

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente

Repositorio Institucional del ITESO

rei.iteso.mx

---

Departamento de Matemáticas y Física

DMAF - Artículos y ponencias con arbitraje

---

2013-10-23

# Diseño un controlador robusto basado en observador para el modelo lineal de un helicóptero de un grado de libertad (VTOL)

Salazar, María C.; Sánchez-Torres, Juan D.; Botero-Castro, Héctor

---

Salazar, M. C.; Sánchez-Torres, J. D.; Botero-Castro, H. (2013). Diseño un controlador robusto basado en observador para el modelo lineal de un helicóptero de un grado de libertad (VTOL). III Congreso Internacional de Instrumentación Control y Telecomunicaciones - CIICT 2013. Colombia.

Enlace directo al documento: <http://hdl.handle.net/11117/3280>

*Este documento obtenido del Repositorio Institucional del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente se pone a disposición general bajo los términos y condiciones de la siguiente licencia: <http://quijote.biblio.iteso.mx/licencias/CC-BY-NC-2.5-MX.pdf>*

*(El documento empieza en la siguiente página)*

# Diseño un Controlador Robusto Basado en Observador para el Modelo Lineal de un Helicóptero de un Grado de Libertad (VTOL)

María C. Salazar\*, Juan D. Sánchez\*\*, Héctor A. Botero\*

\*{mcsalazarl, habotero}@unal.edu.co

Facultad de Minas

Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín.

\*\*{dsanchez}@gdl.cinvestav.mx

Departamento de Ingeniería Eléctrica

CINVESTAV, Unidad Guadalajara.

**Resumen**— Este artículo propone un controlador basado en observador para un modelo de helicóptero tipo VTOL de un grado de libertad. El objetivo de control es mantener la posición del VTOL en un punto de operación, a pesar de las incertidumbres ocasionadas por inexactitud en el modelo y ruido en las mediciones. El controlador y el observador son diseñados con base en algoritmos que inducen modos deslizantes en el sistema en lazo cerrado, ofreciendo características de robustez y convergencia en tiempo finito. Los resultados de simulación muestran un buen desempeño del esquema propuesto tanto en condiciones de ausencia de ruido como cuando se consideran mediciones ruidosas.

**Palabras Clave**— Controlador basado en observador, Modos deslizantes, Observador, VTOL.

## I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas sometidos a incertidumbre es un área de constante investigación dentro de los grupos dedicados al diseño de algoritmos eficientes y de alto desempeño. La incertidumbre, generalmente, se presenta debido a variaciones paramétricas y a perturbaciones externas de tipo determinístico o aleatorio.

Debido a estas dificultades, durante el diseño de controladores y observadores, diversos métodos se han propuesto con tal de obtener leyes de control que mantengan cierta precisión a pesar del desconocimiento que se tiene del sistema y de las perturbaciones externas que lo afectan. Para el caso de diseño de controladores, las propuestas más comunes son el uso de técnicas  $H_\infty$  [1] y [2], reguladores cuadráticos, métodos de alta ganancia y algoritmos de modos deslizantes. Similarmente, para el caso de observadores, se usan con frecuencia técnicas de filtrado óptimo las cuales incluyen los filtros de Kalman, filtros  $H_\infty$  y observadores por modos deslizantes.

En este sentido, la aproximación por modos deslizantes ha sido ampliamente usada para el control y la estimación de sistemas dinámicos, debido a sus características de convergencia en tiempo finito, robustez a incertidumbres e insensibilidad para perturbaciones acotadas [3], [4]. En el caso de observadores basados en modos deslizantes, el movimiento deslizante es alcanzado por medio de un “Operador Deslizante”, dependiendo del error de salida [5]. Además, mediante el uso de un operador deslizante del error (como la

función Signo), las trayectorias de observación se vuelven insensibles a muchas formas de ruido. Por lo tanto, algunos observadores por modos deslizantes tienen propiedades atractivas e implementación sencilla [6].

En este artículo se presenta el diseño de un controlador basado en observador para el modelo lineal del sistema VTOL (helicóptero de un grado de libertad). Primero, se propone un observador de segundo orden por modos deslizantes (SM) basado en control equivalente [5] y el algoritmo ‘*Super-Twisting*’ generalizado [7], el cual es diseñado para obtener la corriente de armadura del motor ( $i$ ) y la velocidad angular ( $\omega$ ) del sistema, por medio de la medición de la posición angular  $\theta$ . Luego, se propone un control basado en bloques, que induce modos deslizantes utilizando el algoritmo ‘*Super-Twisting*’ [8], y se diseña para lograr estabilizar la posición angular  $\theta$ .

El artículo presenta la siguiente distribución: en la Sección II se muestra el modelo considerado para el VTOL. Las Secciones III a IV describen los diseños de los observadores y los controladores respectivamente. Los resultados de simulación en los cuales se evidencia la principal característica del control propuesto se muestran en la Sección V. Finalmente en la Sección VI se dan las conclusiones y recomendaciones obtenidas.

## II. MODELO MATEMÁTICO DEL VTOL

A continuación se muestra un modelo matemático del VTOL (helicóptero de un grado de libertad), el cual consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales de tercer orden. La primera ecuación se obtiene mediante la aplicación de la segunda Ley de Newton para movimientos rotacionales y la segunda aplicando Ley de Voltajes de Kirchhoff.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + K\theta = K_t i \quad (1)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v \quad (2)$$

La ecuación 1, representa la dinámica mecánica del sistema

(helicóptero) y la ecuación 2 hace referencia a la dinámica del actuador (motor DC). Cabe anotar que las anteriores variables ( $i, \theta, v$ ), se miden a partir del equilibrio (es decir, son variables de desviación). La nomenclatura utilizada y los valores de cada parámetro se ilustran en la Tabla 1. Estos datos corresponden a un sistema VTOL real, y sus valores fueron suministrados por el fabricante [9].

TABLA I  
CONSTANTES DEL MODELO

Símbolo	Nombre	Valor (Unidades)
$v$	Voltaje del motor de DC	[V]
$\theta$	Posición angular	[rad]
$R$	Resistencia de armadura	3 [ $\Omega$ ]
$L$	inductancia de armadura	53.8 [mH]
$i$	Corriente de armadura	[A]
$K_t$	Torque-empuje constante	0.01718 [N m/A]
$J$	Momento de inercia	0.00347 [Kg m <sup>2</sup> ]
$B$	Amortiguamiento viscoso	0.0009 [N m s/rad]
$K$	Rigidez	0.0373 [N m/rad]

Para este sistema las variables de estado y la entrada considerada, son:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}; \quad u(t) = v$$

#### A. Sistema en el espacio de estado.

La representación del sistema en variables de estado es la siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (3)$$

Además, se supone que se mide la variable  $x_1$  (es decir, la posición angular), pues según [7] se dispone de un 'encoder' para esto. La ecuación de salida es entonces:

$$y = x_1 \quad (4)$$

#### B. Análisis de controlabilidad y observabilidad

Para verificar que el sistema es controlable, es decir que el sistema puede ir de un estado inicial a un estado final en tiempo finito, se calcula la matriz de controlabilidad lineal:

$$Co = [B \ AB \ A^2B]$$

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{JL} & \frac{K_t^2}{J^2L} \\ 1 & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} \end{bmatrix}$$

Cuyo rango es 3. Ya que  $Co$  no tiene filas y/o columnas linealmente dependientes, entonces el sistema es controlable.

Por otro lado, para verificar que los estados no medidos sean observables o que se puedan medir a través de la entrada y la salida, se calcula la matriz de observabilidad del sistema mediante:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{K_t}{J} \end{bmatrix}$$

Cuyo rango es 3, por lo tanto el sistema es controlable y observable.

### III. DISEÑO DE UN OBSERVADOR POR MODOS DESLIZANTES.

En ocasiones no es posible físicamente obtener una medición de todos los estados de un sistema, debido a esto nace la necesidad de diseñar observadores de estado, que permitan obtener una estimación para los estados no medibles.

Para el caso del VTOL sólo se pueden obtener mediciones de la variable  $\theta$ , y por medio de ella se diseña un observador para las variables de estado  $\dot{\theta}(t)$  e  $i(t)$ . Con base en (3) y (4), los estados del sistema pueden ser separados como los estados medibles y los no medibles, como se muestra a continuación:

$$X_1 = x_1$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} U$$

Definiendo a  $\hat{x}_2$  y  $\hat{x}_3$  como las variables estimadas, un observador por el método de control equivalente es diseñado de la siguiente manera, tal como se hace en [12]

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}}_1 \\ \dot{\hat{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} U + V \quad (5)$$

Con  $V = \begin{bmatrix} V_1(\bar{X}_1) \\ KV_1(\bar{X}_1) \end{bmatrix}$ . Donde  $\bar{X}_1 = X_1 - \hat{X}_1$ , es el error de estimación para  $X_1$ , y  $\hat{X}_1 = \hat{x}_1$ ,  $\hat{X}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$ .

Además  $V_1(\bar{X}_1) = \phi_1(\bar{X}_1) + \phi_2(\bar{X}_1)$ ; las expresiones correspondientes para  $\phi_1(\bar{X}_1)$  y  $\phi_2(\bar{X}_1)$  son las siguientes:

$$\phi_1(\bar{X}_1) = k_{o1} [|\bar{X}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\bar{X}_1) + \mu |\bar{X}_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\bar{X}_1)]$$

$$\frac{d\phi_2(\bar{X}_1)}{dt} = k_{o2} [0.5 \text{sign}(\bar{X}_1) + 2\mu \bar{X}_1 + 1.5\mu^2 \bar{X}_1^2 \text{sign}(\bar{X}_1)]$$

Con  $\mu > 0$ .

Con esta propuesta de observador, solo queda diseñar el valor del vector de ganancias  $K$ , las cuales se diseñan de forma que sean las ganancias de Kalman en estado estacionario.

#### IV. DISEÑO DE UN CONTROL POR BLOQUES QUE INDUCE MODOS DESLIZANTES.

Dado que se mide continuamente la posición angular y que las variables correspondientes a la velocidad angular y la corriente son observadas, en este apartado diseña un controlador por bloques, que induzca modos deslizantes tal como se muestra en [13] y [14] para mantener la posición angular estabilizada. Se define entonces el error 1 como sigue:

$$e_1 = x_1 - x_{1REF} \quad (6)$$

Donde  $x_{1REF}$  es la referencia para la posición angular. Luego, diferenciando la ecuación (6), se obtiene la dinámica del error 1:

$$\dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{1REF} \quad (7)$$

Para estabilizar la dinámica del error 1, se define  $x_2$  como un controlador virtual para este bloque. El valor deseado para  $x_2$  es:

$$x_{2DES} = \dot{x}_{1REF} - k_{c1}e_1 \quad (8)$$

Con  $k_{c1} > 0$ . Con base en (8), se define el error 2:

$$e_2 = x_2 - x_{2DES} \quad (9)$$

De nuevo, diferenciando (9), se obtiene:

$$\dot{e}_2 = -\frac{K}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 + \frac{K_t}{J}x_3 - \dot{x}_{2DES} \quad (10)$$

Y para estabilizar la dinámica del error 2, se define un valor deseado para  $x_3$ , de la siguiente manera:

$$x_{3DES} = \left( \frac{K}{J}x_1 + \frac{B}{J}x_2 + \dot{x}_{2DES} \right) \frac{J}{K_t} - k_{c2}e_2 \quad (11)$$

Con  $k_{c2} > 0$ . Finalmente, se define el error 3:

$$e_3 = x_3 - x_{3DES} \quad (12)$$

Para el cual:

$$\dot{e}_3 = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u - \dot{x}_{3DES} \quad (13)$$

En la ecuación (13), se observa que el control aparece explícitamente, por lo cual se utiliza directamente para estabilizar la dinámica del error 3 de la siguiente manera:

$$u = L \left( \frac{R}{L}x_3 + \dot{x}_{3DES} \right) + SL[e_3] \quad (14)$$

Donde  $SL[e_3]$ , es un operador que induce modos deslizantes en  $e_3$ . Es decir,  $SL[e_3]$  estabiliza el error 3 en tiempo finito.

Para este término ( $SL[e_3]$ ) se escoge un algoritmo ‘*Super-Twisting*’ como el mostrado en [8], debido a que al ser un controlador por modos deslizantes de alto orden, presenta las propiedades de rechazo a perturbaciones, convergencia en tiempo finito y señal de control continua. Según lo anterior, la ecuación (14) se reescribe de la siguiente manera:

$$u = L \left( \frac{R}{L}x_3 + \dot{x}_{3DES} \right) - k_{c3}\sqrt{|e_3|}sign(e_3) + z \quad (15)$$

$$\dot{z} = -k_{c4}sign(e_3)$$

Con  $k_{c3} > 0$  y  $k_{c4} > \max \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ L \left( \frac{R}{L}x_3 + \dot{x}_{3DES} \right) \right] \right\rangle$ .

Para finalizar el diseño del controlador, es importante notar que en (8) el valor deseado de  $x_2$  contiene el término  $e_1$ . Además, se observa que en (11), el valor deseado de  $x_3$  contiene el término  $\dot{x}_{2DES}$ . Por tanto, si la medición de la posición angular es ruidosa, derivar el término  $x_{2DES}$  resulta en una señal más ruidosa con un diferenciador convencional. Por lo tanto, para evitar el efecto nocivo del ruido, se utiliza el diferenciador propuesto en [11], el cual utiliza un algoritmo ‘*Super-Twisting*’ generalizado para calcular derivadas en presencia de ruido acotado.

#### V. RESULTADOS DE SIMULACIÓN NUMÉRICA.

Varias referencias han trabajado un problemas similar, pero con otras técnicas de control [15-17]. Con el fin de verificar el funcionamiento del controlador basado en observador propuesto, se realizan simulaciones numéricas utilizando el método de Euler (ODE 1) con tamaño de paso  $t_s = 1 \times 10^{-4}s$ . Las constantes de simulación para el observador son  $k_{o1} = 2.5$ ,  $k_{o2} = 3$ ,  $K = [2.9160 \quad 0.0075]^T$  y  $\mu = 1.5$ . Y las ganancias del controlador son  $k_{c1} = 1$ ,  $k_{c2} = 1$ ,  $k_{c3} = 1$ , y  $k_{c4} = 2$ .

Para la simulación, las condiciones iniciales en las variables de estado son cero. Con el fin de verificar el control, se propone la referencia como  $\theta_{ref} = 0 \text{ rad}$ , y para comprobar los resultados se varía la referencia a  $\theta_{ref} = 0.055 \text{ [rad]}$  que equivale a 10 grados aproximadamente. Por otra parte, las demás variables de estado deben mantenerse estables, para la velocidad  $\dot{\theta} = 0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ , y para la corriente  $i = 0 \text{ [A]}$ . Además, el sistema se expone ante ruido aleatorio en el sensor, que tiene como varianza  $\sigma^2 = 0.1$  y que este a su vez representa una desviación de la variable medida de aproximadamente el 30% de la señal. Por tanto, los resultados de simulación que se presentan, son las respuestas con ruido y sin ruido debidas a una misma señal de referencia. Los resultados se muestran en las Figuras 1 a 6.

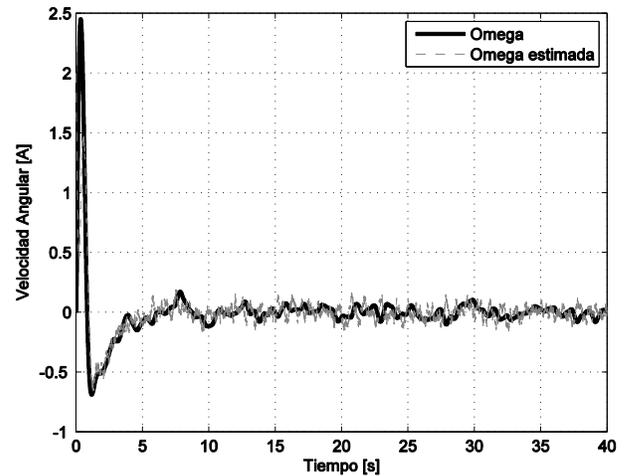
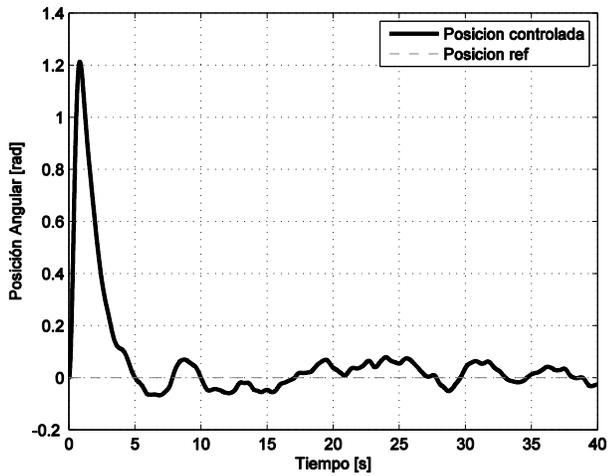
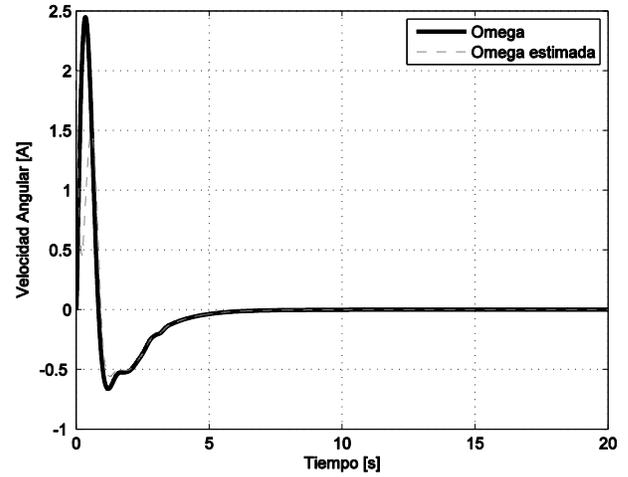
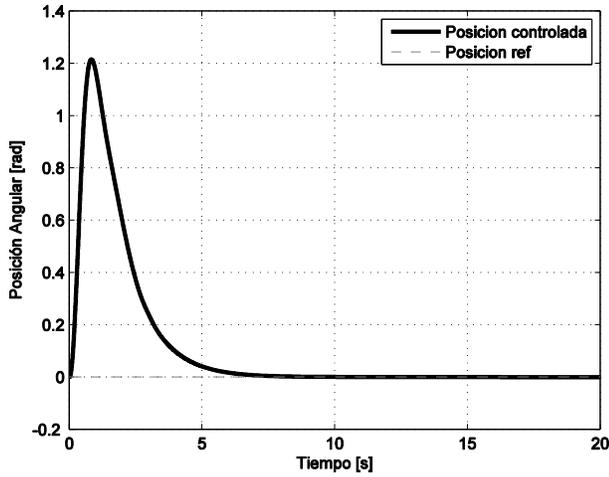
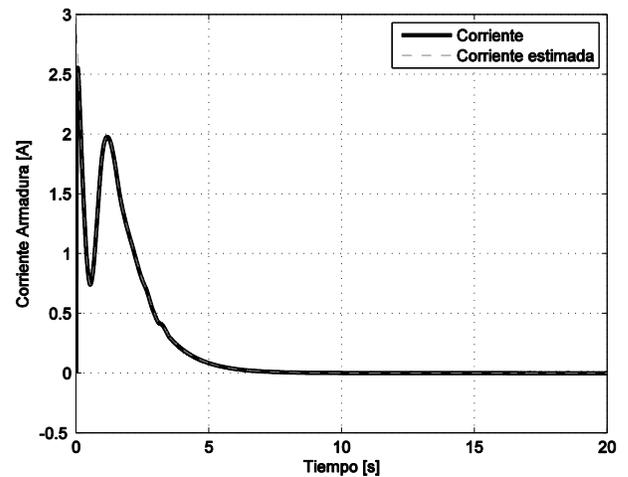


Figura 1. Posición y referencia de la posición, sin ruido y con ruido en el sensor para  $\theta_{ref} = 0 \text{ rad}$ .

Figura 2. Respuesta de la velocidad angular deseada y estimada con ruido y sin ruido en el sensor, para  $\theta_{ref} = 0 \text{ rad}$

En la Figura 1 se muestra el control de la posición del VTOL, el cual alcanza la referencia aproximadamente en  $t = 3\text{s}$ , lo que representa un comportamiento satisfactorio para la variable medida en condiciones sin ruido. Análogamente, se muestra el comportamiento ante una señal ruidosa en la salida del sistema (sensor), donde éste oscila en valores cercanos al valor de referencia. Por otro lado, la Figura 2 representa la estimación de la velocidad angular y se observa que cuando no aparece el ruido la señal medida se tarda aproximadamente 1s en alcanzar la señal estimada, lo cual representa una estimación válida para la velocidad.

En el caso de la Figura 3, la corriente medida alcanza casi inmediatamente ( $t = 0\text{s}$ ) la corriente estimada, esto representa una estimación apropiada para la corriente, aun cuando el comportamiento de ésta en el modelo se encuentre desacoplado de las otras variables de estado.



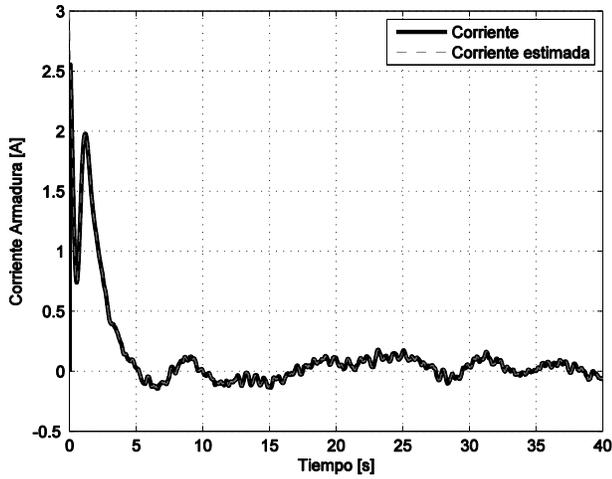


Figura 3. Corriente deseada y corriente estimada, sin ruido y con ruido en el sensor, para  $\theta_{ref} = 0 \text{ rad}$

En seguida en las Figuras 4, 5 y 6 se presenta la respuesta de cada uno de los estados ante el cambio en la referencia, de nuevo aplicándole ruido a la señal de salida  $\theta_{ref} = 0.055 \text{ rad}$ .

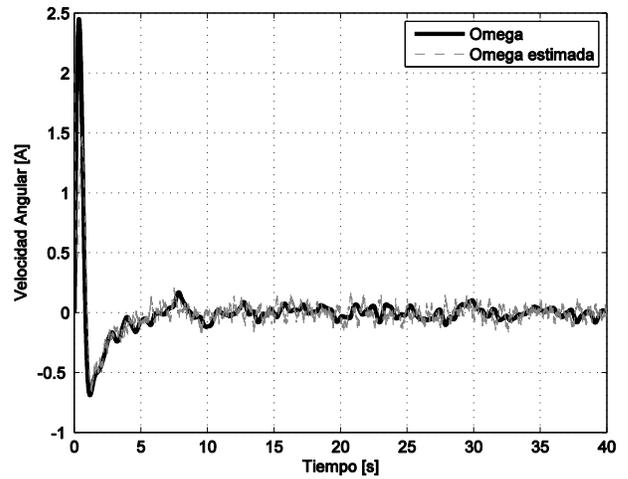
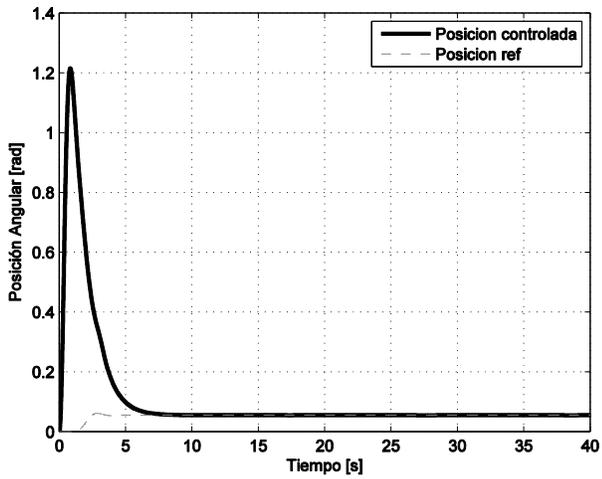
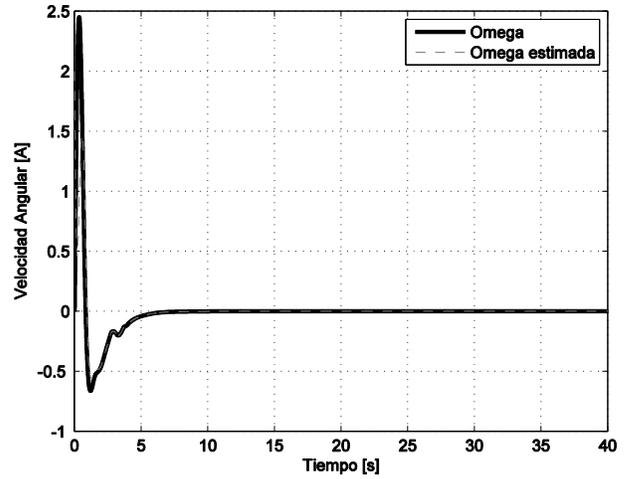


Figura 5. Velocidad y velocidad estimada, sin ruido y con ruido en el sensor, para  $\theta_{ref} = 0.055 \text{ rad}$

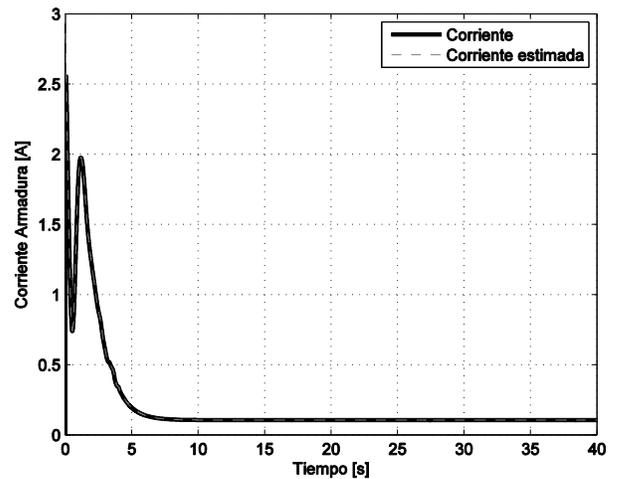
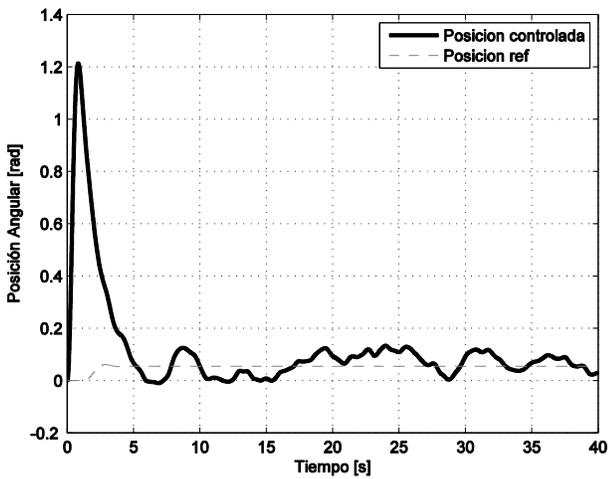


Figura 4. Posición y referencia de la posición sin ruido y con ruido en el sensor, para  $\theta_{ref} = 0.055 \text{ rad}$

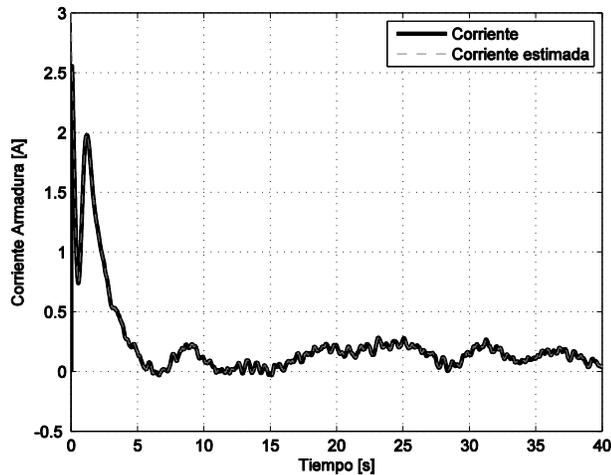


Figura 6. Corriente y corriente estimada, sin ruido y con ruido en el sensor, para  $\theta_{ref} = 0.055$  rad

## VI. CONCLUSIÓN

Un control por modos deslizantes basado en observador, aplicado al modelo de un helicóptero tipo VTOL, se presentó en este artículo. Del esquema propuesto se destaca la robustez ante la incertidumbre en el modelo y el ruido en la medición, lo cual se pudo verificar mediante resultados en simulación. Se espera, como trabajo futuro, llevar estos resultados a una implementación física, para tener una visión real del comportamiento de los sistemas ante una estrategia de control robusta como son los algoritmos de modos deslizantes.

## AGRADECIMIENTO

La elaboración de este artículo fue posible gracias al apoyo del proyecto de Movilidad Internacional de la Diáspora Científica de Alto reconocimiento de Colciencias - Banco Mundial.

Así mismo, a los compañeros y estudiantes Oscar Jaramillo y Esteban Jiménez, quienes estuvieron presentes durante la elaboración del artículo.

## REFERENCIAS

[1] Zames, G., "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses" IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26, 301-320, 1981.

[2] Doyle, J.C., K. Glover, P.O. Khargonekhar, B.A. Francis, "State Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems" IEEE Transactions on Automatic Control, AC-34, 831-847, 1984.

[3] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition (Automation and Control Engineering), 2nd ed. CRC Press, 5 2009.

[4] R. A. DeCarlo, S. Zak, and S. V. Drakunov, The Control Handbook: a Volume in the Electrical Engineering Handbook Series, Chapter 50, Variable Structure, Sliding Mode Controller Design. CRC Press, Inc., 2011.

[5] S. V. Drakunov, "Sliding-mode observers based on equivalent control method," in Proc. 31st IEEE Conf. Decision and Control, 1992, pp.2368-2369.

[6] —, "An adaptive quasioptimal filter with discontinuous parameter," Automation and Remote Control, vol. 44, no. 9, pp. 1167-1175, 1983.

[7] E. Cruz-Zavala, J. Moreno, and L. Fridman, "Uniform second-order sliding mode observer for mechanical systems," in Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on, 2010, pp. 14-19.

[8] V. Utkin, "On Convergence Time and Disturbance Rejection of Super-Twisting Control", IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, Vol. 58, N. 8, pp. 2013-2017.

[9] QNET Practical Control Guide.

[10] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", International Journal of Control, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1263, 1993.

[11] M. Angulo, J. Moreno, L. Fridman, "The differentiation error of noisy using the Generalized Super-Twisting Differentiator", 51st IEEE Conference on Decision and Control, 2012.

[12] V. I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, 1999.

[13] Sanchez-Torres, J.D.; Loukianov, Alexander G.; Moreno, J.A.; Drakunov, S.V., "An equivalent control based sliding mode observer using high order uniform robust sliding operators," *American Control Conference (ACC), 2012*, vol., no., pp.6160,6165, 27-29 June 2012

[14] Drakunov, S. V., Izosimov, D. B., Lukyanov, A. G., Utkin, V. A., Utkin, V. I., 1990. The block control principle I. Automation and remote control 51, 601-608

[15] Dutka, A.S.; Ordys, A.W.; Grimble, M.J., "Non-linear predictive control of 2 DOF helicopter model," *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, vol.4, no., pp.3954,3959 vol.4, 9-12 Dec. 2003

[16] M. Hernandez-Gonzalez, A. Y. Alanis, and E. A. Hernandez-Vargas, "Decentralized discrete-time neural control for a Quanser 2-DOF helicopter," *Appl. Soft Comput.*, vol. 12, no. 8, pp. 2462-2469, Aug. 2012

[17] A. F. C. Castillo, F. J. L. Leño, and J. J. O. Pulido, "Control multivariable para un helicóptero de dos grados de libertad utilizando algoritmos genéticos," Proyecto de Grado, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá D.C, 2005.