k-m,0}$.

2.6. Descomposición y reconstrucción

En esta sección se describirán algoritmos de descomposición y reconstrucción asociados a un AMR. Estos algoritmos se utilizarán junto con el análisis multirresolución en la descomposición y reconstrucción de señales en donde tanto la función de escala como la wavelet son funciones continuas.

2.6.1. Algoritmo de descomposición

Sean $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ los coeficientes de la función de escala φ y de la wavelet ψ , respectivamente, para $j, k \in \mathbb{Z}$, definidos por

$$c_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_{jk}(t) dt \quad (2.6.1)$$

$$d_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{jk}(t) dt, \quad (2.6.2)$$

donde $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ y $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ son respectivamente, la función de escala y la wavelet madre.

Ahora bien, como $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$, entonces existe h_m tal que

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{j/2} \varphi_{1m}(2^j t - k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi_{j+1, m+2k}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1, m}(t). \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Reemplazando este valor en (2.6.1), se obtiene

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1, m}(t) dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_{j+1, m}(t) dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} c_{j+1, m}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

34 Introducción a las wavelets

Como $V_0 \subset V_1$, para cada $\varphi \in V_0$ también se satisface $\varphi \in V_1$. Además, $\{\varphi_{1k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_1 , entonces existe una sucesión $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1k}(t), \quad (2.6.5)$$

por tanto, los elementos de la sucesión se puede escribir como $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle$ y $(h_k) \in \ell_2$. La ecuación (2.6.5) relaciona funciones con diferentes factores de escala. Se conoce también como ecuación de dilatación. Por ejemplo, para la base de Haar se tiene

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si φ es la función de escala de un AMR, entonces la wavelet madre ψ se relaciona con φ por medio de la ecuación

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \varphi_{1k}(t). \quad (2.6.6)$$

Al sustituir (2.6.6) en (2.6.2) se obtiene

$$d_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p h_{1-p+2k} c_{j+1,p}. \quad (2.6.7)$$

Si los coeficientes de escala en cualquier nivel j son dados, entonces todos los coeficientes de la función escala de nivel inferior para $J < j$, se pueden calcular recursivamente usando la ecuación (2.6.4), mientras que todos los coeficientes wavelet de nivel inferior ($J < j$) se calculan aplicando (2.6.7).

Si $c_{j,\cdot}$ y $d_{j,\cdot}$ representan los coeficientes de la función de escala y wavelet en el nivel j , respectivamente, la Figura 2.6.1 representa el algoritmo de descomposición en forma esquemática. Por ejemplo, la flecha que relaciona los coeficientes c_{j-1} y c_{j-2} , indica que c_{j-2} se calcula sólo usando c_{j-1} .

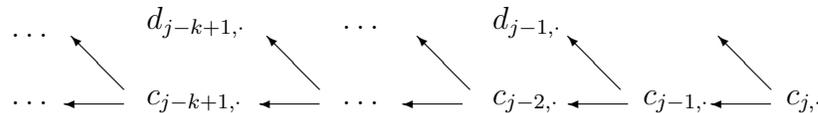


Figura 2.6.1

Observe que las fórmulas (2.6.4) y (2.6.7) comparten un hecho interesante, esto es, en cada ecuación, si el índice de dilatación k se incrementa en uno, todos los índices de (h_m) se desplazan en dos unidades; lo cual significa que si existe solamente un número finito de términos no nulos en la sucesión (h_m) , entonces aplicando el algoritmo de descomposición a un conjunto de coeficientes de escala no nulos en el nivel $j + 1$, se obtendrá sólo la mitad de coeficientes no nulos en el nivel j . Este proceso en teoría de señales se conoce como *downsampling*. Un resultado análogo se tiene para los coeficientes wavelet.

Para expresar lo anterior en la terminología de filtros, recuerde que la convolución de dos sucesiones en $\ell_2(\mathbb{Z})$ $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ y $y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ se define por $(x * y)_m := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{m-k}$. En consecuencia, (2.6.4) se puede expresar como

$$c_{j-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2k-m} c_{j,m} = (\tilde{h} * c_j)_{2k}, \quad (2.6.8)$$

note que se reemplazó j por $j - 1$ y para simplificar se utilizó la notación $\tilde{y}_m = y_{-m}$. Si se define el operador downsampling para la sucesión x como $((\downarrow 2)x)_k := x_{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces (2.6.8) se puede escribir $c_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{h} * c_j)$. De un procedimiento similar se obtiene, con $g_m = (-1)^m h_{1-m}$, $d_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{g} * c_j)$. Al algoritmo de descomposición, Mallat lo llamó *algoritmo piramidal* [41], mientras que Daubechies lo llamó *algoritmo de cascada* [19].

2.6.2. Algoritmo de reconstrucción

Recuerde que dado un AMR, el conjunto de funciones linealmente independientes φ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son los wavelets. En otras palabras, $\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son generadas, respectivamente, por φ y ψ , esto es, $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ y $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ forman las bases ortonormales para V_j y W_j , respectivamente. Definiendo $a_{2k} = \langle \varphi_{10}, \varphi_{0k} \rangle$, $a_{2k-1} = \langle \varphi_{11}, \varphi_{0k} \rangle$, $b_{2k} = \langle \varphi_{10}, \psi_{0k} \rangle$ y $b_{2k-1} = \langle \varphi_{11}, \psi_{0k} \rangle$, donde $a_k = h_{-k}$ y $b_k = (-1)^k h_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m-k} c_{j-1,m} + b_{2m-k} d_{j-1,m} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} c_{j-1,m} + (-1)^k h_{2m-k+1} d_{j-1,m}. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

36 Introducción a las wavelets

Observe que esta última expresión es casi la suma de dos convoluciones. La diferencia está en que el índice para la convolución es $k - m$ mientras acá aparece $k - 2m$. En otras palabras, (2.6.9) es una convolución pero sin los términos impares (falta $h_{k-(2m-1)}$). Para que (2.6.9) sea una convolución, se altera la sucesión original intercalando ceros entre sus componentes y obteniendo una nueva sucesión que contiene ceros en todas sus entradas impares. Este procedimiento se llama *upsampling*, denotado por $(\uparrow 2)$. Más explícitamente, si $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, entonces $((\uparrow 2)x)_k = (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$ o de manera equivalente,

$$((\uparrow 2)x)_k = \begin{cases} x_{k/2}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, $c_{j,k} = (((\uparrow 2)c_{j-1}) * h)_k + (((\uparrow 2)d_{j-1}) * g)_k$. La Figura 2.6.2 representa el algoritmo de reconstrucción en forma esquemática.

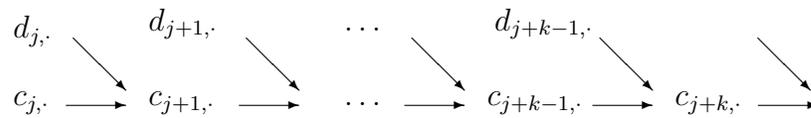


Figura 2.6.2

CAPÍTULO 3

Representación de Operadores en Base Wavelet

3.1. La forma estándar y no estándar

El propósito de esta Sección es representar la forma estándar y no estándar de un operador lineal de soporte compacto en una base wavelet. La construcción de la forma no estándar de un operador con respecto a una cierta base wavelets, se hará para un operador definido en todo el espacio $L_2(\mathbb{R}^2)$. Esto es, sea $T : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ un operador lineal y continuo, el objetivo es obtener Tf para una función $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ utilizando wavelets. El desarrollo de este Capítulo lo haremos siguiendo los trabajos de Beylkin [2, 4, 5] y Hajji [31].

Comencemos considerando el análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R}^2)$

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L_2(\mathbb{R}^2), \quad (3.1.1)$$

tal que

- 1) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}^2)$
- 2) $f(x, y) \in V_j \Leftrightarrow f(2x, 2y) \in V_{j+1}$
- 3) $f(x, y) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k_1, y - 2^{-j}k_2) \in V_j$, para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

38 Representación de Operadores en Base Wavelet

Para el caso $L_2(\mathbb{R})$, véase la Definición 2.3.1. Recordemos también que W_j , $j \in \mathbb{Z}$, es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , es decir, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$; sean P_j y Q_j las proyecciones ortogonales sobre V_j y W_j , respectivamente. Entonces, dada la función f en $L_2(\mathbb{R})$ o $L_2(\mathbb{R}^2)$, se puede expresar como

$$f = \sum_j Q_j(f),$$

donde $Q_j(f)$ es la proyección de f sobre W_j . Para el operador lineal T , tenemos

$$T(f) = \sum_j TQ_j(f),$$

con $T(f)$ en $L_2(\mathbb{R})$ o $L_2(\mathbb{R}^2)$, luego

$$T(f) = \sum_{j'} Q_{j'}(Tf) = \sum_{j'} Q_{j'} \sum_j TQ_j(f) = \sum_{j,j'} Q_{j'} TQ_j(f).$$

En consecuencia, la representación del operador T en el análisis multirresolución es

$$T = \sum_{j,j'} Q_{j'} TQ_j.$$

Esta suma se puede reescribir como

$$\begin{aligned} T &= \sum_j Q_j TQ_j + \sum_j \sum_{j' \leq j-1} Q_j TQ_{j'} + \sum_j \sum_{j' \geq j+1} Q_j TQ_{j'} \\ &= \sum_j Q_j TQ_j + \sum_j \sum_{j' \leq j-1} Q_j TQ_{j'} + \sum_j \sum_{j' \leq j-1} Q_{j'} TQ_j \\ &= \sum_j \left[Q_j TQ_j + \sum_{j' \leq j-1} Q_j TQ_{j'} + \sum_{j' \leq j-1} Q_{j'} TQ_j \right]. \end{aligned}$$

Si denotamos por $A_j = Q_j TQ_j$, $B_{j'}^j = Q_j TQ_{j'}$ y $C_{j'}^j = Q_{j'} TQ_j$, entonces la forma estándar de T en (3.1.1) es dada por el conjunto de operadores

$$T = \left\{ A_j, \{B_{j'}^j\}_{j' \leq j-1}, \{C_{j'}^j\}_{j' \leq j-1} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad (3.1.2)$$

donde

$$\begin{aligned} A_j &: W_j \longrightarrow W_j \\ B_{j'}^j &: W_{j'} \longrightarrow W_j \\ C_{j'}^j &: W_j \longrightarrow W_{j'}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Una alternativa a la representación de T en la forma estándar, es representarlo en forma no estándar. Esto es, sea T_n , la proyección de T sobre V_n , entonces $T_n = P_n T P_n$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = I$, el operador identidad, tenemos así, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n T P_n = T$. Pero T_n se puede escribir como una suma telescópica

$$T_n = P_n T P_n = \sum_{j=0}^{\infty} (P_{n-j} T P_{n-j} - P_{n-j-1} T P_{n-j-1}) \quad (3.1.4)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} P_{n-j} T P_{n-j} - P_{n-j-1} T P_{n-j-1} &= [P_{n-j} - P_{n-j-1}] T [P_{n-j} - P_{n-j-1}] \\ &\quad + [P_{n-j} - P_{n-j-1}] T P_{n-j-1} + P_{n-j-1} T [P_{n-j} - P_{n-j-1}]. \end{aligned}$$

En virtud que $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, entonces $P_{n-j} - P_{n-j-1} = Q_{n-j-1}$, luego

$$P_{n-j} T P_{n-j} - P_{n-j-1} T P_{n-j-1} = Q_{n-j-1} T Q_{n-j-1} + Q_{n-j-1} T P_{n-j-1} + P_{n-j-1} T Q_{n-j-1}.$$

En consecuencia, la ecuación (3.1.4) se transforma en

$$T_n = \sum_{j=0}^{\infty} (Q_{n-j-1} T Q_{n-j-1} + Q_{n-j-1} T P_{n-j-1} + P_{n-j-1} T Q_{n-j-1})$$

con el cambio de índice, $j \rightarrow n - j - 1$ obtenemos

$$T_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} (Q_{n-j-1} T Q_{n-j-1} + Q_{n-j-1} T P_{n-j-1} + P_{n-j-1} T Q_{n-j-1}).$$

Si $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j).$$

De este modo, la forma no estándar de T es dada por el conjunto de operadores $T = \{A_j, B_j, C_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, donde

$$\begin{aligned} A_j &= Q_j T Q_j : W_j \longrightarrow W_j \\ B_j &= Q_j T P_j : V_j \longrightarrow W_j \\ C_j &= P_j T Q_j : W_j \longrightarrow V_j. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

La representación de un operador T en base wavelet, es un conjunto de operadores que actúan en los espacios multirresolución. Si los espacios multirresolución son de dimension finita, entonces estos operadores se representan por matrices de orden finito. También se observa que la diferencia entre la forma estándar y la no estándar, está en que la forma estándar consiste en el mapeo de operadores del espacio de detalle sobre el espacio de detalle, mientras la forma no estándar consta de tres tipos de operadores $A_j =$ mapeo del espacio de detalle sobre el espacio de detalle, $B_j =$ mapeo del espacio de aproximación sobre el espacio de detalle, $C_j =$ mapeo del espacio de detalle sobre el espacio de aproximación.

La función de escala asociada con el análisis multirresolución (3.1.1) es dada por $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$, donde ϕ es la función de escala asociada con la Definición 2.3.1. Nótese que V_j se puede escribir como $V_j := H_j \otimes H_j = \{F(x, y) : F(x, y) = f(x)g(y), f, g \in H_j\}$, es decir, los subespacios V_j forma un análisis multirresolución separable de $L_2(\mathbb{R}^2)$. Claramente, $\Phi_{k_1, k_2}^j(x, y) = 2^j \phi(2^j x - k_1) \phi(2^j y - k_2)$, para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

De igual manera la wavelet asociada Ψ y, como es usual, los espacios de detalle asociados a este AMR son los W_j , que son dados por

$$W_j = (M_j \otimes M_j) \oplus (H_j \otimes M_j) \oplus (M_j \otimes H_j), \quad \text{con } j \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.6)$$

Las tres wavelets básicas que se requieren para definir el complemento ortogonal de V_0 en V_1 son:

- 1) $\Psi^h(x, y) = \phi(x)\psi(y)$
- 2) $\Psi^v(x, y) = \psi(x)\phi(y)$
- 3) $\Psi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y)$,

donde los superíndices h, v y d indica “horizontal”, “vertical” y “diagonal”, respectivamente.

Sean P_j y Q_j los operadores proyección ortogonal del espacio $L_2(\mathbb{R}^2)$ sobre V_j y W_j respectivamente, esto es,

$$P_j : L_2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow V_j \quad \text{y} \quad Q_j : L_2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow W_j$$

tales que

$$(P_j f)(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} s_{k_1, k_2}^j \Phi_{k_1, k_2}^j(x, y),$$

donde

$$s_{k_1, k_2}^j = \langle f, \Phi_{k_1, k_2}^j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \Phi_{k_1, k_2}^j(x, y) dy dx.$$

Sabemos por (3.1.6) que W_j está compuesto de tres subespacios ortogonales

$$W_j = W_j^h \oplus W_j^v \oplus W_j^d,$$

con $W_j^h = H_j \otimes M_j$, $W_j^v = M_j \otimes H_j$ y $W_j^d = M_j \otimes M_j$, de esta manera, $Q_j = Q_j^h + Q_j^v + Q_j^d$, luego

$$\begin{aligned} (Q_j f)(x, y) &= (Q_j^h f)(x, y) + (Q_j^v f)(x, y) + (Q_j^d f)(x, y) \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} d_{k_1, k_2}^{h, j} \Psi_{k_1, k_2}^j(x, y) + \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} d_{k_1, k_2}^{v, j} \Psi_{k_1, k_2}^j(x, y) \\ &\quad + \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} d_{k_1, k_2}^{d, j} \Psi_{k_1, k_2}^j(x, y), \end{aligned}$$

donde los coeficientes $d_{k_1, k_2}^{h, j}$, $d_{k_1, k_2}^{v, j}$ y $d_{k_1, k_2}^{d, j}$ son los “detalles” horizontal, vertical y diagonal, respectivamente, y son dados por

$$d_{k_1, k_2}^{\lambda, j} = \langle f, \Psi_{k_1, k_2}^{\lambda, j} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \Psi_{k_1, k_2}^{\lambda, j}(x, y) dy dx,$$

para $\lambda = h, v, d$.

En esquemas numéricos, se considera una discretización correspondiente a una determinada resolución J , esto es, un espacio más fino o de mejor aproximación V_n y un espacio de menor “resolución” o menos grande V_{n-J} , de tal manera que se tenga una versión truncada de (3.1.1),

$$V_{n-J} \subset V_{n-J+1} \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n. \quad (3.1.7)$$

La forma estándar de T en (3.1.7) está dada por el conjunto de operadores.

$$T_n = \{A_j, \{B_{j'}^j\}_{j'=n-J}^{J-1}, \{C_{j'}^j\}_{j'=n-J}^{J-1}, E_{n-J}^j, F_{n-J}^j, T_{n-J}\}$$

donde A_j , $B_{j'}^j$ y $C_{j'}^j$ son como en (3.1.3) y

$$E_{n-J}^j = Q_j T P_{n-J} : V_{n-J} \rightarrow W_j$$

$$F_{n-J}^j = P_{n-J} T Q_j : W_j \rightarrow V_{n-J}$$

$$T_{n-J} = P_{n-J} T P_{n-J} : V_{n-j} \rightarrow V_{n-j}$$

y la forma no estándar de T en (3.1.7) es dada por el conjunto de operadores

$$T_n = \{\{A_j, B_j, C_j\}_{n-J \leq j \leq n-1}, T_{n-J}\} \quad (3.1.8)$$

donde A_j , B_j y C_j son como en (3.1.5) y $T_{n-J} = P_{n-J} T P_{n-J} : V_{n-J} \rightarrow V_{n-J}$.

Por último, decimos que la representación de un operador lineal T en un análisis multirresolución finito es una expansión en los espacios multirresolución de la aproximación del operador T dado por $T_n = P_n T P_n : V_n \rightarrow V_n$. Los operadores A_j , B_j^j , C_j^j y T_n son representados por matrices α^j , $\beta^{j,j'}$, $\gamma^{j,j'}$ y s^n cuyas entradas son definidas por

$$\begin{aligned} \alpha_{k,k'}^j &= \iint \psi_{j,k}(x) K(x, y) \psi_{j,k'}(y) dx dy \\ \beta_{k,k'}^{j,j'} &= \iint \psi_{j,k}(x) K(x, y) \psi_{j',k'}(y) dx dy \\ \gamma_{k,k'}^{j,j'} &= \iint \psi_{j,k}(x) K(x, y) \psi_{j',k'}(y) dx dy \\ s_{k,k'} &= \iint \varphi_{n,k}(x) K(x, y) \varphi_{n,k'}(y) dx dy, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

donde $K(x, y)$ es el núcleo (kernel) del operador T . Dependiendo de la expansión de T_n bajo el análisis multirresolución, de obtiene ya sea la forma estándar o no estándar de la representación.

3.2. Representación matricial

La representación matricial se construye del operador lineal general T en un análisis multirresolución finito. Reiteramos que la forma no estándar de T en un análisis multirresolución finito es el conjunto de operadores

$$\{\{A_j, B_j, C_j\}_{n-J \leq j \leq n-1}, T_{n-J}\} \quad (3.2.1)$$

donde $A_j = Q_j T Q_j$, $B_j = P_j T Q_j$, $C_j = Q_j T P_j$ y $T_{n-J} = P_{n-J} T P_{n-J}$. En virtud que $W_j = W_j^h \oplus W_j^v \oplus W_j^d$, y vimos que la proyección ortogonal Q_j sobre W_j es la suma de las tres proyecciones ortogonales Q_j^h , Q_j^v y Q_j^d sobre W^h , W^v y W^d respectivamente, es decir, $Q_j = Q_j^h + Q_j^v + Q_j^d$. Como consecuencia

de esta última expresión se tiene que los operadores A_j , B_j y C_j en (3.2.1) están dados por

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{\lambda, \lambda' = h, v, d} A_j^{\lambda, \lambda'} = \sum_{\lambda, \lambda' = h, v, d} Q_j^\lambda T Q_j^{\lambda'} \\ B_j &= \sum_{\lambda = h, v, d} B_j^\lambda = \sum_{\lambda = h, v, d} Q_j^\lambda T P_j \\ C_j &= \sum_{\lambda = h, v, d} C_j^\lambda = \sum_{\lambda = h, v, d} P_j T Q_j^\lambda. \end{aligned}$$

La forma no estándar de T es entonces reescrita como el conjunto de operadores

$$T_n = \left\{ \left\{ A_j^{\lambda, \lambda'}, B_j^\lambda, C_j^\lambda \right\}_{n-J \leq j \leq n-1; \lambda, \lambda' = h, v, d}, T_{n-J} \right\} \quad (3.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} A_j^{\lambda, \lambda'} &: W_j^{\lambda'} \rightarrow W_j^\lambda, \quad \lambda, \lambda' = h, v, d \\ B_j^\lambda &: V_j^\lambda \rightarrow W_j^\lambda, \quad \lambda = h, v, d \\ C_j^\lambda &: W_j^\lambda \rightarrow V_j, \quad \lambda = h, v, d. \end{aligned}$$

Los subespacios V_j y W_j^λ son de dimensión finita con bases $\{\Phi_{k_1, k_2}^j; k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1\}$ y $\{\Psi_{k_1, k_2}^{\lambda, j}; \lambda = h, v, d; k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1\}$, respectivamente. Así, la dimensión de V_j es 2^{2j} , mientras que la de dimensión de W_j es 3×2^{2j} (tres veces más grande).

En la construcción de la representación matricial usamos $[0, 1]^2$ -wavelets periódicas. Más precisamente, si S es una matriz de $m \times m$ con bloques $P^{i, j}$, de orden $r \times r$ ($0 \leq i, j \leq m - 1$), entonces S se llama m -periódica si, $P^{i+m, j} = P^{i, j}$, $P^{i, j+m} = P^{i, j}$, $P_{k_1+m, k_2}^{i, j} = P_{k_1, k_2}^{i, j}$ y $P_{k_1, k_2+m}^{i, j} = P_{k_1, k_2}^{i, j}$ para toda i, j, k_1, k_2 con $(0 \leq i, j, k_1, k_2 \leq m - 1)$.

Cada uno de los operadores en (3.2.2) actúan sobre un subespacio de dimensión finita de $L^2(\mathbb{R}^2)$, con elementos de las bases de doble índice (Φ_{k_1, k_2}^j para V_j y $\Psi_{k_1, k_2}^{\lambda, j}$ para W_j). Ellas pueden ser representadas por matrices ordinarias si los elementos de las bases de doble índice, son convertidas en elementos de bases de índices individuales, por reordenamiento. Sin embargo, es mejor trabajar con las bases originales y representar los operadores por

44 Representación de Operadores en Base Wavelet

estructuras cuatro-dimensionales. Esto es, la acción de $T_j = P_j T P_j$ sobre una función $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ es dada por

$$\begin{aligned}
 (T_j f)(x, y) &= P_j T P_j(f) = P_j T \left(\sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} s_{k_1, k_2}^j \Phi_{k_1, k_2}^j(x, y) \right) \\
 &= P_j \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} s_{k_1, k_2}^j T(\Phi_{k_1, k_2}^j)(x, y) \\
 &= \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \left[\left\langle \Phi_{k_3, k_4}^j, \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} s_{k_1, k_2}^j T(\Phi_{k_1, k_2}^j) \right\rangle \right] \Phi_{k_3, k_4}^j(x, y) \\
 &= \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \left[\sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} \left\langle \Phi_{k_3, k_4}^j, T(\Phi_{k_1, k_2}^j) \right\rangle s_{k_1, k_2}^j \right] \Phi_{k_3, k_4}^j(x, y) \\
 &= \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \tilde{s}_{k_3, k_4}^j \Phi_{k_3, k_4}^j(x, y).
 \end{aligned}$$

donde $s_{k_1, k_2}^j = \langle f, \Phi_{k_1, k_2}^j \rangle$ son las coordenadas de $P_j f$, la proyección de f sobre V_j , y

$$\tilde{s}_{k_3, k_4}^j = \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} \langle \Phi_{k_3, k_4}^j, T(\Phi_{k_1, k_2}^j) \rangle s_{k_1, k_2}^j$$

son las coordenadas de $T_j(f)$ en V_j . Ahora bien, para cada k_3, k_4 , el bloque de orden $2^j \times 2^j$ de la matriz cuyas entradas son T^{j, k_3, k_4} , con $k_3, k_4 = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$, es la estructura T^j de $T_j : V_j \rightarrow V_j$ dada por

$$T^j = \begin{bmatrix} T^{j,0,0} & T^{j,0,1} & \dots & T^{j,0,2^j-1} \\ T^{j,1,0} & T^{j,1,1} & \dots & T^{j,1,2^j-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T^{j,2^j-1,0} & T^{j,2^j-1,1} & \dots & T^{j,2^j-1,2^j-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

en donde las entradas de cada matriz T^{j, k_3, k_4} son de la forma

$$T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} = \langle \Phi_{k_3, k_4}^j, T \Phi_{k_1, k_2}^j \rangle, \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

Entonces, la acción de T_j sobre f se representa por una operación de la estructura T^j sobre la matriz $s^j = (s_{k_1, k_2}^j)$ teniendo en cuenta lo siguiente:

Dada una matriz de bloque Γ de orden $k \times k$, con bloques $\Gamma^{i,j}$ de tamaño $m \times m$ y una matriz A de $m \times m$. Definamos la operación $\Gamma \odot A = B$, donde B es una matriz de orden $k \times k$ con entradas $b_{ij} = \sum_{k,l} (\Gamma^{i,j} \circ A)_{kl}$ y $\Gamma^{ij} \circ A$ es el producto de Hadamard (elemento por elemento) de Γ^{ij} y A , es decir, $(\Gamma^{ij} \circ A)_{kl} = \Gamma_{kl}^{ij} A_{kl}$. En términos de lo anterior, la matriz \tilde{s}^j de $T_j(f)$ en V_j es dada por $\tilde{s}^j = T^j \odot s^j$.

De otro lado, los operadores $A_j^{\lambda,\lambda'}$, B_j^λ , C_j^λ y T_j se representan por las estructuras $A_j^{\lambda,\lambda'}$, $B_j^{\lambda,\lambda}$, $C_j^{\lambda,\lambda}$ y T_j . Ahora, la acción de $A_j^{\lambda,\lambda'}$ sobre una función $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ es como sigue

$$\begin{aligned} A_j^{\lambda,\lambda'}(f)(x, y) &= Q_j^\lambda T Q_j^{\lambda'}(f)(x, y) = Q_j^\lambda T \left(\sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} d_{k_1, k_2}^{\lambda', j} \psi_{k_1, k_2}^{\lambda', j}(x, y) \right) \\ &= Q_j^\lambda \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} d_{k_1, k_2}^{\lambda', j} T(\psi_{k_1, k_2}^{\lambda', j})(x, y) \\ &= \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \left\langle \psi_{k_3, k_4}^{\lambda, j}, \sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} d_{k_1, k_2}^{\lambda', j} T(\psi_{k_1, k_2}^{\lambda', j}) \right\rangle \psi_{k_3, k_4}^{\lambda, j}(x, y) \\ &= \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \left[\sum_{k_1, k_2=0}^{2^j-1} \left\langle \psi_{k_3, k_4}^{\lambda, j}, T(\psi_{k_1, k_2}^{\lambda', j}) \right\rangle d_{k_1, k_2}^{\lambda', j} \right] \psi_{k_3, k_4}^{\lambda, j}(x, y). \end{aligned}$$

Luego el operador $A_j^{\lambda,\lambda'}$ es representado por la estructura $A_j^{\lambda,\lambda'}$ que tiene por entradas

$$A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} = \left\langle \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}, T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'}) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}(x, y) T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'})(x, y) dx dy$$

De manera similar se hallan las otras matrices de los operadores B_j^λ , C_j^λ y T_j

$$\begin{aligned} A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}(x, y) T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'})(x, y) dx dy \\ B_{k_1, k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}(x, y) T(\psi_{k_1, k_2}^j)(x, y) dx dy \\ C_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_3, k_4}^j(x, y) T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'})(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$T_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_3, k_4}^j(x, y) T(\phi_{k_1, k_2}^j)(x, y) dx dy.$$

Ahora bien, usando las ecuaciones

$$\begin{aligned} \phi_{k_1, k_2}^j(x, y) &= \sum_{m_1, m_2=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} \phi_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1}(x, y) \\ \psi_{k_1, k_2}^j(x, y) &= \sum_{m_1, m_2=0}^{L-1} G_{m_1, m_2} \psi_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1}(x, y) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

encontramos que todas las estructuras de $A_j^{\lambda, \lambda'}$, B_j^λ , C_j^λ y T_j ($0 \leq i, j, k_1, k_2 \leq m-1$), se obtienen desde la estructura de T^n recursivamente. Puesto que $A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} = \langle \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}, T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'}) \rangle$ y sustituyendo (3.2.4) en $A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4}$ obtenemos

$$\begin{aligned} A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} &= \left\langle \sum_{m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_3, m_4}^\lambda \phi_{m_3+2k_3, m_4+2k_4}^{j+1}(x, y), \right. \\ &\quad \left. T \left(\sum_{m_1, m_2=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda'} \phi_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1}(x, y) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_3, m_4}^\lambda \phi_{m_3+2k_3, m_4+2k_4}^{j+1}(x, y), \sum_{m_1, m_2=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda'} T(\phi_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1}(x, y)) \right\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2=0}^{L-1} \sum_{m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda'} G_{m_3, m_4}^\lambda \left\langle \phi_{m_3+2k_3, m_4+2k_4}^{j+1}, T(\phi_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1}) \right\rangle \end{aligned}$$

como $T_{k_1, k_2}^{j, k_3, k_4} = \langle \phi_{k_3, k_4}^j, T(\phi_{k_1, k_2}^j) \rangle$, entonces

$$A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda'} G_{m_3, m_4}^\lambda T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}$$

De manera similar se hayan las otras matrices, así

$$A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda', k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^{\lambda'} G_{m_3, m_4}^\lambda T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}$$

$$B_{k_1 k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} G_{m_3, m_4}^\lambda T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}$$

$$C_{k_1 k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^\lambda H_{m_3, m_4} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}$$

$$T_{k_1 k_2}^{j, \lambda, k_3, k_4} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} H_{m_3, m_4} T_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^{j+1, m_3+2k_3, m_4+2k_4}.$$

Por lo tanto, si tenemos la estructura de T_n en V_n , todas las estructuras de menor escala se determinan.

La aplicación de un operador T a una función f se aproxima por la suma de la aplicación de los operadores $A_j^{\lambda, \lambda'}$, B_j^λ , C_j^λ , $n - J \leq j \leq n - 1$, $\lambda, \lambda = h, v, d$ y T_{n-J} (o, equivalentemente, por la aplicación de los operadores de T_n a f). Primero, la función se aproxima por las proyecciones $P_n f$ sobre V_n , para obtener las coordenadas de $P_n f$ en V_n como una matriz s^n con orden $2^n \times 2^n$. La matriz s^n se descompone en el espacio multirresolución usando las ecuaciones

$$s_{k_1, k_2}^{j-1} = \sum_{m_1=0}^{L-1} \sum_{m_2=0}^{L-1} H_{m_1, m_2} s_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^j$$

$$d_{k_1, k_2}^{j-1, \lambda} = \sum_{m_1=0}^{L-1} \sum_{m_2=0}^{L-1} G_{m_1, m_2}^\lambda s_{m_1+2k_1, m_2+2k_2}^j.$$

recursivamente, para llegar a las matrices $d^{h,j}$, $d^{v,j}$, $d^{d,j}$ y s^j para $j = n - J, \dots, n - 1$; de esta manera las estructuras $A_j^{\lambda, \lambda'}$, $B_j^{\lambda, \lambda'}$, $C_j^{\lambda, \lambda'}$, $n - J \leq j \leq n - 1$ y T^{n-J} son construidas.

La aproximación $T(f) \approx T_n(f)$ es dada por

$$T_n = \sum_{j=n-J}^{n-1} [A_j + B_j + C_j] + T_{n-J} \quad (3.2.5)$$

luego, la aproximación de $T(f)$ en $T_n(f)$ se representa por

$$\begin{aligned}
 T(f) \approx T_n(f) &= \sum_{j=n-J}^{n-1} \left[A_j(f) + B_j(f) + C_j(f) \right] + T_{n-J}(f) \\
 &= \sum_{j=n-J}^{n-1} \left[Q_j T Q_j(f) + Q_j T P_j(f) + P_j T Q_j(f) \right] + P_{n-J} T P_{n-J}(f) \\
 &= \sum_{j=n-J}^{n-1} \left[\sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda'} d_{k_1, k_2}^{j, \lambda'} \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda} + \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} B_{k_1, k_2}^{j, \lambda} s_{k_1, k_2}^j \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} C_{k_1, k_2}^{j, \lambda} d_{k_1, k_2}^{j, \lambda} \phi_{k_3, k_4}^j \right] + \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} T_{k_1, k_2}^{n-J} s_{k_1, k_2}^{n-J} \phi_{k_3, k_4}^{n-J}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 d_{k_1, k_2}^{j, \lambda'} &= \langle f, \psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'} \rangle, & s_{k_1, k_2}^j &= \langle f, \phi_{k_1, k_2}^j \rangle, \\
 A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda'} &= \langle \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}, T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda'}) \rangle, & B_{k_1, k_2}^{j, \lambda} &= \langle \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda}, T(\phi_{k_1, k_2}^j) \rangle, \\
 C_{k_1, k_2}^{j, \lambda} &= \langle \phi_{k_3, k_4}^j, T(\psi_{k_1, k_2}^{j, \lambda}) \rangle, & T_{k_1, k_2}^{n-J} &= \langle \phi_{k_3, k_4}^j, T(\phi_{k_1, k_2}^j) \rangle.
 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned}
 T_n(f) &= \sum_{j=n-J}^{n-1} \left[\sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} \left(A_{k_1, k_2}^{j, \lambda, \lambda'} d_{k_1, k_2}^{j, \lambda'} + B_{k_1, k_2}^{j, \lambda} s_{k_1, k_2}^j \right) \psi_{k_3, k_4}^{j, \lambda} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} C_{k_1, k_2}^{j, \lambda} d_{k_1, k_2}^{j, \lambda} \phi_{k_3, k_4}^j \right] + \sum_{k_3, k_4=0}^{2^j-1} T_{k_1, k_2}^{n-J} s_{k_1, k_2}^{n-J} \phi_{k_3, k_4}^{n-J}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}^{j, \lambda} &= \sum_{\lambda=h, v, d} A^{j, \lambda, \lambda'} \odot d^{j, \lambda} + B^{j, \lambda} \odot s^j \\
 \tilde{s}^j &= \sum_{\lambda=h, v, d} C^{j, \lambda} \odot d^{j, \lambda} \quad \text{con } n - J + 1 \leq j \leq n - 1. \\
 \tilde{s}^{n-J} &= \sum_{\lambda=h, v, d} C^{n-J, \lambda} \odot d^{n-J, \lambda} + T^{n-J} \odot s^{n-J}
 \end{aligned}$$

y $\tilde{s}^j = T^j \odot s^j$. De este modo tenemos

$$T_n(f) = \sum_{j=n-J}^{n-1} \left[\sum_{\lambda=h,v,d} \left(\sum_{k_3,k_4=0}^{2^j-1} \tilde{d}_{k_3,k_4}^{j,\lambda} \psi_{k_3,k_4}^{j,\lambda}(x,y) \right) + \sum_{k_3,k_4=0}^{2^j-1} \tilde{s}^j \phi_{k_3,k_4}^j(x,y) \right] \quad (3.2.6)$$

La función $\tilde{f} = T_n(f)$ en (3.2.6) puede reconstruirse en el espacio mas fino V_n , es decir,

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} s_{k_1,k_2}^n \phi_{k_1,k_2}^n(x,y).$$

Dadas las matrices $\tilde{d}^{j,\lambda}$ y \tilde{s}^j para $n-J \leq j \leq n-1$, $\lambda = h, v, d$ (donde $s^j = \tilde{s}^j + \hat{s}^j$) los coeficientes s^n se reconstruyen mediante el esquema

$$\begin{array}{ccccccc} \{s^n\} & \longleftarrow & \{s^{n-1}\} = \{\hat{s}^{n-1} + \tilde{s}^{n-1}\} & \dots & \longleftarrow & \{s^{n-J+1}\} = \{\hat{s}^{n-J+1} + \tilde{s}^{n-J+1}\} & \longleftarrow & \{s^{n-J}\} \\ & \swarrow & & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & \{d^{n-1}\} = \{\hat{d}^{n-1} + \tilde{d}^{n-1}\} & \dots & & \{d^{n-J+1}\} = \{\hat{d}^{n-J+1} + \tilde{d}^{n-J+1}\} & & \{d^{n-J}\} \end{array}$$

con $\hat{s}^{n-J+1} = \hat{s}^{n-J} + d^{n-J}$, ya que $P_j = Q_{j-1} + P_{j-1}$.

3.2.1. Representación matricial de la forma N-S de ∂_x

Ahora se representa el operador T en el caso particular $T = \partial_x$.

La ecuación

$$T_{k_1,k_2}^{j,k_3,k_4} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_3,k_4}^j(x,y) T(\phi_{k_1,k_2})(x,y) dx dy,$$

con $j = n$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{k_1,k_2}^{n,k_3,k_4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_3,k_4}^n(x,y) \frac{\partial}{\partial x} [\phi_{k_1,k_2}^n(x,y)] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_3}(x) \phi_{n,k_4}(y) \frac{\partial}{\partial x} [\phi_{n,k_1}(x) \phi_{n,k_2}(y)] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_3}(x) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{n,k_1}(x)) \phi_{n,k_4}(y) \phi_{n,k_2}(y) dx dy \quad (3.2.7) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_3}(x) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{n,k_1}(x)) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_4}(y) \phi_{n,k_2}(y) dy \right]. \end{aligned}$$

50 Representación de Operadores en Base Wavelet

Ahora bien, puesto que $\{\phi_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal se tiene entonces que la última integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_2}(y) \phi_{n,k_4}(y) dy = \delta_{k_2,k_4}. \quad (3.2.8)$$

Por otro lado, como

$$\phi_{n,k_3}(x) = 2^{n/2} \phi(2^n x - k_3) \quad \text{y} \quad \phi_{n,k_1}(x) = 2^{n/2} \phi(2^n x - k_1)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_3}(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_{n,k_1}(x) dx = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^n x - k_3) \frac{\partial}{\partial x} \phi(2^n x - k_1) 2^n dx,$$

al hacer el cambio de variable $w = 2^n x - k_1$, en esta última integral se obtiene

$$\begin{aligned} 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(2^n \frac{w + k_1}{2^n} - k_3\right) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(w)) dw &= 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(w - (k_3 - k_1)) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(w)) dw \\ &= 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l) \phi'(x) dx, \end{aligned}$$

con $l = k_3 - k_1$ de este modo tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k_3}(x) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_{n,k_1}(x)) dx = 2^n r_l, \quad (3.2.9)$$

donde

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l) \phi'(x) dx. \quad (3.2.10)$$

En consecuencia, al sustituir las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.9) en (3.2.7) se obtiene

$$T_{k_1,k_2}^{n,k_3,k_4} = 2^n r_{k_3-k_1} \delta_{k_2,k_4}.$$

Luego, la matriz de bloque T^n se determina por los coeficientes r_l .

Por lo tanto, si la integral dada en (3.2.10) existe, entonces los coeficientes r_l satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$r_l = 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1} \right) \quad (3.2.11)$$

con $\sum l r_l = -1$, donde los coeficientes a_n (autocorrelación de los coeficientes de filtros) son dados por

$$a_n = 2 \sum_{i=0}^{L-1-n} h_i h_{i+n}, \quad n = 1, 2, \dots, L-1.$$

En efecto, sabemos que $\phi = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \phi(2x - k)$, usando las expresiones

$$\phi(x - l) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \phi(2x - 2l - k) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\phi(x)) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} h_k \phi'(2x - l)2$$

se tiene

$$\phi(x - l)\phi'(x) = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l \phi(2x - 2l - k)\phi'(2x - l)2$$

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l)\phi'(x) = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - 2l - k)\phi'(2x - l)2.$$

Haciendo $w = 2x - l$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} r_l &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - (2i + k - l))\phi'(x)dx \\ r_l &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l r_{2i+k-l} \end{aligned}$$

sustituyendo $l = k - m$ (si $l = 0 \rightarrow k = m$ y si $l = L - 1 \rightarrow m = k - L + 1$)

$$r_i = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=k}^{k-L+1} h_k h_{k-m} r_{2i+m} \Rightarrow r_i = 2 \sum_{m=k}^{k-L+1} \sum_{k=0}^{L-1} h_k h_{k-m} r_{2i+m}$$

Ahora bien, para el caso particular $L = 4$ tenemos

$$r_i = 2 \sum_{m=k}^{k-3} \sum_{k=0}^{L-1} h_k h_{k-m} r_{2i+m}$$

$$\begin{aligned}
 m = k &\Rightarrow 2 \sum_{m=0}^{L-1} h_m h_0 r_{2i+m} \rightarrow 2 \sum_{m=0}^3 h_m h_0 r_{2i+m} \\
 m = k - 1 &\Rightarrow 2 \sum_{m=-1}^{L-2} h_{m+1} h_1 r_{2i+m} \rightarrow 2 \sum_{m=-1}^2 h_{m+1} h_1 r_{2i+m} \\
 m = k - 2 &\Rightarrow 2 \sum_{m=-2}^{L-3} h_{m+2} h_2 r_{2i+m} \rightarrow 2 \sum_{m=-2}^1 h_{m+2} h_2 r_{2i+m} \\
 m = k - 3 &\Rightarrow 2 \sum_{m=-3}^{L-4} h_{m+3} h_3 r_{2i+m} \rightarrow 2 \sum_{m=-3}^0 h_{m+3} h_3 r_{2i+m}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 r_i = &2[h_0^2 r_{2i} + h_1 h_0 r_{2i+1} + h_2 h_0 r_{2i+2} + h_3 h_0 r_{2i+3}] \\
 &+ 2[h_0 h_1 r_{2i-1} + h_1^2 r_{2i} + h_2 h_1 r_{2i+1} + h_3 h_1 r_{2i+2}] \\
 &+ 2[h_0 h_2 r_{2i-2} + h_1 h_2 r_{2i-1} + h_2^2 r_{2i} + h_3 h_2 r_{2i+1}] \\
 &+ 2[h_0 h_3 r_{2i-3} + h_1 h_3 r_{2i-2} + h_2 h_3 r_{2i-1} + h_3^2 r_{2i}].
 \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}
 r_i &= 2(h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)r_{2i} + 2(h_1 h_0 + h_2 h_1 + h_3 h_2)r_{2i+1} \\
 &+ 2(h_2 h_0 + h_3 h_1)r_{2i+2} + 2(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3)r_{2i-1} \\
 &+ 2(h_0 h_2 + h_1 h_3)r_{2i-2} + 2h_0 h_3 r_{2i+3} + 2h_0 h_3 r_{2i-3} \\
 r_i &= 2r_{2i} + a_1 r_{2i+1} + a_1 r_{2i-1} + a_2 r_{2i+2} + a_2 r_{2i-2} + a_3 r_{2i+3} + a_3 r_{2i-3} \\
 &= 2r_{2i} + a_1(r_{2i+1} + r_{2i-1}) + a_3(r_{2i+3} + r_{2i-3})
 \end{aligned}$$

donde $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$, $a_1 = 2(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3)$, $a_2 = 2(h_0 h_2 + h_1 h_3)$ y $a_3 = 2h_0 h_3$. Por tanto podemos escribir los términos r_i como

$$r_i = 2r_{2i} + \sum_{k=1}^2 a_{2k-1} (r_{2i-(2k-1)} + r_{2i+(2k-1)}).$$

Así hemos comprobado que la expresión (3.2.11) se cumple tomando como valor referente $L = 4$.

Con un pequeño cambio en la notación en (3.2.3), la matriz de bloque

$T_x^n (= T^n \text{ para } T = \partial_x)$ se convierte en

$$T_x^n = \begin{bmatrix} X^{1,1} & X^{1,2} & \dots & X^{1,2^n-1} & X^{1,2^n} \\ X^{2,1} & X^{2,2} & \dots & X^{2,2^n-1} & X^{2,2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{2^n-1,1} & X^{2^n-1,2} & \dots & X^{2^n-1,2^n-1} & X^{2^n-1,2^n} \\ X^{2^n,1} & X^{2^n,2} & \dots & X^{2^n,2^n-1} & X^{2^n,2^n} \end{bmatrix}$$

donde $X_{k_1, k_2}^{k_3, k_4} = T_{k_1, k_2}^{n, k_3, k_4} = 2^n r_{k_3 - k_1} \delta_{k_2, k_4}$. Entonces cada X^{k_3, k_4} contiene sólo una columna distinto de cero, la k_4 -ésima columna, es decir,

$$X_{k_1, k_2}^{k_3, k_4} = \begin{cases} 2^n r_{k_3 - k_1}, & \text{si } k_2 = k_4 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las columnas distintas de cero de $X^{1,1}$ son dadas por

$$c = 2^n (0, r_{-1}, r_{-2}, \dots, r_{-(L-2)}, 0, \dots, 0, r_{L-2}, \dots, r_1).$$

La representación matricial T^n de $T = \partial_x$ sobre V_n es circulante [31].¹

3.2.2. Representación wavelet de la función operador

En esta subsección se considera la construcción de la representación no estándar del operador de la forma $T = f(\partial_x)$ en V_n , donde f es una función analítica. Recordemos que la forma no estándar de un operador T es una colección de los operadores A_j, B_j, C_j y T_{n-j} que representan a T_n , la proyección de T sobre V_n , y estos operadores son representados a su vez por matrices A^j, B^j, C^j y T^{n-j} , respectivamente, los cuales se obtienen recursivamente de la matriz T^n (la matriz de representación de T_n en V_n). El objetivo aquí es representar $T = f(\partial_x)$ en V_n de tal manera que la matriz T^n se calcula de la matriz de representación de $P_n(\partial_x)P_n$. Introducimos dos enfoques para aproximar $T = g(\partial_x)$ sobre V_n .

¹Una matriz cuadrada C es circulante [21] si tiene la forma

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{bmatrix}.$$

- a) Calculando la proyección de $f(\partial_x)$ sobre V_n , es decir, $T_n = P_n f(\partial_x) P_n$.
- b) Calculando la función f de la proyección de ∂_x sobre V_n , es decir, $T_n = g(P_n(\partial_x)P_n)$.

Por lo tanto, T_n ya no es una proyección, pero si una representación diferente de T en V_n . La diferencia entre estos dos enfoques depende de lo bien que actúa $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ como una función de corte o truncamiento, donde φ es la función de escala asociada con una base wavelet. Si la función de operador f es homogénea de grado m , por ejemplo, $m = 1$ y 2 para la primera y segunda derivada de los operadores, entonces los coeficientes que aparecen en la forma no estándar satisfacen las relaciones de la forma

$$\begin{aligned}\alpha_l^j &= 2^{-mj} \alpha_l^0, & \beta_l^j &= 2^{-mj} \beta_l^0 \\ \gamma_l^j &= 2^{-mj} \gamma_l^0, & s_l^j &= 2^{-mj} s_l^0.\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

Por otro lado, si la función operador f no es homogénea, entonces $s_{k,k'}^0$ se obtiene a través de (3.1.9) y calculamos los coeficientes

$$\begin{aligned}\alpha_l^j &= 2 \sum_{k=0}^{L_f-1} \sum_{k'=0}^{L_f-1} g_k g_{k'} s_{2i+k-k'}^{j-1} \\ \beta_l^j &= 2 \sum_{k=0}^{L_f-1} \sum_{k'=0}^{L_f-1} g_k h_{k'} s_{2i+k-k'}^{j-1} \\ \gamma_l^j &= 2 \sum_{k=0}^{L_f-1} \sum_{k'=0}^{L_f-1} h_k g_{k'} s_{2i+k-k'}^{j-1}\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

para cada escala $j = 1, 2, \dots, J \leq n$. Nótese que si f es un operador de convolución, entonces las fórmulas para $s_{k,k'}^0$ se simplifican considerablemente, véase Beylkin [2].

La representación de la función operador $P_0 f(\partial_x) P_0$

Se describe a continuación el cálculo de la forma no estándar de la función operador mediante la fórmula $P_0 f(\partial_x) P_0$, la proyección de la función operador en la base wavelet. Para tal fin utilizaremos el par de transformadas de Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Ahora bien,

$$s_{k,k'}^j = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}x - k) f(\partial_x) \varphi(2^{-j}x - k') dx$$

observe que debemos encontrar $f(\partial_x) \varphi(2^{-j}x - k')$. Para ello utilizamos la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} f(\partial_x) \varphi(2^{-j}x - k') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi(2^{-j}x - k')} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} e^{i2^{-j}x\xi} d\xi. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} s_{k,k'}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}x - k) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} e^{i2^{-j}x\xi} d\xi \right] dx \\ &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}x - k) e^{i2^{-j}x\xi} dx \right] d\xi, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $z = 2^{-j}x - k$ obtenemos

$$\begin{aligned} s_{k,k'}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} \left[\frac{2^j}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{i\xi 2^{-j} 2^j [z+k]} dz \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{iz\xi} e^{ik\xi} dz \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi k'} e^{ik\xi} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(z)} e^{-iz\xi} dz \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) e^{i\xi(k-k')} \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{i\xi(k-k')} d\xi. \end{aligned}$$

Nótese que $s_{k,k'}^j = s_{k-k'}^j$, luego

$$s_l^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\xi 2^{-j}) |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{i\xi l} d\xi.$$

56 Representación de Operadores en Base Wavelet

Al dividir la recta real en intervalos $I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ para $k \in \mathbb{Z}$, la última integral se puede escribir como

$$s_l^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(-i\xi 2^{-j}) |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{i\xi l} d\xi.$$

Al reemplazar ξ por $\xi + 2\pi k$, los límites de integración cambian a 0 y 2π , esto es,

$$s_l^j = \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-i2^{-j}(\xi + 2k\pi)) |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 e^{i(\xi + 2k\pi)l} d\xi.$$

Como $e^{2k\pi i} = 1$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos

$$s_l^j = \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-i2^{-j}(\xi + 2k\pi)) |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 e^{i\xi l} d\xi. \quad (3.2.14)$$

Haciendo $g(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-i2^{-j}(\xi + 2k\pi)) |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2$, obtenemos

$$s_l^j = \int_0^{2\pi} g(\xi) e^{i\xi l} d\xi. \quad (3.2.15)$$

Por otro lado, sabemos que la función $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ actúa como una función de corte en el dominio de Fourier, esto es, $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 < \epsilon$ para $|\xi| > b$, con $\epsilon > 0$ y $b > 0$. Por tanto, la suma infinita (3.2.14) se puede aproximar a la suma finita

$$\tilde{g}(\xi) = \sum_{k=-p}^p f(-i2^{-j}(\xi + 2k\pi)) |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2,$$

para p entero suficientemente grande. Usando esta suma finita, en lugar de $g(\xi)$ en (3.2.15), y discretizando uniformemente el intervalo $[0, 2\pi]$ en N subintervalos $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ para $\xi_n = 2\pi n/N$, con $n = 0, 1, \dots, N-1$, obtenemos una aproximación para los coeficientes s_l^j ,

$$\tilde{s}_l^j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{g}(\xi_n) e^{i\xi_n l}.$$

Estos coeficientes se pueden calcular aplicando la transformada rápida de Fourier a la sucesión $\{\tilde{g}(\xi_n)\}$.

La representación de la función operador $f(P_0\partial_x P_0)$

Veamos ahora la representación para $f(P_0\partial_x P_0)$. Para ello usamos la transformada discreta de Fourier, a fin de diagonalizar este operador. Si X es la representación matricial de $P_n\partial_x P_n$, entonces T^n se obtiene aplicando la función f a X .

Ahora bien, si X es diagonalizable entonces existe una matriz invertible P tal que $X = P^{-1}D_x P$, donde D_x es la matriz diagonal que contiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^n}$ de X , luego $f(X) = f(P^{-1}D_x P) = P^{-1}f(D_x)P$. Nótese que el problema se reduce a diagonalizar X . Como la representación matricial de $P_n\partial_x P_n$ en V_n es circulante [31], ésta es diagonalizable por la matriz de Fourier (véase p.e., [7] o [21]), la cual es dada por

$$\begin{aligned}
 F &= (F_{k,l})_{N \times N} = \frac{1}{\sqrt{N}} (w_N^{-(k-1)(l-1)}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k, l \leq N
 \end{aligned}$$

donde $w_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

La inversa de la matriz de Fourier es F^* , la transpuesta conjugada de F , es dada por

$$F^* = (F_{k,l}^*)_{N \times N} = \frac{1}{\sqrt{N}} (w_N^{(k-1)(l-1)}), \quad 1 \leq k, l \leq N.$$

Se puede probar, véase por ejemplo Davis [21], que los valores propios de una matriz circulante $C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N)$ son dados por

$$\lambda_k = \sum_{m=1}^N c_m e^{2\pi i(k-1)(m-1)/N}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (3.2.16)$$

Además, el vector fila $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ de valores propios de la matriz circulante $C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N)$ es

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \sqrt{N}(c_1, c_2, \dots, c_N)F^*,$$

donde F^* es la matriz inversa de Fourier.

Si $T_x^n = \text{circ}(0, r_{-1}, r_{-2}, \dots, r_{-(L-2)}, 0, \dots, r_{L-2}, r_{L-3}, \dots, r_2, r_1)$, de orden $2^n \times 2^n$, es la representación matricial de $P_n \partial_x P_n$ en V_n . Entonces T_x^n es circulante y es dada por $T_x^n = F^* \Lambda_x F$, donde Λ_x es la matriz diagonal que contiene los valores propios de T_x^n . Ahora, teniendo en cuenta (3.2.16) los valores propios λ_k son dados por

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{l=1}^{L-2} r_{-l} e^{\frac{2\pi i l(k-1)}{2^n}} + \sum_{l=1}^{L-2} r_l e^{\frac{2\pi i l(k-1)}{2^n}} = \sum_{l=1}^{L-2} -r_l \left[e^{\frac{-2\pi i l(k-1)}{2^n}} - e^{\frac{2\pi i l(k-1)}{2^n}} \right] \\ &= -2i \sum_{l=1}^{L-2} r_l \text{sen} \left(\frac{2\pi l(k-1)}{2^n} \right), \quad (r_{-l} = -r_l). \end{aligned}$$

Nótese que los valores propios son imaginarios puros y que $\lambda_{2^{n-1}+k} = \bar{\lambda}_k$ (el complejo conjugado) para todo $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

En virtud que la matriz $T^n = F^* f(\Lambda_x) F$ es circulante, es por tanto suficiente determinar la primera fila de T^n para que quede completamente determinada. La primera fila de T^n está dada por

$$T^n(1, :) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_{2^n})) F,$$

el lado derecho se puede ver como la transformada discreta de Fourier del vector² $v = (f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_{2^n}))$.

Una vez obtenida la matriz T^n , las matrices A^j , B^j y T^{n-j} para el operador $T = f(\partial_x)$ se puede calcular recursivamente mediante las

²La transformada discreta de Fourier de un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector y cuyas componentes son dadas por

$$y_m = \sum_{k=1}^n v_k e^{-2\pi i(m-1)(k-1)/n}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

expresiones

$$\begin{aligned}
 A_{k,k'}^j &= \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{L-1} g_m g_{m'} T_{m+2k, m'+2k'}^{j+1} \\
 B_{k,k'}^j &= \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{L-1} g_m h_{m'} T_{m+2k, m'+2k'}^{j+1} \\
 C_{k,k'}^j &= \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{L-1} h_m g_{m'} T_{m+2k, m'+2k'}^{j+1} \\
 T_{k,k'}^j &= \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{L-1} h_m h_{m'} T_{m+2k, m'+2k'}^{j+1}
 \end{aligned}$$

donde $k, k' = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-j} - 1$, $j = n - 1, n - 2, \dots, n - J$. Recuerde que la matriz $T_{k,k'}^n = 2^n r_{k-k'}$, véase (3.2.10).

Para llegar a la proyección de la función operador $f(\partial_x)$ sobre el subespacio V_0 , los coeficientes wavelet s_l^0 son dados por

$$s_l^0 = \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) e^{2\pi i \frac{(k-1)(l-1)}{N}}.$$

Los elementos restantes de la forma no estándar se obtienen recursivamente usando las ecuaciones (3.2.12).

CAPÍTULO 4

Solución numérica de la ecuación KdV

4.1. La ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

En esta Sección se presenta alguna terminología referente a la ecuación de Korteweg-de Vries [22, 23, 40, 57, 62]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.1.1)$$

el número 6 es sólo un factor de escala que permite que las soluciones sean fáciles de describir, esta ecuación aparece en el estudio de ondas en aguas poco profundas en la dinámica de fluidos [22, 39, 51, 62]. Una propiedad que caracteriza la ecuación KdV es que los términos uu_x , no linealidad, y u_{xxx} , la dispersión, se balancean entre sí generando soluciones de onda que se propagan sin cambiar de forma.

La ecuación KdV se dedujo en 1895 por D. J. Korteweg y G. de Vries para modelar las ondas de agua en un canal de poca profundidad, con el propósito de resolver una conjetura formulada por el ingeniero John Scott Russell en 1834, donde él afirmaba que en este tipo de canal se genera una ola solitaria, pero varios matemáticos destacados, incluyendo Stokes, estaban convencidos de que tal fenómeno era imposible. Korteweg y de Vries demostraron que Russell estaba en lo cierto, encontrando en forma explícita

y cerrada soluciones de onda viajera a su ecuación con características muy especiales como retención de su forma en todo momento, bien localizada (asintóticamente constante en $\pm\infty$) y en el caso que una onda solitaria traspase a otra, se retiene el tamaño y su forma. Este hecho es en cierta forma el principio de superposición.

La ecuación KdV no recibió mayor atención hasta 1965, cuando N. Zabusky y M. Kruskal publicaron sus resultados de los experimentos numéricos con esta ecuación [62]. Ellos obtuvieron soluciones aproximadas a la ecuación KdV mostrando que cualquier perfil de onda inicial localizada que evoluciona de acuerdo a la ecuación KdV, genera un conjunto finito de ondas viajeras localizadas de la misma forma que la onda solitaria original, confirmando lo descubierto por Korteweg y de Vries en 1895. El término solitón fue acuñado por Zabusky y Kruskal para describir esta onda solitaria solución de la ecuación KdV [23, 62], en analogía con otras partículas elementales tales como electrón, protón, fotón, etc. Así, por solitón entendemos una onda solitaria en forma de un pulso que es capaz de trasladarse sin cambio de forma y sin pérdidas de energía, y además es capaz de conservar su estructura después de un choque con su semejante, es decir, su comportamiento es análogo al de una partícula. Luego los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento extremadamente inesperado e interesante, ondas solitarias que se propagan sin deformarse [22, 23].

4.1.1. Derivación de la ecuación KdV

La ecuación de Korteweg-de Vries (4.1.1) admite solución tipo onda solitaria o solitón. Existen varios métodos para obtener tal solución, por ejemplo, supongamos una solución de onda viajera con la estructura

$$u(x, t) = v(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

para alguna función v y velocidad de onda constante c . Determinemos v por sustitución de esta expresión en la ecuación (4.1.1) [23, 25].

Sea $\xi = x - ct$, entonces u es solución de la ecuación KdV siempre que v satisfaga la ecuación diferencial ordinaria

$$-c \frac{dv}{d\xi} + 6v \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^3v}{d\xi^3} = 0$$

al integrar se obtiene

$$-cv + 3v^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2} = A,$$

donde A es una constante de integración. Al multiplicar esta última expresión por $\frac{dv}{d\xi}$

$$-cv \frac{dv}{d\xi} + 3v^2 \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2v}{d\xi^2} \frac{dv}{d\xi} = A \frac{dv}{d\xi},$$

e integrar, se tiene

$$-\frac{c}{2}v^2 + v^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = Av + B,$$

con B una constante de integración. Como la onda solución es un solitón, entonces cuando $|\xi| \rightarrow \infty$, $v, \frac{dv}{d\xi}, \frac{d^2v}{d\xi^2} \rightarrow 0$, de donde $A = B = 0$. Luego

$$-\frac{c}{2}v^2 + v^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dv}{d\xi} = \pm v \sqrt{c - 2v}.$$

Al separar variables e integrar se obtiene

$$\xi = - \int \frac{dv}{v \sqrt{c - 2v}} + D,$$

donde D una constante de integración. Haciendo la sustitución

$$v = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 y \quad dv = -c \operatorname{sech}^2 y \tanh y dy$$

y

$$v \sqrt{c - 2v} = \frac{c^{3/2}}{2} \operatorname{sech}^2 y \tanh y$$

se obtiene

$$- \int \frac{dv}{v \sqrt{c - 2v}} = \frac{2}{\sqrt{c}} y + D.$$

Por tanto,

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{c}} y + D \quad \text{o} \quad y = \frac{\sqrt{c}}{2} \xi - D,$$

pero $y = \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{2v}{c}}$, luego

$$\operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{c}}{2} \xi - D \right) = \sqrt{\frac{2v}{c}}$$

de donde

$$v(\xi) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi - D\right).$$

En consecuencia, la solución de la ecuación KdV es

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) - D\right).$$

Como la ecuación KdV es completamente integrable [23, 28, 40], lo que significa que la solución exacta se puede calcular para un valor inicial arbitrario, y además, por la naturaleza de la solución, se puede elegir $D = 0$. Obteniéndose así,

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right).$$

En virtud a que $v > 0$ para todo ξ , el solitón es una onda de elevación simétrica sobre $\xi = 0$, que se propaga en el medio sin cambio de forma con velocidad constante c proporcional a la amplitud. Por lo tanto, ondas solitarias con gran amplitud se mueven con mayor velocidad que ondas solitarias con menor amplitud.

Si en lugar de $v = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 y$ hacemos $v = -\frac{c}{2} \operatorname{csch}^2 y$, obtenemos otra solución de la ecuación KdV del tipo onda viajera dada por

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right).$$

Nótese que esta solución no es un solitón, debido a que $u(x, t)$ no es acotada en $\xi = 0$.

4.2. Algoritmo basado en wavelets

En esta Sección se describe un esquema basado en la teoría wavelets para resolver cierta clase de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Como caso particular estudiaremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{L}u + \mathcal{N}f(u) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

donde $\mathcal{L}u$ es la parte lineal y $\mathcal{N}f(u)$ es la parte no lineal, con \mathcal{L} y \mathcal{N} operadores diferenciales que no dependen de t . La función $f(u)$ en general es no lineal. Como ejemplos de este problema podemos mencionar la ecuación de Burger de fluidos viscosos [22, 25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad \nu > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

o la ecuación de Korteweg de Vries (KdV) [22, 23, 40]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones se pueden resolver analíticamente, pero la motivación de este trabajo es estudiar métodos numéricos aplicados a la solución de este tipo de problemas de valor inicial. Dentro de los métodos numéricos para tratar estas ecuaciones se destacan aquellos que generan esquemas discretos cuya implementación computacional sea eficiente y sencilla, por ejemplo, diferencias finitas o elementos finitos [11, 24, 50, 51, 57].

Los métodos de separación de operadores son especialmente útiles en ciertos casos, ya que se han desarrollado para reducir problemas complejos de la física matemática a una cadena de problemas mas simples los cuales pueden ser eficientemente resueltos en una computadora. Este tipo de reducción consiste en separar al operador que caracteriza la ecuación de estudio como una suma de operadores de estructura más simple, véase la ecuación (3.2.5). Es importante observar que los métodos de separación de operadores permiten la discretización de la variable temporal en el modelo continuo, mientras que la discretización de las variables espaciales se realiza con técnicas de diferencias finitas o elementos finitos, lo que permite que el modelo discreto conserve las propiedades físicas del modelo continuo.

Por otro lado, la teoría wavelets proporciona métodos como la descomposición de operadores para resolver ecuaciones en derivadas parciales con condiciones iniciales y periódicas. Para ello, se discretiza en el dominio de las wavelets y se utiliza el análisis multirresolución para obtener varios niveles de representación multiescala del sistema discreto, es decir, a distintos niveles de "resolución" se tendrá una base wavelets. Más concretamente, cuanto mayor precisión se pretenda obtener en la solución, mayor número de funciones se tendrá en la base wavelets, véase por ejemplo, [2, 3, 4, 6, 12, 14, 15, 17, 47, 54].

4.2.1. El enfoque de semigrupo

Consideremos el problema de valor inicial (4.2.1), a través de la teoría de semigrupos (véase la Sección 1.3) la solución se puede expresar como

$$u(x, t) = e^{t\mathcal{L}}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\mathcal{N}f(u(x, s))ds, \quad (4.2.2)$$

donde, para cada $t \geq 0$, el operador $e^{t\mathcal{L}}$ se representa por

$$e^{t\mathcal{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{L})^n}{n!},$$

la serie converge en la norma del operador [46].

La ecuación (4.2.2) es el punto de partida para el esquema basado en wavelets, y la integral se aproxima por medio de cuadratura para obtener una ecuación en diferencia implícita para la solución. Esto es, debemos estimar la integral

$$I(x, t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\mathcal{N}f(u(x, s))ds, \quad (4.2.3)$$

donde el operador diferencial \mathcal{N} es independiente de t y la función $f(u)$ es no lineal. Nótese que tanto para la ecuación de Burger como la KdV, $\mathcal{N}f(u) = uu_x$, aparece el producto de u y su derivada con respecto a x . De este modo, la integral (4.2.3) se puede escribir como

$$I(t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}u(s)v(s)ds, \quad (4.2.4)$$

donde se ha suprimido la dependencia explícita de x .

Para obtener una aproximación de esta integral, se realiza una partición regular del intervalo $[0, t]$, con nodos en los puntos $t_i = t_0 + ih$, con $t_0 = 0$ y $h = t_{i+1} - t_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Denotando $u(t_i)$ y $v(t_i)$ por u_i y v_i , respectivamente, la aproximación para (4.2.4) es de la forma

$$I(t) = \hat{I}(t) + O(h^{m+1}), \quad (4.2.5)$$

con

$$\hat{I}(t) = \underbrace{(e^{mh\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}}_{\text{operador}} \left(\sum_{i,j=0}^m c_{ij}u_i v_j \right), \quad (4.2.6)$$

donde \mathcal{I} es el operador identidad y los coeficientes $c_{i,j}$ son independientes de t . Para determinar los coeficientes $c_{i,j}$, se comparan las aproximaciones (4.2.5) y (4.2.6) con un esquema de orden de precisión conocido, el cual se puede construir usando polinomios de interpolación de Lagrange

$$L_i(t) = \prod_{k=0, k \neq i}^m \frac{t - t_k}{t_i - t_k}$$

para las funciones $u(t)$ y $v(t)$ que aparecen en el integrando de (4.2.4). Las aproximaciones de Lagrange para u y v son dadas por

$$u(t) = \sum_{i=0}^m L_i(t)u_i + O(h^{m+1})$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^m L_i(t)v_i + O(h^{m+1}).$$

Al reemplazar estas expresiones en la integral (4.2.4) se obtiene

$$I(t) = \bar{I}(t) + O(h^{m+2}), \quad (4.2.7)$$

donde la aproximación \bar{I} es dada por

$$\bar{I}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} \sum_{i,j=0}^m L_i(s)L_j(s)u_i v_j ds$$

y luego de intercambiar sumatoria e integral se obtiene

$$\bar{I}(t) = \sum_{i,j=0}^m f_{ij}u_i v_j$$

donde

$$f_{i,j} = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} L_i(s)L_j(s)ds.$$

Los coeficientes $c_{i,j}$ se encuentran comparando potencias del paso h entre las aproximaciones (4.2.5) y (4.2.7). Por ejemplo, para el caso $m = 1$ debemos encontrar $f_{i,j}$, con $i, j = 0, 1$ y luego comparar las estimaciones \hat{I} y \bar{I} .

Encontremos f_{ij} . Para ello necesitamos $L_0(s)$ y $L_1(s)$, con $t_0 = 0$ y $t_1 = ih$ tenemos

$$L_0(s) = \frac{s - t_1}{t_0 - t_1} = \frac{t_1 - s}{h} \quad \text{y} \quad L_1(s) = \frac{s - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{s}{h}.$$

De este modo, con $t = t_1 = h$ se tiene

$$\begin{aligned} f_{00} &= \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} [L_0(s)]^2 ds = \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} \left[\frac{h-s}{h} \right]^2 ds \\ &= \frac{e^{h\mathcal{L}}}{h^2} \int_0^h e^{-s\mathcal{L}} (h^2 - 2hs + s^2) ds. \end{aligned}$$

Después de integrar y un poco de manipulaciones algebraicas se obtiene

$$f_{00} = e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-1} - \frac{2}{h} e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-2} - \frac{2}{h^2} \mathcal{L}^{-3} + \frac{2}{h^2} e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-3}.$$

$$\begin{aligned} f_{01} &= \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} L_0(s) L_1(s) ds = \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} \left[\frac{h-s}{h} \right] \left[\frac{s}{h} \right] ds \\ &= \frac{e^{h\mathcal{L}}}{h^2} \int_0^h e^{-s\mathcal{L}} s(h-s) ds = f_{10} \\ &= \frac{1}{h} \mathcal{L}^{-2} + \frac{2}{h^2} \mathcal{L}^{-3} + \frac{1}{h} e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-2} - \frac{2}{h^2} e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-3}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} [L_1(s)]^2 ds = \int_0^h e^{(h-s)\mathcal{L}} \left[\frac{s}{h} \right]^2 ds = \frac{e^{h\mathcal{L}}}{h^2} \int_0^h s^2 e^{-s\mathcal{L}} ds \\ &= -\mathcal{L}^{-1} - \frac{2}{h} \mathcal{L}^{-2} - \frac{2}{h^2} \mathcal{L}^{-3} + \frac{2}{h^2} e^{h\mathcal{L}} \mathcal{L}^{-3}. \end{aligned}$$

Ahora bien, la aproximación de $e^{h\mathcal{L}}$ en serie de Taylor en los cinco primeros términos es

$$e^{h\mathcal{L}} \approx \mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2 \mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3 \mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4 \mathcal{L}^4}{24},$$

donde \mathcal{I} es el operador identidad, sustituyendo en las expresiones anteriores y tomando hasta el orden $O(h^3)$ obtenemos

$$\begin{aligned} f_{00} &= \left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2 \mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3 \mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4 \mathcal{L}^4}{24} \right) \mathcal{L}^{-1} - \frac{2}{h^2} \mathcal{L}^{-3} \\ &\quad - \frac{2}{h} \left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2 \mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3 \mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4 \mathcal{L}^4}{24} \right) \mathcal{L}^{-2} \\ &\quad + \frac{2}{h^2} \left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2 \mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3 \mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4 \mathcal{L}^4}{24} \right) \mathcal{L}^{-3} \\ &= \frac{h}{3} + \frac{h^2}{4} \mathcal{L} + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{01} &= \frac{1}{h}\mathcal{L}^{-2} + \frac{2}{h^2}\mathcal{L}^{-3} + \frac{1}{h}\left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2\mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3\mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4\mathcal{L}^4}{24}\right)\mathcal{L}^{-2} \\
 &\quad - \frac{2}{h^2}\left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2\mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3\mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4\mathcal{L}^4}{24}\right)\mathcal{L}^{-3} \\
 &= \frac{h}{6} + \frac{h^2}{12}\mathcal{L} + O(h^3) = f_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \frac{2}{h^2}\left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2\mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3\mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4\mathcal{L}^4}{24}\right)\mathcal{L}^{-3} - \frac{2}{h^2}\mathcal{L}^{-3} - \frac{2}{h}\mathcal{L}^{-2} - \mathcal{L}^{-1} \\
 &= \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\mathcal{L} + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Por tanto, haciendo $u_i v_j = A_{ij}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \bar{I}(t) &= \sum_{i,j=0}^1 f_{ij} u_i v_j = \sum_{i,j=0}^1 f_{ij} A_{ij} = f_{00}A_{00} + f_{01}A_{01} + f_{10}A_{10} + f_{11}A_{11} \\
 &= A_{00}\left[\frac{h}{3} + \frac{h^2}{4}\mathcal{L}\right] + A_{01}\left[\frac{h}{6} + \frac{h^2}{12}\mathcal{L}\right] + A_{10}\left[\frac{h}{6} + \frac{h^2}{12}\mathcal{L}\right] + A_{11}\left[\frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\mathcal{L}\right] \\
 &= \left[2(A_{00} + A_{11}) + A_{01} + A_{10}\right]\frac{h}{6} + \mathcal{L}\left[3A_{00} + A_{11} + A_{01} + A_{10}\right]\frac{h^2}{12} + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \hat{I}(t) &= (e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{i,j=0}^1 c_{ij} u_i v_j\right) \\
 &= \left(\mathcal{I} + h\mathcal{L} + \frac{h^2\mathcal{L}^2}{2} + \frac{h^3\mathcal{L}^3}{6} + \frac{h^4\mathcal{L}^4}{24} - \mathcal{I}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{i,j=0}^1 c_{ij} A_{ij}\right) \\
 &= \left(h + \frac{h^2}{2}\mathcal{L} + \underbrace{\frac{h^3}{6}\mathcal{L}^2 + \frac{h^4}{24}\mathcal{L}^3}_{O(h^3)}\right)\left(\sum_{i,j=0}^1 c_{ij} A_{ij}\right) \\
 &= \left(h + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}\right)S = hS + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}S + O(h^3)
 \end{aligned}$$

donde

$$S = \sum_{i,j=0}^1 c_{ij} A_{ij} = c_{00}A_{00} + c_{01}A_{01} + c_{10}A_{10} + c_{11}A_{11}.$$

70 Solución numérica de la ecuación KdV

Para simplificar hacemos $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $u_1 = u(t_1)$ y $v_1 = v(t_1)$, de este modo los desarrollos de Taylor de orden $O(h^3)$ para u y v son

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 - hu'_1 + \frac{h^2}{2}u''_1 + O(h^3) \\ v_0 &= v_1 - hv'_1 + \frac{h^2}{2}v''_1 + O(h^3), \end{aligned}$$

donde las primas indican derivadas con respecto a t . En consecuencia,

$$\begin{aligned} A_{00} &= u_0v_0 = \left(u_1 - hu'_1 + \frac{h^2}{2}u''_1\right)\left(v_1 - hv'_1 + \frac{h^2}{2}v''_1\right) + O(h^3) \\ &= u_1v_1 - h(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}(u_1v''_1 + 2u'_1v'_1 + u''_1v_1) + O(h^3) \\ A_{01} &= u_0v_1 = \left(u_1 - hu'_1 + \frac{h^2}{2}u''_1\right)v_1 + O(h^3) \\ &= u_1v_1 - hu'_1v_1 + \frac{h^2}{2}u''_1v_1 + O(h^3) \\ A_{10} &= u_1v_0 = u_1\left(v_1 - hv'_1 + \frac{h^2}{2}v''_1\right) + O(h^3) \\ &= u_1v_1 - hu_1v'_1 + \frac{h^2}{2}u_1v''_1 + O(h^3) \\ A_{11} &= u_1v_1. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} S &= c_{00}A_{00} + c_{01}A_{01} + c_{10}A_{10} + c_{11}A_{11} \\ &= c_{00}\left[u_1v_1 - h(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}(u_1v''_1 + 2u'_1v'_1 + u''_1v_1)\right] \\ &+ c_{01}\left[u_1v_1 - hu'_1v_1 + \frac{h^2}{2}u''_1v_1\right] + c_{10}\left[u_1v_1 - hu_1v'_1 + \frac{h^2}{2}u_1v''_1\right] + c_{11}u_1v_1 \\ &= (c_{00} + c_{01} + c_{10} + c_{11})u_1v_1 - h[(c_{00} + c_{10})u_1v'_1 + (c_{00} + c_{01})u'_1v_1] \\ &+ \frac{h^2}{2}[(c_{00} + c_{10})u_1v''_1 + (c_{00} + c_{01})u''_1v_1 + 2c_{00}u'_1v'_1] + O(h^3). \end{aligned}$$

Haciendo $R = c_{00} + c_{01} + c_{10} + c_{11}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{I} &= hS + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}S + O(h^3) = h \left[Ru_1v_1 - h[(c_{00} + c_{10})u_1v'_1 + (c_{00} + c_{01})u'_1v_1] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h^2}{2}[(c_{00} + c_{10})u_1v''_1 + (c_{00} + c_{01})u''_1v_1 + 2c_{00}u'_1v'_1] \right] \\
 &\quad + \frac{h^2}{2}\mathcal{L} \left[Ru_1v_1 - h[(c_{00} + c_{10})u_1v'_1 + (c_{00} + c_{01})u'_1v_1] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h^2}{2}[(c_{00} + c_{10})u_1v''_1 + (c_{00} + c_{01})u''_1v_1 + 2c_{00}u'_1v'_1] \right] \\
 &= hRu_1v_1 - h^2[(c_{00} + c_{10})u_1v'_1 + (c_{00} + c_{01})u'_1v_1] + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}(Ru_1v_1) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

De igual manera se obtiene

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= \left[2A_{00} + 2A_{11} + A_{01} + A_{10} \right] \frac{h}{6} + \mathcal{L} \left[3A_{00} + A_{11} + A_{01} + A_{10} \right] \frac{h^2}{12} + O(h^3) \\
 &= \frac{h}{6} \left[2 \left[u_1v_1 - h(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}(u_1v''_1 + 2u'_1v'_1 + u''_1v_1) \right] + 2u_1v_1 \right. \\
 &\quad \left. + u_1v_1 - hu'_1v_1 + \frac{h^2}{2}u''_1v_1 + u_1v_1 - hu_1v'_1 + \frac{h^2}{2}u_1v''_1 \right] \\
 &\quad + \frac{h^2}{12}\mathcal{L} \left[3 \left[u_1v_1 - h(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}(u_1v''_1 + 2u'_1v'_1 + u''_1v_1) \right] \right. \\
 &\quad \left. + u_1v_1 - hu'_1v_1 + \frac{h^2}{2}u''_1v_1 + u_1v_1 - hu_1v'_1 + \frac{h^2}{2}u_1v''_1 + u_1v_1 \right] \\
 &= hu_1v_1 - \frac{h^2}{2}(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}(u_1v_1) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{I} - \hat{I} &= hu_1v_1 - \frac{h^2}{2}(u_1v'_1 + u'_1v_1) + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}(u_1v_1) - hRu_1v_1 \\
 &\quad + h^2[(c_{00} + c_{10})u_1v'_1 + (c_{00} + c_{01})u'_1v_1] - \frac{h^2}{2}\mathcal{L}(Ru_1v_1) \\
 &= h[(1 - R)u_1v_1] + \frac{h^2}{2}[(2c_{00} + 2c_{10} - 1)u_1v'_1 + (2c_{00} + 2c_{01} - 1)u'_1v_1] \\
 &\quad + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}[(1 - R)u_1v_1] + O(h^3).
 \end{aligned}$$

72 Solución numérica de la ecuación KdV

Ahora, los coeficientes de orden h y h^2 se anulan, y se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}c_{00} + c_{01} + c_{10} + c_{11} &= 1 \\2c_{00} + 2c_{10} &= 1 \\2c_{00} + 2c_{01} &= 1.\end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, luego haciendo $c_{00} = s$, donde s es un parámetro real, se tiene

$$c_{01} = \frac{1}{2} - s, \quad c_{10} = \frac{1}{2} - s, \quad c_{11} = s.$$

Al reemplazar esta solución en la aproximación \hat{I} obtenemos

$$\hat{I} = (e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}[su_0v_0 + (1/2 - s)u_0v_1 + (1/2 - s)u_1v_0 + su_1v_1]$$

con el fin de minimizar el número de coeficientes podemos hacer $s = 0$ o $s = 1/2$, en cuyo caso se obtiene

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}(u_0v_1 + u_1v_0), \quad \text{para } s = 0$$

o

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}(u_0v_0 + u_1v_1), \quad \text{para } s = 1/2$$

lo cual es análogo a la regla del trapecio.

La aproximación de cuadratura resultante es una ecuación de diferencia implícita para la solución en el siguiente paso del tiempo. Típicamente, para un paso de tiempo uno, obtenemos

$$U(t_{i+1}) = e^{\Delta t \mathcal{L}} U(t_i) - \frac{1}{2} \mathcal{O}_{\mathcal{L},1} [U(t_i) \partial_x U(t_{i+1}) + U(t_{i+1}) \partial_x U(t_{i+1})]$$

Donde, $\mathcal{O}_{\mathcal{L},m} = (e^{m\mathcal{L}} - I)\mathcal{L}^{-1}$, I es el operador identidad.

En caso de utilizar el primer enfoque, las funciones de operador que nos interesan son las que aparecen en las soluciones de la ecuación diferencial parcial $u_t = \mathcal{L}u + \mathcal{N}f(u)$.

En el cálculo de soluciones de (4.2.1) a través de (4.2.2) podemos calcular previamente la forma no estándar de las funciones de operador y aplicarlas cuando sea necesario.

4.3. Resultados e Implementación

4.3.1. Implementación del método de solución

En esta Sección resolvemos la ecuación KdV, mediante el método solución planteado. El algoritmo para la solución numérica de la ecuación KdV, se realizó con el software MATLAB.

La implementación se realizó para diferentes tipos de condiciones iniciales, determinando en su aplicación sus respectivos errores.

Para cada uno de los siguientes ejemplos, la precisión de nuestro enfoque se ilustra mediante la comparación de la solución exacta y la solución aproximada, usando la norma

$$\|U - U_N\| = \left(2^{-n} \sum_{i=0}^{2^n-1} (U(x_i, t) - U_n(x_i, t))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 4.3.1. En este ejemplo calculamos la solución de la ecuación KdV, tomando las constantes $\varepsilon = 2$ y $\mu = 4,8 \times 10^{-4}$, sobre el intervalos $[a, b] = [-1, 1]$. En este se toma como condición inicial a la solución exacta de la ecuación KdV

$$u_t + 2uu_x + 4,8 \times 10^{-4}u_{xxx} = 0, \quad \text{con } -1 \leq x \leq 1$$

Con condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} u(-1, t) &= u(1, t) = 0 \\ u_x(-1, t) &= u_x(1, t) = 0 \\ u_{xx}(-1, t) &= u_{xx}(1, t) = 0 \end{aligned}$$

y condición de inicial

$$u_1(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax + D), \quad \text{con } A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu}} \quad \text{y } D = -6$$

Podemos ver que la solución para esta ecuación KdV para $t = 0$ como se muestra en la Figura 4.1.

Al resolver la ecuación diferencial y determinar valores para diferentes instantes de tiempo obtenemos la solución aproximada ver Figura 4.2.

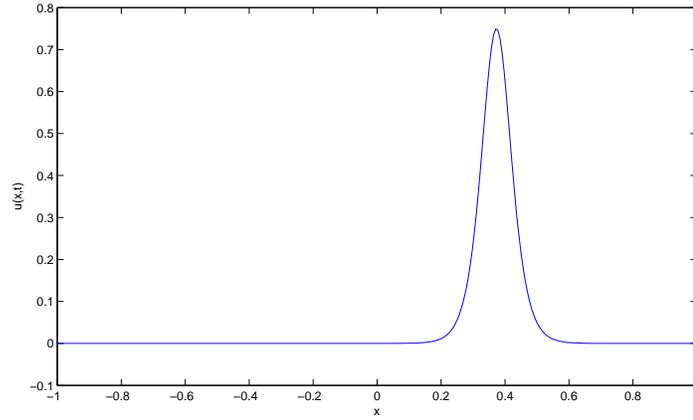


Figura 4.1: Solucion exacta de la ecuacion KdV

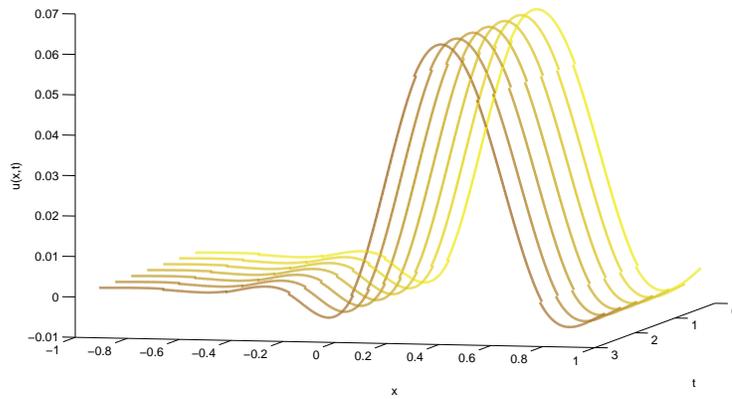


Figura 4.2: Solución de la Ecuación KdV con $N = 8$, $\Delta t = 0,001$, $\mu = 0,00048$ y $c = \frac{1}{2}$

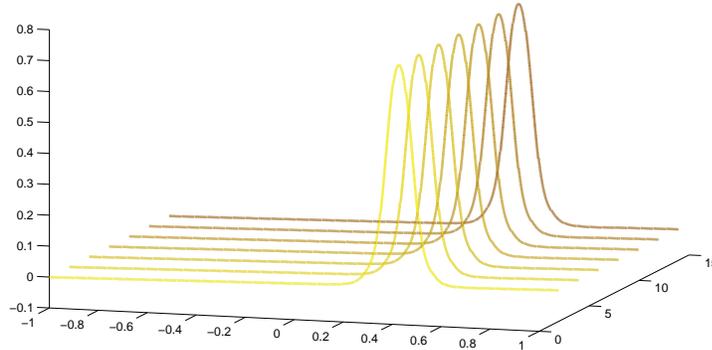


Figura 4.3: Solución de la Ecuación KdV para $N = 40$, $\Delta t = 0,00001$, $c = \frac{1}{2}$

Ejemplo 4.3.2. En este ejemplo se soluciona la ecuación KdV usando la condición inicial,

$$u_2(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En este ejemplo $n = 10$, $\varepsilon = 2$, $\Delta t = 0,001$, $\mu = 0,00048$. Nos referimos a las Figuras 4.4.

Ejemplo 4.3.3. En este tercer ejemplo se soluciona la ecuación KdV para la condición inicial

$$u_3(x, t) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$$

Para la cual se utilizaron los valores de $n = 8$, $\varepsilon = 2$, $\Delta t = 0,001$, $\mu = 0,00048$, $c = 0,5$.

Ecuación de Burgers

Aquí se realiza el cálculo numérico de la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x + vu_{xx} = 0, \quad \text{con } -1 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

Con condiciones de frontera periódicas,

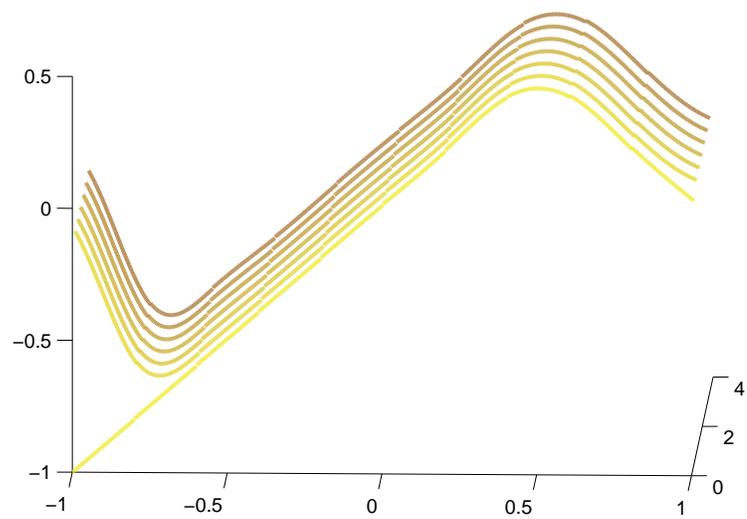


Figura 4.4: Solución de la Ecuación KdV en varios instantes de tiempo, usando como condición inicial el Ejemplo 4.3.2. En este ejemplo $N = 10$, $\Delta t = 0,001$, $c = \frac{1}{2}$

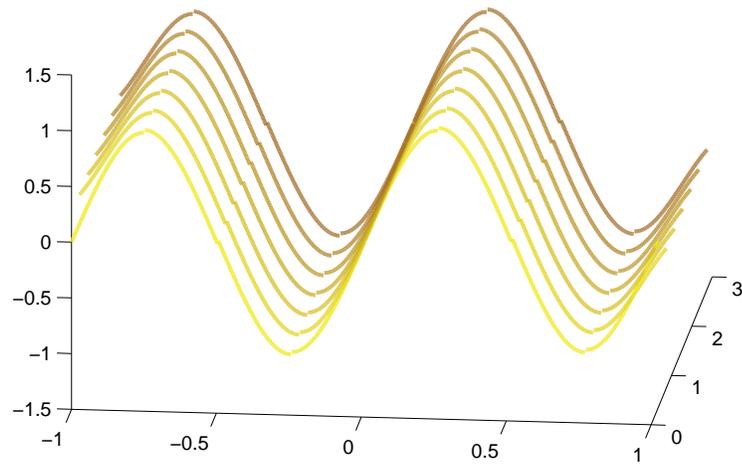


Figura 4.5: Solución de la Ecuación KdV e varios instantes de tiempo. Aquí $N = 8$, $\Delta t = 0,00001$, $c = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}u(-1, t) &= u(1, t) = 0 \\u_x(-1, t) &= u_x(1, t) = 0\end{aligned}$$

para $v > 0$ y con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{con } -1 \leq x \leq 1$$

Esto se realizo con el proposito de comparar los resultados obtenidos entre las dos ecuaciones diferenciales (Ecuación KdV y Burgers). En este sentido, utilizamos las funciones $u_1(x, 0)$, $u_2(x, 0)$ y $u_3(x, 0)$ que se definieron en los Ejemplos 4.3.3, 4.3.3 y 4.3.3.

Ejemplo 4.3.4. Para este ejemplo se soluciona la ecuación de Burgers, tomando como conción inicial:

$$u_1(x, 0) = 3c\operatorname{sech}^2(Ax + D), \quad \text{con } A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}} \quad \text{y } D = -6$$

con valores para $\mu = 0,00048$, $c = 0,5$ y $D = -6$.

Ejemplo 4.3.5. En este ejemplo se calcula la solución a la ecuación de Burgers usando la condición inicial

$$u_2(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para este ejemplo empleamos $N = 8$, $v = y$ $\Delta t = 0,001$ en la figura 4.8 y $N = 8$, $v = y$ $\Delta t = 0,001$ en la figura 4.9

Ejemplo 4.3.6. Para este ultimo ejemplo se calcula la solución a la ecuación de Burgers usando la condición inicial

$$u_3(x, t) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$$

Aqui empleamos los valores $N = 6$, $v = 1$ y $\Delta t = 0,001$ en la figura 4.10 y $N = 8$, $v = y$ $\Delta t = 0,001$ en la figura 4.11

A continuación mostramos los errores generados al aplicar nuestro enfoque para solucionar la ecuación KdV. En el cuadro se mostrará los errores para las funciones $u_1(x, 0)$ para los valores de $N = 8$, $\Delta t = 0,001$ y $N = 40$, $\Delta t = 0,00001$ ver Cuadro 4.1 a) y b), la funcion $u_2(x, 0)$ para los valores $N = 10$, $\Delta t = 0,001$ y la funcion $u_2(x, 0)$ para los valores $N = 8$, $\Delta t = 0,00001$ ver Cuadro 4.1.

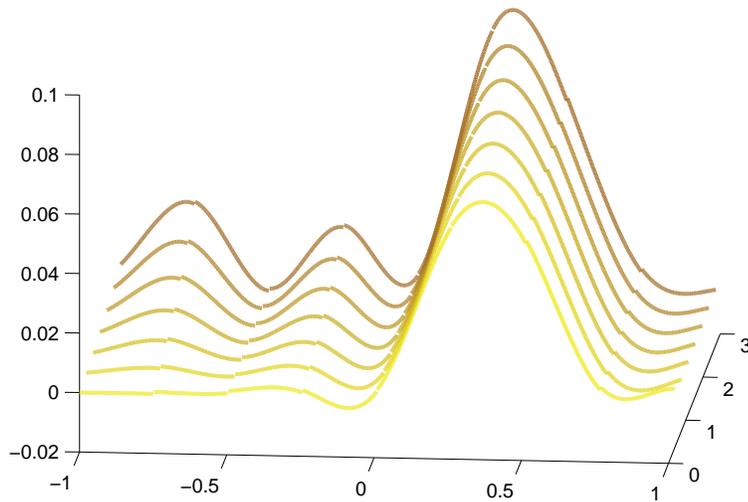


Figura 4.6: Solución de la ecuación de Burgers en diferentes instantes de tiempo para $N = 8$, $v = 1$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_1(x, 0)$

t	L_2	t	L_2
0	1,04E-06	0	2,55E-14
0.5	5,86E-06	0.5	5,95E-13
1	1,42E-05	1	1,41E-12
1.5	2,46E-05	1.5	2,42E-12
2	3,67E-05	2	3,58E-12
2.5	5,01E-05	2.5	4,87E-12
3	6,48E-05	3	6,29E-12

Cuadro 4.1: Errores de la solución aproximada de la ecuación KdV para función $u_1(x, 0)$ con valores $N = 8$, $\Delta t = 0,001$ y $N = 40$, $\Delta t = 0,00001$, respectivamente

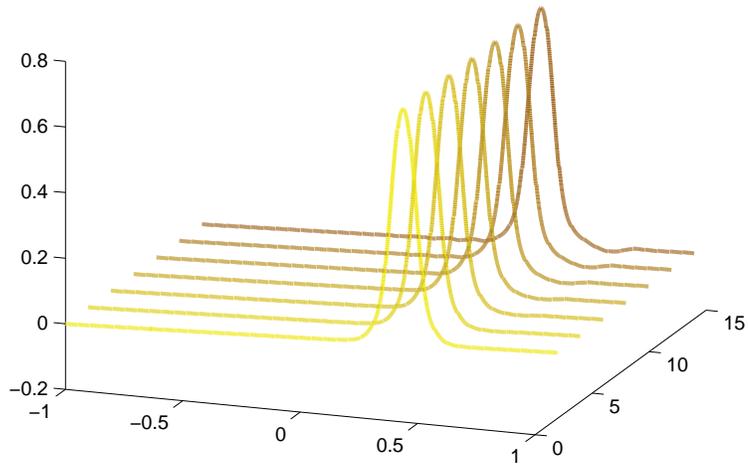


Figura 4.7: Solución de la ecuación de Burgers para $N = 40$, $v = 0,00001$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_1(x, 0)$

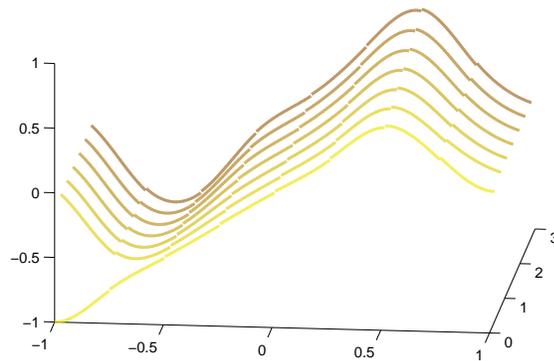


Figura 4.8: Solución de la ecuación de Burgers para $N = 8$, $v = 1$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_2(x, 0)$

Figura 4.9: Solución de la ecuación de Burgers para $N = 16$, $v = 0,00001$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_2(x, 0)$

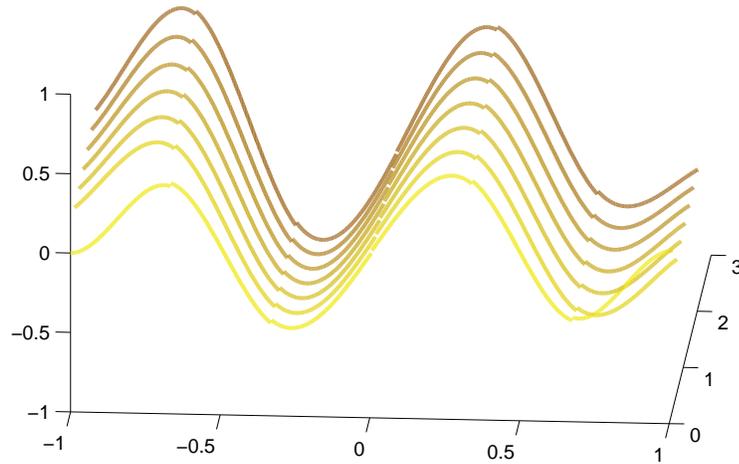


Figura 4.10: Solución de la ecuación de Burgers para $N = 6$, $v = 1$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_3(x, 0)$

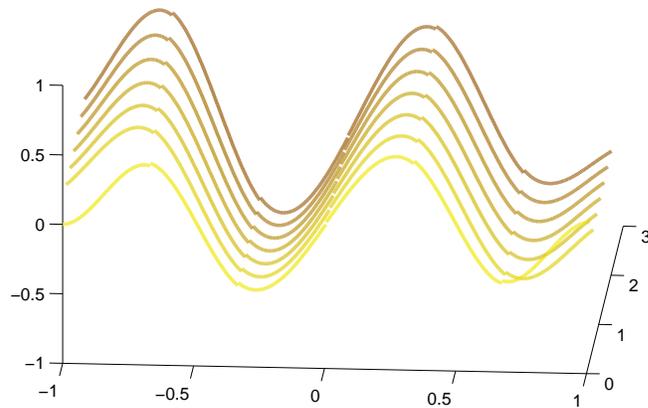


Figura 4.11: Solución de la ecuación de Burgers para $N = 8$, $v = 0,01$ y $\Delta t = 0,001$, mediante $u_2(x, 0)$

t	L ₂	t	L ₂
0	0,005246233	0	0,085492465
0.5	0,007493696	0.5	0,121117147
1	0,009292452	1	0,148597952
1.5	0,010863642	1.5	0,171886886
2	0,012296791	2	0,192511762
2.5	0,013637282	2.5	0,211254689
3	0,014911769	3	0,228579425

Cuadro 4.2: Errores de la solución aproximada de la ecuación KdV para la función $u_2(x, 0)$ con valores $N = 10$, $\Delta t = 0,001$ y la función $u_3(x, 0)$ con valores $N = 8$ y $\Delta t = 0,00001$, respectivamente

4.4. Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se presentó la solución de la ecuación KdV, mediante la representación de operadores en base wavelet. Los experimentos numéricos que se realizaron permite corroborar la eficacia del método empleado; en estos ejemplos se plantearon tres condiciones iniciales $u_1(x, 0) = 3\text{csech}^2(Ax + D)$, $u_2(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ y $u_3(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$ las cuales fueron aplicadas tanto a la ecuación KdV como a la ecuación de Burgers.

- De los resultados numéricos obtenidos usando técnicas wavelet, vemos que los éstos tienen alta precisión y rápida convergencia en especial en problemas donde la ecuación diferencial presenta singularidades.
- En la ecuación de Burgers se obtuvo mejores aproximaciones para valores de v pequeños, ya que al asignarle valores mayores que 1, está presentaba oscilaciones en el progreso del tiempo.
- Si se eligen valores de Δt pequeños, menores a 0,001, las soluciones aproximadas mejoran, si se aumenta el número de elementos N considerados, se observa en los resultados que el error disminuye.
- La representación de operadores en base wavelet permite aproximar soluciones de la ecuación KdV manteniendo errores muy pequeños.

Recomendaciones

Con base a la experiencia adquirida se sugiere para futuros trabajos las siguientes consideraciones:

- Extender los resultados a condiciones de fronteras no homogéneas y no periódicas.
- Extender estos métodos a problemas de dimensión superior a dos.
- Hacer un estudio profundo sobre la aplicación de esta metodología a la ecuación de Navier-Stokes.

Bibliografía

- [1] Beylkin, G., Coifman, R. R., and Rokhlin, V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Commun. Pure and Appl. Math.*, 44 (1991), 141-183.
- [2] Beylkin, G. On the Representation of Operators in bases of Compactly supported Wavelets, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 6, No 6, (1992), pp. 1716-1740.
- [3] Beylkin, G. On wavelet-based algorithms for solving differential equations, pp 449-466 in *Wavelets: Mathematics and Applications*, J. Benedetto, M. Frazier (eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida 1994.
- [4] Beylkin, G., Keiser, J. M. On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet bases, *Journal of Computational Physics.*, 132 (1997), 233-259.
- [5] Beylkin, G., Keiser, J. An Adaptive Pseudo-Wavelet Approach for solving Nonlinear Partial Differential Equations, pp 137-197 in *Multiscale Wavelet Methods for PDFs*, W. Dahmen, A. Kurdila, P. Oswald (eds.) Academic Press, Inc. New York 1997.
- [6] Beylkin, G., Keiser, J. M., Vozovoi, L. A new class of Time Discretization Schemes for the Nonlinear PDEs, *Journal of Computational Physics.*, 147 (1998), 362-387.

-
- [7] Boggess, A., Narcowich, F. J. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [8] Burrus, C. S., Gopinath, R. A., Guo, H. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms A Primer*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [9] Chiavassa, G., Liandrat, J. A fully adaptive wavelet algorithm for parabolic partial differential equations, *Applied Numerical Mathematics*. 36 (2001), 333-358.
- [10] Chui, C. K. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997.
- [11] Ciarlet, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. 2nd edition. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.
- [12] Cohen, A. *Numerical Analysis of Wavelet Methods*. Volume 32. North-Holland Elsevier Science, Amsterdam, 2003.
- [13] Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J. C. Biorthogonal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), 485-560.
- [14] Dahlke, S., Weinreich, I. Wavelet-Galerkin methods: an adapted biorthogonal wavelet basis, *Constructive Approximations*. 9(2) (1993), 237-262.
- [15] Dahlke, S., Dahmen, W., Hochmuth, R., Schneider, R. Stable multiscale bases and local error estimation for elliptic problems, *Applied Numerical Mathematics*. 23 (1997), 21-47.
- [16] Dahmen, W., Kunoth, A., and Urban, K. A Wavelet-Galerkin method for the Stokes Equations, *Computing*. 56 (1996), 259-302.
- [17] Dahmen, W. Wavelet methods for PDEs-some recent developments, *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 128 (2001), 133-185.
- [18] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 (1988), 909-996.

-
- [19] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
- [20] Daubechies, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36 (1990), 961-1005.
- [21] Davis, P. J. *Circulant Matrices*. Second Edition, American Mathematica Society, Providence, Rhode Island, 2012.
- [22] Debnath, L. *Nonlinear Partial Differential Equations: for Scientists and Engineers*. Second Edition, Birkhäuser, Boston 2005.
- [23] Drazin, P. G., Johnson, R. S. *Solitons: An Introduction*. Second Edition, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [24] Ern, A., Guermond, J. L *Theory and Practice of Finite Elements*. Appl. Math. Sci. 159 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2010.
- [25] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, AMS, vol. 19, Providence, RI, 1998.
- [26] Fleet, P. V. *Discrete Wavelet Transformations: An Elementary Approach with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2008.
- [27] Folland, G. B. *Real Analysis*, 2nd Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.
- [28] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M. Korteweg-de Vries equation and generalizations, VI, Method for exact solution. *Comm. Pure Appl. Math.* 27, (1974) 97-133.
- [29] Glowinski, R., Lawton, W., Ravachol, M., and Tenenbaum, E. Wavelet solution of linear and non-linear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one dimension, pp 55-120 in *Computing Methods in Applied Science and Engineering*, R. Glowinski and A. Lichnewski, (eds.), SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [30] Goldstein, J. *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford U. Press, New York, 1985.

-
- [31] Hajji, M. A., Melkonian, S., and Vaillancourt, R. Representation of Differential Operators in Wavelet Basis, *Computers & Mathematics*, 47 (2004) 1011-1033.
- [32] Hernández, E. Weiss, G. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [33] Hong, D., Wang, J., and Gardner, R. *Real Analysis with an Introduction to Wavelets and Applications*. Elsevier Academic Press, Burlington, MA, 2005.
- [34] Hong, T. K., Kennett, B. L. N. A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation. *Geophys. J. Int.* 150 (2002) 610-638.
- [35] Jaffard, S., Meyer, Y., Ryan, R. D. *Wavelets: Tools for Science & Technology*. Second edition. SIAM: Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 2001.
- [36] Jaffard, S. Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis.*, Vol. 29, No. 4, (1992), 965-986.
- [37] Johnson, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, Inc. New York, 2009.
- [38] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. A bilinear estimate with the application to the KdV equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (1996), 573-603.
- [39] Kevorkian, J. *Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques*. Second Edition. Tex. Appl. Math. 35 Springer-Verlag New York, 2000.
- [40] Linares, F., Ponce, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Universitext. Springer New York, 2009.
- [41] Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Trans. of Amer. Math. Soc.* 315, (1989), 69-87.
- [42] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, (1989), 674-693.

-
- [43] Mallat, S. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New Yor, 1998.
- [44] McOwen, R. C. *Partial Differential Equations: Methods and Applications*. Second Edition. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
- [45] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*. Herman, Paris, 1990.
- [46] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [47] Pérez, C., Schneider, R. Wavelet Galerkin Methods for Boundary Integral Equations and the Coupling with Finite Element Methods, pp 145-179 in *Wavelets Transforms & Time-Frequency Signal Analysis*, L. Debnath (ed.), Birkhäuser, Boston, 2001.
- [48] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [49] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis*. Tex. Appl. Math. 27 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1998.
- [50] Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3 edition. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, New York, 2005.
- [51] Reddy, J. N., Gartling, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3 edition; CRC Press, Boca Raton, FL, 2010.
- [52] Strang, G. and Nguyen, T. *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996.
- [53] Tanaka, N. A Wavelet-Based Conjugate Gradient Method for Solving Poisson Equations, pp 45-73 in *Wavelets and Their Applications: Case Studies*, M. Kobayashi (ed.), SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [54] Urban, K. *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Oxford University Press Inc., New York, 2009.

-
- [55] Vasilyev, O., Bowman, Ch. Second-Generation Wavelet Collocation Method for the Solution of Partial Differential Equations, *Journal of Computational Physics.*, 165 (2000), 660-693.
- [56] Vasilyev, O., Kevlahan, N. K. An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems, *Journal of Computational Physics.*, 206 (2005), 412-431.
- [57] Villegas, J., Castaño, J., Duarte, J., Fierro, E. Wavelet-Petrov-Galerkin method for the numerical solution of the KdV equation, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, no. 69, (2012), 3411-3423.
- [58] Walnut, D. *An Introduction to Wavelets Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [59] Walter, G. G., Shen, X. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [60] Wickerhauser, M. V. *Adapted Wavelets Analysis from Theory to Software*. IEEE PRESS, New York, 1994.
- [61] Wojtaszczyk, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, New York, 1997.
- [62] Zabusky, N. J., and Kruskal, M. D. Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15, (1965), 240-243.

Índice alfabético

- algoritmo
 - de casacada, 35
 - de descomposición, 33
 - de reconstrucción, 36
 - piramidal, 35
- Análisis Multirresolución, 25
- downsampling, 35
- ecuación
 - Korteweg-de Vries, 61
- ecuación de escala, 29
- Fórmula de sumación de Poisson, 10
- Fourier
 - coeficientes de, 10
 - fórmula de inversión de, 8
 - serie de, 9
 - transformada de, 8
- función
 - característica, 7
 - de escala, 26, 29
 - construcción de, 30
 - dilatada, 19
 - trasladada, 19
- funciones
 - cuadrado integrable, 5
 - ortogonales, 5
- Operador acotado, 6
- Operador lineal, 6
- Parseval
 - fórmula de, 9
- Plancharel
 - fórmula de, 9
- señal, 17
- Soliton, 62
- Soporte, 7
- upampling, 36
- wavelet , 18
 - coeficientes, 24
 - fórmula de inversión, 20
 - fórmula de Parseval, 21
 - fórmula de Plancherel, 20
 - serie, 23
 - transformada continua, 19
 - transformada discreta, 23