

VALOR DE RIESGO (VaR) VERSUS LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR COMO CONCEPTO DE RIESGO EN LA ELECCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN¹

Eduardo Aponte Rincón²

eaponte@eafit.edu.co

Omar Gabriel Rojas Rojas³

orojasr@eafit.edu.co

Resumen

En la actualidad hay una especial preocupación de los inversionistas por realizar sus inversiones de manera más segura, obteniendo una buena rentabilidad y sin poner en riesgo su capital. En este sentido, la posibilidad de generar nuevas herramientas que permitan tomar mejores decisiones de inversión es cada vez más relevante en el mundo financiero. Así, uno de los aportes más importantes de los que se dispone para ese propósito es el de Markowitz, que propone la generación de carteras óptimamente diversificadas. Sin embargo, el problema es cómo escoger entre algunas de estas carteras. Por ese motivo, este proyecto tuvo como objetivo comparar el modelo de la desviación estándar (Ratio de Sharpe) con el de Value at Risk (VaR) como concepto de riesgo, para la elección de una cartera óptima dentro del entorno de un mercado desarrollado, en este caso, el mercado estadounidense, por medio de un *backtesting* se analizó también si el ciclo de mercado bajista, estable o alcista tiene incidencia de igual forma en esta elección. Después de realizar el modelo y aplicarlo se concluyó que bajo situaciones normales, en un mercado desarrollado, elegir una cartera sobre otra tuvo mayores beneficios si se realiza teniendo en cuenta como concepto de riesgo el VaR bajo un modelo de Simulación de Montecarlo, en lugar de la desviación estándar. Al aplicar este modelo a un entorno menos desarrollado y más fluctuante como el colombiano, se determinó que no hay una ventaja significativa entre los dos modelos (desviación estándar y VaR).

Palabras Clave: Desviación estándar, optimización de Markowitz, *Value at Risk*, *Ratio* de Sharpe, *Backtesting*, Simulación de Montecarlo.

Abstract

Nowadays investors have a special concern of maximizing their investment profit while maintaining its risk at minimum levels. With this in mind, new tools that allow better investment decision making have become more relevant in the financial world. For this purpose, one of the most important contributions was proposed by Harry Markowitz for the ideally diversified portfolios. Nevertheless, this model gives birth to a new challenge, how to choose between different portfolios? This project's objective was to compare the risk approach of standard deviation (Ratio Sharpe) and the model Value at Risk model (VaR). In order to choose an ideal portfolio inside a developed market environment, the American Market. The study considered the incidence of the market cycle (Bearish, Stable and upward) in the portfolios choice by means of the backtesting. The study concluded that, under normal circumstances on a developed market, bigger benefits may be obtained by performing the VaR methodology, using the Montecarlo Simulation compared to the standard deviation model. Nevertheless, implementing the same tests to the Colombian market, a less developed and more volatile environment, no clear advantages were found of either model.

Keywords: Standard deviation; Markowitz optimization, Value at Risk, Backtesting, Ratio Sharpe, Montecarlo Simulation.

¹ Trabajo de grado para optar al título de Maestría en Administración Financiera de la Universidad EAFIT. Medellín, Octubre de 2015.

² Economista de la Universidad Nacional de Colombia, Especialista en Finanzas de la Universidad EAFIT, candidato a Magister en Administración Financiera de la Universidad EAFIT.

³ Contador Público de la Universidad Santo Tomas, Especialista en Finanzas de la Universidad EAFIT, candidato a Magister en Administración Financiera de la Universidad EAFIT.

1 Introducción

Después de la crisis de 2008, la economía, los mercados financieros y sus inversionistas en el mercado de capitales buscan una etapa de estabilización para recobrar la confianza perdida, después de haber sacrificado parte de sus patrimonios en activos financieros que aparentemente eran sólidos y que tenían un buen nivel de calificación crediticia, pero que, luego de la crisis se demostró que fueron activos muy riesgosos debido a que la realidad de su calificación no era cierta.

Uno de los factores principales que hicieron que se originara esta crisis fue el exceso de confianza por parte de los inversionistas y del mismo mercado, pues, se confiaron por el crecimiento y las grandes rentabilidades que se estaban dando en ese momento. Otro factor principal fue que los entes de regulación del mercado accionario no le prestaron mucha atención y dejaron que la situación trascendiera. Es en este contexto donde se hace muy importante generar herramientas que permitan a los inversionistas tomar mejores decisiones de inversión.

Actualmente, existen diversas formas de hacer la elección de una cartera en el mercado de valores, las tres más tradicionales son la estrategia equiponderada, la estrategia de media y varianza y la estrategia de mínima varianza. Estas dos últimas basadas en los postulados de Markowitz.

La primera, estrategia equiponderada o $1/N$, indica que se debe asignar la misma proporción de capital a cada uno de los N activos para la construcción de un portafolio. Estrategia que ha tenido mucho éxito entre los inversionistas porque su implementación es muy sencilla, en esta metodología no se requiere hacer cálculos de los periodos de los retornos ni tampoco en los procesos de optimización.

Los planteamientos de Markowitz sobre la teoría de diversificación de portafolios se mantienen vigentes y son ampliamente utilizados en los diferentes contextos del mundo financiero. Así, uno de sus legados ilustra que en el proceso de selección de un portafolio es importante diversificar, sin embargo, el escoger una cartera óptima sobre otra es igualmente determinante. Para ello, este autor, elaboró un modelo matemático que muestra como un inversionista puede conseguir la máxima tasa de rendimiento de acuerdo a un nivel de riesgo.

La teoría de Markowitz radica en la relación Riesgo-Rendimiento y en cómo, esta puede ser minimizada por medio de la diversificación de activos. Es por esto que también se le conoce como la teoría de mínima varianza.

De otra parte, William Sharpe, otro experto de la teoría de portafolio, desarrolló un ratio para analizar el retorno esperado de una inversión, teniendo en cuenta los niveles de riesgo medidos a través de su volatilidad o desviación estándar.

A partir de Acuerdo de Basilea - 1999, se comienza a implementar el concepto de valor de riesgo (VaR por su sigla en inglés), como medida de riesgo del mercado, posteriormente se

dio la posibilidad de complementar el Ratio de Sharpe con el VaR, es así como se creó el Ratio de Sharpe Modificado:

$$\text{Ratio de Sharpe Modificado} = \frac{r_p - r_f}{VaR_p}$$

De la misma forma como evoluciona el Ratio de Sharpe evoluciona el VaR. En la actualidad existen diferentes modelos para realizar el cálculo del VaR, estos modelos se dividen entre paramétricos y no paramétricos.

El VaR paramétrico determina una distribución de probabilidad para los rendimientos para una inversión en un horizonte determinado. Este tipo de modelo tiene la característica de que los rendimientos se distribuyen con una curva de densidad de probabilidad normal.

Los modelos no paramétricos no suponen una distribución o un comportamiento específico de los rendimientos. Uno de los principales modelos no paramétricos es el modelo de simulación histórica.

Adicional a los modelos de Markowitz y de Sharpe, es usual utilizar el modelo por Simulación de Montecarlo, que consiste en un modelo estocástico (normal, lognormal, etc.), que permite simular posibles resultados hipotéticos a través de variables aleatorias.

Por esto, el objetivo de este proyecto fue determinar si al utilizar el VaR como medida de riesgo, en lugar de la desviación estándar, le permite al inversionista escoger un portafolio más eficiente.

Teniendo en cuenta los dos conceptos (desviación estándar y VaR) como medida de riesgo, se puede analizar cuál de los dos conceptos puede ser más eficiente a la hora de escoger un portafolio.

Para el desarrollo del estudio se seleccionaron los precios de las compañías que hacen parte del Dow Jones a través de una terminal de *Bloomberg*, de igual forma se seleccionó la tasa libre de riesgo que para este caso son los bonos del tesoro americano, con el análisis de los comportamientos de los precios desde el año 2000 al 2015, y se establecieron los tres periodos del ciclo de mercado bajista, estable y alcista.

Una vez seleccionados los datos, se halló la frontera eficiente y se procedió a escoger la mejor cartera por diferentes metodologías (desviación estándar, VaR paramétrico, simulación histórica y Simulación Montecarlo), incluyendo el Ratio de Sharpe (que utiliza desviación estándar como medida de riesgo) y el Ratio de Sharpe modificado (que utiliza el VaR como factor de riesgo).

Finalmente, por medio de un *backtesting* se determinó cuál de los modelos es el que mejor rendimiento tiene y si el ciclo de mercado influye en alguno de estos modelos. Luego de haber determinado la mejor estrategia de selección para el mercado americano se replicó la misma metodología para el mercado colombiano con el fin de observar la adaptabilidad del modelo a mercados menos desarrollados.

Como conclusión principal del desarrollo de este estudio, se puede decir que, bajo situaciones normales, en un mercado desarrollado, elegir una cartera sobre otra se tiene mayores beneficios si se realiza teniendo en cuenta como concepto de riesgo el VaR con una confianza del 99% bajo un modelo de Simulación de Montecarlo en lugar de la desviación estándar.

A pesar que los portafolios arrojan resultados similares en materia de VaR, las pequeñas variaciones en los diferentes modelos (Paramétrico, Simulación Histórica, Simulación de Montecarlo), logran generar decisiones de inversión con diferentes niveles de rentabilidad.

En situaciones extremas, como la de una crisis o en mercados menos desarrollados, no existe diferencia significativa entre la desviación estándar y el VaR con una confianza del 99% bajo un modelo de Simulación de Montecarlo como concepto de riesgo al momento de elegir un portafolio.

2 Marco conceptual

Los mercados financieros han ido evolucionando, cada vez es más importante generar herramientas que permitan tomar decisiones más acertadas. La decisión de invertir o no en algún activo financiero, es algo que le puede costar mucho dinero a un inversionista si no se hace una elección adecuada.

En la última década el mundo financiero presencié una de sus más grandes crisis, el exceso de confianza, así como la falta de regulación fueron los principales detonantes de la crisis del 2008, que posteriormente desencadenó la bancarrota de Lehman Brothers.

The spectacular failure of the 150-year-old investment bank Lehman Brothers has been perceived by many to be a major turning point in the global financial crisis that broke out in the summer of 2007. The specter of systemic risk sparked widespread fears of a full-scale collapse of the US financial sector due to financial contagion and concerns about significant disruption in international financial markets outside the United States. According to the bankruptcy petition #08-13555, filed on Monday, September 15th, 2008, Lehman's total assets of \$639 billion made it the largest failure in US history, about six times bigger than the largest previous failure (Dumontaux & Pop, 2013, p. 269).

En la actualidad existen diversas formas de hacer la elección de una cartera de acciones, las tres más comunes o tradicionales son la estrategia equiponderada, la estrategia de media varianza y la estrategia de mínima varianza. Estas dos últimas, se basan en el trabajo de Markowitz.

Sobre la estrategia equiponderada o $1/N$ se

[...] sugiere que se asigne la misma proporción de capital a cada uno de los N activos en cada rebalance del portafolio. Esta estrategia es fácil de implementar debido a que no requiere de estimación de los momentos de los retornos y tampoco de procesos de optimización, ignorando los datos por completo. Esta metodología de inversión ha tenido éxito, ya que la tendencia de los individuos es tener políticas de inversión sencillas DeMiguel *et al.* (2009a). Además favorece la inercia de los inversores a hacer movimientos en cada rebalance que conducen a costos de transacción muy bajos. En DeMiguel *et al.* (2009b) se presentan las ventajas de implementar la política equiponderada. Müller y Stoyan (2002) dan condiciones bajo las cuales la estrategia

equiponderada es una estrategia óptima (DeMiguel, Muller y Stoyan, citado en Puerta y Laniado 2010, p. 253).

En esta misma dirección Markowitz elaboró un modelo matemático que muestra como un inversionista puede conseguir la máxima tasa de rendimiento de acuerdo a un nivel de riesgo. Para este autor, el énfasis de su teoría radica en la relación Riesgo-Rendimiento y en cómo esta puede ser minimizada por medio de la diversificación de activos. Es por esto que, a su teoría, también se le conoce como la teoría de mínima varianza, la cual se basa en los siguientes supuestos:

- La rentabilidad del portafolio o de cualquier acción en particular es una variable aleatoria y su valor estará dado por la media de dicha variable aleatoria.

Ecuación 1. Rentabilidad $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$ (1)

- El riesgo del portafolio o de cualquier acción en particular está dado por su desviación estándar.

Ecuación 2. Desviación Estándar $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - R)^2}$ (2)

- El inversionista escogerá las carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo.

Teniendo en cuenta los supuestos anteriores, la rentabilidad del portafolio será el promedio ponderado de los rendimientos de cada acción que compone el portafolio.

Ecuación 3. Rentabilidad del Portafolio

$$R_p = W_1 \times R_1 + W_2 \times R_2 + \dots + W_n \times R_n \quad (3)$$

Ecuación 4. Rentabilidad del Portafolio Sumatoria

$$R_p = \sum_{i=1}^n W_i \times R_i \quad (4)$$

Donde W_i es la participación del activo “i” en el portafolio.

Por otra parte, la volatilidad del portafolio está dada por:

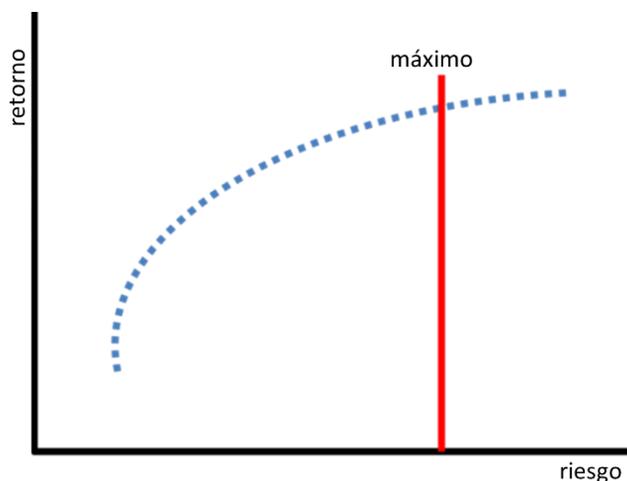
Ecuación 5. Volatilidad del Portafolio $\sigma_p = \sqrt{[W]^T [\Sigma] [W]}$ (5)

Donde $[\Sigma]$ es la matriz de varianzas y covarianzas de las acciones que componen el portafolio.

Teniendo en cuenta las preferencias del inversionista, se creará una “frontera eficiente” que estará compuesta por carteras por cada nivel de riesgo en donde se maximizará la rentabilidad.

Si un inversionista tiene un nivel de riesgo definido, simplemente escogerá la cartera para ese nivel de riesgo, por otra parte, si el inversionista tiene un máximo nivel de riesgo, podrá escoger entre varias carteras.

Grafica 1. Frontera eficiente



Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Markowitz (1952)

La gráfica muestra una frontera eficiente en donde cada punto es una cartera, si el inversionista tiene un nivel máximo de riesgo, esto no significa que deba escoger esa cartera, significa que podrá escoger entre todas las carteras que tengan un nivel igual o inferior de riesgo. ¿Cómo hacer esta elección?

Para responder a este interrogante, Sharpe (1994) desarrollo un ratio que analiza el retorno esperado de una inversión sobre su nivel de riesgo.

Ecuación 6. Ratio de Sharpe = $\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$ (6)

Donde r_p es el retorno del portafolio y r_f es la tasa libre de riesgo. Así:

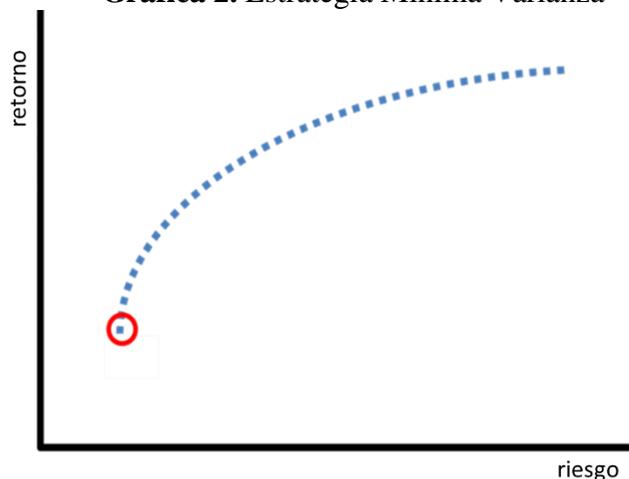
El Ratio de Sharpe divide la rentabilidad anormal de la cartera media durante ese periodo. El numerador es la rentabilidad incrementada que obtuvo la cartera en comparación con una inversión alternativa de un activo sin riesgo, y el denominador es el incremento de la volatilidad de la cartera comparado con la alternativa sin riesgo. Por tanto, la ratio valora la relación entre rentabilidad (total) y volatilidad. (Bodie, Kane y Marcus, 2004, p.496).

Éste indica el excedente de la rentabilidad obtenida por el portafolio de inversión por unidad de riesgo total, medida por la desviación estándar de los rendimientos. El índice Sharpe mide el exceso de rentabilidad sobre el rendimiento sin riesgo que ofrece una cartera por unidad de riesgo total. Es decir, cuanto mayor sea el resultado obtenido en este índice mejor habrá sido la administración del portafolio (Banda y Gomez, 2009, p. 312).

De esta forma, la elección entre carteras de la frontera eficiente (estrategia de media varianza) se logra con la utilización de este ratio.

Finalmente, en la estrategia de mínima varianza, como su nombre lo indica, se escogerá la cartera con menor varianza dentro de la frontera eficiente.

Grafica 2. Estrategia Mínima Varianza



Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Markowitz (1952)

Pero, ¿la desviación estándar (volatilidad) de la cartera es la medida apropiada del riesgo? A este respecto, Christoffersen (2003) afirma que, “*The unconditional distribution of daily returns has fatter tails than the normal distribution*” y continua “*Fatter tails mean higher probability of large losses than the normal distribution would suggest*” (p. 6).

Por lo antes mencionado, a finales de la década de los 90, se comenzó a implementar el Value at Risk (VaR) como medida de riesgo de mercado y pocos años después se vio la posibilidad de complementar el Ratio de Sharpe con el VaR, es así como se creó el Ratio de Sharpe Modificado.

$$\text{Ecuación 7. Ratio de Sharpe Modificado} = \frac{r_p - r_f}{\text{VaR}_p} \quad (7)$$

Según Duz (2015), “*El valor en riesgo, es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima, que podría registrar un portafolio en un intervalo de tiempo con cierto nivel de confianza estadística*” (p. 53). De forma similar, Jorion (2003) indica que, “*El VaR resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza dado*” (p. 41).

De la misma forma que el ratio de Sharpe fue evolucionando, el VaR también ha presentado transformaciones, actualmente existen diferentes modelos para el cálculo del VaR, estos modelos se dividen entre paramétricos y no paramétricos.

Respecto a los modelos paramétricos, “*Tienen como característica el supuesto de que los rendimientos del activo en cuestión se distribuyen de acuerdo con una curva de densidad de probabilidad normal*” (Lara, 2008, p. 60).

$$\text{Ecuación 8. VaR del Portafolio } VaR_p = F \times \sigma_p \times \sqrt{t} \quad (8)$$

Donde F es el factor que define el nivel de confianza y t es el horizonte de tiempo.

Ahora, si el supuesto de normalidad en los rendimientos no se acomoda a los rendimientos de las acciones, también existen los modelos no paramétricos. Estos modelos no suponen una distribución o un comportamiento específico de los rendimientos. Uno de los principales modelos no paramétricos es el modelo de simulación histórica. Según Lara (2008) “*consiste en utilizar una serie histórica de precios de la posición de riesgo (portafolios) para construir una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados o hipotéticos*” (p. 67).

Este modelo tiene como características:

It is widely used in practice. The main reasons are (1) the ease with which it is implemented and (2) its model-free nature. The first advantage is difficult to argue with. The HS technique clearly is very easy to implement. No parameters have to be estimated by maximum likelihood or any other method. Therefore, no numerical optimization has to be performed. The second advantage is more contentious, however. The HS technique is model-free in the sense that it does not rely on any particular parametric model such as a GARCH(1,1) for variance and a normal distribution for the standardized returns (Christoffersen, 2003, p. 101).

Este método estima el VaR como un cuantil de la distribución empírica de los rendimientos de los índices. De esta forma, podemos decir que la simulación histórica es un método no paramétrico y estático. El VaR puede calcularse mediante la estimación de un cuantil empírico. Para ello, primero debemos ordenar de menor a mayor la serie de rendimientos diarios de cada índice. Un posible estimador del VaR es $r_{[n(1-\alpha)]}$, donde $[n(1-\alpha)]$ denota el más grande entero no excedido por $n(1-\alpha)$. Por ejemplo, si $n = 1000$ y $\alpha = 0.99$, estimamos el VaR tomando el décimo más grande rendimiento diario de la serie ordenada.

Este método puede ajustar muy bien cuando no es muy alto, por ser un método no paramétrico; sin embargo, no es posible estimar cuantiles arriba de los observados limitando la estimación del VaR únicamente al comportamiento histórico de la serie (Guerrero, 2008, p.29).

Para este propósito, también se puede hacer uso de un modelo por Simulación de Montecarlo. Respecto a esto, Glasserman et al. (2000), indican que, “*Monte Carlo simulation is applicable with virtually any model of changes in risk factors and any mechanism for determining a portfolio’s value in each market scenario*” (p. 1). A este respecto,

Another key advantage of the MCS (Monte Carlo Simulation) technique is its flexibility. We can use MCS for any assumed distribution of standardized returns—normality is not required. If we think the standardized t (d) distribution with $d = 12$, for example, describes the data better, then we simply draw from this distribution (Christoffersen, 2003, p. 110).

La simulación de Montecarlo es una técnica de simulación estadística que permite generar posibles resultados de una variable aleatoria. Requiere de la definición del tipo de proceso estocástico (normal, lognormal, etc.) a aplicar sobre la variable aleatoria (ej. Al movimiento de los precios).

Esta metodología se desarrolla en los siguientes pasos (Glasserman et al. 2000):

- Generación de escenarios: utilizando las estimaciones de volatilidades y correlaciones de los activos de la cartera y suponiendo modelos de distribución de precios.
- Valoración de la cartera para cada escenario de precios.
- Presentación de los resultados como distribución de probabilidades de las pérdidas y ganancias de la cartera o como una medida específica del riesgo VaR.

Para la generación de escenarios se debe definir un comportamiento para la serie que se desea simular. Se puede asumir que las series de precios se distribuyen lognormal (rendimientos normales).

Ecuación 9. Rendimiento $S_t = S_0 e^{\sigma Y \sqrt{t}}$ (9)

S_t es el precio del activo en el día t , S_0 es el precio del activo en el día t , σ la volatilidad diaria del precio del activo, t es el horizonte de tiempo en días y Y es una variable aleatoria $N(0,1)$.

Para simular correctamente varias series se debe tener en cuenta la estructura de correlaciones que tienen que tener. Se necesitara la descomposición de Cholesky. Se trata de obtener una matriz A que multiplicada por su transpuesta sea igual a la matriz de correlaciones.

Ecuación 10. Choleski $AA' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ (10)

Una vez obtenida A , podemos multiplicar las variables Y (variables que eran $N(0,1)$ e independientes) y obtendremos un vector de variables Z transformadas cuya correlación entre si será la deseada.

Ecuación 11. Matriz A $Z = AY; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$ (11)

Considerando el vector $Y_{2 \times 1}$ que contiene dos variables aleatorias normales estandarizadas e independientes Y_1 e Y_2 , los elementos del vector Z serán,

Ecuación 12. Matriz Z
$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2} Y_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Mediante la transformación $Z=AY$ se generan variables aleatorias normales, estandarizadas e independientes con el factor de correlación deseado. Si se pretende modelizar el precio proyectado de dos activos con volatilidades diarias σ_1 y σ_2 y factor de correlación ρ se acudirá a las siguientes ecuaciones:

Ecuación 13. Proyección
$$S_t^{(1)} = S_0^{(1)} e^{\sigma_1 Y_1 \sqrt{t}}; S_t^{(2)} = S_0^{(2)} e^{\sigma_2 Y_2 \sqrt{t}} \quad (13)$$

Se puede trabajar también sobre la matriz de varianzas y covarianzas en lugar de la matriz de correlaciones, en este caso,

Ecuación 14. Matriz A*
$$Z = AY; A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ecuación 15. Matriz Z*
$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Donde $Z_1=\sigma_1 Y_1$ y $Z_2=\sigma_2 \rho Y_1 + \sigma_2 (1-\rho^2)^{1/2} Y_2$ y las ecuaciones para simular los precios no necesitan incluir las volatilidades.

Ecuación 16. Proyección*
$$S_t^{(1)} = S_0^{(1)} e^{Z_1 \sqrt{t}}; S_t^{(2)} = S_0^{(2)} e^{Z_2 \sqrt{t}} \quad (16)$$

Una vez generados los escenarios un número suficiente de veces, se calcularán los rendimientos de los activos, el valor total de la cartera y las pérdidas y ganancias obtenidas.

Tomando un determinado percentil en esta distribución de pérdidas, por ejemplo el quinto, se puede calcular el VaR de la posición para un horizonte de t días de negociación y con un nivel de confianza, en este caso, el 95% considerando la cola izquierda de la distribución de rendimientos de la cartera de negociación (Rodriguez 2015).

Teniendo en cuenta los modelos anteriores, la reflexión que se debe hacer es la siguiente: ¿La medida del VaR es significativamente diferente a la medida de volatilidad como medida del riesgo?

La desviación estándar tiene como supuesto fuerte la normalidad de los rendimientos, aspecto que también se encuentra en el modelo paramétrico del VaR. Respecto a la normalidad:

The most commonly encountered distributions are the ‘normal’ laws of Laplace and Gauss, which we shall simply call Gaussian in the following. Gaussians are ubiquitous: for example, the number of heads in a sequence of a thousand coin tosses, the exact number of oxygen molecules in the room, the height (in inches) of a randomly selected individual, are all approximately described by Gaussian distribution. The ubiquity of the Gaussian can be in part traced to the central limit theorem (CLT), which states that phenomenon resulting from a large number of small independent causes is Gaussian. There exists however a large number of cases where the distribution describing a complex phenomenon is not Gaussian: for example, the amplitude of earthquakes, the velocity differences in a turbulent fluid, the stresses in a granular materials, etc., and the price fluctuations of most financial assets (Bouchaud & Potters, 2009, p. 7).

The Gaussian hypothesis was not seriously questioned until recently when the work of Benoit Mandelbrot first began to appear. Mandelbrot’s main assertion is that, in the past, academic research has too readily neglected the implications of the leptokurtosis usually observed in empirical distributions of price changes. The presence, in general, of leptokurtosis in the empirical distributions seems indisputable (Fama, 1965, p.42).

Si evidentemente, la distribución de los rendimientos de la cartera muestra signos de leptocurtosis, se estará subvalorando el riesgo debido a que las colas de los retornos son más pesadas. Aunado a lo anterior Christoffersen (2003) afirma que *“The stock market exhibits occasional, very large drops but not equally large up-moves. Consequently, the return distribution is asymmetric or negatively skewed”* (p. 21).

Por otra parte, en el modelo no paramétrico de simulación histórica, implícitamente se asume que cualquier comportamiento futuro de los rendimientos, ya sucedió en algún momento. Si los precios de las acciones evidencian una tendencia al alza, se estará subvalorando el nivel de riesgo si la tendencia llegase a cambiar. En el caso contrario, si los precios de las acciones evidencian una tendencia a la baja, el VaR calculado será sobrevalorado si los precios de las acciones tienen un cambio en la tendencia. En síntesis, el ciclo de mercado influye en la toma de decisiones y por esto...

Most of investors have higher probability of exiting market at the time of economic depression than that at the time of economic boom. This suggests that the time of exiting market is practically correlated with the market states. Specifically, suppose that the stock market has bullish and bearish market states switching to each other over time (Wu, Zeng & Yao, 2014, p.69)

En este orden de ideas, si bien, el VaR aparece como un indicador de riesgo más completo que la desviación estándar, no hay que perder de vista que estos modelos tienen unos supuestos, los cuales deberán ser tenidos en cuenta al momento de hacer el análisis. Sin embargo, la adopción de herramientas de análisis que se adaptan al cambio en los mercados, llega a ser de gran utilidad al momento de tomar decisiones, situaciones esta que como afirma Mainik, Mitov & Rüschenndorf (2015):

The following years of financial crisis have demonstrated that the technical progress of financial markets and their globalization have also brought up some new challenges. One of these challenges is the need for diversification strategies that account for strong

drawdowns and increasing dependence of asset returns in crisis periods (Mainik, Mitov & Rüschenndorf, 2015, p.115)

Ahora, una herramienta bastante conocida para determinar la efectividad de un modelo es el *Backtesting*. Se trabaja con datos históricos logrando evaluar el resultado que se hubiese obtenido. Según Lara (2008) “*El concepto de Backtesting es esencial en el proceso de evaluar y calibrar los modelos de medición de riesgos*” (p. 155).

Siguiendo la idea de la Ecuación 3, se plantea determinar el rendimiento de cada portafolio, por tanto es importante conocer de antemano los resultados reales de cada acción. Por ejemplo, si se tienen datos del precio de un grupo de acciones en una ventana de 3 años, se toman los datos de los primeros 2 años para generar el modelo y luego se examina su resultado un año después.

Al determinar el rendimiento de cada portafolio se obtendrán los elementos necesarios para comparar principalmente los modelos que utilizan el VaR como concepto de riesgo frente al modelo que utiliza la desviación estándar al momento de tomar una decisión de inversión. Esta comparación es muy importante porque le da al inversionista una nueva herramienta para toma de decisiones y con esto una mayor eficiencia en su portafolio de inversiones.

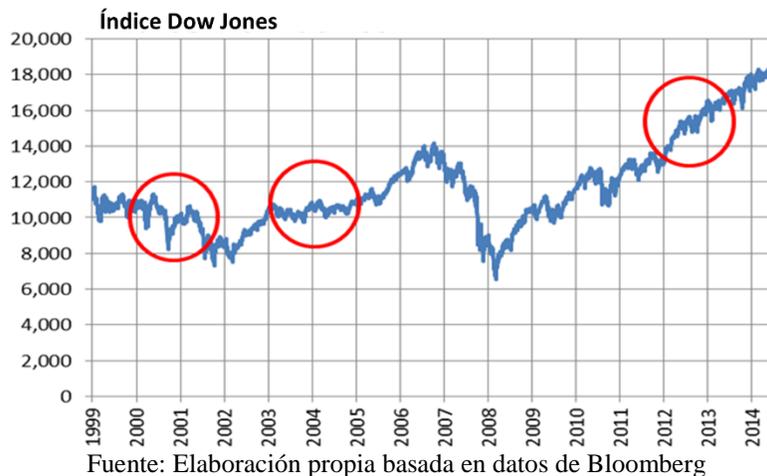
3 Método de solución

La información para el desarrollo del estudio se obtuvo de una terminal de *Bloomberg*, que es una de las empresas más importantes del mundo en el campo de soluciones financieras. Mediante el *toolbox* de *Bloomberg* para Excel, la función *PX_LAST* y los *Ticket* de las compañías que componen el índice Dow Jones se descargaron los precios.

En la misma plataforma y siguiendo la misma lógica, se descargó la tasa libre de riesgo que para este caso fueron los bonos del tesoro americano, los cuales son conocidos mundialmente por ser un activo sumamente seguro y que se utilizan habitualmente en estudios similares como tasa libre de riesgo.

Se establecieron 3 periodos del ciclo de mercado (bajista, estable y alcista).

Grafica 3. Ciclo de mercado



Del *MatLab* que, es una conocida herramienta de software matemático y financiero, y mediante su *toolbox* financiero se hallaron los siguientes datos:

- Matriz de correlaciones entre acciones.
- Las carteras de la frontera eficiente para cada periodo del ciclo de mercado por medio de la función *frontcon*.
- Desviación estándar de cada una de las carteras de la frontera eficiente.
- Retorno esperado.
- El VaR de simulación histórica.

Luego, para el VaR, aplicando simulación de Montecarlo se utilizó el software *Crystal Ball*, ya que es un software especializado en simulaciones. Este software permite incluir la matriz de correlaciones (ilustrada en la Grafica 4.) dentro de sus parámetros, esto permite sintetizar la descomposición de *Cholesky* en un solo paso.

En el caso de VaR paramétrico, el cálculo se ejecutó en Excel. En todos los modelos de VaR, el cálculo se hizo a 3 niveles de confianza 90, 95 y 99%, Estos son los niveles de confianza más frecuentemente utilizados por las instituciones financieras, así como por las empresas encargadas de hacer seguimiento y regular las instituciones financieras.

Habiendo obtenido las diferentes medidas de riesgo (desviación estándar y VaR) se calculó los ratios de Sharpe siguiendo las ecuaciones 6 y 7 según fuera el caso.

Posteriormente se establecieron las carteras con mejor Ratio de Sharpe para cada modelo y se ejecutó un *backtesting* para cada una de estas carteras.

El cálculo del Ratio de Sharpe, el Ratio de Sharpe Modificado y el *backtesting* de los modelos se ejecutaron en Excel.

Finalmente, se creó una matriz de los resultados del *backtesting* con el fin de simplificar el análisis, en donde en un eje está el ciclo de mercado y en otro el modelo de riesgo utilizado, al igual que se plantea en el marco teórico, la ventana de tiempo del *backtesting* será de un año hacia adelante. Con ayuda de los resultados obtenidos y el análisis realizado, se replicó el estudio al mercado colombiano.

4 Presentación y análisis de resultados

Los resultados encontrados en el estudio se presentan con ayuda de tablas y graficas que permiten una mejor explicación de estos. Inicialmente se presentan con su respectivo análisis las gráficas 4, 5 y 6, así como las tablas 2 y 3, las cuales fueron un insumo importante para respaldar los resultados concluyentes del estudio, que finalmente están representados en la Tabla 4. Posteriormente se muestran los mejores y peores portafolios, según su rendimiento por cada parte del ciclo de mercado, luego se analizan los resultados si estas elecciones se hubiesen presentado previo a la crisis del 2008 y se finaliza con los resultados del estudio aplicado al mercado colombiano.

Grafica 4. Matriz de Correlaciones

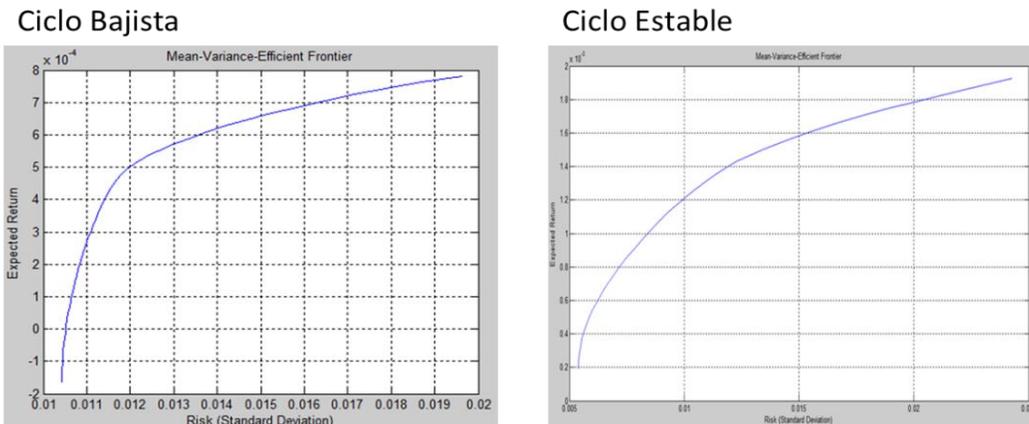
	Apple	American Ex	Boeing	Caterpillar	Cisco	Chevron	DuPont	Walt Disney	General Elec	Goldman Sac	Home Depot	IBM	Intel	Johnson Joh.	
6															
7	Apple	1	0,36236294	0,20806063	0,35016325	0,51822559	0,121472	0,26341773	0,3424976	0,39571535	0,45347807	0,2841924	0,49368767	0,60060928	0,09360299
8	American Express	0,36236294	1	0,45726278	0,49766886	0,45501733	0,32993628	0,47991806	0,56274609	0,67510258	0,64854578	0,46148104	0,48406387	0,48394239	0,30152224
9	Boeing	0,20806063	0,45726278	1	0,44049994	0,27036532	0,27670556	0,46808491	0,3925333	0,50110068	0,38981773	0,41121037	0,28801864	0,34992099	0,2494665
10	Caterpillar	0,35016325	0,49766886	0,44049994	1	0,35332625	0,36425454	0,59788268	0,44769912	0,58581936	0,52688785	0,44530822	0,41593432	0,40494734	0,23903606
11	Cisco	0,51822559	0,45501733	0,27036532	0,35332625	1	0,11415656	0,3292656	0,38783508	0,48682075	0,57615436	0,34337214	0,53103173	0,66397069	0,07778802
12	Chevron	0,121472	0,32993628	0,27670556	0,36425454	0,11415656	1	0,37832364	0,27227002	0,33775813	0,22312315	0,2470919	0,24010373	0,16850084	0,33996805
13	DuPont	0,26341773	0,47991806	0,46808491	0,59788268	0,3292656	0,37832364	1	0,42389459	0,5692982	0,45090479	0,44581793	0,40249873	0,36035492	0,28725312
14	Walt Disney	0,3424976	0,56274609	0,3925333	0,44769912	0,38783508	0,27227002	0,42389459	1	0,56181626	0,51747586	0,45459884	0,41627333	0,40265713	0,23711626
15	General Electric	0,39571535	0,67510258	0,50110068	0,58581936	0,48682075	0,33775813	0,5692982	0,56181626	1	0,6408405	0,48723431	0,53159493	0,47666	0,30168219
16	Goldman Sachs	0,45347807	0,64854578	0,38981773	0,52688785	0,57615436	0,22312315	0,45090479	0,51747586	0,6408405	1	0,42681482	0,51704786	0,5652272	0,13486108
17	Home Depot	0,2841924	0,46148104	0,41121037	0,44530822	0,34337214	0,2470919	0,44581793	0,45459884	0,48723431	0,42681482	1	0,37434595	0,40586268	0,19223293
18	IBM	0,49368767	0,48406387	0,28801864	0,41593432	0,53103173	0,24010373	0,40249873	0,41627333	0,53159493	0,51704786	0,37434595	1	0,59650837	0,18869575
19	Intel	0,60060928	0,48394239	0,34992099	0,40494734	0,66397069	0,16850084	0,36035492	0,40265713	0,47666	0,5652272	0,40586268	0,59650837	1	0,15135085
20	Johnson Johnson	0,09360299	0,30152224	0,2494665	0,23903606	0,07778802	0,33996805	0,28725312	0,23711626	0,30168219	0,13486108	0,19223293	0,18869575	0,15135085	1
21	JP Morgan	0,3848257	0,64140845	0,38497402	0,56449468	0,46631307	0,35291182	0,48396952	0,46297533	0,63397414	0,6753725	0,4282219	0,5116875	0,49082289	0,19378526
22	Coca Cola	0,12476573	0,27254324	0,19178558	0,21811611	0,10773532	0,24196101	0,26690496	0,17932116	0,25786493	0,13788347	0,24643052	0,17475337	0,20988588	0,31656351
23	Mc Donalds	0,10686738	0,26510195	0,21376373	0,24934308	0,21168759	0,19235724	0,23455813	0,24487048	0,25314597	0,19952011	0,25966683	0,18394078	0,16956948	0,19461171
24	3M	0,28832704	0,54009901	0,49629139	0,60744186	0,32230674	0,39265838	0,62560378	0,43194876	0,57046221	0,44042749	0,49868455	0,34658906	0,40076241	0,36731529
25	Merk	0,11258642	0,27977327	0,21891264	0,26387111	0,07256599	0,34632893	0,27900331	0,22682593	0,30025862	0,20602705	0,20743691	0,20059147	0,1723382	0,4286005
26	Microsoft	0,53899093	0,46890573	0,33376054	0,42682819	0,60302956	0,24504435	0,36311641	0,41992851	0,54625798	0,55331498	0,38607734	0,60374355	0,67988941	0,15873909
27	Nike	0,26102571	0,34897201	0,25555096	0,33236333	0,30541914	0,20299464	0,37221957	0,3304199	0,34597294	0,31000524	0,34302797	0,27545983	0,27309589	0,17450758

Fuente: Elaboración propia

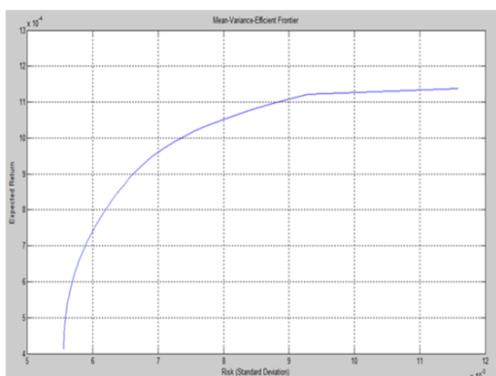
Se visualizan correlaciones entre 7% y 65% entre acciones. Donde la menor correlación se presenta entre Merk, que es la compañía farmacéutica y química más antigua del mundo, y Cisco, que es una compañía dedicada principalmente a la venta y mantenimiento de equipos de telecomunicaciones. La disparidad de los sectores de estas dos compañías podría ser una de las principales causas para su baja correlación.

Por otra parte, la mayor correlación se evidencia entre Goldman Sachs y American Express, ambas compañías del sector financiero, Goldman es una de las principales bancas de inversión del mundo, mientras que American Express es globalmente conocida por su franquicia de tarjetas de crédito. El hecho que ambas estén en el sector financiero es relevante al determinar el porqué de la magnitud de su correlación. Esta matriz es determinante para la aplicación del modelo de Simulación de Montecarlo.

Grafica 5. Fronteras de Carteras Eficientes



Ciclo Alcista



Fuente: Elaboración propia

Se observa cómo las carteras de ciclo bajista evidencian mayor riesgo, mientras tanto, las carteras del ciclo alcista registran menores niveles de riesgo. Simultáneamente, las carteras con mayor nivel de riesgo tienen mayor nivel de retorno, mientras que las carteras con nivel de riesgo más bajo tienen un nivel de retorno menor. Es decir, se confirma la relación positiva entre el riesgo y rentabilidad en las inversiones.

Ahora, la Tabla 2 contiene elementos fundamentales para el cálculo del *Ratio de Sharpe* y *Ratio de Sharpe Modificado*, tales como la desviación estándar, el retorno esperado de cada cartera y el VaR Paramétrico. De forma congruente con lo observado, en la Gráfica 5 se observa como entre más se incrementa el riesgo (Desviación Estándar o VaR), también se incrementa el retorno esperado.

En cuanto a los niveles de VaR encontrados, se aprecia que a medida que el nivel de confianza se incrementa, el VaR es más elevado, resultado acorde con diversos estudios estadísticos. Teniendo en cuenta que el VaR paramétrico se basa en una distribución normal, si se incrementa el nivel de confianza, el rango de posibilidades también se ampliará, razón por la cual se observa un nivel de riesgo diferente dependiendo del grado de confianza.

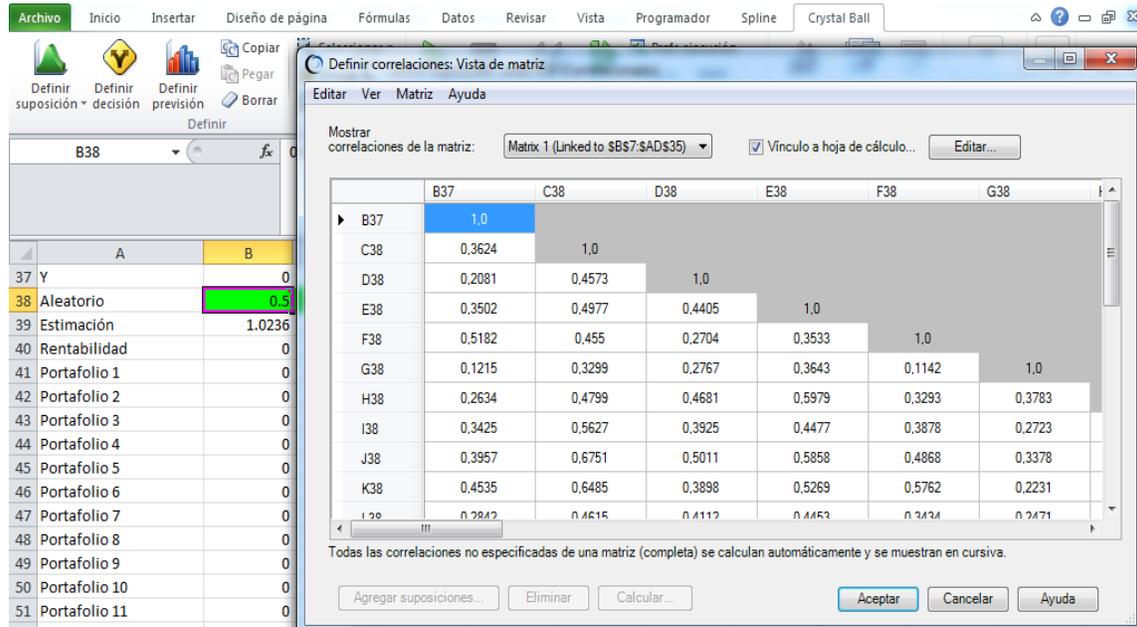
Tabla 2. Insumos Ratio de Sharpe

Portafolio	Retorno E.	Des. Est.	VaR Parametrico		
			1%	5%	10%
1	-0.00016357	0.0104285	2.4424%	1.7317%	1.3528%
2	-0.00014426	0.01042978	2.4408%	1.7300%	1.3511%
3	-0.00012496	0.01043363	2.4397%	1.7287%	1.3496%
4	-0.00010566	0.01044004	2.4393%	1.7278%	1.3485%
5	-8.6354E-05	0.01044901	2.4394%	1.7273%	1.3477%
6	-6.7051E-05	0.0104604	2.4402%	1.7273%	1.3473%
7	-4.7748E-05	0.01047401	2.4414%	1.7276%	1.3471%
8	-2.8445E-05	0.01048982	2.4431%	1.7283%	1.3472%
9	-9.1426E-06	0.01050782	2.4454%	1.7293%	1.3475%
10	1.016E-05	0.01052802	2.4482%	1.7307%	1.3482%

Portafolio	Retorno E.	Des. Est.	VaR Parametrico		
			1%	5%	10%
11	2.9463E-05	0.01055038	2.4514%	1.7324%	1.3491%
12	4.8766E-05	0.01057491	2.4552%	1.7345%	1.3504%
13	6.8069E-05	0.01060157	2.4595%	1.7370%	1.3518%
14	8.7371E-05	0.01063037	2.4643%	1.7398%	1.3536%
15	0.00010667	0.01066123	2.4695%	1.7429%	1.3556%
16	0.00012598	0.01069413	2.4752%	1.7464%	1.3579%
17	0.00014528	0.01072903	2.4814%	1.7502%	1.3605%
18	0.00016458	0.01076593	2.4881%	1.7544%	1.3633%
19	0.00018389	0.01080481	2.4952%	1.7588%	1.3663%
20	0.00020319	0.01084566	2.5028%	1.7636%	1.3696%
21	0.00022249	0.01088881	2.5109%	1.7688%	1.3732%
22	0.00024179	0.01093436	2.5195%	1.7744%	1.3771%
23	0.0002611	0.01098228	2.5288%	1.7803%	1.3813%
24	0.0002804	0.01103254	2.5385%	1.7867%	1.3858%
25	0.0002997	0.01108535	2.5489%	1.7934%	1.3907%
26	0.00031901	0.01114124	2.5599%	1.8007%	1.3959%
27	0.00033831	0.01120019	2.5717%	1.8084%	1.4015%
28	0.00035761	0.01126216	2.5842%	1.8167%	1.4075%
29	0.00037691	0.0113271	2.5974%	1.8255%	1.4139%
30	0.00039622	0.01139664	2.6116%	1.8350%	1.4209%
31	0.00041552	0.01147309	2.6275%	1.8456%	1.4288%
32	0.00043482	0.01155721	2.6451%	1.8575%	1.4376%
33	0.00045412	0.01164886	2.6645%	1.8707%	1.4474%
34	0.00047343	0.01175916	2.6882%	1.8869%	1.4597%
35	0.00049273	0.01191138	2.7217%	1.9100%	1.4772%
36	0.00051203	0.01211165	2.7664%	1.9410%	1.5010%
37	0.00053134	0.01235826	2.8218%	1.9796%	1.5306%
38	0.00055064	0.0126485	2.8874%	2.0254%	1.5659%
39	0.00056994	0.01297945	2.9625%	2.0779%	1.6064%
40	0.00058924	0.01334807	3.0463%	2.1366%	1.6517%
41	0.00060855	0.01375135	3.1382%	2.2010%	1.7015%
42	0.00062785	0.01419638	3.2398%	2.2723%	1.7566%
43	0.00064715	0.01469663	3.3542%	2.3527%	1.8187%
44	0.00066646	0.01524711	3.4804%	2.4413%	1.8874%
45	0.00068576	0.0158426	3.6170%	2.5373%	1.9617%
46	0.00070506	0.0164782	3.7629%	2.6399%	2.0413%
47	0.00072436	0.01714947	3.9171%	2.7484%	2.1254%
48	0.00074367	0.0178621	4.0810%	2.8637%	2.2148%
49	0.00076297	0.01869522	4.2729%	2.9988%	2.3196%
50	0.00078227	0.0196525	4.4936%	3.1543%	2.4403%

Fuente: Elaboración Propia

Grafica 6. Simulación de Montecarlo



Fuente: Elaboración Propia

Para el VaR, aplicando simulación de Montecarlo, se utilizó el software *Crystal Ball*, en la gráfica se observa cómo este software permite incluir la matriz de correlaciones (ilustrada en la Grafica 4.) dentro de sus parámetros, esto permite sintetizar la descomposición de *Cholesky* en un solo paso.

En la Tabla 3 se encuentran los *Ratios de Sharpe* Modificado para cada modelo en el ciclo bajista, se observa cómo los modelos paramétricos inducen decisiones similares mientras que los modelos de simulación histórica y de Simulación Montecarlo registran decisiones más heterogéneas, las causas de estas variaciones se analizarán más adelante en conjunto con los demás ciclos de mercado.

Tabla 3. Ratios de Sharpe según modelo

Portafolio	VaR Parametrico			VaR Historico			VaR Montecarlo		
	SHARPE M. 1%	SHARPE M. 5%	SHARPE M. 10%	SHARPE M. 1%	SHARPE M. 5%	SHARPE M. 10%	SHARPE M. 1%	SHARPE M. 5%	SHARPE M. 10%
1	-0.009273149	-0.013078902	-0.01674176	-0.00843874	-0.01332585	-0.01883675	-0.00914286	-0.01301457	-0.01657763
2	-0.008488495	-0.011976112	-0.015334922	-0.00770470	-0.01210516	-0.01722271	-0.00836425	-0.01190744	-0.01514917
3	-0.007700906	-0.010868475	-0.013921009	-0.00697347	-0.01090137	-0.01570802	-0.00758846	-0.01078300	-0.01374197
4	-0.00691096	-0.009756793	-0.012501037	-0.00624504	-0.00974770	-0.01417579	-0.00679667	-0.00967902	-0.01234554
5	-0.006119236	-0.008641878	-0.011076034	-0.00551939	-0.00867582	-0.01260047	-0.00601795	-0.00855428	-0.01092043
6	-0.005326386	-0.007524642	-0.009647158	-0.00480386	-0.00771611	-0.01099391	-0.00523519	-0.00744250	-0.00950156
7	-0.004533045	-0.006405981	-0.00821555	-0.00409011	-0.00661399	-0.00929434	-0.00445222	-0.00632469	-0.00807805
8	-0.003739719	-0.005286606	-0.006782121	-0.00337646	-0.00550080	-0.00753400	-0.00365524	-0.00521349	-0.00666491
9	-0.002946913	-0.00416723	-0.00534778	-0.00266292	-0.00432708	-0.00592060	-0.00288516	-0.00409804	-0.00525063
10	-0.002155122	-0.003048554	-0.003913428	-0.00194949	-0.00312443	-0.00434757	-0.00210580	-0.00299941	-0.00383697
11	-0.001364837	-0.001931277	-0.002479963	-0.00123617	-0.00195742	-0.00272842	-0.00133243	-0.00189725	-0.00242692
12	-0.000576542	-0.000816086	-0.001048271	-0.00052295	-0.00082863	-0.00115889	-0.00056309	-0.00080044	-0.00102324
13	0.000209291	0.000296343	0.000380776	0.00019015	0.00030124	0.00042105	0.00020417	0.00029013	0.00037136
14	0.000992198	0.001405349	0.001806317	0.00090360	0.00143286	0.00197734	0.00096496	0.00137425	0.00176020
15	0.001771736	0.002510292	0.003227525	0.00164941	0.00257001	0.00347780	0.00172038	0.00245247	0.00313604
16	0.00254748	0.003610563	0.004643603	0.00242620	0.00368385	0.00494456	0.00246834	0.00352368	0.00451112

17	0.003319019	0.004705566	0.006053774	0.00323574	0.00482667	0.00645279	0.00320875	0.00459001	0.00586981
18	0.004085957	0.005794728	0.007457286	0.00408017	0.00601333	0.00798127	0.00394682	0.00564970	0.00722690
19	0.004847912	0.006877494	0.008853408	0.00491010	0.00712971	0.00949678	0.00467651	0.00670104	0.00858197
20	0.005604502	0.007953307	0.010241408	0.00566617	0.00818786	0.01086548	0.00541002	0.00773644	0.00992901
21	0.006355178	0.009021371	0.01162024	0.00640073	0.00932976	0.01232493	0.00613097	0.00877726	0.01124854
22	0.007099447	0.010080966	0.012988958	0.00712505	0.01048265	0.01386168	0.00683073	0.00980907	0.01255886
23	0.007836901	0.011131498	0.014346771	0.00783936	0.01169016	0.01528231	0.00751905	0.01080901	0.01384842
24	0.008567159	0.012172403	0.01569293	0.00854386	0.01291364	0.01674829	0.00821716	0.01181361	0.01513874
25	0.009289665	0.01320287	0.017026362	0.00918356	0.01399955	0.01828414	0.00889221	0.01279301	0.01640025
26	0.010003522	0.014221599	0.018345359	0.00978961	0.01489820	0.01989064	0.00957688	0.01378167	0.01765645
27	0.010708262	0.015227897	0.019648998	0.01038892	0.01565777	0.02150090	0.01024989	0.01474240	0.01889937
28	0.011403476	0.016221158	0.020936463	0.01118054	0.01663179	0.02293916	0.01091874	0.01570508	0.02012470
29	0.012088792	0.017200825	0.022207005	0.01198373	0.01757290	0.02410091	0.01158857	0.01664482	0.02130494
30	0.012761953	0.018163645	0.023456367	0.01291585	0.01832671	0.02553459	0.01220182	0.01754179	0.02246656
31	0.013419592	0.019104762	0.024678203	0.01321392	0.01909148	0.02673356	0.01284773	0.01843085	0.02363672
32	0.014059859	0.02002149	0.025868974	0.01388424	0.01983455	0.02787854	0.01347604	0.01930623	0.02474686
33	0.014681971	0.020912665	0.027027115	0.01437454	0.02075159	0.02906114	0.01407057	0.02014271	0.02581808
34	0.015270427	0.021756	0.028123563	0.01475242	0.02178280	0.03027652	0.01467525	0.02093188	0.02684390
35	0.015791779	0.022503405	0.029095592	0.01419372	0.02300672	0.02998565	0.01515283	0.02160045	0.02782633
36	0.016234609	0.023138358	0.029921526	0.01390426	0.02417426	0.02975177	0.01551570	0.02222684	0.02867078
37	0.016599706	0.023661878	0.030602542	0.01452206	0.02464014	0.03012225	0.01588167	0.02275671	0.02941388
38	0.016891146	0.024079729	0.031146038	0.01449422	0.02394767	0.03135953	0.01614752	0.02320924	0.02997009
39	0.017114757	0.024400221	0.031562762	0.01451372	0.02486330	0.03213904	0.01639597	0.02355000	0.03036862
40	0.017277461	0.024633258	0.031865569	0.01433358	0.02500278	0.03232113	0.01657366	0.02378895	0.03071529
41	0.017386678	0.024789478	0.032068298	0.01471009	0.02430575	0.03306321	0.01668387	0.02392942	0.03088744
42	0.01744	0.02486	0.03216	0.01518512	0.02348004	0.03343209	0.01680042	0.024060106	0.03091385
43	0.01741776	0.024832776	0.032123016	0.015254	0.02318443	0.03339322	0.016844628	0.02404645	0.03091358
44	0.017341145	0.024722052	0.031977888	0.01439136	0.02379929	0.03372031	0.01682162	0.02388309	0.03076109
45	0.017219905	0.024547266	0.031749332	0.01456981	0.02426391	0.03404845	0.01670268	0.02379194	0.03054818
46	0.017065053	0.024324264	0.031458032	0.01481710	0.02462765	0.03334915	0.01660633	0.02364250	0.03037611
47	0.016885926	0.024066477	0.031121513	0.01506072	0.02455686	0.03247131	0.01644363	0.02336482	0.02994264
48	0.016680948	0.02377166	0.030736875	0.01510531	0.02456610	0.03183062	0.01633761	0.02307613	0.02967852
49	0.016383608	0.023344355	0.030179831	0.01383571	0.02408782	0.03159322	0.01596165	0.02271631	0.02911059
50	0.016008265	0.022805282	0.029477503	0.01281631	0.02392736	0.03183020	0.01567148	0.02217865	0.02851764

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4. Rentabilidad por modelo y por ciclo de mercado

MODELO/CICLO MERCADO	BAJISTA	ESTABLE	ALCISTA
Equiponderada	33,30%	13,20%	5,26%
Mínima Varianza	26,07%	14,61%	-0,27%
Desviación Estándar	41,00%	32,62%	10,92%
Paramétrico 99%	41,00%	32,62%	10,92%
Paramétrico 95%	41,00%	31,04%	10,92%
Paramétrico 90%	41,00%	31,04%	10,92%
Simulación Histórica 99%	41,91%	37,49%	10,24%
Simulación Histórica 95%	38,95%	31,04%	16,74%
Simulación Histórica 90%	41,00%	28,13%	13,79%
Simulación Montecarlo 99%	41,91%	37,49%	11,76%
Simulación Montecarlo 95%	41,00%	37,49%	11,76%
Simulación Montecarlo 90%	41,00%	37,49%	11,76%

Fuente: Elaboración Propia

En la Tabla 4 se observan, en amarillo, las estrategias tradicionales, mientras que en gris, las estrategias que implementan el VaR como concepto de riesgo en la elección de una cartera. Por otra parte, resaltado en verde, se muestra la cartera más rentable por cada ciclo de mercado, y en rojo, la elección con menor rentabilidad.

Es de destacar que en cada ciclo de mercado, la elección con menos rentabilidad provenía de las estrategias tradicionales, mientras tanto, las elecciones con mejor rentabilidad fueron en donde se tuvo en cuenta el VaR, específicamente el de Simulación Histórica y el de Simulación de Montecarlo.

La estrategia equiponderada estuvo en promedio un 15% por debajo de la mejor elección y en el ciclo estable, registró la rentabilidad más baja. De la misma forma, la estrategia de mínima varianza, estuvo en promedio un 19% por debajo de la mejor elección y en los ciclos bajista y alcista registro la rentabilidad más baja. De hecho, en el ciclo alcista alcanzó a registrar una rentabilidad negativa.

Por otra parte, se puede apreciar que las elecciones de las estrategias de Desviación Estándar como las de VaR Paramétrico generan elecciones similares, esto se debe principalmente a que su fundamento se basa en la normalidad de los retornos. Estas estrategias, aunque nunca fueron las peores en términos de rendimiento, tampoco fueron nunca la mejor elección.

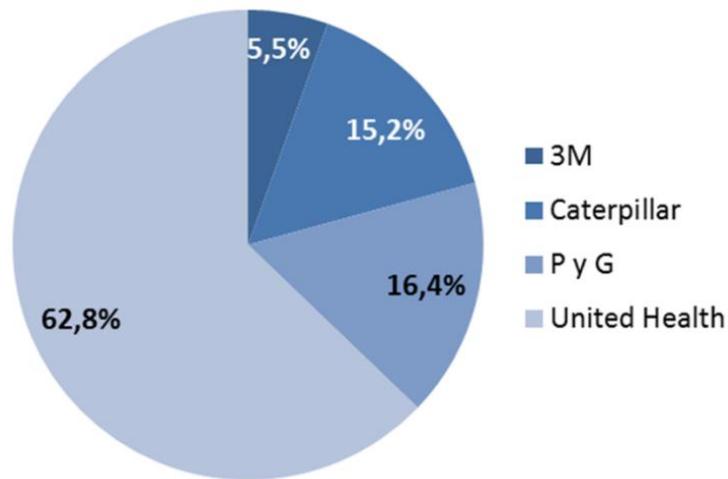
Las estrategias de Simulación Histórica siempre generaron la rentabilidad más alta, aunque en diferentes grados de confianza. Mientras que el modelo de Simulación Histórica con 99% de confianza generó la rentabilidad más alta en el ciclo bajista y en el ciclo estable, en el ciclo alcista, su rentabilidad estuvo incluso por debajo de la estrategia de desviación estándar. Por otra parte, el modelo de Simulación Histórica con 95% de confianza aunque presentó la mejor rentabilidad en el ciclo alcista, en los otros dos ciclos registró rentabilidades iguales o menores a las presentadas en la estrategia de Desviación Estándar.

En las estrategias de Simulación de Montecarlo se evidencia una similitud en las elecciones entre niveles de confianza y con los modelos de Simulación Histórica. Sin embargo se destaca que el modelo de Simulación de Montecarlo, con 99% de confianza, registró una rentabilidad superior que la estrategia de Desviación Estándar en cada una de las etapas del ciclo de mercado y de hecho, en el ciclo bajista y estable presentó la mejor rentabilidad.

A pesar que Artzner et al.(1998) consideran que el VaR no cumple las condiciones para ser una medida de riesgo coherente debido a problemas de inestabilidad numérica, especialmente para distribuciones de colas pesadas y también que no tiene en cuenta la magnitud de las pérdidas que los superan. Los resultados presentados dan muestra que el VaR puede ser una pieza fundamental al momento de tomar una decisión de inversión, mejorando los resultados obtenidos por las estrategias tradicionales.

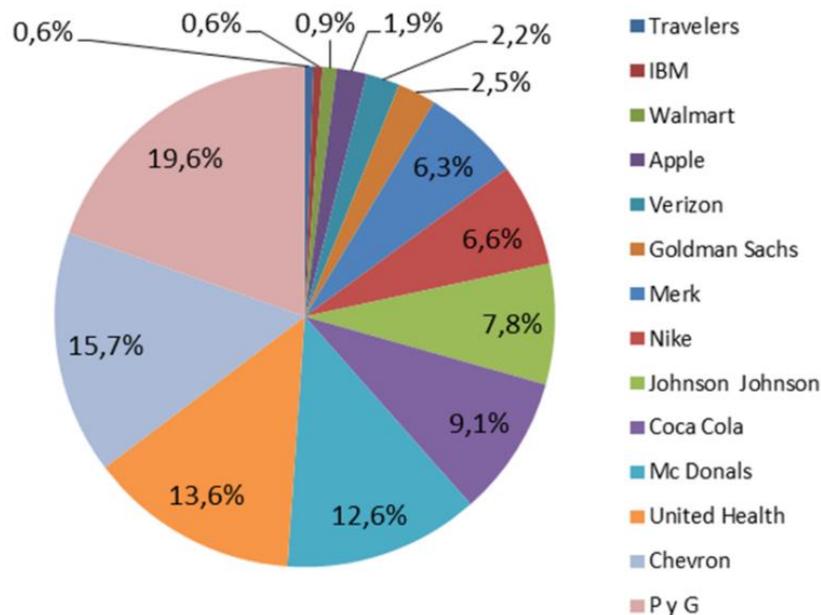
En este sentido, si bien se considera apropiado no hacer la optimización de portafolios con el VaR, teniendo en cuenta que no es una medida de riesgo convexa según Föllmer & Schied (2004), se difiere de Puerta y Laniado (2010) al indicar que el VaR no sea una medida atractiva como medición del riesgo cuando de selección de portafolios se trata, dado que los resultados empíricos registrados evidencian una mejora significativa en rendimiento cuando se utiliza el VaR como medida de riesgo versus la desviación estándar y otras estrategias tradicionales en el proceso de selección de un portafolio.

Grafica 7. Portafolio Mejor Elección Ciclo Bajista



Fuente: Elaboración Propia

Grafica 8. Portafolio Peor Elección Ciclo Bajista

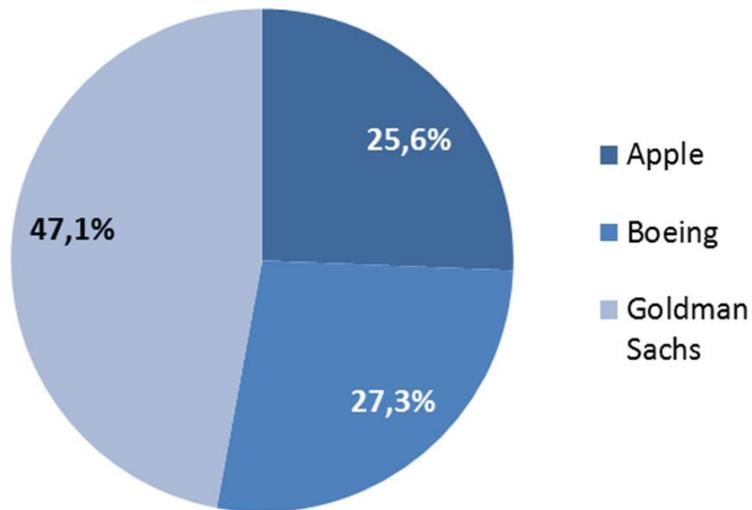


Fuente: Elaboración Propia

En las gráficas 7 y 8 se detalla cómo están conformados los portafolios del ciclo bajista. El portafolio de la Gráfica 7 fue escogido aplicando los modelos de Simulación Histórica y el de Simulación de Montecarlo al 99% de confianza. Este portafolio solamente está compuesto por 4 acciones de diferentes sectores como salud, consumo y construcción.

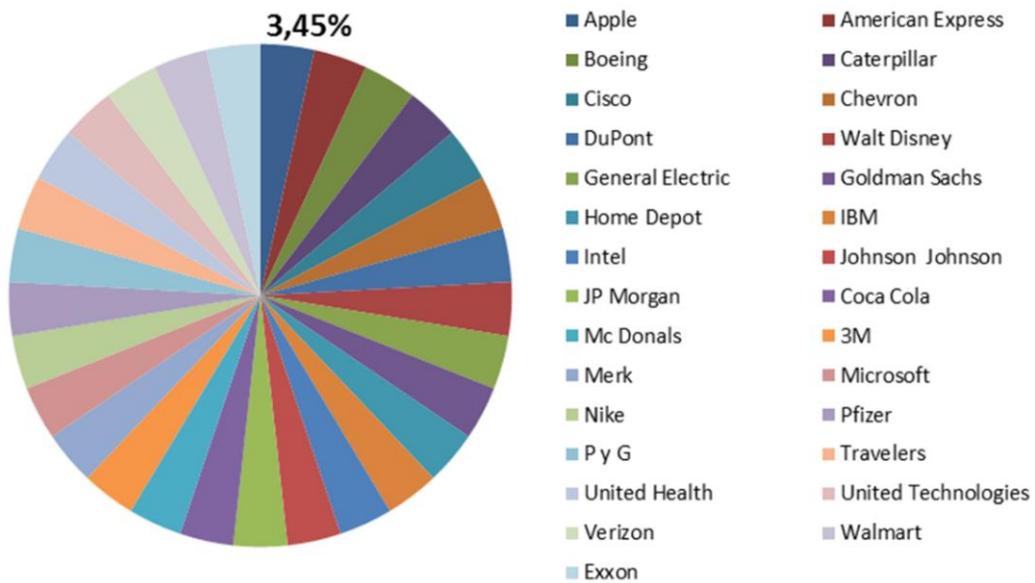
Mientras tanto, el portafolio de la Gráfica 8 fue escogido por la estrategia de mínima varianza, este portafolio está mucho más diversificado (14 acciones) que el de la Gráfica 7, sin embargo, su rendimiento fue el más bajo de todos los elegidos. En este portafolio se destaca que a pesar de ser un portafolio más diversificado, no incluye 2 de las 4 acciones que se incluyen en el portafolio con mejor rendimiento.

Grafica 9. Portafolio Mejor Elección Ciclo Estable



Fuente: Elaboración Propia

Grafica 10. Portafolio Peor Elección Ciclo Estable

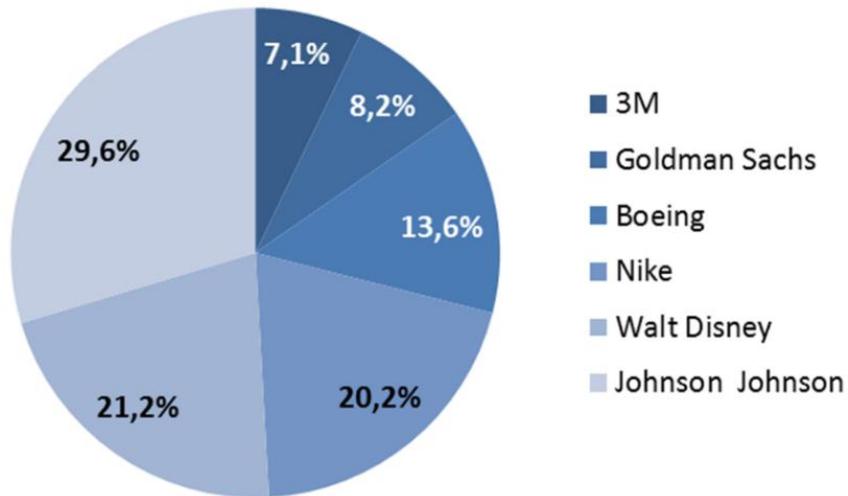


Fuente: Elaboración Propia

En las gráficas 9 y 10 se detalla cómo están conformados los portafolios del ciclo estable. El portafolio de la Gráfica 9 fue escogido por cuatro de los modelos, los 3 de Simulación de Montecarlo y el de Simulación Histórica al 99% de confianza. Este portafolio solamente está compuesto por 3 acciones de diferentes sectores: tecnológico, aeronáutico y financiero.

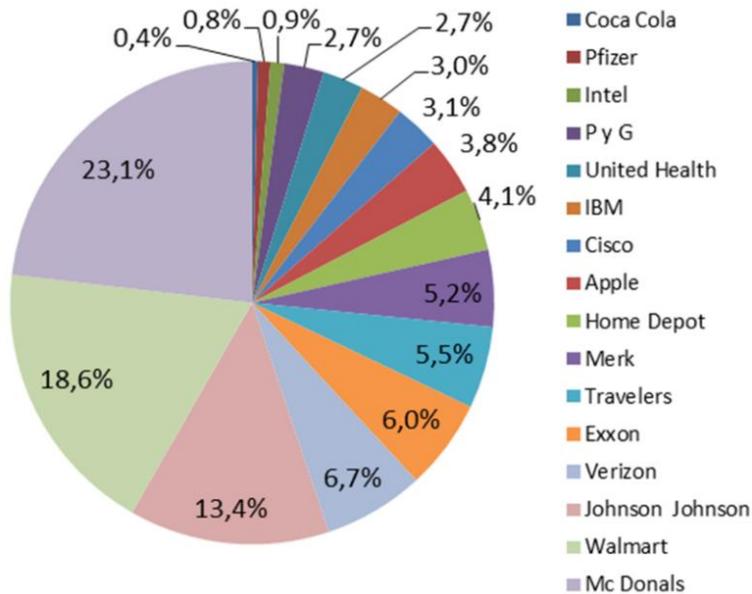
Mientras tanto, el portafolio de la Gráfica 10 fue escogido por la estrategia equiponderada, es decir, que a cada una de las 29 acciones⁴ les corresponde una participación equitativa (3,45%). Este portafolio, pese a estar completamente diversificado, solamente obtuvo un rendimiento del 13,2%, mientras que el portafolio de la Gráfica 9 obtuvo un 37,49% de rendimiento.

Grafica 11. Portafolio Mejor Elección Ciclo Alcista



Fuente: Elaboración Propia

Grafica 12. Portafolio Peor Elección Ciclo Alcista



Fuente: Elaboración Propia

⁴ No se tuvo en cuenta la acción de la empresa Visa dado que debuto en la bolsa de Nueva York solamente hasta 2008. Tampoco se planteó reemplazarla por otra acción dado que el sector de consumo financiero ya se encuentra representado por la acción de American Express.

En las gráficas 11 y 12 se detalla cómo están conformados los portafolios del ciclo alcista. El portafolio de la gráfica 11 fue escogido por el modelo de Simulación Histórica al 95% de confianza. Este portafolio está compuesto por 6 acciones de diferentes sectores como: farmacéutico, entretenimiento, vestuario, aeronáutico y financiero.

Mientras tanto, el portafolio de la Gráfica 12 fue escogido por la estrategia de mínima varianza, al igual que el portafolio de la Gráfica 8. De forma similar a los ciclos bajista y estable, en este caso el portafolio con menor rendimiento es un portafolio mucho más diversificado (16 acciones) que el portafolio con mejor rendimiento. Se destaca que solamente una de las 6 acciones del portafolio con mayor rendimiento se encuentra en el portafolio con menor rendimiento.

Una característica común que se logra percibir en los portafolios con mayor rendimiento, en relación a los de menor rendimiento, es que están menos diversificados en lo que a número de acciones se refiere, los portafolios de menor rendimiento contemplan 14 acciones o más, mientras que los portafolios con mejor rendimiento tienen en promedio 4 acciones.

Sin embargo, esto no quiere decir que los portafolios con mayor retorno no estén correctamente diversificados, ya que estos evidencian una fuerte diversificación sectorial, mientras que si se logra detallar que el hecho de tener un portafolio sumamente diversificado no es sinónimo de tomar una buena decisión.

En cuanto al efecto del ciclo de mercado en la escogencia del portafolio, se puede observar que solo 3 compañías repiten en los portafolios de mejor elección, de aquí se puede deducir la importancia que tiene un rebalanceo periódico en la administración de un portafolio de inversión.

Otro aspecto importante sobre el efecto del ciclo de mercado en la escogencia de portafolio radica en el sector de las compañías con mayor importancia dentro de los portafolios de mejor rendimiento. En el ciclo bajista destaca una compañía del sector salud, en el ciclo estable se destacan los sectores tecnológico y financiero, mientras que, en el ciclo alcista se destacan los sectores de entretenimiento y vestuario.

La salud se podría considerar como un consumo básico, las empresas tecnológicas y financieras generalmente crecen independientemente del ciclo económico, mientras que las empresas de entretenimiento registran mejores rendimientos que otros sectores en un entorno *bullish*.

Los resultados obtenidos hasta el momento muestran mejores retornos en las estrategias que utilizan el VaR como concepto de riesgo en la elección de portafolios de inversión. Sin embargo, Lara (2008) resalta la importancia de testear los modelos y “estresarlos” con el fin de validar sus resultados bajo situaciones poco probables pero que igualmente pueden ocurrir.

Ahora, ¿qué sucede con las elecciones de portafolio previo a un gran declive? La crisis financiera del 2008 fue una de las más grandes de la historia y de hecho es la más grande en lo corrido del siglo XXI. A continuación se mostrará un estudio similar al presentado anteriormente pero enmarcado en un contexto extremo, como lo fue la crisis del 2008.

Tabla 5. Rentabilidad por modelo Crisis 2008

MODELO	RETORNO
Equiponderada	-27.85%
Mínima Varianza	-29.35%
Desviación Estándar	-29.90%
Paramétrico 99%	-29.90%
Paramétrico 95%	-29.90%
Paramétrico 90%	-29.90%
Simulación Histórica 99%	-31.61%
Simulación Histórica 95%	-30.14%
Simulación Histórica 90%	-30.14%
Simulación Montecarlo 99%	-30.02%
Simulación Montecarlo 95%	-29.90%
Simulación Montecarlo 90%	-30.02%

Fuente: Elaboración Propia

Evidentemente los diferentes resultados son negativos, cualquier elección que se haya realizado hubiese traído consigo un retorno negativo. Sin embargo, se destaca el hecho que la estrategia equiponderada sea la elección con menor pérdida, dado que, como se determinó anteriormente, esta era la estrategia menos eficiente.

En este mismo sentido, se observa que las estrategias de simulación histórica son las que presentan pérdidas más elevadas, especialmente la de 99% de confianza. Si se espera que el nivel de riesgo sea el mismo y se tiene un choque de gran magnitud, lo más natural es que esta expectativa se vea duramente afectada, tal como vemos en los modelos de simulación histórica.

Por otra parte, si bien, en esta ocasión la estrategia de desviación estándar registró un resultado más favorable que la estrategia de Simulación de Montecarlo al 99% de confianza, a diferencia de los estudios anteriores. Es importante mencionar que esta diferencia solamente fue de 12 puntos básicos (0,12%) mientras que en los estudios anteriores la diferencia más pequeña fue de 85 puntos básicos (0,85%) y en promedio, la estrategia de Simulación de Montecarlo al 99% de confianza estuvo un 2,21% mejor que la alternativa de desviación estándar.

No solamente es importante la elección de una estrategia de inversión, también es importante dimensionarla con la rentabilidad del mercado. Esta rentabilidad se puede asociar a un índice, para los casos evaluados, la rentabilidad alcanzada por las estrategias que utilizan VaR siempre fue superior a la rentabilidad tanto del S&P 500 como del Dow Jones, inclusive durante el caso evaluado durante la crisis del 2008.

Luego de evidenciar que bajo un contexto extremo, la idea de elegir el VaR como factor de riesgo sobre la desviación estándar para la elección de un portafolio no arroja resultados significativamente diferentes, es apropiado también revisar qué implicaciones tendrán estas elecciones si se evalúan bajo un mercado menos desarrollado como el colombiano.

Tabla 6. Rentabilidad por modelo Mercado Colombiano

MODELO	RETORNO
Equiponderada	-28.29%
Mínima Varianza	-19.89%
Desviación Estándar	-16.91%
Paramétrico 99%	-17.01%
Paramétrico 95%	-17.01%
Paramétrico 90%	-17.01%
Simulación Histórica 99%	-17.02%
Simulación Histórica 95%	-17.52%
Simulación Histórica 90%	-17.01%
Simulación Montecarlo 99%	-16.81%
Simulación Montecarlo 95%	-16.91%
Simulación Montecarlo 90%	-16.91%

Fuente: Elaboración Propia

Recientemente el mercado colombiano ha presentado una evidente tendencia a la baja, en donde su principal índice, el COLCAP, ha registrado continuos descensos en los últimos años. Los resultados que se observan en la Tabla 6 son una evidencia más del difícil momento que presenta el mercado de acciones, en donde cualquier elección habría generado una pérdida de forma similar a la Tabla 5, pero sin presentar niveles tan elevados.

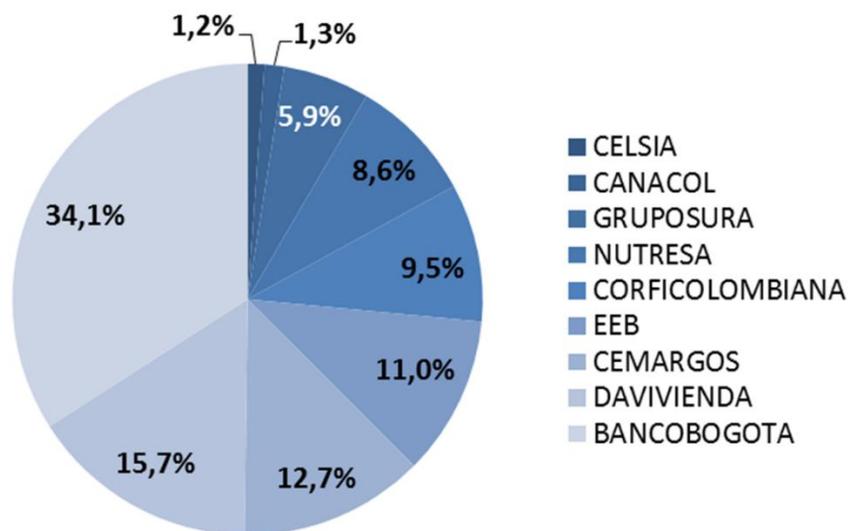
Ahora, en cuanto a las estrategias tradicionales, se observa que la estrategia de mínima varianza y la estrategia equiponderada fueron las que presentaron los resultados más negativos, siendo esta última la estrategia con peor desempeño con un retorno de -28,29%.

Las estrategias que utilizan el VaR paramétrico como las de simulación histórica tuvieron resultados entre -17% y -17,5%. Si bien no son los mejores resultados, si presentan mejores resultados que las estrategias tradicionales de mínima varianza y equiponderada.

En cuanto a la estrategia que utiliza el VaR con Simulación de Montecarlo al 99%, previamente, en el modelo inicial (Tabla 3), había evidenciado presentar mejores resultados que la estrategia que utiliza la desviación estándar como concepto de riesgo al momento de elegir una cartera sobre otra. En este caso, los resultados concuerdan con lo visto en el mercado americano.

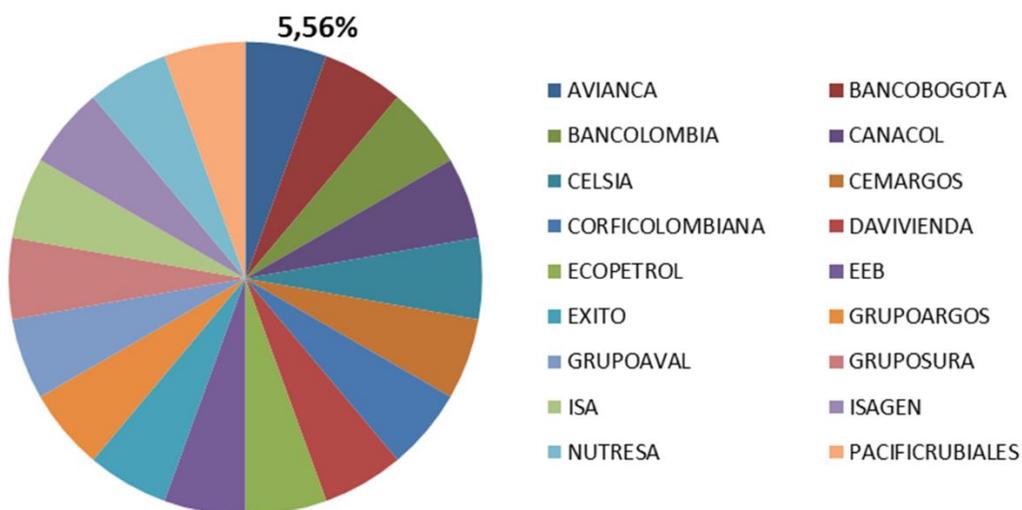
Sin embargo, es importante mencionar que la diferencia entre estas dos estrategias es de solamente 10 puntos básicos, y tal como se mencionó anteriormente, cuando se evaluaron las estrategias a la luz de la crisis del 2008, esta no parece ser una diferencia significativa teniendo en cuenta que en los estudios iniciales la estrategia de Simulación de Montecarlo, con una confianza del 99% registro una mejora de más del 2% en promedio respecto a la estrategia de desviación estándar.

Grafica 13. Portafolio Mejor Elección Mercado Colombiano



Fuente: Elaboración Propia

Grafica 14. Portafolio Peor Elección Mercado Colombiano



Fuente: Elaboración Propia

En las gráficas 13 y 14 se detalla cómo están conformados los portafolios del mercado colombiano. El portafolio de la Gráfica 13 fue escogido aplicando el modelo de Simulación de Montecarlo al 99% de confianza. Este portafolio solamente está compuesto por 9 acciones de diferentes sectores como financiero, servicios, alimentos y energía.

Mientras tanto, el portafolio de la Gráfica 14 fue escogido por la estrategia equiponderada, es decir, que a cada una de las 18 acciones⁵ les corresponde una participación equitativa

⁵ No se tuvieron en cuenta las acciones de las empresas Cemex y Terpel dado que debutaron en la bolsa de valores hace menos de 3 años, por tanto, no cuentan con suficientes datos. Tampoco se planteó

(5,56%). Este portafolio pese a estar completamente diversificado, obtuvo un rendimiento de -28,29%, mientras que el portafolio de la gráfica 13 obtuvo un -16,89% de rendimiento.

Cabe resaltar que en el estudio realizado en el mercado americano, los portafolios con mayor rentabilidad estaban bastante diversificados en términos de sectores, pero su distribución estaba en unas pocas acciones.

Por otra parte, se observa en el portafolio de la Gráfica 13 que tiene casi el 60% en el sector financiero (Banco de Bogotá, Davivienda y Corficolombiana) y aparte está distribuido en 9 acciones, es decir, en la mitad de todas las que se tenían disponibles.

5 Conclusiones

Luego de la crisis financiera del 2008, causada en parte por la falta de regulación y el exceso de confianza por parte de algunos inversionistas, la necesidad de generar herramientas que permitan tomar decisiones con base en los riesgos que se están asumiendo es cada vez más relevante. Actualmente, existen diversas estrategias para hacer la elección de una cartera sobre otra. Estas elecciones se toman básicamente teniendo en cuenta una relación entre riesgo y rentabilidad. Sin embargo, el concepto que se tiene de riesgo pareciera no ser el indicado.

A la luz de lo indicado anteriormente, se plantea que este tipo de elecciones podrían ser más beneficiosas para el inversionista si cambia el parámetro que tiene establecido como “riesgo”, que generalmente es la desviación estándar por un parámetro que a pesar de tener algunas falencias, fue creado precisamente para medir el riesgo como lo es el *Value at Risk* (VaR).

A este respecto, luego de hacer un estudio en un mercado desarrollado como el mercado americano y validar sus resultados en un mercado menos desarrollado como el colombiano, se llega a las siguientes conclusiones específicas:

- La diversificación de un portafolio sigue siendo una herramienta fundamental para el adecuado manejo de una inversión. Sin embargo, esta diversificación debe hacerse bajo una estrategia de optimización en lugar de una estrategia equiponderada.
- El rebalanceo de una cartera es un aspecto que no se debe descuidar. A medida que el ciclo de mercado va avanzando, las empresas que componen la mejor elección de un portafolio van cambiando por otras, siendo necesario ir modificando periódicamente el portafolio de inversión.
- El VaR, que en principio fue creado para hacer un seguimiento y alertar sobre los niveles de riesgo para una cartera ya creada, también puede resultar muy útil como herramienta al momento de escoger un portafolio de inversiones.
- A pesar de arrojar resultados similares, las pequeñas variaciones en los resultados del VaR en los diferentes modelos (Paramétrico, Simulación Histórica, Simulación de Montecarlo), pueden generar diferentes decisiones de inversión.

reemplazarla por otra acción, dado que estos sectores ya están representados con acciones de otras empresas como Cemargos y Ecopetrol.

- Bajo situaciones normales, en un mercado desarrollado, elegir una cartera sobre otra tendrá mayores beneficios si se realiza teniendo en cuenta como concepto de riesgo el VaR con una confianza del 99% bajo un modelo de Simulación de Montecarlo en lugar de la desviación estándar.
- En situaciones extremas, como la de una crisis o en mercados menos desarrollados, no existe una clara ventaja entre la desviación estándar y el VaR con una confianza del 99% bajo un modelo de Simulación de Montecarlo como concepto de riesgo al momento de elegir un portafolio.
- Finalmente y teniendo en cuenta las últimas dos conclusiones, es claro que el modelo que utiliza el VaR con una confianza del 99% bajo un modelo de Simulación de Montecarlo como concepto de riesgo, en ningún momento se encuentra en desventaja significativa frente al modelo que utiliza la desviación estándar como concepto de riesgo al momento de elegir un portafolio de inversiones. Por el contrario, bajo un entorno de un mercado desarrollado, este modelo evidencia una superioridad en términos de rendimiento. Lo anterior evidencia que este modelo es más adecuado que el que utiliza a la desviación estándar como concepto de riesgo, resultados que contrastan la afirmación de Puerta y Laniado (2010) quienes indican que el VaR no es una medida atractiva como medición del riesgo cuando de selección de portafolios se trata.

Referencias

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., & Heath, D. (1998). Coherent Measures of Risk. *Working Paper*. 1-124
- Banda, H., & Gomez, D. (2009). Evaluación de un portafolio de inversión institucional: el caso de los fondos de pensiones en México. *Innovaciones de Negocios*. 6(2): 303-323.
- Bodie, Z., Kane, A. & Marcus, A. (2004). *Principios de Inversiones*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Bouchaud, J., and Potters M. (2003). *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing – From Statistical Physics to Risk Management*. Segunda Edición. Cambridge: Academic Press.
- Christoffersen, P. (2003). *Elements of financial risk management*. Cambridge: Academic Press.
- DeMiguel, V., Garrlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy. *The Review of Financial Studies*. (22): 1915-1953.
- DeMiguel, V., Garrlappi, L., Nogales, F., & Uppal, R. (2009a). A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*. (22). 798-812.
- Diz, E. (2015). *Teoría de Riesgo*. Cuarta Edición. Bogotá: ECOE Editores.
- Dumontaux, N., & Pop, A. (2013). Understanding the market reaction to shockwaves: Evidence from the failure of Lehman Brothers. *Journal of Financial Stability*. (9). 269-286.

- Fama, E. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business* (38): 34-105.
- Föllmer, H., & Shied, A. (2004). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Berlin: Walter de Gruyter.
- Glasserman, P., Heidelberger, P., & Shahabuddin P. (2000). Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk, *Computer Science/Mathematics*. RC 21723 (97823). Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.38.3162&rep=rep1&type=pdf>. Consultado el 12 de septiembre de 2015.
- Guerrero, G. (2008). *Evaluación del Desempeño de Modelos VaR usando la Teoría de Valores Extremos En Mercados Emergentes y Desarrollados*. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de: <http://www.fce.unal.edu.co/docs/comunicaciones/riesgovaloresextremosguerrero2009.pdf>. Consultado el 29 de septiembre de 2015.
- Jorion P. (2002). *El nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados: Valor en Riesgo*. México: Limusa Noriega Editores.
- Lara, A. (2008). *Medición y Control de riesgos Financieros*. Tercera edición, Mexico: Limusa-Wiley.
- Mainik, G., Mitov, G., & Rüschenhoff L. (2015). Portfolio optimization for heavy-tailed assets: Extreme Risk index vs. Markowitz. *Journal of Empirical Finance*. (32). 115-134.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*. 7(1): 77-91.
- Puerta, A. & Laniado H. (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, un análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía*. (73). 243-273.
- Rodríguez, R., (2015). *Gestión de Riesgo de Mercado*. (Apuntes de clase).
- Sharpe, W. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*. Recuperado en: <http://web.stanford.edu/~wfsarpe/art/sr/sr.htm>. Consultado 12 de Septiembre de 2015.
- Wu, H., Zeng, Y., & Yao, H. (2014). Multi-period Markowitz's mean-variance portfolio selection with state-dependent exit probability. *Economic Modelling*. (36): 69-78.