La matriz k-exponencial y soluciones de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales

Jorge Bernardo Ramirez Zarta
Yefrén Hernández Cuenca

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Noviembre 2014

La matriz k-exponencial y soluciones de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Jorge Bernardo Ramirez Zarta
Yefrén Hernández Cuenca

Asesores

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa
Doctor en Ciencias Matemáticas

Telvia Rosa Castilla Peñate
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Medellín

Noviembre 2014

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

Dedicatoria

Con todo nuestro afecto y cariño, a nuestras familias, Padres, hijos y allegados, quienes con su aliento y comprensión, lograron fortalecernos en este arduo camino.

Agradecimientos

A nuestros asesores Telvia Rosa Castilla Peñate y Gabriel Ignacio Loaiza Ossa, quienes dedicaron su tiempo y empeño para guiar el camino en busca de obtener los resultados presentados en esta tesis; a nuestros docentes amigos que insidieron en el fortalecimiento del presente documento; demostrando con ello, no solo sus competencias académicas, sino también el verdadero valor de la docencia y la amistad.

Resumen

En el presente trabajo se definen las matrices k-exponencial y k-logarítmica, usando la representación en series de potencias que incorporan el parámetro real de deformación k definido por G. Kaniadakis para explicar fenómenos de la Mecánica Estadística en el contexto de la relatividad especial, de tal forma que cuando el parámetro k tiende a cero, las matrices k-exponencial y k-logarítmica (con sus respectivas propiedades) se reducen a las de la matrices exponencial y logarítmica naturales, donde dichas matrices se relacionan como funciones matriciales inversas para matrices diagonalizables. También se incursiona en sistemas (algunos de ellos acoplados) de ecuaciones diferenciales que pueden ser descritas en términos de k-derivadas en lugar de derivadas ordinarias (a las que se llamarán ecuaciones k-diferenciales), donde las matrices k-exponencial o k-logarítmica hacen parte de soluciones de dichos sistemas. Para ello se presentan técnicas para resolver Ecuaciones k-diferenciales separables y lineales con coeficientes constantes.

Índice general

Introducción

Así como los formalismos de la mecánica estadística clásica se han extendido a los dados por las deformaciones propuestas por C. Tsallis [4] y G. Kaniadakis [?, ?], muchos conceptos y desarrollos matemáticos también se han extendido a las q-deformaciones y K-deformaciones propuestas por ambos autores, respectivamente. Como antecedente de este trabajo, se tienen los desarrollos de [21], donde se extiende la teoría sobre la función exponencial natural de una matriz cuadrada y su aplicación sobre sistemas de ecuaciones diferenciales, a la función q-exponencial considerando la q-deformacion según Tsallis.

Teniendo como base la funcional de entropía, propuesta por G. Kaniadakis [10], con un parámetro real k, $-1 < k < 1$, en [?, ?, 7] se pueden ver las reformulaciones de las funciones logarítmica y exponencial (llamadas k-logarítmo y k-exponencial respectivamente), las cuales retoman sus propiedades usuales cuando k tiende a cero; cuya finalidad fue de generar distribuciones de probabilidad generalizadas que dependierán de un parámetro de deformación k, con el objeto de responder a necesidades enmarcadas en el estudio de sistemas anómalos generados dentro de la mecánica estadística, bajo el principio de máxima entropía de Jaynes, y en el cual la distribución de probabilidad con menos sesgo para un sistema estadístico, es aquella que maximiza el funcional de entropía sujeta a ciertos parámetros, que con lleve a minimizar la desinformación. Este principio dio lugar a estructuras matemáticas motivadas por el estudio de la física estadística [7].

El problema tratado en el presente trabajo consiste en definir las funciones k-exponencial y k-logarítmica de una matriz cuadrada, usando representación en series de potencias, de tal forma que cuando el parámetro k tiende a cero, las matrices k-exponencial y k-logarítmica (con sus respectivas propiedades) se reducen a las de la matrices exponencial y logarítmica usual, buscando que dichas funciones se relacionen como funciones matriciales inversas y de manera que se pueda incursionar en el estudio de problemas sistemas (acoplados o no) de ecuaciones diferenciales que puedan ser descritas en términos de k-derivadas en lugar de derivadas ordinarias (a dichas ecuaciones diferenciales se les llamará ecuaciones k-diferenciales).

La memoria de tesis está dividida en tres capítulos; los dos primeros presentan material necesario tomados de la repectivas referencias indicadas y el último presenta la contribución propia del presente trabajo. Concretamente, en el primer capítulo aparece una introducción sobre normas y convergencia matricial, cuyo uso ha permitido realizar el estudio de convergencia de sucesiones de vectores y a su vez de matrices. Además permite revisar las series de potencias de una matriz y su criterio de convergencia que se establece en función de la norma. En el segundo capítulo se citan resultados sobre la matriz exponencial dando uso al concepto de series de matrices convergentes. En ambos capítulos se presentan algunas pruebas con el ánimo de contextualizar mejor el tema de trabajo. El tercer capítulo, está dividido en tres secciones. En la primera sección se describen formalismos propios de la teoría de Kaniadakis. La segunda y tercera secciones presentan las definiciones de las funciones k-exponencial y k-logarítmo de una matriz cuadrada así como sus respectivas propiedades en términos de series, límites, derivadas e integrales. En la cuarta sección se consideran algunas técnicas que permitan la solución de algunas ecuaciones k-diferenciales para que en la quinta y última sección se aborden algunos sistemas de ecuaciones k-diferenciales cuya solución involucre a la función matricial k-exponencial o k-logarítmica.

Con lo anterior, se responde a los siguientes objetivos.

Objetivo general

Definir la matriz k-exponencial y k-logarítmica de una matriz cuadrada, para establecer bajo que condiciones, dichas funciones permiten establecer soluciones de ecuaciones k-diferenciales matriciales, es decir, de ecuaciones diferenciales matriciales que puedan ser escritas mediante la k-derivada en lugar de la derivada usual.

Objetivos específicos

- Definir el concepto de matriz k-exponencial y matriz k-logarítmica de una matriz cuadrada a partir de las representaciones en series de potencias.
- Presentar un estudio de propiedades de las funciones matriciales k-exponencial y k-logarítmica.
- Desarrollar algunas técnicas de solución para ecuaciones $k-$diferenciales y ecuaciones k-diferenciales matriciales.

Capítulo 1

Norma y Convergencia Matricial

En este capitulo se presenta lo referente a las normas matriciales y las series de matrices. Es de gran importancia el concepto de norma matricial en el estudio de las series de matrices, dado que un criterio de convergencia de una serie de matrices se establece en función de la norma de una matriz.

1.1. Normas Matriciales

Definición 1.1 (Norma Matricial)**.** Una función $\|\cdot\| : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ es llamada una norma matricial si para todo $A, B \in M_{n\times n}$, se satisfacen las siguientes condiciones

N_1. $\|A\| \geq 0$

N_2. $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

N_3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$

N_4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

N_5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Definición 1.2 (Normas Equivalentes)**.** Sean $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ dos normas en $M_{n\times n}$, se dice que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes, si para cualquier matriz $A \in M_{n\times n}$ existen constantes a, b tales que

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0 \leq b\|A\|_* \tag{1.1}$$

Lema 1.3. *Si* $\|\cdot\|$ *es una norma matricial y* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *es una base para* $M_{n\times n}$, *entonces dado un conjunto de escalares no todos nulos* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, *existe una constante positiva* C *talque*

$$\|\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n\| > C \tag{1.2}$$

Teorema 1.4. *Todas las normas en* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *son equivalentes.*

Demostración. Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una base para $M_{n\times n}$ y $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_0$ normas matriciales cualesquiera en $M_{n\times n}$.
Ahora si $A \in M_{n\times n}$, es no nula (para $A = 0$, el resultado es inmediato), existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n$. Sea $\lambda = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$ y tomemos $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\lambda}$. Luego por el lema 1.3 existe una constante positiva k tal que $\|\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n\|_* = \dfrac{1}{\lambda}\|\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n\|_* > k$, de donde se sigue que $\|A\|_* > k\lambda = k\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$, esto es:

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| < c\|A\|_* \qquad \text{donde} \quad c = \frac{1}{k} \tag{1.3}$$

Además $\|A\|_0 = \|\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n\|_0$. Sea $m = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{\|A_1\|_0, \|A_2\|_0, \ldots, \|A_n\|_0\}$.

Así que

$$\begin{aligned}
\|A\|_0 &\leq |\alpha_1|\|A_1\|_0 + |\alpha_2|\|A_2\|_0 + \ldots + |\alpha_n|\|A_n\|_0 \\
&\leq |\alpha_1|m + |\alpha_2|m + \ldots + |\alpha_n|m \\
&= m\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|\right) = m\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|
\end{aligned}$$

es decir

$$\|A\|_0 \leq m\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \tag{1.4}$$

De (1.3) y (1.4) se sigue que

$$\|A\|_0 \leq b\|A\|_* \qquad \text{donde} \quad b = cm.$$

De igual forma se prueba que existe una constante positiva a talque:

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0$$

Finalmente se tiene que

$$a\|A\|_* \leq \|A\|_0 \leq b\|A\|_*$$

por lo tanto $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes. Al ser $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_0$ arbitrarias, entonces el resultado se generaliza para dos normas cualesquiera, y por lo tanto todas las normas en $M_{n\times n}$ son equivalentes. □

Definición 1.5 (Norma de una Matriz)**.** Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ de números reales o complejos, la norma de A, designada por $\|A\|$, se define como el número no negativo dado por la expresión

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{1.5}$$

Las demostraciones de las propiedades de la norma se pueden verificar en [21].

Observación 1.6. En el caso especial $B = A$ la desigualdad N_5 para $\|AB\|$, se convierte en $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Por inducción tenemos que

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Estas desigualdades serán de uso frecuente en la exponencial de una matriz.

1.2. Normas Matriciales Inducidas por una Norma Vectorial

En esta sección se mostrará el proceso de construcción de una norma matricial sobre $M_{n\times n}$ compatible a una norma vectorial dada sobre $\mathbb{C}^n$.

Definición 1.7 (Norma Vectorial)**.** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma vectorial en V es una función $\|\cdot\|$ definida de V al conjunto de los números reales no negativos tal que satisface las siguientes propiedades:

1). $\|x\| \geq 0, \qquad$ para todo $x \in V$

2). $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

3). $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in V$

4). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad x, y \in V$

La norma de un vector x se puede considerar como la longitud o magnitud del vector x. Las siguientes son algunas de las normas de uso más frecuente en $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 1.8. Dado un real $p1$, la norma p se define por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{1.7}$$

Para tal norma, la desigualdad triangular es la conocida **desigualdad de Minkowski** [17], la cual establece que para $p \geqslant 1$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

Ejemplo 1.9. La norma Suma (o norma 1) definida por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.10. La norma máxima (o norma ∞) o norma de Chebyschev, definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{1.10}$$

Se puede probar que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p \tag{1.11}$$

Observación 1.11. Note que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ satisfacen la siguiente relación

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{1.12}$$

Definición 1.12 (Normas Equivalentes)**.** Dos normas N_1 y N_2 sobre $\mathbb{C}^n$ se dicen equivalentes se existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\forall\ x \in \mathbb{C}^n : \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_2(x) \tag{1.13}$$

En general, dos normas cualesquiera en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes [2].

Ejemplo 1.13. Sea $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, calculemos $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ y $\|x\|_\infty$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right)^{1/2} = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2\right)^{1/2} \\
\|x\|_2 &= (1+4+25)^{1/2} = \sqrt{30} \\
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1+2+5 = 8 \\
\|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq 3} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \max\{1,2,5\} = 5
\end{aligned}$$

Definición 1.14 (Norma Matricial Inducida (subordinada) por una Norma Vectorial)**.** Sea $\|\cdot\|$, sobre $\mathbb{C}^n$ una norma vectorial y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, su norma matricial subordinada viene dada por

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \qquad x \in \mathbb{C}^n \tag{1.14}$$

Esta también se conoce como la norma matricial asociada con la norma vectorial dada.

Teorema 1.15. *Si* $\|\cdot\|$ *es cualquier norma sobre* $\mathbb{C}^n$, *entonces la ecuación* (1.14) *define una norma matricial sobre el espacio lineal de todas las matrices* $n \times n$.

La prueba de este teorema se verifica en [21].

Notese que (1.14) define una norma sobre $\mathbb{C}^n$ y se tiene que

$$\|\mathcal{I}_n\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathcal{I}_n x\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

así que para toda norma matricial subordinada se tiene que

$$\|\mathcal{I}_n\| = 1$$

y además

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n$$

En general si $\|\cdot\|$ es una norma matricial cualquiera sobre $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se cumple que:

$$\|\mathcal{I}_n\| \geq 1 \tag{1.15}$$

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}, \qquad \text{para } A \text{ invertible} \tag{1.16}$$

Estos resultados se pueden verificar de la siguiente manera.

En efecto

$$\|\mathcal{I}_n\| = \|\mathcal{I}_n \cdot \mathcal{I}n\| \leq \|\mathcal{I}_n\|\|\mathcal{I}_n\| \Rightarrow \|\mathcal{I}_n\| \leq \|\mathcal{I}_n\|\|\mathcal{I}_n\| \Rightarrow \|\mathcal{I}_n\| \geq 1$$

dado que $\mathcal{I}_n \neq 0, \quad \|\mathcal{I}_n\| > 0.$

Luego: para A invertible,

$$1 \leq \|\mathcal{I}_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

esto es $\|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$, de donde $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$

Ejemplo 1.16. Sea $\|\cdot\|_1$ la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_1$.

Por definición 1.14,

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_1, \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \ x \in \mathbb{C}^n$$

Mostremos que si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.17}$$

En efecto: si $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \\ &\le \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right) = \|x\|_1\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\end{aligned}$$

esto es $\|Ax\|_1 \le \|x\|_1 \left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$, de donde

$$\|Ax\|_1 \le \left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right), \quad \text{con } \|x\|_1 = 1$$

Así que:

$$\|A\|_1 \le \left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right) \tag{1.18}$$

Supongamos ahora que el $\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ ocurre para $i = k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, esto es

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$$

y tomemos $x = e_k = [0\ldots1\ldots0]^T$, entonces $\|x\|_1 = 1$.

Luego $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

Esto último indica que

$$\|A\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.19}$$

Así de (1.18) y (1.19) se sigue que

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Esta norma $\|\cdot\|_1$ también es llamada norma máxima suma de las columnas o simplemente norma columna.

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\leq j\leq 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\left\{ \sum_{i=1}^{3} |a_{i1}|,\ \sum_{i=1}^{3} |a_{i2}|,\ \sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| \right\} \\ &= \max\{|a_{11}|+|a_{21}|+|a_{31}|, |a_{12}|+|a_{22}|+|a_{32}|, |a_{13}|+|a_{23}|+|a_{33}|\} \\ &= \max\{|1|+|5|+|-3|, |-1|+|4|+|2|, |-2|+|-3|+|6|\} \\ &= \max\{9, 7, 11\} = 11 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17. Sea $\|\cdot\|_\infty$ la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$. Por definición 1.14,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty, \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \ x \in \mathbb{C}^n$$

Mostremos que si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.20}$$

En efecto, si $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left[|a_{ij}| \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \right] \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty \end{aligned}$$

esto es $\|Ax\|_\infty \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$ de donde

$$\|Ax\|_\infty \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right), \quad \text{con } \|x\|_\infty = 1$$

Así que:

$$\|A\|_\infty \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \tag{1.21}$$

Veamos ahora que

$$\left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq \|A\|_\infty \tag{1.22}$$

En efecto, note que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe el vector $x^i = \left[x_1^i \ldots x_j^i \ldots x_n^i\right]^T \in \mathbb{C}^n$, donde

$$x_j^i = \begin{cases} \frac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}, & a_{ij} \neq 0 \\ \\ 1 & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

tal que $\|x^i\|_\infty = 1$ y $a_{ij}x_j^i = |a_{ij}|$.

Luego

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geq \|Ax^i\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^i \right| \\ &= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \end{aligned}$$

es decir $\max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|_\infty$.

Verificando (1.22).

Por lo tanto de (1.21) y (1.22) se sigue

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Esta norma $\|\cdot\|_\infty$ también es llamada norma máxima suma de las filas o simplemente norma fila.

A diferencia de las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, para la norma $\|\cdot\|_2$ no se dispone de una fórmula como (1.17) o (1.20) que exprese de manera sencilla $\|A\|_2$ en términos de las componentes de la matriz A. Para $\|\cdot\|_2$ se tiene que $\|A\|_2$ es el máximo de los valores propios $A^H A$ [17], es decir, $\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda}/\lambda \text{ es un valor propio de } A^H A\right\}$, la norma matricial $\|\cdot\|_2$ se conoce como norma espectral.

Definición 1.18 (Número de Condición de una Matriz)**.** Para una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertible, el número de condición de A notado $K(A)$, se define por

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \tag{1.23}$$

Su valor depende de la norma seleccionada y tiene sus aplicaciones en análisis numérico [14].

1.3. Series de Matrices

En esta sección introducimos el concepto de las series de matrices. Para hablar de convergencia de sucesiones y de matrices es importante el uso de normas.
Para definir en forma precisa series de potencias de matrices es necesario el estudio de normas de matrices.

Definición 1.19. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^n$ y $\|\cdot\|$ una norma vectorial en $\mathbb{C}^n$.
Se dice que $\{x_k\}$ converge al límite x (lo cual notamos $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$ o $x_k \to x$ cuando $k \to +\infty$), si

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists m \in \mathbb{N})\,(k \geq m \Longrightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon) \tag{1.24}$$

Se satisfacen las siguientes equivalencias

i). $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0$

ii).

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists m \in \mathbb{N})\,(k \geq m \Rightarrow \|x_k - x\| = 0) \tag{1.25}$$

iii). Si $x_k = [x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}]^T, \quad x = [x_1, \ldots, x_n]^T,$

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} x_{k,j} = x_j. \tag{1.26}$$

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

La equivalencia dada por (1.26) nos dice que la noción de convergencia definida por (1.25) corresponde a la idea natural de convergencia "*componente a componente*".

Definición 1.20. Sea $\{A_k\}$, $A_k = \left[a_{ij}^k\right]$, una sucesión de matrices en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y sea $A = [a_{ij}]$ en $M_{n\times n}(F)$.

Decimos que $\{A_k\}$ converge al límite A y lo notamos $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$

También $A_k \longrightarrow A$ cuando $k \longrightarrow +\infty$, si

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^k = a_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.27}$$

Se cumple que para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $M_{n\times n}(F)$,

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = A, \Longleftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{1.28}$$

Definición 1.21 (Serie Convergente de Matrices)**.** Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de matrices con elementos en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Con esta sucesión se forma la sucesión de las sumas parciales

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} A_j, \quad k \geq 1 \tag{1.29}$$

la serie de matrices $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ converge si la sucesión de sumas parciales converge.

Teorema 1.22. *Sea* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*. Si existe una norma matricial (*$\|\cdot\|$ *tal que* $\|A\| < 1$*, entonces* A *es convergente)*

El teorema que sigue nos da una útil condición suficiente para la convergencia de una serie de matrices.

Teorema 1.23 (Criterio de Convergencia para Series de Matrices)**.** *Si* $\{A_k\}$ *es una serie de matrices* $m \times n$ *tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|_*$ *converge para alguna norma matricial* $\|\cdot\|_*$*, entonces la serie matricial* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ *también converge.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|_*$ una norma matricial tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|_*$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ también converge para la norma dada por (1.14) dado que todas las normas en $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ son equivalentes.

Ahora, designemos el elemento ij de A_k por a_{ij}^k. Dado que $|a_{ij}^k| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^k| = \|A_k\|$, y como $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ converge, entonces por criterio de comparación directa cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^k$ converge, por lo que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ es convergente. □

En particular, para matrices cuadradas A_k las serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A^k\|$ es convergente si lo es la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A\|^k$.

En efecto, designemos el elemento ij de A^k por a_{ij}^k, así el elemento ij de c_kA^k es $c_k a_{ij}^k$.

Luego

$$|c_k a_{ij}^k| = |c_k||a_{ij}^k| \leq |c_k| \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^k| = |c_k|\|A^k\| \leq |c_k|\|A\|^k$$

esto es $|c_k a_{ij}^k| \leq |c_k|\|A\|^k$.

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \|A\|^k$ es convergente, entonces cada una de las series $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{ij}^k$ converge absolutamente y por lo tanto cada una de ellas es convergente, lo cual prueba que la serie de matrices $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ también converge.

De lo anterior se sigue que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ es convergente si la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ es convergente.

Teorema 1.24 (Series de Neumann). *Si* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *y* $\|A\| < 1$ *para alguna norma matricial, entonces* $\mathcal{I}_n - A$ *es invertible y*

$$(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{1.30}$$

Además $\|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$

Demostración. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial tal que $\|A\| < 1$. Como $\|A\| < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ es convergente y en consecuencia $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ también converge.

Sea $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, luego

$$(\mathcal{I}_n - A)S_k = (\mathcal{I}_n - A)\sum_{j=0}^{k} A^j = (\mathcal{I}_n - A)\left(\mathcal{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^k\right) = \mathcal{I}_n - A^{k+1}$$

Esto es $(\mathcal{I}_n - A)S_k = \mathcal{I}_n - A^{k+1}$, luego

$$\lim_{k\to+\infty} (\mathcal{I}_n - A)S_k = \lim_{k\to+\infty} (I_n - A^{k+1}) \tag{1.31}$$

Ahora como $\|A\| < 1$, entonces por el teorema 1.22 A es convergente, es decir, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} A^{k+1} = 0$ así de (1.31) se sigue que $(\mathcal{I}_n - A)B = \mathcal{I}_n$, esto último implica que $\mathcal{I}_n - A$ es invertible y $(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = B$, lo cual prueba que $(\mathcal{I}_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Además note que $\|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| = \left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \dfrac{1}{1 - \|A\|}$.

Así mismo por (1.30), $\|(\mathcal{I}-A)^{-1}\| \geq \dfrac{1}{1-\|A\|}$.

Como $\|(\mathcal{I}_n - A)\| \leq \|\mathcal{I}_n\| + \|A\|$, entonces $\dfrac{1}{\|(\mathcal{I}_n - A)\|} \geq \dfrac{1}{\|\mathcal{I}_n\| + \|A\|}$.

Ahora, si $\|\cdot\|$ es tal que $\|\mathcal{I}_n\| = 1$, entonces $\dfrac{1}{\|(\mathcal{I}_n - A)\|} \geq \dfrac{1}{1+\|A\|}$, así

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(\mathcal{I}_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

□

Observación 1.25. Una forma equivalente del teorema 1.25 es la siguiente:

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, si para alguna norma matricial se tiene que $\|\mathcal{I}_n - A\| < 1$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{I}_n - A)^k \tag{1.32}$$

Corolario 1.26. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es invertible y $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es tal que*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Para alguna norma matricial, entonces B también es invertible.

Demostración. Note que

$$B = A - (A-B) = A\left[\mathcal{I}_n - A^{-1}(A-B)\right] \tag{1.33}$$

Probemos que la matriz $\mathcal{I}_n - A^{-1}(A-B)$ es invertible así por (1.33) B es invertible por ser el producto de matrices invertibles.

En efecto, dado que:

$$\|A^{-1}(A-B)\| \leq \|A^{-1}\|\|(A-B)\| < \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1,$$

es decir $\|A^{-1}(A-B)\| < 1$, entonces por el teorema 1.24 se sigue que $\mathcal{I}_n - A^{-1}(A-B)$ es invertible, lo cual prueba que B es invertible. □

Teorema 1.27. *Sea* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *y* $\|\cdot\|$ *cualquier norma matricial sobre* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *tal que* $\|\mathcal{I}_n - AB\| < 1$, *entonces* A *y* B *son invertibles además*

$$A^{-1} = B\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k \quad y \quad B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k A$$

Demostración. Como $\|\mathcal{I}_n - AB\| < 1$, la observación 1.25 nos garantiza que AB es invertible y su inversa es

$$(AB)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k.$$

Así mismo resulta que A y B son invertibles.
Además

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \mathcal{I}_n A^{-1} = BB^{-1}A^{-1} = B(AB)^{-1} = B\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k \\ B^{-1} &= B^{-1}\mathcal{I}_n = B^{-1}A^{-1}A = (AB)^{-1}A = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - AB)^k A \end{aligned}$$

□

Teorema 1.28. *El conjunto de matrices* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *invertible es un conjunto abierto en el conjunto de todas las matrices* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
Esto es, si A *es invertible, existe un número positivo* ϵ *tal que toda matriz* B *que satisface* $\|A - B\| < \epsilon$ *también es invertible.*

Corolario 1.29. *Si* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *es tal que* $\|A\| < 1$ *para alguna norma matricial, entonces* $\mathcal{I}_n + A$ *es invertible y* $(\mathcal{I}_n + A)^{-1} = \mathcal{I}_n - A + A^2 - A^3 + \dots$ *además* $\|(\mathcal{I}_n + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

Corolario 1.30. *Sean* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, A *invertible y* $\|\cdot\|$ *una norma matricial tal que* $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, *entonces*

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I}_n - BA^{-1})^k$$

Demostración. Como A es invertible, $\|A\| < 1$ y $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, entonces por el corolario 1.26 B es invertible. Ahora, como A^{-1} y B son invertibles y dado que $\|\mathcal{I} - BA^{-1}\| = \|AA^{-1} - BA^{-1}\| = \|(A-B)A^{-1}\| \leq \|(A-B)\|\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\cdot\|A^{-1}\| = 1$

entonces, por la observación 1.25

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{I} - BA^{-1})^k$$

$\square$

Podemos obtener la formula para $(A+B)A^{-1}$ a partir de la serie de Neumann de la siguiente manera.

Corolario 1.31. *Sean* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, *A invertible y* $\|A^{-1}B\| < 1$, *entonces* $(A+B)$ *es invertible y*

$$(A+B)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k\right)A^{-1}.$$

Demostración. Note que $A+B = A[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]$ y $\|-A^{-1}B\| = \|A^{-1}B\| < 1$ Dado que $\|A^{-1}B\| < 1$, por teorema 1.24 $\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)$ es invertible y así $A+B$ es invertible por ser el producto de matrices invertibles.

Por teorema 1.24 se tiene además que $[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k$.

Luego $(A+B)^{-1} = \left[A[\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]\right]^{-1} = [\mathcal{I}_n - (-A^{-1}B)]^{-1}A^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k\right)^{-1}$

$\square$

Capítulo 2

Exponencial de una Matriz

Buscando contextualizar al lector la función exponencial de una matriz, en éste capítulo presenta resultados y algunos desarrollos sobre la exponencial de una matriz cuadrada, acorde a [2, 16, 21].

Aplicando el teorema 1.23, es fácil demostrar que la serie matricial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{2.1}$$

converge para cualquier matriz cuadrada A con elementos reales o complejos.
En efecto, analicemos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$.
Observe que

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| = \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Puesto que la serie $\sum_{k=0} \frac{a^k}{k!}$ converge para todo número real a (converge a e^a), entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge, luego por el criterio de comparación la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$ converge y así por el teorema 1.23, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, también converge para toda matriz cuadrada A.

Definición 2.1 (Exponencial de una Matriz)**.** Dada una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, con elementos reales o complejos, definimos la exponencial e^A, como la matriz $n \times n$ dada por la serie convergente (2.1), esto es

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{2.2}$$

Nota 1. *Con la ayuda de las ecuaciones diferenciales se estudiarán otras propiedades de la exponencial.*

2.1. Ecuaciones Diferenciales que se Satisfacen por e^{tA}

Sean t un número real, A una matriz $n \times n$ y $E(t)$ la matriz $n \times n$. Estudiaremos la matriz dada por $E(t) = e^{tA}$, como una función de t y con A fija.

Primeramente hallaremos una ecuación diferencial a la que satisface E.

La prueba de los siguientes teorema enunciados 2.2, 2.3 y 2.4 se pueden verificar en [21]

Teorema 2.2. *Para todo real t la función matricial E definida por $E(t) = e^{tA}$ satisface la ecuación diferencial*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t) \tag{2.3}$$

Teorema 2.3 (No Singularidad de e^{tA})**.** *Para cualquier matriz A, $n \times n$ y el escalar t, se tiene*

$$e^{tA}e^{-tA} = \mathcal{I}_n \tag{2.4}$$

Luego e^{tA} es no singular, y su inversa es e^{-tA} esto es $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$

Teorema 2.4 (Unicidad)**.** *Sean A y B dos matrices constantes de tamaño $n \times n$. La única función matricial F, $n \times n$ que satisface el problema de valor inicial*

$$F'(t) = AF(t), \qquad F(0) = B, \qquad \textit{para} \quad -\infty < t < \infty$$

es

$$F(t) = e^{tA}B$$

Observación 2.5. El mismo tipo de demostración muestra que $F(t) = Be^{tA}$ es la única solución del problema de valor inicial

$$F'(t) = F(t)A, \qquad F(0) = B$$

2.2. Ley de Exponentes para Exponenciales de Matrices

La ley de los exponentes no siempre es válida para exponenciales de matrices. No obstante la fórmula es válida para matrices permutables.

Teorema 2.6. *Sean* A *y* B *dos matrices* $n \times n$, *permutables, esto es* $AB = BA$, *entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{2.5}$$

Demostración. Dado que $AB = BA$, por inducción se puede demostrar que $A^k B = BA^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Escribiendo e^{tA} en forma de serie de potencias encontramos que

$$Be^{tA} = e^{tA}B \qquad \text{para todo real } t$$

Ahora, sea F la función matricial definida por la ecuación

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

Derivando $F(t)$ y teniendo en cuenta que B es permutable con e^{tA} se tiene

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{t(A+B)} - (A+B)e^{tA}e^{tB} \\ &= (A+B)\left[e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}\right] = (A+B)F(t) \end{aligned}$$

Según el teorema 2.4 tenemos

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0)$$

Pero $F(0) = 0$, así $F(t) = 0$ para todo t. Luego

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

Cuanto $t = 1$,

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

□

Ejemplo 2.7. Las matrices sA y tA son permutables para todos los escalares s y t. Luego

$$e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$$

Ejemplo 2.8. Para cualquier matriz invertible B y A matriz $n \times n$ se cumple que

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$$

En efecto, es fácil probar que $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$. Por lo que

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(BAB^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(BA^nB^{-1}\right) = B\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n\right)B^{-1} = Be^AB^{-1}$$

2.3. El Problema de Calcular e^{tA}

Si se trata de calcular e^{tA} directamente, a partir de la definición de la serie, tendríamos que calcular todas las potencias de A^k y la suma de cada serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a_{ij}^k}{k!}$, donde a_{ij}^k es el elemento ij de A^k. En general este es un trabajo que presenta muchas dificultades, salvo si A es una matriz cuyas potencias puedan calcularse fácilmente. Veamos ahora un caso especial de matrices para las cuales resulta mucho más sencillo el cálculo de cualquier función

2.3.1. Funciones de Matrices Diagonalizables

Una idea general para el cálculo de una función f de la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es el de aplicarle la función f a cada una de las entrada de la matriz A de la siguiente manera

$$f(A) = (f\,[a_{ij}]) \tag{2.6}$$

El método analítico básico para definir una función de matrices se basa en la existencia de la forma generalizada de Jordan [19], aunque también se ha desarrollado un método analítico alternativo y muy fácil de implementar, aplicables a funciones que admitan representación en serie de Taylor. Más aún se extenderá el término de funciones matriciales y se analizará el significado de algunas expresiones a la función $k-$ exponencial en la cual se desarrollará propiedades correspondientes a dicha matriz.

Funciones de Matrices

Notación 2.9. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un escalar $\alpha \neq 0$, escribimos A/α para representar la matriz $B = (a_{ij}/\alpha)$ donde cada componente de A se divide por α. Una forma de definir una función de matrices con propiedades semejantes a su función homóloga escalar, es usando la expansión en series infinitas. Por ejemplo, considerando la función exponencial.

En los siguientes ejemplo hallaremos la matriz exponencial.

1. Si $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz nula, entonces $e^0 = \mathcal{I}_n$.

Demostración. Es claro que $0^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y dado que para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathcal{I}_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

En particular se tiene que

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \mathcal{I}_n + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \dots = \mathcal{I}_n$$

□

2. Calcule e^D para la matriz $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dada por

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Solución: Por inducción se puede probar que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Ahora por (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \frac{D^0}{0!} + \frac{D^1}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{2!}d_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}d_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{3!}d_n^3 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + d_1 + \frac{1}{2!}d_1^2 + \frac{1}{3!}d_1^3 + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + d_n + \frac{1}{2!}d_n^2 + \frac{1}{3!}d_n^3 + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esto es, $e^D = diag\left\{e^{d_1}, \dots, e^{d_n}\right\}$.

Funciones de Matrices Diagonalizables

Definición 2.10 (Matrices Semejantes)**.** Sea $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A es semejante a B si existe un matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.

Definición 2.11 (Matrices Diagonal)**.** Se dice que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0, \ \forall i \neq j$.

Definición 2.12 (Matrices Diagonalizable)**.** Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagnalizable si existe una matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es semejante a D.

Definición 2.13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se dice que λ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. El vector x se conoce como vector propio de A asociado al valor propio λ.

Definición 2.14. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se define el espectro de A, denotado $\sigma(A)$ como

$$\sigma(A) = \{\lambda / \lambda \quad \text{es un valor propio de} \quad A\}$$

Definición 2.15. El radio espectral de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Se define como

$$\delta(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \quad \text{es un valor propio de} \quad A\}$$

Teorema 2.16. *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $\|\cdot\|$ *es cualquier norma matricial entonces*

$$\delta(A) \leq \|A\|$$

Demostración. Sea λ un valor propio de A. Luego existe un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$.
Ahora sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matriz no nula formada por el vector propio x en su primera columna y el vector nulo en las demás. Así que $AX = \lambda X$. Luego si $\|\cdot\|$ es una norma matricial cualquiera, entonces

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|$$

de lo cual se sigue que

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

y dado que para todo $\lambda \in \sigma(A)$, se tiene

$$\delta(A) \leq \|A\|$$

$\square$

Teorema 2.17. *Una matriz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es diagonalizable si y solo si, tiene* n *vectores propios linealmente independientes, en este caso es semejante a una matriz diagonal* D *que tiene los valores propios de* A *en la diagonal.*

Demostración. Supongamos que A es diagonalizable, entonces existe $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible y D diagonal, tal que $A = PDP^{-1}$, de donde $AP = PD$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las columnas de P, es claro que la $i-$ésima columna de PD es $\lambda_i x_i$, así la $i-$ésima columna de AP es $Ax_i = \lambda_i x_i$ por lo tanto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de n vectores linealmente independientes. Para A recíprocamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n vectores propios L.I. de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces la matriz $P = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y la $i-$ésima columna de AP es $Ax_i = \lambda_i x_i$ que coincide con la $i-$ésima columna de PD, tenemos entonces que $AP = PD$, así $A = PDP^{-1}$ y por lo tanto A es diagonalizable del teorema anterior se tiene que si A es diagonalizable, con respecto $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, entonces $A = PDP^{-1} = P diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) P^{-1}$ y $A^k = PD^k P^{-1} = P diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right) P^{-1}$. □

Teorema 2.18. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $\varepsilon > 0$ *entonces existe una norma matricial* $\|\cdot\|_*$ *tal que*

$$\delta(A) \le \|\cdot\|_* \le \delta(A) + \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ donde cada valor propio este repetido según su multiplicidad algebraica. El teorema de Schur garantiza la existencia de una matriz unitaria U y una matriz triangular superior $T = [t_{ij}]$ tales que

$$A = UTU^H \quad \text{y} \quad t_{ij} = \lambda_i$$

Sea

$$D_K = diag\{1, k, k^2, \ldots, k^{n-1}\}$$

y notemos que

$$D_K K D_K^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & K^{-1}t_{12} & \cdots & K^{-n+1}t_{1n} \\ \vdots & \lambda_2 & \ldots & K^{-n+2}t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Así, tomando $k > 0$, suficientemente grande, podemos hacer que

$$\|D_K K D_K^{-1}\| \le \delta(A) + \varepsilon.$$

Ahora definamos

$$\begin{aligned}\|A\|_* &= \|(UD_k^{-1})^{-1})A(UD_k^{-1})\| = \|(UD_k^{-1})^{-1}UTU^H(UD_{k^{-1}})\| \\ &= \|(D_kU^H)^{-1}UTU^H(UD_{k^{-1}})^{-1}\| = \|D_kTD_k^{-1}\| \leq \delta(A)+\varepsilon\end{aligned}$$

además se sabe que

$$\delta(A) \leq \|A\|_*$$

y así

$$\delta(A) \leq \|A\|_* \leq \delta(A)+\varepsilon$$

□

Teorema 2.19. *Si la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

converge para $|z-z_0|<r$ y $|\lambda_i-z_0|<r$ para cada valor propio λ_i de una matriz $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ entonces la serie infinita de matrices

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-z_0I)^k$$

también converge.

Demostración. Sea λ_i un valor propio de A. Es claro que λ_i un valor propio de A si y solo si $z-z_0$ es un valor propio de $A-z_0I$. Ahora dado que $|\lambda_i-z_0|<r$ para cada valor propio de A. En particular $\delta(A-z_0I)<r$. De aquí se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\|A-z_0I\|^k$ es convergente y luego por el teorema de convergencia absoluta se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-z_0I)^k$ es convergente. □

Definición 2.20. Si la función

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

converge para $|z-z_0|<r$ y para cada valor propio de λ_i de una matriz $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, se tiene que $|\lambda_i-z_0|<r$ entonces se define

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-z_0I)^k$$

Nota 2. *Si* $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad |z| < r \quad y \quad |\lambda_i| < r$$

Es decir, para definir $f(A)$ *necesitamos que la función* $f(z)$ *esté definida en cierto conjunto que contenga el espectro de* A*. Ademas es claro que si* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *converge para* $|z| < r$ *y para cada* $|\lambda_i| < r$*, entonces*

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

converge.

Definición 2.21. Sea f una función con representación en series de potencias

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \dots$$

con radio de convergencia R.
Si A es una matriz $n \times n$ y $\delta(A) < R$, la serie de matrices

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 + a_1 A + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots$$

converge con respecto a cada norma sobre el conjunto de matrices $n \times n$ y su suma es denotada por la función matricial $f(A)$.

Teorema 2.22. *Sea* $A \in n \times n$*,* $f(z)$ *una función analítica definida en un abierto* $U \subset \mathbb{C}$ *que contiene el espectro de* A*. Si* $A = XBX^{-1}$ *entonces,* $f(A) = Xf(A)X^{-1}$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Como $A = XBX^{-1}$ entonces $A^k = XB^kX^{-1}$, así $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k XB^kX^{-1}$, esto es $f(A) = X\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k\right)X^{-1}$ entonces $f(A) = Xf(B)X^{-1}$ □

Teorema 2.23. *Sea* $A = RDR^{-1}$*, con* D *es diagonal,* $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_i\}$ *donde* λ_i *son los valores propios de* A*, y suponga que* $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$ *y* $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$*. entonces*

a). $det f(A) = det D = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$

b). $Traza(f(A)) = Trazaf(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$

Demostración.

a).

$$\begin{aligned} detf(A) &= det(Rf(D)R^{-1}) = detR \cdot detf(D) \cdot detR^{-1} = detR \cdot (detR)^{-1} \cdot detf(D) = detf(D) \\ &= det\left\{diag\left\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\right\}\right\} = f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2) \cdot \ldots f(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} Traza(f(A)) &= Traza(Rf(D)R^{-1}) = Traza(RR^{-1}f(D)) \\ &= Trazaf(D) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + f(\lambda_3) + \ldots + f(\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \end{aligned}$$

$\square$

A continuación se presentan, a manera de ejemplos, algunos resultados conocidoas.

Ejemplo 2.24. Sea $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ y $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.
Luego, para $A = PDP^{-1}, D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \sigma(A), f(A) = Pf(D)P^{-1} = Pe^D P^{-1} = Pdiag\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, \ldots e^{\lambda_n}\}P^{-1}$.
Ahora,

$$\begin{aligned} detf(A) &= dete^A = det(Pe^D P^{-1}) = detP \cdot detf(D) \cdot detP^{-1} = detP \cdot (detP)^{-1} \cdot detf(D) \\ &= detf(D) = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{\lambda_3} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = e^{trazaA} \end{aligned}$$

Esto es

$$dete^A = e^{trazaA}$$

Ademas $traza(f(A)) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \ldots + f(\lambda_n) = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} + \ldots + e^{\lambda_n}$ esto es

$$trazae^A = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

Ejemplo 2.25. Para A invertible se tiene que $\int e^{tA}\,\mathrm{d}t = A^{-1}e^{tA} + C$. En efecto,

$$\frac{d}{dt}[A^{-1}e^{tA} + C] = A^{-1}Ae^{tA} + 0 = e^{tA}$$

Caso particular para $A = PDP^{-1}$, entonces $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ luego

$$\int e^{tA}\,\mathrm{d}t = P\left(\int e^{tD}\,\mathrm{d}t\right)P^{-1} = P(D^{-1}e^{tD})P^{-1} + C$$

Cálculo que es mas cómodo, ya que e^{tD} es mucho más fácil de calcular que e^{tA}. Note que

$$\begin{aligned} P(D^{-1}e^{tD})P^{-1} + C &= PD^{-1}P^{-1}Pe^{tD}P^{-1} + C = (PD^{-1}P^{-1})(Pe^{tD}P^{-1}) + C \\ &= (P^{-1}DP)^{-1}e^{tA} + C = A^{-1}e^{tA} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 2.26.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} \int e^{tA}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int e^t\,\mathrm{d}x & \int te^t\,\mathrm{d}x \\ 0 & \int e^t\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t + C_1 & te^t - e^t + C_2 \\ 0 + C_3 & e^t + C_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t - e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & te^t - e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.27. Para A diagonalizable $A = PDP^{-1}$,

$$-A = -(PDP^{-1}) = P(-D)P^{-1}$$

luego,

$$e^A = Pe^DP^{-1} \ \text{ y } \ [e^A]^{-1} = Pe^{-D}P^{-1}$$

Además

$$tA = t[PAP^{-1}] = PtAP^{-1}$$

entonces

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[e^{tA}] &= \frac{d}{dt}[Pe^{tD}P^{-1}] = P\frac{d}{dt}[e^{tD}]P^{-1} = PDe^{tD}P^{-1} = PDP^{-1}Pe^{tD}P^{-1} \\ &= (PDP^{-1})(Pe^{tD}P^{-1}) = Ae^{tA}\end{aligned}$$

Capítulo 3

Matriz k-exponencial y k-logarítmica

En este capítulo definiremos la matriz k-exponencial y la matriz k-logarítmica de una matriz cuadrada A, la cual denotaremos $exp_k(A)$ y $ln_k(A)$ respectivamente, además se presentarán unas propiedades y criterios de convergencia para dichas matrices. En la primera seccíon estudiaremos el generador de deformaciones según G. Kaniadakis, algunos aspectos del álgebra $k-$ deformada y propiedades de las matrices $k-$ exponencial y la $k-$ logarítmica. En la segunda seccíon definiremos la matriz $k-$ exponencial de una matriz cuadrada A, utilizando par ello la representación en series de matrices convergentes, y en la última sección se definirá la matriz $k-$ logarítmica similarmente a lo generado con la matriz k-exponencial por medio de una representación de series de matrices.

3.1. Matemáticas deformadas según Kaniadakis

3.1.1. Generador de Deformaciones

Definición 3.1. Una función real g que depende de un parámetro $k \in \mathbb{R}$, se dice generadora de deformaciones si cumple las siguientes propiedades

i.) $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

ii.) $g(-x) = -g(x)$

iii.) $\frac{d}{dx}\, g(x) > 0$

iv.) $g(\pm\infty) = \pm\infty$

v.) $g(x)$ tiende a x cuando $x \to 0$

G. Kaniadakis [10] define la función real

$$x_k = \frac{1}{k} arcsenh(g(kx)) \tag{3.1}$$

Proposición 3.2. *Sea g un generador de deformación y x_k como* (3.1)*, entonces se cumplen:*

i.) $x_k \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

ii.) $(-x)_k = -x_k$

iii.) $\frac{d}{dx} x_k > 0$

iv.) $(\pm\infty)_k = \pm\infty$

v.) x_k tiende a x cuando $k \to 0$ $\;(x_0 = x)$

vi.) x_k tiende a 0 cuando $x \to 0$ $(0_k = 0)$

vii.) $x_{-k} = x_k$

Como en el trabajo de Dora Deossa [7] presentamos la función real de la variable real, denotada x_k y definida para $k \neq 0$ por $x_k = y(x)$, tal que y sea solución del problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(kx)}{\sqrt{1 + [g(kx)]^2}} \;;\; y(0) = 0$$

3.1.2. álgebra $k-$deformada

Definición 3.3. La suma de números reales será generalizada mediante la suma $k-$deformada o $k-$suma, donde la ley de composición se define por

$$x \overset{k}{\oplus} y = (x_k + y_k)^k = \frac{1}{k} g^{-1}[senh[arcsenh(g(kx)) + arcsenh(g(ky))]] \tag{3.2}$$

Las siguientes son propiedades de la $k-$suma, y se encuentran demostradas en [10] y [7].

i.) $(x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} y) = x_k + y_k$

ii.) $x \overset{0}{\oplus} y = x + y$

iii.) $x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} y = y \overset{\mathrm{k}}{\oplus} x$

iv.) $(x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} y) \overset{\mathrm{k}}{\oplus} z = x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} (y \overset{\mathrm{k}}{\oplus} z)$

v.) $x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} 0 = x$

vi.) $x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} (-x) = (-x) \overset{\mathrm{k}}{\oplus} x = 0$

Observación 3.4. La operación $x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} (-y)$ se nota por $x \overset{\mathrm{k}}{\ominus} y$ y se le llama k-diferencia.

También se introduce el $k-$producto de la siguiente manera:

$$x \overset{\mathrm{k}}{\otimes} y = (x_k \cdot y_k)^k = \frac{1}{k} g^{-1}(senh[arcsenh(g(kx)) \cdot arcsenh(g(ky))]) \tag{3.3}$$

Proposición 3.5. *Algunas propiedades que relacionan la k-suma y el k-producto, se detallan a continuación*

$$x \overset{0}{\otimes} y = xy$$

$$(x \overset{\mathrm{k}}{\otimes} y) \overset{\mathrm{k}}{\otimes} z = x \overset{\mathrm{k}}{\otimes} (y \overset{\mathrm{k}}{\otimes} z)$$

Además la estructura algebraica $(\mathbb{R} - \{0\}, \overset{\mathrm{k}}{\otimes})$ es un grupo abeliano.

$$z \overset{\mathrm{k}}{\otimes} (x \overset{\mathrm{k}}{\oplus} y) = (z \overset{\mathrm{k}}{\otimes} x) \overset{\mathrm{k}}{\oplus} (z \overset{\mathrm{k}}{\otimes} y)$$

El elemento neutro k-multiplicativo $I = 1^k$ es tal que $x \overset{\mathrm{k}}{\otimes} I = x$.

El elemento inverso $k-$multiplicativo para cada real $x \neq 0$ es,

$$\overline{x} = \left(\frac{1}{x_k}\right)^k \; donde \; x \overset{\mathrm{k}}{\otimes} \overline{x} = \overline{x} \overset{\mathrm{k}}{\otimes} x = I$$

La k-división $\overset{k}{\oslash}$ se define por

$$x \overset{k}{\oslash} y = x \overset{k}{\otimes} \overline{y} = x \overset{k}{\otimes} \left(\frac{1}{y_k}\right)^k$$

3.1.3. Funciones k-exponencial y k-logarítmo

Cuando el generador de deformación es la función real identidad, genera un $(g(x) = x)$, se expresan x^k y x_k de la siguiente manera:

$$x_k = \frac{1}{k} arcsenh(kx) \tag{3.4}$$

$$x^k = \frac{1}{k} senh(kx) \tag{3.5}$$

Además, para (3.2) y (3.3) se tendria:

$$x \overset{k}{\oplus} y = \frac{1}{k} senh[arcsenh(kx) + arcsenh(ky)] \tag{3.6}$$

$$x \overset{k}{\oplus} y = \frac{1}{k} senh[\frac{1}{k} arcsenh(kx) arcsenh(ky)] \tag{3.7}$$

Donde (3.6) toma una forma sencilla desarrollada en [7] como sigue:

$$x \overset{k}{\oplus} y = x\sqrt{1 + k^2 y^2} + y\sqrt{1 + k^2 x^2} \tag{3.8}$$

Como en [8] expresamos la $k-$derivada de una función real f de variable real, como

$$\frac{d[f(x)]}{d_k x} = \sqrt{1 + k^2 x^2}\, \frac{d[f(x)]}{dx} \tag{3.9}$$

Es claro que el k-diferencial $d_k x = dx_k = \dfrac{dx}{\sqrt{1 + k^2 x^2}}$ es regido por las reglas de la derivada usual cuando $k \to 0$. Ahora, se define la función exponencial k-deformada o k-exponencial por,

$$exp_k(x) = exp\left(\frac{1}{k}arcsenh(kx)\right) = (\sqrt{1+k^2x^2}+kx)^{1/k} \tag{3.10}$$

de tal forma que la $k-$exponencial sea invariante a la $k-$derivada.

La función $exp_k(x)$ se define en los reales, hace parte de la clase $C^\infty(\mathbb{R})$, es estrictamente creciente y obedece tambien a las reglas de la exponencial cuando $k \to 0$. Además la $k-$derivada y la derivada usual satisfacen las siguientes condiciones

i.) $\lim_{x\to-\infty}(exp_k(x)) = 0 \;\; y \;\; \lim_{x\to\infty}(exp_k(x)) = \infty$

ii.) $\frac{d}{d_kx}(exp_k(x)) = exp_k(x)$

iii.) $\frac{d}{dx}(exp_k(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}\; exp_k(x)$

Los siguientes son algunas propiedades que la función $exp_k(x)$ cumple, y se pueden verificar en [7]:

i.) $exp_k(0) = 1$

ii.) $exp_{-k}(x) = exp_k(x)$

iii.) $exp_k(x)exp_k(-x) = 1$

iv.) $(exp_k(x))^r = exp_{k/r}(rx), \; (r \neq 0)$

v.) $exp_k(x)exp_k(y) = exp_k(x \overset{\text{k}}{\oplus} y)$

vi.) $exp_k(x)/exp_k(y) = exp_k(x \overset{\text{k}}{\ominus} y)$

La función inversa del k-exponencial es la función k-logarítmo, denotada por $ln_k(x)$, definida en los reales positivos, y su comportamiento para $k = 0$ es $ln_0(x) = lnx$. Cuando $k \neq 0$ se define por,

$$ln_k(x) = \frac{1}{k}senh(klnx) = \frac{x^k - x^{-k}}{2k} \tag{3.11}$$

La función $ln_k(x)$ pertenece a la clase $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, es estrictamente creciente, cóncava y cumple:

$$\lim_{x\to 0^+}(ln_k(x)) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to\infty}(ln_k(x)) = \infty$$

además, se cumplen las siguientes propiedades:

i.) $ln_k(1) = 0$

ii.) $ln_{-k}(x) = ln_k(x)$

iii.) $ln_k(\frac{1}{x}) = -ln_k(x)$

iv.) $ln_k(x^r) = rln_{rk}(x)$; $con\ r \in \mathbb{R}$

v.) $ln_k(xy) = ln_k(x) \overset{\mathrm{k}}{\oplus} ln_k(y)$

vi.) $ln_k(x/y) = ln_k(x) \overset{\mathrm{k}}{\ominus} ln_k(y)$

Retomando la $k-$exponencial, se puede usar la expansión en series de Taylor para $exp(\cdot)$ en torno a $x_0 = 0$, la cual está dada por,

$$exp_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k)\frac{x^n}{n!}, \quad k^2x^2 < 1 \tag{3.12}$$

donde los coeficientes a_n son definidos por $a_0(k) = a_1(k) = 1$ y

$$a_{2m}(k) = \prod_{j=0}^{m-1}[1-(2j)^2k^2] \quad ; \quad a_{2m+1}(k) = \prod_{j=1}^{m}[1-(2j-1)^2k^2] \tag{3.13}$$

Notese que $a_n(0) = 1$ y $a_n(-k) = a_n(k)$. De acuerdo con [12], la expansión de Taylor de $ln_k(1+x)$ converge si $-1 < x \leq 1$ y tiene la forma,

$$ln_k(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k)(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{3.14}$$

con $b_n(k) = 1$, $b_n(0) = 1$ $b_n(-k) = b_n(k)$. y para $n > 1$

$$b_n(k) = \frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2})...(1-\frac{k}{n-1}) + \frac{1}{2}(1+k)(1+\frac{k}{2})...(1+\frac{k}{n-1}) \tag{3.15}$$

3.2. Matriz k-exponencial

En esta sección presentaremos como aporte la definición de matriz $k-$exponencial de una matriz cuadrada A, denotada por $exp_k(A)$, como una extensión de la representación en series de matrices de la función $k-$exponencial, de tal forma que cuando $k \longrightarrow 0$ se obtiene la función exponencial usual de una matriz, además se verifican algunas propiedades importantes de la matriz $k-$exponencial.

Tengamos presente que

$$exp_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k)\frac{x^n}{n!}, \quad k^2x^2 < 1,$$

donde los coeficientes a_n se definen como

$$a_0(k) = 1$$

$$a_1(k) = 1$$

$$a_{2m}(k) = \prod_{j=0}^{m-1}[1-(2j)^2k^2]$$

$$a_{2m+1}(k) = \prod_{j=1}^{m}[1-(2j-1)^2k^2].$$

Si remplazamos el argumento escalar x, por la matriz cuadrada A, se obtiene la siguiente serie matricial,

$$exp_k(A) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_p(k)}{p!}A^p \tag{3.16}$$

$$= a_0(k) + \frac{a_1(k)}{1!}A + \frac{a_2(k)}{2!}A^2 + \frac{a_3(k)}{3!}A^3 + ...$$

que, en la definición que se dará más adelante, será llamada matriz k-exponencial. Ahora se buscarán las condiciones para los cuales la serie (3.16) es convergente.

Teorema 3.6. *La serie matricial* $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} A^p$ *converge si* $\|A\| < \frac{1}{|k|}$

Demostración. Notese que $\sum_{p=0}^{\infty} \left\| \frac{a_p(k)}{p!} A^p \right\| = \sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A^p\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A\|^p$.

veamos que la serie $\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A\|^p$ converge para $\|A\| < \frac{1}{|k|}$.

En efecto,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A\|^p = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a_{2m}(k)}{2m!} \right| \|A\|^{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n+1}(k)}{(2n+1)!} \right| \|A\|^{2n+1}$$

Solo nos queda demostrar que las series $\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a_{2m}(k)}{2m!} \right| \|A\|^{2m}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n+1}(k)}{(2n+1)!} \right| \|A\|^{2n+1}$ son convergentes.

Para

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a_{2m}(k)}{2m!} \right| \|A\|^{2m}$$

sean

$$b_m = \left| \frac{a_{2m}(k)}{2m!} \right| \|A\|^{2m} \quad y \quad b_{m+1} = \left| \frac{a_{2m+2}(k)}{(2m+2)!} \right| \|A\|^{2m+2}$$

entonces,

$$\left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = \left| \frac{\frac{a_{2m+2}(k)\|A\|^{2m}\|A\|^2}{(2m+2)(2m+1)(2m)!}}{\frac{a_{2m}(k)\|A\|^{2m}}{(2m)!}} \right|$$

luego,

$$\left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = \left| \frac{a_{2m+2}(k)\|A\|^2}{(2m+1)(2m+2)a_{2m}(k)} \right|$$

$$= \left| \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{m} [1-(2j)^2k^2]\|A\|^2}{\displaystyle(2m+1)(2m+2)\prod_{j=0}^{m-1}[1-(2j)^2k^2]} \right|$$

$$= \left| \frac{[1-(2m)^2k^2]\|A\|^2}{(2m+2)(2m+1)} \right|$$

luego,

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{|1-(2m)^2k^2|}{(2m+2)(2m+1)} \|A\|^2 \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{|\frac{1}{(2m)^2} - k^2|}{(1+\frac{2}{2m})(1+\frac{1}{2m})} \|A\|^2 \right) = k^2\|A\|^2$$

por lo tanto, la serie es convergente si $k^2\|A\|^2 < 1$, esto es $\|A\| < \dfrac{1}{|k|}$

□

De igual manera, se muestra que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n+1}(k)}{(2n+1)!} \right| \|A\|^{2n+1}$ es convergente.

Por lo tanto, dado que las series $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a_{2m}(k)}{(2m)!} \right| \|A\|^{2m}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n+1}(k)}{(2n+1)!} \right| \|A\|^{2n+1}$ son convergentes, se tiene entonces la convergencia de la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A\|^p \ \ para \ \|A\| < \frac{1}{|k|}$$

De lo cual se sigue por el criterio de comparación que la serie $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{a_p(k)}{p!} \right| \|A^p\|$ converge para $\|A\| < \dfrac{1}{|k|}$.

Por el teorema 1.23 la serie $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} A^p$ tambien converge para $\|A\| < \frac{1}{|k|}$, lo cual prueba el teorema.

Definición 3.7 (k-exponencial de una matriz)**.** Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $\|A\| < \dfrac{1}{|k|}$, definimos la k-exponencial de la matriz A, denotada por $exp_k(A)$, como la matriz

$n \times n$ dada por la serie convergente

$$exp_k(A) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} A^p \tag{3.17}$$

Note que si A es una matriz nilpotente, esto es, existe un número m tal que $A^m = 0$, entonces, $exp_k(A)$ es una serie finita y por lo tanto convergente, esto es, $exp_k(A)$ converge siempre que A sea nilpotente.

Ejemplo 3.8. Si $O = [0] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz nula, entonces

$$exp_k(O) = I_n + \frac{O}{1!} + \frac{a_2(k)}{2!}O^2 + \frac{a_3(k)}{3!}O^3 + ...$$

Así

$$exp_k(O) = I_n \ donde \ k^2\|O\| = 0 < 1$$

Proposición 3.9. *Si $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, $D = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ con $|d_i| < \dfrac{1}{|k|}$, para $i = 1, 2, 3, ..., n$ entonces, $exp_k(D)$ converge a $diag\{exp_k(d_1), ..., exp_k(d_n)\}$*

Demostración.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

luego

$$D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^p \end{pmatrix}.$$

Sea $d_{ij}^{(p)}$ el elemento i, j de D^p, entonces el elemento i, j de $exp_k(D)$ es dado por

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p(k)\frac{(d_i)^p}{p!} = exp_k(d_i) & \text{para} \quad |d_i| < \frac{1}{|k|}, \ i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Como $|d_i| < \dfrac{1}{|k|}$, para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$ entonces para cualquier norma sobre la matriz D, tenemos que

$$\|D\| < \frac{1}{|k|},$$

esto demuestra que $exp_k(D)$ es convergente.

Ahora veamos que

$$\begin{aligned}
exp_k(D) &= I_n + D + \frac{a_2(k)}{2!}D^2 + \frac{a_3(k)}{3!}D^3 + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2(k)d_1^2/2! & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_2(k)d_n^2/2! \end{pmatrix} + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 + d_1 + a_2(k)d_1^2/2! + ... & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + d_n + a_2(k)d_n^2/2! + ... \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} exp_k(d_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & exp_k(d_n) \end{pmatrix} = diag\left\{exp_k(d_1), ..., exp_k(d_n)\right\}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.10. Sea $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ Calculemos $exp_k(tB)$. Por inducción se conoce que para cualquier $p \in \mathbb{N}$ se obtiene, $(tB)^p = \begin{pmatrix} (tb)^p & pt^p b^{p-1} \\ 0 & (tb)^p \end{pmatrix}$

Luego,

$$\begin{aligned}
exp_k(tB) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!}(tB)^p = I_2 + tB + \frac{a_2(k)}{2!}(tB)^2 + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tb & t \\ 0 & tb \end{pmatrix} + \frac{a_2(k)}{2!} \begin{pmatrix} (tb)^2 & 2t^2b \\ 0 & (tb)^2 \end{pmatrix} + ... \\
&= \begin{pmatrix} exp_k(tb) & t\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}(k)}{p!}(tb)^p \\ 0 & exp_k(tb) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} exp_k(tb) & & \frac{d}{db}(exp_k(tb)) \\ & \ddots & \\ 0 & & exp_k(tb) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} exp_k(tb) & \frac{t}{\sqrt{1+(ktb)^2}} exp_k(tb) \\ 0 & exp_k(tb) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notese que, la $exp_k(tB)$ es la $exp(tB)$ usual, cuando $k \to 0$;

$$exp_k(tB) = \begin{pmatrix} exp(bt) & t \cdot exp(bt) \\ 0 & exp(bt) \end{pmatrix}$$

Proposición 3.11. *La derivada de la exponencial $exp_k(tB)$ viene dada por*

$$\frac{d}{dt}\left[exp_k(tB)\right] = B\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}(k)}{p!}(tB)^p\right) \tag{3.18}$$

En efecto, tenemos que

$$exp_k(tB) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!}(tB)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} t^p B^p$$

Ahora, sea $b_{ij}^{(m)}$ el elemento i, j de B^m, entonces el elemento i, j de $\frac{t^m B^m}{m!}$ es $\frac{t^m}{m!} b_{ij}^{(m)}$, por lo tanto de la definición de serie matricial

$$exp_k(tB) = \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} t^p b_{ij}^{(p)}\right]$$

luego,

$$\frac{d}{dt}\left(exp_k(tB)\right) = \left[\frac{d}{dt}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_p(k)}{p!}t^p b_{ij}^{(p)}\right],$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\left[1 + tb_{ij}^{(1)} + \frac{a_2(k)}{2!}t^2 b_{ij}^{(2)} + \frac{a_3(k)}{3!}t^3 b_{ij}^{(3)} + ...\right] \\
&= \left[\frac{a_1(k)}{0!}b_{ij}^{(1)} + \frac{a_2(k)}{1!}tb_{ij}^{(2)} + \frac{a_3(k)}{2!}t^2 b_{ij}^{(3)} + ...\right] \\
&= \left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}t^p b_{ij}^{p+1}\right] \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}t^p B^{p+1} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}t^p B^p\right)B \\
&= B\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}t^p B^p\right) \\
&= B\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}(tB)^p
\end{aligned}$$

El siguiente resultado será de utilidad más adelante.

Proposición 3.12. *Para b y t reales se cumple que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+(ktb)^2}}[exp_k(tb)] = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}(tb)^p \tag{3.19}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+(ktb)^2}}[exp_k(tb)] &= \frac{1}{b}\frac{d}{dt}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_p(k)}{p!}(bt)^p\right] \\
&= \frac{1}{b}\frac{d}{dt}\left[a_0(k) + \frac{a_1(k)}{1!}bt + \frac{a_2(k)}{2!}b^2t^2 + ...\right] \\
&= \frac{1}{b}\left[\frac{a_1(k)}{1!}b + \frac{a_2(k)}{2!}b^2(2t) + \frac{a_3(k)}{3!}b^3(3t^2) + ...\right] \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{p+1}(k)}{p!}(bt)^p
\end{aligned}$$

Proposición 3.13. *Para $D = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ la derivada de la matriz k-exponencial $exp_k(tD)$ viene dada por:*

$$\frac{d}{dt}\left[exp_k(tD)\right] = D \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_1)^2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_n)^2}} \end{pmatrix} exp_k(tD) \tag{3.20}$$

En efecto, por (3.18) y (3.19) se sabe que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(exp_k(tD)\right) &= D\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}(k)}{p!}(tD)^p\right) \\
&= D \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}(k)}{p!}(td_1)^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p+1}(k)}{p!}(td_n)^p \end{pmatrix} \\
&= D \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_1)^2}} exp_k(td_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_n)^2}} exp_k(td_n) \end{pmatrix} \\
&= D \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_1)^2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_n)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} exp_k(td_1) & & \\ & \ddots & \\ & & exp_k(td_n) \end{pmatrix} \\
&= D \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_1)^2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_n)^2}} \end{pmatrix} exp_k(tD)
\end{aligned}$$

cuando $k \to 0$, se tiene,

$$\frac{d}{dt}\left(exp(tD)\right) = D\ exp(tD).$$

Proposición 3.14. *Para una matriz diagonizable $B = SDS^{-1}$ tenemos $exp_k(B) = S\left[exp_k(D)\right]S^{-1}$*

En efecto,

$$exp_k(B) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} B`p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!} \left(SDS^{-1}\right)$$

$$S \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)D}{p!} \right) S^{-1} = S \ exp_k(D) \ S^{-1}$$

luego $(exp_k(B))^{-1} = (S\,(exp_k(D))\,S^{-1})^{-1} = S(exp_k(D))^{-1}S^{-1} = S\,(exp_k(-D))\,S^{-1}$,

donde la última igualdad se verifica teniendo en cuenta lo siguiente.

Observación 3.15.

$$(exp_k(x))^{-1} = \left(\frac{1}{kx + \sqrt{1 + (kx)^2}} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{kx - \sqrt{1 + (kx)^2}}{(kx)^2 - (1 + (kx)^2)} \right)^{\frac{1}{k}} = (-kx + \sqrt{1 + (kx)^2})^{\frac{1}{k}}$$

$$= (k(-x) + \sqrt{1 + (k(-x))^2})^{\frac{1}{k}} = exp_k(-x)$$

por lo tanto

$$[exp_k(D)]^{-1} = \begin{pmatrix} (exp_k(d_1))^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (exp_k(d_n))^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp_k(-d_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & exp_k(-d_n) \end{pmatrix}$$

$$= exp_k(-D).$$

Así mismo, para $tB = S(tD)S^{-1}$ tenemos

$$\frac{d}{dt}[exp_k(tB)] = \frac{d}{dt}[S\,(exp_k(tD))\,S^{-1}] = S\frac{d}{dt}[exp_k(tD)]S^{-1}$$

$$SD \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_1)^2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1+(ktd_n)^2}} \end{pmatrix} exp_k(tD)S^{-1}$$

Proposición 3.16. *Se cumple que*

$$\int exp_k(x)dx = \left(\frac{k^2x - \sqrt{1 + x^2k^2}}{k^2 - 1} \right) exp_k(x) + C, \tag{3.21}$$

donde c es constante.

En efecto, sabemos por condiciones de la k-derivada que

$$\frac{d}{dx}(exp_k(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}\ exp_k(x)$$

luego,

$$\begin{aligned}\int exp_k(x)dx &= \int \sqrt{1+k^2x^2}\ \frac{d}{dx}(exp_k(x))dx \\ &= \sqrt{1+k^2x^2}\ exp_k(x) - \int \left(\frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right) exp_k(x)dx\end{aligned}$$

como

$$exp_k(x) = (\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{1/k},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\int exp_k(x)dx &= \sqrt{1+k^2x^2}\ exp_k(x) - \int \left(\frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}} + k - k\right)(\sqrt{1+k^2x^2}+kx)^{1/k}dx \\ &= \sqrt{1+k^2x^2}\ exp_k(x) - \int \left(\frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}} + k\right)(\sqrt{1+k^2x^2}+kx)^{1/k}dx + k\int exp_k dx \\ (1-k)\int exp_k(x)dx &= \sqrt{1+k^2x^2}\ exp_k(x) - \frac{k\ exp_x(x)\left(\sqrt{1+x^2k^2}+kx\right)}{k+1} \\ &= exp_k(x)\left(\frac{(k+1)\sqrt{1+k^2x^2} - k\sqrt{1+k^2x^2} - k^2x}{k+1}\right) \\ \int exp_k(x)dx &= \left(\frac{k^2x - \sqrt{1+k^2x^2}}{k^2-1}\right) exp_k(x).\end{aligned}$$

Otra forma de verlo es derivando la función $\dfrac{k^2x - \sqrt{1+k^2x^2}}{k^2-1}$ con respecto a x.

Ahora bien, si se realiza la sustitución de la varible x por la variable tb en (3.21) se tiene,

$$\int exp_k(tb)dt = \frac{1}{b}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}(k)(tb)^p}{p!} + C$$

Luego

$$\int exp_k(tb)d(tb) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}(k)(tb)^p}{p!} + C_1$$

con $C_1 = Cb$ se obtiene

$$\left(\frac{k^2t^2b^2 - \sqrt{1+k^2t^2b^2}}{k^2-1}\right) exp_k(tb) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}(k)(tb)^p}{p!} + C \tag{3.22}$$

Proposición 3.17. *Si B es matriz invertible de tamaño nxn se cumple* $\int exp_k(tB)dt = B^{-1}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p-1}}{p!}(tB)^p + C.$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int exp_k(tB)dt &= \int \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!}(tB)^p\right) dt \\
&= \int \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(k)}{p!}(t)^p B^p dt \\
&= \int \left[1 + tb_{ij}^{(1)} + \frac{a_2(k)}{2!}t^2 b_{ij}^{(2)} + \frac{a_3(k)}{3!}t^3 b_{ij}^{(3)} + ...\right] dt \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2}b_{ij}^{(1)} + \frac{a_2(k)}{2!}\frac{t^3}{3}b_{ij}^{(2)} + \frac{a_3(k)}{3!}\frac{t^4}{4}b_{ij}^{(3)} + ... + C_{ij}\right] =
\end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p-1}}{p!}\frac{t^p}{}b_{ij}^{(p-1)}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int exp_k(tB)dt &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p-1}(k)t^p}{p!}B^{p-1} + C \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p-1}(k)t^p}{p!}B^{-1}B^p + C \\
&= B^{-1}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p-1}}{p!}(tB)^p + C
\end{aligned}$$

Ahora, para una matriz diagonal $D = diag\{d_1, ..., d_n\}$ se tiene,

$$
\begin{aligned}
\int exp_k(tD)dt &= D^{-1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}}{p!}(tD)^p + C \\
&= D^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}}{p!}(td_1)^p + C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p-1}}{p!}(td_n)^p + C_n \end{pmatrix} \\
&= D^{-1}\begin{pmatrix} \frac{k^2t^2d_1^2-\sqrt{1+k^2t^2d_1^2}}{k^2-1}exp_k(td_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{k^2t^2d_n^2-\sqrt{1+k^2t^2d_n^2}}{k^2-1}exp_k(td_n) \end{pmatrix} + C \\
&= D^{-1}\begin{pmatrix} \frac{k^2t^2d_1^2-\sqrt{1+k^2t^2d_1^2}}{k^2-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{k^2t^2d_n^2-\sqrt{1+k^2t^2d_n^2}}{k^2-1} \end{pmatrix} exp_k(tD) + C
\end{aligned}
$$

Cuando $k \to 0$ tenemos $\int exp(tD)dt = D^{-1}exp(tD) + C$

3.3. Matriz k-logarítmica

En G. Kanadiakis [10] se obtiene

$$ln_k(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(k)(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

la cual es una serie convergente si $-1 < x \leqslant 1$ y $b_1(k) = 1$; para $n > 1$ se tiene:

$$b_n(k) = \frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2})...(1-\frac{k}{n-1}) \ + \ \frac{1}{2}(1+k)(1+\frac{k}{2})...(1+\frac{k}{n-1})$$

Ahora bien, si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotamos

$$ln_k(A) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^p \tag{3.23}$$

la cual llamaremos matriz k-logarítmica.

Determinemos las condiciones para los cuales la serie (3.23) es convergente

Teorema 3.18. *La serie matricial* $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^p$ *es convergente si*

$$\|A - I_n\| < 1.$$

Demostración. Notese que:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\| \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^n \right\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)}{p} \|A - I_n\|^p$$

veamos que la serie $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)}{p} \|A - I_n\|^p$ es convergente, si $\|A - I_n\| < 1$. En efecto:

Sea $a_p = \frac{b_p(k)}{p}\|A - I_n\|^p$ y $a_{p+1} = \frac{b_{p+1}(k)}{p+1}\|A - I_n\|^{p+1}$ entonces:

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \left|\frac{pb_{p+1}(k)\|A - I_n\|^{p+1}}{(p+1)b_p(k)\|A - I_n\|^p}\right|$$

$$= \left|\frac{pb_{p+1}(k)}{(p+1)b_p(k)}\right| \|A - I_n\|$$

Sea $b_{p+1}(k) = b^-_{p+1}(k) + b^+_{p+1}(k)$, donde

$$b^-_{p+1}(k) = \frac{1}{2}(1 - k)(1 - \frac{k}{2})...(1 - \frac{k}{p})$$

y

$$b^+_{p+1}(k) = \frac{1}{2}(1 + k)(1 + \frac{k}{2})...(1 + \frac{k}{p}).$$

De la misma manera, si, $b_p(k) = b^-_p(k) + b^+_p(k)$ se tiene que,

$$b^-_p(k) = \frac{1}{2}(1 - k)...(1 - \frac{k}{p-1})$$

y

$$b_p^+(k) = \frac{1}{2}(1+k)...(1+\frac{k}{p-1}).$$

Además, $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{b_{p+1}^-}{b_p^-}\right) = \lim_{p\to\infty}(1-k/p) = 1$ por lo tanto, $b_p^- = b_{p+1}^-$ cuando $p \longrightarrow \infty$.

Del mismo modo, $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{b_{p+1}^+}{b_p^+}\right) = \lim_{p\to\infty}(1+k/p) = 1$ por lo tanto, $b_p^+ = b_{p+1}^+$ cuando $p \longrightarrow \infty$,

osea que:

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{b_{p+1}^- + b_{p+1}^+}{b_p^- + b_p^+}\right) = \frac{b_p^- + b_p^+}{b_p^- + b_p^+} = 1,$$

cuando $p \longrightarrow \infty$ por lo tanto $\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \|A - I_n\| < 1$, para $n-1 \leq \|A\| \leq n+1$ ya que $|\|A\| - \|I_n\|| \leq \|A - I_n\| < 1$ y $\|I_n\| = n$.

Ahora, $\lim_{p\to\infty}\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \|A - I_n\|$, y por criterio de la razón la serie es convergente si

$$\|A - I_n\| < 1$$

además, por el criterio de comparación la serie $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)}{p}(A-I_n)^p$ converge si $\|A - I_n\| < 1$.

Por lo tanto, la serie $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)}{p}(A-I_n)^p$ converge si $\|A - I_n\| < 1$, lo cual demuestra el teorema. □

Definición 3.19 (k-logarítmo de una Matriz)**.** Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, con $\|A - I_n\| < 1$. Definimos el k-logarítmo de una matriz $ln_k(A)$ como la matriz $n \times n$ dada por la serie convergente:

$$ln_k(A) := \sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(A-I_n)^p,\ para\ n-1 < \|A\| < n+1$$

Observación 3.20. Si existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $(A - I_n)^m = 0$ entonces $ln_k(A)$ es una serie finita y por lo tanto converge. De igual forma, si A es nilpotente entonces $Ln_k(I_n + A)$ es serie finita y así convergente.

Proposición 3.21. $ln_k(I_n) = 0$, *donde* 0 *es la matriz nula de tamaño* $n \times n$.

En efecto,

$$ln_k(I_n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(I_n - I_n)^p$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(0)^p = 0$$

donde $\|0\| < 1$.

Proposición 3.22. *Si D es una matriz diagonal $D = diag\{d_1, d_2, , ..., d_n\}$ entonces $ln_k(D) = diag\{ln_k(d_1), ..., ln_k(d_n)\}$*

En efecto,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n - 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$ln_k(D) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_n(k)(-1)^{p-1}}{p} A^p$$

donde

$$A^p = \begin{pmatrix} (d_1 - 1)^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (d_n - 1)^p \end{pmatrix}$$

el elemento (i, j) de

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_n(k)(-1)^{p-1}}{p} A^p$$

es dado por

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(d_i - 1)^p & \text{para} \quad i = j \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j \end{cases}$$

pero, $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(d_i - 1)^p = ln_k(1 + (d_i - 1)) = ln_k(d_i)$, luego la serie matricial

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p(k)(-1)^{p-1} \frac{A^p}{p}$$

converge a $diag(ln_k(d_1), ..., ln_k(d_n))$

Proposición 3.23. *Para una matriz diagonal $D = diag(d_1, ..., d_n)$ se tiene*

$$ln_k(exp_k(tD)) = tD$$

En efecto,

$$\begin{aligned} ln_k(exp_k(tD)) &= ln_k(diag(exp_k(td_1), ..., exp_k(td_n))) \\ &= diag(ln_k(exp_k(td_1)), ..., ln_k(exp_k(td_n))) \\ &= diag(td_1, ..., td_n) = tD. \end{aligned}$$

Proposición 3.24. *Para una matriz diagonalizable $A = RDR^{-1}$ con $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ entonces, $ln_k(A)$ es convergente si $0 < \lambda_i \leq 2$, donde λ_i son los valores propios de A. Además*

$$ln_k(A) = R\ diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}R^{-1}$$

En efecto, sea

$$A = RDR^{-1} = R\ diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}R^{-1},$$

entonces

$$\begin{aligned} A - I_n &= RDR^{-1} - I_n = RDR^{-1} - RR^{-1} = R(D - I_n)R^{-1} \\ &= R\ diag\{\lambda_1 - 1, ..., \lambda_n - 1\}R^{-1} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} ln_k(A) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}[R(D - I_n)R^{-1}]^p \\ &= \left(\frac{b_1(k)(-1)^0}{1}\right) R(D - I_n)R^{-1} + \left(\frac{b_2(k)(-1)^1}{2}\right) (R(D - I_n)R^{-1})(R(D - I_n)R^{-1}) + ... \\ &= \left(\frac{b_1(k)(-1)^0}{1}\right) R(D - I_n)R^{-1} + \left(\frac{b_2(k)(-1)^1}{2}\right) R(D - I_n)^2R^{-1} + ... \\ &= R\left(\frac{b_1(k)(-1)^0}{1}(D - I_n) + \frac{b_2(k)(-1)^1}{2}(D - I_n)^2 + \frac{b_3(k)(-1)^2}{3}(D - I_n)^3 + ...\right) R^{-1} \\ &= R\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(D - I_n)^p R^{-1}\right) \end{aligned}$$

Ahora el elemento i,j de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(D-I_n)^p$ es

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(\lambda_i-e_{ij})^p \tag{3.24}$$

con

$$\lambda_{ij}=\begin{cases}\lambda_i & \text{si} \quad i=j\\ \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j\end{cases} \quad \text{y} \quad e_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad i=j\\ \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j\end{cases}$$

Por (3.16), la serie (3.24) converge si $-1<\lambda_i-1\leq 1$, osea $0<\lambda_i\leq 2$. Ahora

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(\lambda_{ij}-e_{ij})^p=ln_k(\lambda_i),$$

luego

$$ln_k(A)=R\begin{pmatrix}ln_k(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & ln_k(\lambda_n)\end{pmatrix}R^{-1}$$

Además si $0<\lambda_i\leq 2$, implica que $\delta(A)\leq 2$ y $traza(A)\leq 2n$.

Proposición 3.25. *Para $b>0$ y $t>0$ se cumple,* $\displaystyle\frac{d}{dt}ln_k(tb)=\frac{1}{t}\left(\frac{ln_{2k}(tb)}{ln_k(tb)}\right)$

En efecto,

Demostración.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}ln_k(tb) &= \frac{k(tb)^{k-1}b+k(tb)^{-k-1}b}{2k}=b\left[\frac{(tb)^{k-1}+(tb)^{-k-1}}{2}\right]\\ &= b\left[\frac{(tb)^k(tb)^{-1}+(tb)^{-k}(tb)^{-1}}{2}\right]=\frac{1}{t}\left[\frac{(tb)^k+(tb)^{-k}}{2}\right]\\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{[(tb)^k]^2-[(tb)^k]^2}{2[(tb)^k-(tb)^{-k}]}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{(t^2b^2)^k-(t^2b^2)^{-k}}{2[(tb)^k-(tb)^{-k}]}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left[\frac{(t^2b^2)^k-(t^2b^2)^{-k}}{2}\right]\left[\frac{(tb)^k-(tb)^{-k}}{2}\right]^{-1}\\ &= \frac{1}{2t}\left(2ln_{2k}(tb)\right)\left(ln_k(tb)\right)^{-1}=\frac{1}{t}\left(\frac{ln_{2k}(tb)}{ln_k(tb)}\right)\end{aligned}$$

$\square$

Nótese que cuando $k \to 0$, $\dfrac{d}{dt} ln_k(tb)$ tiende a $\frac{1}{t}$.

Proposición 3.26. *Para una matriz diagonalizable* $B = RDR^{-1}$, $B = R\, diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} R^{-1}$ *donde* λ_i *es un vector propio de* B, *tenemos que*

$$\frac{d}{dt} ln_k(tB) = R \frac{d}{dt} ln_k(tD) R^{-1}.$$

En efecto, sabemos que $B - I_n = R(D - I_n)R^{-1}$, Ahora

$$\frac{d}{dt} ln_k(tB) = \frac{d}{dt} ln_k(tRDR^{-1}) = R\frac{d}{dt} ln_k(tD) R^{-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} ln_k(tD) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(tD - I_n)^p\right] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(t\lambda_1 - 1)^p\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{d}{dt}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p(k)(-1)^{p-1}}{p}(t\lambda_n - 1)^p\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} ln_k(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{d}{dt} ln_k(t\lambda_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} ln_{2k}(t\lambda_1)(ln_k(t\lambda_1))^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{t} ln_{2k}(t\lambda_n)(ln_k(t\lambda_n))^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{t}\begin{pmatrix} ln_{2k}(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ln_{2k}(t\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ln_{2k}(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ln_{2k}(t\lambda_n) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{t} ln_{2k}(tD)(ln_k(tD))^{-1},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} ln_k(tB) = R\left(\frac{1}{t} ln_{2k}(tD)(ln_k(tD))\right)^{-1} R^{-1}$$

Notese que cuando $k \to 0$

$$\frac{d}{dt}ln(tB) = \frac{1}{t}R\ ln(tD)(ln(tD))^{-1}R^{-1} = \frac{1}{t}I_n.$$

Proposición 3.27. *Para $b > 0$ y $t > 0$ se cumpe que*

$$\int ln_k(tb)dt = \frac{t}{1-k^2}\left(ln_k(tb) - \frac{ln_{2k}(tb)}{ln_k(tb)}\right) + c.$$

Veamos.

$$\begin{aligned}
\int ln_k(tb)dt &= \int \frac{(tb)^k - (tb)^{-k}}{2k}dt = \int \frac{(tb)^k}{2k}dt - \int \frac{(tb)^{-k}}{2k}dt \\
&= \frac{1}{2bk}\frac{(tb)^{k+1}}{(k+1)} - \frac{1}{2bk}\frac{(tb)^{-k+1}}{(-k+1)} + C \\
&= \frac{1}{2bk}\left(\frac{(tb)^k}{(k+1)} - \frac{(tb)^{-k}}{(-k+1)}\right) + C \\
&= \frac{t}{2k}\left(\frac{(-k+1)(tb)^k - (1+k)(tb)^{-k}}{(k+1)(-k+1)}\right) + C \\
&= \frac{t}{(k+1)(-k+1)}\left(\frac{(-k+1)(tb)^k - (1+k)(tb)^{-k}}{2k}\right) + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}\left(\frac{-k(tb)^k + (tb)^k - k(tb)^{-k} - (tb)^{-k}}{2k}\right) + C \\
&= \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{(tb)^k - (tb)^{-k}}{2k} - \frac{k(tb)^k + k(tb)^{-k}}{2k}\right) + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}\left(\frac{(tb)^k - (tb)^{-k}}{2k}\right) - \frac{tk}{1-k^2}\left(\frac{(tb)^k + (tb)^{-k}}{2k}\right) + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}Ln_k(tb) - \frac{t}{2(1-k^2)}\left(\frac{(t^2b^2)^k - (t^2b^2)^{-k}}{2k}\right)\left(\frac{2k}{(tb)^k - (tb)^{-k}}\right) + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}ln_k(tb) - \frac{t}{2(1-k^2)}ln_k((tb)^2)(ln_k(tb))^{-1} + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}ln_k(tb) - \frac{t}{1-k^2}\frac{ln_{2k}(tb)}{ln_k(tb)} + C \\
&= \frac{t}{1-k^2}\left(ln_k(tb) - \frac{ln_{2k}(tb)}{ln_k(tb)}\right) + C
\end{aligned}$$

notese que cuando $k \longrightarrow 0$, $\displaystyle\int ln(tb)dt = t(ln(tb) - 1) + C$

Proposición 3.28. *Para una matriz diagonalizable $B = RDR^{-1} = R\, diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}R^{-1}$, tenemos que*

$$\int ln_k(tB)dt = \frac{t}{1-k^2}\left(R\ ln_k(tD)R^{-1} - R\ ln_{2k}(tD)(Ln_k(tD))^{-1}R^{-1}\right) + C.$$

En efecto $\int ln_k(tB)dt = R\left(\int ln_k(tD)dt\right)R^{-1}$, Ahora

$$\begin{aligned}
\int ln_k(tD)dt &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k^2}(ln_k(t\lambda_1) - ln_{2k}(t\lambda_1)(ln_k(t\lambda_1))^{-1}) + C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1-k^2}(ln_k(t\lambda_n) - ln_{2k}(t\lambda_n)(ln_k(t\lambda_n))^{-1}) + C_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{t}{1-k^2}ln_k(tD) - \frac{t}{1-k^2}ln_{2k}(tD)(ln_k(tD))^{-1} + C
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int ln_k(tB)dt &= R\left(\frac{t}{1-k^2}ln_k(tD) - \frac{1}{1-k^2}ln_{2k}(tD)(ln_k(tD))^{-1} + C\right)R^{-1} \\
&= \frac{t}{1-k^2}\left(Rln_k(tD)R^{-1} - Rln_{2k}(tD)(ln_k(tD))^{-1}R^{-1}\right) + RCR^{-1}
\end{aligned}$$

Ahora cuando $k \to 0$

$$\begin{aligned}
\int ln(tB)dt &= R\left(tln(tD) - tI_n + C\right)R^{-1} \\
&= tRln(tD)R^{-1} - tI_n + C_R \\
\text{donde } C_R &= RCR^{-1}.
\end{aligned}$$

3.4. Ecuaciones k-diferenciales.

Para cada función real de variable real f que sea diferenciable, Kaniadakis [10] define la k-derivada de f por

$$\frac{d}{d_k x}f(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x \overset{k}{\ominus} z}.$$

También denota $d_k x := \lim_{z \to x} x \overset{k}{\ominus} z$, que se denomina k-diferencial.

La k-derivada se reduce a la derivada usual cuando k tiende a cero. Además, la k-derivada de una función f puede escribirse como

$$\frac{d}{d_k x} f(x) = \frac{df(x)}{dx_k} = \left(\frac{1}{dx_k/dx}\right)\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \sqrt{1+k^2x^2}\frac{d}{dx}f(x), \tag{3.25}$$

donde x_k denota la función deformadora de Kaniadakis dada por $x_k = \frac{1}{k} arcsenh(kx)$ porque en adelante, se asumirá que la función generadora de deformaciones es $g(x) = x$.

En la siguiente figura se ilustra una interpretación geométrica para la k-derivada evaluada en un número c. En la gráfica se representa la función f con linea continua y la función x_k con linea intermitente.

Geometricamente, para un real x_0 ubicado en un punto C eje x, se tiene la siguiente figura para interpretar la K derivada en x_0.

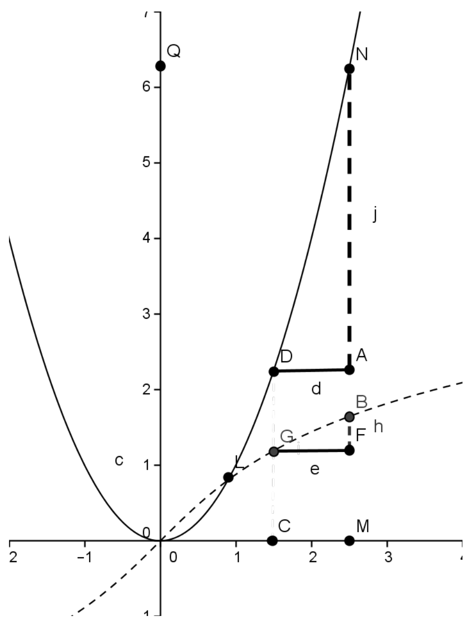

Figura 3.1: Interpretación geométrica de la k derivada en razón del parámetro k deformador en una curva dada

De acuerdo con la gráfica (3.1), se puede observar que la $k-$derivada definida por G. Kaniadakis, se interpretar como la razón de cambio entre la variación de las imagenes de una función, con respecto a la variación de las imagenes del deformador x_k, veamos

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BF}} = \left(\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}}\right)\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{BF}}\right) \text{ pero } \overline{AD} = \overline{GF} = \Delta x$$

$$\text{luego } \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\frac{\Delta x_k}{\Delta x}}\right) = \left(\frac{\Delta f/\Delta x}{\Delta x_k/\Delta x}\right)$$

$$= \frac{\Delta f}{\Delta x_k} = \frac{\overline{AN}}{\overline{BF}}$$

y tomando límite cuando $x \to x_0$ tenemos

$$\frac{df(x_0)}{d_k x} = \left(\frac{1}{d_k x/dx}\right)\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$$

Por otro lado podemos observar que la $k-$derivada se puede definir como la razón entre dos pendientes de rectas tangentes, veamos.

Sea m_1 la pendiente de la recta tangente a la función f en x_0 luego

$$m_1 = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Además, sea m_2 la pendiente de la recta tangente de la función deformada de Kaniadakis en x_0, por lo tanto,

$$m_2 = \frac{d(x_0)_k}{dx}$$

donde $d(x_0)$ es $d(x)_k$ cuando $x = x_0$, Ahora

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{df(x_0)/dx}{d(x_0)_k/dx} = \left(\frac{1}{d(x_0)_k/dx}\right)\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right) = \frac{df(x_0)}{d_k x}$$

Proposición 3.29. *La $k-$derivada de f en un número x_0, es la pendiente de la recta tangente a la hipérbola dada por*

$$g(x) \quad = \quad f'_k(x_0)(x \overset{k}{\ominus} x_0) + f(x_0),$$

en el punto x_0. De tal forma, g es una especie de hipérbola "tangente" a f en el punto x_0.

En efecto,

$$\begin{aligned} g(x) &= f'_k(x_0)(x \overset{\text{k}}{\ominus} x_0) + f(x_0) \\ &= f'_k(x_0)(x\sqrt{1+k^2x_0^2} - x_0\sqrt{1+k^2x^2}) + f(x_0) \end{aligned}$$

Además,

$$f'_k(x_0)(x \overset{k}{\ominus} x_0) = g(x) - f(x_0)$$

$$f'_k(x_0)(x\sqrt{1+k^2x_0^2} - x_0\sqrt{1+k^2x^2}) = g(x) - f(x_0)$$

$$xf'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2} - x_0f'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x^2} = y - f(x_0)$$

donde $y = g(x)$

$$(xf'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2} + f(x_0) - y)^2 = (x_0f'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x^2})^2$$

$$x^2(f'_k(x_0))^2(1+k^2x_0^2)+(f(x_0))^2+y^2+2xf'_k(x_0)f(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2}-2xyf'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2}-2yf(x_0)$$
$$= x_0^2(f'_k(x_0))^2(1+k^2x^2)$$
$$(f'_k(x_0))^2x^2 - (2f'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2})xy + y^2 + (2f'_k(x_0)f(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2})x$$
$$-(2f(x_0))y + (f(x_0))^2 - x_0^2(f'_k(x_0))^2 = 0$$

Dado que la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se tiene que

$$\begin{aligned} A &= (f'_k(x_0))^2 & D &= 2f'_k(x_0)f(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2} \\ B &= -2f'_k(x_0)\sqrt{1+k^2x_0^2} & E &= -2f(x_0) \\ C &= 1 & F &= (f(x_0))^2 - x_0^2(f'_k(x_0))^2 \end{aligned}$$

Partiendo del discriminante B^2-4AC determinamos que tipo de cónica se presenta. Sean $A, B, C \neq 0$.

$$\text{Así } B^2 - 4AC \begin{cases} > & 0 \quad \text{hipérbola} \\ < & 0 \quad \text{elipse} \\ = & 0 \quad \text{parábola} \end{cases}$$

Luego

$$4(f'_k(x_0))^2(1+k^2x_0^2) - 4(f'_k(x_0))^2(1) = B^2 - 4AC$$

$$4k^2x_0^2(f_k'(x_0))^2 = B^2 - 4AC$$

Si $4k^2x_0^2(f_k'(x_0))^2 > 0$ entonces genera una hipérbola

Si $4k^2x_0^2(f_k'(x_0))^2 = 0$ se tiene que $k = 0$ (recta tangente), $x_0 = 0$ (parábola), $f_k'(x_0) = 0$ (parábola) ya que $f_k'(x_0) = \sqrt{1 + k^2x_0^2}f'(x_0) = 0$ se debe cumplir que $f'(x_0) = 0$.

Además si $B = 0$;

$$-2f_k'(x_0)\sqrt{1 + k^2x_0^2} = 0$$

$$-2\sqrt{1 + k^2x_0^2}f'(x_0)\sqrt{1 + k^2x^2} = 0$$

$$-2(1 + k^2x_0^2)f'(x_0) = 0$$

luego $f'(x_0) = 0$

Por lo tanto se verifica que $g(x)$ es recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $k = 0$ y es hiperbola para $k \neq 0$, además cuando $f'(x_0) = 0$ genera una parábola.

Ahora veamos que $g(x_0) = f(x_0)$ en efecto,

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f_k'(x_0)\left(x_0\sqrt{1 + k^2x_0^2} - x_0\sqrt{1 + k^2x^2}\right) + f(x_0) \\ g(x_0) &= f'(x_0)(0) + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

Ahora probamos que f y g tienen la misma pendiente en x_0, es decir, $g'(x_0) = f'(x_0)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f_k'(x_0)\left(\sqrt{1+k^2x_0^2}-\frac{x_0xk^2}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right)=f_k'(x_0)\left(\frac{\sqrt{1+k^2x_0^2}\sqrt{1+k^2x^2}-x_0xk^2}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right)\\
g'(x) &= f_k'(x_0)\left(\frac{\sqrt{1+k^2x_0^2}\sqrt{1+k^2x_0^2}-x_0x_0k^2}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}\right)\\
g'(x) &= f_k'(x_0)\left(\frac{1+k^2x_0^2-x_0^2k^2}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}\right)=f_k'(x_0)\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}\\
g'(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}\cdot\sqrt{1+k^2x_0^2}f'(x_0)\\
g'(x_0) &= f'(x_0).
\end{aligned}$$

A manera de ejemplo, en la figura (3.2) se visualiza la función $f(x)=x^2$, que es tangente a la hipérbola g en el punto $x_0=2$, para valores de $k=0.5, 0.25, 0.1$. Nótese en la gtráfica, que cuando k tiende a cero, la curva g tiende a la recta tangebte a f en x_0.

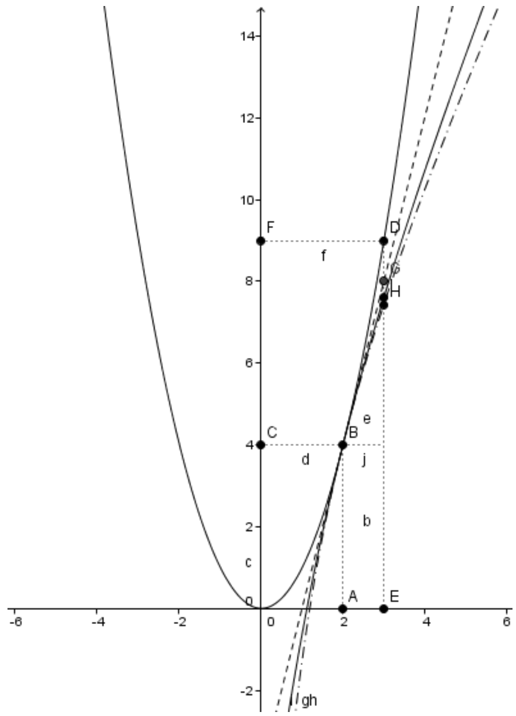

Figura 3.2: Comportamiento hiperbólico del parámetro k deformador en una curva dada.

Vemos ahora algunas propiedades de la k-derivada.

Proposición 3.30. *Sean* $f, g \in \mathbf{F}$, $B \in \mathbb{R}$, *entonces se cumplen*

1.
$$\begin{aligned} \frac{d}{d_k x}(f+g) &= \frac{d}{d_k x}(f+g) = \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}(f+g)\right) \\ &= \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g\right) = \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}f\right) + \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}g\right) \\ &= \frac{d}{d_k x}f + \frac{d}{d_k x}g \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{d}{d_k x}(f \cdot g) &= \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}(f \cdot g)\right) = \frac{1}{d_k x/dx}\left[\left(\frac{d}{dx}f\right)\cdot g + f\left(\frac{d}{dx}g\right)\right] \\ &= \frac{1}{\frac{d_k x}{dx}}\left[\left(\frac{d}{dx}f\right)\cdot g\right] + \frac{1}{\frac{d_k x}{dx}}\left[f \cdot \left(\frac{d}{dx}g\right)\right] = g\left(\frac{d}{d_k x}f\right) + f\left(\frac{d}{d_k x}g\right) \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \frac{d}{d_k x}\left[f(g(x))\right] &= \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}(f[g(x)])\right) \\ &= \frac{1}{d_k x/dx}\left(\frac{d}{dx}f(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))\right) \end{aligned}$$

Veamos ahora una aplicación de la k-derivada en un contexto físico. Considérese el movimiento lineal ralativista de una partícula de masa m_0 en reposo que se mueve a velocidad $\overrightarrow{v}$ respecto de un sistema de referencia S, donde

$$\overrightarrow{P} = \frac{m_0\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\overrightarrow{v} \text{ donde } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

es la masa media de la partícula, además $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ se conoce como factor de lorentz. Luego el momento de manera relativista es

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v}\gamma.$$

Se sabe que la fuerza ralativista F sobre una particula cuyo momento es P se define como:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0\overrightarrow{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = \frac{d}{dt}\left[m_0 v(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right]$$

se quiere verificar que la fuerza ralativista según kaniadakis es

$$\overrightarrow{F}_k = \sqrt{1+k^2t^2}\left[\frac{m_0}{(1-k^2v^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\right].$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[m_0 v(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right] \\
&= m_0\frac{dv}{dt}(1-v^2/c^2)^{-1/2} + m_0 v(\frac{-1}{2})(1-v^2/c^2)^{-3/2}(\frac{-2v}{c^2})\frac{dv}{dt} \\
&= \frac{m_0 dv/dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_0 dv/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{v}{c^2} \\
&= \frac{m_0\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[1+\frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\right] \quad si \quad k=\frac{1}{c} \\
&= \frac{m_0\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-k^2v^2}}\left[1+\frac{k^2v^2}{1-k^2v^2}\right] = \frac{m_0\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-k^2v^2}}\left[\frac{1}{1-k^2v^2}\right] = \frac{m_0\frac{dv}{dt}}{(1-k^2v^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_k &= \sqrt{1+k^2t^2}\frac{d\overrightarrow{P}}{dt}\\ \overrightarrow{F}_k &= \sqrt{1+k^2t^2}\left[\frac{m_0\frac{dv}{dt}}{(1-k^2v^2)^{3/2}}\right]\\ \overrightarrow{F}_k &= \sqrt{1+k^2t^2}\left(\frac{m_0}{(1-k^2v^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\right)\end{aligned}$$

como $\frac{P(v_1)}{m_1} \overset{k}{\ominus} \frac{P(v_2)}{m_2} = \frac{P(v_1 \overset{k}{\ominus} v_2)}{m_1}$ además se tiene que la k-hiperbolización de una función se expresa de la forma

$$h(x) = f'_k(x_0)(x \overset{k}{\ominus} x_0) + f(x_0)$$

despejando la k-diferencia de esta expresión, se obtiene

$$x \overset{k}{\ominus} x_0 = \frac{h(x) - f(x_0)}{f'_k(x_0)}$$

para el caso de momento lineal relativista, P_1 y P_2 tenemos

$$\frac{P(v_1)}{m_1} \overset{k}{\ominus} \frac{P(v_2)}{m_2} = \frac{h(P(v_1)/m_1) - f(P_2(v_2)/m_2)}{f'_k(P_2(v_2)/m_2)} = \frac{P(v_1 \overset{c}{\ominus} v_2)}{m_1}$$

para $f(x) = x$ función identica se tiene que

$$f_k(x_0) = \sqrt{1+k^2x_0^2}f'(x_0) = \sqrt{1+k^2x_0^2}$$

luego,

$$\frac{h(P(v_1)/m_1) - P_2(v_2)/m_2}{\sqrt{1+k^2(P_2(v_2)/m_2)^2}} = \frac{h(P(v_1)/m_1) - P_2(v_2)/m_2}{\sqrt{1+k^2(v_2/1-k^2v_2^2}} = \frac{h(P(v_1)/m_1) - P_2(v_2)/m_2}{\sqrt{1/1-k^2v_2^2}}$$

$$= \sqrt{1-k^2v_2^2}(h(\frac{p(v_1)}{m_1}) - \frac{p(v_2)}{m_2}) = \sqrt{1-k^2v_2^2}(h(\frac{p(v_1)}{m_1}) - \sqrt{1-k^2v_2^2}\frac{p(v_2)}{m_2})$$

$$\sqrt{1-k^2v_2^2}(h(\frac{p(v_1)}{m_1}) - v_2 = \frac{P(v_1 \overset{c}{\ominus} v_1)}{m_1}$$

A continuación se define la antiderivada para una función k-deformada

Definición 3.31. Sea $f \in \mathbf{F}$, donde $\mathbf{F} : \{f : X \to Y\}$ con $f \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$.

$$\int_k f(x)d_kx = \int \frac{dx_k}{dx} f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} f(x)dx$$

notemos que si $k \to 0$, entonces $\displaystyle\int_k f(x)d_kx = \int f(x)dx$

Una Ecuación k-diferencial es una ecuación diferencial que se puede escribir en términos de k-derivadas en lugar de derivadas ordinarias.

Ejemplo 3.32. La ecuación k-diferencial dada por, $y_k'' - 2y_k' + (1-k^2)y = 0$ tiene como solución $y = xe_k^x$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_kx}(xe_k^x) &= e_k^x \frac{d}{d_kx}(x) + x\frac{d}{d_kx}e_k^x = e_k^x\frac{d}{d_kx} + xe_k^x \\
\frac{d^2}{d_kx^2}(xe_k^x) &= \frac{d}{d_kx}\left(e_k^x\frac{d}{d_kx}(x) + xe_k^x\right) \\
&= e_k^x\frac{d}{d_kx}(x) + e_k^x\frac{d^2}{d_kx^2}(x) + e_k^x\frac{d}{d_kx}(x) + xe_k^x
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_kx}(x) &= \frac{1}{\frac{dx_k}{dx}}(1) = \sqrt{1+k^2x^2} \\
\frac{d^2}{d_kx^2}(x) &= \frac{d}{d_kx}(\sqrt{1+k^2x^2}) = \frac{1}{\frac{d_kx}{dx}}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1+k^2x^2}\right) \\
&= \sqrt{1+k^2x^2}\left(\frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right) = k^2x
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
y_k'' - 2y_k' + y &= \left(2e_k^x\frac{d}{d_kx}(x) + e_k^x\frac{d^2}{d_kx^2}(x) + e_k^x x\right) \\
&\quad -2\left(e_k^x\frac{d}{d_kx}(x) + xe_k^x\right) + xe_k^x = e_k^x\frac{d^2}{d_kx^2}(x) \\
&= k^2xe_k^x = k^2y
\end{aligned}$$

entonces $y_k'' - 2y_k' + (1-k^2)y = 0$ vemos que cuando $k \to 0$ $\;y_k'' - 2y_k' + (1-k^2)y = 0$ se reduce a $y_k'' - 2y_k' + y = 0$ y $y = xe_k^x$ se reduce a $y = xe^x$. Sin muchas dificultades se puede comprobar que $y = xe^x$ es solución de $y_k'' - 2y_k' + y = 0$ □

Ejemplo 3.33. La ecuación k-diferencial dada por $\dfrac{dy}{d_k x} = \dfrac{1-k^2x^2}{\sqrt{1+k^2x^2}}(2xy)$ tiene como solución $y = e_k^{x^2}$

Demostración. En efecto,

$$\frac{d}{d_k x}(exp_k(x^2)) = \frac{1}{\frac{d_k x}{dx}}\left(\frac{d}{dx}exp_k(x^2)\right) = \sqrt{1+k^2x^2}\frac{d}{dx}\ exp_k(x^2)$$

pero

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}exp_k(x^2) &= \frac{d}{dx}\left([\sqrt{1+k^2x^4}+kx^2]^{1/k}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\sqrt{1+k^2x^4}+kx^2\right)^{\frac{1}{k}-1}\left(\frac{k^2(4x^3)}{2\sqrt{1+k^2x^4}}+2kx\right) \\
&= 2x\left(\sqrt{1+k^2x^4}+kx^2\right)^{\frac{1}{k}-1}\left[\frac{kx^2+\sqrt{1+k^2x^4}}{\sqrt{1+k^2x^4}}\right] \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1+k^2x^4}}\ exp_k(x^2)\ \ \textit{luego} \\
\frac{d}{d_k x}\left(exp_k(x^2)\right) &= \frac{\sqrt{1+k^2x^2}}{\sqrt{1+k^2x^4}}\ 2x\left(exp_k(x^2)\right)
\end{aligned}$$

cuando $k \to 0$ la ecuación k-diferencial y su solución se reduce a $\frac{dy}{dx} = 2xy$ con solución $y = e^{x^2}$. □

3.4.1. Solución de Ecuaciones k-diferenciales Separables

Una ecuación k-diferencial separable tiene la siguiente forma

$$\frac{dy}{d_k x} = f(x)\cdot g(y) \tag{3.26}$$

Ahora bien, separando variable obtenemos:

$$\left(\frac{1}{g(y)}\right)\left(\frac{1}{\frac{d_k y}{dy}}\right)d_k y = f(x)d_k x$$

pero,

$$\int_k \left(\frac{1}{g(y)}\right)\left(\frac{1}{\frac{d_k y}{dy}}\right)d_k y = \int \frac{d_k y}{dy}\left(\frac{1}{\frac{d_k y}{dy}}\right)\left(\frac{1}{g(y)}\right)dy = \int\left(\frac{1}{g(y)}\right)dy$$

y por lo tanto

$$\int \left(\frac{1}{g(y)}\right) dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} f(x)dx \tag{3.27}$$

La ecuación (3.27) permite obtener la solución de la ecuación (3.26)

Ejemplo 3.34. Hallar la solución de $\frac{dy}{d_k x} = y$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} dx$$

Ahora

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} dx = \frac{1}{k} \int \frac{d(kx)}{\sqrt{1+(kx)^2}} = \frac{1}{k} ln\,|sec\theta + tan\theta| + C$$

donde $kx = tan\theta$ luego

$$\begin{aligned} ln(y) &= ln\left|(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{1/k}\right| + C_1 \\ y = e^{c_1}(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{1/k} &= C_2 exp_k(x) \end{aligned}$$

cuando $k \to 0$ $\frac{dy}{dx} = y$ con solución $y = Ce^x$

Ejemplo 3.35. Hallar la solución de la ecuación k-diferencial

$$\frac{dy}{d_k x} = \frac{-\sqrt{1+k^2x^2}\,x}{y}.$$

$$\begin{aligned} \int y dy &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right) \left(-\sqrt{1+k^2x^2}\right) dx \\ \int y dy &= -\int x dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_1 \ \therefore\ y^2 + x^2 = C_2 \end{aligned}$$

cuando $k \to 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ se soluciona implicitamente con la expresión $y^2 + x^2 = C$

3.4.2. Ecuaciones k-diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Una ecuación k-diferencial lineal con coeficientes constantes, es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{d_k x} = ay + f(x) \tag{3.28}$$

Procediendo por variación de parámetros, supongamos que $f(x) = 0$, por lo tanto,

$$\frac{dy}{d_k x} = ay \tag{3.29}$$

Separando variables obtenemos:

$$\frac{dy}{y} = ad_k x$$

luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} adx \\ lny &= aln \left| (\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{1/k} \right| + C_1 \\ y &= C_2 \left[(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{1/k} \right]^a = C_2 \left(e_k^x \right)^a \end{aligned}$$

$$y = C_2 exp_{k/a}(ax) \tag{3.30}$$

donde $C_2 = e^{C_1}$
Cuando $k \to 0$, la ecuación k-diferencial (3.28) se reduce a $\frac{dy}{dx} = ay$ y su respectiva solución (3.29) se reduce a $y = Cexp(ax)$

Consideremos en (3.30) $C_2 = v(x)$, luego

$$y = v(x)\ exp_{k/a}(ax) \tag{3.31}$$

entonces,

$$\frac{dy}{d_k x} = \left(\frac{dv(x)}{d_k x} \right) \left(exp_{k/a}(ax) \right) + v(x) \frac{d}{d_k x}\ exp_{k/a}(ax)$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_k x}(exp_{k/a}(ax)) &= \frac{d}{d_k x} \left[(exp_k(x))^a \right] = \sqrt{1+k^2x^2} \frac{d}{dx} (exp_k(x))^a \\ &= \sqrt{1+k^2x^2} a (exp_k(x))^{a-1} \frac{d}{dx} (exp_k(x)) \\ &= \sqrt{1+k^2x^2} a (exp_k(x))^{a-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} exp_k(x) \right) \\ &= a(exp_k(x))^a = a(exp_{k/a}(ax)), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{dy}{d_k(x)} = \sqrt{1+k^2x^2}v'(x)\left(exp_{k/a}(ax)\right) + av(x)\left(exp_{k/a}(ax)\right) \tag{3.32}$$

reemplazando (3.29) y (3.32) en (3.28) tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+k^2x^2}v'(x)exp_{k/a}(ax) + av(x)(exp_{k/a}(ax)) &= av(x)exp_{k/a}(ax) + f(x) \\
\left(\frac{d}{d_kx}v(x)\right)exp_{k/a}(ax) &= f(x) \\
\frac{d}{d_kx}v(x) &= f(x)\left(exp_{k/a}(ax)\right)^{-1} \\
\frac{d}{d_kx}v(x) &= f(x)\left(exp_{-k/a}(-ax)\right) \\
v(x) &= \int_k f(x)\left(exp_{-k/a}(-ax)\right)d_kx
\end{aligned}$$

Luego la solución general de (3.28) es

$$y = Cexp_{k/a}(ax) + exp_{k/a}(ax)\int_k f(s)\left(exp_{-k/a}(-as)\right)d_ks \tag{3.33}$$

Se observa, que cuando $k \to 0$, la ecuación k-diferencial (3.28) se reduce a $\frac{dy}{dx} = ay + f(x)$ y su respectiva solución es la reducción de (3.31) cuando $k \to 0$, osea

$$y = Cexp(ax) + exp(ax)\int f(y)(exp(-ay))dy$$

3.5. Sistemas de Ecuaciones k-diferenciales

Definición 3.36. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz constante e Y una función matricial de orden $n \times n$. La ecuación k-diferencial matricial.

$$\frac{dY}{d_kt} = AY$$

Se denomina sistema de lineal homogéneo con coeficientes constantes.

Proposición 3.37. *Sea D una matriz diagonal $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, entonces la función matricial*

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 exp_{k/\lambda_1}(\lambda_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n exp_{k/\lambda_n}(\lambda_n t) \end{pmatrix}$$

es solución de la ecuación k-diferencial

$$\frac{dY}{d_k t} = DY \tag{3.34}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d_k t} &= \frac{d}{d_k t} \begin{pmatrix} C_1 exp_{k/\lambda_1}(\lambda_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n exp_{k/\lambda_n}(\lambda_n t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d_k t} C_1 exp_{k/\lambda_1}(\lambda_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{d}{d_k t} C_n exp_{k/\lambda_n}(\lambda_n t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \lambda_1 exp_{k/\lambda_1}(\lambda_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \lambda_n exp_{k/\lambda_n}(\lambda_n t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 exp_{k/\lambda_1}(\lambda_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n exp_{k/\lambda_n}(\lambda_n t) \end{pmatrix} \\ &= DY \end{aligned}$$

Observación 3.38.

1. Si $D = I_n$ entonces $Y(t) = Cexp_k(tI_n)$ es solución de (3.34).

2. Cuando $k \to 0$ entonces $\frac{dY}{dt} = DY$ tiene como solución a $Y = Cexp(tD)$

Ejemplo 3.39. Consideremos primero $Y_k'(t) = AY$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Y_{11}(t) & Y_{12}(t) \\ Y_{21}(t) & Y_{22}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11}(t) & Y_{12}(t) \\ Y_{21}(t) & Y_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{k11}(t) & Y'_{k12}(t) \\ Y'_{k21}(t) & Y'_{k22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1Y_{11}(t) & d_1Y_{12}(t) \\ d_2Y_{21}(t) & d_2Y_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y'_{k11}(t) = d_1Y_{11}(t) &\;\rightarrow\; Y_{11} = C_{11}exp_{k/d_1}(d_1t) \\ Y'_{k12}(t) = d_1Y_{12}(t) &\;\rightarrow\; Y_{12} = C_{12}exp_{k/d_1}(d_1t) \\ Y'_{k21}(t) = d_2Y_{21}(t) &\;\rightarrow\; Y_{21} = C_{21}exp_{k/d_2}(d_2t) \\ Y'_{k22}(t) = d_2Y_{22}(t) &\;\rightarrow\; Y_{22} = C_{22}exp_{k/d_2}(d_2t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} C_{11}exp_{k/d_1}(d_1t) & C_{12}exp_{k/d_1}(d_1t) \\ C_{21}exp_{k/d_2}(d_2t) & C_{22}exp_{k/d_2}(d_2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11}exp_{k/d_1}(d_1t) & C_{12}exp_{k/d_1}(d_1t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{21}exp_{k/d_2}(d_2t) & C_{22}exp_{k/d_2}(d_2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} exp_{k/d_1}(d_1t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} exp_{k/d_2}(d_2t) \end{aligned}$$

De la misma forma podemos concluir:

$$\frac{d}{d_kt}\begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix}$$

tiene como solución

$$\begin{pmatrix} C_{11}exp_{k/d_1}(d_1t)\ddots & \cdots & C_{1n}exp_{k/d_1}(d_1t) \\ \vdots & C_{ij}exp_{k/d_i}(d_it) & \vdots \\ C_{n1}exp_{k/d_n}(d_nt) & \cdots & \ddots C_{nn}exp_{k/d_n}(d_nt) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ C_{i1} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} exp_{k/d_i}(d_it)$$

Proposición 3.40. *Sea $A = PDP^{-1}$ una matriz diagonalizable, por lo tanto $Y_A = PY(t)P^{-1}$, es solución de la ecuación k-diferencial $\frac{dY(t)}{d_kt} = AY(t)$*

En efecto, $\frac{d}{d_kt}Y_A(t) = P\frac{d}{d_kt}(Y(t))P^{-1} = PDY(t)p^{-1}$, pero $A = PDP^{-1}$ implica $AP = PD$, luego $\frac{d}{d_kt}Y_A(t) = APY(t)P^{-1} = AY_A(t)$

Proposición 3.41. *Sea A una matriz diagonalizable donde $A = PDP^{-1}$ con $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ entonces $Y_A = PY(t)P^{-1}$ con $Y_k'(t) = DY$ es solución de $Y_k'(t) = AY$ en efecto*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_kt}Y_A &= \frac{d}{d_kt}(PY(t)P^{-1}) \\
&= PY_k'(t)P^{-1} \\
&= PDY(t)P^{-1} \text{ ya que } AP = PD \\
&= APY(t)P^{-1} \\
&= AY_A(t)
\end{aligned}$$

donde

$$Y_A = P\left[\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ C_{ii} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} exp_{k/\lambda_i}(\lambda_i t)\right]P^{-1}$$

Observación 3.42. Nótese que si Y es como en (3.34), se tiene:

1. Cuando $D = I_n,\ Y_A = Pexp_k(tI_n)P^{-1} = exp_k(tA)$
2. Cuando $k \to 0,\ Y_A = Pexp(tD)P^{-1} = exp(tA)$ es solución de $\frac{dY(t)}{d_kt} = AY$

Veamos ahora el caso de sistema lineales no homogéneos con coeficientes constantes.

Proposición 3.43. *Sea A una matriz constante de orden $n \times n$, y una función matricial n-dimensional $F(t)$ continua en un intervalo I.*

El sistema lineal no homogéneo

$$\frac{dY}{d_kt} = AY + F(t) \tag{3.35}$$

donde,

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(t) \end{pmatrix}$$

tiene solución en I dada por

$$Y(t) = Y_A(t)C + Y_A(t)\int_k Y_A^{-1}(s)F(s)d_ks$$

En efecto, primero suponemos que $F(t) = O_n$. Entonces $\dfrac{dY}{d_kt} = AY$ tiene como solución general a $Y_1 = Y_A(t)C$ con $C = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix}$,

$$\frac{d}{d_kt}(Y_1) = \frac{d}{d_kt}(Y_AC) = AY_A(t)C = AY_1$$

Ahora, transformando la matriz C en una función matricial $V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n(t) \end{pmatrix}$ tenemos

$$Y(t) = Y_A(t)V(t) \Rightarrow \frac{dY}{d_kt}(t) = \left[\frac{d}{d_kt}Y_A(t)\right]V(t) + Y_A(t)\left[\frac{d}{d_kt}V(t)\right]$$

luego

$$AY_A(t)V(t) + F(t) = AY_A(t)V(t) + Y_A(t)\frac{d}{d_kt}V(t)$$

$$F(t) = Y_A(t)\frac{d}{d_kt}V(t) \quad \textit{luego}$$

$$Y_A^{-1}(t)F(t) = \frac{d}{d_kt}V(t) \quad \textit{para} \quad det[Y_A(t)] \neq 0$$

$$V(S) = \int_k Y_A^{-1}(s)F(s)d_ks$$

y la solución general de (3.35)

$$Y = Y_A(t)C + Y_A(t)\int_k Y_A^{-1}(S)F(s)d_s s$$

Sí $Y_k'(t) = AY + F(t)$ con $A = PDP^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ y $Y_k' = DY$ suponiendo que $F(t) = 0$, $Y'(t) = AY$ tiene como solución general $Y_1 = Y_A(t)C$ en efecto,

$$\frac{d}{d_k t}(Y_1(t)) = \frac{d}{d_k t}(Y_A(t)C) = AY_A(t)C = AY_1(t).$$

Ahora transformemos la matriz constante C por la matriz de función $v(t)$, entonces,

$$Y(t) = Y_A(t)v(t) \Rightarrow \frac{d}{d_k(t)}Y(t) = \left[\frac{d}{d_k t}Y_A(t)\right]v(t) + Y_A(t)\left[\frac{d}{d_k t}v(t)\right]$$

Luego,

$$AY_A(t)v(t) + F(t) = AY_A(t)v(t) + Y_A(t)\frac{d}{d_k t}v(t)$$

$$F(t) = Y_A(t)\frac{d}{d_k t}v(t)$$

entonces $v(s) = \int_k Y_A^{-1}(s)F(s)ds$ y la solución geneal de $Y_k'(t) = AY + F(t)$ es,

$$Y(t) = Y_A(t)C + Y_A(t)\int_k Y_A^{-1}(s)F(s)ds$$

Observación 3.44.

1. Cuando $D = I_n$ entonces $Y = e_k^{tA}C + e_k^{tA}\int_k e_k^{-sA}F(s)ds$
2. Cuando $k \to 0$; $Y = e^{tA}C + e^{tA}\int e^{-sA}F(s)ds$ es solución de $\frac{dY}{dt} = AY + F(t)$.

En el siguiente ejemplo se considera un sistema acoplado, donde a diferencia de los casos anteriores, la matriz A es no diagonalizable.

Ejemplo 3.45. Consideremos el sistema

$$Y_k'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} Y(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aY_{11} & aY_{12} \\ bY_{11} & bY_{12} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned}
Y'_{k11}(t) = aY_{11} \quad &\rightarrow \quad Y_{11} = C_{11} exp_{k/a}(at) \\
Y'_{k12}(t) = aY_{12} \quad &\rightarrow \quad Y_{12} = C_{12} exp_{k/a}(at) \\
Y'_{k21}(t) = bY_{11} \quad &\rightarrow \quad Y_{21} = \frac{a}{b} C_{11} exp_{k/a}(at) \\
Y'_{k22}(t) = bY_{12} \quad &\rightarrow \quad Y_{22} = \frac{a}{b} C_{12} exp_{k/a}(at)
\end{aligned}$$

Ahora se tiene que

$$\frac{Y'_{k11}}{a} = \frac{Y'_{k21}}{b}$$

k-integrando se tiene,

$$\int_k \frac{Y'_{k11}}{a} d_k x \quad = \quad \int_k \frac{Y'_{k21}}{b} d_k x,$$

entonces, $\frac{1}{a} Y_{11} + C = \frac{1}{b} Y_{21}$ y en consecuencia $Y_{21} = \frac{b}{a} Y_{11} + C$.

De igual manera para

$$\frac{Y'_{k12}}{a} = \frac{Y'_{k22}}{b} \therefore \boxed{Y_{22} = \frac{b}{a} Y_{12} + C}$$

luego la matriz $Y(t) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \frac{b}{a} C_{11} & \frac{b}{a} C_{12} \end{pmatrix} exp_{k/a}(at)$ es solución de $Y'_k(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} Y(t)$.

De manera general se tiene que:

$$Y'_k(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & & \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} Y_{11} & a_{11} Y_{12} & \cdots & a_{11} Y_{1n} \\ a_{22} Y_{11} & a_{21} Y_{12} & \cdots & a_{21} Y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} Y_{11} & a_{n1} Y_{12} & \cdots & a_{n1} Y_{nn} \end{pmatrix}$$

su solución es

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} C_{11} & \cdots & \frac{a_{21}}{a_{11}} C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} C_{11} & \cdots & \frac{a_{n1}}{a_{11}} C_{1n} \end{pmatrix} exp_{k/a_{11}}(a_{11} t).$$

Problemas abiertos

1. En contextos físicos donde se involucre la relatividad especial, pueden buscarse modelos matemáticos que correspondan a sistemas acoplados de ecuaciones k-diferenciales. También es pertinente juzgar sobre la aplicación en contextos diferentes a la relatividad y, por que no, a la física.

2. A nivel teórico, es pertinente continuar el estudio considerando formas de Jordan.

Conclusiones

Así como los estudios sobre la exponencial natural de una matriz cuadrada se han extendido hacia el contexto de q-deformaciones según la mecánica estadástica de Tsallis, en el presente trabajo, también han sido extendidos hacia las K-deformaciones según la mecánicaestadística de G. Kaniadakis y la teoría puede dar cuenta de sistemas acoplados de ecuaciones k-diferenciales.

Bibliografía

[1] Asmar A. *Topicos en Teoria de Matrices. Facultad de Ciencias*. Universidad Nacional de Colombia. (1995)

[2] Apostol T. *Cálculo con Funciones de Varias Variables y Álgebra Lineal con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades*. Editorial Reverté, Colombia S.A. Vol 2, (1988)

[3] Bellman R. *On the Calculation of Matrix Exponential*. Linear and Multilinear Álgebra, Vol. 41. Pág. 73-79 (1983).

[4] Borges P. *Manifestacoes Dinamicas e Termodinamicas de Sistemas Nao - Extensivos*. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro, (2004)

[5] E. Borges P. *A Possible Deformed Algebra And Calculus Inspired In Nonextensibe Thermostatistics*, [http://arXiv.org/cond-mat/0304545] aceptado para publicación en Physica A, (2004)

[6] Boyce W. Diprima R. *Elementary Diferential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2da Ed. New York, (1969)

[7] Dora Esther Dcossa Casas. *Sobre Funciones Exponenciales y Logarítmicas Deformadas Según Kaniadakis*. Tesis de Maestría Universidad EAFIT. Pág. 8-9, (2011).

[8] Juan Carlo Arango Parra. *Una k-deformación para la variedad de información estadistica*. Tesis de Maestría Universidad EAFIT. Pág. 23-24, (2012).

[9] G. Kaniadakis. *Statistical mechanics in the context of special relativity*. Physical Review E 66, 056121 (2002).

[10] G. Kaniadakis. *Statistical mechanics in the context of special relativity II*. Physical Review E 72, 036108 - Published 9 September (2005).

[11] Goldstein H. *Classical mechanics*, 3rd Ed. Prentice Hall,(2002)

[12] I.S Gradshteyn and I.M Ryzhil. *Table of Integrals, Series and Product*. Academic Press, London, (2000).

[13] Hernández V, Ibáñez J. *Funciones de Matrices*. Departamento de Sistemas Informáticos y Computación. *Universidad Politécnica de Valencia* (2006)

[14] Kincaid D. *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. The University of Texas en Austin. Addison - Wesley Iberoamericana. (1994)

[15] Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, 7 ed., New York, (1993)

[16] Marmolejo M. *Sobre la Exponencial de una Matriz*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XII, No.2, (2004).

[17] Meyer Carl D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam, Abril 19, (2000)

[18] Moler C. y Loan V. *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix*, SIAM Review 20, (1978)

[19] Naudts J. *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatistics. Department Natuurkunde*, Universiteit Antwerpen UIA, Universiteitsplein 1, 2610 Antwerpen, Belgium, (2002)

[20] Rodríguez B, Lara H, Moya C, Viana S. *Por qué y cómo Encontramos Funciones de Matrices: Entropía en Mecánica Cuántica. Revista Mexicana de Física E 51(2) pág. 87-98.* (2005)

[21] Telvia Rosa Castilla Peñate y Freddy Antonio Vidal Esquivel. *Representación matricial de la Función q-exponencial*. Tesis de Maestría Universidad EAFIT, (2014).

[22] Tsallis C. *Nonextensive statistical mechanics and nonlinear dynamics, in Interdisciplinary*

[23] Wade W. *An Introduction To Analysis*, Prentice Hall, pág. 125, (1999)