2013-09

Construcción del esquema para la apropiación del concepto de la integral

Puga-Nathal, Karla L.

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE OCCIDENTE

Reconocimiento de validez oficial de estudios de nivel superior según acuerdo secretarial 15018, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 29 de noviembre de 1976.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN Y VALORES

DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL

Tesis que para obtener el grado de

DOCTORA EN EDUCACIÓN

Presenta: **Karla Liliana Puga Nathal**

Director de tesis: Dr. Eduardo Miranda Montoya

Guadalajara, Jalisco. Septiembre de 2013.

En memoria de Edgar Gilberto Añorve Solano

Agradecimientos

Es una gran oportunidad contar con este espacio para agradecer y reconocer a las personas que de diferentes maneras estuvieron presenten en toda mi formación doctoral y que definitivamente facilitaron el camino para que este trabajo fuera posible.

A mi familia por haber permanecido incondicionalmente a mi lado hasta el último segundo de mi proceso doctoral, por tener la palabra justa en los momentos de adversidad, por ser mi razón.

Agradezco infinitamente el tiempo, la sabiduría y la paciencia del Dr. Eduardo Miranda Montoya por haberme guiado y alentado en todo momento de mi formación doctoral. Por creer en mi desde el primero hasta el último día.

A la Dra. Marisol Laya, Dr. Ricardo Ulloa, Dra. Susana Cuevas, Dra. Patricia Espinoza, por su acompañamiento y sus valiosos comentarios y por haberme compartido su sabiduría. Dr. Juan Carlos Silas, Dr. Eduardo Arias, Dra. María Guadalupe Valdés, Dr. Marco A. Delgado y a todos mis maestros mil gracias.

A mis queridos compañeros doctorantes, a Eduardo, Paty, Ceci, Lulú, Jaime, Marisol, Cristina que sin ellos esta aventura no hubiera sido tan enriquecedora. Gracias Rosario L., porque nuestra amistad trascendió más allá de las fronteras doctorales.

Enorme agradecimiento al Dr. Luis Felipe Gómez por su incondicional y profesional apoyo.

Agradezco a mis compañeros y a las autoridades del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán por haber creído en mi, por facilitar las condiciones para que este proyecto académico fuera posible y permitirme esta grata experiencia.

Índice

Resumen

Se presenta el resultado de una investigación de corte cualitativo, cuyo objetivo fue analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante universitario para comprender y apropiarse del concepto de la Integral. A lo largo del texto, se muestra una descripción de las etapas por las que transitan seis estudiante en la construcción de un esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral desde registros de representación geométricos, recurriendo a la acumulación de áreas y al sentido geométrico de la derivada como una alternativa para recuperar la gráfica de una función primitiva.

Abstract

This proposal is the result of a qualitative research which analyzed the mental structures that a university student developed to understand and build the concept of Integral. It also shows a description of the stages that the student deals with when making a mental scheme to build the concept of Integral starting from records of geometric representation, resorting to the accumulation of areas and the geometric sense of derivative as an alternative to recover a primitive function.

Introducción

Durante mucho tiempo en los **procesos** de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se privilegiaba el uso, ——por parte de los estudiantes— de estructuras matemáticas formales. El objetivo en el aula se centraba en dotar al estudiante con una cantidad reducida de axiomas y herramientas que le permitieran resolver un problema (reducida, para que le fuera posible utilizar), respetando en todo momento el rigor matemático (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

La producción matemática estaba a cargo de matemáticos expertos, quienes enfatizaban la importancia de la axiomatización, el uso de estructuras y el rigor matemático. Al paso del tiempo se modificó la idea de lo que significa aprender matemáticas y cuál es su papel en la formación de un sujeto universitario. Estos cambios se han orientado hacia una visión más práctica, hacia el desarrollo de conocimientos y habilidades en los estudiantes que les permitieran dar solución a problemas matemáticos ubicados en un contexto escolar o cotidiano.

En estos progresos se suscitaron diversas problemáticas en el aula, debido a que los estudiantes no lograban trasladar los problemas de su interés profesional al campo de las matemáticas y tampoco los conocimientos matemáticos a diversos campos de las ciencias, lo que originó el planteamiento de preguntas como: ¿cuáles son los conocimientos y habilidades matemáticas que requiere el estudiante para solucionar un problema situado (en contexto)?, ¿cómo promover la adquisición de esos conocimientos y el desarrollo de tales habilidades matemáticas?

Para dar respuesta a estas interrogantes, en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de nivel superior se han realizado diversas investigaciones con el afán de explicar los mecanismos cognitivos que desarrolla un individuo en la construcción de conceptos matemáticos. El interés principal ha sido entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las formulaciones verbales o escritas que el estudiante construye para responder a una tarea matemática, así como caracterizar de qué modo los procesos de comprensión de los conceptos y los procesos propiamente matemáticos tienen lugar en la mente de un sujeto (Dubinsky, 2000).

Uno de los personajes más citado en las teorías generadas en las entrañas de la didáctica de las matemáticas es Jean Piaget. Su idea de esquema y de abstracción reflexiva, inspiró a la creación de diferentes teorías de aprendizaje que explican la construcción del conocimiento matemático del estudiante: ejemplo de ello son los trabajos de Brousseau (2007) con la teoría de situaciones didácticas, Vergnaud y la teoría de los campos conceptuales (Rodríguez, 2010), Chevallard (1991) y la teoría de las transposiciones didácticas, Artigue y la Ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), Dubinsky (1996) y la teoría APOE —acciones, procesos, objetos, esquemas—, entre otras.

La investigación, se contextualiza dentro del sistema educativo de nivel superior y enfatiza en la importancia que tiene la apropiación y comprensión de conceptos matemáticos. El trabajo se desarrolló en el marco del paradigma cualitativo, cuya metodología fue de tipo descriptiva e interpretativa, a partir de la observación y exploración; esto debido a que el objeto de estudio se centró en describir los esquemas mentales que se activan o tienen lugar en la mente de un estudiante universitario para la comprensión de un concepto matemático. A fin de realizar tales observaciones, la investigación se apoyó en algunas ideas de Piaget y de la corriente didáctica APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas), dado que esta última tiene como eje central explicar cómo se construye un concepto matemático en la mente de un sujeto universitario.

La importancia de este estudio estriba en el impacto que pueda tener en el campo de la didáctica de las matemáticas —específicamente en el terreno del Cálculo Integral—, ya que se pretende aportar elementos, reflexiones y resultados al estado del conocimiento en torno a la descripción de las estructuras mentales que moviliza el sujeto y que promueven la construcción de esquemas cognitivos para la apropiación del concepto de la Integral.

1. Planteamiento del Problema

1.1. Antecedentes

Las matemáticas en la universidad son herramientas que posibilitan a un sujeto entender, explicar, discernir y encontrar respuestas o explicaciones de alguna parte de su realidad, así como tomar decisiones fundamentadas de su entorno sea escolar, familiar o social. En la cotidianidad, el sujeto se enfrenta frecuentemente con situaciones ante las cuales la aplicación de técnicas de razonamiento cuantitativo o espacial, así como de otras herramientas matemáticas, puede contribuir a clarificar, formular o resolver un problema. Por ejemplo (OCDE, 2003), cuando va de compras, viaja, prepara alimentos, revisa sus finanzas personales, etc.

Esas aplicaciones de las matemáticas se basan en las habilidades desarrolladas a partir de la resolución de los diferentes tipos de problemas que aparecen en los libros de texto escolares y los que se plantean en los salones de clase (Godino, 2004). Sin embargo, en el nivel universitario los aprendizajes deberán trascender del aula y trasladarse a la vida del sujeto en diferentes situaciones y contextos. Los elementos matemáticos tales como términos, conceptos y procedimientos, y la utilización de éstos, son tratados en el aula en la solución de problemas con estructuras matemáticas predeterminadas. Fuera del aula, la mayoría de los problemas con tintes matemáticos no presentan una estructura matemática evidente, le corresponde al sujeto poner en juego sus aptitudes y conocimientos en el planteamiento de tales estructuras, en principio saber *qué concepto de las matemáticas* está inmerso en tal situación y de esa forma estructurar, interpretar, solucionar y comunicar la solución del problema.

Una habilidad crucial implícita que debe desarrollar cualquier estudiante universitario al transitar hacia su formación profesional es la *matematización* de una situación problema, esto es la capacidad de plantear, formular, resolver e interpretar problemas empleando las matemáticas dentro de una variedad de situaciones y contextos que van desde los puramente matemáticos a aquéllos que no presentan ninguna estructura matemática aparente. *Matematizar* se refiere a la capacidad del sujeto de trasladar un problema del mundo real al de las matemáticas para que en éste analice, razone y una vez resuelto comunique las ideas matemáticas que darán respuestas desde la perspectiva del mundo real (Rico, 2003).

Caracteriza las etapas de la actividad matemática (matematización) que un alumno debe tener en el momento de la instrucción y se ilustran en la figura 1 (p. 6):

a) Comenzar con un problema situado.

b) Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.

c) Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.

d) Resolver el problema.

e) Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

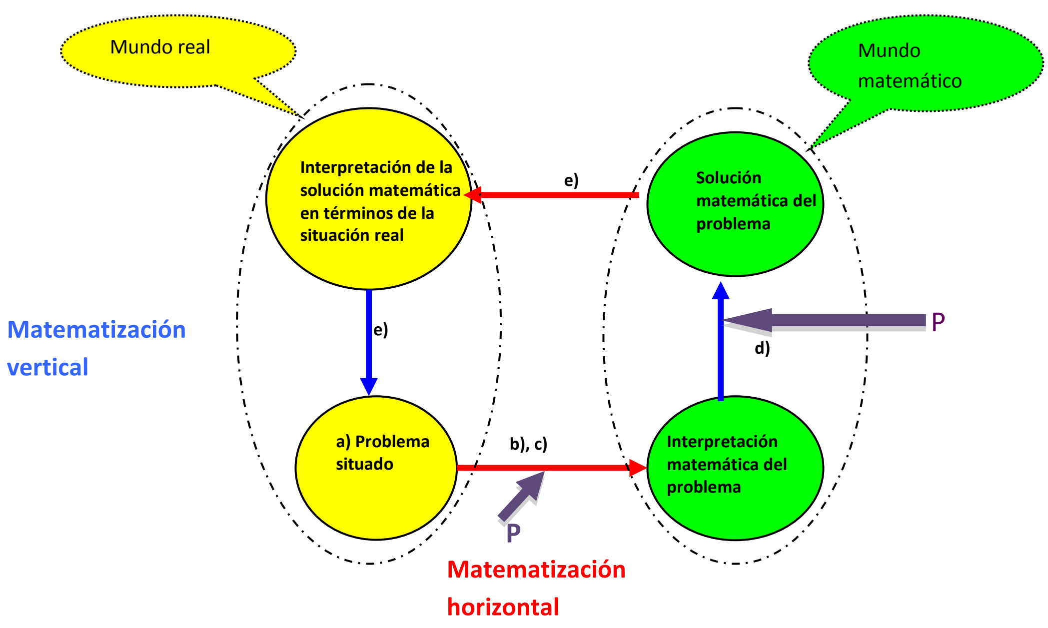


Figura 1. Relación entre la matematización vertical y horizontal.

Los problemas en matemáticas situados en un contexto se resuelven en dos etapas. La primera, llamada *matematización horizontal* (Rico, 2003). Consiste en la traducción, interpretación y extracción de datos del problema planteado desde su contexto al terreno matemático. La segunda etapa la llama *matematización vertical*, se refiere a la utilización de algoritmos, conceptos y destrezas matemáticas con las que dará solución al problema. La conexión entre los dos procesos se esquematiza en el diagrama de la figura 1.

La presente investigación parte de la premisa de que en la solución de un problema el primer obstáculo que enfrenta el sujeto ocurre durante la matematización horizontal, ya que se espera que éste realice actividades como: detectar los conceptos matemáticos (en el punto P) que requiere para su solución, estructurar y organizar el problema de acuerdo a estos conceptos y a estilos propios del sujeto, extraer información del problema e introducir el lenguaje simbólico propio del contexto matemático correspondiente (generar variables y relaciones entre ellas, por ejemplo) y estructurar el modelo matemático.

Una vez elaborado el modelo matemático, éste será tratado de acuerdo a las estructuras matemáticas que correspondan (un segundo obstáculo en la solución del problema si no posee los elementos operativos que implica el concepto inmerso); entonces en la matematización vertical se espera que el sujeto trate al problema matemáticamente, esto es: que recurra a conceptos, teoremas y algoritmos matemáticos pertinentes, que argumente los procesos, que acuda a diferentes representaciones (geométrica, simbólica, algebraica, numérica) para interpretar desde diferentes ángulos sus logros en la solución del problema, y que encuentre una respuesta general, desde la perspectiva matemática.

Diversas investigaciones (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000; Sánchez, García, Llenares, 2008; OCDE/PISA, 2003; Farfán, 1997; Muñoz, 2000; Rosado, 2004; Artigué, Douady, Moreno, y Gómez, 1995; Parra, Saiz, Santaló, Gálvez, Charnay, Brousseau y Sandovsky, 1998, Hitt, 2003, socas, 2009, Resnick, 1998), muestran que los sujetos no logran resolver un problema matemático porque carecen de los elementos cognitivos y de las habilidades que les permiten matematizar tal situación. Uno de los hallazgos en esos trabajos enfatiza que el estudiante no logra comprender los conceptos matemáticos inmersos en el problema y por tanto, no logra entender la utilidad de los mismos.

La investigación parte de la premisa de que un elemento principal que deberá estar presente para matematizar es la comprensión de los *conceptos matemáticos*, si el sujeto no se apropia de éstos, difícilmente podrá ubicar un problema situado dentro de algún campo de las matemáticas; de hecho, difícilmente sabrá lo que puede interpretar y resolver a través de las matemáticas. Además, se tiene presente que los conceptos en matemáticas pueden ser tratados desde distintos registros o marcos de representación: numérico, algebraico, analítico, contextual y visual (Camarena, 2010). Este último incluye aspectos geométricos tales como gráficas, diagramas, esquemas y dibujos, además en el proceso de matematización se transita por diferentes registros.

En los libros de matemáticas de niveles escolares elementales, los conceptos se representan por medio de imágenes para acercar a los niños al concepto. En niveles escolares más avanzados, como el nivel superior, los conceptos son más complejos y abstractos (Planchard, 2002). Por ejemplo, en los libros de matemáticas un concepto se define en el registro de representación numérico, algebraico, contextual y geométrico, "(…) esto proporciona una idea de la naturaleza de los conceptos matemáticos: éstos no se alcanzan directamente, sino mediante representaciones que no necesariamente son equivalentes *en forma significativa"* (Planchard, 2002, p. 16). Por ejemplo, en el nivel secundaria el concepto *del cuadrado* se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

Registros de representación del concepto de cuadrado

Espacio limitado por una figura cerrada cuyos lados son líneas rectas, forman ángulos de 90º y tienen la misma longitud.	$A= x^2$	Lado = x 
Registro contextual o cotidiano	Fórmula que sintetiza la definición, registro algebraico	Figura que representa el concepto de un cuadrado, registro geométrico

Las ideas expuestas en párrafos anteriores sobre la importancia de que un sujeto se apropie de conceptos matemáticos como parte importante del proceso de matematización incluye a todos los niveles escolares ya que los contenidos de los diversos cursos que se ofertan están estructurados con una gran cantidad de conceptos necesarios para la formación de un sujeto. Se destaca que en los diversos cursos de matemáticas que se ofertan en las escuelas de nivel superior, se incluye una gran cantidad de conceptos. Todos ellos son importantes, pero algunos resultan medulares para la construcción de otros conceptos y en la formación matemática futura de un sujeto. Ejemplo de ello es el concepto de *la Integral*: éste pertenece a la rama de las matemáticas llamada comúnmente Cálculo Integral, y es el foco de atención para el presente trabajo.

1.1.1 La importancia de la Integral para un Ingeniero en formación.

El origen de la integral data de los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, siglos IV y II a.C.; históricamente ha resuelto problemas que involucran magnitudes tales como áreas de figuras limitadas por curvas, volúmenes, longitudes de curvas y acumulación de cantidades que varían continuamente (Wenzelburger, 1994).

La historia narra que en el siglo XVII, Cavalieri se aproximó al Cálculo Integral, con su concepto de "indivisibles", ya que Cavalieri generaba rectas a partir de puntos y planos a partir de rectas por medio del movimiento. En la época de Cavalieri y matemáticos contemporáneos a él, trabajaban en encontrar la solución de cuatro problemas, los cuales ha sido posible resolver únicamente a partir del desarrollo del Cálculo (Ruiz, 2003, p. 287):

> *1.- Determinar la velocidad y la aceleración instantáneas de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo, y viceversa (si se tenía la velocidad o la aceleración, se trataba de encontrar la distancia o la velocidad respectivamente en un momento determinado).*
>
> *2.- Determinar la tangente a una curva en un punto (por ejemplo para dar una dirección de un cuerpo en movimiento o el cálculo de rectas tangentes y normales a curvas para la descripción del comportamiento de la luz, el diseño de lentes).*
>
> *3.- Encontrar el máximo o el mínimo de una función (por ejemplo, para calcular las distancias máxima y mínima de un planeta en su movimiento traslacional, o la inclinación de un cañón para que una bala golpee a la máxima distancia posible).*
>
> *4.- Encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinados por curvas.*

Particularmente la Integral, en el transcurso del tiempo, ha tenido diferentes representaciones: “para calcular la cantidad fluente (antiderivada) de una fluxión (derivada) dada” —Newton—, “como la suma de un número basto de cantidades pequeñas para completar un total” —Leibniz— y “como la operación inversa a la diferenciación” —Bernoulli, Barrow—, (Cordero, Muñoz y Solís, 2003, p. 1).

La Historia narra que el surgimiento de la Integral se debe a la necesidad de resolver el problema del cálculo de áreas en regiones limitadas por curvas, cuyas formas no resultaban conocidas (Guzmán, Hoyos y Rodríguez, 1985), tal idea se ilustra en la figura 2a. Una propuesta para resolver este problema consistió en aproximar el *área* por medio de la suma de áreas de figuras conocidas (figura 2b), sin embargo, el cálculo mediante esta aproximación implicó un problema —error— (el área calculada excede el valor del área real). Bajo la misma lógica se observó que al aumentar la cantidad de figuras geométricas, se lograba una aproximación más cercana al área real (figura 2c, d y e).

Intuitivamente se puede inferir que a mayor cantidad de cuadros pequeños dentro de la región, mayor será la aproximación a su área, entonces ¿cuántos pequeños cuadros se necesitan para encontrar el área real? Esta idea, en matemáticas se refiere a cantidades infinitesimales (infinitamente pequeñas) que son abstracciones necesarias para entender el campo de aplicación de la Integral. La idea intuitiva de cantidad infinitesimal (en este caso, áreas muy pequeñas de figuras conocida), se ilustra en la figura 2f.

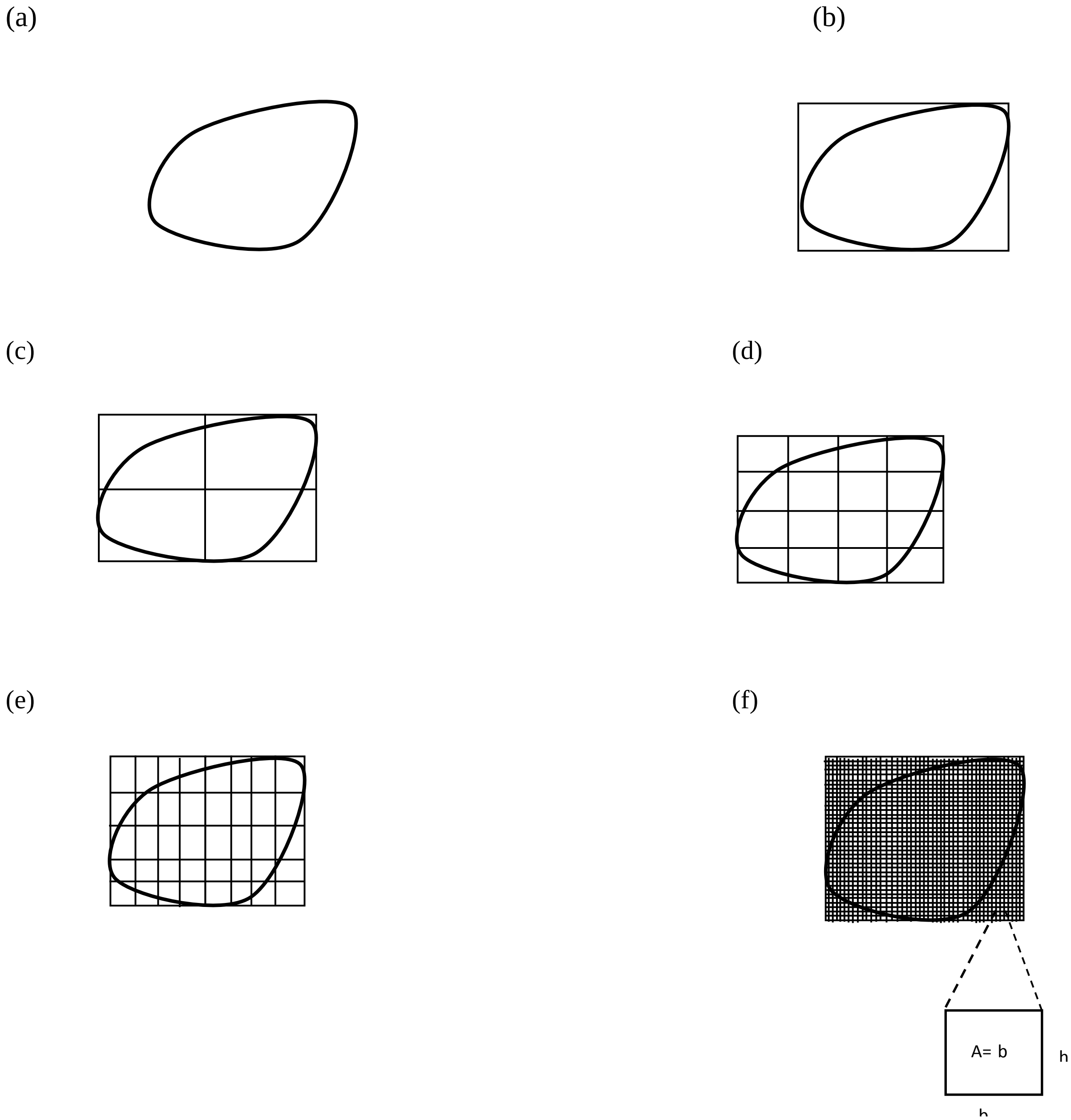
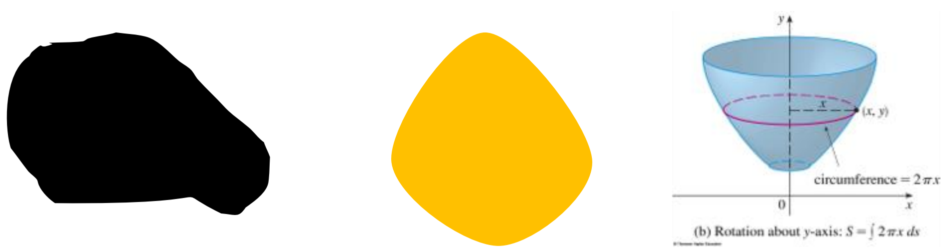


Figura 2. Aproximación al área de una figura limitada por curvas.

La idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas ha venido a resolver una gran variedad de problemas en diversos campos de la ciencia, los cuales son abordados en las universidades, principalmente en los programas educativos de Ingeniería. En el nivel superior, el Cálculo Integral se ubica en los dos primeros periodos escolares de los programas de Ingeniería, la relación que tiene, —particularmente la Integral— con toda la retícula básica es fundamental debido a que se trata de uno de los conceptos medulares para otras ramas de las matemáticas, como son el Cálculo Vectorial, Calculo de Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales, los de Física y para diversos cursos específicos de cada área de Ingeniería (SNEST, 2008).

Como premisa básica de esta investigación se considera que si un estudiante de ingeniería no comprende el concepto de la Integral y no desarrolla las habilidades que implica la idea[1] misma de éste, no será capaz de resolver problemas en los que se encuentre inmerso tal concepto, problemas en los cuales se necesite calcular áreas o volúmenes de figuras geométricas limitadas por curvas, como la que se ilustra en la figura 3a; del mismo modo, difícilmente desarrollará los conocimientos y habilidades necesarios para encontrar el centro de gravedad de una figura plana cuya forma no es común, como la que se ilustra en la figura 3b, así como calcular el volumen de un sólido como el que aparece en la figura 3c.



a) Mancha de petróleo en el Golfo de México

b) Placa metálica

c) Depósito de agua (Stewart, 2008, p.535)

Figura 3. Algunas de las aplicaciones clásicas de la Integral que comúnmente se abordan en un curso de Cálculo Integral.

Otros problemas que también son resueltos por la Integral y que, hasta el momento, se han encontrado escasamente en las investigaciones revisadas en los libros y programas de estudio de Cálculo Integral, y que resultan indispensables, de entrada, para los cursos de Física y cursos posteriores de matemáticas son: la predicción del resultado de la acumulación de cantidades que varían continuamente, por ejemplo el cálculo de trayectorias con velocidades y aceleraciones que cambian continuamente (como la

[1] Habilidades tales como la manipulación de sumatorias infinitas de cantidades infinitesimales, el cálculo de funciones primitivas, entre otras.

distancia que recorre un móvil); incrementos y decrementos de temperaturas; crecimiento y decrecimiento de una población, y otros problemas en los que se requieren interpretaciones geométricas (principalmente gráficas de funciones) a partir del comportamiento de un fenómeno o la obtención de una expresión matemática que lo describa:

La gráfica de la figura 4, representa la velocidad con la que se mueve una partícula sobre una superficie plana. Encontrar una función que describa la trayectoria de la partícula.

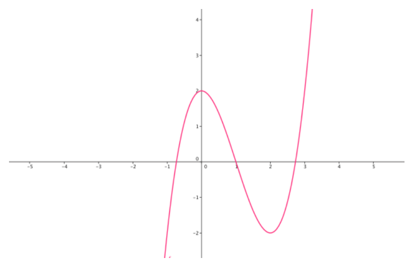


Figura 4. Gráfica que describe la velocidad con la que se mueve una partícula.

Por otro lado, para enmarcar el impacto del concepto de la Integral en la formación de un estudiante de Ingeniería, en la presente investigación se analizaron diversos programas de estudio (UNAM, 2004; CUCEI, 2008; IPN, 2007; SNEST, 2008), en los que se ofertan una variedad de carreras de Ingeniería con la finalidad de mostrar la relación que tiene la Integral dentro de las mismas matemáticas. Esta relación se esquematiza en la figura 5.

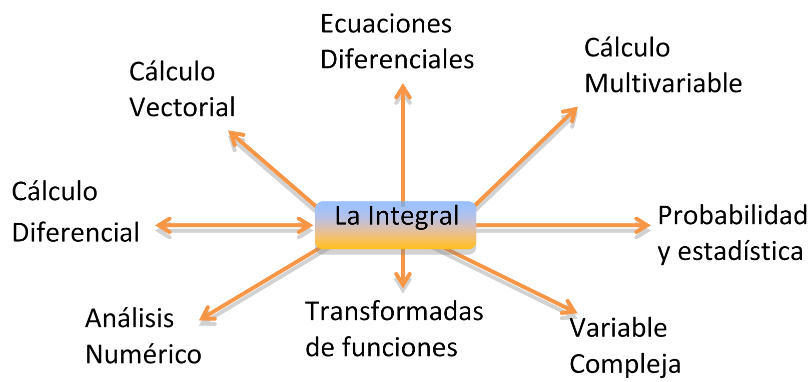


Figura 5. Relación del concepto de Integral en los programas de estudio que se ofertan en las carreras de Ingeniería.

Además, se analizó la relación de la Integral con otras áreas del conocimiento dentro de las carreras de Ingeniería, para ello se tomó como referencia la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán (ITCG, 2010a); tal relación se muestra en la figura 6.

Física I: Mecánica

Física II: Óptica, termodinámica, fluidos, ondas

Física III: Campos eléctricos y magnéticos

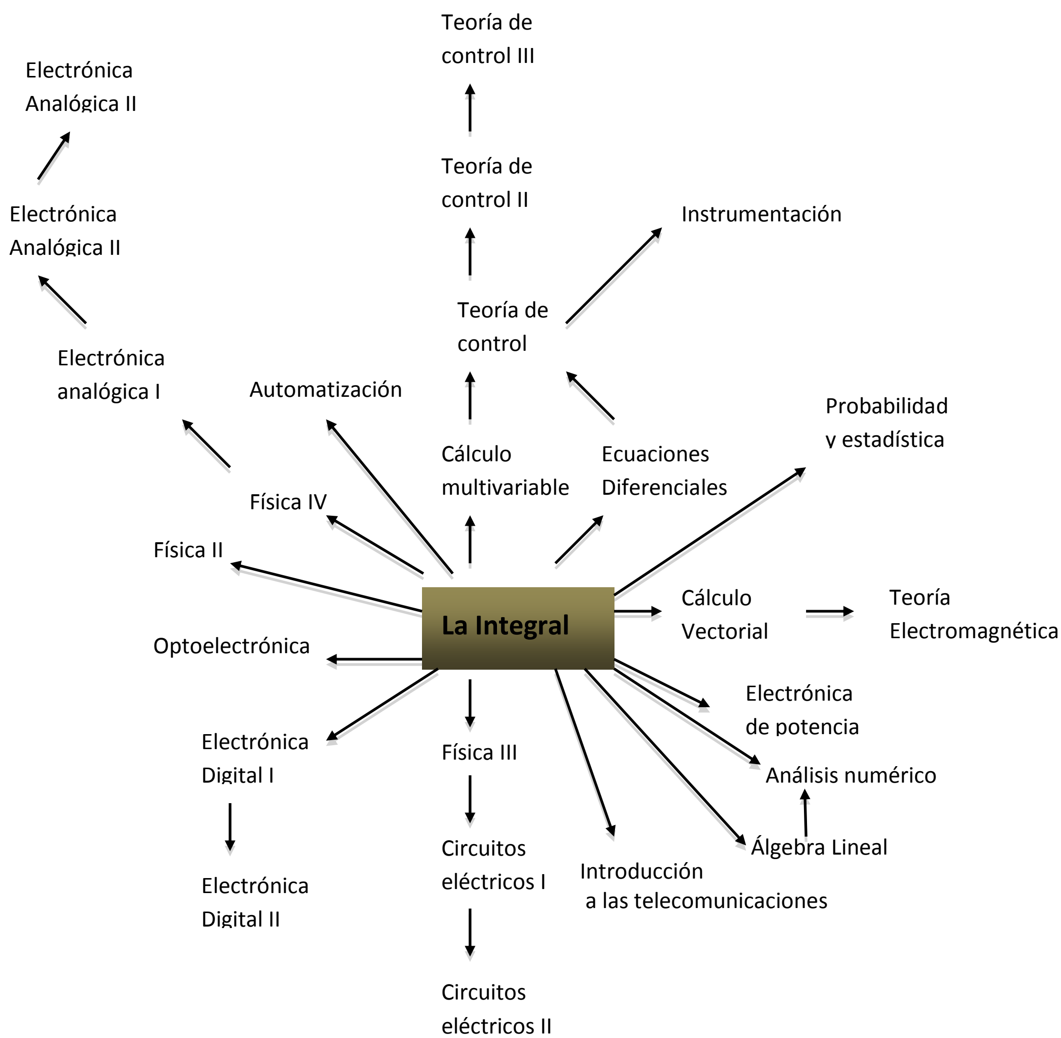


Figura 6. Relación del concepto de la Integral con otras asignaturas de la carrera de Ingeniería Electrónica.

1.1.2 El contexto escolar de la Integral.

La historia narra que el Cálculo Integral surge antes del Cálculo Diferencial; sin embargo, en actuales planes y programas de estudios hasta el momento vigentes de los programas de Ingenierías de diferentes universidades, se observa que la introducción de los cursos de cálculo se propone una secuencia inversa a la que evidencia la Historia; primero se estudia la Derivada, que se convierte en un prerrequisito para estudiar la Integral (CUCEI, 2010; IPN, 2010; UNAM, 2004; SNEST, 2008[a], ITCG, 2009). Lo mismo sucede en los libros recomendados por tales programas (Boyce y Diprima, 1994; Edwards y Penny, 2008; Larson, Hostetler, y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Purcell, Varberg y Rigdon, 2001; Stein, 1995 Stewart, 2008; Swokowski, 1989; Thomas y Finney 1998; Zill, 1987).

En la presente investigación se argumenta que el cambio en el orden cronológico entre la Integral y la Derivada obedece a que uno de los registros de representación de la Integral se refiere a la acumulación de cantidades que varían, y se sabe que para entender el proceso de la Integral es necesario comprender primero a qué se refiere el término *cantidades que varían*, que precisamente estudia la Derivada. En los cursos de cálculo, la Integral se aborda inicialmente para calcular áreas de figuras limitadas por curvas; posteriormente se aplica para calcular volúmenes, longitud de curvas planas, áreas de superficie de revolución, momentos y centros de masa, trabajo, presión y fuerzas de fluidos (Thomas y Finney, 1998). Como producto de la revisión de los libros de texto, la Integral es tratada desde diversos enfoques, se destacan a continuación algunos:

- La Integral
    - es el área limitada por curvas,
    - es un límite específico,
    - es la operación inversa a la Derivada,
    - es el trabajo que realiza una fuerza,
    - es la longitud de una curva,
    - es el volumen de un sólido,
    - es la función primitiva.

Diferentes autores hacen alusión a que la Integral debe ser abordada desde diversos registros de representación, al respecto Souto y Gómez (2010) mencionan que para entender el concepto de la Integral, se deben coordinar diferentes registros de representación. Al respecto se rescata: registro analítico, visual (geométrico) y numérico.

Ordóñez y Contreras (2010) abordan el concepto de la Integral Definida en distintos registros de representación desde lo que ellos llaman *componente epistémica de la Integral Definida*, esto es, los distintos significados que se le asignan al concepto. Los autores mencionan que la Integral Definida es tratada desde una idea estática (registros de representación numéricos): cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco, densidad, presión, intensidad de un campo magnético, que surgen a partir de la idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas. Por otro lado, la idea dinámica del concepto se refieren al estudio de variaciones instantáneas, es decir, velocidades, incrementos de población, enfriamientos de cuerpos, tasas de crecimiento y decrecimiento, "que conecta al concepto de la Integral con la idea de antiderivada" (Ordóñez y Contreras, 2010, p. 27). Otro registro de representación que incluyen estos autores es el algebraico.

En la presente investigación se destaca, como producto de la revisión bibliográfica que la Integral es abordada desde los siguientes registros de representación:

(1) Algebraico (algorítmico): se refiere a procesos algorítmicos como el uso de tablas o fórmulas.

(2) Geométrico (Gráfico): se refiere a figuras geométricas y gráficas de funciones a las que se recurre para explicar la idea de Integral como la sumatoria de cantidades infinitesimales y al estudio de las funciones primitivas.

(3) Aritmético: esto es, a las operaciones que implican realizar la suma de cantidades infinitamente pequeñas.

(4) Numérico: se refiere a lo que representa el número que se obtiene como resultado de un proceso de integración. Esto es, qué representa *n*, al resolver $\int_a^b f(x)dx = n$ en el contexto de un problema situado.

Por otro lado, algo que escasamente se observó en los libros citados de cálculo, es el énfasis de la relación geométrica entre la Integral y la Derivada lo que para la presente investigación se considera de gran ayuda, dado que si el estudiante comprende esta relación, principalmente desde un registro geométrico, será un alternativa para interpretar diferentes fenómenos físicos, por citar algunos: la obtención de una función desplazamiento a partir de la gráfica de la función velocidad, la obtención de una función trabajo a partir de la representación geométrica de una fuerza variable, aplicaciones de la Integral dentro del campo de la física y matemáticas superiores que estudian los Ingenieros, la cual permite resolver problemas relacionados con la compresión y estiramiento de resortes, bombeo de líquidos en recipientes de diferentes formas geométricas, entre otras aplicaciones.

Entonces, para la investigación resultó de particular interés interpretar y describir la apropiación del concepto de la Integral a partir del registro de representación geométrico, de modo que el estudiante, antes de acercarse a un planteamiento algebraico del concepto, sea capaz de analizarlo geométricamente. Para ello se consultaron diversas investigaciones respecto a la construcción del concepto de la Integral, hasta el momento se encontraron reportes de las construcciones mentales que el estudiante universitario realiza del concepto desde su representación numérica (la Integral Definida); pero al momento no se han encontrado trabajos que describan las etapas de construcción del esquema mental para la apropiación del concepto *"Integral de una función"* desde registros geométricos, lo cual posibilitaría el análisis y obtención de funciones primitivas (a partir de la gráfica de la Derivada).

1.1.3 La importancia del registro de representación geométrico de la Integral.

En la investigación se ha comentado que los conceptos en matemáticas son tratados desde diferentes enfoques y registros de representación, también se ha mencionado la importancia que tiene que un estudiante de ingeniería pueda transitar por éstos. Se ha enfatizado de manera particular el concepto de la Integral y se ha hablado sobre la actual escasez de propuestas que expliquen cómo un estudiante comprende el concepto desde registros de representación geométricos (los cuales son necesarios para interpretar y explicar ciertos fenómenos de la ingeniería que en ocasiones desde otro registro de representación no es inmediato o posible deducir).

Cuando se toca el tema de representaciones geométricas en matemáticas no se deben de ignorar las aportaciones de Descartes y Fermat, quienes simplificaron los procesos algebraicos dando paso a interpretaciones geométricas. Esto fue un salto muy importante para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral. El sistema cartesiano de Descartes resultó útil para las matemáticas y Física de la antigüedad, las cuales progresaban desde la retórica y los registros de representación algebraica (la introducción de símbolos y ecuaciones), hasta los registros de representación gráfica los cuales trascienden hasta estos días en el estudio de las matemáticas y la Física de las carreras de ingeniería y, además, favorecen la explicación e interpretación de fenómenos magnéticos, ópticos, astronómicos, mecánicos, por citar algunos.

Al igual que Descartes, Fermat es considerado otro personaje de la historia de las matemáticas que abona resultados importantes al registro de representación geométrica (Ruiz, 2003), dichos resultados, actualmente son tratados en los cursos de Cálculo. Su método considera a la recta tangente como posición límite de la recta secante, figura 7, este concepto resulta de gran trascendencia en la historia de las matemáticas, ya que anteriormente se trazaba una recta tangente en un punto por métodos euclidianos, una vez que se conocía la pendiente.

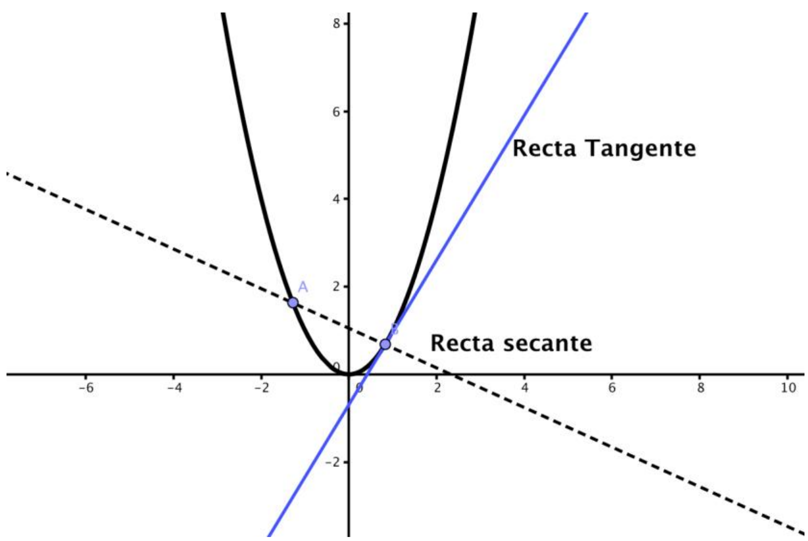


Figura 7. Recta secante y tangente.

La Historia da cuenta de la trascendencia que dentro de las matemáticas tienen los registros de representación geométricos. Se ha comentado en párrafos anteriores la importancia de este registro en la formación de los ingenieros, sin embargo, diversas investigaciones explican algunas dificultades que existen en el énfasis de las representaciones visuales, en particular las geométricas, dentro del aula. Al respecto Delgado (2009) menciona que uno de los problemas que encuentra con el registro de representación visual en la Integral es que el estudiante universitario, en la mayoría de los casos, se forma dentro de lo que él llama *efecto frontera*; esto es, que los estudiantes (y algunos profesores) conciben el estudio de las matemáticas como un conjunto de reglas y procesos algorítmicos, lo cual no es privativo del concepto en cuestión, sino que también se da en derivadas, límites, funciones, por mencionar algunos. Este problema persiste a lo largo de la formación académica del estudiante y trasciende incluso hasta niveles profesionales, donde los mismos profesores de tal disciplina no han logrado superar el *efecto frontera*.

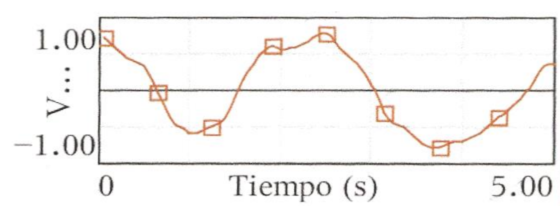
Por su parte, Cortés (2011) agrega que los registros de representación numérico, algebraico y gráfico son "…representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto" (p. 1). Agrega que la representación visual de un concepto generalmente es incluida por el profesor cuando lo explica y enlaza a la representación algebraica del mismo. Dicha representación visual permanece durante la mayoría del tiempo que se dedica a estudiar el concepto en cuestión.

Por otro lado, es común que los estudiantes de ingeniería requieran muestrear datos de algún fenómeno y obtengan razones de cambio. Ejemplo de ello es la velocidad con la que se mueve un objeto, en donde en determinados instantes se registra la variación de la distancia respecto del tiempo y con ello se puede describir la posición del móvil. Evidentemente el estudiante sólo cuenta con datos numéricos[2]:

[2] Los datos de la tabla se obtuvieron de un sensor de movimiento CBR y la calculadora TI-nspire cx.

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
0.05	0.73
0.10	0.69
0.15	0.63
0.20	0.57
0.25	0.51
0.30	0.46
. . .	. . .
0.60	0.12
0.65	0.00
0.70	-0-13
. . .	
5	0.38

La primera acción a la que comúnmente recurren los estudiantes de ingeniería es ubica esas razones de cambio en el plano cartesiano:



A partir de la acumulación de áreas o desde el comportamiento de rectas tangentes, podría encontrar una curva que le dé información para entender, describir y predecir el comportamiento de la distancia que recorre el objeto, sin necesidad de pasar por registros algebraicos, que sería el camino más popular para resolver este tipo de problemas.

La suma de la acumulación de áreas, es un tema que explícitamente no se ve con frecuencia en los libros de Cálculo ni en las estrategias didácticas que se sugieren en los planes de estudio (al menos en los programas que se han revisado en esta investigación). Sin embargo, en los cursos posteriores de matemáticas, como Ecuaciones Diferenciales y cursos de Física, que pertenecen a la formación básica del futuro ingeniero, la idea de función primitiva y la suma de la acumulación de cantidades toman una gran importancia para entender ciertos fenómenos, tales como: enfriamiento de cuerpos, las leyes del movimiento de partículas, termodinámica, trabajo y energía, cinemática, costo marginal, crecimiento y decrecimiento poblacional, por mencionar algunos.

En diversos apartados de algunos libros de Física (Giancoli 2008; Young, Freedman y Ford, 2009; Giambattista, McCarthy y Richardson, 2009), se enfatiza el concepto de la Integral desde el registro de representación geométrica, ya que para introducir conceptos de la Física (por ejemplo, movimiento, trabajo y energía), recurren a la suma de cantidades acumuladas y a la idea de función primitiva.

1.1.4 Estado del conocimiento.

En este apartado se abordan dos aspectos que se consideran relevantes para adentrarse en el estado del conocimiento en torno a la Integral. Primero se discuten algunas investigaciones cuyos resultados versan en la enseñanza y el aprendizaje de la Integral y algunas dificultades que enfrentan los estudiantes en la apropiación del concepto. Por otro lado se discuten investigaciones que reportan resultados referentes a la construcción de conceptos matemáticos en la mente de sujetos universitarios desde diferentes registros de representación.

1.1.4.1 La enseñanza y el aprendizaje de la Integral.

Diversas investigaciones han evidenciado las dificultades que presenta el estudiante en la apropiación del concepto de la Integral de una función. Esta afirmación ha sido documentada desde distintas perspectivas teóricas y dentro de diferentes ambientes de aprendizaje (Cantoral et al., 2003; Morales, 2009; Zuñiga, 2004; Artigué, 1991; Souto y Gómez, 2010; Crisóstomo, 2011). Al respecto, **Morales (2009)** menciona que una las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de la Integral es el abuso en la resolución de algoritmos (registros algebraicos) para obtener primitivas, sin contextualizar a partir del planteamiento de situaciones problema, no se despierta la necesidad en el estudiante por apropiarse del concepto. En este sentido, muchas veces éste no comprende el significado de lo que realiza.

Otro problema recurrente que se encuentra en los cursos de Cálculo Integral, es que el estudiante ha construido estructuras mentales débiles de los conceptos previos a la Integral. Ejemplo de ello es el concepto de Infinito (Imaz, 2001). Sin profundizar en los problemas y rupturas epistemológicas que ese concepto ha generado a lo largo de la historia de las matemáticas, la idea del infinito es, y ha sido, un conflicto en el aula, ya que se refiere a una abstracción que es abordada como una cantidad muy grande, y su contraparte, una cantidad infinitamente pequeña —*que nadie ve* pero que debe ser inferida a través del proceso de límite—, y de este modo introducir algunos conceptos del cálculo, entre ellos la Integral.

Cuando el estudiante se inicia en el estudio del Cálculo Integral, previamente ha trabajado cursos como álgebra, geometría y trigonometría, cursos en donde "ha sido adiestrado adecuadamente en cuestiones de índole discreta; de carácter algebraico o geométrico, y debe ser adiestrado, ahora, en cuestiones de carácter continuo; métrico y topológico" (Delgado, 2009, p. 61). El aprendizaje del Cálculo exige en el estudiante estructuras cognitivas que le permitan abstraer y manipular objetos mentales, haciendo alusión a los problemas que se enfrentan en los cursos de integrales.

Visto así, el estudio del Cálculo carece de sentido para el estudiante; debido a la desvinculación entre lo conceptual y lo algorítmico, resulta una disciplina "ajena" de su quehacer escolar y profesional, es considerado *como un obstáculo algebraico a vencer*, en donde un proceso de matematización no es posible. El "efecto frontera" en esta investigación, concibe a la representación algebraica como uno de los registros de la Integral que hoy en día puede ser tratada con la tecnología. Una de las creencias de este trabajo está centrada en que la esencia de aprender Cálculo Integral exige del estudiante procesos cognitivos que faciliten ciertos niveles de abstracción, que abran camino a la solución de problemas, desde las diferentes registros de representación del concepto, relacionados con áreas, volúmenes, cálculo de funciones primitivas, entre otros.

Souto y Gómez (2010) estudian las dificultades que enfrenta el estudiante en la apropiación del concepto de la Integral. Ellas señalan que el problema radica en que el sujeto no logra coordinar registros visuales con registros analíticos. Los resultados de ese estudio son relevantes para la presente investigación, dado que centran su atención en los errores y dificultades que un estudiante manifiesta en la apropiación de la Integral a partir de la comprensión visual de ese concepto. Definen la *comprensión visual* como "aquella que se da cuando un sujeto adquiere representaciones del concepto en el registro visual y además, es capaz de transformarlas y convertirlas a otros registros en el momento que requiere realizar razonamientos matemáticos" (p. 82).

Por otro lado, **Crisóstomo (2011)** realizó un estudio dentro el marco ontosemiótico, sobre los significados que el profesor de matemáticas asigna al concepto de Integral y cómo éste lo lleva a escena. Como resultado de las entrevistas a profesores, propone cinco configuraciones epistémicas para el concepto: *intuitiva, primitiva, geométrica, aproximada* y *aplicada* (p. 7). Algunos profesores coinciden con Souto y Gómez (2010) y afirman que el estudiante no logra enlazar el análisis visual con el analítico (para la presente investigación se denomina *registro algebraico*), y por tanto el concepto carece de sentido para él. Además señalan que, si el concepto se aborda desde situaciones problema particulares, ¿cómo lograr que el estudiante infiera generalizaciones?

La presente investigación difiere con algunos hallazgos de Crisóstomo (2011), ya que en coincidencia con Dubinsky (1991) el aprendizaje de las matemáticas surge a partir de la necesidad de resolver situaciones problema que, por un lado, estimulen el interés del sujeto por aprender, y por otro generen un desequilibrio en su estructura mental a tal grado que lo motiven a construir elementos cognitivos para una reequilibración. A partir de éste interés por aprender, el sujeto generará un escenario propicio para ello, en donde el aprendizaje progresará de modo inductivo (o deductivo, según las creencias del profesor).

Por otro lado, **Meza (2001)** realizó un estudio cuyo objetivo fue entender cómo el estudiante relaciona el concepto de la Integral con el de la Derivada, a partir de la relación tangentes-áreas; esto es, a partir de registros de representación geométricos. Encontró que de los 75 alumnos con los que trabajó sólo uno mostró una comprensión de la relación geométrica de estos conceptos. Lo que el investigador argumenta es que cuando se aborda en el aula el Teorema Fundamental del Cálculo, escasamente se ve que en los libros y en la currícula se haga énfasis en esta relación. Ésta resulta importante, ya que de ella se desprenden otros teoremas como el de Green, por mencionar alguno. Otro de los argumentos que se mencionan es el énfasis que se hace, tanto en los libros como en la currícula de la relación Integral-Derivada desde registros de representación algebraica, lo cual nulifica el aspecto geométrico y privilegia los procesos algorítmicos.

Al respecto, **Ordóñez y Contreras (2010)** realizaron un estudio para determinar, a partir de los resultados que arrojaron las pruebas de acceso a la universidad, si los estudiantes se apropiaron del concepto de la Integral y si fueron capaces de transitar desde un registro de representación hacia otro. Los resultados que arroja su trabajo son que el estudiante, opera con la Integral desde registros de representación algebraicos no transitando por el registro geométrico por tanto no reflejan flexibilidad para transitar de un significado de la Integral a otro.

Como se ha mencionado, en la presente investigación se exploran, describen e interpretan las construcciones que tienen lugar en la mente de un sujeto para la comprensión del concepto de la Integral, centrando especial atención en dichas construcciones a partir de representaciones geométricas, focalizando principalmente la Integral como una función primitiva, así como su relación con el concepto de Derivada.

Para dimensionar la comprensión de la relación entre la Integral y la Derivada desde registros de representación geométricos, se realizó un estudio exploratorio con profesores de matemáticas con diferente formación académica que pertenecen a diversas instituciones educativas, se les aplicó un cuestionario que contiene cinco problemas. La finalidad fue conocer su opinión sobre la importancia que tiene que un estudiante de ingeniería sea capaz de relacionar la interpretación geométrica de la Integral con el comportamiento de una función primitiva y su relación con el concepto de Derivada.

También se aplicó el cuestionario a estudiantes de diferentes programas escolares, que acreditaron el curso de Cálculo Integral, con la intención de indagar si pueden establecer tal relación. Al respecto, los profesores señalan la importancia que esto tendría, dado que permitirá, de entrada, que un estudiante analice y resuelva problemas de diversas áreas del conocimiento. Los alumnos evidenciaron carencias de habilidades y conocimiento de los diferentes registros de representación del concepto —entre otros, registros geométricos y contextuales— que les permitieran aplicarlo para la resolución de situaciones en contexto. Los resultados señalan que existe problema en la representación geométrica del concepto dado que el estudiante presenta conflicto cuando se le plantean situaciones en las que tiene que obtener la función primitiva a partir de registros geométricos.

1.1.4.2 La construcción de un concepto matemático en la mente de un estudiante universitario.

En párrafos anteriores se ha enfatizado la importancia que tiene en la investigación la apropiación de los conceptos matemáticos, ya que para que un estudiante de nivel superior logre matematizar un problema situado en un contexto (real o ficticio), el primer elemento que debe estar presente en su mente es la comprensión de los conceptos matemáticos contenidos en tal problema y propios de cada curso de matemáticas.

Sin embargo, existe también la posibilidad de que conozca el concepto y no sepa aplicarlo, entonces la segunda premisa (de igual importancia que la primera) es que el estudiante además de comprender el concepto, conozca para qué le servirá, en qué situaciones lo puede aplicar, y que logre aplicarlo; esto implica que adquiera cierto nivel de comprensión para poder utilizarlo. Desde esta posición resulta necesario buscar respuestas a la pregunta ¿cómo es que un estudiante universitario logra identificar los conceptos matemáticos que son necesarios para resolver un problema situado? A continuación se discuten algunas investigaciones que vienen a enriquecer estas ideas.

La construcción de un concepto matemático no es una actividad inmediata, requiere de diferentes etapas que pueden ser desarrolladas en periodos de tiempo variables y además requieren de trabajo y dedicación del individuo. De acuerdo con Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2000), estas etapas implican los procesos y la construcción de objetos. Los *procesos* se entienden como la etapa en la que una serie de operaciones pueden ser desarrolladas y coordinadas en la mente del estudiante, “el alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto…” (Cantoral et al., 2000, p. 34). Cuando el proceso es internalizado y concretado en la mente de un estudiante se genera una entidad única llamada *objeto*. Una vez que el objeto ha sido adquirido el individuo ha desarrollado cierta habilidad para pensar en este concepto ya sea en forma dinámica como proceso, o estática como objeto. Los autores mencionan que los números, variables y funciones pueden ser considerados como objetos matemáticos, los cuales son parte de una estructura más amplia de objetos, ya que estos se “articulan entre sí mediante relaciones” (p. 34).

En el marco de la teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas), existen diversos trabajos que, a partir de estudios cualitativos, aportan al campo de la matemática educativa resultados de lo que sucede en la mente del sujeto cuando intenta comprender un concepto matemático. Ejemplo de ello son los conceptos de Cálculo Diferencial (Badillo, 2003; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 2004), Cálculo Integral (Czarnocha, Loch, Prabhu & Vidakovik, 2001; González y Aldana, 2010; Paschos, 2009; Muñoz, 2010), inecuaciones (Barboza, 2003), geometría (Zazkis y Dubinsky, 1996), funciones (Asiala, Brown, DeViries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 2004), composición de funciones (Franklin, 1999), teoría de grupos, conjunto generador y espacio generado (Kú, Oktaç y Trigueros, 2007), espacios vectoriales (Juárez, Betancourt, 2008), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

De acuerdo a estas investigaciones, el aprendizaje de las matemáticas se basa en la construcción de objetos matemáticos; esto es, “hacer un objeto de un proceso”, entonces en el aprendizaje de las matemáticas el sujeto tiene que desarrollar el pensamiento operacional a partir de los procesos que desarrolle sobre un objeto matemático.

En esencia, son tres los ejes comunes que se detectan en los planteamientos de estas investigaciones: el primero se refiere a la idea de describir las construcciones mentales que desarrolla el sujeto para comprender un concepto matemático, las cuales se vierten en la ejecución de una serie de acciones que el estudiante deberá realizar para transformar en procesos con la intención de que éstos sean *encapsulados* en objetos matemáticos. Esto se evidencia en los diferentes trabajos revisados, ya que se observa que, en la construcción de un concepto, cada sujeto realiza *construcciones diferentes* de acuerdo a los esquemas mentales que posee, e incluso algunos no logran superar el *nivel proceso* (que podría ubicarse en un registro de representación algebraico).

Ejemplo de ello es la investigación de Badillo (2003), quien trabajó la Derivada como objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje con los profesores de nivel medio superior. Badillo observó que algunos profesores, en la resolución de problemas situados, no evidencian construcciones más allá de los procesos (lo que Piaget y García denominan *un esquema en el nivel inter-*), explica que esto se debe a que los esquemas que posee el profesor han sido construidos débilmente por lo que no son suficientes para resolver las nuevas tareas.

El segundo eje sobre el que giran las investigaciones se refiere a la descripción y justificación de los diferentes niveles de construcción por los que transita un sujeto en la construcción de un esquema mental. Éstos se refieren a: un nivel carente de reflexión, en el que el sujeto únicamente imita procesos o atiende instrucciones de lo que debe hacer; un nivel operatorio pero carente de significados, en donde el sujeto realiza operaciones en situaciones similares entre sí; y un nivel en el que el sujeto logra coordinar el esquema con otras estructura mentales.

El tercer eje se refiere a la parte metodológica de las investigaciones, las cuales se desarrollan a partir de los tres componentes que propone el ciclo APOE: Análisis teórico del concepto, del cual se desprende la descomposición genética del mismo, la implementación de la instrucción, la observación y la recolección de información. La *descomposición genética de un concepto* se refiere a la descripción detallada de las construcciones mentales que un individuo puede hacer para apropiarse de un concepto concreto.

Una diferencia entre las investigaciones referidas, además de la descripción de los procesos de construcciones mentales que lleva acabo el sujeto, radica en la descomposición genética que los autores realizan sobre el concepto en cuestión, de la cual depende la declaración de las acciones que desarrollará el sujeto para la comprensión de un concepto dado. La descomposición genética se refiere a la idea que el investigador evidencia sobre cómo cree que puede ser comprendido un concepto; además, ésta se fundamenta a partir de la experiencia que el investigador tiene sobre el concepto y del resultado de un minucioso análisis sobre la epistemología del mismo.

Otro trabajo sobre la construcción del concepto de la Integral Definida es el que reportan **González y Aldana (2010)**, quienes realizan un estudio con 11 jóvenes universitarios, sobre la apropiación del concepto de la Integral Definida, identifican los elementos matemáticos que utilizan los alumnos para resolver las tareas propuestas, las cuales consistieron en aproximar áreas limitada por curvas, dentro de un intervalo utilizando particiones; y el uso que hacen de los diferentes sistemas de representación: gráfico, algebraico y analítico. Los investigadores realizan una revisión bibliográfica con la intención de determinar los elementos matemáticos que constituyen el concepto. Los resultados de la búsqueda son (p. 7):

a) El área como aproximación.

b) El área como límite de una suma.

c) La Integral Definida.

d) Las propiedades de la Integral Definida.

e) Los teoremas fundamentales y del valor medio.

Los investigadores aplicaron una serie de tareas relacionadas con aproximar áreas imitadas por curvas que los estudiantes debieron resolver. Posteriormente entrevistaron a cada sujeto para que explicara cómo había resuelto cada tarea. Las conclusiones a las que llegan estos investigadores señalan que la mayoría de los estudiantes entrevistados no tiene una concepción de la suma de Riemann como un objeto matemático, además de que no recurren ni coordinan diferentes sistemas de representación.

Una de las dificultades que observan en el manejo del sistema de representación algebraico, es que los estudiantes tienen problemas en la construcción del concepto de límite, no muestran habilidades para coordinar diferentes sistemas de representación (geométrico, algebraico, numérico). Algunos jóvenes presentaron menos dificultades en el esquema gráfico que en los otros dos, ya que para realizar las divisiones recurrieron más al sentido común; sin embargo, no lograron, a partir de los datos, generar una sucesión numérica que representara el área de cada partición ni establecer las particiones de las figuras geométricas; tampoco lograron la coordinación entre un registro gráfico y algebraico y manifestaron dificultades para interpretar desde el registro algebraico y traducirlo al correspondiente registro gráfico.

Las aportaciones de la investigación señalan que los esquemas previos a la Integral como el de funciones, límites, sucesión y partición son indispensables para constituir el concepto de la Integral en su representación numérica (Integral Definida).

Boigues (2010) desarrolló una descomposición genética en torno a la Integral Definida, en ella se refleja una concepción de la Integral como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. En su propuesta incluye la utilización de la computadora para acercar al estudiante a la construcción del concepto. Por otra parte, intenta indagar sobre las principales dificultades y obstáculos que enfrenta el estudiante cuando aprende el concepto de la Integral.

Boigues observó que las construcciones mentales que desarrolla el estudiante son mejores cuando están relacionadas con aspectos gráficos. Otra de las conclusiones que reporta es que la construcción del esquema a nivel proceso requiere mucho más que la repetición de acciones, además de que el proceso se apoya en la reflexión e interiorización por lo que propone diseñar o ampliar las actividades que permitan mejorar la comprensión de los procesos, para ello, una opción que propone es utilizar la computadora.

La Integral ha sido estudiada en diversos ambientes de aprendizaje, en los que se ha encontrado que los estudiantes cuando utilizan el *CAS (Computer Algebra System) Derive,* no presentan problemas en la interpretación de la Integral como área bajo la curva ni al calcular la Integral como un proceso algebraico para calcular la antiderivada, (Camacho, Depool y Garbin, 2008). Los problemas que se detectan radican en que el estudiante no es capaz de identificar, a partir de una serie de problemas situados en el área de la Física y la Ingeniería, la aplicación de dicho concepto.

El objetivo de la investigación de **Camacho** et al. (2008), es estudiar cómo el uso del CAS favorece la solución de problemas ubicados en diferentes contextos, en los que se aplica la Integral Definida. También se estudia cómo el individuo identifica la información, recurre a diferentes sistemas de representación del objeto matemático, así como la conversión y coordinación entre ellos y cómo comunica resultados. En la investigación se observa que los estudiantes no presentan dificultades en resolver problemas situados en un contexto matemático (por ejemplo, calcular áreas de curvas) cuando se utilizan funciones continuas, pero cuando involucran funciones continuas a trozos, presentan dificultades de interpretación, ya que no logran coordinar los diferentes sistemas de representación tanto cuando plantean su solución como cuando calculan las integrales.

Otro punto que llama la atención es que cuando los problemas están situados en contextos de la Física o de la ingeniería, y que no están asociados con el cálculo de áreas, los estudiantes cometen errores en el planteamiento e interpretación de soluciones. Esto se explica debido a que al introducir el concepto desde su representación geométrica (Camacho et al., 2008), se presentan grandes dificultades para entender que el valor de la Integral Definida puede medir otras cantidades físicas como longitudes de curvas, volúmenes, distancias y no sólo áreas.

Un estudio que presenta resultados de interés es el reportado por **Paschos & Farmaki**, (2006) sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto de la Integral Definida. El trabajo pretende —a partir de situaciones reales—, un acercamiento desde registros geométricos y numéricos a dicho concepto. Se realiza un estudio de caso, en donde a partir de la manipulación de imágenes el sujeto desarrolla una aproximación intuitiva al mismo. El objetivo de la actividad en la que el sujeto trabajó fue conectar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo con el área de la región entre la gráfica de velocidad (sobre eje vertical, variable dependiente) y el eje del tiempo (eje horizontal, variable independiente) además de determinar una unidad de medición de la zona en el gráfico y calcular el área de la región por aproximación.

Los resultados del estudio demuestran que a partir de la entrevista a los estudiantes y la revisión de sus procesos de construcción, se revelan poco a poco las etapas de la construcción de los conocimientos, las imágenes, los conceptos, el mecanismo mental y las operaciones de los estudiantes. Mediante este mecanismo se observó que el sujeto logró una comprensión de la definición del concepto de Integral Definida; sin embargo, el estudio no describe explícitamente niveles de construcción del esquema mental que conforma el sujeto para la apropiación de la Integral Definida, únicamente describe los obstáculos y las coordinación con otras estructuras cuando el sujeto logra tal objetivo.

Hasta el momento no se encontró un trabajo que describa los niveles de construcción por los que transita el estudiante para la apropiación del concepto de la Integral, tampoco se ha encontrado un mecanismo que enfatice en la relación geométrica entre la Derivada y la Integral y que describa la obtención de funciones primitivas a partir de registros de representación geométricos. La importancia de que el estudiante sea capaz de entender el enfoque de la Integral como función primitiva es que esto proveerá al sujeto de una herramienta matemática desde una perspectiva variacional, con la que podrá resolver problemas en los que se trate la acumulación de cantidades que varían: velocidades, densidades, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción), entre otras.

1.2 Problema

Las matemáticas en la vida de los estudiantes de Ingeniería se entienden como la disciplina que debe proveer de conocimientos y habilidades al individuo de tal forma que le permitan *matematizar* (Rico, 2003) un problema dentro del campo de su interés profesional, o fuera de éste. La investigación supone que, para que un estudiante de nivel superior logre matematizar un problema situado en una realidad, necesita comprender conceptos —matemáticos— inherentes a la manipulación de cantidades, desde diferentes registros de representación y desde sus diversos enfoques.

En el nivel superior, —específicamente en Ingeniería— el Cálculo Integral se ubica en los dos primeros periodos escolares. La importancia que tiene particularmente la Integral en la retícula básica, es fundamental, debido a que se trata de uno de los conceptos medulares para los subsecuentes cursos de matemáticas, así como para los diversos cursos —necesarios— dentro del mismo programa educativo en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en Ingeniería Electrónica el concepto de Integral se aplica en los cursos de Física, Instrumentación, Teoría de control, Electrónica en Comunicaciones, Electrónica de Potencia, entre otros, lo mismo ocurre para el programa educativo de Ingeniería Mecánica, Ingeniería Ambiental, Ingeniería en Sistemas Computacionales, por citar algunos (SNEST, 2008a).

El estudiante de Ingeniería debe comprender conceptos matemáticos desde sus diferentes registros de representación (geométrico, aritmético, numérico, algebraico) dado que dependerá del contexto del problema la elección del registro pertinente para la manipulación de cantidades y para obtener la solución correspondiente.

Existen propuestas didácticas que sustentan y describen la apropiación del concepto de la Integral (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Dubinsky et al., 2000; Delgado, 2009; Sealey, 2006, Torres y Martínez (2008), Souto y Gómez, 2010;

Thompson, 1994; Hamdam, 2009; Crisóstomo, 2011; Ordóñez y Contreras, 2010; Prabhu & Vidakovic (2001); Paschos & Farmaki, 2006) que relacionan registros geométricos con numéricos, algebraicos con algebraicos, algebraicos con numéricos, pero al momento no se ha encontrado un mecanismo —con fundamentación teórica y metodológica— que posibilite documentar cuáles son los niveles de construcción de las estructuras mentales que desarrolla el sujeto para la comprensión del concepto de la Integral desde un registro geométrico (acumulación de cantidades que varían) a otro registro geométrico (la gráfica de una función primitiva).

1.3. Diagrama de la investigación

En la figura 8 se muestra esquemáticamente el planteamiento del problema y el surgimiento de la pregunta de investigación.

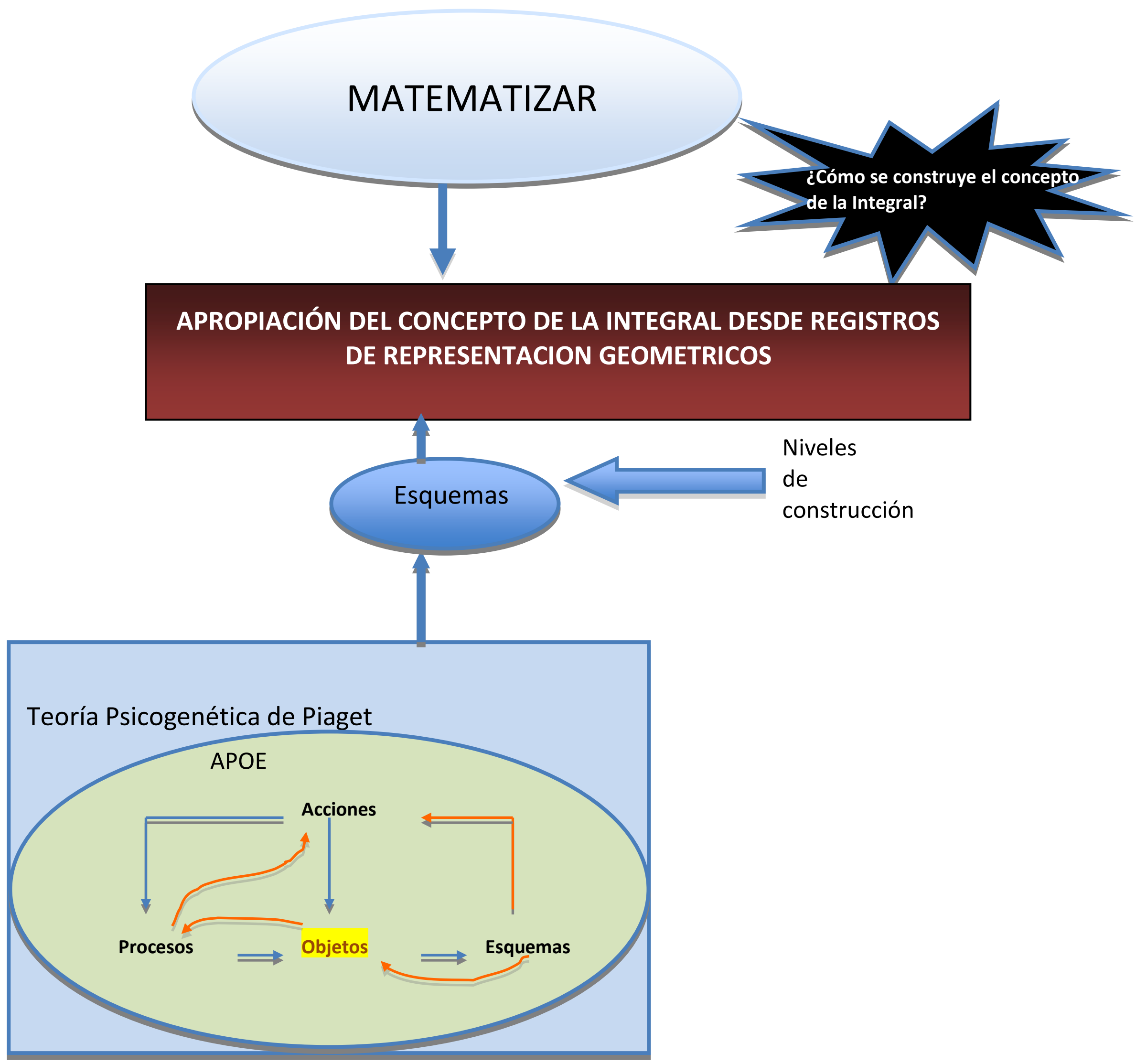


Figura 8. Diagrama del problema de investigación.

1.4 Preguntas de investigación

1.4.1 Principal.

¿Cómo construye un estudiante universitario un esquema mental para la apropiación del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos?

1.4.2 Secundarias.

a) ¿Qué construcciones mentales previas moviliza el estudiante universitario para conformar las estructuras necesarias que faciliten la comprensión del concepto de la Integral a partir de registros de representación geométricos?

b) ¿Cuáles conflictos conceptuales enfrenta un estudiante para lograr los requisitos previos necesarios para conformar las estructuras suficientes que faciliten la comprensión del concepto de la Integral?

c) ¿De qué manera el estudiante adapta los esquemas de representación que posee con las nuevas construcciones mentales?

1.5 Objetivo

1.5.1 General.

Analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante universitario para comprender y apropiarse del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos.

1.5.2 Objetivos particulares.

a) Describir los niveles de construcción de las estructuras mentales que desarrolla un estudiante universitario, que le permiten comprender y apropiarse del concepto de la Integral de una función desde registros de representación geométricos.

b) Identificar los esquemas mentales previos a los que recurre el estudiante universitario para la construcción de las estructuras necesarias para la comprensión del concepto de la Integral.

c) Identificar los conflictos que enfrenta un estudiante en el proceso de construcción del esquema mental para la Integral desde registros geométricos.

d) Explorar y describir de qué modo un estudiante universitario adapta los diferentes esquemas de representación que posee con las nuevas construcciones.

2 Marco teórico

2.1 Marco teórico

En la epistemología del conocimiento matemático (Piaget y García, 2004), se han suscitado dos reflexiones en torno a la interacción del sujeto con los objetos lógico-matemáticos a partir de la *matematización* de un fenómeno[3]. En la primera reflexión se concibe al fenómeno como algo externo al sujeto, tal fenómeno existe y tiene ciertas propiedades matemáticas por sí mismo; la matematización es inherente al sujeto el cual intenta acercarse al objeto exhaustivamente, para extraer información del mismo. A medida que interactúa con el fenómeno lo conocerá más y más, sin embargo, jamás terminará de hacerlo (el conocimiento no es un producto terminado).

En la segunda reflexión, el fenómeno existe pero no tiene las propiedades matemáticas por sí mismo; como algo externo al sujeto. La matematización es producto del proceso mental del sujeto sobre el fenómeno: al acercarse al fenómeno, construirá tal matematización. La idea fundamental de estas reflexiones sugiere plantear cuestionamientos en torno a ¿qué tipo de instrumentos mentales utiliza un sujeto para acercarse al objeto?, ¿qué mecanismos se activan en su mente para interactuar con los objetos lógico-matemáticos?

Uno de los principios básicos de la teoría de Piaget es afirmar que el conocimiento surge de la interacción sujeto-objeto (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky & Vidakovic, 1991). La experiencia que resulta de esta interacción desencadena una serie de estructuras mentales que le permiten al sujeto generar deducciones en torno al objeto.

La Investigación se sustenta en los principios de la teoría psicogenética de Piaget, y algunos planteamientos del marco APOE, que es una extensión de los hallazgos de Piaget hacia la construcción de conocimiento matemático en estudiantes universitarios.

2.1.1 Construcción y niveles de conocimiento.

El trabajo de Piaget ha sido tan vasto, profundo e inspirador, que hoy en día sus ideas sobre el desarrollo epistemológico siguen siendo estudiadas y ampliadas. Piaget, —

[3] Fenómeno se entiende como algo observable que en este caso puede ser interpretado matemáticamente.

siguiendo la línea filosófica de Descartes al hablar sobre mente, razón y entendimiento— investigó acerca de los mecanismos que promueven la adquisición y desarrollo del conocimiento, se interesó en entender el desarrollo cognitivo de un sujeto. Para su época, cuando la mayoría de los psicólogos consideraban el conocimiento como una entidad estática y se creía que el conocimiento estaba ahí listo para ser descubierto, sus ideas acerca de la noción de que los individuos podían *generar* conocimiento, y que se podía especificar el proceso envuelto en esta producción, no era noción que coincidiera con el patrón tradicional, resultaba totalmente controversial.

Aunque Piaget seguía una forma de pensamiento desde un punto de vista meramente biológico, llegó a una teoría del conocimiento que es perfectamente compatible con la de los físicos modernos. Tanto físicos como biólogos admiten que las estructuras conceptuales que aceptamos de ser conocimiento son producto de conocedores activos que moldean su pensamiento para adecuar las limitaciones que experimentan. Einstein explicó esto con la siguiente analogía (Einstein e Infeld, 1986):

> *"Los conceptos físicos son creaciones libres del espíritu humano y no están, por más que lo parezca, determinado unívocamente por el mundo exterior. En nuestro empeño de concebir la realidad, nos parecemos a alguien que tratara de descubrir el mecanismo invisible de un reloj, del cual ve el movimiento de las agujas, oye el tic-tac, pero no le es posible abrir la caja que lo contiene. Si se trata de una persona ingeniosa e inteligente, podrá imaginar un mecanismo que sea capaz de producir todos los efectos observados; pero nunca estará segura de si su imagen es la única que los pueda explicar. Jamás podrá compararla con el mecanismo real, y no puede concebir, siquiera, el significado de una tal comparación. Como él, el hombre de ciencia creerá ciertamente que, al aumentar su conocimiento, su imagen de la realidad se hará más simple y explicará mayor número de impresiones sensoriales. Puede creer en la existencia de un límite ideal del saber, al que tiende el entendimiento humano, y llamar a este límite la verdad objetiva"* (p. 23)

Así, Piaget nota que los científicos categorizan sus observaciones al adaptarlas en conceptos que son resultado de abstracciones imaginativas de una visión o sensación particular. Luego, cuando explican, lo hacen mediante relaciones, que no son dadas, sino que “son el resultado de su propia abstracción, de las operaciones mentales que han hecho para combinar lo que ha visto o sentido” (Glasersfeld, 1997, p. 293).

En consecuencia, Piaget afirma que el conocimiento es una construcción individual y que su concordancia con el de otros sujetos se logra mediante la interacción social. En sus trabajos, la mente juega un papel fundamental en la construcción del conocimiento, dado que su función principal es la de “entender e inventar, en otras palabras, de construir estructuras al estructurar la realidad” (Piaget, 1971, p. 27). En este punto, la teoría psicogenética explica la necesidad del sujeto de *adaptarse* al mundo que le rodea y así lograr un “balance coherente que evite contradicciones internas” (Glasersfeld, 1997, p. 294).

La teoría psicogenética afirma que los individuos nacen con una tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas las cuales les permiten adaptarse y comprender el medio que les rodea. La organización también se refiere a relacionar diferentes estructuras que posee el individuo para que éstas **generen** estructuras coordinadas más complejas o de más alto nivel que las actuales. Las estructuras cognoscitivas no son fijas ya que se modifican a medida que el individuo desarrolla y enfrenta nuevas experiencias lo que promueve la construcción de *estructuras* de pensamiento más complejas que le permiten mejores adaptaciones al entorno y a la nueva información (Woolfolk, 1996, Blanco, 2005).

Los esquemas son sistemas mentales organizados en acciones o pensamientos que permiten al individuo representar de manera mental los objetos y eventos de su mundo. Todos los seres humanos poseemos esquemas de pensamiento y mientras el individuo sea capaz de organizar y desarrollar esquemas nuevos, mejor será su *interpretación* y *adaptación* a su entorno (Piaget y García, 2004). Un esquema puede ser un concepto o un patrón de acción.

En la adaptación al entorno participan dos procesos, *asimilación* y *acomodación*. La asimilación entra en escena cuando el individuo trata de comprender e interpretar su mundo con los esquemas que posee. Si estos esquemas no son suficientes para dicha interpretación o para dar respuestas a la misma tales esquemas deben sufrir un cambio, conocido como *acomodación,* que se refiere al proceso de modificar los esquemas existentes, o integrar nuevos a la estructura cognoscitiva actual del individuo. Así "conocer es *asimilar*, no es copiar, es ante todo, interpretar, dar *significado* a una experiencia nueva a partir de lo que, en ese momento, sean nuestros esquemas cognitivos" (Castorina, Coll, Diaz A., Diaz F., García, Hernández, Moreno, Muriá, Pessoa y Vasco, 2006, p.166).

Entonces, el "aprendizaje consiste en la consolidación de los esquemas cognitivos (patrones de acción, conceptos, teorías, etc.) y en la generación de otros nuevos, a partir de los desequilibrios de los existentes, una vez que éstos descubren sus insuficiencias frente a nuevas tareas" (Castorina et al., 2006, p. 166). Por tanto, el conocimiento se entiende como una forma de organizar la experiencia, una herramienta en la búsqueda de equilibrio, y su propósito es la adaptación del sujeto al mundo real (Glasersfeld, 1997).

El diagrama de la figura 9, representa esquemáticamente el proceso del pensamiento en estructuras psicológicas de un sujeto. Primero en su necesidad de adaptación ante un nuevo evento o situación dentro de su entorno: se desencadena en su mente una situación de conflicto, si posee los suficientes esquemas para lograr su interpretación, entonces hay equilibrio. Si sus esquemas no son suficientes o no cuenta con el esquema que produzca un resultado satisfactorio, entonces se genera una situación incómoda y hay un desequilibrio en su estructura cognitiva, lo que lo obliga a reorganizar los sistemas existentes para adaptarlos, como consecuencia de la asimilación y la acomodación y de este modo alcanzar su objetivo: pensar e interpretar la información.

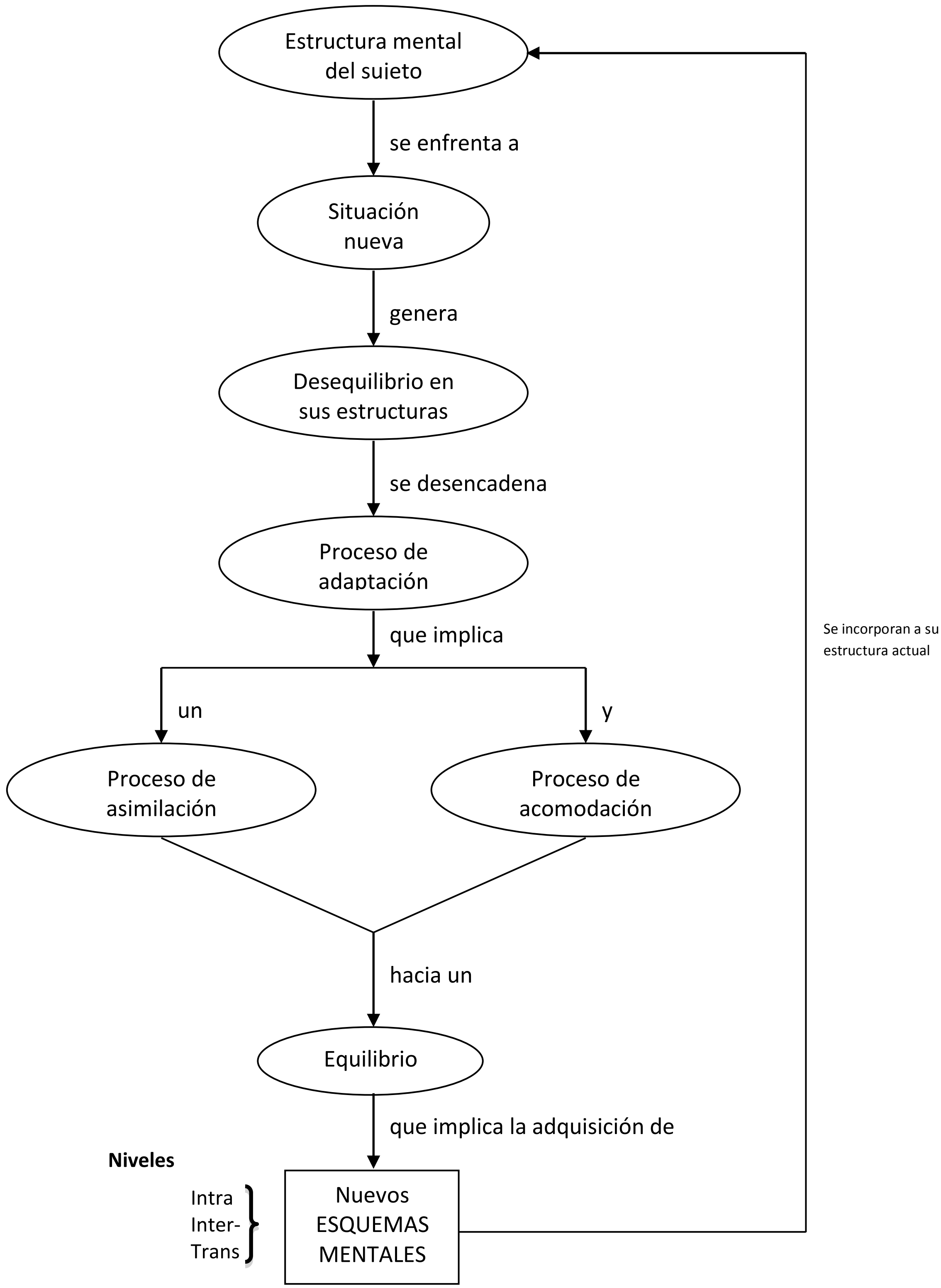


Figura 9. Desarrollo del pensamiento.

El ciclo se repite y cuando existe nueva información, otro evento o situación las estructuras cognoscitivas del individuo sufren nuevamente un desequilibrio (si no posee esquemas necesarios) y éste tiende a organizar sus procesos de pensamiento para equilibrarse nuevamente. Esto significa que permanentemente está ajustando sus estructuras actuales e integrando nuevas estructuras y cada vez las nuevas estructuras serán más complejas y por lo tanto más efectivas. A este ciclo Piaget y García (2004) lo describen como secuenciación de construcciones mentales, ya que cada construcción es el resultado de una secuencia anterior y es un elemento necesario para la secuencia posterior.

Para Piaget el conocimiento del sujeto es una construcción personal, sin embargo, enfatiza que en algunas etapas del ser humano (sobre todo tempranas) la socialización es importante; por ejemplo, la interacción social es necesaria para facilitar la adaptación del niño a su entorno físico externo. La colaboración y la coacción son mecanismos que Piaget incluyó para explicar la forma en que la interacción social podía ser dada; sin embargo, afirmó en repetidas ocasiones que había una gran cantidad de conocimiento que el sujeto podía adquirir por él mismo (aun en etapas tempranas).

La historia de las matemáticas y de la Física da sustento a tales afirmaciones. Las reflexiones más profundas de Newton sobre la ley gravitacional, que lo llevaron a consolidar los hallazgos para dicha ley tuvieron origen cuando Newton, sentado debajo de un árbol vio caer una manzana, lo cual explica la construcción de conocimiento “no a través de la interacción social”, sino a partir de observaciones individuales sobre objetos.

Para afinar la descripción de tales construcciones Piaget y García introducen, tres niveles de comprensión específicos, conocido como la “triada dialéctica” (Piaget y García, 2004, p 33) los cuales se definen a partir de las acciones que realiza un sujeto sobre un objeto:

- **Nivel Intra-:** "Lo propio de este nivel es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse" (p.163).

- **Nivel Inter-.** "Una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos" (p. 165).
- **Nivel Trans-.** Ocurre cuando el individuo logra trasladar el esquema y vincularlo con otros lo cual conduce a la "construcción de estructuras" (p. 167).

En la etapa *Trans-*, el sujeto puede trabajar con el esquema de una manera más estructurada que en las otras dos etapas, lo que no significa que el esquema sea algo terminado, éste se sigue enriqueciendo al relacionarlo con otros esquemas u objetos matemáticos (Trigueros, 2005).

En la evolución de las matemáticas se pueden constatar estos niveles, ejemplo de ello es el desarrollo de la geometría. Al respecto Piaget y García (2004) mencionan que las diferentes etapas por las que evoluciona esta área del conocimiento va desde el nivel Intra-, haciendo referencia a los trabajos de Euclides, donde se estudian las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos pero solo internamente, sin considerar el espacio que las contiene y las transformaciones que en éste pueden tener lugar. De aquí se transita a un nivel Inter-, en el que evolucionan las transformaciones de figuras geométricas y se busca relaciones entre las figuras y tales transformaciones. Cuando se logra la permanencia de las estructuras, producto de tales transformaciones, se considera que se alcanza un nivel Trans-.

2.1.2 Acciones, objetos, procesos, esquemas.

Aun cuando la teoría de Piaget ha sido cuestionada, ampliada, y que sus orígenes provienen del estudio del desarrollo cognoscitivo de los niños, en la actualidad muchas de sus ideas son utilizadas como fundamento para teorías de aprendizaje en la didáctica de las matemáticas, a nivel universitario y preuniversitario.

La transposición de las ideas de una teoría epistemológica a un campo del saber, como el de la didáctica de las matemáticas, debe sufrir adecuaciones, dado que es necesario retomar algunas de las ideas que permitan explicar cómo un sujeto adquiere el conocimiento. Al respecto, teóricos como Ed Dubinsky (2001) han retomado algunas de esas ideas como fundamento para explicar cómo se adquiere el conocimiento matemático, ideas como la abstracción reflexiva y la manera de cómo se pasa de un estadio del conocimiento a otro (Trigueros, 2005).

Diversos trabajos se han desarrollado a partir de las ideas de Dubinsky y han sido ampliados con variados resultados por algunos investigadores (Asiala et al., 2004; Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics & Oktaç, 2000; Badillo 2003; Barboza, 2003; Bronislaw, Dubinsky, Loch, Prabhu & Vidakovic, 2000; Franklin, 1999; Kú, Oktaç, Trigueros, 2008; Juárez y Betancourt, 2008; investigaciones desarrolladas por el grupo RUMEC —Research in Undergraduate Mathemarics Education Comunity—; Zazkis & Dubinsky, 1996; Dubinsky, Elterman & Gong, 1988).

En párrafos anteriores se describió la perspectiva epistemológica de Piaget de cómo un sujeto construye su conocimiento. A partir de esas ideas, Dubinsky desarrolla la teoría APOE (Acciones Proceso Objetos y Esquemas) e intenta explicar cómo se construye el conocimiento matemático, cómo un estudiante de nivel superior (y medio superior) construye un concepto matemático.

Piaget afirmó que el conocimiento transita por diferentes estadios; APOE sustenta que la construcción del conocimiento matemático transita por las etapas *acciones*, *procesos* y *objetos* que se evidencian cuando el sujeto interactúa con un objeto matemático. Agrega que en la transición de una etapa a otra tienen lugar procesos mentales a los que Piaget llamó interiorización, encapsulamiento, reversión, generalización y coordinación. Estas etapas no necesariamente deben ser secuenciadas, de hecho el sujeto puede permanecer mucho tiempo en una de ellas antes de lograr la siguiente. El nivel de comprensión del concepto se evidencia en la manera en que el sujeto intenta dar solución a una situación problema (Dubinsky, 1991).

La idea de la manipulación de objetos físicos que establece Piaget para las primeras etapas de la construcción de conceptos, es tratada, desde la perspectiva de

APOE, como una manifestación no sólo física (debido a la complejidad de los conceptos matemáticos avanzados) sino como la manipulación de objetos mentales. Es necesario entender que los objetos a los que se refiere Piaget son objetos de conocimiento y que los objetos en la teoría APOE se refieren, en particular, a objetos matemáticos tales como ecuaciones, funciones, el mismo número, desigualdades, la Integral, la Derivada, etc.

La teoría APOE propone elementos que permiten reflexionar sobre la comprensión de un concepto matemático y además de elementos didácticos para su instrucción. Para ello es necesario acercarse al concepto desde su epistemología, visto desde las matemáticas mismas; APOE propone lo que denomina *descomposición genética* del concepto, esto es, "un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo un concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo" (Asiala, et al., 2004, p. 5).

> *La descomposición genética de un concepto le permite al investigador, en primera instancia, a) "cuestionar y mejorar la comprensión de un concepto matemático, b) entender la epistemología*[4] *del mismo y de esta manera diseñar las tareas escolares para el aula, c) determinar los instrumentos que deberá diseñar o implementar en las actividades que realizará el estudiante, d) determinar y caracterizar las competencias matemáticas que deberá poseer el estuante para la realización de las tareas en pro de la construcción de un objeto de aprendizaje.*

El desarrollo de la comprensión de un concepto inicia cuando el sujeto realiza lo que representa la parte medular de la teoría APOE, las ***acciones*** sobre objetos matemáticos (Dubinsky & Lewin, 1986) ya que es mediante las acciones que el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, a partir de un proceso dialéctico logra internalizar *procesos* para que éstos sean encapsulados en *objetos* matemáticos y, se espera sean desencapsulados y

[4] El término de epistemología es entendido como el fenómeno de la génesis del conocimiento en las mentes individuales.

regresados a su estado inicial, con esto se logra integrar un *esquema*. Cuando el sujeto es capaz de manipular tales objetos, se desencadena una serie de procesos mentales que pueden ser descritos a partir de lo que Piaget, en la construcción del conocimiento lógico-matemático, llama *abstracción reflexiva* (Dubinsky & Lewin, 1986), que se refiere al mecanismo por el cual tiene lugar la construcción del conocimiento matemático (Dubinsky, 1991).

Piaget explica que en la reorganización de los diferentes niveles de los estadios del conocimiento existen dos mecanismos (Piaget y García, 2004): la *abstracción empírica*, en la que se destaca el conocimiento físico que extrae y analiza el sujeto del objeto; y la *abstracción reflexiva*, la cual se manifiesta a partir de las acciones y operaciones físicas y mentales que el individuo realiza sobre un objeto. La abstracción reflexiva se refiere a "las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conducen a construir" (Piaget y García, 2004, p. 247).

La abstracción reflexiva surge a partir de dos procesos. El primero, llamado *reflejamiento,* se refiere a que el individuo es capaz de establecer representaciones (o proyectar) de un estadio inferior (actual) de conocimiento a uno superior a partir de las acciones que haya realizada sobre un objeto (de la acción a la representación). El segundo se refiere a una *reflexión,* esto es, a la reconstrucción y reorganización de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras mentales. En los procesos de reorganización para la consolidación de estadios mentales superiores el individuo debe recurrir a estadios mentales inferiores, por lo que la adquisición de conocimiento no se da en forma lineal.

Dubinsky (1991) menciona que de acuerdo con Piaget, son cinco las construcciones (abstracción reflexiva) que tienen lugar en la mente de un sujeto para desarrollar conceptos matemáticos abstractos: *encapsulamiento, generalización, reversión, interiorización* y *coordinación*:

- Encapsulamiento: es la transición de un proceso dinámico en uno estático.
- Generalización: cuando el sujeto es capaz de aplicar un esquema existente a dos o más situaciones.

- Reversión: cuando el sujeto es capaz de interiorizar un proceso encapsulándolo para después desencapsularlo; en otras palabras, la reversibilidad se presenta cuando el sujeto es capaz de recorrer en sentido inverso un proceso que ya ha interiorizado.
- Interiorización: proceso mediante el cual un sujeto realiza una construcción mental en respuesta a un fenómeno, que puede ser una acción interna, una percepción o una experiencia resultante de una actividad cognitiva. Cuando un individuo puede controlar una acción conscientemente, entonces la acción es interiorizada y la acción se transforma en proceso.
- Coordinación de dos o más procesos para construir otro nuevo; esto es, se considera el acto cognitivo de tomar dos o más procesos para construir un nuevo proceso, lo cual puede ser realizado por simple concatenación o bien por medio de procesos organizados en lazos.

En la figura 10 se esquematiza el ciclo que muestra la construcción de objetos y procesos (Breindenbach & Dubinsky, 1992, p. 250, traducción libre), en donde se refleja un proceso de abstracción reflexiva.

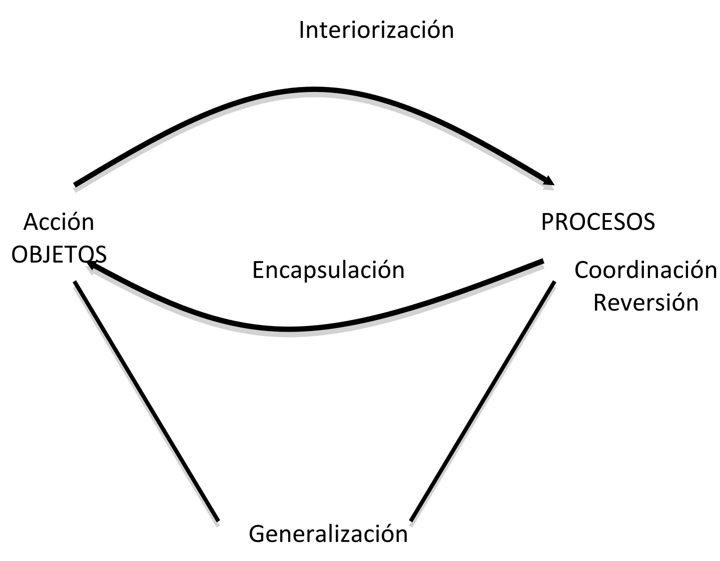


Figura 10. Construcción de Objetos y Procesos.

Haciendo una analogía entre las ideas de Piaget (figura 9) y Dubinsky surge el diagrama de la figura 11, en donde se esquematiza el ciclo APOE para la apropiación de un concepto matemático a partir de la construcción de esquemas mentales.

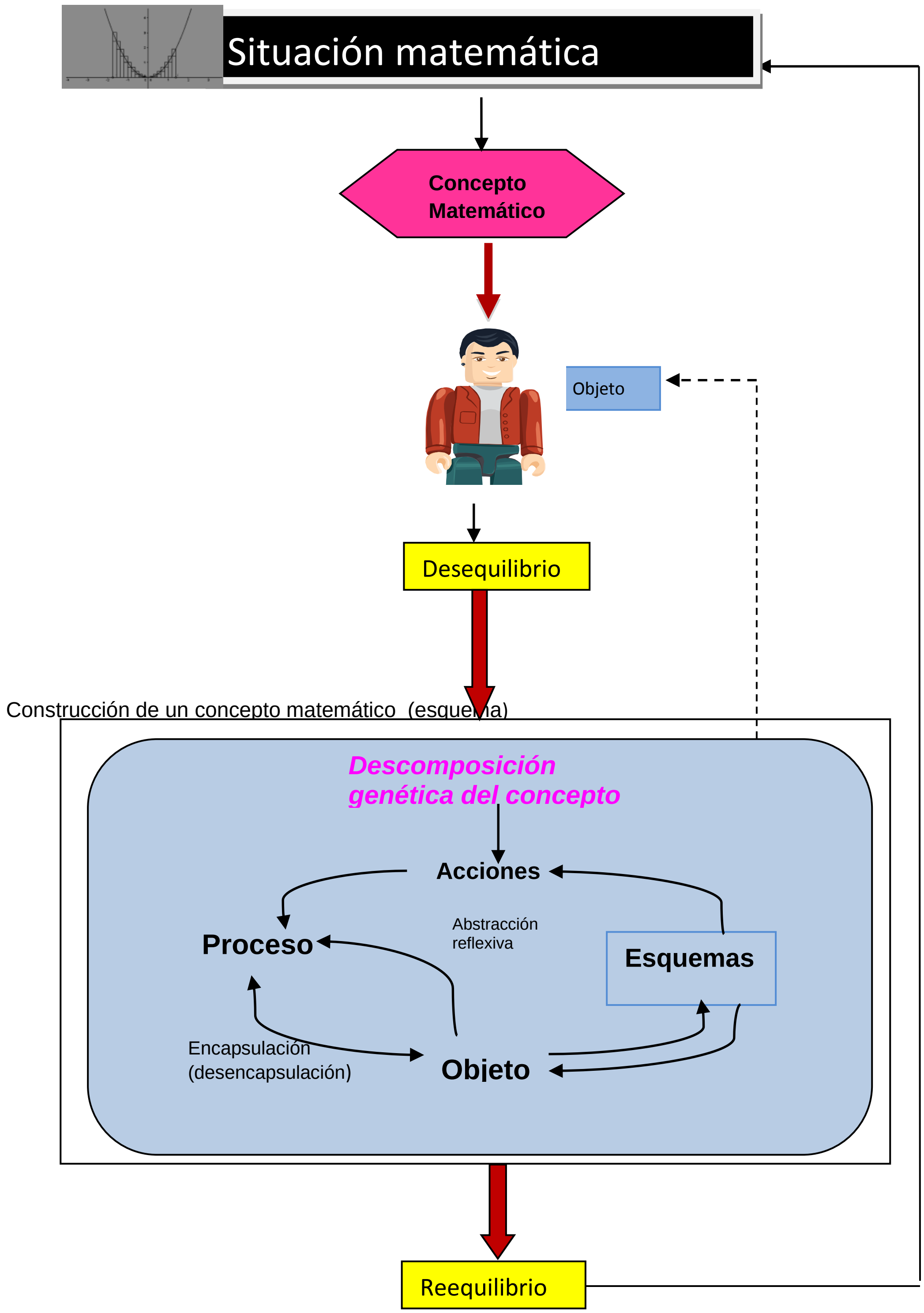


Figura 11. Etapas para la construcción del conocimiento matemático.

Dubinsky coincide con Piag*et* al asegurar que la construcción de conocimientos no sigue procesos lineales. Además para que ésta se dé, primeramente debe existir un agente que active la estructura mental del sujeto (Piaget y García, 2004), que se denominará ***situación problema*** que provoque un desequilibrio en la estructura mental del sujeto. La comprensión del concepto inicia en lo que se denomina *ciclo APOE* (Asiala et al., 2004).

En el diagrama de la figura 11 se observa que en el ciclo APOE aparecen acciones, procesos, objetos y esquemas, éstos se refieren a las *construcciones mentales* que tienen lugar en la mente de un sujeto para la comprensión de un concepto. La palabra *esquema* que aparece en ese ciclo evoca a los esquemas que el sujeto posee, los cuales son necesarios para que tengan lugar tales construcciones. A continuación se describen los elementos que aparecen en el ciclo APOE.

Las *acciones* se refieren a la ejecución de una instrucción emitida desde el exterior del sujeto. La acción se manifiesta cuando éste realiza una actividad sin reflexionar sobre ella, sino que se limita a sólo repetir los pasos que otros siguieron. Por ejemplo, evaluar una función, sustituir números en las variables una fórmula.

Los *procesos* son construcciones internas, lo que los diferencia de las acciones y se refieren al momento en que el sujeto logra interiorizar las acciones. Las actividades y transformaciones sobre un objeto que realiza están en su mente y son tan claras que puede desarrollar todo un procedimiento de transformación del objeto sin necesidad de escribirlo. Es ejemplo de proceso cuando el estudiante es capaz de evaluar una función en diferentes puntos de su dominio, sin que alguien le indique cómo hacerlo.

Si el estudiante es capaz de generalizar un proceso como un todo, e internaliza las acciones y los procesos aplicados sobre un objeto, se dice que ha logrado construir un *objeto*. Ejemplo de objeto es si el alumno logra internalizar y generalizar la relación entre el domino y contradominio de una función (logra la construcción de un concepto). En el mecanismo de encapsulamiento de un objeto matemático, el individuo recurre a esquemas mentales previos, como se puede apreciar en el ciclo APOE, lo que implica realizar acciones y acudir a los procesos que se requirieron para dar lugar a otros esquemas, e incluso a objetos matemáticos y esquemas que ya posee.

En un *esquema* se involucran las construcciones personales de las acciones, los procesos, los objetos y otros esquemas para la comprensión de determinados conceptos matemáticos. Éstos a su vez están interconectados en la estructura mental del individuo (estas conexiones pueden ser inconscientes o conscientes).

A manera de ejemplo, supóngase la construcción de esquemas para la **traslación vertical de la gráfica de una función h(x)** como la que se ilustra en la figura 12.

Figura 12. $h(x) = x^3 - 3x$

Las *acciones* propuestas para tal construcción consisten en que el estudiante utilice la computadora con un software graficador e introduzca las siguientes expresiones para obtener la gráfica correspondiente.

a) [illegible]

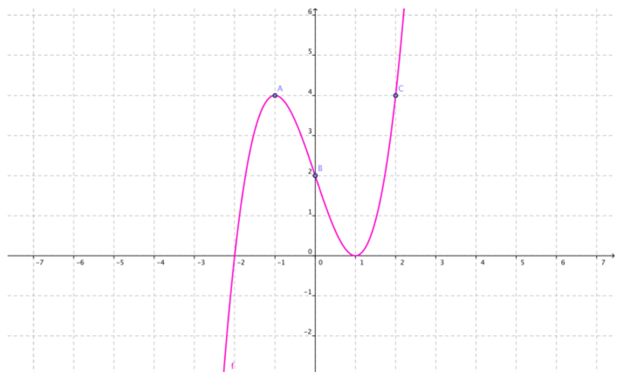
b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

c) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

d) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

Lo que observará en la pantalla de la computadora serán las gráficas que aparecen en la figura 13, que ilustra las traslaciones que sufre la gráfica de la función h(x). Como se puede apreciar, la diferencia entre las expresiones anteriores es el número que se agrega al final del binomio $x^3 - 3x$.

a. $f(x) = x^3 - 3x + 1$



b. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

c. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

d. $f(x) = x^3 - 3x - 2$

Figura 13. Traslaciones verticales de la función h(x)

En el nivel *acción* el estudiante recibe indicaciones de lo que debe hacer. Cuando el estudiante internalice las *acciones*, ya no son necesarias las indicaciones externas para que realice la actividad sino que logra e incluso explica lo que sucederá con la gráfica (antes de que aparezca en la pantalla de la computadora) de h(x) si la expresión es $f(x) = x^3 - 3x + 7$, $f(x) = x^3 - 3x - 5$, entonces se dice que logra un nivel de construcción de *proceso*.

Cuando el sujeto es capaz de generalizaciones, se dice que ha *encapsulado el proceso*. Además de realizar operaciones que desencapsulan tal proceso, en este momento el sujeto construye un *objeto matemático* de la forma $f(x) = h(x) + b$, infiere que si ***b*** es positiva, entonces la gráfica de f(x) se traslada ***b*** unidades por arriba del eje horizontal; si ***b*** es negativa, la gráfica de h(x) se traslada (o baja) ***b*** unidades por debajo del eje horizontal. Además estas generalizaciones le permitirán aplicar el esquema en otras situaciones, por ejemplo en otras funciones.

Entonces, para formar el esquema para un concepto matemático, es necesario organizar en forma estructurada, una colección de acciones, procesos y objetos. Los esquemas mismos, pueden ser tratados como objetos y ser incluidos en la organización de esquemas de un nivel más alto. Esto sucede cuando la comprensión del esquema de un concepto es tal que el individuo logra interiorizarlo como un objeto y, por tanto, tener acción sobre éste y saber en qué momento puede utilizarlo.

La teoría APOE propone una metodología que establece un ciclo que permite investigar el proceso que sigue el individuo en la construcción de un nuevo concepto matemático. Se caracteriza por tres momentos: *el análisis teórico del concepto, diseño e implementación de la instrucción* y *la evaluación*.

De acuerdo a APOE, primero se realiza un análisis teórico del modelo epistemológico del concepto para determinar qué significa aprender un concepto matemático y cómo esa comprensión puede ser construida por el estudiante. Luego este análisis implica el diseño de la instrucción que promueva y facilite la construcción de los conceptos definidos en el análisis teórico, y los resultados que se obtienen de la instrucción son recolectados para su posterior análisis.

El ciclo itera cuantas veces sea necesario para perfeccionar tanto teoría como tratamiento hasta que el alumno logre consolidar un nuevo esquema. Un elemento importante que se ve reflejado en el diseño de la instrucción, es la experiencia y el dominio que posee el diseñador del concepto en cuestión.

2.2 Niveles Intra-, Inter- y Trans- del esquema mental para la Integral. Un acercamiento teórico

En este apartado se muestran los resultados de un detallado análisis de los elementos que conforman la Integral vista como un objeto matemático. Este análisis contempla diversas perspectivas del concepto desde su génesis, hasta cómo es introducido en los programas de estudio de diferentes instituciones de educación superior y en los libros de texto de Cálculo Integral. La intención de este análisis es dimensionar qué significa aprender el concepto de la Integral y cuáles son sus elementos constitutivos.

El objetivo principal de este etapa de la investigación es reunir los elementos teóricos y epistémicos que se consideran relevantes para describir los niveles Intra-, Inter- y Trans- por los que se supone que transita un sujeto para la apropiación del concepto, con la finalidad de formular un esquema mental que coadyuve a la generación de estrategias didácticas que promuevan la apropiación del concepto. Para ello, el análisis se ubica desde cuatro fuentes de información.

Como se muestra en la figura 14, los elementos epistémicos y conceptuales que se considera favorecen la descripción teórica de los niveles de construcción, esto es, su génesis, también se observa la forma en cómo es introducido el concepto en los programas de estudio de las carreras de ingeniería, cómo se propone su abordaje en los libros de Cálculo que más comúnmente son utilizados, así como la opinión del profesor de matemáticas e investigadores en matemática educativa sobre la apropiación de tal concepto.

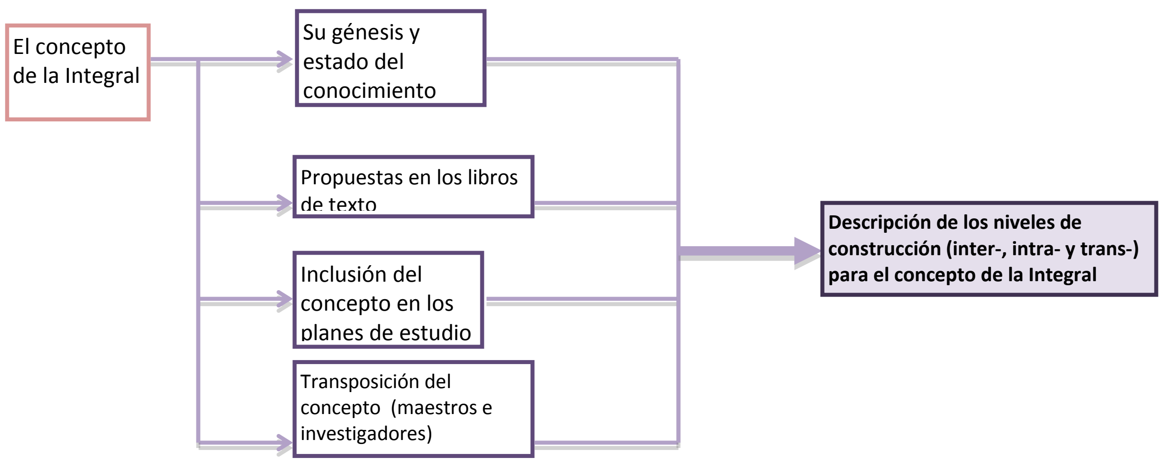


Figura 14. Acciones para formular los niveles de construcción del esquema.

2.2.1 Génesis del concepto de la Integral.

Es importante desarrollar una aproximación histórica y epistemológica de la Integral, ya que esto proporciona un carácter más humano a las matemáticas, así como el análisis de la evolución de algunos objetos matemáticos inmersos en el concepto de la Integral. Para ello se realizó una revisión bibliográfica respecto al desarrollo de dicho concepto, con la finalidad de enfatizar los obstáculos epistémicos del mismo que en el curso de la historia de las matemáticas se han suscitado, así como para dar cuenta del origen, evolución y los problemas que motivaron su desarrollo.

Para abordar la génesis de la Integral no se puede dejar de lado adoptar una postura epistémica que describa el surgimiento del concepto. Al respecto, en la investigación se asume que el conocimiento es una construcción de los seres humanos, refleja básicamente el tipo de experiencias y conflictos que estos seres humanos enfrentan en el curso de su vida. Según la historia, el conflicto que originó el surgimiento de la Integral se refiere al cálculo de áreas y volúmenes limitados por curvas y data desde la Antigüedad Clásica griega, con los trabajos de Arquímedes, quien se centró principalmente en procesos geométricos más que algebraicos (Ruiz, 2003).

Las cantidades infinitesimales que hoy en día soportan al Cálculo Integral fueron tratadas desde los trabajos de matemáticos griegos. Además de Arquímedes, se puede hablar de los trabajos de Aristóteles, Hipasos de Metaponto, Eudoxo de Cnido, Euclides, Zenón de Elea, Antifón de Ateneas, Bryson de Heraclea, Demócrito de Abderas, por citar algunos.

El concepto de la Integral no se origina desde la simple percepción de los sentidos, ni resulta de una mera acumulación de datos, sino que surge a partir de la resolución de situaciones problema que aquejaron a los matemáticos de la antigüedad, e incluso de problemas cotidianos, como el de Kepler (1571-1630), quien con sus técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes, es considerado uno de los pilares del desarrollo del Cálculo Integral.

Cuenta la historia que el interés de Kepler para calcular áreas y volúmenes surge a partir de un incidente que vivió con un comerciante a quien le compraba un barril de vino para celebrar su segunda boda. Kepler no estuvo de acuerdo con la forma en que el comerciante calculó el volumen de la barrica, lo que despertó en Kepler la necesidad de calcular áreas y volúmenes de diferentes cuerpos geométricos. La historia es abundante en la descripción de situaciones que narran la necesidad de contar con elementos matemáticos para resolver situaciones problema importantes en ciertos contextos sociales, científicos o en comunidades matemáticas muy específicas y selectivas tal es el caso de los matemáticos griegos (Ruiz, 2003).

Uno de los elementos constitutivos del concepto que hoy en día es tratado en los programas de estudio de las carreras de Ingeniería, se refiere a la suma de una infinidad de cantidades infinitesimales (o infinitamente pequeñas). Hacia el 430 a. C. se encuentran vestigios de la aparición de las cantidades infinitesimales, en la época de la escuela pitagórica, la Academia platónica y el Museo de Alejandría con la aparición de las cantidades inconmensurables. El problema de la continuidad de los entes geométricos, la divisibilidad de segmentos o la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles conducen a concepciones de índole infinitesimal (González, 2008; Sánchez y Valdés, 2004; Luna, 1987 y Hawking, 2011).

El surgimiento de las cantidades inconmensurables "abrió un abismo entre lo discreto y lo continuo, lo finito y lo infinito, eliminó de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y privilegió la geometría sobre la aritmética y el álgebra, trajo consigo un refinamiento geométrico", (González, 2008, p. 75-76). Las cantidades inconmensurables fueron el parteaguas entre el paradigma de una matemática geométrico-empírica inductiva en la que todo el conocimiento se sustentaba en los resultados que se obtenía experimentalmente hacia una matemática deductiva, una matemática en la que la demostración es la parte esencial de sus fundamentos y lo que hasta la actualidad le ha dado su consistencia.

Encontrar con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado es uno de los problemas geométricos más famosos de la antigüedad (conocido como la cuadratura del círculo). Los griegos, apasionados con la geometría, lo propusieron y permaneció sin solución por más de 2000 años hasta que fue probado imposible. Hipócrates de Quíos (430 a.C.) consiguió la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de las matemáticas, intentó resolver el problema de la cuadratura del círculo a partir de la cuadratura de las *lúnulas*, figuras planas limitadas por arcos de círculos de radios diferentes. No hay evidencia en la literatura matemática que indique que Hipócrates resolvió el problema de la cuadratura del círculo, lo que sí es evidente es que intuitivamente propone la idea de aproximar progresivamente el círculo, a partir de diferentes polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo. De aquí, Arquímedes retoma algunas ideas que aplicará en sus famosas cuadraturas (González, 2008).

El conocimiento resulta de una construcción del humano, pero se separa de sus creadores, convirtiéndose a continuación en parte de la interacción y del mundo social;

pasa a tener repercusión sobre la vida de sus propios creadores. Esto se hace notorio, por ejemplo, cuando las aportaciones de Zenón provocaron una verdadera crisis en las matemáticas de su época, pues trajeron consigo el *horror al infinito* (González, 2008), ya Zenón introdujo claramente ese concepto y la divisibilidad en cantidades infinitamente pequeñas, lo que provocó la aparición de nuevos problemas matemáticos y desde luego el problema de la cuadratura del círculo, que seguiría latente. Al respecto y con las nuevas aportaciones de Zenón, hacia el año 430 a.C. Antifón de Atenas, intenta aproximar el área del círculo a partir de polígonos regulares inscritos en él, esto incide posteriormente en las cantidades infinitesimales que trabajó Arquímedes (González, 2008).

En este proceso subyacen aproximaciones infinitesimales, ya que a medida que se inscribe un polígono con un número mayor de lados, mayor será su aproximación al perímetro del circulo y por tanto, a su área. En la actualidad, estas ideas son las que prevalecen en el aula para calcular áreas limitadas por curvas, como se muestra en la figura 15.

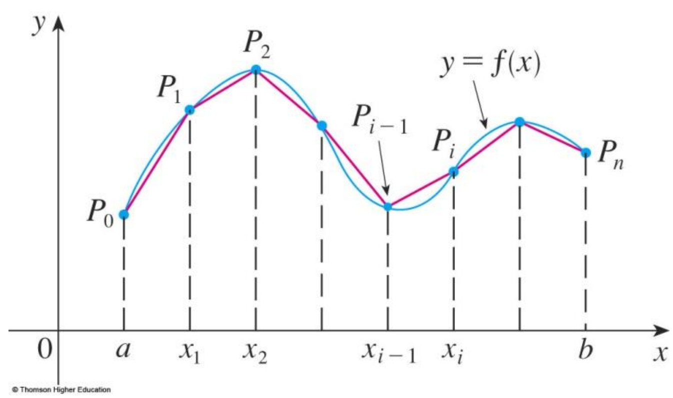


Figura 15. Área limitada por una curva.[5]

Análogamente a los trabajos de Arquímedes sobre cuadraturas y cubaturas, hace más de tres siglos Barrow, Leibniz y Newton desarrollaron métodos algorítmicos y geométricos para abordar tales problemas (a partir del teorema fundamental del Cálculo), y desde hace más de un siglo se han formalizado y utilizado de una manera relativamente sencilla a

[5] Figuras tomadas de los materiales: *Multimedia Manager Instructor's Resource CD-ROM for Calculus: Early Transcendentals, Sixth Edition, By James Stewart, © 2008 by Thomson Brooks/Cole*

través del Cálculo Infinitesimal, lo que hoy en día se conoce como el Cálculo de las Integrales, y cuyos procesos se desarrollan mediante el concepto de límite, el cual no fue abordado por Arquímedes, sino que fue desarrollado por su método de exhausión.

En el siglo XVII, Barrow, Newton, Leibniz, Fermat y los hermanos Bernoulli hacen una de las aportaciones más importantes en su época y que hoy en día prevalece en las aulas. Ésta fue relacionar el Cálculo Integral con el Cálculo Diferencial. La relación entre la Derivada y la Integral se aborda en el *Teorema Fundamental del Cálculo*[6], sobre el origen de su surgimiento, se cree que fue construido —cuenta la historia— de modo independiente por Newton en Inglaterra y por Leibniz en Alemania, a ellos dos se les considera, junto con Barrow (quien fuera maestro de Newton), los inventores del Cálculo Infinitesimal que hasta la fecha se estudia en los programas de Ingeniería.

El Teorema Fundamental del Cálculo se enuncia en dos apartados (Zill, 1987): en el primero, se relaciona a la Derivada con la Integral al proponer el cálculo de funciones primitivas (o *Integral Indefinida*). Esto se logra a partir de la interpretación geométrica de la Integral (registro de representación geométrico), dado que se plantea la relación que existe entre una función g(x) y el valor del área que se acumula a partir del desplazamiento del punto ***x***. En la figura 16 se esquematiza esta relación.

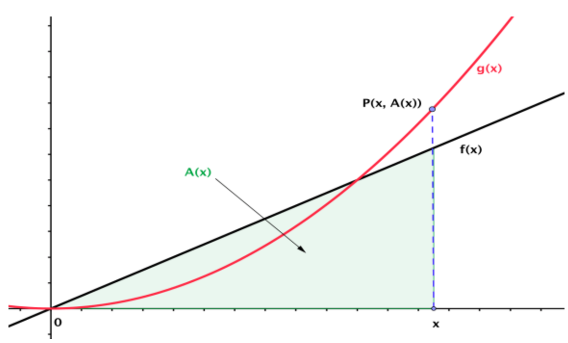


Figura 16. Relación entre áreas acumuladas y las ordenadas de g(x).

[6] Es necesario citar al Teorema Fundamental del Cálculo para adentrar al lector en la representación del concepto de la Integral desde sus distintos marcos (geométrico, contextual, algebraico, numérico).

El teorema Fundamental del Cálculo comúnmente es enunciado de la siguiente forma en los libros de matemáticas (Zill, 1987, p. 284):

1) Sea f continua en [a, b], y sea x cualquier número en el intervalo. Si g(x) es la función definida por

$$\mathbf{g(x) = \int_a^x f(t)d}$$

entonces

$$g'(x) = f(x)$$

La segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo se refiere a la regla de Barrow y hace alusión a la integral desde su marco o representación numérica (se considera una representación numérica del concepto de la Integral), que se refiere a lo siguiente (Zill, 1987, p. 284):

2) Sea f continua en [a, b], y F cualquier función para la cual F´(x) = f(x). Entonces

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

lo cual representa el área limitada por la curva f(x) y el eje 0x, en el intervalo [a, b], como se muestra en la figura 17.

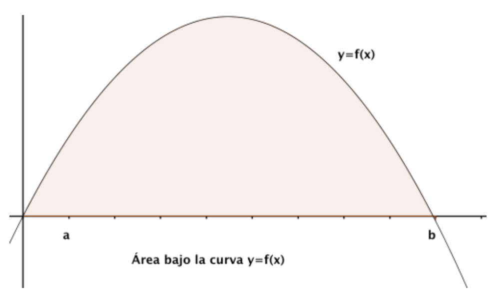


Figura 17. Área limitada por la curva f(x), el eje 0x, en el intervalo [a, b].

Además de Newton y Leibniz, Barrow establece desde registros de representación visual la relación geométrica entre tangentes y áreas (Bell, 1999).

Concretamente la relación que guardan la función Integral y la función Derivada es que la primera es la operación inversa de la segunda y viceversa. Un camino para interpretar geométricamente esta relación además de como se muestra en la figura 13, es a partir del análisis de la acumulación de áreas[7], esto es:

Sea

$$\mathbf{g(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)d}$$

en el que f es una función continua en [a, b] y x varía en dicho intervalo.

Lo que se pretende es mostrar que g´(x) = f(x), para ello se define una función A tal que A= g, las cuales sólo depende del valor de x . Entonces el área de la región limitada por la función f(t), en el intervalo [a, x] dependerá del valor que tome x, por lo que se considera una función variable área A(x), como se muestra en la figura 18.

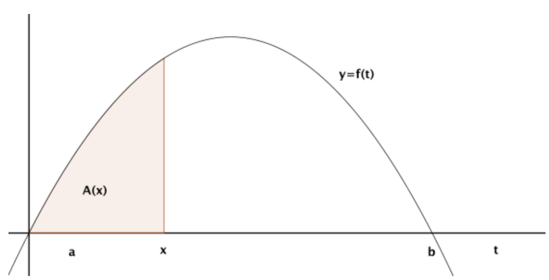


Figura 18. Función área = A(x).

Entonces como A(x) representa el área bajo la curva en distintos momentos, de acuerdo al valor que tome x, entonces se tiene que la figura 19 muestra el área un valor x+h (Cordero et al., 2003; Stewart, 2008).

[7] Ideas tomadas del libro de Cordero et al. (2003, pp. 23- 29) y Stewart (2008, pp. 380 – 382)

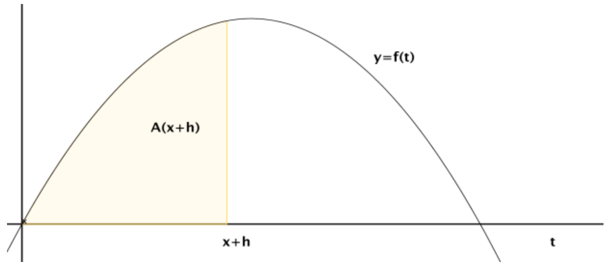


Figura 19. Área limitada por f(t) en el intervalo [x+h].

Así A(x+h)-A(x) es el área del rectángulo que se forma cuando se restan estas áreas, como se ilustra en la figura 20.

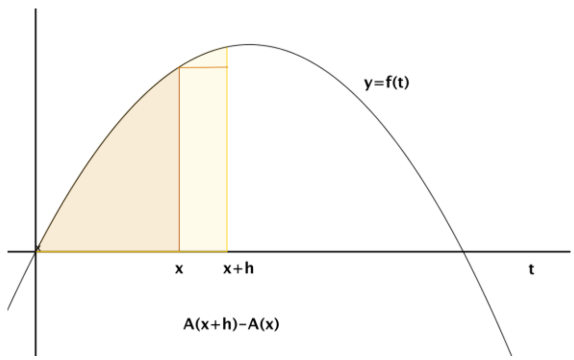


Figura 20. Aproximación al área del rectángulo de base h y altura f(x).

Explícitamente (Cordero et al., 2003; Stewart, 2008) se observa en la figura 21 el rectángulo que se forma con la resta A(x+h)-A(x) .

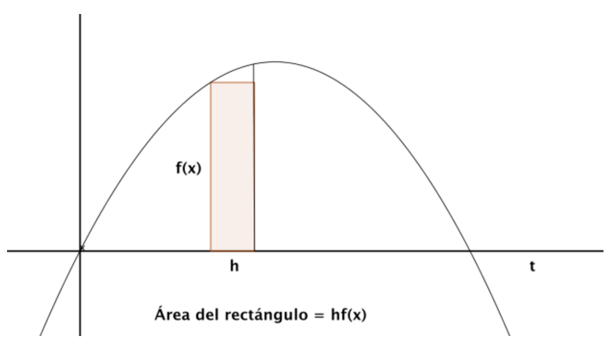


Figura 21. Rectángulo que se forma al restar A(x+h)-A(x).

Entonces

$$A(x+h)-A(x)\approx hf(x)$$

y

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}\approx f(x)$$

como

$$A(x) = g(x)$$

se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=f(x)$$

como

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=g'(x)$$

$$\therefore g'(x)=f(x)$$

El desarrollo histórico descrito deja ver las diferentes etapas por las que transita el concepto de la Integral, desde la época de los griegos con la cuadratura del círculo, en donde surgen las cantidades infinitesimales pero aún sin relación con otras figuras geométricas, transitando hacia una generalización, en donde los procesos infinitesimales son utilizados de manera análoga en curvas no sólo cerradas, sino ubicadas en el plano cartesiano; luego se sigue hasta la concretización de estas estructuras, esto en el siglo XVII, donde se destacan los trabajos de algunos matemáticos como Barrow, Newton, Leibnitz, teniendo lugar así el Teorema Fundamental del Cálculo (Bell, 1999). Estos aspectos fueron considerados como referentes para focalizar una evolución del concepto de la Integral y posteriormente se reflejarán en las acciones que se proponen para acercar al sujeto al concepto.

2.2.2 La Integral en los planes de estudio y libros de textos universitarios.

Recapitulando, la pretensión en este apartado es analizar diversas fuentes para entender los elementos conceptuales y teóricos que constituyen el concepto de la Integral. Entonces, se realizó la revisión de los planes de estudio así como los libros propuestos en éstos, con la finalidad de crear un contexto que describa cómo la Integral es tratada en las carreras de Ingeniería además de rescatar los conceptos previos a la Integral, ya que esto será necesario para establecer los niveles de construcción del esquema.

2.2.2.1 Revisión de planes de estudio y algunos libros para las carreras de ingeniería.

Se analizaron los planes de estudio de las carreras de ingeniería que oferta la UNAM (2004) y el CUCEI (2010) además del sistema de educación tecnológica del IPN (2010) y el SNEST (2008a). Se encontró similitud en el abordaje de la Integral ya que consideran que los conocimientos previos que el estudiante debe poseer para el tema del Cálculo Integral son conceptos tales como funciones (graficación y su análisis), límites, continuidad, sucesiones y series, la Derivada desde representaciones numéricas, como la razón de cambio, y geométricas, como la pendiente de la recta tangente, así como su forma simbólica.

En general el abordaje de la Integral se plantea desde:

* La integración como proceso inverso de la derivación (la Integral de Newton y Leibniz).

* La Integral como el límite de sumas infinitas de cantidades finitas (la Integral de Cauchy y Riemman).

Por ejemplo, en los programas de estudio del Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica (SNEST, 2008a, p. 3) se establece como requerimientos previos al abordaje del concepto de la Integral los siguientes conocimientos:

- *Usar eficientemente la calculadora, respetando la jerarquía de operadores.*

- *Evaluar funciones trascendentes.*
- *Despejar el argumento de una función.*
- *Dominar el álgebra de funciones racionales así como de expresiones con potencias y radicales.*
- *Identificar, graficar y derivar funciones trigonométricas y sus inversas.*
- *Manejar identidades trigonométricas.*
- *Identificar, graficar y derivar funciones exponenciales y logarítmicas.*
- *Bosquejar la gráfica de una función a partir de su expresión analítica y asociar una expresión analítica a una gráfica dada para las funciones más usadas.*
- *Calcular límites de funciones.*
- *Calcular derivadas y diferenciales de funciones algebraicas y trascendentes.*
- *Transcribir un problema al lenguaje matemático.*
- *Determinar las intersecciones entre gráficas de funciones.*

Se observa que las diferencias más notorias entre los planes de estudio considerados se perciben en las propuestas o sugerencias didácticas. Por ejemplo, en el SNEST (2008a) se propone, como primer acercamiento de la Integral, una actividad que consiste en realizar dos prácticas: la primera se refiere a un acercamiento a la noción de cálculo de áreas limitadas por curvas; la segunda contempla cinco ejercicios encaminados a introducir al estudiante en la noción de área bajo la curva y sumatorias infinitas.

Los libros considerados (Boyce y Diprima, 1994; Edwards y Penny, 2008; Larson, Hostetler, y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Purcell, Varberg y Rigdon, 2001; Stein, 1995 Stewart, 2008; Swokowski, 1989; Thomas y Finney 1998; Zill, 1987) se eligieron debido a que son los más utilizados en los planes de estudio que son foco de atención para la investigación (CUCEI, 2010; IPN, 2010; SNEST, 2008a; UNAM, 2004). El análisis consistió en focalizar los tópicos que aparecen en la Tabla 2.

Tabla 2

Aspectos que se consideran como categorías de análisis para el abordaje de la Integral

Libro	**1-¿El autor aborda el concepto de la Derivada antes que la Integral?** **2-¿En qué momento se introduce el Teorema Fundamental del Cálculo?** **3-¿El autor propone primero el concepto de la Integral Definida?**	**Descripción de cómo relaciona la Derivada y la integral. ¿Enfatiza en recuperar la función primitiva a partir de situaciones problema?** **(1) Algebraico** **(2) Geométrico** **(3) Analítico** **(4) Numérico**	**Tipos de problemas que ejemplifica y propone:** **(1) Algebraico** **(2) Geométrico** **(3) Analítico** **(4) Numérico**	**¿Cuáles conocimientos previos son requeridos en relación a la forma en como aborda el tema?**

En donde la categorización de los problemas es como sigue:

(1) Algebraicos (algorítmicos): Éstos se refieren a problemas que requieren, para su solución, de procesos algorítmicos como el uso de tablas o fórmulas.

(2) Gráficos (Geométricos): Se refiere al uso de análisis geométricos para la solución de un problema; por ejemplo: recurrir a la interpretación geométrica de la Derivada para recuperar primitivas, o a la acumulación de áreas para recuperar la primitiva también.

(3) Analíticos (establecimiento de modelos matemáticos): Se refiere al planteamiento de un modelo matemático a partir de los datos que proporcione una situación problema. Las aplicaciones de la Integral quedarán ubicadas en esta clasificación.

(4) Numéricos (a partir de sumatorias finitas o infinitas).

Los resultados obtenidos en el análisis de los ocho libros considerados demostraron que todos abordan el concepto de la Derivada antes que la Integral, por lo que se considera que la Derivada, en algunas situaciones, por ejemplo en problemas que traten condiciones iniciales, pasa a ser un conocimiento previo de la Integral.

Otro hallazgo de relevancia para la investigación es que el Teorema Fundamental del Cálculo es introducido después de estudiar la Integral Definida. La manera en cómo enlazan la Derivada y la Integral no refleja un énfasis en la relación que existe entre la interpretación gráfica de éstas (áreas-tangentes). En cinco libros la relación se muestra desde una perspectiva algebraica y analítica; en los tres restantes abordan ejemplos y problemas en los que se rescata la relación entre la Derivada y la Integral y los planteamientos van en torno a la representación geométrica y problemas de análisis, en los que se requieren aspectos de planteamiento de problemas.

En general se infiere que los conocimientos que deben poseer los estudiantes cuando abordan el concepto de la Integral van direccionados hacia:

- El concepto de diferencial
- Movimiento rectilíneo
- Interpretación física y geométrica de la derivada
- Evaluación de funciones en un punto
- Interpretación geométrica de funciones
- Interpretación de las tablas de funciones
- Funciones crecientes y decrecientes
- Fórmulas y procesos de derivación
- Límites y límites al infinito
- Noción sigma y sumatorias infinitas análisis de gráficas: evaluación en un punto, concepto de función

La relación geométrica entre áreas y tangentes, que es esencialmente el resultado central que muestra el Teorema Fundamental del Cálculo no se aborda explícitamente en los programas de estudio considerados en la investigación (UNAM, 2010; CUCEI, 2010; IPN, 2004; SNEST, 2008a), así como en los libros sugeridos en estos últimos (Larson et al., 2009; Penney et al., 2008; Purcell et al., 2000; Steward, 2008; Swokowski, 1989; Zill, 1985). Los registros de representación geométrica que implican la relación tangente-área, establecen dicha relación a partir de registros de representación algebraicos, ya que se aborda la conexión Integral-Derivada a partir de algoritmos y un listado de fórmulas que promueven que el estudiante obtenga la *antiderivada* (funciones primitivas) de una función. Al respecto Mesa (2001) comenta:

> *La motivación usual y pragmática con la que se inicia el estudio del Teorema Fundamental es que éste hace uso de la estrecha relación que existe entre Integrales indefinidas e Integrales definidas, para calcular con facilidad los*

valores exactos de muchas Integrales definidas sin usar la suma de Riemann. Además establece la relación inversa entre las operaciones de derivación e integración y en ocasiones, la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, sin mencionarla explícitamente como una relación en forma gráfica, está ausente en los libros de texto y, en términos generales, en el curriculum. (p. 165)

En la búsqueda del abordaje de los registros de representación geométrica para la Integral, se revisaron otros textos que no se recomiendan en los planes de estudio revisados y sólo en algunos (Cordero, Muñoz y Solís, 2003; Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2001; Wenzelburger, 1994) se encontró que enfatizan la importancia del registro de representación geométrico.

La coincidencia entre el contenido de los libros se encamina en dos direcciones: la primera es que las actividades que proponen están diseñadas para que el lector construya conceptos, y la segunda en el énfasis que hacen de la importancia de los registros geométricos para abordar el concepto de la Integral, lo cual se evidencia a partir de los problemas que proponen (además situados en un contexto específico) y que debe realizar el lector en este registro de representación. El registro numérico (y aritmético) está presente en todo el proceso de solución de problemas, pero como consecuencia de las reflexiones y razonamientos dentro del registro de representación geométrico de cada problema.

El libro de Cordero et al. (2003) y el de Wenzelburger (1994) se introduce el concepto a partir de la suma de cantidades acumuladas. Proponen ejercicios al lector en los que progresivamente va construyendo, a partir de la representación geométrica de la suma de acumulación de áreas, el concepto de la función primitiva y la relación inversa entre la Derivada y la Integral. Posteriormente abordan el concepto desde su representación numérica, apoyada del registro de representación geométrico. Finalmente, proponen problemas que promueven que el lector construya registros de representación algebraicos. Es necesario recordar lo que en párrafos anteriores se comentó: los problemas que proponen los autores citados pertenecen a un contexto que además atañe a los

Ingenieros, lo cual resulta importante cuando se entiende la importancia que tiene para un ingeniero ser capaz de matematizar problemas situados.

Salinas et al. (2001), también proponen actividades desde una perspectiva constructivista, pero a diferencia de Cordero et al. (2003) y Wenzelburger (1994) introducen, al lector en el estudio de cantidades que varían respecto del tiempo sin hacer distinción entre el Cálculo Diferencial e Integral, sino que a medida que evoluciona una situación matemática problema va tomando los elementos del cálculo que se requiere: bien puede ser una razón de cambio, o la suma de varias razones de cambio hasta llegar a la noción de suma de cantidades infinitesimales.

Los conceptos inmediatos (posteriores al estudio de la Integral y en los que se requiere que el sujeto comprenda el concepto de la Integral desde registros de representación geométricos), pertenecen a la cinemática, termodinámica, trabajo, entre otros, que se estudian en los cursos de Física y que también pertenecen a la formación básica del estudiante de ingeniería. Por tal motivo se revisaron libros de Física (Young y Freedman, 2009; Giambattista, McCarthy y Richasrdson, 2009; Giancoli, 2008; Tippens, 1986).

La manera en que estos conceptos se sustentan matemáticamente para su comprensión requiere que el estudiante posea el esquema de acumulación de áreas, así como la relación entre tangentes y áreas. De tal revisión se infiere que el estudiante inscrito en algún curso de Física, debe ser capaz de operar el concepto de la Integral desde la acumulación de áreas, y ser capaz de interpretar el espacio recorrido por una partícula que se encuentra en movimiento rectilíneo, el trabajo que realiza una fuerza variable, por citar algunos ejemplos.

Por otro lado, en la Física existen aplicaciones en las que, a partir de la gráfica que representa la velocidad con la que se mueve una partícula, se debe obtener otra gráfica con la cual sea posible describir el movimiento de dicha partícula y con ello estimar la posición de la misma en algún instante de su trayectoria. Para ello, el sujeto debe poseer habilidades básicas sobre la interpretación geométrica de la Derivada y ser capaz de describir la gráfica de una función a partir del comportamiento de sus rectas tangentes.

Como producto del análisis de este apartado se observa que hay sintonía entre los planteamientos de los programas y libros comúnmente propuestos en los planes de estudio y la evolución epistémica del concepto. Sin embargo, el tipo de acciones que se proponen para el abordaje de éste no corresponde a tal evolución, ya que, de acuerdo al desarrollo histórico, el problema de la Integral surge en el marco de las representaciones geométricas, transitando por las representaciones numéricas hacia los algoritmos. En los planteamientos curriculares oficiales, en el tránsito hacia la Integral se priorizan los conocimientos que el sujeto pueda tener de la Derivada.

Por otro lado, se realizó una revisión de diversas investigaciones cuyo objeto de estudio es la construcción del concepto de la Integral Definida, y cuyo marco teórico se ubica en la teoría psicogenética de Piaget, específicamente en el marco neopiagetiano APOE. La intención de tal análisis es recuperar elementos que otros investigadores han establecido o encontrado en sus trabajos, que den luz a los niveles de construcción por los que transita el concepto de la Integral en la mente de los estudiantes. A continuación se exponen algunas descomposiciones genéticas sobre el concepto de la Integral Definida.

2.2.3 Propuestas de descomposiciones genéticas de la Integral.

Las propuestas de descomposición genética que se consideraron son: Czarnocha, Loch, Prabhu & Vidakovic (2001), Hamdam (2009, p. 224) y Boigues (2010). Las similitudes entre estos trabajos radican en que sus propuestas van encaminadas a la apropiación del concepto de Integral Definida, y se destacan elementos interesantes sobre la evolución del concepto. Czarnocha et al. (2001) y Boigues (2010) coinciden en que para que un sujeto construya el esquema mental de la Integral Definida, primero debe construir dos esquemas: el esquema de particiones y el esquema de la suma de Riemann, para ello, plantean una serie de acciones que deberá realizar el sujeto, en las que involucran objetos matemáticos que van desde representaciones geométricas hacia numéricas. El sujeto realiza particiones (representaciones geométricas), estima áreas y las suma, dando como resultado una aproximación del área bajo la curva.

En estas dos propuestas se espera que el sujeto desarrolle la noción de límite, necesaria para calcular el límite de la sucesión que generará al particionar un intervalo.

Son interesantes estos trabajos, sin embargo, se alejan del objeto de estudio de la presente investigación ya que los autores priorizan los acercamientos a la Integral Definida, los registros de representación numéricos, más que los geométricos.

Hamdam (2009) enfatiza los esquemas previos que deberá poseer el sujeto antes de abordar la suma de Riemann. En su propuesta focaliza a los esquemas desde registros numéricos hasta geométricos, pasando por los algorítmicos. Por ejemplo: operaciones con números reales, funciones de una variable, distancia entre puntos, plano cartesiano, límites, por mencionar algunos. Aunque en sus planteamientos Hamdam inicia con el esquema de funciones de una variable, en su descomposición genética priorizan registros de representación numérica, lo cual no considera la presente investigación. Lo rescatable de estos trabajos es cómo ellos proponen que el sujeto analice, represente y sume cantidades cada vez más pequeñas, idea útil para interpretar áreas limitadas por curvas y el abordaje a la noción de los infinitesimales.

2.2.4 La Integral desde el profesor y alumnos.

Hasta el momento se han recuperado elementos valiosos que subyacen al concepto de la Integral; sin embargo, para los fines de la investigación en necesario conocer la transposición del concepto al escenario escolar, para ello se realizó un estudio exploratorio, mediante una entrevista semiestructurada, en donde participaron profesores de Cálculo así como estudiantes quienes acreditaron el tema de la Integral con la finalidad de conocer los significados personales del concepto tanto del maestro como del estudiante. Se focalizaron tópicos referentes a:

a) qué significa aprender el concepto desde representaciones geométricas,
b) para qué le será útil al estudiante de ingeniería en su formación y vida profesional,
c) las dificultades conceptuales que comúnmente se presentan cuando éste se estudia, y
d) qué conocimientos previos son requeridos para no obstaculizar la apropiación del concepto.

Se entrevistaron tres maestros del área de Matemáticas (M_1, M_2, M_3) y uno del área de Electrónica (M_4), dos alumnos del área de Electrónica quienes estudiaron Cálculo Integral

(ACI$_1$, ACI$_2$), y dos que repiten el curso (ACI$_3$, ACI$_4$), los resultados de tales entrevistas se resumen a continuación.

**** Significados personales del concepto de la Integral:***

Al respecto se encontró que los estudiantes quienes previamente estudiaron Cálculo Integral, a un año de haber acreditado el curso, comprenden la Integral desde registros de representación geométricos como la suma de Riemann, y algebraicos como la antiderivada. Se observó que los estudiantes en su momento no fueron “instruidos” en la recuperación de una función primitiva dada la gráfica de su Derivada ni sobre acumulación de áreas, ellos creen que esto es posible únicamente a partir de conocer una expresión la cual deberá ser integrada con algún algoritmo algebraico o con alguna fórmula. Esta situación se observó también en algunos maestros de Cálculo Integral, quienes argumentaron que lo más importante es proveer al estudiante de una serie de herramientas algebraicas y algorítmicas que le permitan calcular la Integral de cualquier función que sea integrable.

Por otro lado, los docentes comentaron que la Integral es tratada desde registros algebraicos y geométricos (se refieren a la suma de Riemann) debido a dos razones: por un lado, los planes de estudio así lo indican; por otro, porque consideran que el grueso de la población estudiantil, en un grupo de 50 estudiantes, están formados en el estudio de la matemáticas desde registros de representación algebraicos y que es difícil romper con esto. Sin embargo, algo que se infiere de estas entrevistas es que es difícil tanto para el docente como para el estudiante romper con la tradición tan arraigada que existe en el abordaje de las matemáticas como una disciplina algorítmica, sin embargo “los algoritmos son necesarios”, comentó el maestro M$_2$, “pero no suficientes en la formación de un sujeto que estudia alguna ingeniería, se deben abordar los conceptos desde diferentes perspectivas”.

Los estudiantes conceptualizan a la Integral como la antiderivada y como un mecanismo para calcular áreas, evidencian registros algebraicos para encontrar la Integral de una función y muestran dificultad en interpretar el concepto desde registros geométricos para el cálculo de áreas limitadas por curvas (específicamente los estudiantes ACI$_3$, ACI$_4$).

**** Importancia de las representaciones geométricas en la formación del futuro ingeniero:***

De acuerdo a la información recopilada, la opinión de los maestros se encaminó a resaltar la importancia que tiene que el estudiante de ingeniería sea capaz de transitar por diversos registros en los que se manifiesta un concepto matemático. Específicamente los maestros M_2 y M_4 comentaron que, en ingeniería, es necesario muestrear datos que representan una función que carece de un modelo matemático (una expresión o fórmula), pero que pueden ser representados geométricamente ya que involucran dos o tres variables. Entonces, se espera del estudiante que sea capaz de analizar esto y bosquejar la función que representa la Integral de una función, tal es el caso para los estudiantes que trabajan en los laboratorios de electrónica e instrumentación.

El maestro M_4 agregó que en matemáticas los estudiantes aprenden a graficar y analizar funciones a partir de modelos ya establecidos, modelos que son propuestos por la mayoría de los libros de Cálculo Diferencial e Integral, y que éstos en la mayoría de los casos, están alejados de la realidad en los cursos propios del área de electrónica, ya que cuando los estudiantes recolectan datos de situaciones reales, obtienen gráficas que no se apegan a tales modelos. El estudiante se enfrenta, entonces, a problemas conceptuales que debieron ser resueltos en los cursos de Cálculo.

Por otro lado, el maestro M_1 comentó que para él es importante que los estudiantes dominen procedimientos algebraicos para encontrar la Integral de cualquier función. Agregó que el problema con las representaciones geométricas es que el estudiante, cuando llega al curso de Cálculo, no posee los elementos suficientes que le permitan realizar un análisis gráfico sobre el comportamiento de una función. El estudiante está más entrenado en la parte algorítmica que en la geométrica.

Los cuatro alumnos entrevistados comentaron que les resulta difícil graficar funciones a partir de una expresión matemática (registros algebraico), que es más simple graficar una función a partir de datos organizados en una tabla (sus trazos son burdos). No conciben bosquejar una función a partir de analizar el comportamiento de otra gráfica.

**** Dificultades referentes a conocimientos previos:***

Los maestros del área de matemáticas entrevistados comentaron que un problema que perciben cuando se abordan los conceptos desde representaciones geométricas es que los estudiantes poseen estructuras mentales débiles en el estudio de funciones y, por tanto, carecen de habilidades para operar y graficarlas (esto se observó también con los estudiantes entrevistados). El maestro M_1 comentó que el transitar de un registro de representación geométrico a otro (también geométrico) requiere cierta formación y entrenamiento, lo cual no se logra en una carrera de ingeniería, dado que “las cualidades académicas que posee la mayoría de los estudiante no son las adecuadas para iniciarlos en el análisis minucioso de gráficas” (maestro M_1).

Por otro lado, el maestro M_2 comentó que el primer problema con el que se enfrentaría el abordaje de los conceptos desde su representación geométrica no es precisamente conceptual sino actitudinal, pues es difícil “romper con la inercia tanto de profesores como alumnos de entender las matemáticas desde los algoritmos, desvinculados de la realidad, lo cual implica menos trabajo mental para el docente y alumno. El enfoque geométrico demanda un cambio no precisamente complicado sino novedoso”.

2.2.5 Un acercamiento teórico a la descripción de los niveles de construcción para la apropiación del concepto de la Integral desde registros de representación geométricos.

Retomando las ideas de Piaget y García (2004) sobre los diferentes estadios por los que transita el conocimiento, la construcción de un esquema mental para la apropiación del concepto desde registros de representación geométricos podría transitar por diferentes niveles, denominados: Intra-, Inter- y Trans-. Tratándose de la Integral y de acuerdo con lo que hasta el momento se ha obtenido de información desde diferentes fuentes (desarrollo conceptual de la Integral, artículos de investigación, libros de Cálculo, revisión de programas de estudio, opinión de maestros y estudiantes que ya cursaron Cálculo Integral), se infiere que una posible descripción de estos niveles se bifurca, por un lado, en observar construcciones a partir de la manipulación de la acumulación de áreas, y por otro, en entender cómo recuperar la función Integral (primitiva) a partir de una función dada.

Antes de hablar de niveles de construcción, es necesario recapitular y analizar algunas ideas que se han vertido en diferentes momentos de la investigación, y retomar los hallazgos referentes a la construcción del concepto (a partir de registros geométricos) desde las diferentes perspectivas que fueron consideradas. Al respecto, se observó de una manera sucinta, en algunos libros de Cálculo Integral y algunos programas de estudio (de hecho se observó una relación muy estrecha entre el diseño de los programas de estudio y los libros de Cálculo Integral), la construcción del concepto de la Integral a partir de un análisis geométrico.

Lo rescatable de los programas de estudio, y en general de los libros de texto recomendados por los primeros, fue el hecho de que abordan el Teorema Fundamental de Cálculo, en donde se define la suma de Riemann y a la Integral como una antiderivada, lo que en la investigación se considera información básica, ya que resolver problemas de áreas a partir de la suma de Riemann promueve en el estudiante un primer acercamiento a un análisis geométrico que podría resultar benéfico para la acumulación de áreas.

Por otro lado, se retoman las aportaciones respecto a los significados del concepto de la Integral de los estudiantes, quienes la habían estudiado un año antes de ser entrevistados, de los maestros e investigadores del área de las matemáticas, las cuales evocan nuevamente a la suma de Riemann, por lo que se consideró necesario (pero no suficiente) que un primer nivel de construcción del concepto sea a partir del cálculo de áreas, como lo plantea Riemann.

Del desarrollo histórico del concepto de la Integral se destacan las diferentes etapas de la evolución del concepto, desde el surgimiento de estructuras aisladas, transitando por la generalización, hasta la consolidación del Teorema Fundamental del Cálculo. En los planes de estudio analizados se detectan algunas propuestas que van en sintonía con tal evolución del concepto. Sin embargo, las acciones que se proponen para el abordaje de la Integral no obedecen a tal evolución. Lo rescatable de este análisis fue entender, desde la postura de los responsables de la elaboración de los planes y programas de estudio, cuáles son los conocimientos que subyacen al concepto de la Integral, para contrastar con los que fueron puestos en diferentes episodios del desarrollo histórico del concepto.

Al respecto se observó que el concepto de la Derivada se desarrolla en apariencia, independiente de la Integral, y en determinado momento de la Historia se llegan a resultados interesantes en los que se establece una relación entre ambos conceptos, y precisamente esto es lo que no se ve en los planteamientos programas de estudio, por lo que en la descripción de los niveles de Intra-, Inter- y Trans-, no se consideran relevantes algunos aspectos conceptuales de la Derivada como prerrequisito para la apropiación del concepto de la Integral.

Por otro lado Boigues (2010), Czarnocha et al. (2003) y Hamdam, (2009), proponen elementos interesantes para la presente investigación, ya que, de acuerdo al desarrollo histórico del concepto de la Integral, existen ciertas habilidades previas comunes tanto para la recuperación de una función primitiva como para la obtención de la Integral Definida, concepto que estos autores abordan. Tales habilidades radican principalmente en los procesos para manipular e interpretar cantidades infinitesimales generadas al aproximar el área limitada por una gráfica y todo lo que esto conlleva, como habilidades en la interpretación de intervalos en la recta numérica, nociones de particiones, nociones del área de un rectángulo, cuadrado, interpretación de gráficas en R^2, conocimiento del plano cartesiano: ubicación de coordenadas, distancias entre puntos.

Como producto de entrelazar las diferentes fuentes desde las que fue analizado el concepto y retomando las propuestas de Piaget y García (2004), (quienes afirman que un esquema mental está en un nivel inicial de construcción cuando el sujeto realiza transformaciones a un objeto en ocasiones producto de imitar procesos similares o producto de indicaciones externas) si un sujeto ha logrado un esquema a un nivel operatorio, pero no logra de manera independiente generalizar estas operaciones o establecer relaciones con otras, se considera que el nuevo esquema está aislado, desvinculado de otros esquemas.

Entonces, el esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral, se ubica en un primer nivel de construcción, el que se nombrará, de acuerdo con Piaget y García (2004) ***nivel Intra-***, y es cuando el estudiante manifieste elementos suficientes que le permitan calcular áreas de rectángulos y sumarlas, y sea capaz de extraer datos de los ejes de coordenadas que le permitirán calcular tales áreas.

Algunos maestros que fueron entrevistados mencionan que, en las etapas primarias de construcción, el estudiante debe poseer habilidades en la interpretación de gráficas en el plano cartesiano, deberá ser capaz de relacionar coordenadas y además asociar estas coordenadas con la trayectoria de las gráficas, y no sólo eso: si se trata de la acumulación de áreas, debe ser capaz de relacionar pares (x, y) con el valor de un área.

Por lo tanto, un estudiante *logra un **nivel Intra-** en la construcción del esquema para la Integral si es capaz de relacionar la suma de la acumulación de áreas con las ordenadas de un punto (x, y) en el plano cartesiano, a partir de seguir procesos sugeridos. Sin embargo, no se espera que muestre autonomía sobre la construcción de la función primitiva (Integral). En éste nivel se espera que el estudiante imite procesos o atienda instrucciones.*

Debido a que las ideas de la suma de Riemann favorecen, mas no completan el desarrollo histórico del concepto, resultó necesario en el acercamiento a las etapas de construcción, retomar la evolución histórica de la Integral al considerar a las cantidades infinitesimales. Se torna necesaria la concepción de límite, que involucra el concepto de infinito, así como los planteamientos de Barrow, Leibniz y Newton referentes a la suma de cantidades que varían (acumulación de áreas) y la Integral como la función primitiva.

En las investigaciones revisadas, los textos y la opinión de los maestros, se encontró que en la construcción del concepto de la Integral a partir de registros geométricos, no se puede dejar de lado el concepto de infinito, específicamente la idea intuitiva de límite que involucra al infinito, ya que esta idea le da un carácter continuo, entre otras cosas, a la función primitiva. Esto se debe a que cuando se considera el cálculo de áreas a partir de la suma de Riemann, se consideran en cierta manera datos discretos, los cuales deberán ser encaminados hacia datos continuos, lo cual evidencia el carácter evolutivo de la construcción del concepto.

Piaget y García (2004) describen que un sujeto transita a un segundo nivel de construcción de un esquema cuando logra interiorizar las acciones (después de repetirlas varias veces) que transforman un objeto, cuando tiene lugar una construcción interna que realiza la misma acción pero que no depende de estímulos externos (a diferencia del nivel precedente que depende de estímulos externos), cuando un sujeto es capaz de describir los pasos que dan lugar a esa transformación y de aplicarlas a objetos similares.

Conjuntando estas ideas con el análisis de los textos, la opinión de los maestros y los hallazgos en el desarrollo histórico del concepto en un ***nivel Inter-***, se espera, que el sujeto posea la idea de acumulación de áreas y así logre generalizaciones, que infiera intuitivamente procesos infinitos en la reconstrucción de la función primitiva, se espera que el estudiante internalice la relación entre el comportamiento de la función derivada y su primitiva.

Entonces un *estudiante logra un* **nivel Inter-** *en la construcción del concepto de la Integral, a partir de representaciones geométricas, si es capaz de relacionar y describir el comportamiento de una función primitiva a partir de su función derivada desde los procesos de acumulación de cantidades que varían.*

Se ha mencionado en reiteradas ocasiones la importancia que tiene que los estudiantes de ingeniería sean capaces de matematizar una situación problema. Al respecto, algunos maestros del área de las matemáticas como de electrónica mencionan que estudiar matemáticas en una carrera de ingeniería implica la capacidad del sujeto de aplicar estos conocimientos a su área formativa; comentan que es común encontrar estudiantes que han acreditado el curso de Cálculo Integral y no entienden aún qué tipo de problemas, diferentes al cálculo de áreas, pueden resolver con el concepto.

En la carrera de electrónica es necesario tomar (muestrear) datos de eventos que varían con el tiempo e interpretarlos con eficiencia. Piaget y García (2004) afirman que cuando un sujeto se encuentra en un nivel de construcción Inter-, en el que se ha apropiado de las transformaciones realizadas sobre un objeto, "demanda el establecimiento de vínculos entre ellas" (p 251), y esa búsqueda las transfiere a un tercer nivel de construcción, donde un estudiante es capaz de trasladar el esquema y vincularlo con otros lo cual conduce a la construcción de estructuras.

Así, un estudiante logra un ***nivel Trans-*** del esquema mental *si es capaz de aplicar la acumulación de áreas en la solución de situaciones problema que pertenecen a diferentes contextos, si logra reversibilidad en los procesos que relacionen la gráfica que* *representa cantidades que varían con la gráfica que representa la acumulación de estas variaciones. Debe ser capaz de discernir procesos con variables continuas y describir el comportamiento de un fenómeno situado a partir de datos que se obtengan de una función que represente razones de cambio, que sea capaz de discriminar problemas que no sean resueltos por la Integral e identificar los que sí lo son.*

Al respecto los maestros opinaron que para ello el estudiante debe poseer habilidades en las ideas de crecimiento, decrecimiento y el sentido estacionario de curvas, que la representación geométrica de la primer derivada de una función implica así como la relación entre función primitiva y Derivada. Además, comentan que un elemento importante que debe considerarse para que no resulte un impedimento en la aplicación del concepto es que el estudiante deberá estar familiarizado con la terminología propia del contexto en el que se encuentre el problema situado.

2.3 Contexto de la investigación

En este apartado se describe el escenario del cual se extrae la información y los datos necesarios para la investigación. Dicho escenario corresponde al contexto real en el cual se encuentran los estudiantes que fueron considerados como Sujetos de Análisis, se enfatizan las características que éstos poseen y se exponen las razones por las cuales fueron considerados y lo que aporta su perfil académico al objeto de estudio de la investigación.

El trabajo de campo se ubicó en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, que pertenece al Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica (SNEST). La razón de tal decisión obedece a que dicha escuela pertenece al sistema educativo de educación superior tecnológica que mayor impacto tiene a nivel nacional en la formación de ingenieros (SNEST, 2008a).

El SNEST está constituido por 249 instituciones, de las cuales 114 son Institutos Tecnológicos federales, 129 Institutos Tecnológicos Descentralizados, 4 Centros Regionales de Optimización y Desarrollo de Equipo (CRODE), un Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo de la Educación Tecnológica (CIIDET) y un Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET). El SNEST atiende a una población escolar aproximada a los 387,414 estudiantes en licenciatura y posgrado en todo el territorio nacional, incluido el Distrito Federal (DGEST, 2010).

La oferta educativa del SNEST consta de 30 licenciaturas, 7 programas educativos de especialización, 22 programas de maestría con orientación profesional, 28 programas educativos de maestrías en ciencias y 15 programas doctorales en ciencias. En la tabla 3 se muestran las carreras de ingeniería y licenciatura que se ofertan (SNEST, 2008).

Tabla 3

Carreras que oferta el SNEST

• **Ingenierías en:**	• **Licenciaturas en:**
Acuicultura	**1.** Administración
Agronomía	**2.** Arquitectura
Ambiental	**3.** Biología
Bioquímica	**4.** Contaduría
Civil	**5.** Gastronomía
Desarrollo Comunitario	**6.** Informática
Eléctrica	
Electromecánica	
Electrónica	
Forestal	
Geociencias	
Gestión Empresarial	
Industrial	
Industrias Alimentarias	
Innovación Agrícola Sustentable	
Logística	
Materiales	
Mecánica	
Mecatrónica	
Nanotecnología	
Naval	
Pesquerías	
Sistemas Computacionales	
Química	

El instituto tecnológico de Cd. Guzmán (ITCG), a sus más de 40 años de haber sido fundado oferta a nivel licenciatura las siguientes carreras:

- Ingeniería en Electrónica
- Ingeniería en sistemas computacionales
- Ingeniería Industrial
- Ingeniería Mecánica
- Ingeniería Eléctrica
- Ingeniería Ambiental
- Ingeniería en Gestión Empresarial
- Ingeniería en Informática
- Licenciatura en Contaduría
- Licenciatura en Administración
- Licenciatura en Informática
- Arquitectura
- Contador público

La institución cuenta con una matrícula de 3510 estudiantes, de los cuales 2546 pertenecen al área de ingenierías. La formación del estudiante de ingeniería se divide en dos ejes: la formación básica y la formación de la especialización. Desde la reforma curricular del 2008, se estableció que en las carreras de ingeniería, en la disciplina de matemáticas, estarán integradas por los mismos programas de estudio, los cuales son: Cálculo diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales, que pertenecen a la retícula genérica de las carreras de Ingeniería, además se deberán ofrecer contenidos idénticos en los 243 tecnológicos que integran el SNEST (2008). Como ejemplo: los estudiantes de las carreras de Ingeniería Electrónica, Ingeniería, Mecánica, Ingeniería Industrial, entre otras, llevarán el mismo programa de estudio de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

2.3.1 Descripción del contexto.

Se seleccionaron dos grupos de estudiantes, uno pertenece a la carrera de Ingeniería Electrónica, y otro de Ingeniería Informática. Es pertinente aclarar que cualquier plan de estudio de las carreras de ingeniería que oferta el Sistema Nacional de Educación Tecnológica, y escuelas que formen ingenieros, hubiese sido útil para los fines de la investigación, debido a que en todos se presentan los mismos contenidos para la Integral.

Para los objetivos de la investigación, resultó necesario que los estudiantes que fueron considerados como Sujetos de Análisis, cursaran la materia de Mecánica Clásica, la cual se oferta en el primer semestre del plan de estudio de Ingeniería Electrónica. En los siguientes párrafos se detallan las características de tales estudiantes y la razón por la cual fueron seleccionados.

2.3.1.1 Escenario.

Grupo de Mecánica Clásica

Es un grupo conformado por 34 estudiantes de nuevo ingreso (primer semestre) y 6 estudiantes de tercer semestre que repiten el curso de mecánica clásica. Al ser estudiantes de nuevo ingreso todavía no cursaban la materia de Cálculo Integral (esto sucedería en segundo semestre), e incluso los estudiantes que repiten el curso estaban inscritos por primera vez en el curso de Cálculo Integral. Los estudiantes de primer semestre cursaban Cálculo Diferencial, requisito previo para poder inscribirse al curso de Cálculo Integral.

Las características que posee este grupo fueron de interés para los fines de la investigación, ya que en este primer semestre de su carrera tratan el tema de Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento) y que en otras carreras, como Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Sistemas Computacionales, por mencionar algunas, lo estudian en semestres posteriores, y que como requisito curricular se establece que un estudiante deberá haber acreditado el curso de Cálculo Integral. Además, la Cinemática es un área del conocimiento en la que se requiere poseer el concepto de la Integral desde registros de representación visual (geométricos y mediante tablas de datos), ya que trata de la descripción del movimiento a partir de la suma de cocientes de cantidades que varían y la relación entre velocidades y posición desde aspectos gráficos.

Por otro lado, es necesario destacar que las competencias previas al curso de Mecánica Clásica, que textualmente se definen en el programa de estudio (ITCG 2010, p. 5), son las siguientes:

- Reconocer la fórmula que debe usarse para calcular la derivada de una función y obtener la función derivada.
- Calcular la diferencial haciendo uso de fórmulas de derivación.
- Resolver integrales que requieran modificación o interpretación para adecuarlas a una fórmula.
- Conocer los sistemas de unidades internacionales.

Si se consideran estos conocimientos como previos para el curso mencionado, se entiende que Mecánica Clásica debió ubicarse en un semestre posterior al curso de Cálculo Integral, y un sujeto inscrito en este curso debe poseer conocimientos sobre la Integral y la Derivada, debe saber identificar en qué situaciones le es útil tal concepto. En resumen, se requiere poseer habilidades para la Integral desde registros de representación geométrico y deberá ser capaz de asociarlos con los temas que se abordan en un curso de Cinemática.

En la investigación se seleccionaron seis estudiantes (cuatro de nuevo ingreso y dos de tercer semestre que repiten el curso de Mecánica Clásica y que llevan por primera vez el curso de Integrales), dado que se la intención fue comparar cómo los estudiantes, con diferentes cualidades académicas construyen el concepto de la Integral. Para ello se desarrollaron actividades encaminadas a promover la construcción del concepto de la Integral, y fueron atendidas por los alumnos seleccionados.

2.3.1.2 Sujetos de observación (S_i).

Para la selección de los sujetos (estudiantes) se consideraron los siguientes criterios:

Se asistió como observadora, desde el primer día de clases (22 de Agosto del 2011) a las sesiones presenciales. El tema de interés (cinemática) fue abordado a partir del día 6 de septiembre, que corresponde a la unidad II del programa oficial de estudios; sin embargo, el haber asistido desde la unidad I, dio la posibilidad de conocer las cualidades académicas de los estudiantes, establecer una relación cercana con el grupo, así como observar las capacidades comunicativas de los estudiantes, ya que el maestro titular del curso organizó en equipos de trabajo las exposiciones de algunos temas concernientes a la unidad I.

Posteriormente, el maestro titular aplicó el examen correspondiente a la Unidad I, el cual fue revisado también por la observadora y tentativamente se seleccionaron 6 alumnos con cualidades académicas semejantes dos a dos. Cuando inició el tema de cinemática, el maestro titular del curso planteó problemas, los cuales fueron resueltos en grupos de discusión, lo que dio oportunidad de constatar las cualidades académicas y comunicativas de los estudiantes tentativamente seleccionados.

La fase final para elegir los sujetos consistió en que la observadora se integró a los equipos y observó la participación de los estudiantes en las actividades que asignó el profesor titular, y con cada estudiante indagó los procesos para la solución de problemas propuestos por el profesor titular del curso. A continuación se destacan las cualidades particulares de cada sujeto que son importantes para esta investigación.

S_1 y S_2: Estudiantes del primer semestre de la carrera de Electrónica que cursaba las materias de Mecánica Clásica y Cálculo Diferencial, en bachillerato estudiaron Cálculo Integral. Fueron seleccionados para participar en esta investigación porque se observaron cualidades y desempeño académico destacable respecto al resto de sus compañeros y favorable para la investigación, los estudiantes poseen capacidad de análisis, síntesis y facilidad de palabra, lo cual es importante ya que verbalmente se interactuaría con ellos. Además estos dos estudiantes aparentemente presentaron cualidades académicas similares.

S_3 y S_4: Estudiantes del primer semestre de la carrera de Electrónica que cursaban las materias de Mecánica Clásica y Cálculo Diferencial, fueron seleccionados para participar en esta investigación porque se observaron cualidades y desempeño académico de acuerdo a los intereses de la investigación. Tuvieron algunas dificultades conceptuales que no fueron resueltas en niveles escolares anteriores, aun así sus cualidades son favorables para la investigación, al igual que S_1, S_2, los estudiantes poseen capacidad de análisis y síntesis y se expresan sin dificultad. Se observó que estos dos estudiantes tienen capacidades académicas similares.

S_5 y S_6: Estudiantes del tercer semestre de la carrera de Electrónica que cursaban por segunda vez Mecánica Clásica, acreditaron el curso de Cálculo Diferencial y en el momento en que se les invitó a participar estaban inscritos en el curso de Cálculo Integral. Para el estudiante S_5 fue la primera vez que estudiaba a la Integral y sus cualidades académicas no fueron destacadas, ya que evidenció construcciones débiles previas al curso de Mecánica Clásica así como limitada capacidad de análisis.

Respecto a S_6, fue un estudiante atractivo para la investigación debido a que estudiaba simultáneamente Mecánica Clásica y Cálculo Integral, mostró conocimiento en algunos conceptos pero de manera desvinculada, además mostró dificultad para establecer nuevos vínculos con sus estructuras mentales lo que le impedía la comprensión de algunos conceptos matemáticos.

Los estudiantes S_5 y S_6 fueron seleccionados por dos razones, la primera porque en la investigación resultó importante la diversidad de cualidades académicas que muestren los estudiantes que serán entrevistados; la segunda razón es porque mostraron disposición cuando se les encomendaba realizar alguna actividad. El estudiante S_6 a diferencia de S_5 se mostró introvertido y se le dificultaba expresar alguna opinión sobre la solución de un problema relacionado con la cinemática. S_5 fue participativo y tenaz aunque se le dificultara la interpretación de datos y evidenciara problemas de construcción de esquemas desde registros algebraicos.

3 Metodología de investigación

En la investigación se buscó explorar, describir e interpretar cómo el estudiante universitario se apropia de un concepto matemático y, en congruencia con el enfoque teórico en el que ésta se enmarcó, se requiere estudiar y conocer al fenómeno desde su contexto, su génesis dentro de su escenario natural, por lo que se adopta una metodología cualitativa de tipo descriptiva e interpretativa, a partir de la observación y exploración. En este capítulo se presenta la fundamentación de la metodología que marcó la ruta de la presente investigación y para responder las interrogantes que en ésta se han generado.

Las técnicas consideradas para estudiar el fenómeno son la observación no participante acompañada por la entrevista en profundidad. Además de las técnicas mencionadas, se incluyeron otras con las que se logró fortalecer la recogida de datos y la observación del fenómeno desde distintos ángulos. Estas se refieren a: diario de campo de la investigación, discusión entre pares y elaboración de historieta.

La perspectiva teórica que guió a la investigación es el *paradigma constructivista,* debido a que el objeto de estudio así como las preguntas de investigación orientan a explorar, describir e interpretar las construcciones mentales que un estudiante universitario realiza cuando intenta apropiarse de un concepto matemático. Dentro de este paradigma se enmarca al método crítico, y para entender su esencia, se considera necesario centrar algunos de sus elementos filosóficos.

3.1 Presentación del método

Para entender el objeto de estudio y contestar las interrogantes que surgen en la investigación, y en sintonía con el marco teórico en que se encuentra ubicado su objeto de estudio, se optó por incluir el *método crítico (o método de exploración crítica)*, porque éste propone un estudio transversal, basado en técnicas de observación y exploración, de las construcciones mentales de un individuo, a partir del establecimiento de una relación dialógica entre el investigador y el sujeto.

El método de exploración crítica (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1996), ubicado en el paradigma constructivista, es utilizado en la Psicología Genética. Sus raíces se encuentran en el método clínico que originalmente fue aplicado por Piaget para indagar cómo un sujeto construye su conocimiento, sus conjeturas se sustentaban en lo que él observaba cuando el niño manipulaba un objeto. A lo largo del tiempo el método clínico se fue enriqueciendo agregando elementos experimentales, que posibilitaban al investigador indagar sobre el sujeto, con la finalidad de que este último expresara los "por qué" de sus manipulaciones y conclusiones, sus percepciones sobre el objeto, sus dudas, y a partir de sus respuestas se generaran nuevas preguntas[8] para el investigador. Así surge el método clínico crítico, o simplemente método crítico, también conocido como método de exploración crítica (Inhelder et al., 1996).

El método de exploración crítica comúnmente es utilizado por investigadores constructivistas para generar situaciones de aprendizaje en donde el individuo construirá conocimiento respecto a un campo del saber. También es utilizado como *método* para realizar estudios transversales, para explorar el pensamiento de un individuo que se hace visible a partir de la observación y las entrevistas. Al respecto Inhelder et al. (1996) mencionan que el método de exploración crítica se distingue de entre otros métodos por dos rasgos importantes:

a) El método se orienta a explorar un campo, y en la medida en que el investigador se adentra, encuentra información que originalmente no estaba prevista. Al respecto Inhelder et al. (1996) comentan que "sólo cuando nos creemos en posesión de una serie tan completa de posibles reacciones originales frente a un problema particular, podrá tomar el método de interrogación un carácter más sistemático" (p. 40).

b) Otra característica distintiva de este método es que el experimentador permanentemente se hace hipótesis sobre diversos significados cognitivos que manifiesta el individuo en el momento de la observación y las comprueba en la realidad, lo que beneficia la obtención de información a partir de los diálogos con el sujeto.

A diferencia del método clínico tradicional, el método crítico añade un ingrediente especial que es la experimentación, por medio de la cual el investigador, mediante fenómenos observables y manipulables, invita al individuo a razonar y así a establecer juicios, "cuyo criterio de verdad es su coherencia" (Inhelder et al., 1996, p. 42). No se

[8] Duckworth, (2005) y Inhelder et al. (1996) comentan que en el método crítico, cuando el investigador indaga sobre las construcciones del sujeto, se formula hipótesis, las cuales generan nuevas preguntas.

debe perder de vista que dentro de este paradigma, las construcciones que realiza el individuo y su percepción sobre los observables del mundo físico (o abstracto, como un concepto matemático), dependerán de su estructura mental y la coordinación de sus estructuras actuales y la nueva información.

En la investigación, con el método de exploración crítica, se logró indagar sobre los sistemas operatorios del sujeto, esto por medio de entrevistas, en donde el sujeto proporcionó información sobre las argumentaciones a sus respuestas. A partir de éstas se estableció una relación dialógica entre entrevistado y entrevistadora, ya que la segunda guió y fue guiada por las respuestas del entrevistado y de acuerdo a ellas fluyeron de manera dinámica las preguntas de exploración. La entrevistadora generó inferencias de acuerdo a las respuestas del entrevistado con las que se evidenció el nivel de las construcciones mentales que logra cada sujeto cuando interactúa con un objeto, y a lo largo de éstas, se logró describir las características de sus construcciones, los mecanismos que están en juego para lograrlo, así como los niveles de coordinación de las estructuras existentes con nuevas construcciones mentales.

Inhelder et al. (1996) enfatizan que los interrogatorios cuyo propósito es estudiar la génesis de las "operaciones concretas han recaído siempre no sólo sobre los juicios que varían en función de la edad o del desarrollo de los sujetos, sino, ante todo, sobre los argumentos que los acompañan" (p. 42), son éstos los que dan cuenta del origen de las abstracciones o de los obstáculos conceptuales o epistémicos que el sujeto manifiesta en la construcción de nuevas estructuras mentales.

3.2 Las técnicas e instrumentos

Para la recogida de datos se aplicaron dos técnicas cualitativas, la observación y la entrevista. En este apartado se describen las generalidades de las técnicas, se mencionan los elementos que fueron considerados en la investigación, así como los instrumentos que se diseñaron para cada una de ellas. Además, se comenta cómo se inmiscuyen en la investigación.

La observación

¿Por qué incluir esta técnica en la investigación? Registrar la información mediante la observación posibilita, entre otros aspectos, conocer las decisiones del estudiante en el proceso de solución de cada problema. Se entiende por técnicas de observación los "procedimientos en los que el investigador presencia en directo el fenómeno que estudia, evitando manipular el contexto natural donde tiene lugar la acción que se investiga" (Valles, 2007, p. 143).

La observación cualitativa implica que el investigador deberá adentrarse a profundidad al fenómeno estudiado, "mantener un papel activo y una reflexión permanente, estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 411). Al respecto Ruiz (2009) menciona que la observación científica se orienta y se enfoca a un objetivo concreto de investigación, formulado de antemano, se planifica sistemáticamente en fases, aspectos, lugares, personas, se controla y relaciona con proposiciones teóricas y se somete a controles de veracidad, de objetividad, de fiabilidad y de precisión.

En la investigación se utilizó la técnica de la *observación no participante*, al respecto Flick (2007) menciona que el observador se abstiene de intervenciones en el campo, se pretende comprobar los principios teóricos para ciertos fenómenos a partir de su presentación y distribución, las personas se eligen por criterios de representatividad. Las fases que el autor propone para realizar la observación son: selección del entorno, definir lo que se documentará en la observación de cada caso, formación de los observadores, focalizar la observación a la pregunta de investigación; por último, cuando las observaciones no proporcionan conocimiento adicional, ha terminado la observación y se ha alcanzado la teoría.

Uno de los problemas más frecuentes que se presentan en la observación no participante es definir inadecuadamente el rol de observador para que éste no se aleje ni interfiera en el campo de observación. Se debe tener presente el *efecto reactivo* —efectos de la presencia y conductas que provoca la presencia del observador— las cuales se deberán registrar, ya que representan también datos (Hernández et al., 2010, p. 417).

Tomando esto en cuenta, se ingresó al campo con anticipación con la intención de reducir el efecto que pudiese causar la presencia de una persona ajena al escenario de estudio.

La entrevista

Valles (2007), menciona que el arte de la conversación, que es aprendido de modo natural a partir de la necesidad que tiene el sujeto de socializar, es un primer acercamiento a la técnica cualitativa de la entrevista.

La entrevista es una técnica utilizada en las ciencias sociales para obtener información relevante para los objetivos de una investigación. Existen diferentes tipos de entrevistas y éstas se aplican de acuerdo a las intenciones de la investigación. Dado que el objetivo del presente estudio es describir las construcciones mentales del individuo, que tienen lugar cuando intenta comprender un concepto matemático, es de interés que la entrevistadora posea cierta libertad para indagar sobre tales construcciones, por lo que se optó por la entrevista en profundidad.

Rodríguez, Gil y García (1999), dentro de su clasificación de entrevistas, consideran a la entrevista en profundidad como medio de interacción social entre al menos dos personas que genera una comunicación de significados: el entrevistado explica su punto de vista sobre un fenómeno o evento y el entrevistador intenta comprender o interpretar esa explicación.

¿Por qué considerar esta técnica en la investigación? La entrevista es vista como un medio directo de obtención de información, ya que se requiere “accesar” al pensamiento del sujeto a partir de sus acciones, y para lograrlo, es necesario conocer de viva voz sus argumentos, observar sus actitudes, dibujos, expresiones, sus decisiones en la elección de opciones para resolver el problema (cómo y por qué), y este instrumento proporciona cierta libertad al entrevistador en la formulación de la pregunta de acuerdo a la ocasión.

Respecto a la respuesta del entrevistado, Rodríguez et al. (1999) mencionan que en ocasiones el informante no proporciona la respuesta focalizando la pregunta, entonces es necesario cambiar las palabras y volver a preguntar el mismo asunto. Otro detalle que se debe cuidar es no dejar escapar información relevante, y para ello se recomienda, con consentimiento del entrevistado, hacer uso de grabadoras.

En las entrevistas el investigador puede ir tomando notas que le permitirán formular nuevas preguntas o destacar hallazgos (Inhelder, 1996 y Duckworth, 2005). Se recomienda también que el investigador lleve un diario de investigación en el que incluirá comentarios, anécdotas, descripción de situaciones, del ambiente, etc.

En la presente investigación fue necesario no perder de vista dos aspectos de esta técnica: el primero es entender que la riqueza de la entrevista estriba en que en ella se integran las experiencias, subjetividades, sentimientos e interpretaciones que cada persona hace de su vida y de la vida social (Vela, 2001). Por otro lado, las limitaciones de la entrevista, como textualmente lo menciona Vela (2001) "al tener un carácter único, no siempre puede afirmarse con plena seguridad el descubrimiento de los aspectos claves que conduzcan a un conocimiento generalizable" (p. 68).

Los elementos de la entrevista que fueron considerados en la investigación son: a) el trabajo preliminar para tener acceso a la realización de la entrevista, b) la selección del diseño de la entrevista y los informantes sobre los que habrá de aplicarse, c) el inicio de la entrevista, lograr el *rapport* (que es la relación óptima entre entrevistador-entrevistado), d) identificación de la información de interés, completando la entrevista, cerrando la entrevista.

Cuando los sujetos fueron entrevistados, se videograbó a cada uno con la finalidad de dar oportunidad a la entrevistadora, una y otra vez, de verificar la información recabada, así como sus inferencias y para dar confiabilidad a los datos proporcionados por el entrevistado. Los puntos que fueron focalizados en la recogida de información y que definieron los tópicos para las entrevistas son:

- Indagar sobre los argumentos que proporciona el estudiante para cada paso del proceso de solución de cada problema que se le solicite resolver.
- Indagar sobre las estructuras mentales que posee, necesarias para la apropiación el concepto de la Integral.
- Observar e indagar cómo el sujeto moviliza y coordina diversas estructuras mentales.
- Análisis, descripción e indagación de los niveles de construcción que el sujeto manifiesta.

En la investigación la confiabilidad y la validez de la entrevista fue determinada, de acuerdo con Rodríguez et al. (1999) al mostrar un mínimo de “autenticidad”, “concordancia” y “entendimiento” en la estructura narrativa proporcionada por los informantes, a partir de los hechos tal y como se les presentan de manera cotidiana en su realidad escolar.

3.3 Conformación de los instrumentos para las técnicas de recolección de datos.

Instrumentos para la observación:

a) Formatos de registros: en la investigación se tomaron en cuenta algunas de las sugerencias de Hernández et al. (2010), los autores recomiendan que el investigador deberá anotar todo lo que considere relevante en lo que observa. Mencionan que una buena medida será dividir una hoja por mitad y en la primer columna registrar las *anotaciones descriptivas* de la observación y en la otra *las interpretativas*. Al respecto mencionan que “en la observación cualitativa, a diferencia de la cuantitativa se debe ir creando un diferente esquema de observación para cada problema de estudio y ambiente, que las unidades y categorías irán emergiendo de las observaciones” (p. 417).

b) Grabaciones y videograbaciones: estos instrumentos fueron considerados para fortalecer la información recabada en la observación. Se tuvieron en cuenta las recomendaciones de Flick (2007), quien menciona que el investigador deberá ser muy cauteloso si tiene considerado introducir videocámara y grabadoras de audio debido al impacto ambivalente que éstas pueden ocasionar: por un lado son excelente medio para enriquecer la observación y la recogida de datos, ya que el investigador podrá analizar cuantas veces sea necesario la información para generar sus conclusiones, por otro, si el sujeto no está familiarizado con estos artefactos, se corre el riesgo de perder la veracidad de sus respuestas o que el “medio natural de la observación” se difumine. En la investigación se utilizaron estos instrumentos con plena autorización del entrevistado, esto se hizo para no inhibir su actuación; se utilizaron justo en los momentos en los que el sujeto proporcionó información valiosa para las preguntas de investigación.

c) Diario de campo: Con este instrumento se llevó un registro minucioso de todo lo que aconteció en el trabajo con los sujetos seleccionados. Al respecto Flick (2007) menciona que dicho diario deberá documentar:

*(…) el proceso de acercamiento al campo, y las experiencias y problemas en el contacto con el campo o con los entrevistados, y en la aplicación de los métodos. Se deberán incorporar también hechos relevantes y cuestiones de menor importancia o hechos perdidos en la interpretación, generalización, evaluación o presentación de resultados (…) (*p. 187).

Instrumentos para las entrevistas:

a) *Guía de la entrevista*: De acuerdo con Hernández et al. (2010), se elaboraron una serie de tópicos y, a partir de éstos, preguntas que provocaron que el sujeto entrevistado comentara sobre el tema de interés. Las preguntas fueron flexibles a medida que va transcurriendo la entrevista, e incluso la entrevistadora introdujo preguntas conforme se requirió. Inicialmente se elaboró un guión sobre los tópicos que abordaría con los sujetos, relevantes para la pregunta de investigación.

b) *Situaciones matemáticas problema*. Para la investigación fueron consideradas un instrumento básico para la recolección de información, ya que fueron el vínculo entre las construcciones que desarrolló el sujeto y las interpretaciones que la observadora hizo al respecto, además, fueron consideradas el punto de partida para las entrevistas.

El referente para la elaboración de las situaciones fue, principalmente el acercamiento teórico de los niveles Intra-, Inter- y Trans-, se elaboraron una serie de problemas ubicados en cada etapa de construcción, para ser resueltos de manera individual. Estos fueron clasificados en *Actividades*, en donde cada actividad corresponde a un nivel de construcción, más adelante se detalla esta idea. Además se elaboraron otros problemas que fueron resueltos en parejas, cuya finalidad fue provocar la discusión entre los miembros de cada pareja.

En la investigación, la idea de *situación matemática problema*, a diferencia de *ejercicio matemático* implica mucho más que procesos algorítmicos para ser resuelta. Un problema matemático se refiere a una situación que acarrea conflicto al sujeto, que para su solución requiere de un mayor esfuerzo de éste, demanda la puesta en marcha de un conjunto de conocimientos y habilidades matemáticas que el sujeto debió haber integrado a su estructura cognitiva durante su formación matemática.

Los elementos que se consideraron en la elaboración de las situaciones fueron:

i. Problemas que promueven que el sujeto movilice los conocimientos que posee y que de acuerdo a diversos autores, son necesarios para la apropiación del concepto de la Integral. Con éstos se pretende indagar sobre sus estructuras mentales actuales en el momento del abordaje de la Integral.
ii. Problemas en los que el estudiante muestre su nivel de dominio sobre el concepto de la Integral. Con éstos se pretende indagar y describir las dificultades conceptuales que se le presenta al estudiante en la solución del problema, así como los niveles de construcción (Intra-, Inter-, Trans-) del esquema mental que alcanza.
iii. Problemas en los que el estudiante discrimine o seleccione las situaciones en las se requiere la aplicación del concepto de la Integral. Este tipo de problemas permitirán indagar nuevamente sobre niveles de construcción; se esperaría que si el sujeto lograra detectar las situaciones que deberán ser resueltas con el uso de la Integral, el esquema mental para la misma habrá alcanzado un *nivel Trans-*.

c) Videograbaciones y Grabaciones.

d) Diario de campo.

Otras técnicas que fueron considerados para la recogida de información

a) Discusión entre pares: No se pretendió propiciar trabajo colaborativo, ni enfatizar en aspectos sociales del aprendizaje, sino afinar y fortalecer la observación y descripción sobre las construcciones mentales que cada sujeto realiza. La actividad consistió en lo siguiente: en pareja de estudiantes, se propone un problema que para su solución provoque polémica, en esa discusión se observaron los diferentes procesos de solución. Se procuró un ambiente en donde fluyó la reflexión sobre la solución de un problema. El motivo de tal técnica fue para relajar la participación de cada sujeto para que así hiciera propuestas con mayor fluidez sobre la solución de cada problema, que se explayara con mayor libertad al no sentir focalizada solo en él la atención.

b) Elaboración de una historieta: Como parte de la estrategia para la recolección de información, se solicitó a cada sujeto que elaborara una historieta. En su narración, debió considerar a sus lectores como estudiantes, quienes nada saben de la Integral pero que ya cursaron Cálculo Diferencial (curso prerrequisito para el abordaje de la Integral). La técnica provocó que el estudiante, por medio de la narración, explicara el concepto de la Integral, inherente a eso se enriquecieron las inferencias sobre el proceso de construcción del concepto en cada sujeto.

Además, la información que arrojó la historieta se trianguló con los datos recabados en las entrevistas, las discusiones en pares, las grabaciones y la solución de situaciones problema, lo que abonó a las interpretaciones sobre las construcciones mentales que desarrollan los sujetos.

3.4 Acciones y trabajo de campo

En este apartado se describe la puesta en escena de la metodología de la investigación, en donde se muestra desde la elaboración y validación de los instrumentos, hasta el trabajo de campo.

3.4.1 Elaboración y validación de los instrumentos de recolección de datos.

Para clarificar la evolución del diseño de los instrumentos, se consideró el ciclo APOE, el cual se esquematiza en la figura 22.

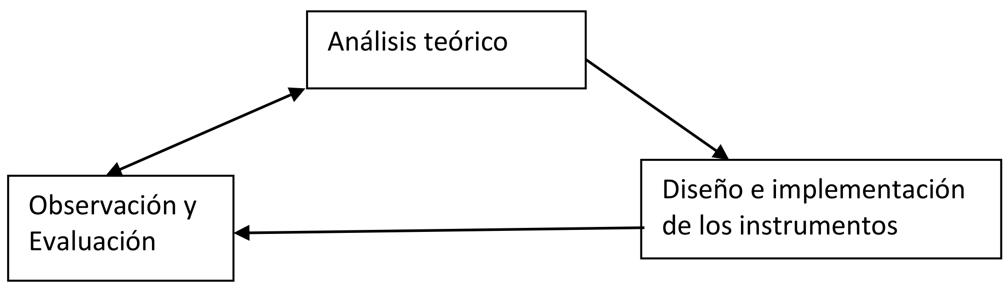


Figura 22. Ciclo para la construcción de un nuevo esquema desde la Teoría APOE.

El ciclo permite indagar sobre el proceso que sigue el individuo en la construcción de un nuevo concepto matemático, así como para diseñar y sustentar, desde el análisis teórico, los instrumentos que promueven construcciones. Este enfoque propone iniciar con un análisis teórico y epistemológico del concepto, el cual permite dimensionar y describir cómo éste puede ser construido.

A partir de este análisis preliminar del concepto se diseñan los instrumentos los cuales posteriormente son llevados a escena para la recolección de datos de investigación. Asiala et al. (1997) mencionan que el ciclo itera tantas veces sea necesario para perfeccionar tanto teoría, como tratamiento hasta que el alumno haya consolidado su nuevo esquema. En este caso, antes de la recogida final de datos, se recurrió a grupos pilotos para el perfeccionamiento de los instrumentos.

El ciclo APOE fue implementado en la investigación de la siguiente manera: primeramente se realizó un análisis teórico y epistemológico del concepto de la Integral como punto de partida para diseñar e implementar una primer versión de los instrumentos. Posteriormente fueron llevados al aula y resueltos por estudiantes (pilotaje). Los instrumentos consistieron en una serie de situaciones problema diseñadas para los estudiantes, quienes de alguna forma no habían tratado el concepto de la Integral desde un enfoque geométrico. Luego las situaciones problema fueron evaluadas y enriquecidas.

En la investigación, el ciclo iteró varias veces hasta que se consideró una versión final de las situaciones problema que servirían para la recolección de datos de investigación. Así, la elaboración y validación de los instrumentos transitó por diferentes etapas tal como se describe a continuación y como se muestra en el diagrama de la figura 23.

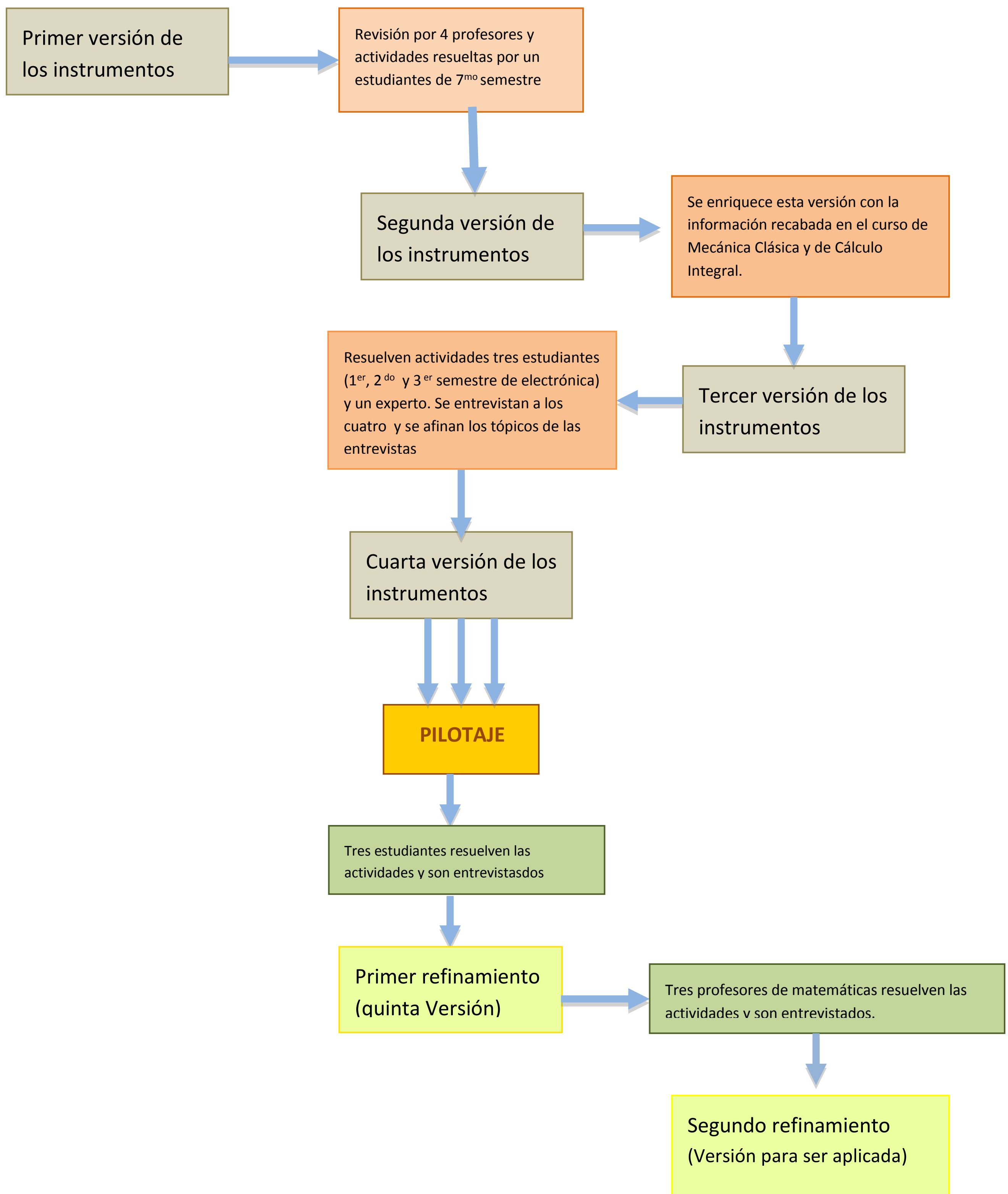


Figura 23.- Elaboración y validación de instrumentos y revisión de los niveles de construcción.

Primera etapa: se asistió como observadora, en Julio del 2011, al curso de verano de Cálculo Integral que ofertó el Tecnológico de Cd. Guzmán para la carrera de Ingeniería Electrónica, con la finalidad de entender y describir el escenario en el cual el alumno construye el concepto de la Integral, las actividades que propone el profesor titular para promover la construcción de dicho concepto, así como para observar las dificultades e información previa que conlleva aprender el concepto y de esta forma considerar los elementos que subyacen al mismo.

Se platicó con el profesor del grupo con la intención de conocer su opinión sobre los elementos conceptuales que favorecen u obstaculizan la construcción del concepto desde registros geométricos. La información que se recabó al respecto no fue suficiente para la construcción de la primera versión de los instrumentos, ya que la perspectiva del profesor y las pretensiones de la investigación sobre el concepto de la Integral distaban respecto a los registros de representación que cada parte abordaría.

Segunda etapa: Se asistió, a partir de Agosto del 2011 y durante cinco semanas, como observadora al curso de Cálculo Integral que se ofertó para los alumnos de Ingeniería en Informática, con la finalidad de recabar elementos sobre su apropiación desde el escenario natural donde se trata el concepto. Se realizó una segunda versión de los instrumentos. El profesor titular del curso proporcionó a la investigación toda la información que se le solicitó, desde su planeación hasta los registros evaluación sobre el desempeño de cada estudiante.

Sin embargo, desde que se ingresó al aula para realizar las observaciones correspondientes, se detectó una resistencia por parte de los estudiantes para participar en la investigación. Los motivos que se identificaron es que el grupo estaba integrado por estudiantes de diversas carreras y semestres, quienes cursan por segunda ocasión tal materia.

Esto condujo a que los estudiantes tomaran la clase en un horario de coincidencia (14:00 horas), y para unos resultaba su última clase y para otros con la que abrían su jornada escolar, lo que motivó a que la asistencia fuese irregular y poca integración al trabajo en el aula asignado por el maestro titular y por tanto, resistencia en participar directamente en la investigación. Se decidió descartar a este grupo y se optó por asistir como observadora del curso de Mecánica Clásica, que se ofertó para los alumnos del primer semestre de Ingeniería Electrónica.

Tercera etapa: En el curso de Mecánica Clásica se asistió como observadora, desde Agosto del 2011. Las primeras seis semanas el profesor abordó temas relacionados con Vectores, este mes y medio fue tiempo que tomó el abordaje del tema de cinemática, el cual es una aplicación inmediata de la Integral en la que los registros geométricos facilitan la comprensión de otros conceptos dentro de esta área de la Física.

Lo sustancial de esta participación fue, por un lado, detectar los sujetos que fungirían como Sujetos de Observación para la investigación y, por otro, para precisar los conceptos y los tipos de actividades que debían conformar a los instrumentos de recolección de datos. En este momento se elaboró una tercera versión de los mismos.

Cuarta etapa: A partir de esta etapa, de acuerdo al ciclo APOE, inició el refinamiento de los instrumentos, para ello se solicitó el apoyo de tres estudiantes, uno del primer semestre, que cursa Mecánica Clásica, uno de tercer semestre y una estudiante del quinto semestre de ingeniería Electrónica, quienes resolvieron las situaciones problema.

A partir de las observaciones correspondientes se corrigieron aspectos como redacción, grado de dificultad, secuencia y relación entre los reactivos, así como la información que se recabó de las entrevistas a los maestros de cálculo, de investigaciones, de los programas y libros de texto para el curso de Cálculo Integral. Se generó así una cuarta versión de los instrumentos.

Quinta etapa: Esta cuarta versión, producto de la interacción del ciclo APOE, fue puesta en escena y el pilotaje se llevó a cabo primero con tres estudiantes quienes resolvieron los reactivos y posteriormente se entrevistó a cada uno sobre sus procesos, se realizó el refinamiento correspondiente (generando una quinta versión).

Sexta etapa: Se solicitó, al igual que con los estudiantes, a tres profesores de Cálculo Integral de diferentes instituciones educativas que resolvieran los problemas incluidos en los instrumentos, posteriormente se entrevistó a cada uno de ellos con doble intención, la primera fue para conocer su opinión (de fondo y forma) sobre la pertinencia de los instrumentos para la construcción del concepto de la Integral y las posibles dificultades conceptuales que pudiera enfrentar el estudiante. Por otro lado, para indagar si los profesores perciben los diferentes niveles en que es abordado el concepto desde los reactivos planteados en los instrumentos de recolección de datos y observar si favorecen las construcciones de los estudiantes.

La solución a los problemas que resolvieron los maestros así como los resultados de las entrevistas dieron origen a un segundo refinamiento de los instrumentos, tomando ésta como la versión con la que se recabarían los datos para el estudio. Esta sexta versión aparece en el Anexo A.

Inicialmente se contempló que, a partir de los elementos conceptuales que el maestro aborde en el curso de Cálculo Integral al explicar el concepto de la Integral, se diseñarían los instrumentos (e incluso se considerarían los problemas que el profesor titular propusiera a sus estudiantes) con los que se observarían las construcciones mentales de los sujetos; pero debido a la carencia de elementos geométricos en la clase, se optó por diseñar los instrumentos de tal forma que propiciaran tales construcciones. Además se proporcionaron algunos de los conceptos básicos que se consideraron necesarios para ello.

Los instrumentos fueron diseñados en tres bloques, los cuales se elaboraron considerando las diferentes elementos constitutivos del concepto de la Integral desde registros de representación geométrica, en los cuales se incluyen tres actividades principales, que están diseñadas para observar los niveles de construcción de los estudiantes, como se indica en la figura 24.

Significa que con la actividad I se observó cómo los estudiantes logran construcciones en un nivel *Intra-*; en la actividad II se incluyeron problemas que permitieron observar las construcciones del sujeto en nivel *Inter-*, y la actividad III incluyó actividades que permitieron observar si el estudiante logró un nivel *Trans-* en la construcción del concepto.

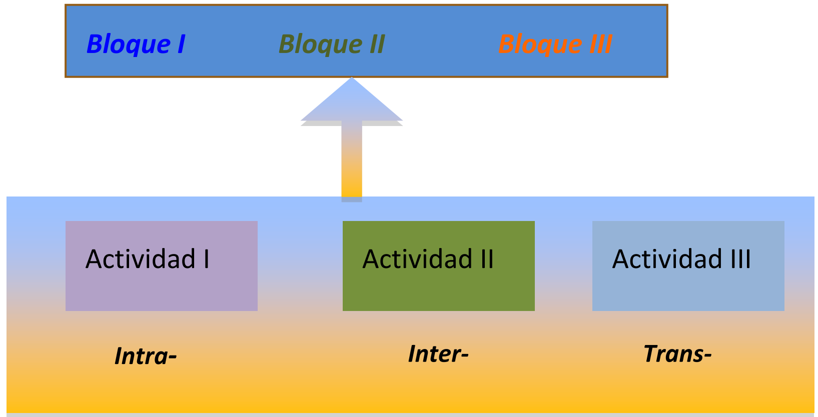


Figura 24. Clasificación de los niveles Intra-, Inter-y Trans- en los instrumentos.

Por otro lado, se diseñaron situaciones problema que fueron resueltas por parejas, la intención de incluir estos reactivos fue provocar que los estudiantes, en pares, discutieran la solución de un problema, lo que también resultó útil como un medio para observar las construcciones mentales de cada estudiante.

3.4.2 Inmersión y trabajo de campo.

Primeramente se solicitó a la instancia correspondiente del Instituto Tecnológico de Cd Guzmán la autorización para que se llevara a cabo el presente estudio. Se informó de las intenciones del mismo y los aspectos éticos de la investigación, que consisten en mantener el anonimato de los participantes. Se consideró la autorización de los sujetos para que puedan ser publicadas sus aportaciones al estudio, y se enfatizó que será cuidada en todo momento la integridad del sujeto así como aspectos emocionales. Una vez concedida la autorización para realizar el estudio, la autoridad correspondiente platicó con tres profesores, a quienes se les comentó cuál sería su participación en éste.

La inmersión al campo inició cuando se asistió al aula como observadora (no participante) durante un mes y tres semanas a las clases de Cinemática (en el curso de Mecánica Clásica) e Integrales (en dos cursos de Cálculo Integral, uno de Electrónica y otro de Informática), con la finalidad de registrar los elementos conceptuales que abordan los profesores y que fueron necesarios para el diseño de los instrumentos de recolección de datos, además de observar a los estudiantes y seleccionar las unidades de observación.

Una vez detectados los estudiantes que participarían en la investigación, se observó cuidadosamente su trabajo en el aula.

Antes de asistir a las clases, se entrevistó a cada profesor titular, donde se abordaron los siguientes tópicos, los cuales permitieron contextualizar el escenario en el que sería tratado el concepto de la Integral:

a) El tiempo que estima dedicar al tema.

b) Cómo abordará el concepto de la Integral: desde una perspectiva geométrica, algebraica, numérica o analítica.

c) Se le preguntó si en el abordaje de la Integral tiene pensado relacionarla con la Derivada, si es así en qué momento de su planeación lo hará.

d) Qué tipo de actividades tiene programadas para la apropiación del concepto.

e) Qué conocimientos previos (conceptos y habilidades) requiere que sus estudiantes posean antes de abordar el tema de la Integral.

f) Se le preguntó si contempla algunas estrategias para superar las dificultades que puedan manifestar los estudiantes, en caso de que no posean las estructuras necesarias para abordar el tema de la Integral.

g) Con la intención de contextualizar la cátedra del docente y del escenario se le preguntó acerca de las razones para abordar bajo tales estrategias en particular —las que él haya decidido— el tema de la Integral.

Los datos que proporcionaron los profesores titulares fueron útiles para la investigación ya que permitieron valorar la pertinencia de los instrumentos (principalmente las actividades que desarrollaría el estudiante) y fue necesario realizar algunas modificaciones a éstos, además se revisaron nuevamente los niveles de construcción del esquema inicial para la Integral. Sin embargo, por razones ajenas a la investigación, se decidió no trabajar con los grupos de Cálculo Integral y solamente se trabajó con el grupo de Mecánica Clásica.

En un apartado previo se explicó la razón por la que se decidió descartar el grupo de Informática. Se mencionó que no se logró coincidir con los estudiantes, no se percibió disposición por parte de estos para participar en la investigación, a pesar de que el profesor titular se mostró en todo momento accesible y alentó la participación de los estudiantes y en todo momento proporcionó información valiosa para la investigación.

El grupo de Calculo Integral de Electrónica estaba conformado también por estudiantes de diferentes carreras, algunos repetían el curso y otros lo llevan por primera vez. Sin embargo, en el momento en que se gestionó trabajar con ellos, todavía no se había asignado un profesor titular que los atendiera. En la cuarta semana de haber iniciado el periodo escolar, se presentó el maestro y para recuperar tiempo éste debió trabajar con su grupo a un ritmo forzado y acelerado, lo que impidió que se pudiera trabajar con él y con sus estudiantes.

Una vez delimitado el número de estudiantes, el profesor titular del curso de Mecánica Clásica y la observadora platicaron con los estudiantes contemplados, a quienes se les planteó el esquema de la investigación y se puntualizaron cuáles serían sus actividades dentro de este trabajo. Los estudiantes aceptaron con entusiasmo, ya que con ello visualizaron la posibilidad de aprender algo nuevo y útil para su formación.

Como se comentó en párrafos anteriores, en todo momento se cuidó el aspecto emocional de los sujetos dada la naturaleza de la investigación, debido a que se explorarían las acciones que realiza un sujeto al resolver un problema matemático, lo cual lo coloca vulnerable en un escenario en el que podría enfrentarse con algunas dificultades conceptuales que posea. Por esto, fue de suma importancia que en todo momento se ofrecieran palabras alentadoras y motivantes.

Además, se hizo saber a los participantes que se respetaría el anonimato de todos al asignar códigos de representación con fines explicativos propios de la investigación, por ejemplo: *profesores:* M_1, M_2*…, estudiantes:* S_1, S_2..., además, se les comunicó que, una vez redactadas las observaciones de cada participante, se le pedirá a cada uno, que lea el reporte de su participación y se solicitará su autorización para la publicación o para revisar cualquier aclaración que requiera.

3.4.3 Criterios de selección de las unidades de observación.

En los estudios cualitativos la selección de los casos (esto es, como unidades de observación o sujetos) no es representativa de una población, su función no es generalizar los resultados de un estudio, de una población, lo que se busca es la indagación cualitativa en profundidad, “el principal factor es que los casos (como unidades de observación o análisis) nos proporcionen un sentido de comprensión profunda del ambiente y el problema de investigación” Hernández et al. (2010, p. 395).

Gundermann (2001) menciona que en investigación cualitativa “el método de generalización es la generalización analítica en el cual una teoría elaborada previamente o un modelo explicativo que se desarrolla progresivamente en el curso de la investigación se emplean como una plantilla o red conceptual con que se comparan los resultados empíricos del caso” (p. 270). Cuando se analizan varios casos o unidades de análisis se extraen conclusiones del fenómeno estudiado y los nexos entre características, elementos o dimensiones de los casos estudiados. La generalización se fundamenta entonces sólo en la inferencia lógica.

Entonces, lo que se pretende al estudiar en profundidad a los sujetos seleccionados es entender y dimensionar el problema de investigación desde su contexto, así como dar respuestas a los cuestionamientos que éste generó en la presente investigación. No se pretende generalizar cómo todos los seres humanos se apropian de un concepto matemático, sino a partir de los resultados que el estudio arroje, generar propuestas, (las cuales deberán ser sometidas a una investigación posterior, no contemplada en la tesis) que orienten al maestro de matemáticas en la generación de escenarios de aprendizaje fértiles para la apropiación del concepto matemático en cuestión.

Los criterios que subyacen en la elección de los sujetos están principalmente fundados en el objetivo de la investigación, así que teniendo claro esto, y el problema de la investigación, Inhelder et al. (1996) y Duckworth (2005), proponen que para seleccionar las unidades de análisis (sujetos) deben tenerse en cuenta varios aspectos: que posean características que cubran las expectativas de la investigación, tener presente el tiempo, accesibilidad a la información y los espacios físicos o escenarios en los que se realizará la investigación. Entonces, el procedimiento que guió la selección de las seis unidades de análisis o sujetos fue la siguiente:

I. Se eligió el grupo de Mecánica Clásica que toma sus clases de 8:00 a 9:00, por dos razones: la primera porque en este curso se aborda la cinemática, rama de la Física que resuelve problemas en los que está inmerso el concepto de la Integral desde registros de representación geométrica. Además, en ese momento solo se ofertaron dos grupos y el profesor titular fue el mismo para ambos.

II. Se observó a los alumnos durante dos semanas previas al abordaje del tema de interés. En este tiempo el profesor titular realizó actividades en las que cada estudiante debía exponer un tema de la unidad en curso. Lo anterior fue benéfico para la investigación, ya que se pudieron observar algunas cualidades académicas, actitudinales y de desenvolvimiento de los estudiantes. En este momento se seleccionaron 12 estudiantes, quienes tentativamente podrían colaborar en el estudio.

Para corroborar esta elección, cuando el profesor titular aplicó el examen correspondiente a la primera unidad de aprendizaje del curso, se revisaron los exámenes y se registró la cantidad de aciertos, y posteriormente se generó una lista con los nombres de los individuos, misma que se ordenó en forma descendente respecto a la cantidad de aciertos que cada uno adquirió.

III. De los doce sujetos se seleccionaron seis: los dos estudiantes que encabezaban la lista, los dos intermedios y los dos últimos, con la intención de diversificar las cualidades académicas de los sujetos investigados, para que fuera posible la confrontación, lo cual se considera valioso para la presente investigación. Además, se seleccionaron dos estudiantes más quienes cursan por segunda ocasión Mecánica Clásica y por primera vez Cálculo Integral, lo que diversificó aún más las cualidades académicas de los estudiantes.

IV. Una vez seleccionados los estudiantes (aun ellos no lo sabían) se observó su desempeño durante el transcurso de la segunda unidad de aprendizaje, que correspondió al tema de Cinemática la cual duró aproximadamente de 4 a 5 semanas. Este tiempo fue enriquecedor para la investigación ya que se logró un acercamiento con todos los estudiantes del curso (incluyendo a los seleccionados) y esto favoreció la comunicación posterior entre ellos (y con ellos). Cuando finalizó el tema de cinemática se platicó con los estudiantes seleccionados, quienes aceptaron participar en la investigación.

3.4.4 Recolección de datos.

Una vez finalizada la observación (no participante) en el aula, se recabaron suficientes elementos para describir el contexto de la investigación y reestructurar los instrumentos de recolección de datos, lo cual requirió varias semanas. Esta reestructuración consistió en estandarizar la terminología usada por el profesor titular y la utilizada en los instrumentos, ubicar y contextualizar los problemas en el campo de la cinemática, rediseñar algunos problemas de acuerdo con los conocimientos previos que, según se detectó, poseen los estudiantes que serían entrevistados (estos conocimientos se percibieron cuando la observadora se integraba a los equipos de trabajo que organizaba el profesor titular, y escuchaba las discusiones entre los integrantes del equipo; algunas veces se le hicieron preguntas a los estudiantes que dieran luz de esos conocimientos previos).

Se aplicaron tres técnicas para la recolección de datos: la entrevista en profundidad (la cual se llevó a cabo a partir de la solución de las actividades de cada alumno), la discusión por pares (observación) y la elaboración de una historieta. La sistematización fue la siguiente:

Una vez impresos los instrumentos, se citó a los estudiantes y se les pidió que resolvieran el primer bloque de actividades (integradas por situaciones matemáticas problema). A los dos días (así lo dispusieron los alumnos) resolvieron el segundo bloque y un día después el tercero. Posteriormente se revisaron las respuestas de cada estudiante y se procedió con las entrevistas.

a) Entrevista en profundidad: La entrevista se realizó a partir de las respuestas que los sujetos proporcionaron en cada situación matemática problema. La entrevista se encaminó a:

    - Explorar los procesos de resolución de las situaciones problema incluidos en cada bloque.
    - Explorar las acciones, objetos, procesos que desarrolla el estudiante, desde diferentes registros de representación, para la construcción del esquema mental de la Integral.

- Indagar sobre la coordinación entre diferentes esquemas mentales y la movilidad de las estructuras preexistentes para la solución de los problemas.
- Explorar e interpretar el nivel de comprensión del concepto que logra el sujeto, Tanto la discusión entre pares como la narración de la historieta contribuirán a este punto.

Permanentemente se observó, se videograbó y se registró en el diario de campo, con la intención de que, posteriormente, cuando se procesaran los datos, se enriqueciera la información obtenida de las entrevistas.

b) Una vez entrevistados los estudiantes, se formaron en parejas y se les asignaron tres situaciones matemáticas problema por resolver, de las cuales discutieron su solución. El criterio que se consideró para formar las parejas fue de acuerdo al desempeño académico de cada estudiante, lo cual fue establecido desde el inicio.

La valiosa información que se obtiene con esta técnica, es a lo largo del intercambio de ideas que provocó la discusión del problema. Se observaron las acciones y decisiones que ha tomado cada estudiante para el planteamiento y solución del problema. No se intervino, ni se evaluó su trabajo en equipo, sólo se focalizaron las aportaciones de cada sujeto y se observó la interacción de ambos con la intención de registrar algún dato que se hubiera pasado por alto en la entrevista y trabajo individual; del mismo modo, esta etapa sirvió para corroborar los datos ya obtenidos.

c) Se solicitó a cada participante que redactara una historieta, para lo cual debió considerar dos aspectos: detallar la explicación del concepto de la Integral, incluyendo ejemplos de problemas que se resuelven con el concepto, y considerar que sus lectores no conocen dicho concepto pero sí han estudiado a la Derivada, funciones y límites.

En el diagrama de la figura 25 se esquematizan las acciones que sintetizan la recogida de datos.

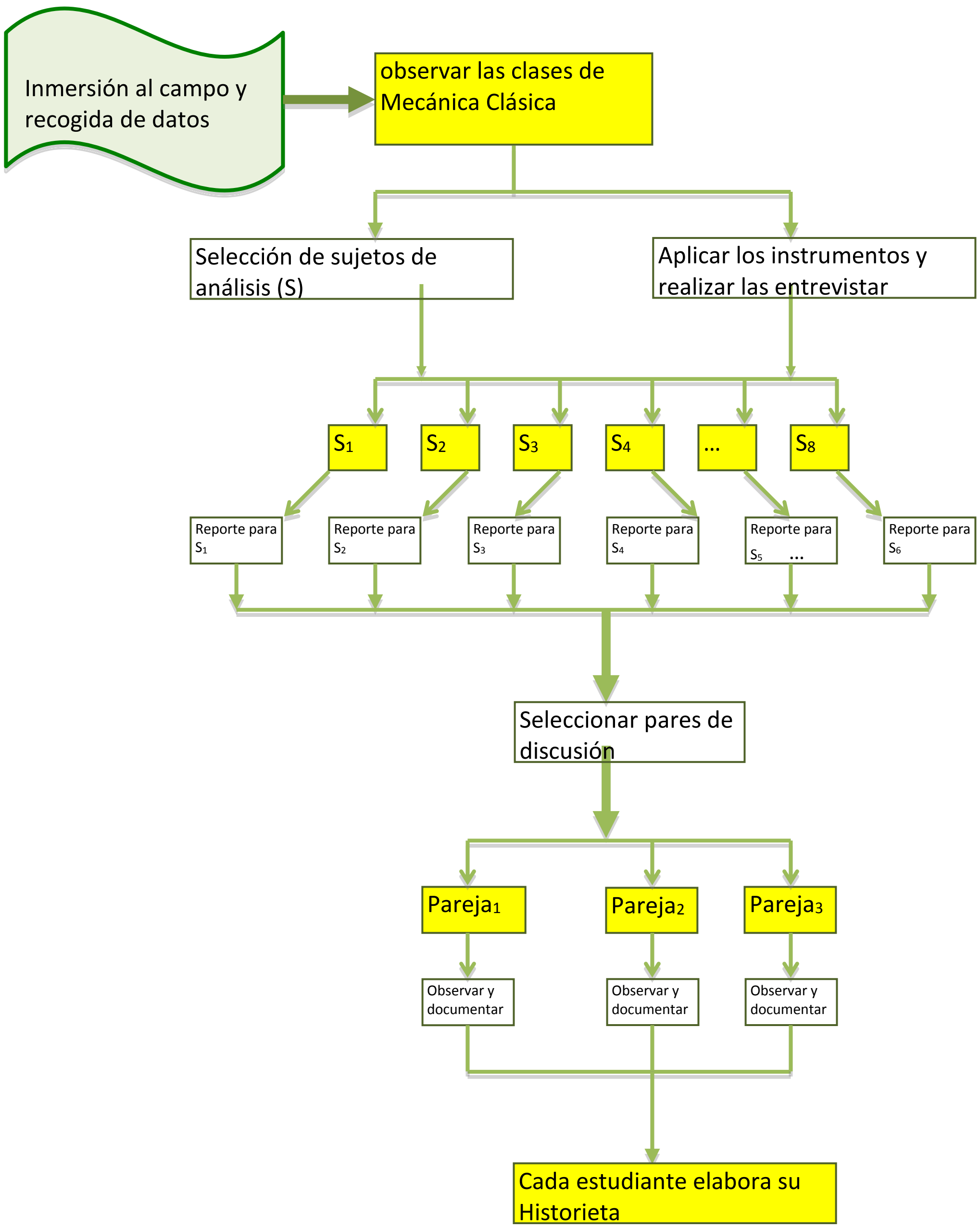


Figura 25. Inmersión al campo y recogida de datos.

2.4.5 Clasificación de los datos.

El punto de partida para la recolección de datos fueron ***las situaciones matemáticas problema***, las cuales se organizaron por bloque (I, II, III) y por nivel (Intra-, Inter- y

Trans-). Una vez resueltos los problemas para cada bloque, se revisaron exhaustivamente las soluciones de cada sujeto. Se centró la atención en los siguientes aspectos:

- las características de los esquemas previos que posee cada estudiante que aparece en escena en la solución de cada situación,
- las dificultades referentes a su conocimiento previo que enfrenta cuando resuelve las situaciones problema, y
- las decisiones por las que optó el estudiante para dar solución a cada reactivo.

A partir de las soluciones de los sujetos se realizó la entrevista con cada uno, para indagar sobre sus construcciones. Se profundizó en los siguientes aspectos:

- El significado que da el alumno a las variables que están en juego dentro de cada situación, y cómo las relaciona con el comportamiento de la gráfica. Esto con la intención de dimensionar la interpretación que el sujeto tiene sobre el contexto del problema, y entender los significados que otorga a las gráficas que construye.
- Reflexiones del sujeto sobre el comportamiento de las variables en valores tales como 0.1, 0.001, 2.00001, 3.55, etc. Esto tuvo doble intención, la primera era indagar sobre los procesos de acumulación de áreas que manifiesta el sujeto en valores fraccionarios, esto es, interpretar si logra construir la idea de acumulación de área más allá de los números enteros que se indican en las instrucciones.

  Por otro lado, se indagó si el estudiante es capaz de entender el proceso de acumulación de área como un proceso infinito al recurrir a los infinitesimales; se exploró también si es capaz de visualizar una gráfica continua y no sólo en apariencia discretizada. Para ello fue necesario explorar si el sujeto comprende la idea de que en un intervalo existe una cantidad infinita de números.

- Cuestionamientos en diferentes puntos de las gráficas de velocidad, posición, velocidad de enfriamiento y temperatura, con la intención de interpretar cómo el sujeto relaciona las gráficas de la Derivada con la función primitiva.
- Diferencias y similitudes entre las gráficas que registra la calculadora graficadora, mediante el sensor de movimiento (y el de temperatura) con la gráfica que obtiene el estudiante. Esto con la intención de conocer los argumentos del estudiante sobre estas similitudes y/o diferencias.

- Cuestionamientos en diferentes puntos de las gráficas de temperatura, y cómo se refleja o interpreta esto en la gráfica de velocidad de enfriamiento (igual para las gráficas velocidad y posición), con la intención de observar si el estudiante logró reversibilidad en sus procesos.
- Análisis del movimiento del objeto tal como aparece en la videograbación, y de su relación con la gráfica de posición que construye el sujeto. Esto para indagar si el sujeto, inmerso en la situación problema que vivió, logró relacionar e interpretar tal y como fue el movimiento con la gráfica que construyó.
- Cuestionar en puntos de la gráficas dónde la velocidad es cero, negativa, positiva, dónde crece, dónde decrece, etc., y esto cómo se refleja o interpreta en la gráfica de posición.

Como se mencionó, las actividades que realizó cada estudiante fueron categorizadas en bloques y éstos, a su vez, en niveles de construcción, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4

Clasificación de los datos

Bloque I			Bloque II			Bloque III		
Actividad 1.1	Actividad 1.2	Actividad 1.3	Actividad 2.1	Actividad 2.2	Actividad 2.3	Actividad 3.1	Actividad 3.2	Actividad 3.3
Intra-	Inter-	Trans-	Intra-	Inter-	Trans-	Intra-	Inter-	Trans-

En la tabla 4, se observa que las actividades que realizaron los estudiantes se organizaron en tres bloques y en cada uno se clasificaron de acuerdo a los niveles *Intra-*, *Inter-*, *Trans-*. El motivo principal por el que se desarrollaron tres bloques fue acercar al sujeto al objeto matemático desde diferentes perspectivas geométricas y contextuales. Como se mencionó en los tres bloques aparecen los niveles de construcción que se definieron para el esquema pero ¿por qué? la razón de esta decisión radica en la forma en como fueron planteadas las *acciones* que se proponen para acercar al sujeto al objeto matemático *gráfica de la función primitiva*. En el bloque I se proponen en su mayoría, acciones para acumular áreas limitadas por curvas cuyo comportamiento es constante.

En el bloque II las acciones van enfocadas a acumular áreas limitadas por gráficas cuyo comportamiento no es constante y en el bloque III se proponen acciones para que el sujeto se acerque al objeto matemático a partir del análisis del comportamiento de gráficas, esto es, a partir de observar la relación geométrica entre la gráfica de la Derivada y su primitiva. Entonces bajo éste panorama las actividades propuestas para los niveles *Inter*- y *Trans*- de cada bloque dan continuidad a sus respectivas acciones.

Las actividades para cada bloque, mencionadas en la tabla 4, se desglosan en los Anexos A, B y C, respectivamente. La justificación de *por qué* se diseñó así cada actividad y las pretensiones de las mismas se explica a continuación.

BLOQUE I

Actividad 1.1

Con esta actividad observó cómo el estudiante construye una gráfica a partir de la suma de áreas. Lo interesante de ésta es que, a partir de la solución de los problemas, se puedo indagar cómo el estudiante extrae información de un fenómeno cotidiano a partir de registros geométricos. La actividad fue diseñada para que el estudiante siga instrucciones, sin embargo, se valoraron las decisiones que con autonomía manifestaba en la solución del problema, sus aportaciones y discernimientos. Respecto al concepto de la Integral, se indagó sobre los significados que para el sujeto tiene la asociación de acumulación de áreas con las ordenadas de una gráfica y cómo logró esos significados a partir de sus construcciones mentales previas.

Actividad 1.2

Con la actividad 1.2 se observó cómo el sujeto extrae (o no) información del objeto área acumulada; además se indagó si logró interiorizar procesos para luego encapsularlos y desencapsularlos para la obtención de la gráfica de la Integral a partir de la acumulación de áreas. También se observó cómo logra (o no logra, en todo caso) activar procesos de reversibilidad e interiorización. Sobre el concepto, se indagó acerca de cómo el estudiante coordina diferentes esquemas, ya sea desde representaciones geométricas, analíticas o numéricas para la obtención de la gráfica de la Integral (o función primitiva). Se describió cómo el sujeto coordinaba construcciones previas con la acumulación de áreas y la interpretación de la gráfica de la primitiva.

Actividad 1.3

Con esta actividad se observó cómo el sujeto generalizó procesos y cómo coordinó las construcciones que posee en la resolución de la situación problema planteada. Con esta actividad se indagó si el sujeto comprendió el significado de la Integral como la gráfica de una función primitiva a partir de su interpretación en la solución del problema.

BLOQUE II

Para el bloque I se diseñaron situaciones problema con la idea de indagar cómo el sujeto construye el concepto de la Integral a partir de registros geométricos desde la acumulación de áreas. En este bloque II la idea prevaleció, sólo que se diseñó con la intención de puntualizar algunos detalles conceptuales que pudieran ser obstáculo para continuar con la actividad que corresponde a la recuperación de la primitiva a partir de su derivada. A diferencia de las actividades del bloque I, en el presente se incluyeron el concepto de razones de cambio, velocidad media e instantánea.

Actividad 2.1

Esta situación problema se diseñó con doble intención, la primera proporcionar algo más de información al estudiante en la cual se puntualicen las construcciones que debió lograr en el bloque I, y la segunda observar sus inferencias respecto a la solución de problemas a partir de la acumulación de razones de cambio. Se esperaba que el sujeto imitara procesos que se indican en la solución de algunos problemas.

Actividad 2.2

Respecto a la parte cognitiva, se esperaba que la situación problema diera cuenta de cómo el estudiante, a partir de su conocimiento previo, encapsula la acumulación de razones de cambio y logra relacionarlas con áreas. Se esperó evidenciar cómo surgieron (o no) en el sujeto los procesos de reversibilidad y encapsulamiento.

Actividad 2.3

Esta actividad fue se indagó si el sujeto logró generalizaciones y qué esquemas mentales trajo a su mente para la solución de la situación problema. Además se observó cómo coordinó diferentes estructuras mentales.

BLOQUE III

La intención de diseñar éste bloque fue para indagar sobre la relación geométrica que establece el alumno entre razones de cambio y resultados acumulados. Se esperaba que, a partir de un análisis cualitativo, el estudiante relacionara la función "razones de cambio" y los resultados de la acumulación de éstas. Para ello se diseñaron situaciones problema que dieron cuenta de las construcciones mentales del sujeto para la comprensión de tal relación y enfaticen sobre la construcción de una función primitiva a partir de su función derivada, todo desde registros de representación geométricos.

Actividad 3.1

Al tratarse de actividades para un nivel de construcción *Intra-,* se observó que el estudiante imita procedimientos de acuerdo a la información que se le proporcionó para la recuperación de la gráfica de la función primitiva a partir de su Derivada. Se propuso que el sujeto analizara el crecimiento, decrecimiento, si es positiva, negativa, cero de una gráfica que representa a la Derivada y a partir de su comportamiento bosquejó una gráfica de sus primitivas.

Actividad 3.2

De acuerdo con Wenzelburger (1999) en el aprendizaje del concepto de la Integral intervienen dos aspectos complementarios: uno se refiere a la "acumulación gradual de los resultados de los cambios y a la interpretación de este proceso", y por otro lado "la información que se puede obtener del resultado acumulado" (p. 21). Partiendo de estas ideas, con la Actividad 3.2 se observaron los procesos de disertación del sujeto respecto a la relación geométrica entre la Derivada e Integral y además con esta actividad se pudo observar si el sujeto logró generalizar las acciones en procesos.

Actividad 3.3

Con esta actividad se indagó si los estudiantes lograron la construcción del esquema en un nivel Trans- cuando enfrentaron dos situaciones problema, en donde el punto en común de éstas es que debían recabar datos de cada situación que lo inducirán a tomar decisiones en el momento de resolver el problema. Para éstas debió utilizar un sensor de movimiento y uno de temperatura, y debió extraer datos reales y con ellos dar respuesta a una serie de preguntas.

Otro aspecto interesante de esta actividad es que para la solución de una situación, cada estudiante debió recurrir a procesos de integración y para la otra, debió decidir por el camino para la obtención de la Derivada (lo cual no se ha planteado en estos materiales). Se esperaba que cada sujeto lograra decidir cuál es la ruta adecuada para solucionar cada situación problema desde registros de representación geométricos.

2.4.6 Procesamiento de la información.

El procesamiento de la información se realizó en diferentes etapas:

Primera. Para cada sujeto se recolectaron los siguientes datos:

- el documento donde plasmó la solución de las situaciones de cada bloque,
- la entrevista (audio y videograbada y transcrita),
- la interacción por pares (audiograbación, videograbación y transcrita), y
- la historieta (impresa).

Segunda. Se realizaron las transcripciones de cada entrevista, lo cual permitió un mayor acercamiento a los procesos y argumentos expuestos por cada sujeto sobre la resolución de las situaciones problema.

Tercera. Para cada sujeto, nuevamente se revisó la solución de las situaciones problema por bloque; luego se observó el video de la entrevista correspondiente una y otra vez hasta que se logró describir los hallazgos, los cuales se organizaron de acuerdo a las construcciones del sujeto dentro de cada categoría establecida previamente. En el reporte se trianguló la información recabada de la historieta y de las aportaciones de cada sujeto en la interacción por pares.

Cuarta. Los datos recabados en los puntos anteriores de este apartado se compararon con cada sujeto de acuerdo al procedimiento que se indica en el diagrama de la figura 26. Esta comparación fue organizada en formato de tablas (se muestran en el capítulo de resultados), en las que se representan los esquemas previos a los que recurre el sujeto, los conflictos que enfrentan en el desarrollo de las actividades, así como los logros de cada uno cuando finalizaron las actividades asignadas. En los capítulos siguientes se detallan los resultados y la discusión de las diferencias y similitudes de las construcciones observadas en los sujetos.

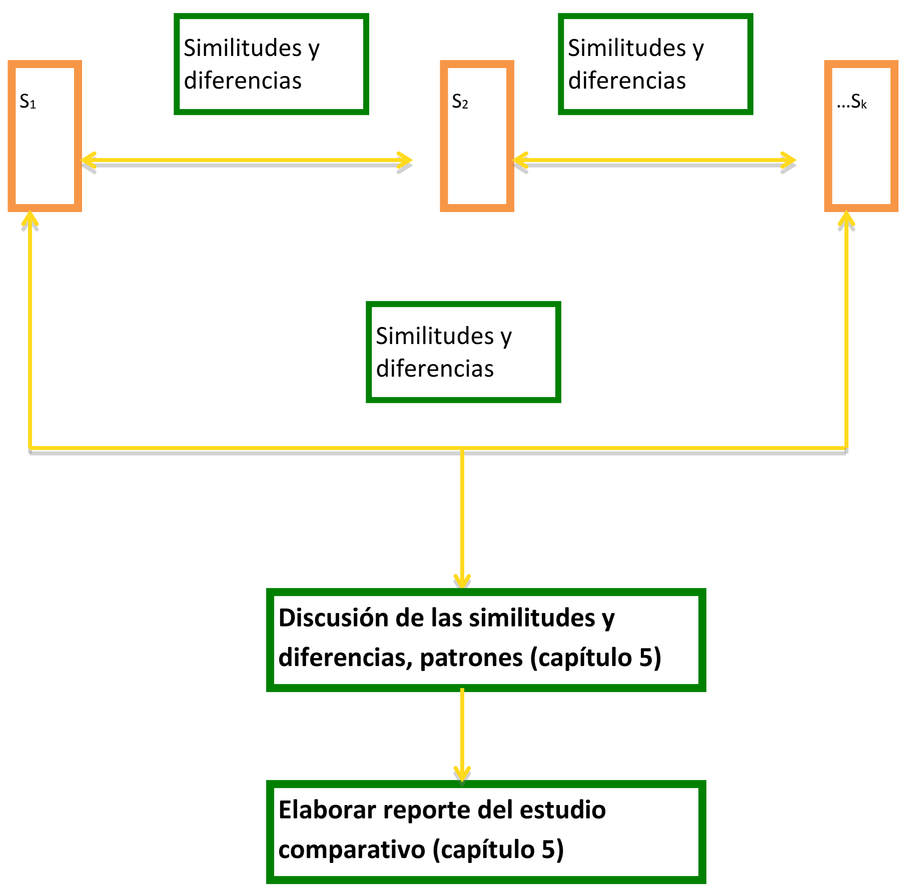


Figura 26. Secuencia para el análisis y discusión de los datos recabados.

4 Resultados

Rodríguez et al. (1999), mencionan que el análisis de los datos es la tarea fundamental en el proceso de investigación, ya que es el medio por el cual se puede acceder a las conclusiones de ésta. En este apartado se muestran de una manera sucinta los resultados de la investigación, y se describe cómo se realizó el registro e interpretación de los datos así como la validez de los mismos.

El capítulo se organizó en cuatro secciones, en las dos primeras se describen, respectivamente, las construcciones de dos sujetos, quien se considera logró mayores construcciones (S_2) y el que logró menos (S_5). En la tercer sección se retoman los datos de las tablas 10 a la 16 y se muestran un análisis comparativo entre los sujetos S_5 y S_2 por tratarse de los casos antagónicos en la investigación ya que se consideró que de los seis sujetos S_2 es quien mayores construcciones logró y S_5 es quien construyó menos.

Se destaca que los dos estudiantes lograron un acercamiento al concepto de la Integral, pero no en el mismo nivel de apropiación. Por ejemplo S_5, a diferencia de S_2, lo logró, pero en limitadas situaciones problema y no de manera autónoma, lo hizo siempre y cuando se le sugiera resolver un problema por acumulación de áreas y sólo le es posible en figuras acotadas por gráficas lineales. Por otro lado, no logró obtener la primitiva de una función a partir del análisis de gráficas, aun si se le sugería.

En esta sección también se muestra un análisis comparativo entre los sujetos que logran mayores construcciones (S_2 y S_3) así como los que se considera que logran menos construcciones (S_5 y S_6). Se cierra esta sección con el análisis comparativo entre los seis sujetos. En la sección cuatro se muestra los elementos que fueron considerados para validar la investigación.

En el transcurso de la descripción de las construcciones de los sujetos, se consideró pertinente mostrar algunos fragmentos de entrevistas. Cabe aclarar que, en atención al lector, hubo la necesidad de matizar algunas de éstas para agilizar la fluidez de su lectura. Dicho matiz consistió, principalmente, en eliminar muletillas y demás imperfecciones que trajo el lenguaje oral, dado el nerviosismo de los sujetos por estar siendo grabados. Sin embargo, si el lector está interesado en la versión original de estas conversaciones, se le puede proporcionar en formato de audio/video.

Recapitulando, como se ha mencionado en el transcurso del documento, el objeto de estudio de la investigación consistió en describir cómo un sujeto universitario construye el esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral. Para ello se definieron los niveles *Intra*-, *Inter*- y *Trans*- por los que transita cada sujeto para lograr tal apropiación. Se mencionó también que se contó con el apoyo de seis estudiantes de la carrera de Ingeniería Electrónica, los cuales realizaron una serie de actividades que dieron cuenta de sus construcciones. Entonces, con la intención de explicar las construcciones de los participantes se elaboró, para cada sujeto, un diagrama similar al de la figura 27, el cual fue desmembrado y explicado por partes. Esta información se encuentra en los anexos de acuerdo a la tabla 5.

Tabla 5

Relación de anexos y sujetos

Sujeto	**Anexo**
S_2	E
S_5	F
S_1	G
S_3	H
S_4	I
S_6	J

Retomando la idea del diagrama, las plataformas superiores representan los niveles de construcción y la plataforma inferior representa las estructuras mentales actuales que aparecen en escena cuando el sujeto realiza las actividades establecidas. En los óvalos se representan los esquemas y las conexiones que se establecen entre éstos en cada nivel de construcción. Para explicar sus partes se analizaron las construcciones de cada sujeto en los distintos niveles (*Intra*-, *Inter*- y *Trans*-) y cómo se transita de un nivel a otro.

En el análisis de los nivel se destacan los conocimientos previos a los que recurre el sujeto para realizar las acciones sobre determinados objetos matemáticos, y se describe cómo internaliza procesos y cómo los encapsula en nuevos objetos matemáticos para posteriormente aplicarlos a otros esquemas; además en esta interacción de acciones, procesos y objetos se describe la acomodación que surge entre los esquemas actuales del sujeto y los nuevos.

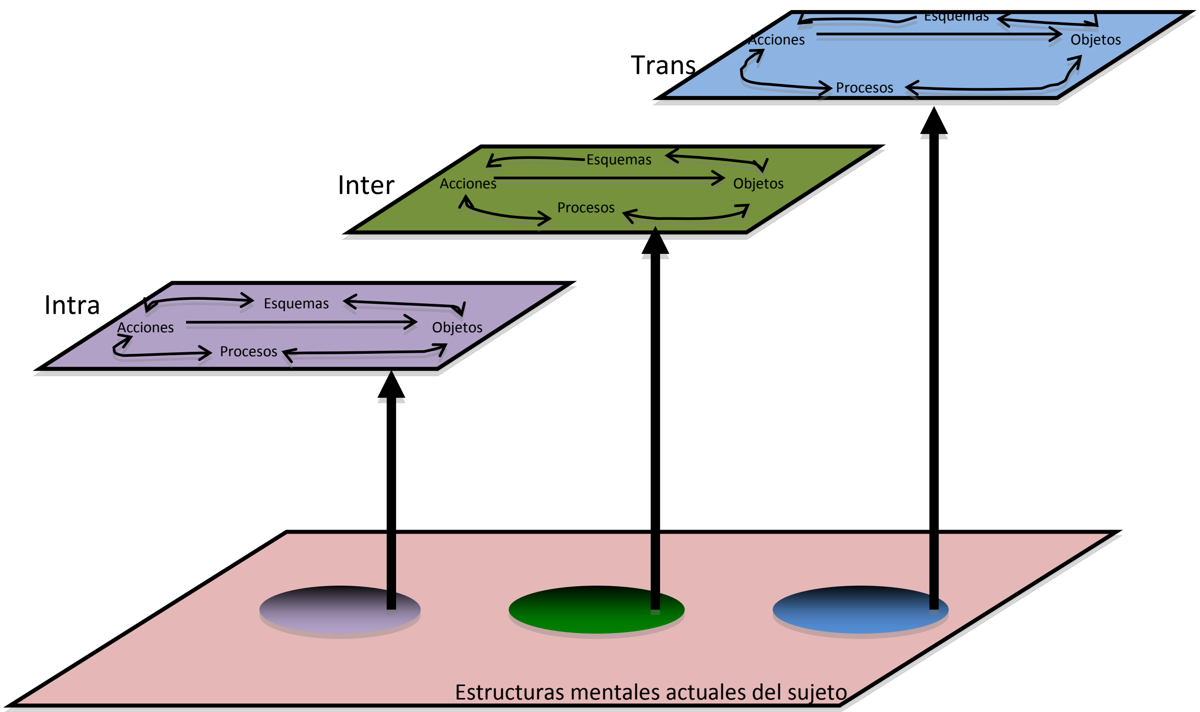


Figura 27. Diagrama para representar las construcciones de un sujeto.

4.1 Construcciones del estudiante S_2

Para dimensionar la pertinencia del diagrama de la figura 27, a continuación se muestra el que se elaboró para explicar las construcciones del sujeto S_2, quien se considera que logró mejores resultados. El diagrama de la figura 28 es producto de analizar los mecanismos que evidenció S_2 en la construcción del esquema. Se muestra en forma generalizada la idea de la evolución del esquema mental del sujeto para la comprensión del concepto de la Integral y, como se mencionó, se evidencia dónde se ubican los esquemas que movilizó en sus construcciones.

En el transcurso del texto se realiza la explicación detallada de cada parte del diagrama, esto inicia con la descripción de las construcciones que se observan en cada nivel, procesos de equilibración, coordinación de diversos esquemas y las abstracciones que esto implica; se finaliza con la explicación sobre las relaciones que el sujeto establece entre cada nivel de construcción.

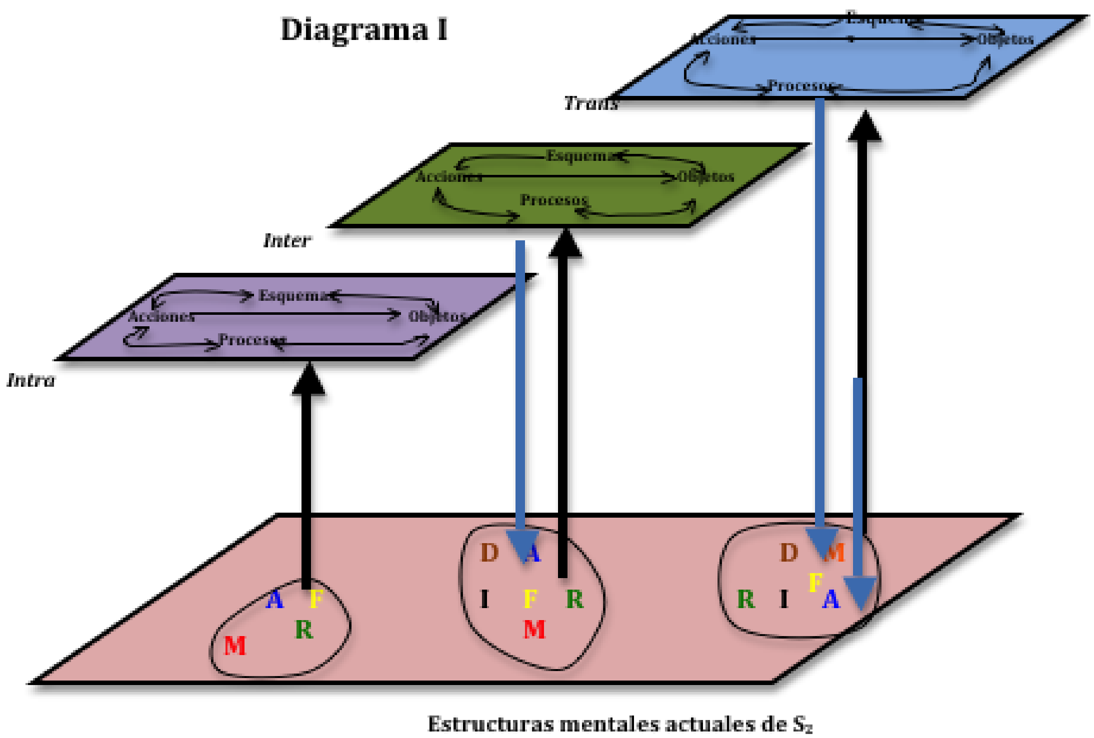


Figura 28. Diagrama para representar las construcciones del sujeto S_2.

Por el momento, se puede mencionar que en la plataforma inferior del diagrama, se muestra de manera general el campo de conocimiento matemático al que pertenecen los esquemas que moviliza el sujeto en sus construcciones. Éstos son:

A: Esquemas relacionados con el campo de Áreas de Figuras Geométricas

D: Esquemas relacionados con el campo de la Derivada

F: Esquemas relacionados con el campo de las Funciones

I: Esquemas relacionados con el campo de la Integral

M: Esquemas relacionados con el campo de la cinemática

R: Esquemas que pertenecen al campo de los números reales.

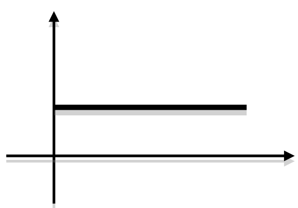
La explicación para cada nivel de construcción *Intra*-, *Inter*- y *Trans*- se realizó de acuerdo a las propuestas de la teoría APOE, referentes a la construcción de un esquema, ya que en la investigación se observó que en el nivel *Intra*- (aunque se consideran las etapas tempranas del esquema mental para la Integral) el sujeto lo que construye es un esquema mental, un tanto débil, de acuerdo a las pretensiones para el concepto, pero se trata de un esquema al fin. La teoría APOE favorece la explicación de tales construcciones ya, que con sus propuestas permite al investigador observar las *acciones* que realiza el sujeto sobre objetos matemáticos y si éstas son encapsuladas en *procesos*; además, permite observar el tipo de abstracción que se desencadena en estas construcciones y los esquemas que moviliza el sujeto.

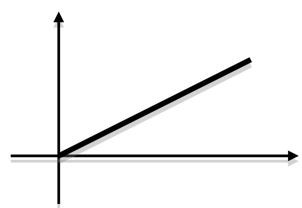
De acuerdo con la propuesta APOE, un objeto matemático es construido a partir de las acciones que el sujeto realiza sobre otros objetos. En el diagrama de la figura 11 (del marco teórico), se muestra cómo progresa tal mecanismo; sin embargo, en esta interacción sujeto-objeto, en la mente del sujeto se desencadena una serie de abstracciones que dan lugar a la construcción de estructuras, entonces se entiende que detrás de los objetos matemáticos hay un andamiaje mental que le permite al sujeto tener ciertos niveles de comprensión de un objeto o concepto matemático. Esto es precisamente lo que se pretende a continuación, explicar los mecanismos que conducen a las construcciones de S_2; para ello, es necesario entender primero los objetos matemáticos (y su nivel de construcción) que S_2 coordina con y hacia las nuevas construcciones.

En el diagrama de la figura 28 se pueden apreciar, mediante las flechas, las conexiones que se surgen entre los esquemas actuales del sujeto (representados en la plataforma inferior) con los niveles Intra-, Inter- y Trans-. Esto representa la existencia de abstracciones reflexivas que se generan cuando el sujeto sufre desequilibrio en su estructura mental actual al enfrentar nueva información. Sin embargo, ¿Cómo surgen tales abstracciones en las construcciones de S_2? ¿Cómo vincula el sujeto esos conocimientos previos con la nueva información? Esta pregunta se responderá al desmembrar dicho diagrama y explicar, puntualmente, lo que se observó en cada nivel de construcción.

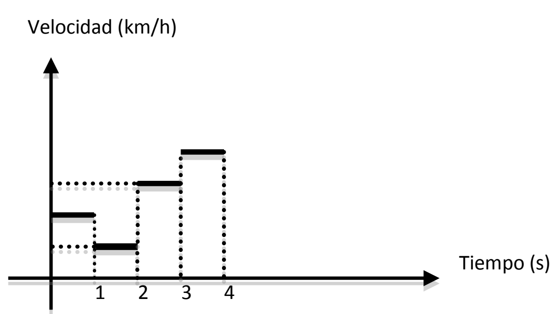
Para empezar con la descripción de las construcciones de S_2 se proponen *acciones*, que el sujeto realizará sobre objetos; en este caso se trata de objetos matemáticos. En la investigación se proponen tres:

Acción 1: Se proporcionan instrucciones que guían al sujeto a acumular áreas limitadas por el eje horizontal del plano R^2 y rectas, de la forma que a continuación se muestra, y se le indica que represente geométricamente los resultados de tal acumulación.





Acción 2: Se le dan indicaciones al sujeto para que acumule áreas y las represente geométricamente, las áreas que acumula están limitadas por gráficas que no representan un comportamiento lineal, ejemplo:



Acción 3: Esta acción consistió en proporcionar al sujeto instrucciones para que obtenga la gráfica de la primitiva a partir de analizar el comportamiento de la gráfica de la derivada, considerando los siguientes elementos:

Si la curva que representa a la función "razones de cambio" es:	***Está situada***	***Entonces la función integrada***
positiva	encima del eje horizontal	es creciente
cero (se anula)	en el eje horizontal	es paralela al eje horizontal
negativa	por debajo del eje horizontal	es decreciente

A partir de estas acciones que acercan al sujeto a diversos objetos matemáticos, y de observar cómo era encaminado a la construcción del esquema para la comprensión de la Integral, se observó lo siguiente:

NIVEL INTRA-:

En el diagrama de la figura 29 se muestran las construcciones del sujeto que surgen en el nivel *Intra-*. Éste se ubicaría en la primera de las plataformas superiores del diagrama de la figura 28, en donde aparece de manera generalizada el ciclo que propone la teoría APOE. Sin embargo, el diagrama de la figura 29 detalla qué elementos de este ciclo aparecen en las construcciones de S_2 y a cuáles esquemas recurre de manera específica para sus construcciones.

A continuación se detalla cómo inicia el sujeto sus construcciones. Se observan en la figura 29 dos caminos para llegar al objeto matemático *gráfica de la función primitiva*, esto representa los dos enfoques que se estudiaron para llegar al mismo concepto desde registros geométricos. La parte izquierda del diagrama representa la obtención de la gráfica de una primitiva mediante la acumulación de áreas y la parte derecha, al analizar el comportamiento de la Derivada.

El proceso de construcción inicia cuando S_2 realiza las acciones 1, 2 y 3 para manipular los objetos matemáticos definidos en la investigación como *acumulación de* *áreas* y *gráfica de una función*. Entonces, para que esto sea posible, como consecuencia del mecanismo de adaptación, en su mente se desencadena una serie de abstracciones, tanto de reflejamiento como de reflexión, ya que el sujeto recurrió a esquemas mentales previos, relacionados con el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos (A_1), operaciones de sumas, restas, multiplicación de números reales (R_1) y esquemas que le permiten ubicar coordenadas en el plano cartesiano (F_1), como se indica en la figura 29. Además, recurre a conceptos relacionados con la cinemática (velocidad, posición, aceleración). Se observó que aun tratándose de niveles de construcción Intra-, en donde el estudiante imita procesos o sigue instrucciones, reacomodó sus estructuras actuales, adaptándolas a la nueva información.

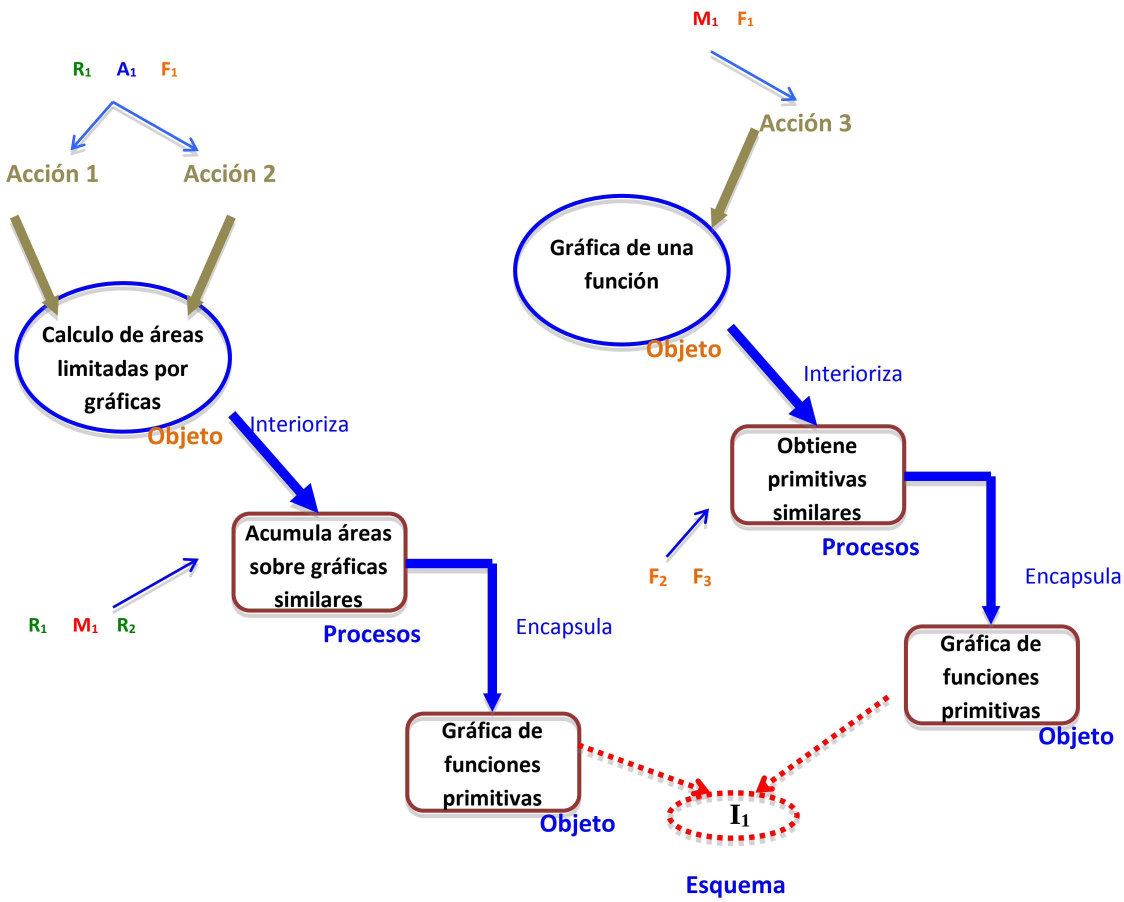


Figura 29.- Diagrama que representa las construcciones en el nivel

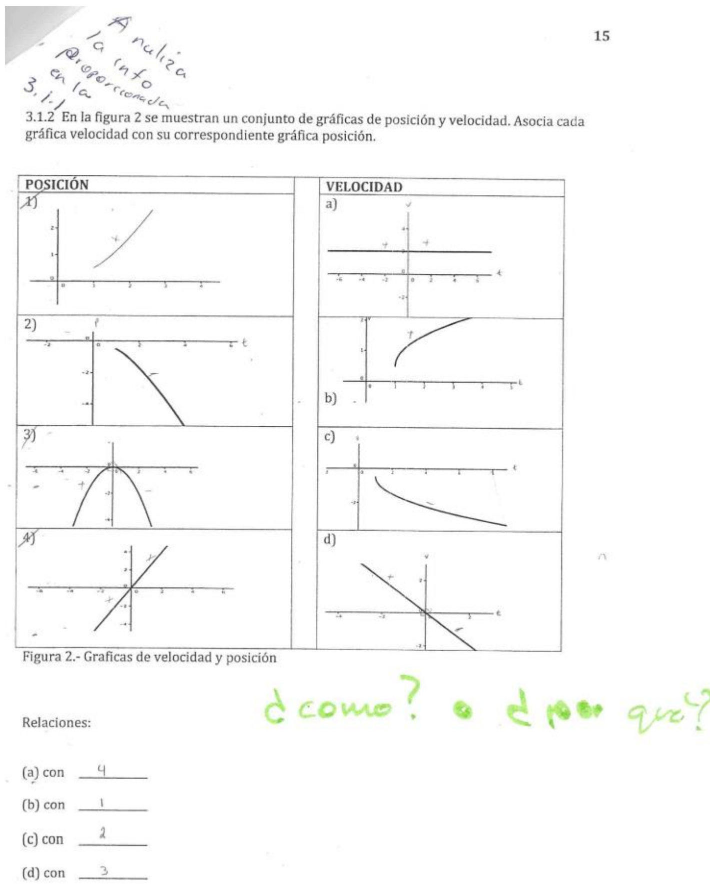
Intra- del sujeto S_2.

El sujeto interioriza las acciones en procesos que le permiten acumular áreas y los encapsula en objetos. Para ello trae a su mente esquemas relacionados con operaciones con los números reales (R_1) y esquemas relacionados con cantidades infinitesimales (R_2), en el proceso de interiorización el sujeto necesitó recurrir constantemente a esquemas relacionados con la cinemática, particularmente velocidad y posición (M_1) así como a esquemas que le permitieron localizar puntos en el plano cartesiano (F_1).

S$_2$, en ningún momento enfrentó dificultad para atender instrucciones e imitar procedimientos de solución. Prueba de ello es que, cuando se le solicitó que explicara los motivos que lo llevaron a asociar las gráficas de la tabla 6, correspondiente a la actividad 3.1.2, y que consistió en identificar la gráfica posición a partir de considerar el comportamiento de la gráfica velocidad de un partícula, lo hace correctamente, con argumentos válidos como se puede apreciar en el siguiente fragmento de entrevista[9].

Tabla 6

Actividad 3.1.2 correspondiente al bloque III.



15

Analiza la info proporcionada en la 3.1.1

3.1.2 En la figura 2 se muestran un conjunto de gráficas de posición y velocidad. Asocia cada gráfica velocidad con su correspondiente gráfica posición.

POSICIÓN	VELOCIDAD
1)	a)
2)	b)
3)	c)
4)	d)

Figura 2.- Graficas de velocidad y posición

¿como? o ¿por qué?

Relaciones:

(a) con 4

(b) con 1

(c) con 2

(d) con 3

[9] La transcripción original de la entrevista se encuentra en el anexo E.

E: …Si la velocidad es positiva la curva crece y si la velocidad es negativa la curva decrece ¿tú lo entendiste hasta este bloque o lo sabías desde antes?

S_2: No, eso ya lo había entendido; como el año pasado la clase que tomé, el maestro nos explicó que según era un niño que iba a la escuela y luego él tenía su velocidad constante, entonces él iba subiendo y después… este… que se le olvidó algo, se regresó y entonces no podía poner la velocidad, la puso abajo porque ya no estaba su… este… su… el eje de la x era su referencia y entonces ya no se estaba acercando a la escuela, se estaba alejando, porque se regresó. Entonces su velocidad era negativa pero el tiempo seguía transcurriendo,

E: Aquí tenemos a A con 4. A ver, A con 4, recta y recta. Ésta (Señala la gráfica A) está sobre el eje horizontal… es positiva, me imagino que por eso tienes estos signos aquí ¿verdad?

S_2: ¡Ah, si! Porque estaba arriba del eje x.

E: Y entonces, ¿cómo la relacionaste con ésta (señala la gráfica 4)?

S_2: Porque como era constante (piensa), o sea tiene que subir la constante. ¡Oh! Ya me acordé, porque la velocidad era 2 pero era en el tiempo 0. Entonces si son 2 km por 0 pues es 0, entonces por eso. En la otra… (piensa) ¡Ya me acordé! Ya me fijé más bien.

E: Perfecto y luego asociaste a B con 1, ¿1 y la B?,

S_2: Oh! porque eran positivas las 2 y estaban juntas sería, pero estaba curveado pero lo curveado no tenia mucho, no me fije pues tanto si estaba curveado o no, si estaba arriba de la x y si estaba subiendo y esta estaba debajo de la x y esta aunque hubiera estado arriba de la x pero estaba así, para abajo.

E: ¿y la 3 con D?

S_2: ah, esa! fue porque me sobró, ja ja ja (se rie), no, no se crea!, porque aquí éste (señala la gráfica D) está arriba de la x aunque está en la x negativa pero esta arriba, como la velocidad no importa que está en lo negativo o en lo positivo mientras esta arriba de x y aquí (señala la gráfica 3) como va subiendo pues es positivo y de ahí llega 0 llegan a 0 los dos y ésta (señala la gráfica D) ya está debajo de x y ésta (señala a la gráfica 3) ya empieza a bajar.

Se observa que sus respuestas no fueron azarosas. Éstas fueron el producto generado principalmente desde los esquemas mentales que posee y que fueron construidos un año antes de la entrevista y que van en sintonía con la información que se proporcionó en la actividad 3.1.1, que correspondió a la acción 3.

En el diagrama de la figura 29 se puede observar que el sujeto logra la obtención de la gráfica de la primitiva como un objeto matemático. Esto le permite resolver problemas para modelos similares, para curvas que pertenecen a la misma familia; sin embargo, se observa que es capaz de realizar la operación pero necesita recurrir a la idea que se le planteó para tal fin. Muestra cierta autonomía aun en sus procedimientos, pero todavía resuelve los problemas planteados por imitación, particularmente cuando acumuló áreas para obtener la gráfica de la primitiva. Otro punto interesante a rescatar es que al sujeto S_2 se le facilitó bosquejar la gráfica de la primitiva a partir de analizar el comportamiento de la gráfica de la Derivada.

La descripción de los esquemas a los que recurre, referidos en el diagrama II es la siguiente:

A_1: Posee construcciones sobre el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y cuadrados, y estimación de áreas de figuras cuando uno de los lados está delimitado por una curva.

R_1: Posee construcciones para operar con los números reales (suma, resta multiplicación), además, dentro del campo de los reales se destacan también construcciones que le permiten manipular y operar el concepto de intervalo cerrado, e interpreta sin dificultad los números enteros y fraccionarios que éste contiene y que son necesarios para comprender el trazo de la gráfica de la función primitiva como una función continua y no discretizada.

R_2: Posee construcciones que le permiten operar con sumatorias de cantidades infinitesimales y además, muestra habilidad para interpretar el concepto de infinito.

F_1: Posee construcciones que facilitan que ubique e interprete coordenadas en el plano cartesiano.

F_2: Posee construcciones suficientes para interpretar el comportamiento geométrico de una función, destacando elementos como: su sentido creciente, decreciente y constante de una gráfica, identifica cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o cero.

F_3: Posee construcciones suficientes que le permiten identificar las gráficas de funciones algebraicas como rectas (con pendiente igual o diferente de 0), parábolas y funciones cúbicas.

M_1: Posee construcciones mentales suficientes para entender y describir algunos conceptos implicados en el movimiento de una partícula, tales como velocidad, desplazamiento, distancia, aceleración, destacando la relación entre los conceptos velocidad y posición.

Como producto de las construcciones de este nivel se tiene:

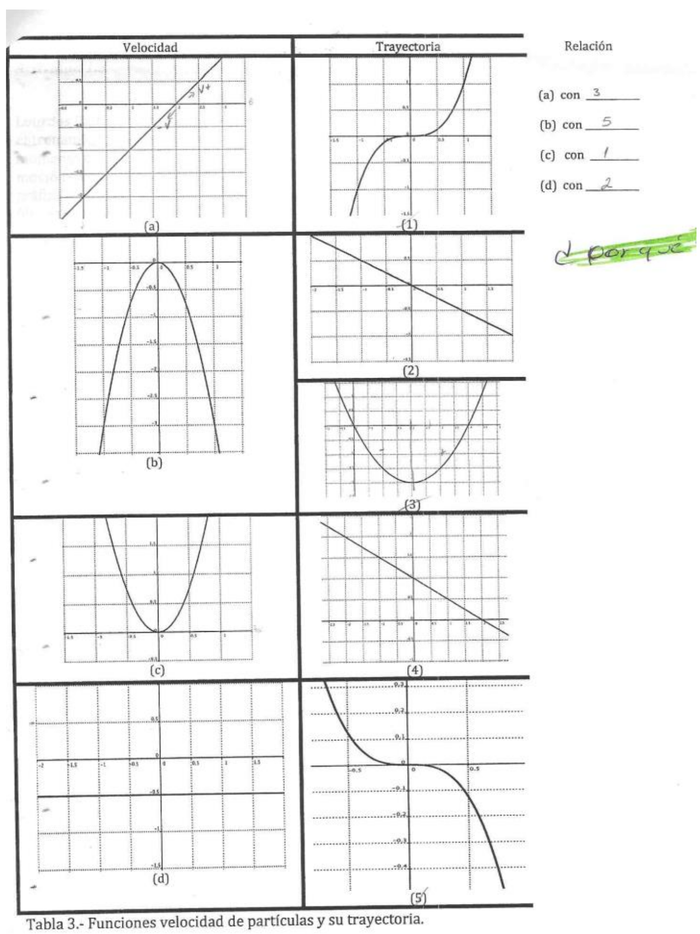
I_1: Las construcciones sobre acumulación de áreas de figuras limitadas por rectas, así como la obtención de la primitiva a partir de interpretar el comportamiento de otra gráfica (la Derivada), son suficientes para imitar procedimientos y aplicarlos en la solución de situaciones similares. Además, se tienen construcciones que le permiten, a partir de seguir instrucciones e imitar procedimientos, construir la gráfica de la primitiva a partir de interpretar geométricamente la gráfica que representa a la función Derivada.

NIVEL INTER-

El sujeto es capaz de encapsular y desencapsular procesos, y en los datos recolectados, hay evidencias suficientes para afirmar que S_2 logró la construcción del concepto de la Integral como un objeto matemático. Esto le permite graficar una función de diversas familias que tienen relación con la gráfica en la que se acumulan áreas; del mismo modo desde el comportamiento de la función Derivada, logra generalizar y evidencia procesos reversibles. En la actividad 1.2 se le solicitó que relacionara las columnas de la tabla 7 según correspondiera.

Tabla 7

Actividad 1.2 correspondiente al bloque I



El sujeto lo hizo correctamente. Se le pidió que explicara por qué relacionó de tal forma:

E: …¿Cómo asocias la trayectoria con su velocidad? La A con la 3, pero ¿por qué?

S_2: ¡Ah! Es que yo me acuerdo, cuando teníamos una gráfica de su trayectoria, la derivada iba a ser la velocidad y si estaba abajo de las x, su trayectoria iba a empezar a disminuir y como aquí (señala la gráfica) está del 0.2 hacia acá (señala la gráfica), está abajo del eje, entonces dije "es negativa" porque la inclinación es negativa; y aquí (señala la gráfica) ya empieza a subir, es cuando ya estaba arriba del eje de la x; pero en ésta (señala la gráfica dos) yo estaba todavía confundida.

En los bloques I y II, en las actividades no se mencionaron los términos Derivada e Integral, sin embargo, el sujeto dedujo por contexto. Esto es porque sabe que si se deriva una función que representa la posición de una partícula, se obtiene la gráfica que representa la velocidad de ésta (conceptos tratados previamente en el curso de Mecánica Clásica). Entonces logra entender que se trata de procesos inversos y que, dada la velocidad, ahora deberá encontrar la posición.

En el diagrama de la figura 30 se observan las acciones, procesos y objetos que se desencadenan en el nivel *Inter*. En este nivel de construcción se destacan, además de los logros del sujeto en el nivel Intra-, la recurrencia a esquemas más complejos, ya que logra identificar familias de curvas, y la aplicación de las acciones encomendadas a varios miembros de diferentes familias (F_3).

Se observan también construcciones que le permiten describir el comportamiento creciente, decreciente o estacionario de una curva (F_2), lo que le resulta útil para predecir el comportamiento de la primitiva. Las construcciones del nivel anterior, en los que sólo resuelve situaciones de características muy similares (I_1), son superadas, ya que logra internalizar las acciones en procesos más complejos a los del nivel precedente, los cuales son útiles para una cantidad más amplia de familias de curvas.

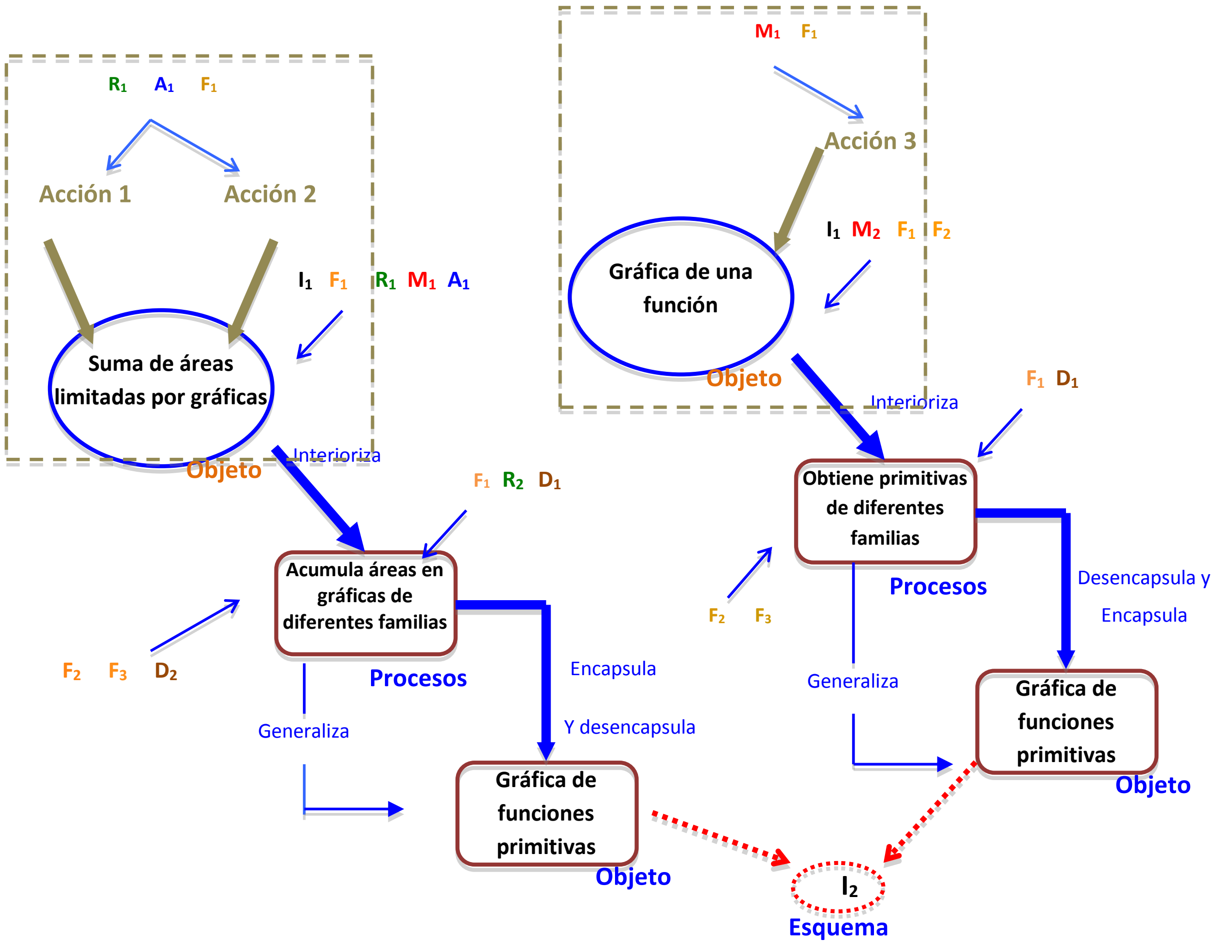


Figura 30. Diagrama que representa las construcciones en el nivel Inter-del sujeto S_2.

En donde:

D$_1$: Construcciones que le permiten entender la Derivada como una velocidad instantánea.

D$_2$: Construcciones que evidencian que el sujeto comprende el significado de la interpretación física de la de la Derivada.

M$_2$: Construcciones suficientes para entender e interpretar (sea en una gráfica o en una tabla) el significado de velocidad constante y velocidad variable y establecer diferencia entre ellas.

I$_1$: Construcciones sobre acumulación de áreas de figuras limitadas por rectas y curvas, suficientes para imitar procedimientos y aplicarlos en la solución de situaciones similares. Además construcciones que le permiten, a partir de seguir instrucciones e imitar procedimientos, construir la gráfica de la primitiva a partir de interpretar geométricamente la gráfica que representa a la función derivada.

A$_1$: Posee construcciones sobre el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y cuadrados, y estimación de áreas de figuras, cuando uno de los lados está delimitado por una curva.

R$_1$: Posee construcciones para operar con los números reales (suma, resta multiplicación),. Además, en el campo de los reales, se destacan también construcciones que le permiten manipular y operar el concepto de intervalo cerrado, e interpretar sin dificultad los números enteros y fraccionarios que éste contiene, y que son necesarios para comprender el trazo de la gráfica de la función primitiva, como una función continua y no discretizada.

R_2: Posee construcciones que le permiten operar con sumatorias de cantidades infinitesimales y además, muestra habilidad para interpretar el concepto de infinito.

F_1: Posee construcciones que facilitan que ubique e interprete coordenadas en el plano cartesiano.

F_2: Posee construcciones suficientes para interpretar el comportamiento geométrico de una función, destacando elementos como: el sentido creciente, decreciente y constante de una gráfica; identifica cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o cero.

M_1: Posee construcciones mentales suficientes para entender y describir algunos conceptos implicados en el movimiento de una partícula, tales como velocidad, desplazamiento, distancia, aceleración, destacando la relación entre los conceptos velocidad y posición.

Producto de las construcciones en este nivel:

I_2: Construcciones en un nivel operativo de la Integral como objeto matemático tratado desde representaciones geométricas. Esto se traduce en que el sujeto ha logrado consolidar en procesos que lo llevan a la obtención de la función primitiva a partir de la acumulación de áreas o de interpretaciones geométricas de la función derivada (si la gráfica es positiva, negativa o cero). El sujeto ha logrado generalizar esos procesos y sabe aplicarlos a situaciones similares, sin recibir instrucciones adicionales o con base en imitar procesos. Por eso, desde la teoría APOE se dice que ha logrado construir un objeto matemático.

En el diagrama de la figura 30 se puede observar que S_2 recurre a construcciones referentes a la interpretación física de la Derivada (D_2), y también como velocidad instantánea (D_1), lo cual le resulta útil para predecir el comportamiento de la primitiva, relacionando geométricamente la velocidad con la posición de un objeto. Con esto, logra procesos de reversibilidad, porque cuando comprueba el comportamiento de la primitiva lo hace refiriendo el comportamiento de la Derivada.

Cabe mencionar que aunque se adviertan pequeñas variaciones entre los diagramas de las figuras 29 y 30, sí hay diferencias radicales: en el nivel Inter, el sujeto logra generalizar los procesos que resultan útiles para analizar diferentes familias de curvas. Lo anterior no sucedió en el nivel Intra-, en el que logró interiorizar acciones en procesos, pero para analizar gráficas de funciones lineales. Además, en el nivel Inter-, sus construcciones son más profundas y se observa, un mayor nivel de dominio y complejidad de los esquemas a los que recurre.

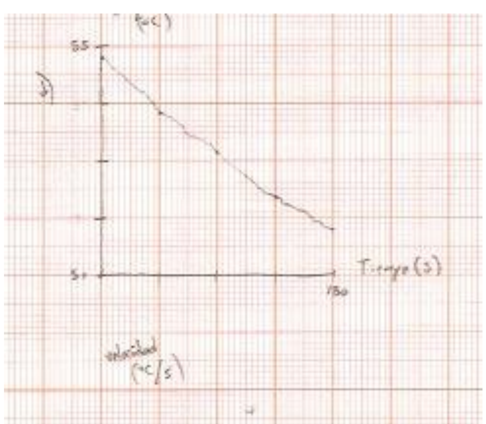
NIVEL TRANS-

Se considera que S_2 logró construcciones en un nivel *Trans*-, ya que logró coordinar el esquema de la Integral con otros en la solución de situaciones problema. Esto se evidencia cuando S_2 realiza las actividades con el sensor de movimiento y de temperatura (bloque III) y en el problema del tanque que es llenado con petróleo (bloque II): S_2 no necesitó instrucciones previas para identificar cuándo es apropiada la Integral en la resolución de problemas.

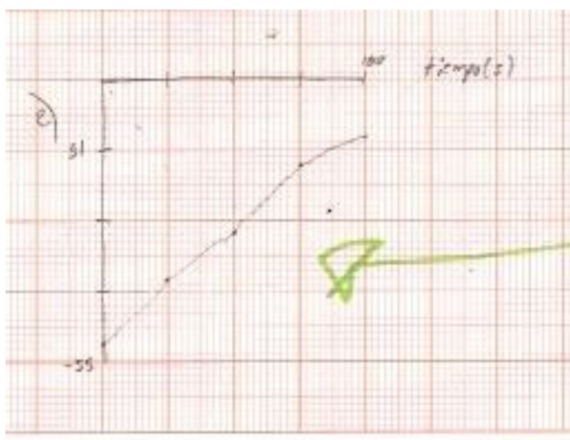
Por otro lado, sus aportaciones en el trabajo en pares se encaminaron a proponer a la Integral como mecanismo de solución. En su historieta S_2 explica el concepto de la Integral desde representaciones geométricas. Uno de los logros que se pueden destacar de S_2 al término del trabajo de campo, es que actualmente es capaz de interpretar geométricamente el comportamiento de la Derivada y su relación (o efecto) sobre la gráfica de la función primitiva, principalmente en aspectos de crecimiento y decrecimiento. De hecho, logró afinar su análisis geométrico con tal profundidad que ahora es capaz de interpretar el significado geométrico de los puntos máximos y mínimos relativos y de inflexión de una gráfica. Este tema, evidentemente está fuera de la investigación, pero es un dato que de alguna manera capta la atención de la misma.

Esto se destaca debido a que en el momento que se realizó el trabajo de campo, S_2 estudiaba en el curso de Cálculo Diferencial estos conceptos, y el sujeto sólo repetía procesos sin reflexión geométrica previa. Por esto es satisfactorio saber que con las situaciones propuestas en la investigación, S_2 logró dar significado a procedimientos geométricos, en lugar de los algorítmicos, para localizar extremos relativos de una función y además bosquejar su gráfica, y de este modo logró coordinar los esquemas de la Derivada y la Integral.

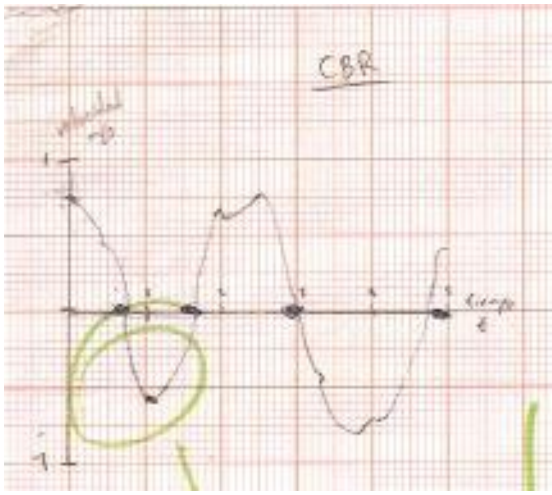
Una de las actividades que realizaron los sujetos, la 3.3, consistió en recolectar datos a partir de una situación real, en la cual debían de utilizar dos sensores, uno para registrar el movimiento de un objeto y el otro para medir las temperatura de un líquido en diferentes tiempos. En el primero, figura 31 b, el sujeto identificó la velocidad con la que se mueven un libro y un compañero. A partir de los datos obtenidos, debía describir la posición del objeto en diferentes tiempos, figura 31 c. En la otra, debía obtener la gráfica de las temperaturas del agua (figura 31 a) y, a partir de ésta, otra gráfica que describiera la velocidad con la que se enfría el agua (figura 31 b).

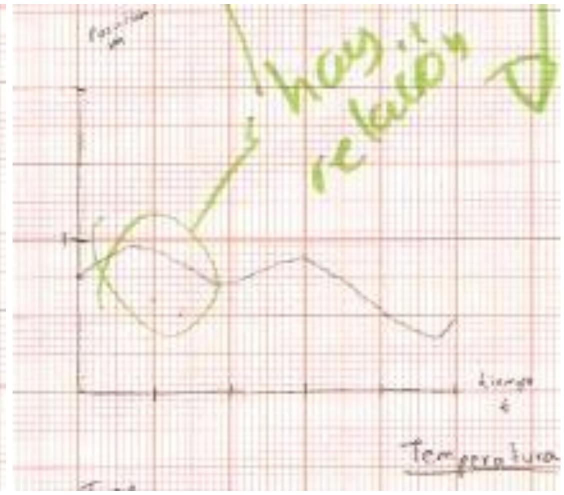


a) Gráfica temperatura-tiempo

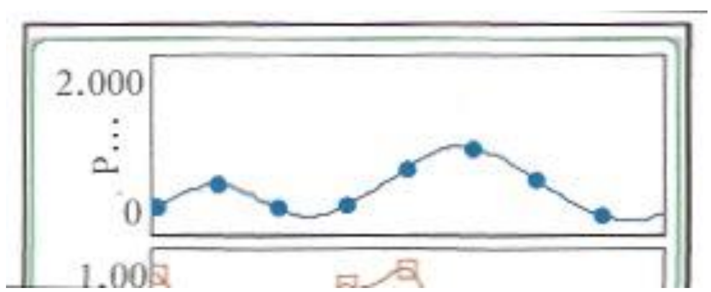


b)Gráfica Velocidad de enfriamiento-tiempo





c) Gráfica velocidad-tiempo (CBR) d) Gráfica posición-tiempo de S_2



e) Gráfica posición-tiempo del CBR

Figura 31. Respuesta a la actividad 3.3. que proporcionó el sujeto S_2.

Las gráficas solicitadas fueron registradas en una calculadora graficadora (TI-Nspire), pero el sujeto no las observó previamente. Una vez que el sujeto registró su respuesta, se le solicitó que comparara sus modelos con los que proporcionó la calculadora graficadora, y que argumentara las diferencias y similitudes que observaba. Justo sobre estas similitudes y diferencias fluyó la entrevista. Cabe mencionar que el sujeto tenía libertad para seleccionar libremente la ruta que lo llevara a la solución del problema y, evidentemente, optó por analizar el comportamiento de la Derivada en lugar de acumular áreas. Se le preguntó cómo obtuvo la gráfica de la velocidad de enfriamiento y por qué en ese cuadrante, a lo que respondió:

S_2: La velocidad…(piensa) ¡ah! Porque la velocidad es negativa porque va disminuyendo la temperatura, entonces por eso puse la gráfica velocidad aquí abajo del eje x.

E: Y ¿por qué así y no así? (la entrevistadora invierte la concavidad de la gráfica).

S_2: Mmm…

E: Digo pues, finalmente sería abajo del eje horizontal.

S_2: ¡Ya!, pues como estaba así (señala la concavidad de la gráfica de temperaturas) por eso se queda así (esto es, con la misma concavidad).

E: Te aclaro que no digo que esté mal solamente es distinta forma de expresarlo.

S_2: Es que la temperatura disminuye…

Se identificó que el sujeto logró procesos de reversibilidad, ya que fue capaz de entender que si la primitiva (aunque no la refiera así) es decreciente es porque su Derivada es negativa, y como sabe que en ningún momento la temperatura del agua crecerá, ya que no hay una fuente de calor que motive a ello, la Derivada siempre será negativa, y por tanto estará debajo del eje horizontal. Se le solicitó también que explicara cómo construyó la gráfica de la posición del libro, que hablara además de sus similitudes y diferencias con la que proporcionó la calculadora graficadora (figura 31 e), y que explicara el movimiento del libro a partir de sus gráficas. Respondió lo siguiente:

E: ¿Por qué tu gráfica no inició en el punto (0, 0)?

S_2:Yo creo que porque lo tenía así (se refiere a que el libro estaba a cierta distancia del CBR), y luego antes de lo presionar el botón le hice así (lo aleja y lo acerca al sensor), pues ya tenía un movimiento. Luego le empecé hacer más despacito.

E: O sea que empezaste a sensar ya con un movimiento.

S_2:Si.

E: Ahora quiero que me digas qué significan estos puntos (señala los puntos máximos y mínimos relativos).

S_2: Mmm… pues sería como aquí. Aquí la velocidad, aunque está bajando, es positiva, porque yo iba así con el libro para arriba (lo aleja del sensor) y luego llegué como a este punto (señala donde la gráfica velocidad es cero) y paré. Luego ya bajé el libro y luego aquí paré y lo subí y luego paré y lo bajé…

E: …Tu gráfica de posición es muy parecida a la gráfica de la TI…

S_2: Sí, buen,o no salió tan bien ¿verdad?, más o menos.

En el caso de S_2, resultó relativamente claro explicar el comportamiento de una gráfica primitiva a partir de la comprensión del de su Derivada. No enfrentó dificultades en interpretar velocidades negativas y su efecto sobre la gráfica posición; esto se declara de acuerdo a las evidencias que hubo en otras actividades. Se cree que no era necesario, aunque sucedió, que el sujeto asociara el movimiento del libro con sus gráficas. Esto resultó esencialmente útil para otros sujetos, como para S_1 y S_4, a quienes se les dificultó entender el significado geométrico de una velocidad negativas; les resultó más claro cuando trabajaron con el sensor de movimiento, ya que se les mostró el video, en donde se grabó el movimiento de un compañero y al mismo tiempo se registró la velocidad del movimiento en el CBR. El sujeto analizó la gráfica de posición, la de velocidad y el video, y de esta manera dedujo el significado de una velocidad negativa y su relación con la posición de un objeto.

En el diagrama de la figura 32 se explicitan las acciones, los procesos y objetos matemáticos que construye S_2 para comprender el concepto de la Integral. Nuevamente, si se compran los diagramas de las figuras 29, 30 y 32, se advierten similitudes, como debe ser; sin embargo, se destacan diferencias sustanciales ya que la construcción del objeto matemático de la Integral difiere en grado de profundidad. Se afirma que en el nivel Inter- el sujeto logra operar el objeto, pero todavía no muestra evidencias de que haya un significado de la utilidad que le puede dar a este concepto; sin embargo, las actividades que desarrolló en el bloque III, dan cuenta de que puede trasladar el esquema a otros escenarios y además muestra evidencias de que sabe cuándo le será útil y cuándo no es posible aplicar el conocimiento adquirido.

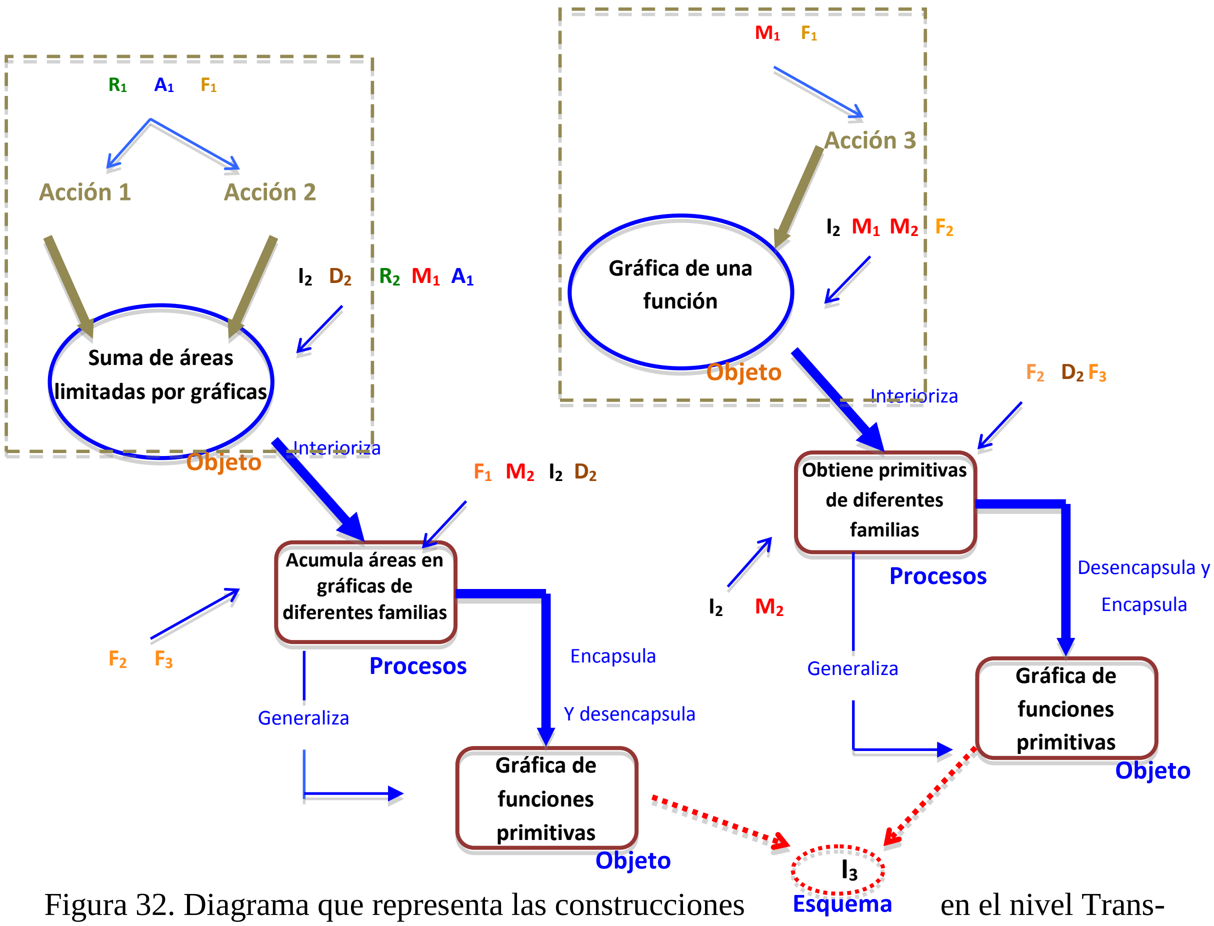


Figura 32. Diagrama que representa las construcciones en el nivel Trans- del sujeto S_2.

Otra diferencia radical es la profundidad con la que recurre a los esquemas previos. Si en etapas anteriores le resultó útil imitar procesos al resolver situaciones problema, en el nivel Trans- eso resultó insuficiente, ya que requirió de las acciones, procesos y objetos construidos, referentes al esquema, como un todo. Algunos esquemas que le fueron útiles en sus construcciones en los niveles Intra- e Inter- son aquellos que le permitieron interpretar conceptos de la cinemática pero sin un sentido geométrico, sólo el concepto

(M_1), pero en sus construcciones en un nivel Trans- requirió de mayores elementos del esquema (M_2).

A continuación se describen los esquemas mentales que S_2 moviliza en la solución de las situaciones, mismos que son referidos en el diagrama de la figura 32:

I_2: Construcciones en un nivel operativo de la Integral como objeto matemático, tratado desde representaciones geométricas. Esto se traduce en que el sujeto ha logrado consolidar en procesos que lo llevan a la obtención de la función primitiva a partir de acumular áreas o de interpretaciones geométricas de la función derivada. El sujeto ha logrado generalizar esos procesos y sabe aplicarlos a situaciones similares sin recibir instrucciones adicionales o con base en imitar procesos, por eso desde la teoría APOE se dice que ha logrado construir un objeto matemático.

M_2: Construcciones que le permiten interpretar y operar con el significado geométrico de una velocidad negativa, positiva y cero.

D_2: Construcciones que evidencian que el sujeto comprende el significado de la interpretación física de la de la Derivada.

A_1: Posee construcciones sobre el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos y cuadrados, y estimación de áreas de figuras cuando uno de los lados está delimitado por una curva.

R_2: Posee construcciones que le permiten operar con sumatorias de cantidades infinitesimales, y muestra habilidad para interpretar el concepto de infinito.

F_2: Posee construcciones suficientes para interpretar el comportamiento geométrico de una función, destacando elementos como: el sentido creciente, decreciente y constante de una gráfica; identifica cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o cero.

M_1: Posee construcciones mentales suficientes para entender y describir algunos conceptos implicados en el movimiento de una partícula, tales como velocidad, desplazamiento, distancia, aceleración, destacando la relación entre los conceptos velocidad y posición.

Producto de las construcciones de este nivel:

I_3: El sujeto logra coordinar con otros esquemas las acciones, procesos y objetos que conforman el esquema de la Integral tratado desde representaciones geométricas. Esto es, el sujeto ha logrado identificar situaciones en las que se aplica (y no) el concepto, así como explicar lo que aprendió referente al concepto.

Piaget menciona que los esquemas son entidades autorregulables, esto es, cuando un sujeto enfrenta una situación que desequilibra su estructura mental actual, en su mente se genera una serie de reacomodos, los que producen conexiones necesarias entre los esquemas que posee para incluir la nueva información. En el diagrama de la figura 33 se muestra una idea de las conexiones que surgen entre los esquemas que moviliza S_2 en cada nivel de construcción.

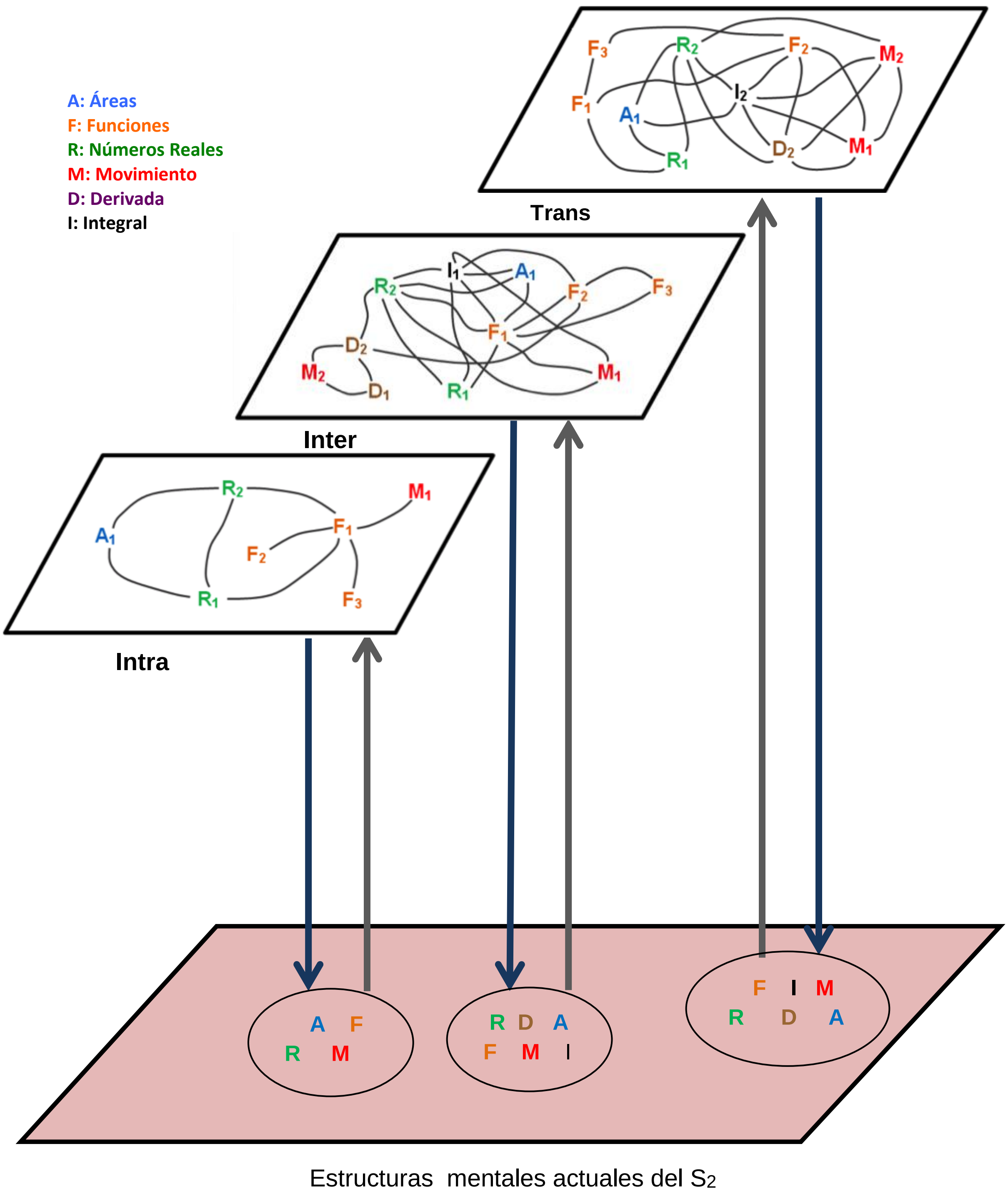


Figura 33. Diagrama que representa las conexiones entre los esquemas previos de S_2.

La intención que se tuvo al elaborar un diagrama como éste fue mostrar que, a medida que el sujeto S_2 avanza en sus construcciones, se observa que aumentan las conexiones entre esquemas con la nueva información y aumentan las conexiones entre esquemas existentes que moviliza, complejizando así las estructuras que genera. Cabe recordar que de las plataformas, la inferior, representa de forma general los campos matemáticos a los que recurrió el sujeto cuando realizó las actividades encomendadas en cada nivel. Las plataformas superiores representan específicamente las relaciones (para cada nivel de construcción) que establece el sujeto entre los esquemas que posee y que refieren a los campos de la plataforma inferior.

Aunque más adelante se detallará la explicación de esas conexiones, se puede observar que en el nivel Intra- el sujeto, cuando calcula áreas (A_1) coordina este esquema con otros que le permitieron operar con los números reales (R_1), además logró identificar los conceptos velocidad y posición (M_1) y coordinó el esquema que le permitió operar en el plano cartesiano (F_1). Logró también inferir sobre la relación geométrica (F_2) entre la velocidad y la posición de una partícula e identificó en la gráfica de velocidad cuándo ésta es constante y cuándo variable (F_3). En los niveles superiores (Inter- y Trans-) se observan las relaciones que establece S_2, nótese que recurre a esquemas que le fueron útiles en el nivel precedente o, en ocasiones, se trató de un esquema del mismo campo matemático, pero con mayor complejidad.

Hasta el momento se citan los esquemas que S_2 coordina de alguna manera para la construcción del esquema de la Integral, pero ¿cuál es el mecanismo que explica cómo tienen lugar las construcciones de S_2? ¿De qué manera y en qué momento S_2 coordina los esquemas que posee con las nuevas construcciones mentales?

Para contestar estas preguntas es necesario retomar las ideas de Piaget, quien afirmó que en la construcción del conocimiento se activan una serie de mecanismos a los que llama abstracciones. Piaget y García (2004) mencionan dos tipos de abstracciones: *abstracción empírica* (AE), la cual se basa en los rasgos o propiedades concretas del objeto y que son perceptibles en primera instancia por un individuo, y la *abstracción reflexiva* (AR), mediante la cual el sujeto logra reorganizar sus estructuras mentales, al coordinar la información que extrae del objeto con las estructuras mentales que posee. En sus construcciones, S_2 manipuló diversos objetos matemáticos (entendidos como conceptos matemáticos) que de alguna manera subyacen al objeto de la *Integral*.

A continuación en las figuras 34, 35 y 36, se esquematiza, para cada nivel respectivamente, lo que se entiende que sucedió en la mente de S_2 cuando surgieron las acciones, procesos y objetos Se da cuenta del tipo de abstracciones que se desencadenan y la coordinación de esquemas que surgió. Esta idea se desprende de fusionar los diagramas de las figuras 29, 30 y 32 con el de la 33.

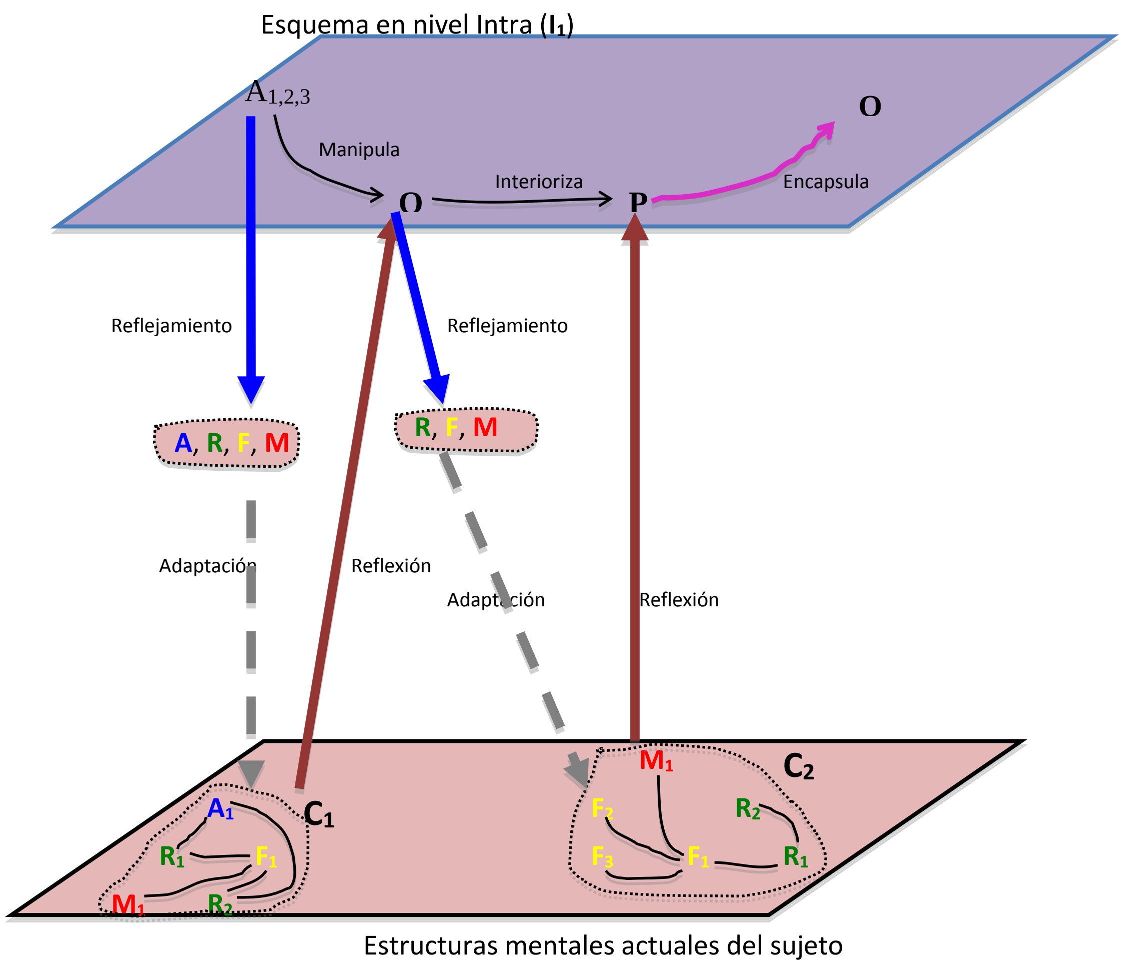


Figura 34. Diagrama que representa construcciones de S_2 en el nivel Intra-.

Diagrama VII

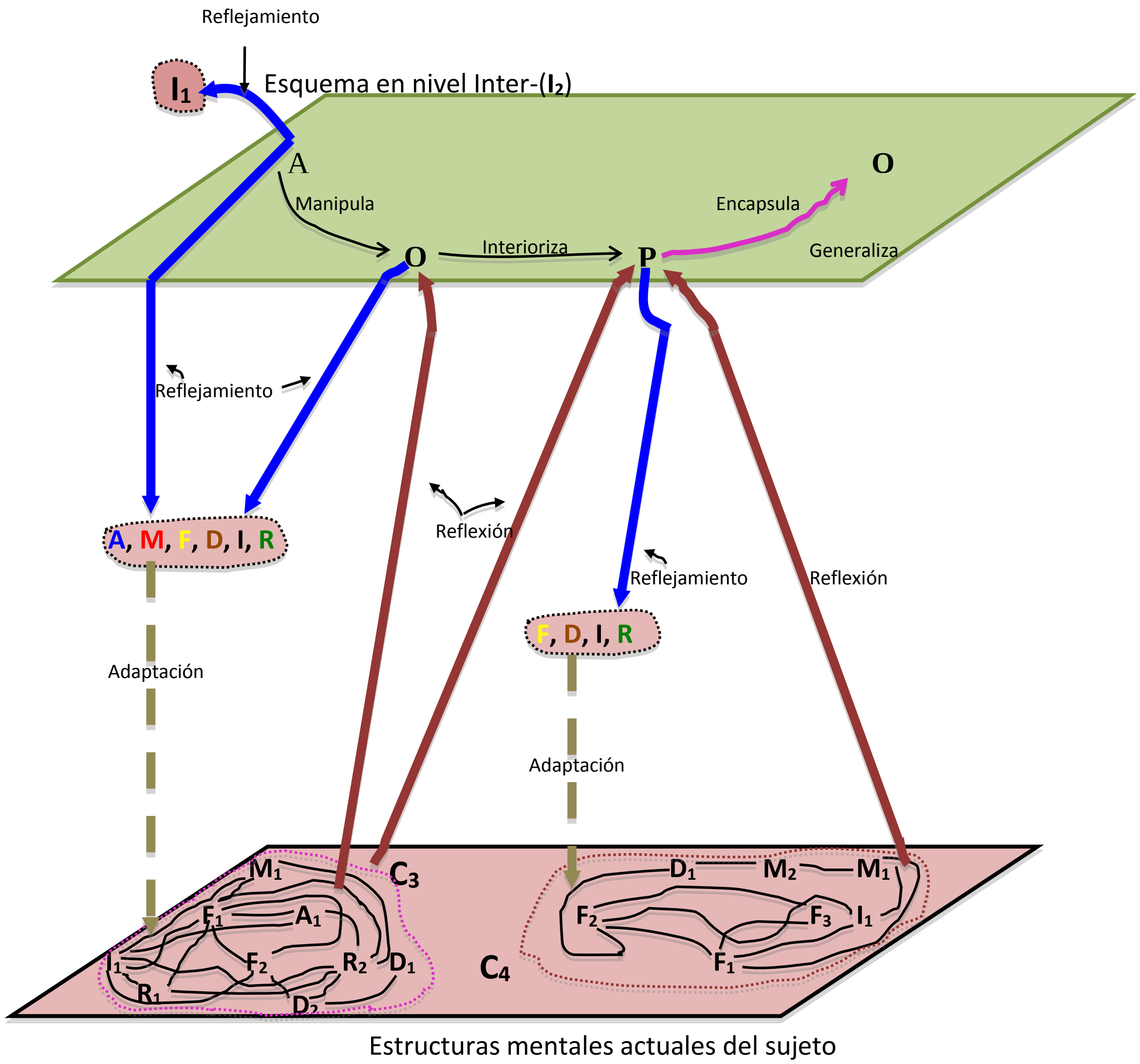


Figura 35. Diagrama que representa construcciones de S_2 en el nivel Inter-.

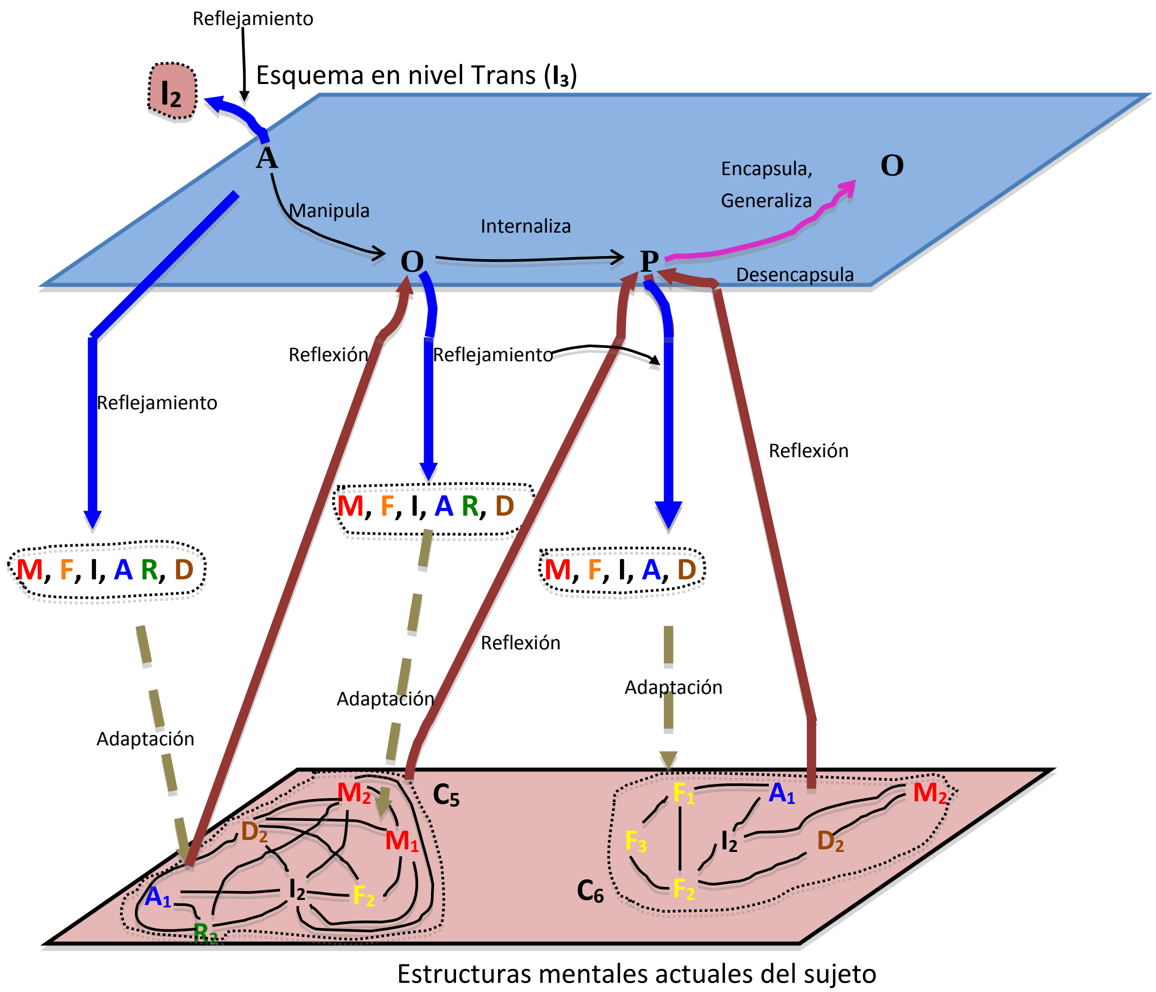


Figura 36. Diagrama que representa construcciones de S_2 en el nivel Trans-.

En los diagramas de las figuras 34, 35 y 36, se aprecian los procesos que le permiten a S_2 construir, y que tienen lugar en su mente cuando manipula objetos matemáticos. Primeramente se puede observar la abstracción reflexiva, la cual hacer referencia a “las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conducen a construir” (Piaget y García, 2004, p. 247). En esta abstracción se desencadenan dos procesos importantes: uno de ellos es el *reflejamiento*, como se muestra en los diagramas mencionados, que hace referencia a las abstracciones que realiza el sujeto en planos inferiores de conocimiento y que proyecta a planos superiores, cuando el sujeto, a partir de la acción, es capaz de construir representaciones mentales del objeto. El otro proceso es la *reflexión*, que hace alusión a procesos mentales, pues se refiere a la reorganización de la estructura mental en el nuevo plano, a partir de lo extraído por reflejamiento (Piaget y García, 2004).

Cuando manipula objetos (a partir de realizar las *acciones*) hay un reflejamiento hacia lo que ya conoce y trata de adaptar esa nueva información a las estructuras mentales existentes. Hace esto a partir de dos herramientas cognitivas poderosas, la asimilación y la acomodación, que promueven en el sujeto un nuevo reequilibrio mental a partir de la reorganización de la estructura mental existente que coordina o realiza conexiones entre nuevos esquemas, a partir de la idea de que el esquema es una entidad autorregulada. Estos señalamientos se pueden apreciar en los diagramas citados.

Los tres diagramas tienen similitudes y diferencias sustanciales, las primeras se refieren a los procesos que tienen lugar en la mente del sujeto. Las diferencias radican, como se aprecia en los diagramas, en las veces que el sujeto debe realizar reflejamientos y reflexiones, lo cual, de acuerdo a lo observado, surge a partir de que la información recibida aumenta de grado de dificultad y se observa entonces cómo se complejizan las estructuras del sujeto. Esto se aprecia por las conexiones que surgen, representadas en la plataforma inferior de cada diagrama.

El diagrama de la figura 37, representa de manera global el esquema de S_2, necesario para el logro de un nivel de comprensión del concepto de la Integral. Se observa que las construcciones de S_2 (como se mencionó en párrafos anteriores) inician con las actividades 1.1, 1.2, 1.3 (Anexo A, B y C, respectivamente), ya que las *acciones* propuestas (referidas como 1, 2 y 3) en tal actividad lo acercan por primera vez al objeto.

Diagrama IX

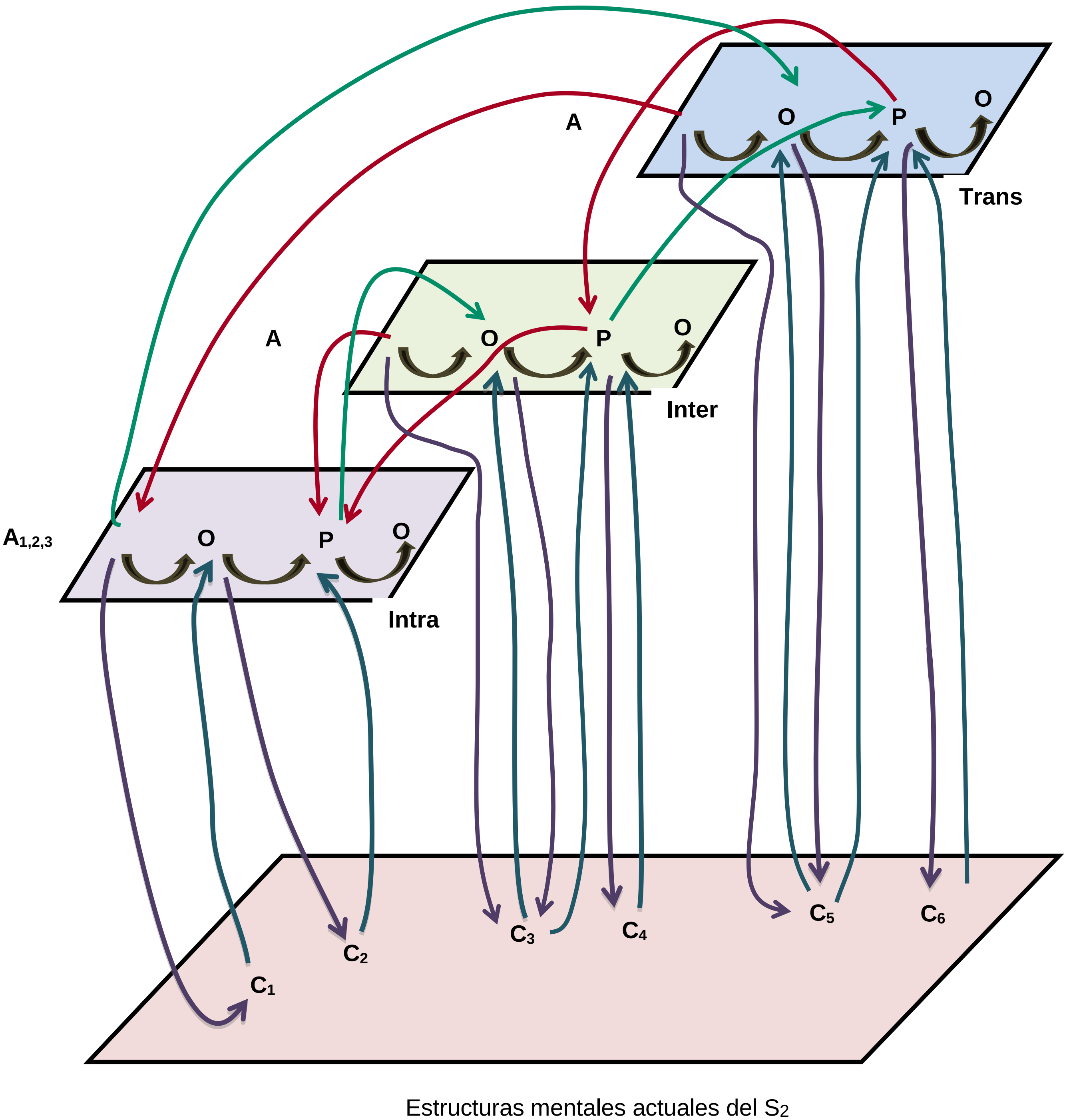


Figura 37. Diagrama que representa el esquema para la apropiación del concepto de la Integral de S_2.

Para sintetizar las construcciones de S_2, descritas en párrafos anteriores, es útil el diagrama de la figura 37, ya que en él se simbolizan los esquemas que moviliza el sujeto para la apropiación del concepto de la Integral (C_1, C_2 C_3, etc.). Se aprecian también las conexiones que establece entre éstos, los niveles de construcción del esquema, así como las estructuras que moviliza para transitar de un nivel de construcción a otro. Los esquemas previos, representados por las letras C_i, que corresponden a diversos campos de las matemáticas, se ubican en la plataforma inferior.

En la figura 37 se puede apreciar cómo el sujeto transita de un nivel de construcción a otro, se observan nuevamente las plataformas que para la investigación representan los niveles Intra-, Inter- y Trans-. En cada nivel se aprecian las acciones, los procesos y objetos de cada nivel, y los esquemas y la relación entre ellos que el sujeto trae a su mente en sus construcciones, esto se denota con las letras C_i en la plataforma inferior, y fueron detallados en los diagramas de las figuras 34, 35 y 36. Los conectores direccionados desde un nivel inferior a uno superior indican los procesos de reflexión descritos con anterioridad, que se refieren al momento en que el sujeto lleva la información desde un plano inferior a uno superior. Los conectores que van desde un plano superior a uno inferior hacen referencia a procesos de reflejamiento que suceden justo cuando el sujeto enfrenta una nueva información y ésta es referida a sus estructuras previas dando lugar a un reacomodo de sus esquemas actuales.

El primer reflejamiento que se observó en S_2 fue en el nivel Intra-, cuando se le solicitó ejecutar las acciones $A_{1,2,3}$, lo cual lo llevó a un reacomodo de sus esquemas generando así a C_1. Luego tuvo lugar la reflexión de ésta acomodación, lo que le permitió actuar sobre el objeto que refiere a la *suma de áreas limitadas por gráficas y la obtención de la primitiva a partir de analizar la gráfica de la Derivada* (**O** izquierda de la plataforma Intra-). El sujeto logra internalizar las acciones en procesos, pero para ello tiene lugar una nueva acomodación, C_2; ésta promueve que el sujeto encapsule los procesos en el objeto matemático mediante la construcción de *gráficas de la función primitiva* (**O** derecha de la plataforma Intra-). Se ha comentado que este objeto matemático, que es foco de atención de la investigación, es construido en este nivel en etapas primarias aún; el sujeto puede operar con él, pero en situaciones limitadas, por ejemplo, puede acumular áreas pero sólo cuando estén limitadas por gráficas lineales, parecidas a las que fueron resueltas en los bloques.

Cuando el sujeto enfrenta nuevas situaciones problema, realiza las acciones A, indicadas en la plataforma Inter-, lo que provoca un desequilibrio en su estructura actual, a la que integró nuevas estructuras a las cuales recurre, como se observa en el diagrama de la figura 37. Tales acciones acuden a los procesos P del nivel Intra- y, al manipular el objeto *obtención de la primitiva a partir de analizar la gráfica de la derivada* (**O** izquierda de la plataforma Inter-) —recordar que el sujeto resuelve tanto por acumulación de áreas como por análisis de gráficas— tiene lugar la coordinación de los esquemas denotados por C_3.

Por otro lado, los procesos logrados en el nivel Intra- le permiten entender lo que debe de hacer con el objeto mencionado. En este nivel, el sujeto logra generalizaciones en la construcción del objeto *gráficas de la función primitiva* (**O** derecha del nivel Inter-), ya que es capaz de trasladar tales procesos a situaciones en las que se involucran, no sólo gráficas lineales, sino gráficas de funciones de diversas familias.

Cuando el sujeto transita a niveles superiores (Inter- y Trans-), no sólo avanza en la construcción del esquema, sino que para éste es necesario regresar a otras etapas de construcción con la finalidad de recuperar los esquemas que en tales etapas consolidó. Esto no sólo se observó con S_2, sino también en el resto de los sujetos que fueron entrevistados. Cuando logró transitar a niveles superiores de construcción, se observó que se complejiza su estructura mental al añadir nuevos esquemas (esto se aprecia en el diagrama de la figura 37) y en la acomodación coordina los esquemas existentes y las construcciones recientes formando nuevas estructuras.

S_2 logró transitar al nivel Trans- del esquema, para lo cual debió regresar a las construcciones logradas en niveles inferiores, con lo que se corrobora que el conocimiento no fluye de manera lineal, sino que transita en los diferentes estadios como resultado de los procesos de "reflejamiento" y "reflexión" (Piaget y García, 2004, p. 10).

4.2 Construcciones del estudiante S_5

Como producto del análisis de las aportaciones de S_5 en la solución de las situaciones problema, sus argumentos, sus decisiones de solución, sus reflexiones, la información que se obtuvo de las entrevistas, de la historieta y del trabajo en pares, se concluyó que éste es el sujeto que menos construcciones logró, pues se considera que logró sólo un nivel Intra-. S_5 presentó estructuras mentales débiles sobre la graficación de funciones, la interpretación de gráficas en el plano cartesiano, por citar algunas, lo que se considera un factor importante que no le permitió avanzar en la construcción del esquema mental de la Integral desde representaciones geométricas.

Otra situación que se observó con S_5 es que se le dificultó entender las instrucciones de los problemas, situación que fue recurrente en él, pero no con los otros estudiantes a quienes se les aplicaron los mismos materiales. S_5 en reiteradas ocasiones mostró dificultades para entender lo que se solicitaba en las diferentes situaciones problema.

A partir del análisis de los datos, proveniente de diversas fuentes, sobre el trabajo que desarrolló S_5, a continuación se describe su proceso de construcción, además se destacan los esquemas mentales identificados, a los que el sujeto recurrió cuando realizó las actividades encomendadas. Para facilitar la interpretación de las construcciones de S_5 se elaboraron nueve diagramas con los que se explican con mayor profundidad las abstracciones y el proceso de acomodación de esquemas que tienen lugar en su mente, así como la idea de cómo transita de un nivel a otro del esquemas mental. Para iniciar las explicaciones se presenta el diagrama de la figura 38, con el que se muestra una idea general de cómo se perciben físicamente las construcciones del sujeto. Este diagrama será desmembrado y explicado por partes con la intención de accesar con mayor profundidad a los procesos que se desencadenan cuando el sujeto manipula objetos matemáticos.

El plano inferior del diagrama de la figura 38, se representa la plataforma cognitiva actual que el sujeto pone de manifiesto cuando incia las construcciones del esquema. Los campos matemáticos de los esqueamas previos a los que recurre el sujeto se representan por las letras siguientes:

A: Esquemas relacionados con el campo Áreas de Figuras Geométricas.

F: Esquemas relacionados con el campo de las Funciones.

I: Esquemas relacionados con el campo de la Integral.

M: Esquemas relacionados con el campo de la cinemática.

R: Esquemas que pertenecen al campo de los números reales.

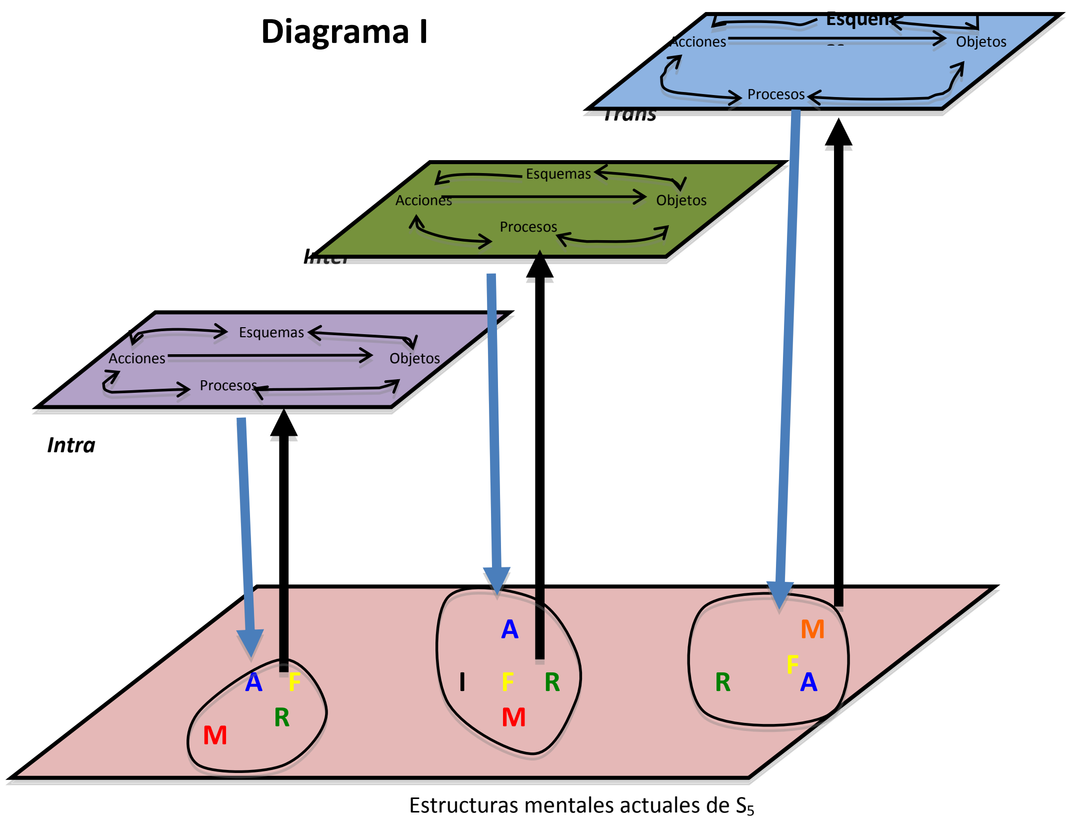


Figura 38. Diagrama para representar las construcciones del sujeto S_2.

Se observan también en el diagrama tres plataformas, las cuales representan los niveles por los que se supone que transita la construcción del esquema. Para interpretar las construcciones del sujeto en cada nivel fue necesario recurrir al ciclo que propone

Dubinsky (2001), para así explicar los elementos que interactúan en construcción de un esquema mental. Posteriormente se explicará lo que se observó respecto a las construcciones de S_5 en cada uno de los niveles indicados en el diagrama I.

Al igual que S_2, el sujeto S_5 inicia sus construcciones cuando realiza las *acciones* A_1, A_2 y A_3 sobre el objeto matemático *Cálculo de áreas limitadas por gráficas*. A partir de estas acciones, que acercan al sujeto a diversos objetos matemáticos que lo encaminan a la construcción del esquema para la comprensión de la Integral, se observó lo que a continuación se describe.

NIVEL INTRA-: Para observar las construcciones del sujeto en este nivel se propuso que resolviera la actividad 1.1 que pertenece bloque I (anexo A). En esta actividad se pretende que el estudiante logre, a partir de imitar procedimientos de acumulación de áreas, la construcción de una primitiva. El sujeto acumuló áreas pero no completó las *acciones* indicadas en tal actividad y de acuerdo a lo que se observó esto fue un elemento necesario para iniciar sus construcciones y que su ausencia dificultó la transición a niveles superiores de sus construcciones mentales. En la figura 39 se muestra la hoja de respuestas que entregó el sujeto.

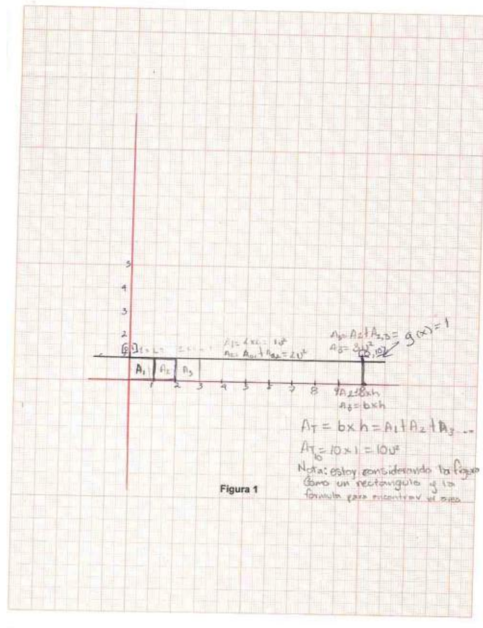


Figura 39. Solución de la actividad 1.1. del sujeto S_5.

Se le preguntó por qué no concluyó la actividad y respondió lo siguiente:

S_5: ¡Ah! Creo que no los grafiqué, ¿verdad?, mmm… (piensa).

E: No, pero ¿por qué no lo hiciste? ¿lo olvidaste?

S_5: O más bien creo que lo dejé para al final y me lo brinqué, más bien. Sí maestra, me lo brinqué.

E: Entonces déjame anotarlo ahí pero ¿no porque no hayas sabido como hacerlo?

S_5: Pues, es que, bueno, la vi y al principio no lo recordé, no me acordé. Entonces la dejé y dije: "bueno a lo mejor si continuando con lo demás me acuerdo de algo". Pero ya, este, no sé, a lo mejor le seguí de largo y ya no me regresé, y no me acordé de regresarme.

S_5 argumentó que olvidó completar la solución de algunas situaciones problema porque decidió dejarlas al final y lo olvidó. El diagrama de la figura 40 esboza el progreso de las construcciones del sujeto cuando aplica las acciones $A_{1,2,3}$ descritas anteriormente y muestra los esquemas que el sujeto trae a su mente.

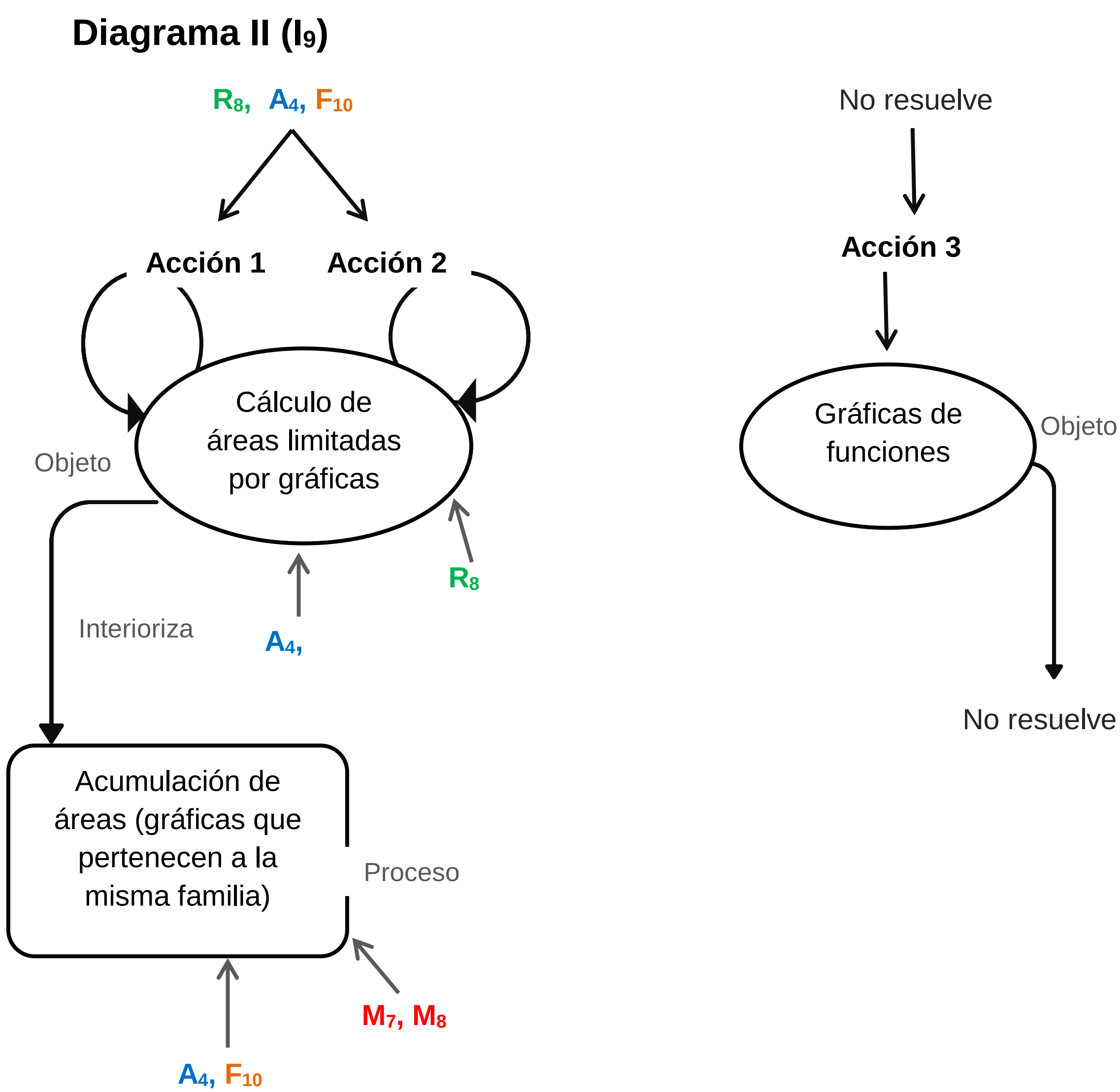


Figura 40. Diagrama que representa las construcciones en el nivel Intra- del sujeto S_5.

La nomenclatura que aparece en el diagrama se refiere a las siguientes construcciones que se identifican y con las que S_5 intenta resolver las situaciones problema planteadas:

R_8: Posee construcciones suficientes para operar sin dificultad con números reales (sumas, restas, multiplicaciones).

A_4: Posee construcciones aún débiles para calcular áreas de figuras geométricas (triángulos, rectángulos), ya que fue necesario recordarle cómo calcular el área de las figuras mencionadas para que él pudiera continuar sus procesos de solución.

F_{10}: Construcciones suficientes que le permiten identificar sin dificultad las coordenadas en el plano cartesiano y ubicar las variables que corresponden a cada eje.

M_7: Construcciones necesarias para comprender los conceptos de velocidad y posición de una partícula, ya que logra identificar en situaciones similares estos conceptos y además logra establecer claramente una relación entre ellos cuando analiza el movimiento de una partícula.

M_8: Construcciones que facilitan la interpretación del concepto de velocidad media; además, identificó con plena autonomía y sin dificultad cuándo, en una situación problema, se requería calcular velocidades medias.

Logró:

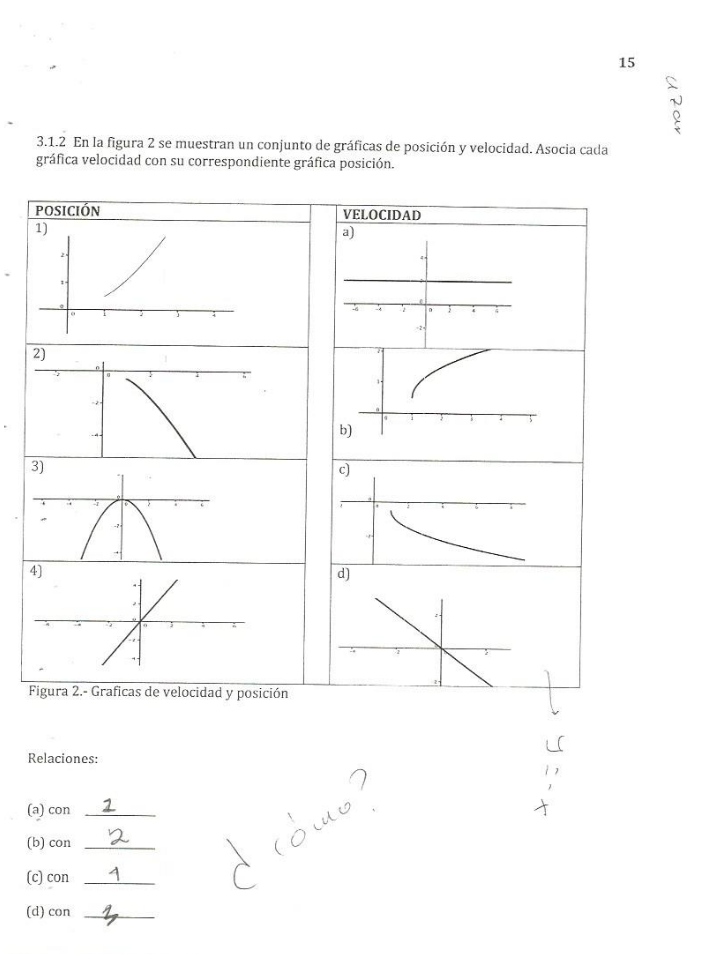
I_9: Construcciones que evidencian que es capaz de acumular de áreas, sabe ejecutar el procedimiento de acumulación de áreas limitadas por gráficas de funciones lineales (como f(x)=1), pero aún son necesarias indicaciones iniciales para que pueda lograrlo.

En el diagrama de la figura 40 se observan las propuestas que bifurcan hacia la apropiación del concepto de la Integral desde representaciones geométricas. El camino indicado a la izquierda del diagrama corresponde a la acumulación de áreas, y el derecho a la obtención de la función primitiva a partir del análisis de la gráfica de su función derivada. Este último se percibe árido, ya que el sujeto mostró esquemas débiles sobre la graficación e interpretación de funciones, lo que al parecer impidió que avanzara en sus construcciones.

Las respuestas a la actividad 3.1.2 dan cuenta de esta conjetura; la actividad consistió en que el sujeto debía asociar las columnas de la tabla 8. En la primer columna de la tabla, se muestra un conjunto de gráficas que representan la posición de cierto móvil, en la segunda columna aparece un conjunto de gráficas que representan velocidades. El sujeto debió relacionar la gráfica velocidad con su correspondiente gráfica posición.

Tabla 8

Actividad 3.1.2 correspondiente al bloque III


15

3.1.2 En la figura 2 se muestran un conjunto de gráficas de posición y velocidad. Asocia cada gráfica velocidad con su correspondiente gráfica posición.

POSICIÓN	VELOCIDAD
1)	a)
2)	b)
3)	c)
4)	d)

Figura 2.- Graficas de velocidad y posición

Relaciones:

(a) con 1

(b) con 2

(c) con 4

(d) con 3

¿cómo?

Para esta actividad se proporcionó una explicación breve del significado que tiene en una gráfica primitiva el hecho de que su función velocidad sea positiva, negativa o si cruza el eje horizontal. A partir de esta información, y de observar un ejemplo resuelto, se le solicitó que resolviera la actividad 3.1.2. Nuevamente el sujeto no atendió las instrucciones y, por lo tanto, no realizó la actividad. Además de la explicación anterior, el sujeto contaba con otra información referente a la Integral, ya que se encontraba cursando la materia de Cálculo Integral y, en el momento que resolvió esta actividad, estaba por concluir tal curso.

Es claro que el estudiante no logró entender el concepto de la Integral desde registros geométricos (al parecer tampoco desde los algebraicos), el siguiente diálogo se generó a partir de las respuestas que proporcionó a la actividad 3.1.2:

E: …Aquí nuevamente tienes que relacionar gráficas, …¿cómo lo hiciste?

S_5: ¡ja!, ¡ja! La misma idea maestra, Este… no, no bueno, no me vino a la mente, no me acordé o quizás y a lo mejor… y pues más que nada sí fue otra vez igual, al azar, porque… bueno, pues ya trabajando no, no sé relacionarlas a lo mejor.

E: …Y por ejemplo si yo te hubiera dicho que esta gráfica (señala la gráfica de una recta con pendiente -1), tiene ecuación de y= -x, y que es una función velocidad, como lo indica la tabla, la Integral sería la posición, ¿cuál sería su gráfica entonces? Si tú conocieras la expresión a la que obedece esta trayectoria, ¿te sería más simple resolver el problema?

S_5: Pues bueno este… lo que pasa es que, por ejemplo, como para obtener, no sé, esta posición (señala la gráfica que corresponde a y=-x), creo que la ecuación debe ser cuadrada. Cuadrada entonces, pero como aquí… (piensa) no, no podía, bueno, no puedo interpretar o no sé interpretar lo que vendría siendo cuál ecuación determina cada figura, podría decírselo así… no, no sé eso, cómo…

Puesto que el estudiante cursaba la materia de Cálculo Integral y la de Mecánica Clásica en el mismo semestre, se le preguntó ¿cuál será la Integral de f(x) = -x?, se aclaró que representaba una función velocidad. No logró responder a tal cuestionamiento para poder asociar con las gráficas que se proporcionaron como respuesta. Al parecer no ha construido esquemas mentales del concepto de la Integral desde ninguna representación del concepto.

Regresando al diagrama de la figura 40, en la vertiente izquierda del diagrama se observa que, cuando el sujeto manipula el objeto matemático *cálculo de áreas limitadas por gráficas*, recurre a los esquemas R_8, A_4 y F_{10}. Para los problemas cuyas áreas están limitadas por gráficas de la forma f(x) = 1, las dificultades que enfrentó fueron mínimas, lo que le permitió interiorizar las acciones en procesos, para lo cual requirió de los esquemas previos A_4, M_8, M_7, F_{10}.

Dados sus argumentos, al explicar los procesos de solución de las situaciones problema, se considera que el sujeto logró construir el esquema I_9, por lo que es capaz de acumular áreas limitadas por la recta f(x)=1. Se reconoce que sus construcciones son limitadas aún, sin embargo, manifiesta logros al respecto.

NIVEL INTER-: Del análisis de los tres bloques, del trabajo individual y de pares, se observa que S_5 no logró transitar al nivel Inter- del esquema mental; aunque mostró construcciones a nivel Intra- de acumulación de áreas, no fue capaz de resolver situaciones similares en donde se requiere este conocimiento para dar solución.

Se le presentó la actividad 2.2.1 del bloque II (anexo B), la cual consistió en que, a partir de una gráfica de velocidades, el sujeto debía extraer datos y calcular la distancia que recorre, en determinado tiempo, un autobús de pasajeros. Para ello en la actividad previa, la 2.1.1 del mismo bloque, diseñada para observar construcciones en un nivel Intra-, se había explicado y resuelto una situación problema similar y, desde luego, se esperaba que en la 2.2.1 el estudiante hubiese logrado encapsular el procedimiento de acumulación de áreas. S_5 mostró habilidades para interpretar y representar geométricamente los datos de velocidades medias que se le proporcionaron organizados en tabla 9.

Tabla 9

Datos para el problema 2.2.1

Hora	Velocidad promedio (km/hr)
10:00 – 11:00	15
11:00 – 12:00	13.5
12:00 – 13:00	descanso
13:00 – 14:00	14
14:00 – 15:00	13

15:00 – 16:00	12

Los datos de dicha tabla los representó geométricamente en gráfica de velocidades de la figura 41a.

a)

b)

Figura 41. Respuesta a la actividad 2.2.1 de S_5.

La gráfica 41b corresponde a un bosquejo de la primitiva, aunque representa también velocidades. Los argumentos del sujeto en la solución del problema son los siguientes:

E: …¿Te acuerdas cómo obtienes ésta gráfica? (se refiere a la primer gráfica de la figura 41a).

S_5: Mmm bueno este, creo mmm… sí, creo que fue relacionando lo que era la velocidad con el tiempo, para obtener, más bien para demostrar, para explicar, lo que nos decía la tabla. Entonces creo que aquí (señala la tabla), bueno, como estamos viendo que la velocidad era 15 km, pues estaba representando lo que era la velocidad y el tiempo que duró en esta gráfica.

E: Y entonces aquí, por ejemplo (señala la gráfica 41a)… cero, ¿por qué?

S_5: Por eso, es 0 km porque descansó y vuelve a retomar hasta en la hora 3, que sería esto. Y bueno lo que hasta ahorita mmm…

Sin embargo, obtiene una gráfica de velocidades correcta, pero no logra construir la gráfica de distancias del objeto en cuestión. Esto muestra evidencias de que, en esta etapa del trabajo de campo, no ha logrado integrar a sus estructuras mentales el significado geométrico de la acumulación de áreas, ya que la gráfica que explicó y que supuestamente corresponde a las distancias, representa también velocidades medias. Ha logrado acumular áreas imitando procesos, pero no logró construir la gráfica de la función primitiva a partir de tal acumulación, por lo que no se puede afirmar aún que haya construcciones mentales en un nivel Inter-.

Por otro lado, se observó que S_5 no posee construcciones que le permitan distinguir la diferencia entre una curva y una gráfica compuesta por segmentos rectilíneos:

E: …Y ésta gráfica ¿representa la velocidad? (señala la gráfica 41)

S_5: Si.

E: ¿Por qué tus trazos son recta y no curvas?

S_5: Lo que pasa, utilizo la regla porque nomás me voy bien chueco, y me salen las cosas muy mal. Siento como que la mano de plano no me ayuda, y entonces cuando quiero hacer una curva me sale toda deshecha, de hecho ni figura tiene de que sea una curva, pero en sí,

bueno, lo que estaba tratando de representar aquí era una curva, sólo que pues como no mi mano no me ayuda utilizaba la regla.

En el diagrama de la figura 42 se muestra una idea gráfica de los esquemas a los que recurre cuando manipula el objeto matemático *cálculo de áreas limitadas por gráficas*.

Diagrama III

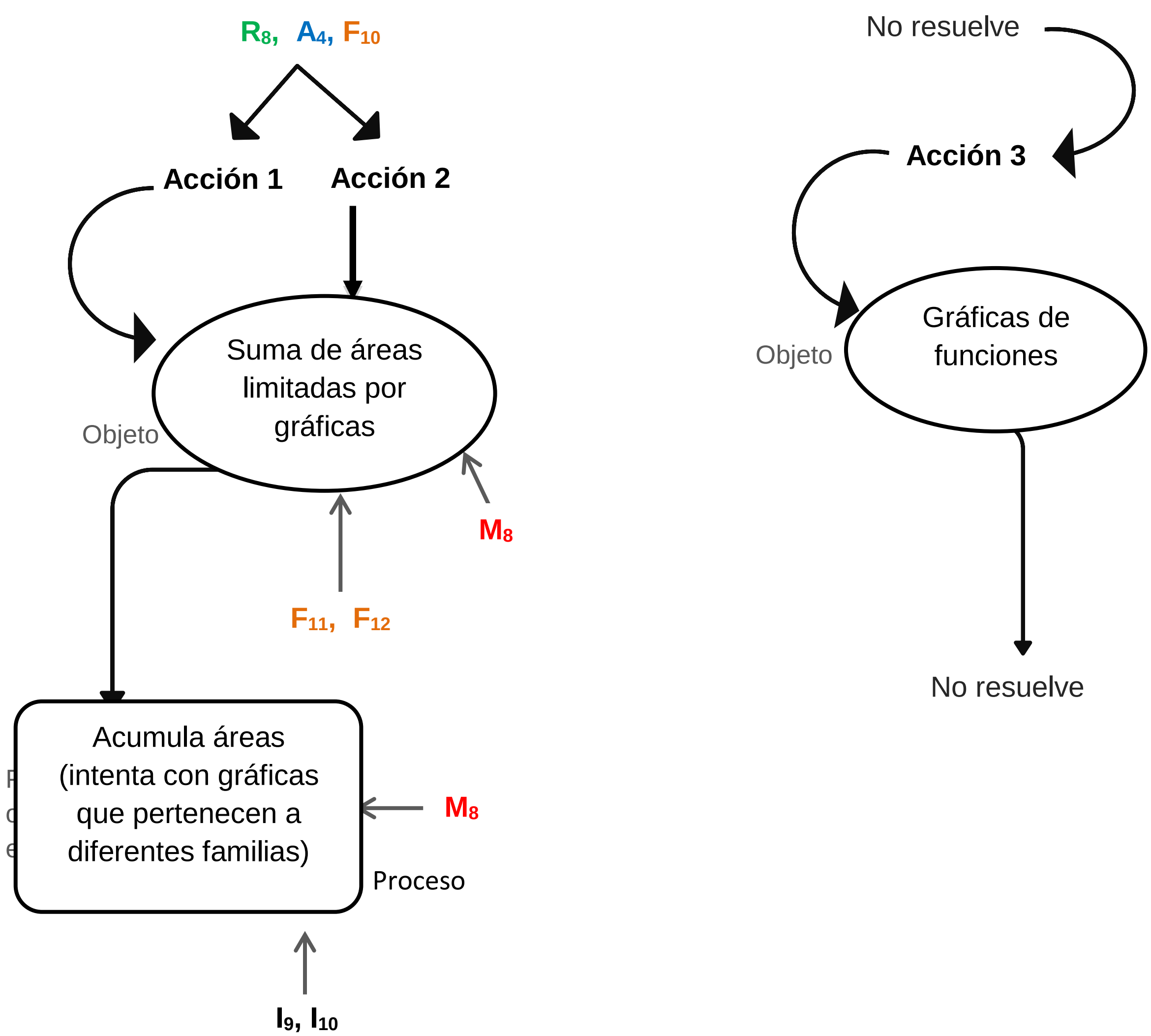


Figura 42. Diagrama que representa las construcciones en el nivel Inter- del sujeto S_5.

En sus intentos por resolver las situaciones problema, S_5 recurre a los siguientes esquemas mentales.

R_8: Posee construcciones suficientes para operar sin dificultad con números reales (sumas, restas, multiplicaciones).

A_4: Posee construcciones aún débiles para calcular áreas de figuras geométricas (triángulos, rectángulos), ya que fue necesario recordarle cómo calcular el área de las figuras mencionadas para que él pueda continuar sus procesos de solución.

F_{10}: Construcciones suficientes que le permiten identificar sin dificultad las coordenadas en el plano cartesiano y ubicar las variables que corresponden a cada eje.

M_8: Construcciones que facilitan la interpretación del concepto de velocidad media; además identificó con plena autonomía y sin dificultad cuándo, en una situación problema, se requería calcular velocidades medias.

F_{11}: Construcciones aún débiles sobre la representación geométrica de la velocidad y de la distancia que recorre una partícula; debido a que no logra encapsular las acciones en procesos, no hay una generalización de éstos y mucho menos procesos reversibles. Para poder graficar requiere de imitar los procedimientos propuestos para actividades en el nivel inferior.

F_{12}: Construcciones suficientes para representar e interpretar de datos en formato de tabla, ya que mostró habilidades operativas al extraer datos de una tabla y relacionar esos datos con los ejes coordenados.

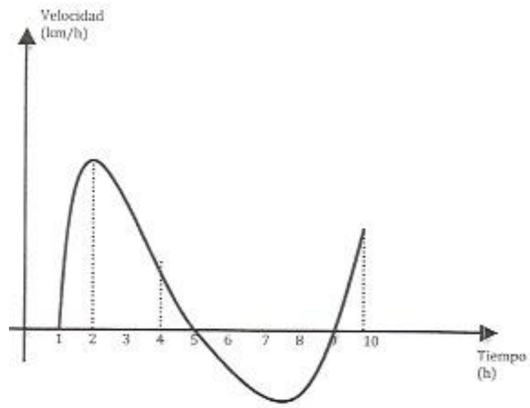
F_{13}: Construcciones aun débiles en el análisis del comportamiento geométrico de una función, destacando elementos como: su sentido creciente, decreciente y constante de una gráfica, identifica cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o cero.

I_{10}: Construcciones aún débiles del significado geométrico de la Integral, las cuales S_5 previamente estudió en su curso de Cálculo Integral. Éstas se refieren a la utilidad de la Integral en la solución de problemas, S_5 recordaba que podía calcular áreas con la Integral, pero no identificaba (ni recordaba) los elementos constitutivos para tal aplicación. En su clase (de acuerdo a sus anotaciones en la libreta de Cálculo Integral) el maestro aborda la idea tradicional: suponer una gráfica, su expresión, un intervalo y la instrucción de calcular el área limitada por la curva dentro del intervalo.

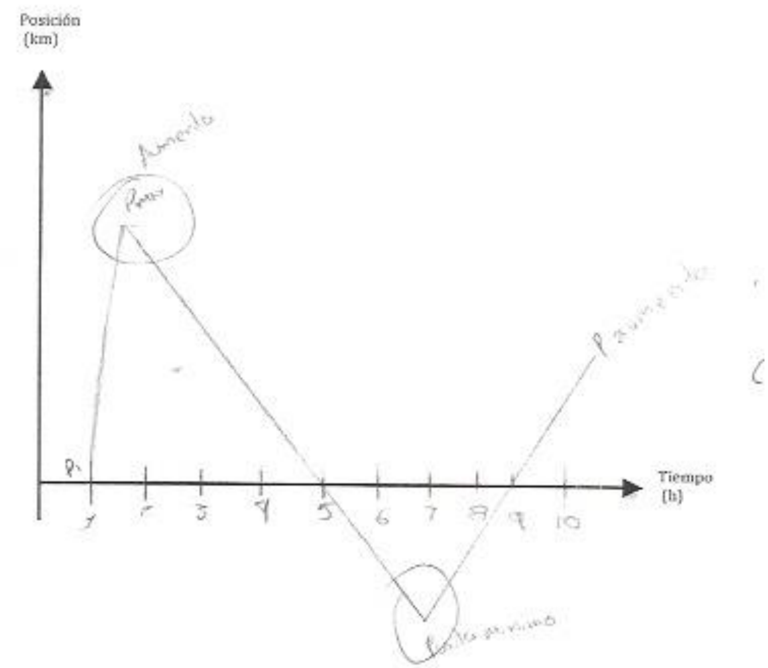
I_9: Construcciones suficientes para realizar la acumulación de áreas de figuras limitadas por rectas, sin embargo no aplica aún un proceso, de manera autónoma, necesita imitar procedimientos de situaciones similares o que se le indique lo que debe hacer.

En el diagrama de la figura 42 se muestran las construcciones de S_5 en el nivel Inter-. Se observa que el sujeto manipula el objeto, pero ahora se acerca a éste intentado recurrir al esquema I_{10} (construcciones del concepto de la Integral como área bajo la curva), lo cual no le resultó, pues se observó que la construcción de tal esquema era débil. Se le sugirió que acumulara áreas pero enfrentó el problema de que no recordó cómo calcular el área de un rectángulo y de un triángulo.

Se le proporcionó esta información, pero luego enfrentó otro tipo de conflictos, como el de interpretar la gráfica de una función, su sentido creciente y decreciente. Prueba de ello se encuentra en el fragmento de entrevista, cuando se le preguntó cómo resolvió la actividad 3.2 del bloque III (anexo C) en la que se solicitó que a partir de la gráfica que describe la velocidad con la que se mueve una partícula (figura 43a), identificara los intervalos donde la distancia de que recorre la partícula aumenta, en donde disminuye, que señalara el punto donde la partícula alcanza su distancia máxima y finalmente, que bosquejara la gráfica de distancias. Para ello, en la actividad 3.1 el sujeto debió manipular objetos matemáticos que facilitaran el camino para obtener dicha gráfica. En la figura 43 se muestra la gráfica que obtuvo.



a) Gráfica de velocidad.



b) Gráfica de posición.

Figura 43. Respuesta a la actividad 3.2 de S_5

S_5 confundió el significado del signo de la gráfica velocidad y sus efectos en la gráfica posición. Se le solicitó que indicara el intervalo donde la distancia que recorre el automóvil aumenta, S_5 respondió que de [1, 2] y de [9, 10], en el primero la gráfica de velocidad crece hacia un máximo relativo y en el segundo simplemente es positiva en el intervalo. El estudiante no asocia con el movimiento si la Derivada es positiva o negativa, se observó que el estudiante olvidó que la gráfica que analizaba corresponde a la velocidad y su efecto con la gráfica de posición.

E:… ¿En qué intervalo la distancia de la partícula aumenta?

S_5: Bueno yo creo recordando lo que nos decía la primera hoja (se refiere a la actividad 3.1.1), creo que en este intervalo (señala [1, 2]), en este punto (señala t=1) al punto 2 aumentó, pero desde el punto 2 hasta lo que vendría siendo el punto aproximadamente 7 y medio (7.5), hasta encones creo yo que decreció, porque no se mantuvo, y disminuyó, nada más que tenía una…(piensa). Bueno, no estaba seguro que fuera desde el punto 7 hasta el punto 10 que volvía a aumentar, porque bueno… Interpretándolo, yo deducía que del punto 7 al 9 era negativo, pero ahorita que la volví a ver bueno se me vino a la mente esa misma duda (piensa), de que si es correcto que hubiera aumentado nuevamente desde el 7.5, aproximado, hasta el 10 porque empezó aumentar… empezó a crecer entonces pero en ese momento yo tenía la duda, por eso, porque en este intervalo no estaba seguro si ya estaba aumentado y se consideraba positivo, o si aún se consideraba negativo y creo que por eso fue mi respuesta.

E: luego…

S_5: Como le digo, no estaba seguro.

E: ¿Cuál es el punto donde la partícula alcanza su máxima distancia recorrida?

S_5: Bueno yo deduje que era del punto del intervalo de 1 a 10 (duda), porque, bueno, ese fue todo el recorrido y creo, bueno, en ese momento creí que el punto máximo era el 10, pero ahorita que nuevamente la volví a ver no se si esté seguro o no de si ese fue el punto máximo. Me viene a la mente si por ejemplo podría haber sido el punto 2 que fue la máxima altura que alcanzo, pero no estoy seguro.

E: …Escribiste que el intervalo donde la partícula disminuye es de 2 a 9, ¿por qué?

S_5: Mi respuesta, bueno, en ese momento igual porque vi que desde el punto 2 empezaba a disminuir y puse que hasta el punto 9, porque en ese momento consideraba que este decremento se consideraba negativo (duda), pero ahorita nuevamente al verla pienso en eso, se me viene a la mente que muy probablemente fue lo que vendría siendo hasta el intervalo 7 punto y fracción, porque en ese

momento decreció y ya de ahí vuelve a incrementar. Entonces de momento fue lo que se me vino a la mente pero hasta volverlo a ver, ver la gráfica, empiezo a creer que es de 7 y fracción entonces (en todo momento hace referencia a la gráfica de velocidad).

E: Entonces, ¿qué pasa en t =2?

S_5: El punto máximo en aumento, el punto mínimo que vendría siendo la menor que alcanzó y el punto que volvió a aumentar.

E: Y ¿cómo obtienes esa gráfica? (la de posición, figura 43b).

S_5: Bueno, esta (señala la gráfica 43b), creo que hasta… aquí creo que, y a lo mejor me estoy contradiciendo, porque bueno en ese momento como le dije fue lo primero que yo creí, pero en esta gráfica ya fue donde empiezo, bueno, empecé a creer en eso que me vino a la mente, que no estaba seguro de si éste era el punto máximo que aumentó y éste el punto mínimo que alcanzó, tratándolo de representar así.

E: … Pero aquí para sacar esto (La de posición), No utilizaste acumulación de áreas?

S_5: No

E: ¿Y lo que dicen las hojas, que positiva crece y negativa decrece?

S_5: Lo bueno creo que el motivo por lo que lo hice (piensa), fue porque según yo, bueno, lo que me vino a la mente consideré que sería una forma de interpretarlo, decir que el punto 2 aumentó, que fue el máximo incremento, y que en el punto 7 fue pues el mínimo, o sea que decreció.

La gráfica posición que propone es incorrecta, asocia crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la Derivada con el crecimiento y decrecimiento de la gráfica posición. Esto es, si la gráfica de la velocidad crece, la gráfica posición crece, si la gráfica velocidad decrece, la gráfica posición decrece. No considera si la gráfica de la Derivada es negativa o positiva. S_5 evidencia nociones de interpretación de gráficas a partir de su crecimiento y decrecimiento, pero aún se le dificulta distinguir una función de su primitiva y presenta problemas en diferenciar una gráfica decreciente de una negativa. Hasta este momento S_5 no muestra evidencias suficientes de construcciones en un nivel Inter-.

NIVEL TRANS-: En los documentos impresos, así como en las entrevistas, existen suficientes evidencias para concluir que en sus construcciones, S_5 no alcanzó el nivel Trans- del esquema: no logró identificar para qué le es útil la idea de reconstruir la función primitiva, no tiene sentido el proceso de acumulación de áreas y mucho menos la obtención de una función a partir de analizar el comportamiento de su Derivada, pese a que el estudiante cursaba simultáneamente la materia de Cálculo Integral y de antemano debió tratar el Teorema Fundamental del Cálculo (al menos el sentido geométrico de la Integral). Aun así, en su intento por resolver las situaciones problema encomendadas, evidencia que recurre a los siguientes esquemas previos:

R_8: Posee construcciones suficientes para operar sin dificultad con números reales (sumas, restas, multiplicaciones).

F_{10}: Construcciones suficientes que le permiten identificar sin dificultad las coordenadas en el plano cartesiano y ubica las variables que corresponden a cada eje.

M_8: Construcciones que facilitan la interpretación del concepto de velocidad media; además, identificó con plena autonomía y sin dificultad cuándo, en una situación problema, se requería calcular velocidades medias.

F_{13}: Construcciones aún débiles en el análisis del comportamiento geométrico de una función, destacando elementos como: el sentido creciente, decreciente y constante de una gráfica, identifica cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o cero.

A_5: Construcciones más consolidadas que le permiten calcular áreas de figuras geométricas (triángulos, rectángulos). Ya que a diferencia de niveles anteriores, en éste no enfrentó dificultades en calcular el área de un rectángulo.

En el diagrama de la figura 44 se observa que el sujeto no avanzó en sus construcciones, intenta manipular el objeto cuando éste le es presentado de tal forma que le exige ciertos conocimientos previos, como el análisis de gráficas e interpretación de cantidades infinitesimales. Se le sugirió la acumulación de áreas, pero no fue posible que aplicara lo adquirido en niveles inferiores, esta situación obedece a que el sujeto no posee construcciones sólidas de esquemas previos.

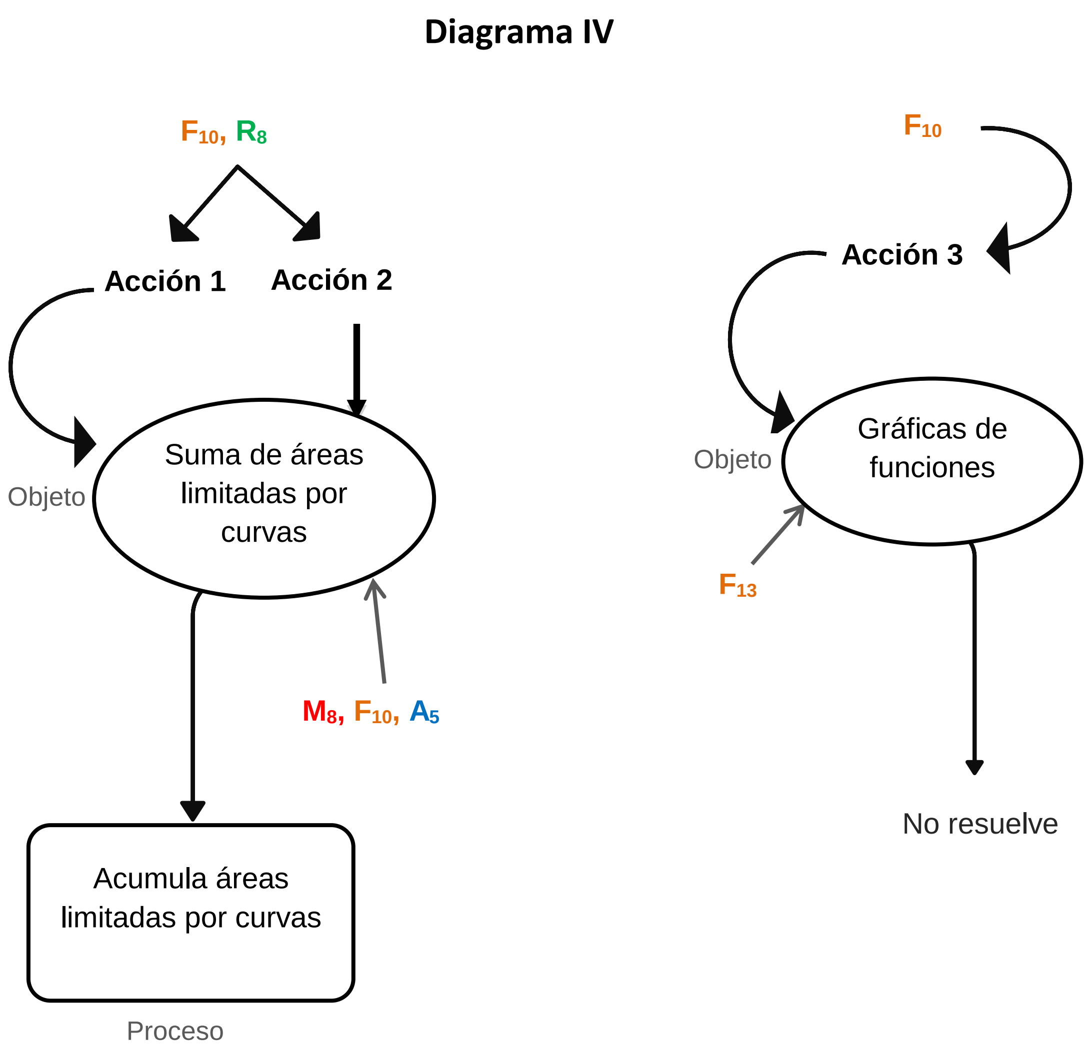


Figura 44. Diagrama que representa las construcciones en el nivel Trans- del sujeto S_5.

Hasta el momento se han expuesto los esquemas que el sujeto trae a su mente en sus construcciones de cada nivel, por ello resulta pertinente preguntar ¿cómo surge el proceso de acomodación? ¿Qué estructuras mentales previas o cuáles esquemas coordina el sujeto en sus construcciones? Para interpretar y dar una posible respuesta a estas interrogantes se generó el diagrama de la figura 45, en el que se pueden apreciar los esquemas que S_5 trae a su mente en cada nivel de construcción, así como las conexiones que hace entre ellos.

Se observa en el nivel Inter- que el sujeto no logró conectar a I_9 e I_{10} con los demás esquemas. Esto significa, para la investigación, que el sujeto puede traer a su mente una cantidad de esquemas, los cuales no necesariamente le son útiles para construir su conocimiento (es el caso de I_{10}). Además, si los esquemas a los que recurre son débiles, aun en su mente, difícilmente logrará generar estructuras sólidas necesarias para la apropiación. En este caso del concepto de la Integral.

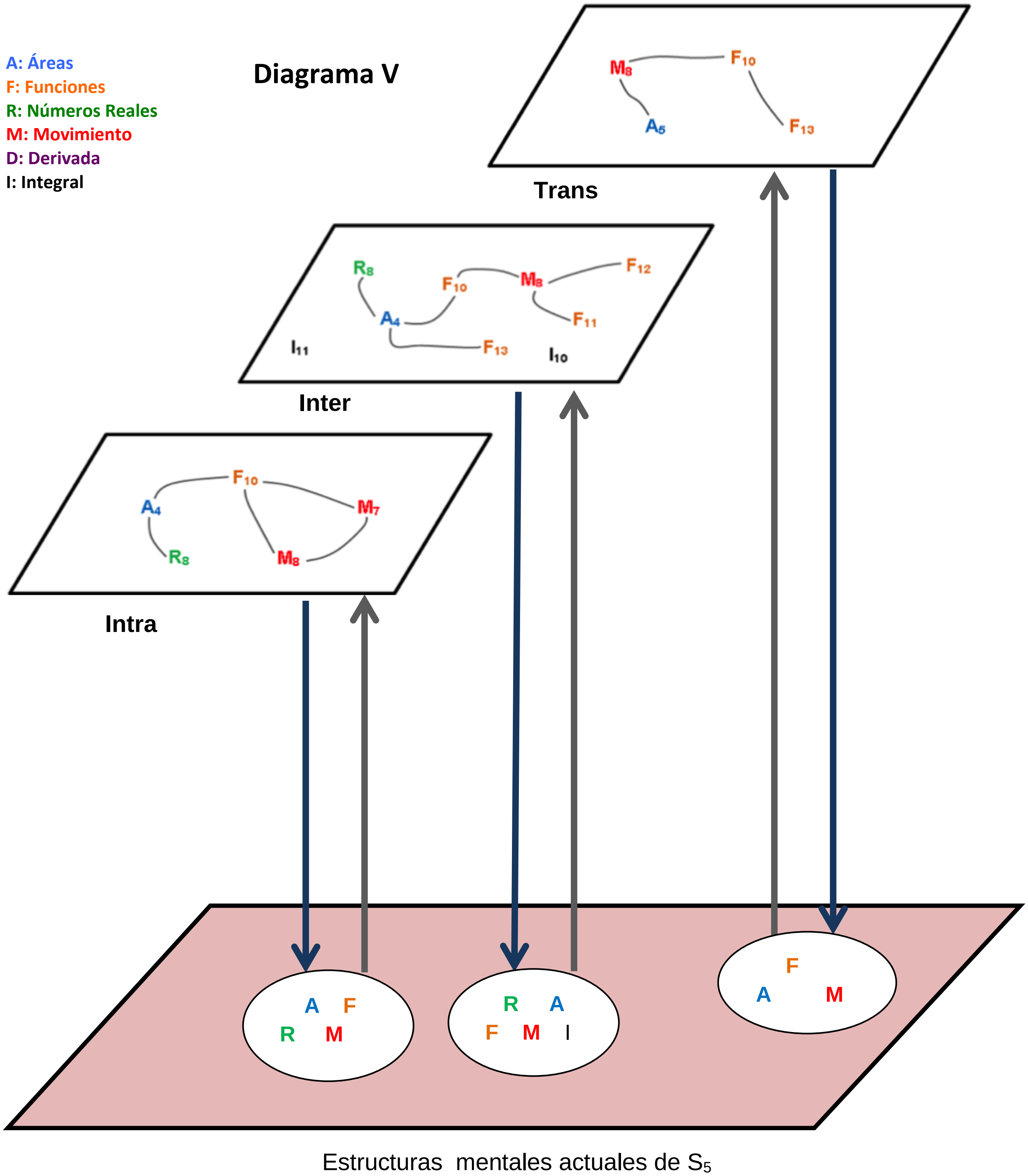
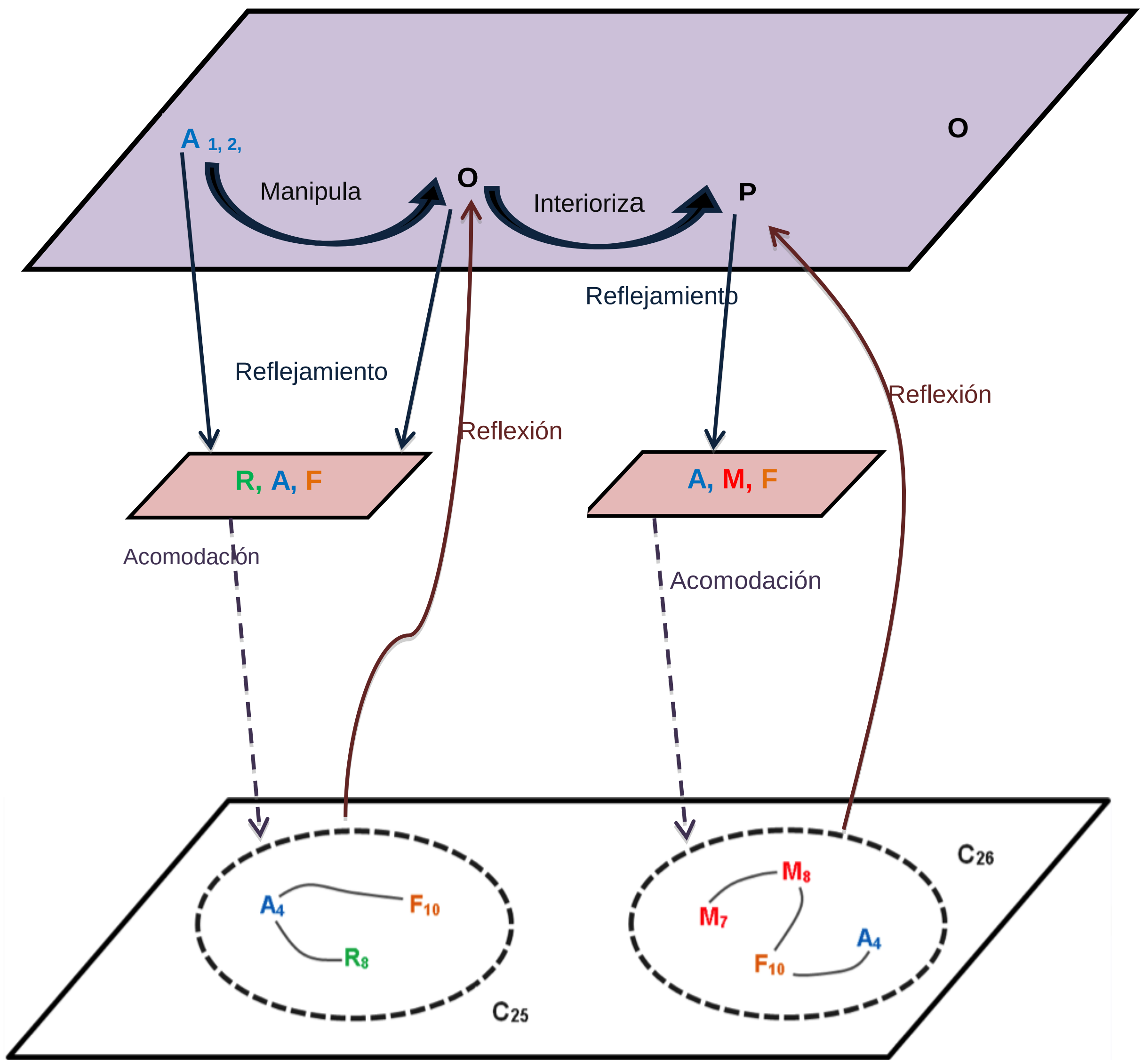


Figura 45. Diagrama que representa las conexiones entre los esquemas previos de S_5.

Para detallar las explicaciones para dicho diagrama, éste se desmembró para generar tres nuevos diagramas que a continuación se muestran. En esos se explica cómo se interpretan las estructuras que se generan en la mente del sujeto cuando surge el proceso de acomodación y asimilación. Las estructuras que corresponden al nivel Intra- se pueden apreciar en el diagrama de la figura 46.

Diagrama VI

Esquema en el nivel Intra (I_9)



Estructuras mentales actuales de S_5

Figura 46. Diagrama que representa construcciones de S_5 en el nivel Intra-.

Cuando el sujeto realiza las acciones $A_{1,2,3}$, hay un desequilibrio en su estructura cognitiva actual. En el diagrama se observan las abstracciones que tienen lugar en su mente, en este caso hay un reflejamiento hacia su estructura mental actual (plataforma inferior), en donde recurre a esquemas que facilitan la manipulación de áreas, las operaciones con números reales y la interpretación de datos en el plano cartesiano.

Surge un reacomodo en su estructura mental actual y genera las conexiones entre los esquemas A_4, F_{10} y R_8, como se aprecia en el diagrama de la figura 46; tiene lugar un proceso de reflexión hacia un plano superior del conocimiento, lo que le permite acercarse y manipular el objeto matemático *cálculo de áreas limitado por curvas* (O izquierda de la plataforma superior). La interacción del sujeto con el objeto matemático le permite interiorizar las acciones en procesos, los cuales implican nuevamente las abstracciones reflexivas, *reflejamiento* y *reflexión*.

En el diagrama se observa, en la plataforma superior, que no existe un conector que una los *procesos* P con el segundo *objeto* O. Esto significa que el sujeto no logra encapsular procesos en un nuevo objeto matemático; en este caso, se esperaría que la evidencia fuera el bosquejo de la gráfica de una función primitiva.

En los diagramas de las figuras 47 y 48 se aprecian, respectivamente, las construcciones en los niveles Inter- y Trans-, el ciclo de construcción del esquema es similar al del nivel Intra-, y se observan también las abstracciones, los esquemas así como las conexiones que tienen lugar en la mente del sujeto. Se aprecia también los logros del sujeto, que pueden observarse en los conectores de la plataforma superior, como reflejo también de que el sujeto trae a su mente esquemas, pero no logra enlazar o crear conexiones entre ellos. Esta situación obedece a que las construcciones previas a las que recurre son aún débiles en su mente, lo que le impide entender cómo podrá serle útil el esquema en turno.

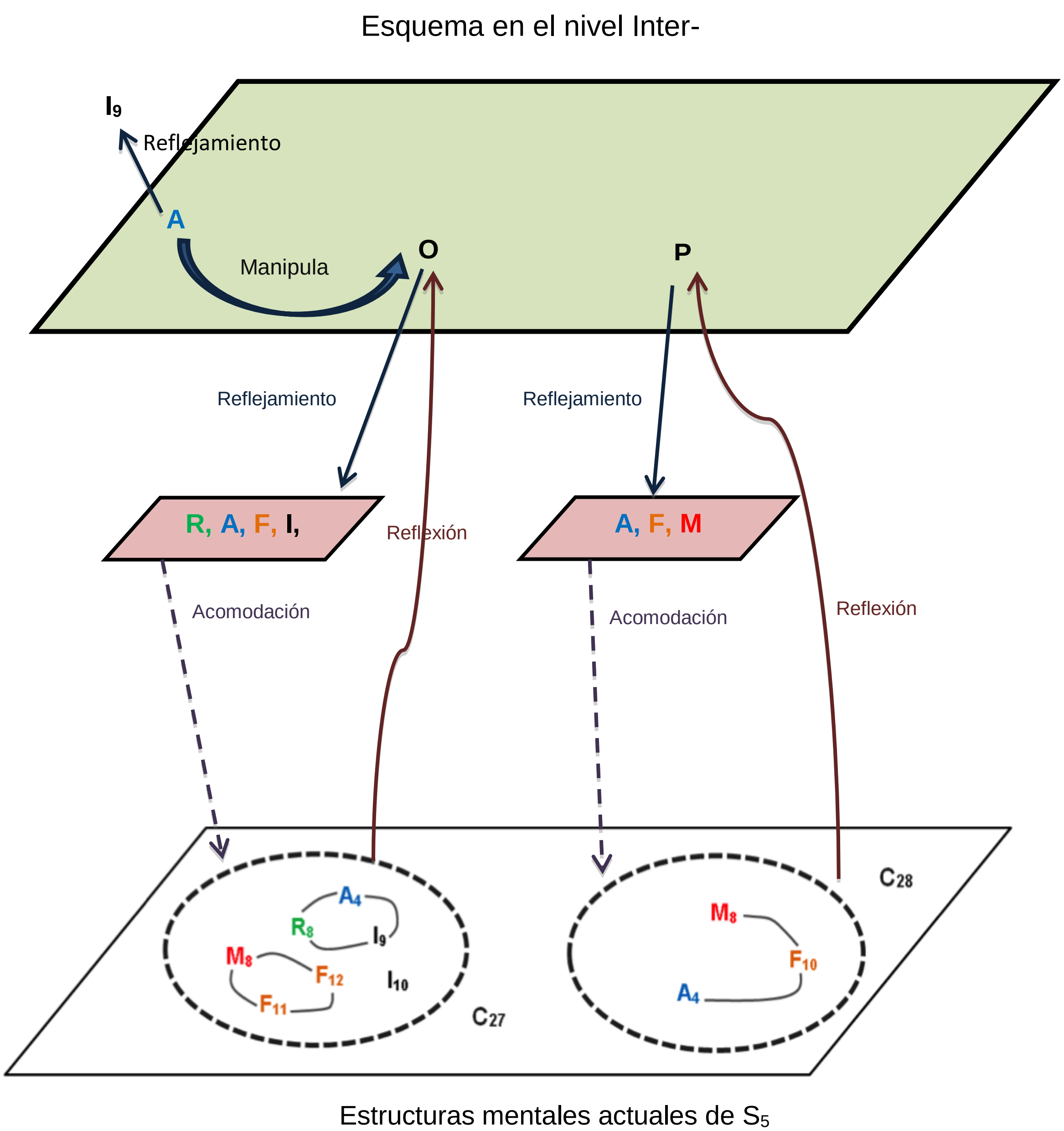
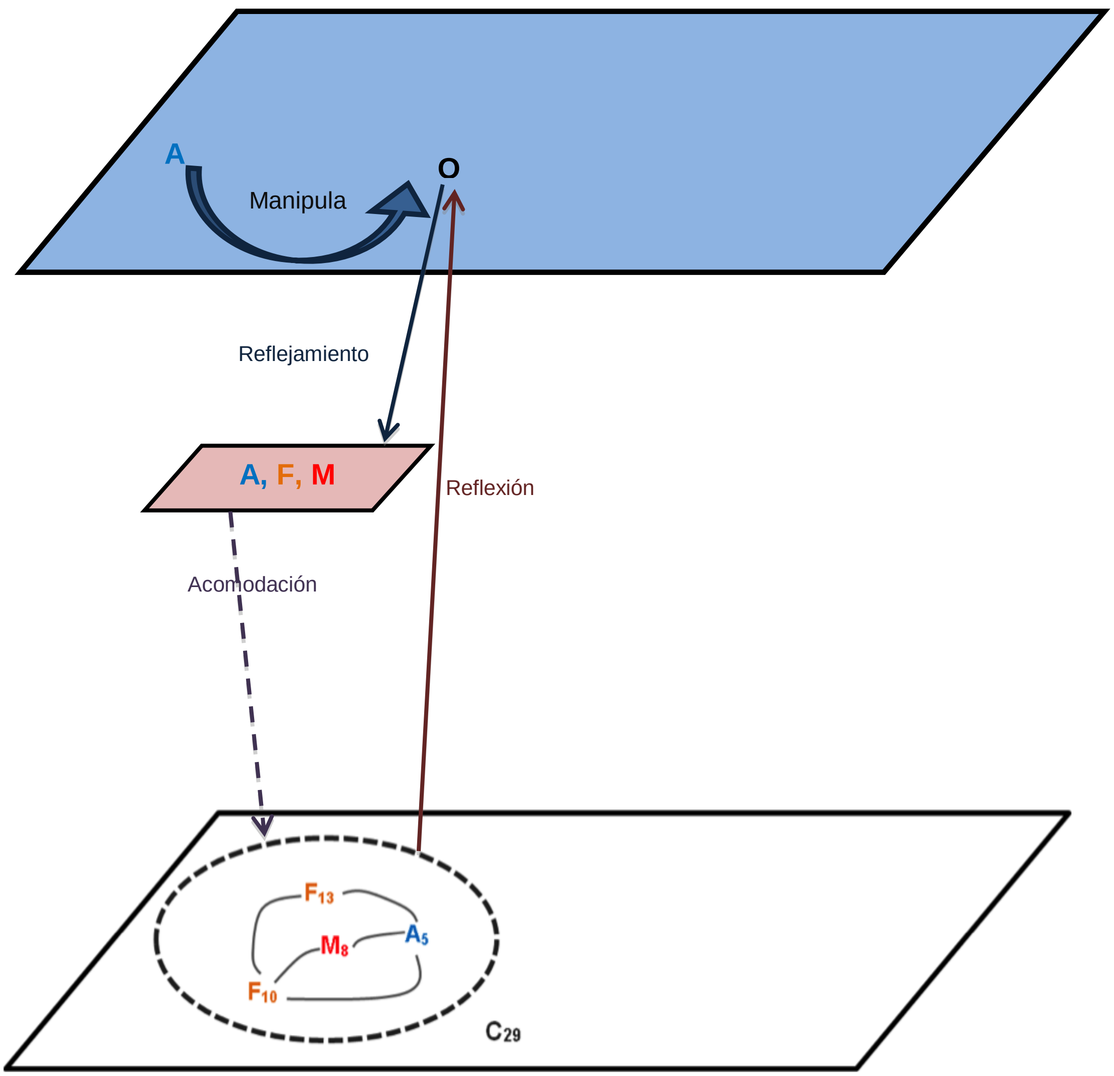


Figura 47. Diagrama que representa construcciones de S_5 en el nivel Inter-.

En el diagrama de la figura 48 se aprecia que cuando el sujeto realiza acciones sobre el objeto matemático O, recurre al esquema I_9, lo cual no le resulta útil ya que en esta etapa de construcción se enfrenta con gráficas diferentes a $f(x) = 1$, $f(x) =2$, y esto fue un conflicto en su estructura mental e intentó un reacomodo de sus esquemas previos, como se aprecia en el ovalo C_{27}, pero sin éxito.

Diagrama VIII

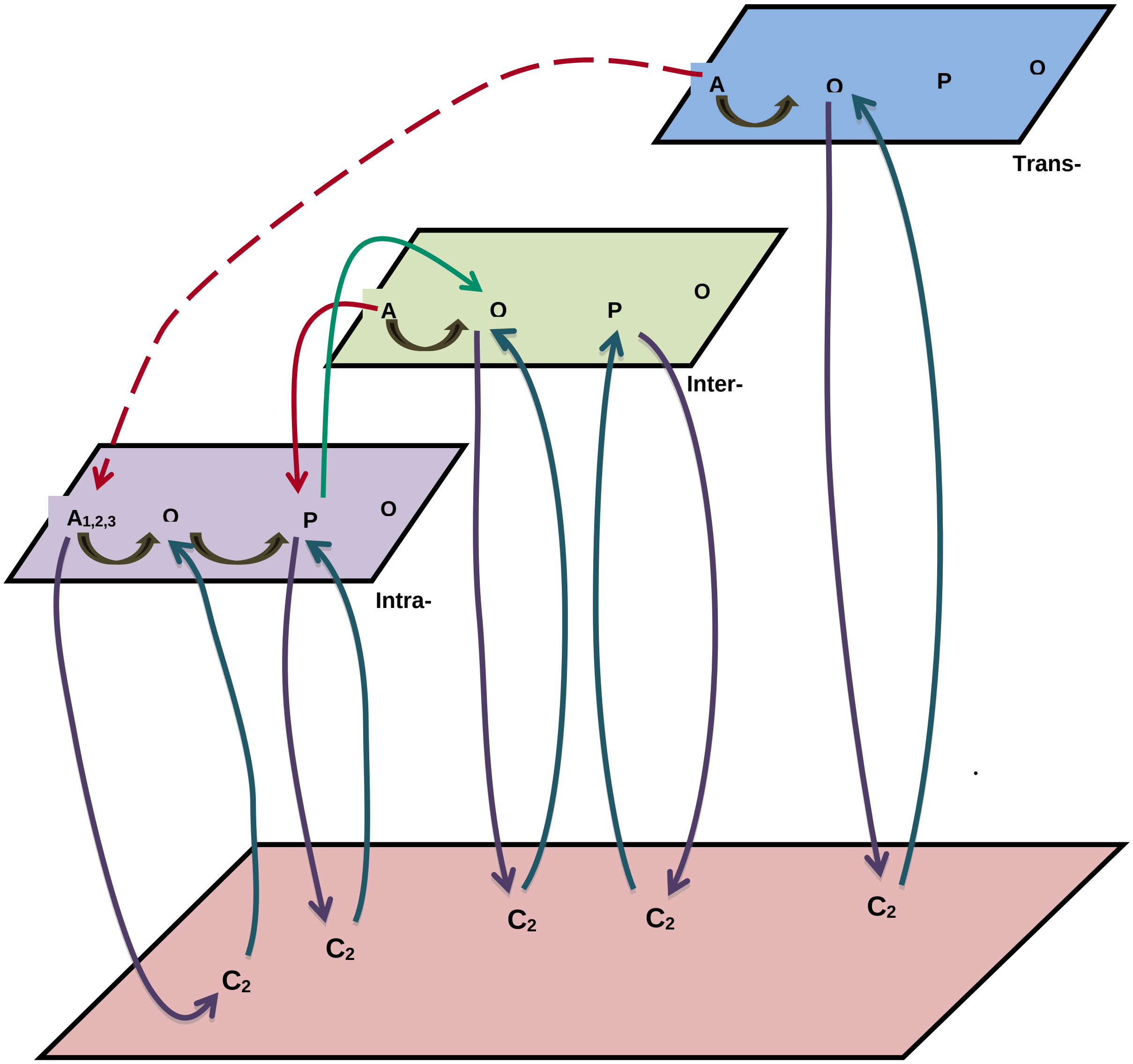
Esquema en el nivel Trans



Estructuras mentales actuales de S_5

Figura 48. Diagrama que representa construcciones de S_5 en el nivel *Trans*-.

En el diagrama de la figura 49, se muestra la plataforma cognitiva del sujeto. Se indican algunos de los esquemas mentales que moviliza en sus esfuerzos por construir el esquema para la apropiación del concepto de la Integral, así como las conexiones que surgen cuando transita entre los diferentes niveles de construcción.



Estructuras mentales actuales de S_5

Figura 49. Diagrama que representa el esquema para la apropiación del concepto de la Integral de S_5.

En este diagrama se puede sintetizar la construcción del esquema mental para la Integral explicado en los diagramas precedentes. Tras el intento de resolver las situaciones problema planteadas en la actividad 1.1, se reacomodan los esquemas actuales de S_5, los cuales se representan con C_{25}, generando así estructuras mentales que le permiten operar con números reales, calcular el área de un cuadrado, interpretar el significado de velocidad media y posición.

Sin embargo, no se observó que lleve a escena las estructuras necesarias que le permitan graficar una función; muestra habilidades para ubicar e interpretar puntos en el plano cartesiano y las variables que representan los ejes coordenados, pero en este primer acercamiento con el objeto, no fue capaz de realizar trazos de curvas a partir de la acumulación de áreas, a pesar de que en la misma evolución de la actividad se le indicó cómo lo podía hacer.

En la plataforma que representa el nivel de construcción Intra-, se observa que se propone iniciar construcciones al realizar las acciones $A_{1,2,3}$, y el sujeto, en el desarrollo de las mismas, logró generalizar en el proceso P la acumulación de áreas limitadas por rectas de la forma $f(t) = a$. Se observó que en este primer nivel de construcción el sujeto logró imitar el proceso de acumular área, pero no logró encapsular tal proceso en un objeto matemático.

Cuando transitó del Intra- al Inter-, los procesos P (del Intra-) son necesarios para iniciar las acciones correspondientes al nuevo nivel (Inter-), pero sus construcciones continúan en un nivel Intra-, ya que cuando realiza las actividades correspondientes a un nivel Inter-, el sujeto no es autónomo para aplicar el concepto de la Integral: desconoce para qué le pueden ser útiles los procedimientos de acumular áreas y, por tanto, no detecta situaciones (aun las similares a las ya trabajadas) en las que pueda aplicar los procesos P (del Intra-).

Sin embargo, cuando el sujeto resolvió las actividades diseñadas para indagar construcciones en un nivel Inter-, movilizó algunos esquemas, algunos C_{27} y otros C_{28}, con los que logró interpretaciones geométricas elementales de gráficas, y mostró conocimientos básicos que le permitieron describir cuándo una función es creciente o decreciente (información necesaria para este nivel), a pesar de que creó estructuras cuando se coordinaron los esquemas existentes con la nueva información. No logró resolver las situaciones problema correctamente, no distinguió el significado del comportamiento de la función Derivada y su repercusión en la gráfica de su primitiva.

En sus esfuerzos por resolver las situaciones planteadas, el sujeto intentó recurrir a algún significado de la Integral como lo había tratado en el curso de Cálculo Integral; sin embargo, no logró resultados favorables. Los resultados que arrojó la investigación muestran que no conformó las estructuras mentales necesarias que promovieran la apropiación del concepto de la Integral desde otros registros, como el numérico (lo que en su clase de Cálculo Integral consistió en calcular la Integral Definida) y el algebraicos (lo que en su clase de Cálculo Integral consistió en recuperar, a partir de una expresión dada y de ejecutar algoritmos, la función primitiva).

Cuando realizó las acciones A, que aparecen en el bloque que representa un nivel Trans- del esquema mental, no recurrió de manera autónoma a I_9 (acumulación de áreas), pero tampoco a la información que se le proporcionó acerca del efecto de la gráfica de la Derivada sobre la gráfica de su primitiva. En el diagrama de la figura 48 se pueden apreciar los esquemas representados por C_{29} que coordina el sujeto para formar estructuras con las que intenta incluir la nueva información; sin embargo, no logra resultados favorables. En el nivel Trans-, además de recurrir a algunos C_{29}, trae al escenario información A_5, que obtiene en su transitar por cada bloque. Esto se refiere a que ya no enfrentó dificulta para calcular el área de la figura que se formaba cuando se trataba de acumular áreas.

En el proceso de construcción del esquema se puede apreciar el tipo de abstracción que tuvo lugar en la mente de S_5. Cuando se le presentó al sujeto la nueva información, se observó que hay coordinación de diferentes esquemas en los tres niveles de construcción. Sin embargo, de acuerdo a los esquemas a los que el sujeto recurrió y la profundidad de dominio de la información que manifestó, se infiere que el sujeto no construyó el esquema mental para el concepto de la Integral en niveles avanzados, ya que posee estructuras mentales previas débiles, o carece de algunos esquemas que hubiesen favorecido otro tipo de coordinaciones o la apropiación de conceptos en un nivel mayor de dominio.

Sin mencionar los problemas que manifestó en el cálculo de áreas de figuras como rectángulos y triángulos, S_5 muestra deficiencias (o la total ausencia) en la construcción de otros esquemas que se consideran mínimos necesarios para iniciar la construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral desde registros geométricos, ya que al tratarse de éstos, debe poseer esquemas mentales de otros conceptos desde registros geométricos.

Tal es el caso de la interpretación geométrica de funciones: aunque el sujeto no enfrentó dificultad en determinar puntos en el plano, e incluso manifestó construcciones débiles del sentido creciente y decreciente de funciones, conceptos tales como el comportamiento constante de una función no son claros, no mostró una interpretación del significado de velocidades negativas cuando analizó una gráfica, y no logró diferenciar velocidades constantes de variables.

Cabe mencionar que logró interpretar cuándo una gráfica es positiva y cuándo es negativa, pero no logró enlazar esta información para describir curvas. Se observó que trajo a su mente esquemas sobre la manipulación de cantidades infinitesimales; si bien esto último no resultó indispensable para construir gráficas de primitivas, hubiese sido un conocimiento suficiente para establecer las diferencias entre el trazo de una gráfica suave con respecto de una trazada con segmentos rectilíneos.

Los diagramas de apoyo, para explicar las construcciones de los sujetos S_2,y S_5, se elaboraron para cada sujeto (ver anexo correspondiente, indicado en la tabla 5). Entones cabe mencionar que se identificaron y se describieron los esquemas previos a los recurrió cada uno cuando se resolvieron las actividades encomendadas, los obstáculos que cada uno debió enfrentar en el momento de solucionar las actividades así como sus logros al final de cada bloque.

Sin embargo, con el fin de dar respuesta a las preguntas que se generan en esta investigación, se realizó un análisis comparativo sobre los esquemas comunes a los que recurrió cada sujeto, así como a las dificultades que enfrentaron en su proceso de construcción. Para esto se estableció una nomenclatura que representa de manera general el campo de las matemáticas en el que se ubica cada esquema mental. Dicho esto, a continuación se presenta tal análisis organizado en varias tablas.

4.3 Tablas comparativas

La información extraída de los diagramas elaborados para cada sujeto se organizó en las tablas que se muestran a continuación, las cuales fueron útiles para perfilar las respuestas a las preguntas: ¿Cuáles esquemas moviliza el sujeto en sus construcciones? ¿Qué conflictos enfrenta en la solución de las actividades? Cada tabla está organizada a partir del sujeto que, se considera, construye más hasta quien construye menos, se muestran las diferencias y similitudes entre las construcciones de los sujetos respecto a los esquemas previos de los que hacen uso.

La nomenclatura que aparece en cada tabla hace alusión al campo del conocimiento matemático que estuvo presente en la mente de cada sujeto para que fueran posibles sus construcciones. En los anexos que van del E al J, se especifica el nivel de dominio que muestra cada sujeto cuando recurre a tal información.

a) Respecto a los conocimientos previos a los que recurren

Como se mencionó, para generar las tablas 10, 11 y 12 se analizaron las construcciones de cada sujeto (anexos E al J), los esquemas que son traídos a la mente cuando se manipulan objetos matemáticos en aras de construir un esquema mental personal para la apropiación del concepto de la Integral. Se puede observar que en la nomenclatura de las tablas referidas aparece la letra "g", lo cual significa que la descripción del esquema en turno es sólo una idea *general* del conocimiento al que recurren los sujetos.

En los anexos E al J se describe en detalle cómo es que el sujeto tuvo acceso a tal conocimiento y cómo lo relacionó con otros esquemas. La primera letra que aparece en cada nomenclatura hace referencia a esquemas dentro de determinado campo de las matemáticas.

Los esquemas que inician con la letra "A" hacen alusión a algún conocimiento relacionado con el *cálculo de áreas*.

Ag_1: Calcula e interpreta áreas de figuras geométricas (cuadrado, triángulo, rectángulo) y es capaz de estimar áreas de figuras geométricas que poseen un lado descrito por una línea curva.

Ag_2: Calcula áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos limitados por líneas rectas (S_5 sólo recordó cómo calcular el área de un cuadrado).

Los esquemas que inician con la letra “F” se refieren a conocimientos relacionados con el *plano cartesiano y funciones*.

Fg_1: Interpretación geométrica funciones (sentido creciente, decreciente, cruces con lo ejes, puntos donde la gráfica es positiva, negativa, nula).

Fg_2: Interpreta y localiza puntos en el plano cartesiano.

Fg_3: Grafica funciones asignando valores a la variable independiente (ejemplo: v = 2x).

Fg_4: Interpreta las variables que aparecen en una función y es capaz de interpretar una gráfica asociando tales variables.

Fg_5: Infiere sobre la noción de infinitesimal en la gráfica de una función (ejemplo: cuando se trata de definir si una curva es suave o posee trazos discretos).

Fg_6: Relaciona geométricamente la gráfica de velocidad con la gráfica de posición y puede hacer inferencias de la primera sobre la segunda.

Fg_7: Extrae datos de una tabla y es capaz de relacionarlos con una gráfica y con los ejes coordenados.

Los esquemas que inician con la letra “M” se refieren a conocimientos relacionados con el *movimiento de partículas: velocidad, aceleración, posición*.

Mg_1: Explica de manera verbal los conceptos de velocidad y posición.

Mg_2: Interpreta velocidades medias.

Mg_3: Aplica la fórmula de v = d/t para calcular alguna de las variables que en ésta se indican.

Mg_4: Es capaz de dar una interpretación geométrica al significado que tiene una velocidad negativa, positiva y cero.

Mg_5: Interpreta situaciones problema en las que aparecen tanto velocidades variables o constantes.

Los esquemas que inician con la letra “R” se refieren a conocimientos relacionados con los *números reales*.

Rg_1: Conceptualiza e interpreta geométricamente la idea de infinito.

Rg_2: Conceptualiza e interpreta en el plano cartesiano la idea de cantidad infinitesimal.

Rg_3: Es capaz de interpretar y explicar la idea de que un segmento limitado por dos números reales (un intervalo sobre los ejes coordenados) puede dividirse en una gran cantidad de segmentos, sin importar si éstos representan una cantidad física como tiempo, velocidad, posición.

Rg_4: Realiza operaciones con los números reales, tales como suma, resta, multiplicación y división.

Los esquemas que inician con la letra “D” se refieren a conocimientos relacionados con la *Derivada de una función*.

Dg_1: Interpreta la Derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

Dg_2: Interpreta la Derivada como la velocidad instantánea con la que se mueve una partícula.

Dg_3: Es capaz de trazar, a partir de la interpretación geométrica de la derivada, la recta tangente a una curva en un punto e interpretar una gráfica a partir de la posición de tal recta.

Los esquemas que inician con la letra “I” se refieren a conocimientos relacionados con la *Integral*.

Ig_1: Acumula áreas limitadas por gráficas representadas por segmentos rectilíneos; para esto requiere tomar como referencia otros cálculos.

Ig_2: Conceptualiza la Integral como la antiderivada, sin que haya de por medio una expresión o una gráfica, lo hace de manera verbal.

Ig_3: Es capaz de acumular áreas limitadas por una variedad de curvas, sin importar si son lineales o curvas, y puede así obtener la gráfica de una función primitiva.

Ig_4: Es capaz de obtener la gráfica de una primitiva a partir del análisis del comportamiento de la gráfica de su función Derivada

Tabla 10

Esquemas previos a los que recurre cada sujeto en el nivel Intra-

NIVEL INTRA-													
	Ag_1	**Ag_2**	**Fg_1**	**Fg_2**	**Fg_4**	**Fg_5**	**Mg_1**	**Mg_2**	**Mg_4**	**Rg_1**	**Rg_2**	**Rg_3**	**Rg_4**
S_2	X		X	X		X	X		X	X	X	X	X
S_3	X		X	X	X	X	X		X	X	X	X	X
S_1	X			X	X	X	X	X				X	X
S_4		X		X		X	X						X
S_6		X		X			X						X
S_5		X		X			X	X					X

Tabla 11

Esquemas previos a los que recurre cada sujeto en el nivel Inter-

NIVEL INTER-																				
	Ag_1	Ag_2	Fg_1	Fg_2	Fg_4	Fg_5	Fg_6	Fg_7	Mg_1	Mg_2	Mg_3	Mg_4	Mg_5	Rg_1	Rg_2	Rg_3	Rg_4	Dg_2	Ig_1	Ig_2
S_2	X		X	X		X	X	X	X		X	X		X	X	X	X	X	X	
S_3	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X		X	X	X	X		X	
S_1	X			X	X	X	X	X	X		X		X			X	X		X	
S_4		X		X	X			X	X		X						X		X	
S_6		X		X				X			X						X		X	
S_5		X	X	X				X		X	X						X		X	X

Tabla 12

Esquemas previos a los que recurre cada sujeto en el nivel Trans-

NIVEL TRANS-																							
	Ag_1	Ag_2	Fg_1	Fg_3	Fg_4	Fg_5	Fg_6	Mg_1	Mg_2	Mg_3	Mg_4	Mg_5	Rg_1	Rg_2	Rg_3	Rg_4	Dg_1	Dg_2	Dg_3	Ig_1	Ig_2	Ig_3	Ig_4
S_2	X		X		X	X	X	X			X			X	X			X		X	X	X	X
S_3	X		X		X	X	X	X		X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X
S_1					X		X	X				X				X					X		
S_4		X		X	X			X								X				X			
S_6		X		X	X					X													
S_5		X	X		X				X							X				X			

Se mencionó que en las tablas fueron incluidos todos los sujetos, y fueron organizados a partir del que evidenció mayores construcciones (S_2) hasta el de menores construcciones (S_5). De acuerdo a los datos que aparecen en éstas, se observa que los primeros sujetos (S_2, S_3 y S_1) recurren a esquemas similares y los que menos construyen (S_4, S_6 y S_5) recurren en menor medida a los esquemas referentes a gráficas de funciones.

b) Respecto a las dificultades que enfrentaron en el proceso de solución de cada actividad

Ahora se muestran las dificultades que surgen en el momento en que los sujetos manipulan objetos matemáticos. Esas dificultades van desde esquemas en el campo de las matemáticas (tratadas en diversas etapas escolares), cuya construcción es débil aun en esquemas que le impiden al sujeto interpretar una instrucción para ejecutar una acción.

Tal información, extraída de las entrevistas en las cuales el sujeto argumenta la solución de las situaciones problema, se concentró en las tablas 13, 14 y 15. Las nomenclaturas que aparecen en dichas tablas significan lo siguiente: La "d", incluida en todas las abreviaturas, refiere la palabra *dificultad*, y la primera letra, escrita con mayúscula, se refiere al campo de conocimiento matemático al que pertenece la dificultad que aparece en escena en el momento en que cada sujeto resuelve sus actividades.

A-d$_1$: Dificultades en calcular áreas limitadas por curvas, cuando se trata de trazar un rectángulo, triángulo o cuadrado que posea un lado limitado por un segmento rectilíneo.

A-d$_2$: Dificultades para calcular áreas de figuras geométricas tales como triángulos, rectángulos o cuadrados.

F-d$_1$: Dificultad para identificar las variables asignadas a los ejes coordenados.

F-d$_2$: Dificultad para representar geométricamente el significado o efecto de una velocidad negativa.

F-d$_3$: Dificultad para graficar una función cuando se le proporciona la expresión que la representa.

F-d$_4$: Dificultad para interpretar gráficas cuando en alguna parte de su dominio son negativas o positivas, crecientes o decrecientes.

F-d$_5$: Dificultades para interpretar la gráfica de una situación problema cuando en los ejes coordenados no se ha asignado una escala, aun cuando el contexto del problema la sugiere.

M-d$_1$: Dificultades para distinguir velocidades medias y velocidades instantáneas.

M-d$_2$: Dificultades para distinguir, tanto dentro del contexto de la situación problema como geométricamente, cuándo una velocidad es constante y cuándo variable.

M-d$_3$: Dificultades para relacionar geométricamente los conceptos velocidad y posición

R-d$_1$: Dificultades para interpretar la cantidad de números reales que se encuentran dentro de un intervalos. No visualiza la divisibilidad de un segmento rectilíneo que pertenece a los ejes coordenados.

R-d$_2$: Dificultad de interpretar cantidades infinitesimales y cómo éstas pueden ser entendidas en la gráfica de una función cuando se trata de determinar el área limitada por una curva, el eje horizontal dentro de un intervalo.

Ins: Dificultades para seguir instrucciones establecidas en las actividades y, en ocasiones, no lee con cuidado lo que se le está solicitando.

Tabla 13

Esquemas previos en los que se detectan dificultades en cada sujeto en el nivel Intra-

NIVEL INTRA-											
	A-d$_2$	**F-d$_1$**	**F-d$_2$**	**F-d$_3$**	**F-d$_4$**	**F-d$_5$**	**M-d$_2$**	**M-d$_3$**	**R-d$_1$**	**R-d$_2$**	**Ins**
S$_2$		X									
S$_3$											
S$_1$			X							X	
S$_4$		X				X			X		X
S$_6$				X			X	X			X
S$_5$	X			X	X			X	X		X

Tabla 14

Esquemas previos en los que se detectan dificultades en cada sujeto en el nivel Inter-

NIVEL INTER-													
	A-d$_1$	**A-d$_2$**	**F-d$_1$**	**F-d$_2$**	**F-d$_3$**	**F-d$_4$**	**F-d$_5$**	**M-d$_1$**	**M-d$_2$**	**M-d$_3$**	**R-d$_1$**	**R-d$_2$**	**Ins**
S$_2$			X										
S$_3$													
S$_1$	X		X	X							X	X	
S$_4$	X		X				X	X	X		X	X	X
S$_6$	X	X		X	X				X	X			X
S$_5$	X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X

Tabla 15

Esquemas previos en los que se detectan dificultades en cada sujeto en el nivel Trans-

NIVEL TRANS-											
	A-d$_1$	**F-d$_1$**	**F-d$_2$**	**F-d$_3$**	**F-d$_4$**	**F-d$_5$**	**M-d$_2$**	**M-d$_3$**	**R-d$_1$**	**R-d$_2$**	**Ins**
S$_2$		X									
S$_3$											
S$_1$	X	X	X							X	
S$_4$	X					X			X	X	X
S$_6$	X		X				X	X			X
S$_5$	X		X	X	X		X	X	X	X	X

c) Respecto a los logros al final del trabajo con los materiales

En la tabla 16 se muestran algunos de los logros de los sujetos que participaron en la investigación. Se aclara que sólo se mencionan los que son directamente de interés para la investigación. Por supuesto que hubo logros colaterales que de manera particular beneficiaron a cada sujeto, ejemplo de ello es el caso de S_2 y S_3, quienes después del trabajo de campo comentaron que el conocimiento adquirido favoreció su interpretación geométrica sobre la graficación de funciones a partir de la Derivada, la localización de los puntos máximos, mínimos relativos y de inflexión, tomaron otro sentido en su actividad académica, más geométrico que algorítmico.

Tabla 16

Logros de los sujetos al final de las actividades el tercer bloque

	Logró acumular áreas limitadas por gráficas lineales	Logró generalizar el procesos de acumulación de áreas limitadas por curvas que pertenecen a diferentes familias	Logró procesos de reversibilidad	Logró identificar cuándo un problema puede ser resuelto con la Integral desde registros visuales	Logró la manipulación de cantidades infinitesimales	Logró interpreta geométricamente el comportamiento de la Derivada (crecimiento, decrecimiento, nula) y su efecto en la gráfica de la función primitiva
S_2	X	X	X	X	X	X
S_3	X	X	X	X	X	X
S_1	X					½ X
S_4	X	X				
S_6	X					
S_5	X					

Como un acercamiento inicial al análisis de los datos, se puede destacar de las tablas 10,11 y 12, en las que se citan los esquemas mentales previos a los que recurre cada sujeto para iniciar sus construcciones en los diferentes momentos del esquema —de la Integral— que se aprecian los esquemas en los que la mayoría de los sujetos coinciden, por ejemplo, la relación entre los conceptos de velocidad y aceleración. Esto resulta lógico si se considera que, en el periodo escolar en el que se llevó a cabo el trabajo de campo, los estudiantes trataron estos conceptos en su clase de Mecánica Clásica; el profesor del curso fue muy enfático en los conceptos y en marcar la diferencia entre una velocidad media y una instantánea.

En las tablas 13, 14 y 15 se observa que S_3, a diferencia de S_4 o S_5, no manifestó las dificultades que los otros sujetos mostraron en el proceso de solución. Para el análisis de cada individuo fue necesario hacer notar estas dificultades en su proceso de construcción del esquema, dado que es preciso encontrar explicaciones acerca de cómo y por qué un sujeto logra o no apropiarse del concepto. En lo referente a la tabla 16 se observa que el sujeto S_2 logró comprender el significado de una velocidad positiva y una negativa, logró interpretar geométricamente el signo de la velocidad y su repercusión en el análisis de la gráfica de la posición de un móvil.

4.4 Diferencias y Similitudes entre las construcciones de los seis sujetos

Para enriquecer los resultados que arroja el análisis de los sujetos S_2 y S_5, y con la intención de ampliar los horizontes sobre cómo se construye el esquema mental para la Integral, y así tener respuestas a las interrogantes que se plantearon desde el inicio de la investigación, se decidió analizar y comparar las construcciones de todos los sujetos; todo esto como producto de la información que arrojan las tablas 10 a la 16 y las observaciones detalladas de las construcciones de cada sujeto.

Tal análisis se inicia comparando las construcciones de los sujetos S_2 y S_5 , de los sujetos S_2 y S_3, quienes se consideraron como los que lograron mayores construcciones, y los casos S_5 y S_6, quienes construyeron menos. Se recordará que el orden que se dio a los sujetos de acuerdo a sus construcciones es: S_2, S_3, S_1, S_4, S_6, S_5. Se puede observar que para el análisis de los sujetos se tomaron los dos primeros y los dos últimos casos; esto no significa que se omitieron los datos que proporcionaron los sujetos S_1 y S_4, sino que éstos mostraron información que de alguna manera está inmersa en la que se recabó de S_2 y S_3 (S_1) y la que se recabó de los casos S_6 y S_5 (S_4).

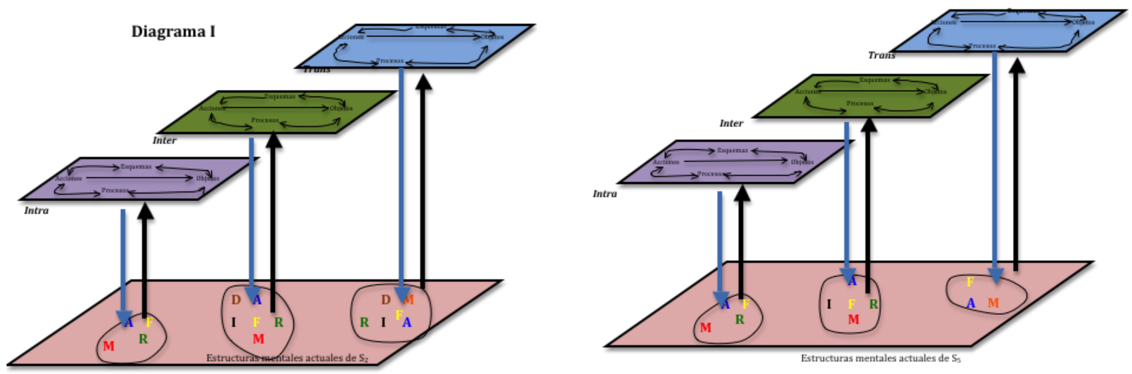
4.4.1 Diferencias y Similitudes entre las construcciones de S_2 y S_5.

En otros apartados se ha descrito el perfil académico de estos sujetos, se comentó que S_2 es un estudiante de nuevo ingreso quien, en el momento del trabajo de campo, aún no cursaba la materia de Cálculo Integral, y que presentó cualidades académicas destacadas en el curso de Mecánica Clásica.

Por otro lado, S_5 es un estudiante del tercer semestre de la misma carrera que S_2, cursaba por segunda ocasión la materia de Mecánica Clásica y por primera vez la materia de Cálculo Integral, los antecedentes académicos que mostró en Mecánica Clásica son los de un estudiante que tiene algunos rezagos en sus conocimientos matemáticos previos y que debió consolidar en etapas escolares anteriores.

Cuando se entrevistaron los dos sujetos, ambos mostraron disposición al trabajo y control de la tensión que pudiera ocasionar el estar frente a una videocámara y sobre todo porque debían explicar sus procesos de solución a los problemas planteados.

El primer punto que se consideró para el análisis de estos sujetos fue revisar los campos matemáticos a los que recurre cada uno (ver tablas 10 a la 16). En la plataforma inferior de la figura 50 se puede apreciar que los sujetos recurren a campos matemáticos similares, tales como números reales, funciones, áreas y algunos conceptos de movimiento de partículas como velocidad y posición, las construcciones actuales de la Integral y S_2, a diferencia de S_5, recurre a la Derivada.



(a) S_2 (b) S_5

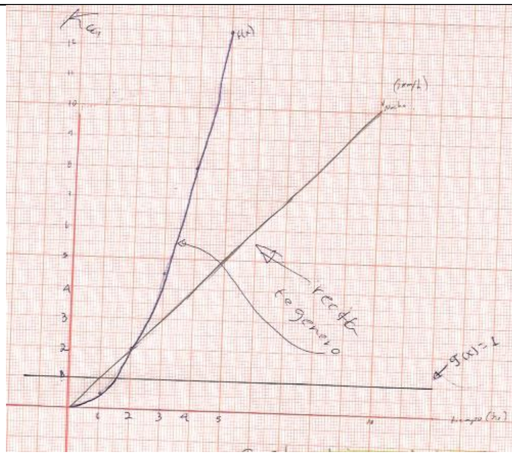
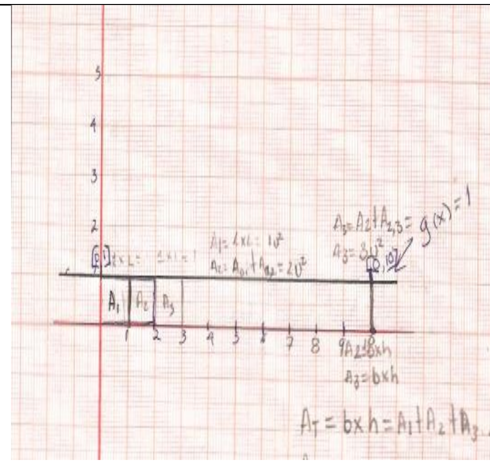
Figura 50. Campos matemáticos a los que recurren los sujetos S_2 y S_5.

En el proceso de construcción de estos dos sujetos surgieron algunas situaciones que, aun el que más construyó, debió enfrentar. Desde el bloque I el sujeto S_2 enfrentó dificultades para interpretar las variables de los ejes coordenados; de hecho, el sujeto iniciaba el análisis de las gráficas sin percatarse de si estaban definidas o no las variables, asumía que de acuerdo a los datos del problema, los ejes trataban a tales variables.

Esta situación no fue tan notoria con S_5, quien hasta la profundidad del análisis que logró, no mostró evidencias de esta situación. En la tabla 17 se muestran lo datos recabados en la entrevista, en donde los sujetos explican el procedimiento mediante el cual resolvieron la actividad 1.1, que pertenece al bloque I, la cual fue diseñada para observar construcciones en un nivel Intra-.

Tabla 17

Solución de la actividad 1.1

 Solución de S_2	 Solución de S_5
Se le solicitó que explicara cómo obtuvo sus gráficas. Lo que hace es acumular áreas y a partir de esto bosqueja correctamente la gráfica de una primitiva, pero no de la gráfica que se le solicitó, al respecto argumentó lo siguiente: *S_2: …Dije ¿por qué tiene una línea así?, si la velocidad es constante, 2, entonces tiene que ir así (señala la recta y =2x), pero ya después en el segundo bloque, vi que era velocidad contra tiempo y yo la estaba viendo como si fuera posición contra tiempo, por eso yo puse esta otra gráfica, por eso me había confundido, porque ya después de que salimos del salón dije: ¡Ah! Éste era velocidad contra tiempo, no era posición contra tiempo.*	Se le preguntó por qué no concluyó la actividad y respondió lo siguiente: *S_5: ¡Ah! creo que no los grafiqué ¿verdad?, mmm… (piensa)* *E: No, pero ¿por qué no lo hiciste? ¿Lo olvidaste?* *S_5: O más bien creo lo dejé para el final y me lo brinqué más bien, porque es que sí, maestra, me lo brinqué.* *E:¿No porque no hayas sabido cómo hacerlo?* *S_5: Pues es que bueno, este la vi y al principio, no, no lo recordé, no me acordé. Entonces la dejé y dije, bueno, a lo mejor si continuando con lo demás me acuerdo de algo. Pero ya éste, no sé a lo mejor le seguí de largo y ya no me regresé y no me acordé de regresarme.*

A pesar de que S_2 enfrentó algunas dificultades para interpretar los ejes coordenados, como se puede observar en el fragmento de entrevista, las superó en cada una de las situaciones planteadas para cada bloque y concluyó sin dificultad sus respuestas. En ningún momento se le aclaró o se le proporcionó información extra para que modificara sus consideraciones geométricas sobre la asignación de las variables de los ejes coordenados. Si en sus análisis surgía un error al respecto, en la entrevista, cuando intentaba explicar sus procesos de solución, se percataba de éste en la mayoría de los casos y lo corregía adecuadamente.

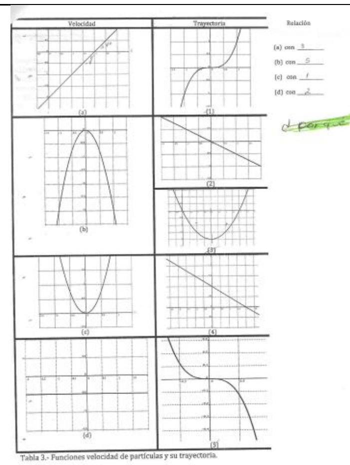
Las diferencias entre las construcciones de los sujetos fueron evidentes desde que resolvieron la primer actividad (1.1 del bloque I). En el fragmento de entrevista de la tabla 17 se observa que el sujeto S_5 no atiende indicaciones de lo que se debe hacer, omite instrucciones o sencillamente no le resultan claras. Una prueba de ello se dio cuando se le solicitó, en la actividad 1.1 que imitara un proceso (por tratarse de una actividad para el nivel Intra-) para bosquejar la gráfica de la primitiva de una función dada. No lo hizo. Por otro lado S_2 mostró suficientes evidencias de que siguió las indicaciones adecuadas.

En el material del bloque I, proporcionado a cada sujeto, en ningún momento se mencionó la palabra "Derivada", sin embargo, el sujeto S_2 ya contaba con esta información, la cual le resultó útil para la actividad. Ninguno de los sujetos acumuló áreas para responder la actividad pero S_2, a diferencia de S_5, bosquejó la primitiva de cada función velocidad recurriendo principalmente al análisis del comportamiento (si es positiva, negativa o cero, decrecimiento) de la Derivada.

De acuerdo a los datos recabados, resulta evidente que los mecanismos de construcción de los sujetos difieren. Se observó que el "cómo" accesó cada individuo a cierta información depende en gran medida de su andamiaje mental previo. Prueba de ello se obtiene de los argumentos que dan los estudiantes (tabla 18) respecto a la solución de la actividad 1.2, que corresponde al bloque I y fue diseñada para observar construcciones en un nivel Inter-, en el que se supone que a los dos previamente se les motivó a manipular el mismo objeto matemático (suma de áreas limitadas por gráficas), y en donde cada sujeto se acercó al objeto de acuerdo a su estructura mental previa.

Tabla 18

Respuesta de S_2 y S_5 a la actividad 1.2, que corresponde al nivel Inter-

<table>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>El sujeto S_2 asoció:
a-3
b-5
c-1
d-2
En la entrevista, S_2 comentó lo siguiente:

E: …¿Por qué asocias la gráfica a con la 3?

S_2: ¡Ah! es que yo me acuerdo, cuando teníamos una gráfica de su trayectoria, la derivada iba a ser la velocidad, y si estaba abajo de las x, su trayectoria iba a empezar a disminuir, y como aquí (señala la gráfica a) está del 0.2 hacia acá (señala la gráfica a), está abajo del eje. Entonces dije “es negativa”, porque la inclinación es negativa y aquí (señala la gráfica a), ya empieza a subir, es cuando ya estaba arriba del eje de la x. Pero en esta (señala la gráfica 2) estaba todavía confundida.

E: …La d la asociaste con la 2, ¿por qué no con la 4?

S_2: Pues yo me estaba fijando en estas dos (señala las gráficas 2 y 4), pero.. (piensa) No me acuerdo por qué, tienen más o menos lo mismo, es de la misma inclinación, nomás porque, este, donde cruzan (señala la gráfica 2), la verdad no me acuerdo...</td>
<td>El sujeto S_5 asoció:
a-3
b-2
c-4
d-5
Se le preguntó a S_5 cómo estableció la relación entre las gráficas, respondió lo siguiente:

S_5: Aquí, si, si este si le soy sincero no le supe interpretar, la verdad, nomás que…

E: A ver, a con 3.

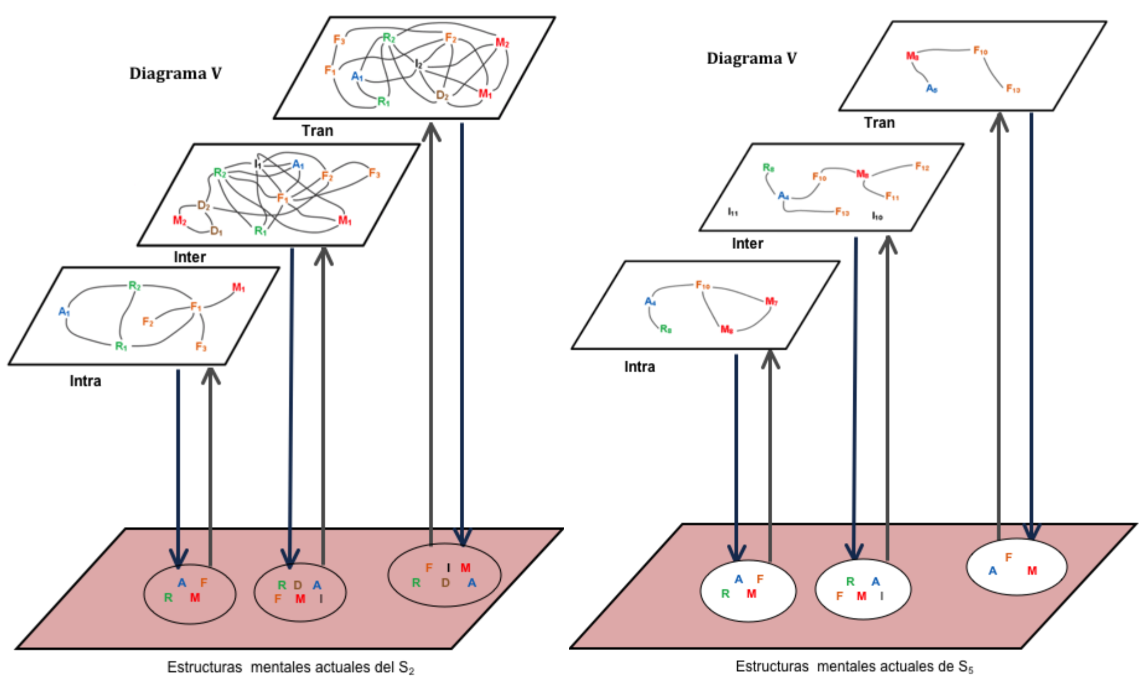
S_5: La a con la 3 mmm… (piensa)

E: Entonces aquí lo que hiciste fue ¿azarosamente?

S_5: ¡ja!, azarosamente, sí, maestra, no lo supe. Bueno, no lo pude interpretar, por eso, este, sí, ahí sí fue azarosamente.</td></tr>
</table>

Otro aspecto que se considera importante rescatar de los diagramas de la figura 50 es que, a medida que los sujetos acceden a niveles de construcción superiores (en este caso el Inter- y Trans-), es notorio que el sujeto que más construye, S_2, accede a más campos matemáticos, como el de la Derivada y la Integral. Nuevamente se aclara, no es el simple hecho de que acceda a esto campos, sino la calidad de sus construcciones previas sobre éstos, lo que le permitió avanzar en sus construcciones.

Se ha mencionado que aunque los sujetos en cuestión recuren a campos matemáticos similares (áreas, números reales, funciones, etc.), los esquemas que traen a su mente de cada campo varían en la cantidad y en la calidad con la que fueron construidos previamente; entonces, de acuerdo a esta idea, se elaboraron los diagramas de la figura 51. En éstos se pueden observar algunos esquemas previos a los que recurren los sujetos cuando manipulan objetos matemáticos y las conexiones que surgen entre ellos. Además se infiere que las conexiones que establece el sujeto entre esquemas, tras el proceso de acomodación, dependen principalmente del grado de consolidación de cada esquema.



(a) S_2 (b) S_5

Figura 51. Esquemas de cada campo matemático a los que recurren los sujetos S_2 y S_5.

Para destacar algunos hallazgos importantes entre las construcciones de S_2 y S_5 se propone focalizar la plataforma Intra- de los diagramas de la figura 51. Se observa en la plataforma inferior de la figura 51 que para el nivel Intra- los campos matemáticos al que acceden los dos sujetos son áreas, conceptos de cinemática sobre el movimiento de una partícula, funciones y números reales. Sin embargo, en la misma figura se observa que S_2 (51a), a diferencia de S_5 (51b), recurre a un mayor número de esquemas de cada campo, específicamente en funciones, y lo que se ha venido mencionando es que, para poder construir se debe contar con un andamiaje mental previo con cierto nivel de apropiación.

Por ejemplo, ambos acceden al campo de áreas, eso resulta un punto común entre los sujetos, pero la gran diferencia es que S_2 recuerda muy bien cómo calcular el área de las figuras geométricas que se identifican bajo las gráficas, pero S_5 sólo recordó cómo calcular el área de un cuadrado, mostró dificultades con los rectángulos y triángulos, y resultó evidente que esto fue un primer impedimento para avanzar en sus construcciones.

Con este dato se reitera que, a diferencia de lo que se creía al inicio de la investigación, y de acuerdo a los resultados que arrojan estos dos sujetos, la construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral no depende de la cantidad de esquemas previos a los que recurra el sujeto, sino de la calidad con la que éstos hayan sido construidos en su momento y, por tanto, en el proceso de acomodación, de las conexiones que se generen entre ellos.

Dado que la intención de presentar un mayor número de diferencias y similitudes que se detectaron en las construcciones de los sujetos S_2 y S_5, se elaboró la tabla 19, en la cual se destacan las diferencias y similitudes por nivel de construcción, lo que se considera importante para intentar entender por qué un sujeto construyó más y qué sucedió con el que construyó menos.

Tabla 19

Comparación de las construcciones de S_2 y S_5

SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DE S_2 y S_5	
NIVEL INTRA-	
SIMILITUDES	*DIFERENCIAS*
Ambos recurren a estructuras que promueven las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales.	S_2 recurre sin aparente dificultad al cálculo de áreas de figuras como cuadrados, rectángulos; en cambio, S_5 no recordó cómo calcular el área de un rectángulo, lo cual impidió que resolviera correctamente la actividad en donde se requería tal cálculo. Fue necesario recordarle esta información.
Ambos poseen conocimientos sobre conceptos del campo de la cinemática: velocidad, posición, que previamente trataron en el curso de Mecánica Clásica.	S_2, previamente a su participación en la investigación, poseía estructuras sobre la interpretación de gráficas: su sentido creciente, decreciente, si la gráfica es positiva o negativa, cruces con los ejes, etc., que promueven que el sujeto establezca una relación entre el comportamiento de la gráfica de una primitiva a partir del comportamiento de la derivada si esta última representa una velocidad. S_5 no manifestó conocimiento alguno al respecto.
Ambos poseen estructuras mentales suficientes para ubicar y analizar coordenadas en el plano cartesiano.	S_2 posee construcciones que le permiten interpretar la idea del infinito, así como de cantidades infinitesimales. Esto resultó complicado e inexplorado con anterioridad por S_5, a quien se le dificultó interpretar cantidades infinitesimales, lo que lo condujo a construcciones de gráficas en forma discreta. S_2 posee esquemas que le permitieron trazar gráficas en forma no discretizada, debido a que sus construcciones promovieron la interpretación de cantidades infinitesimales en los ejes coordenados y esto, a su vez, lo ayudó en el trazo e interpretación de gráficas. Esta situación se dio cuando debió seleccionar el intervalo para calcular áreas de figuras limitadas por curvas y cuando debía inferir la trayectoria de la primitiva.
Ambos poseen estructuras mentales que promueven la comprensión de los conceptos velocidad media.	S_2, a diferencia de S_5, mostró dificultades en asociar las variables que intervienen en la situación problema con los ejes coordenados; sin embargo, una vez que lo logró, no mostró dificultad alguna en resolver las situaciones problema.
SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DE S_2 y S_5	
NIVEL INTER-	
SIMILITUDES	*DIFERENCIAS*
Ambos recurren a estructuras que promueven las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales.	Nuevamente se observa que S_2 recurre sin aparente dificultad al cálculo de áreas de figuras como cuadrados, rectángulos. En cambio S_5, en este nivel de construcción, tampoco recordó cómo calcular el área de un triángulo, por lo que fue necesario

		recordarle esta información.
En este nivel de construcción se observa que ambos poseen conocimientos sobre conceptos del campo de la cinemática: velocidad, posición, que previamente trataron en el curso de Mecánica Clásica.		S_2 previamente a su participación en la investigación, poseía estructuras sobre la interpretación de gráficas: su sentido creciente, decreciente si la gráfica es positiva, negativa, cruces con los ejes, que promueven que el sujeto establezca una relación entre el comportamiento de la gráfica de una primitiva, a partir del comportamiento de la Derivada si esta última representa una velocidad. S_5 no manifestó conocimiento alguno al respecto.
Ambos poseen estructuras mentales suficientes para ubicar y analizar coordenadas en el plano cartesiano, así como interpretar gráficas crecientes, decrecientes, positivas, negativas. Muestran habilidades para extraer datos de una tabla y relacionarlos con la gráfica correspondiente.		S_2 relaciona a la Derivada como una operación que le permite encontrar la velocidad de un móvil. S_5 no hizo mención de esto.
Ambos logran construir el esquema de la Integral en un nivel Intra.		S_2, a diferencia de S_5, no muestra dificultades para relacionar el comportamiento de la gráfica velocidad como tal con el comportamiento de la gráfica posición, e incluso logró generar a la segunda a partir de la primera. S_2 fue capaz de interpretar y generalizar el significado de una velocidad positiva, negativa o cero y su efecto en la gráfica de la posición, lo que no sucede en todos los casos con S_5.
Ambos se confunden al interpretar las variables dependientes e independientes que aparecen en el problema y, sobre todo, su ubicación en los ejes coordenados.		S_2 presenta esquemas que promueven la comprensión intuitiva del infinito y las cantidades infinitesimales. Sobre estos últimos, el sujeto fue capaz de interpretar geométrica e intuitivamente nociones sobre la cantidad infinita de números que puede existir, por ejemplo, entre dos números enteros. S_5 mostró en el momento de resolver las actividades que no le son claros estos conceptos.
		Para S_5 fue necesario, para la solución de algunos problemas diseñados para este nivel de construcción, interpretar el significado de velocidad media.
		S_5 cita la idea de la Integral desde registros algebraicos, como la antiderivada; sin embargo, no fue capaz de concretar esta idea cuando se trataba de resolver los problemas encomendados.
		S_5 presenta dificultades para distinguir una velocidad media de una instantánea, a pesar que en el nivel anterior manipulaba velocidades medias. A diferencia de S_2, S_5 no logra distinguir cuándo una velocidad se considera constante y cuándo variable.
		S_5 presentó dificultades para seguir las instrucciones de los problemas, esto lo manifestó cuando se le entrevistó y se le preguntó por qué no

		escribió algunas de las respuestas solicitadas. S_2 atendió sin dificultad las instrucciones.
SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DE S_2 y S_5		
NIVELTRANS-		
SIMILITUDES		*DIFERENCIAS*
Ambos recurren a estructuras que promueven las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales.		S_2 recurre sin dificultad al cálculo de áreas de figuras como cuadrados, rectángulos; en cambio S_5 no recordó cómo calcular el área de un rectángulo, lo cual impidió que resolviera correctamente la actividad en donde se requería tal cálculo. Fue necesario recordarle esta información.
Ambos acumulan áreas limitadas por segmentos rectilíneos.		Ambos calculan áreas de figuras geométricas limitadas por rectas, pero S_2 a diferencia de S_5, no enfrentó dificultad alguna en estimar intuitivamente áreas de figuras que poseen un lado limitado por un segmento curvilíneo.
Ambos poseen conocimientos sobre conceptos del campo de la cinemática: velocidad, posición, que previamente trataron en el curso de Mecánica Clásica.		S_2 previamente a su participación en la investigación, poseía estructuras sobre la interpretación de gráficas: su sentido creciente, decreciente si la gráfica es positiva o negativa, cruces con los ejes, etc., que promueven que el sujeto establezca una relación entre el comportamiento de la gráfica de una primitiva a partir del comportamiento de la Derivada si esta última representa una velocidad. S_5 no manifestó conocimiento alguno al respecto.
Ambos poseen estructuras mentales suficientes para ubicar y analizar coordenadas en el plano cartesiano, interpretar cuando una gráfica crece, decrece, es cero.		S_2 relaciona la Derivada como una operación que le permite encontrar la velocidad de un móvil (como una velocidad instantánea). S_5 no hizo mención de esto.
Ambos poseen estructuras mentales que promueven la comprensión de los conceptos velocidad media, posición y movimiento.		S_2 muestra conocimientos sobre graficación de funciones, a partir de conocer su expresión y de localizar algunas coordenadas en el plano que le permitan trazar la gráfica. S_5 no graficó funciones, además, cuando se presentó el caso, no relacionó la expresión con la gráfica.
		S_2 presenta esquemas que promueven la comprensión intuitiva del infinito y las cantidades infinitesimales. Sobre estos últimos, S_2 fue capaz de interpretar geométrica e intuitivamente la cantidad de números que existen, por ejemplo, entre dos números enteros. S_5 mostró en el momento de la recopilación de datos que no son claros estos conceptos.
		S_2 logró generalizar el proceso de acumulación de áreas, a diferencia de S_5, quien recurrió a instrucciones o imitar procesos para intentar solucionar una situación problema. Además, S_2 logró identificar situaciones en las que se requiere acumular áreas para resolver un problema, así como el análisis de gráficas para obtener la primitiva y en las que este conocimiento no es

		aplicable. Este nivel de construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral no lo logró S_5.
		S_5 enfrentó dificultades al interpretar geométricamente una función, en contraste, S_2 mostró habilidades, en todo momento, en las gráficas que se plantearon en las actividades.
		S_2 relacionó el comportamiento de la gráfica que representa la posición de un móvil con la gráfica que representa su velocidad. Para S_5 no fue posible establecer esta relación.
LOGROS AL TÉRMINO DEL ULTIMO BLOQUE DE ACTIVIDADES		
SIMILITUDES		*DIFERENCIAS*
Ambos logran el proceso de acumulación de áreas pero en diferentes niveles de construcción.		S_2 logra encapsular el proceso de acumulación de áreas como un objeto matemático que puede manipular, ya que recurre a éste para resolver situaciones problema. S_5 no logró trasladar ese proceso en la solución de problemas, aun siendo éstos similares a las situaciones que resolvió en actividades previas.
		S_2 logra a partir del comportamiento geométrico de la gráfica de la Derivada, construir la gráfica primitiva. Además recurrió a este conocimiento para resolver situaciones problema. S_5 no logró trasladar ese proceso en la solución de problemas, aun siendo estos similares a las situaciones que había resuelto en actividades anteriores.
		S_2 logró describir la trayectoria de un objeto en movimiento a partir de relacionar el comportamiento de la gráfica que representa su velocidad con la gráfica que representa su posición.

Se observa en la tabla 19 que en esencia los esquemas previos comunes, a los que recurren los sujetos cuando inician sus procesos de construcción, refieren a algunos que promueven operaciones con áreas, con números reales, localización e interpretación de coordenadas en el plano cartesiano, esquemas que les permiten interpretar algunos elementos relacionados con el movimiento de partículas.

Se mencionó que las diferencias radicales entre las construcciones de estos sujetos es que S_2, a diferencia de S_5, muestra tener un mayor domino sobre sus esquemas previos, sus construcciones son más sólidas ya que logró coordinar conjuntos de esquemas generando nuevas estructuras. S_5 coordinó también algunos esquemas previos, pero no todo su reacomodo le resultó adecuado para seguir avanzando en sus construcciones.

Esta situación reitera que el hecho de que un sujeto manipule objetos matemáticos y traiga a su mente una gran cantidad de esquemas previos, no garantiza el éxito de sus nuevas construcciones, sobre todo si éste ignora qué debe hacer con esa información o para qué le es útil, como sucedió con S_5. De acuerdo con Piaget y García (2004) esto podría explicarse así: si el sujeto no logra coordinar esquemas previos y además enlazarlos con la nueva información, es porque sus construcciones previas permanecen en etapas primarias o son débiles aún.

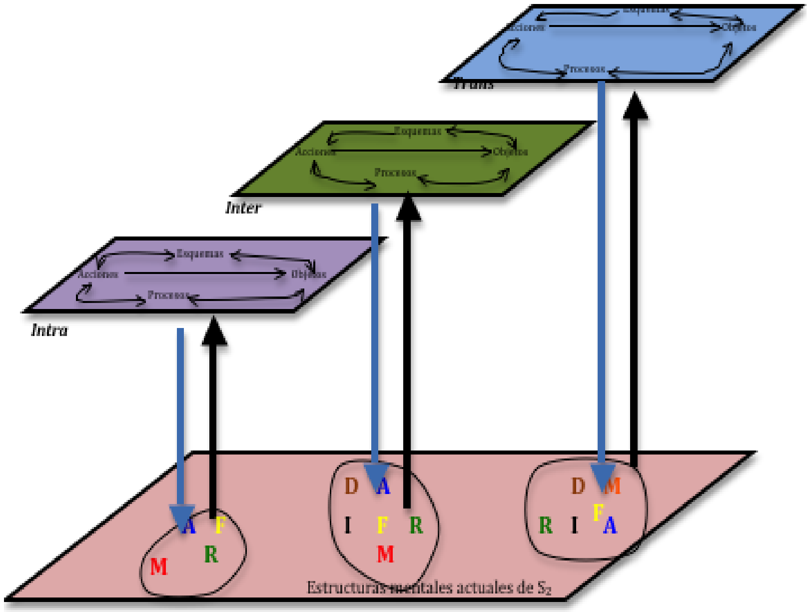
Para complementar los comentarios del párrafo anterior, se pueden observar nuevamente los diagramas de la figura 41, (para mayores detalles revisar los anexos E y F). En los diagramas mencionados se puede apreciar que las conexiones que surgen entre los esquemas mentales a los que inicialmente recurre S_5, en apariencia no resultaron tan complejizadas como sucedió con S_2, ya que la cantidad de esquemas previos que fueron puestos en escena por S_5 son menos (no significativamente) respecto a los que recurre S_2.

Pero no sólo eso, también puede apreciarse que a medida que avanzan a otros niveles de construcción, S_5 logra cada vez menos conexiones entre estos esquemas (lo que no sucedió con S_2), esto puede ser una razón por la que S_5 no logró avanzar a niveles superiores de construcción.

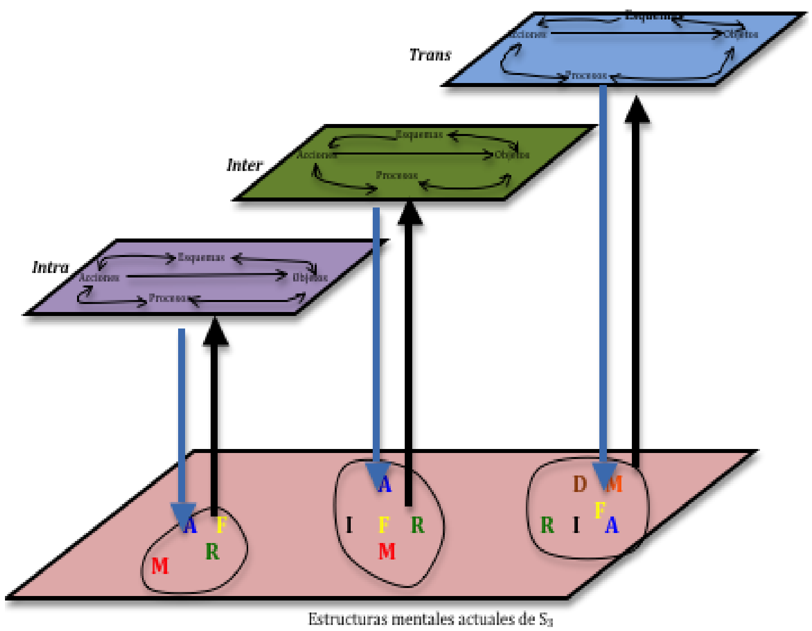
4.4.2 Diferencias y Similitudes entre las construcciones de S_2 y S_3.

En párrafos anteriores se comentó que S_2 y S_3 se consideraron los sujetos que lograron mayores construcciones. Sus características académicas son semejantes, además ambos cursan el primer semestre de la carrera de Electrónica, están inscritos en la materia de Cálculo Diferencial, primer curso de matemáticas de su carrera, y en la de Mecánica Clásica, curso en el que los sujetos mostraron características académicas destacadas y disposición al trabajo.

Respecto a la construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral, se observó que lograron construcciones similares; en principio recurren a esquemas previos que pertenecen a los mismos campos matemáticos, tales como el de los números reales, funciones, derivadas y algunos conocimientos sobre la cinemática, como velocidad, aceleración y posición. Esto se puede apreciar en la plataforma inferior de los diagramas de la figura 52.



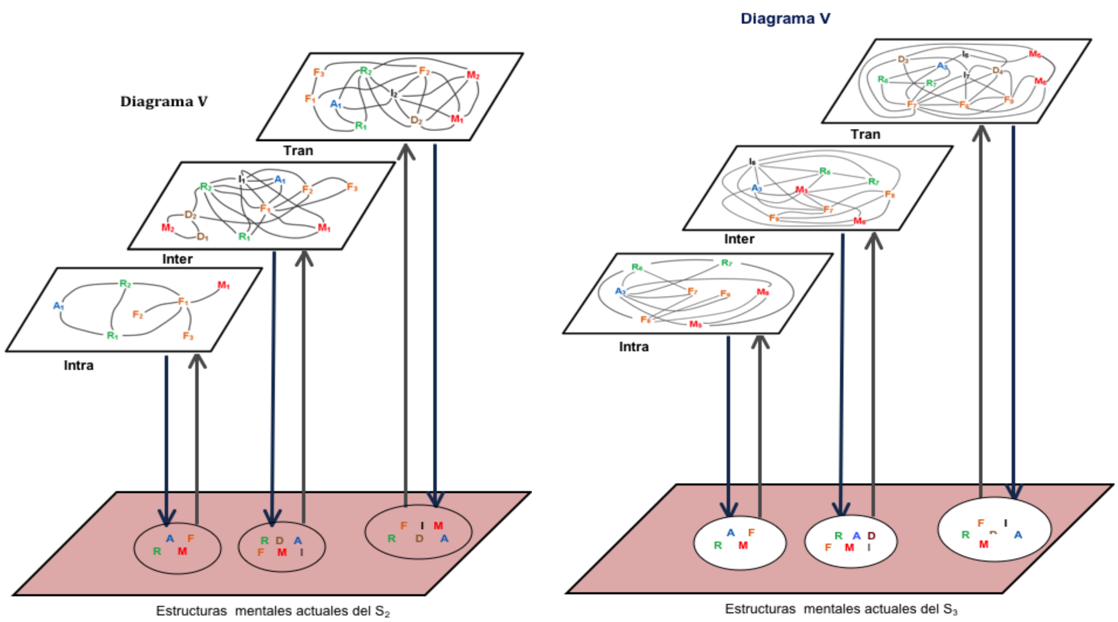
(a) S_2



(b) S_3

Figura 52. Campos matemáticos a los que recurren los sujetos S_2 y S_3.

Los esquemas que se detectaron en cada campo mencionado y las conexiones entre éstos, que tienen lugar en la mente de cada sujeto, se observan en los diagramas de la figura 53 (estos aparecen en los anexos E y H).



(a) S_2 (b) S_3

Figura 53. Esquemas mentales previos a los que recurren los sujetos S_2 y S_3.

En los diagramas de la figura 53, en las tres plataformas superiores, la naturaleza matemática de los esquemas así como las conexiones entre éstos. En particular, en los niveles Inter- y Trans- de las figuras 53a y 53b, aparentemente hay mayor similitud entre las conexiones y la cantidad de esquemas que en el nivel Intra-, ya que en este último (primera plataforma superior), aunque los sujetos recurren a un número similar de esquemas (entre 7 y 8), las estructuras de S_3 presentan mayores conexiones que las de S_2.

Se infiere que esto es debido a dos razones: la primera se refiere a la ruta por la que cada sujeto optó para dar solución al problema; y la segunda es, en parte, debida al nivel de domino de los esquemas previos, ya que si bien ambos mostraron habilidades en el tema de funciones, S_2 a diferencia de S_3, enfrentó dificultades en la interpretación de las variables en los ejes coordenados, y al parecer esto provocó que no respondiera correctamente alguna actividad.

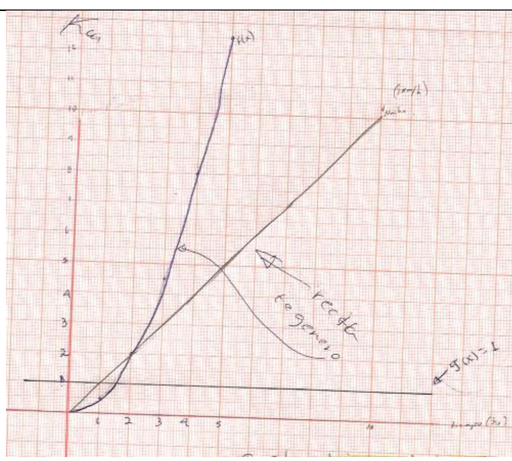
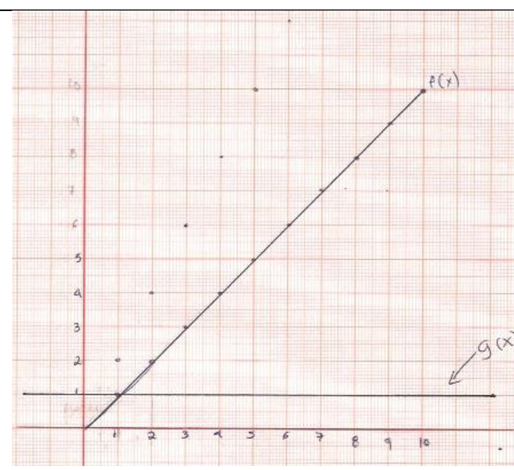
Esto se reflejó a partir de la solución a la actividad 1.1, ya que S_3 lo hizo correctamente y S_2 cometió un error cuando interpretó las variables de las gráficas, aunque acumuló correctamente las áreas e hizo un adecuado análisis de gráficas. Cabe mencionar que el caso de S_2 respecto a S_3 no es comparable, en cuanto a la cantidad de conexiones, como lo fue en el apartado anterior con S_5 y S_2. Si bien se recordará, en el nivel Intra- S_5 y S_2 traen a su mente una cantidad de esquemas de naturaleza matemática similar, y S_5 logra pocas conexiones entre ellos.

Aunque S_2 respecto a S_3 logró menores conexiones, el sujeto construyó, le resultaron útiles sus esquemas y sus conexiones, lo cual no fue evidente con S_5. La razón por la que S_3 logró mayores conexiones entre sus esquemas mentales previos respecto a S_2, es porque decidió resolver la actividad tanto por acumulación de áreas como por análisis del sentido creciente y decreciente de la Derivada. S_2 sólo optó por el segundo.

En la tabla 20 se muestra la solución de cada sujeto a la actividad 1.1 del bloque I, diseñada para observar construcciones en un nivel Intra-.

Tabla 20

Solución de S_2 y S_3 a la actividad 1.1

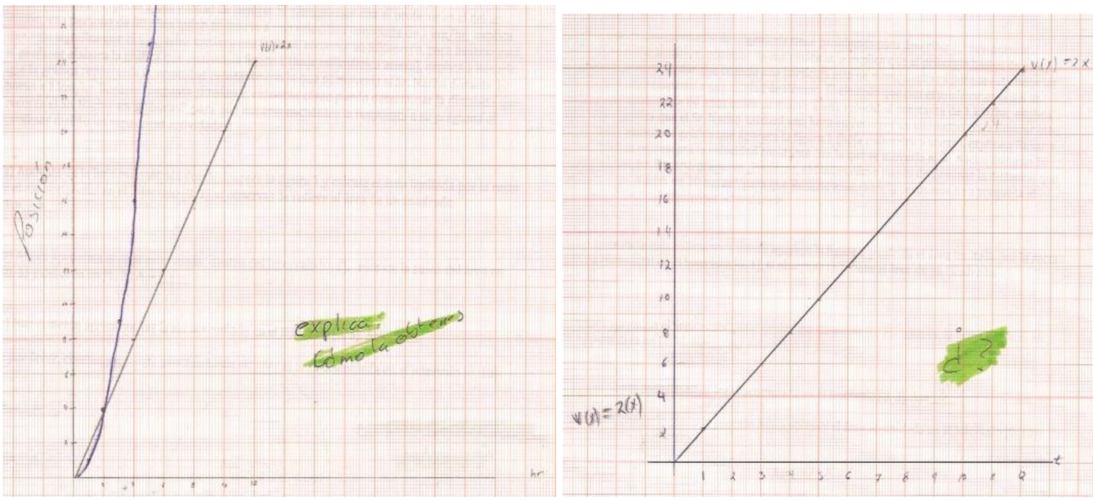
 Solución de S_2	 Solución de S_3
Se le solicitó que explicara cómo obtuvo sus gráficas. Lo que hace es acumular áreas	Se le preguntó si conocía previamente las gráficas tales como g(x)=1 y respondió lo

y a partir de esto bosqueja correctamente la gráfica de una primitiva, pero no de la gráfica que se le solicitó, al respecto argumentó lo siguiente: *S_2: ...Dije ¿por qué tiene una línea así?, si la velocidad es constante, 2, entonces tiene que ir así (señala la recta y =2x), pero ya después en el segundo bloque, vi que era velocidad contra tiempo y yo la estaba viendo como si fuera posición contra tiempo, por eso yo puse esta otra gráfica, por eso me había confundido, porque ya después de que salimos del salón dije: ¡Ah! Éste era velocidad contra tiempo, no era posición contra tiempo.*	siguiente: *S_3: Sí, la velocidad es constante y la recta va así (señala la gráfica y=1) porque no está ni acelerando ni desacelerando. La velocidad está dando la misma velocidad, no sé, en ese mismo tiempo pensé que era esa misma velocidad y por eso así la ubiqué.* *E: ...¿Qué fue lo que hiciste cuando calculaste áreas? Por ejemplo A_1* *S_3: El área A_1 es lo mismo de éste (señala un cuadrito en la gráfica), nomás multiplique lo que es la hora por la velocidad, tomé como referencia la fórmula. Al principio no me di cuenta, saqué el área pero dije ¿qué me representa esa área? No sabía qué me representaba, ya la multipliqué primero, fui sacando la áreas ya más acá (señala la gráfica), me fui dando cuenta de que era la distancia, pero si, nomás la hice así como sacar el área del cuadro, lado por lado.*

En el fragmento de entrevista se puede observar que ambos obtienen la gráfica de una función primitiva, sólo que S_2, como producto de su análisis, obtuvo como primitiva una función cuadrática y S_3 una función lineal, la cual es correcta, ya que las áreas estaban limitadas por g(x)=1. De acuerdo al fragmento de entrevista de la tabla 20, el error de S_2 radica en la confusión al interpretar las variables de los ejes coordenados, situación que en el momento en que explicó sus procedimientos de solución pudo resolver, y como ya se dijo, esta situación no se presentó en S_3.

En contraste a esta situación, en el mismo bloque I aparece la actividad 1.3, diseñada para observar construcciones en un nivel Trans-. Consistió en que dada la función v(t)=t, que representa las velocidades con las que se mueve una corredora, el sujeto debía bosquejar su función distancias. S_2 es quien resuelve correctamente (figura 54a) el problema, acumula áreas y da una explicación clara de lo que sucedió con la corredora en términos del contexto.

S_3 argumentó que sencillamente no le resultó claro a qué se refería la gráfica de distancias (figura 54b). Estas diferencias entre los sujetos son las más notorias, de hecho en las construcciones de éstos hay mayores similitudes que diferencias, sobre todo en sus conocimientos previos más que en sus procesos de construcción.



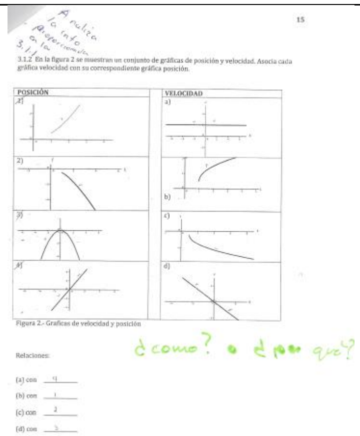
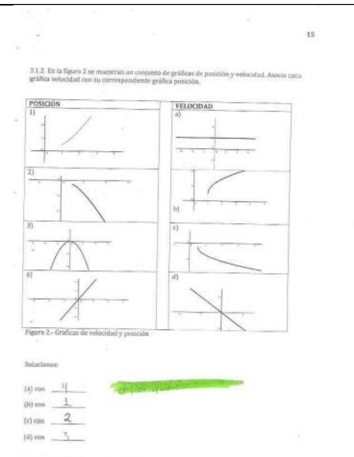
a) S_2 b) S_3

Figura 54. Solución de la actividad 1.3.

Otra de las actividades diseñadas para observar las construcciones del sujeto hacia el bosquejo de la gráfica de la función primitiva fue a partir de analizar el comportamiento la Derivada: intervalos donde es positiva, negativa, cero, etc. Para ello se diseñó, para el nivel Intra-, la actividad 3.1.2 (bloque III) que aparece en la tabla 21, la cual consistió en asociar las gráficas de las dos columnas.

Tabla 21

Solución de S_2 y S_3 a la actividad 3.1.2

 Actividad 3.1.2 de S_2	 Actividad 3.1.2 de S_3
Las asociaciones que estableció S_2 son las siguientes: a-4 b-1 c-2 d-3 Sus argumentos para tal asociación: *E:¿Por qué la relacionas la gráfica 4 con la a?* *S_2: Porque como era constante (piensa). …¡Oh! Ya me acordé: porque las velocidades eran 2 pero era en el tiempo 0; entonces si son 2 km por 0 pues es 0, entonces por eso…* *E: Perfecto y luego asociaste a b con 1…* *S_2: Oh, porque eran positivas las 2 y estaban juntos sería. Estaba curveado, pero lo curveado no tenía mucho, no me fijé pues tanto si estaba curveado o no, si estaba arriba de la x y si estaba subiendo, y ésta estaba debajo de la x (señala la gráfica 2) y ésta aunque hubiera estado arriba de la x pero estaba así para abajo.* *E: ¿y la 3 con d?* *S_2: …Porque aquí éste (señala la gráfica d) está arriba de la x, aunque está en la x negativa pero está arriba. Como la velocidad no importa que está en lo negativo o en lo positivo (se refiere respecto a las abscisas) mientras esta arriba de x, y aquí*	Las asociaciones que estableció S_2 son las siguientes: a-4 b-1 c-2 d-3 Sus argumentos para tal asociación: *E: ¿Qué te llevó a asociar la a con 4?* *S_3: Bueno me basé en las reglitas de la tabla (se refiere a la tabla que se proporcionó en la actividad 3.1.1 del bloque III).* *E: ¿Cómo?* *S_3: Chequé cuándo la velocidad es positiva… bueno como ésta (señala la gráfica a), era constate la velocidad, me imaginé que sería como una recta, por eso la asocié con ésta (con la 4). Ésta (señala la gráfica b) también, como representa velocidad positiva entonces no me podía representar una posición negativa, por eso la asocié con ésta (con la gráfica 1), y la c con la 2 también, como es negativa va como con ésta (señala la gráfica 2) y la d con la 3, esta no estaba seguro, no me acuerdo.* *E: Entonces, por ejemplo, aquí es la velocidad negativa (señala la gráfica c) y eso ¿cómo afectaría a la gráfica 2?* *S_3: Creo que también hice como calcular el área de este cuadrito (señala la gráfica c), y graficarlas, a ver en dónde me saldría un*

(señala la gráfica 3) como va subiendo pues es positivo, y de ahí llega 0 llegan a 0 los dos y ésta (señala la gráfica d) ya está debajo de x y ésta (señala a la gráfica 3) ya empieza a bajar.	*punto. La c con la 2, a la hora de analizar la gráfica es calcular más por menos, yo no sabía qué era esto cuando la pura posición va decreciendo, bueno porque ésta representa velocidades negativas, para mi es como un retroceso*

En los fragmentos de las entrevistas de la tabla 21 se puede observar que los argumentos de los estudiantes son similares, recurren a esquemas previos parecidos dentro del campo de la Derivada, específicamente del análisis del signo, crecimiento y decrecimiento de funciones que representan velocidades. Los sujetos siguieron instrucciones (hay que recordar que se trata de una actividad a nivel Intra-) y los reflejaron en sus procesos de solución.

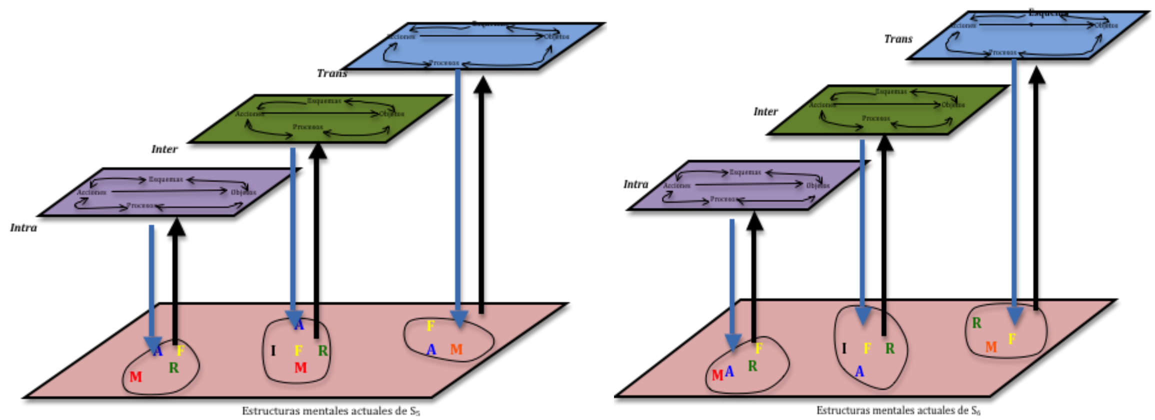
Sin embargo S_3, a diferencia de S_2, recurrió a la acumulación de áreas para constatar que algunas de sus respuestas fueron las correctas, situación que, como ya se mencionó, explica aún más la razón por la cual en la plataforma que corresponde al nivel Intra- de los diagramas de la figura 53, S_3 estableció más conexiones que S_2. Para el estudiante S_2 no fue necesario constatar sus respuestas por acumulación de áreas, ya que el análisis de gráficas es una habilidad que desde que inició el trabajo de campo manifestó.

4.4.3 Diferencias y Similitudes entre las construcciones de S_5 y S_6.

En otros apartados se describió el perfil académico de estos sujetos, se comentó que ambos cursan por segunda ocasión la materia de Mecánica Clásica y están inscritos por primera vez al curso de Cálculo Integral. En Mecánica Clásica, S_5 mostraba entusiasmo en el trabajo que su profesor le asignaba; cuando se organizaba trabajo en equipo dentro del aula, el estudiante participaba activamente ya que era de quien más propuestas se escuchaban para la solución de alguna actividad.

Sin embargo, en esas propuestas se reflejaban algunas dificultades académicas en su formación matemática previa y algunos principios que en la clase de Mecánica Clásica surgieron. En el equipo de trabajo en el que se encontraba S_5 también estuvo S_6, un estudiante introvertido, quien muy ocasionalmente proponía alguna ruta para solucionar un problema, la cual era más viable que la de S_5, pero la situación con este sujeto era que no defendía con firmeza sus propuestas, mostraba cierto nivel de inseguridad en éstas.

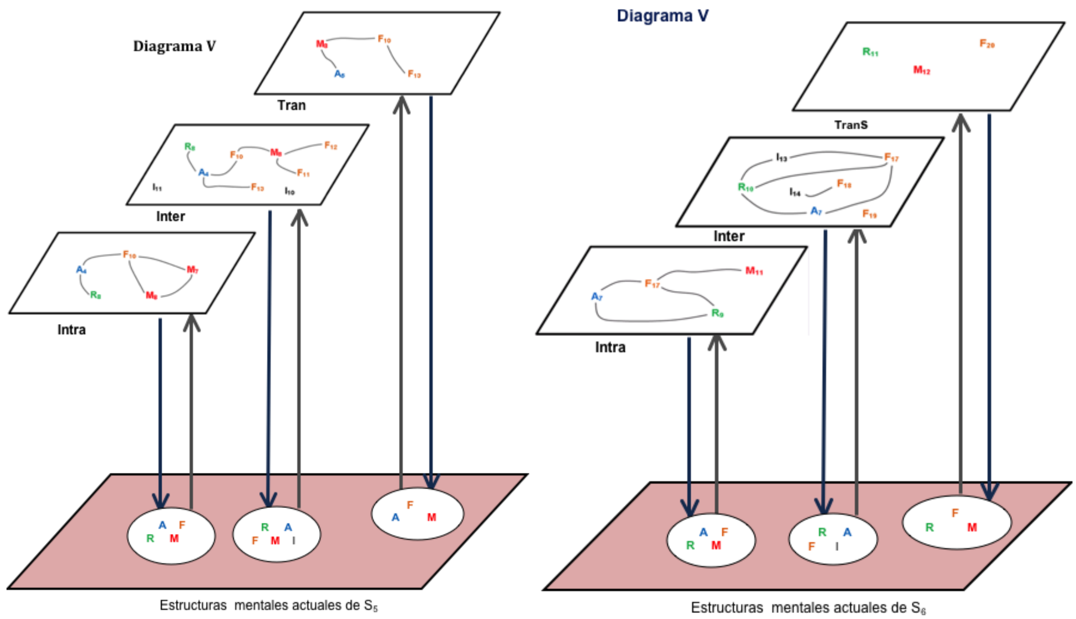
El análisis comparativo entre los sujetos se hizo a partir de la identificación de los campos matemáticos a los que recurre cada uno cuando inician sus construcciones. En la plataforma inferior de la figura 55 se aprecian éstos, y corresponden a temas tales como áreas, funciones, números reales, etcétera, y de cinemática algunos conceptos de movimiento.



(a) S_5 (b) S_6

Figura 55. Campos matemáticos a los que recurren los sujetos S_5 y S_6.

Los esquemas de cada campo que se identificaron, de acuerdo al procedimiento de solución de cada situación problema, se pueden observar en las tres plataformas superiores de los diagramas de la figura 56.



(a) S_5 (b) S_6

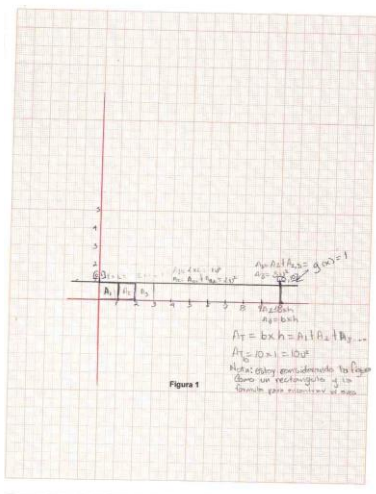
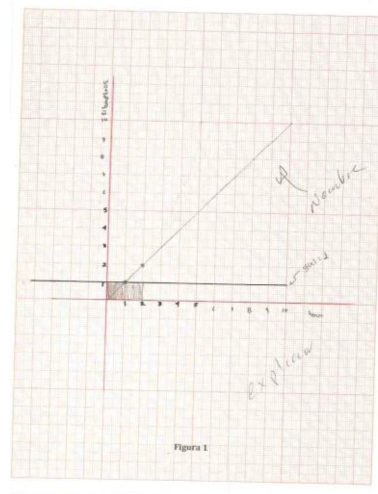
Figura 56. Esquemas a los que recurren los sujetos S_5 y S_6.

Específicamente los sujetos recurren a esquemas relacionados con la localización de puntos en el plano cartesiano, cálculo de áreas de figuras geométricas (en donde S_6 a diferencia de S_5, no mostró dificultad alguna), esquemas relacionados con la descripción del movimiento de partículas y operaciones con los números reales. Se puede observar en el nivel Intra- de cada diagrama que, aparentemente, los sujetos recurren a esquemas de naturaleza similar.

El estudiante S_6, a diferencia de S_5, no mostró dificultad al imitar procesos, esto se evidenció cuando resolvió la actividad 1.1, diseñada para observar construcciones en un nivel Intra-. En la tabla 22 se muestra un extracto de la entrevista con el sujeto, en donde narra su procedimiento de solución.

Tabla 22

Solución de S_5 y S_6 a la actividad 1.1

 Solución de S5	 Solución de S6
El sujeto logró acumular áreas, pero no logró representarlas geométricamente: *S_5: ¡Ah! Creo que no los grafiqué ¿verdad?, mmm… (piensa)* *E: No, pero ¿por qué no lo hiciste? ¿Lo olvidaste?* *S_5: O más bien creo lo dejé para el final y me lo brinqué más bien, porque es que sí, maestra, me lo brinqué.* *E:¿No porque no hayas sabido como hacerlo?* *S_5: Pues es que, bueno, la vi y al principio, no, no lo recordé, no me acordé. Entonces la dejé y dije, bueno, a lo mejor si continuando con lo demás me acuerdo de algo. Pero ya éste, no sé, a lo mejor le seguí de largo y ya no me regresé y no me acordé de regresarme.*	Se le preguntó cómo calculó las distancias que recorre el sujeto del problema, explicó lo siguiente: *S_6: …Bueno, pues yo tomé como quien dice este cuadrito (señala el cuadrito limitado por x= 1, y=1, x=0, y=0 de la gráfica 1) y multipliqué, pues sería 1x1 y daba este 1 un cuadrado, pero como no trae qué es cada cosa (se refiere a las variables de los ejes coordenados) pues yo le puse el puro número, pues, no le puse qué significaba cada cosa.* *E: ¿Cosas como kilómetros, metros?* *S_6: Sí.* *E: ¿Y cómo calculaste el área 2?* *S_6: Este, como ahí dice que como 1 y 2 pues yo, bueno según yo pues esto (se refiere a las indicaciones de las hojas) ya no lo tomé en cuenta, y pues yo puse que sería éste (señala el intervalo en el eje horizontal [0, 2] y altura 1). Luego 1 por 2, así daba eso, e incluso un poquito más arriba, y pues yo acá como quien dice hice esto así, y fui sacando los valores y así hice.*

Ambos sujetos acumulan áreas, sin embargo S_5 no logró resolver correctamente la actividad, algo que sí sucedió con S_6. La explicación de S_5 al respecto es que no recordó qué debía graficar; el punto es que recurrió a este mismo argumento en otras actividades. La razón por la que se hace referencia a esta actividad es que en la entrevista (y no sólo en este fragmento) se observó que el sujeto S_6 argumentó, con mayor precisión que S_5, sus procedimientos en la solución de cada actividad; el problema con él es que en la mayoría de sus explicaciones manifestó cierto grado de inseguridad, situación que no se observó con S_5, lo cual debilitaba muchas veces las evidencias que se pudieran rescatar sobre sus construcciones.

Para superar tal situación, se debió solicitar varias veces al sujeto que explicara la misma idea, pero debía desviar la atención de éste en otros aspectos de su vida académica para lograr continuar con la entrevista.

Se comentó en otro momento que, de acuerdo con los datos recabados de estos sujetos, se considera que lograron construcciones en un nivel Intra-. A pesar de ello debieron resolver todas las actividades planteadas en los tres bloques. Sin embargo, en particular llamó la atención el trabajo de los sujetos en el nivel Inter-, ya que cuando abordaron las actividades diseñadas para observar construcciones en el nivel mencionado, ambos habían logrado acumular áreas, desde luego imitando procedimientos, y cuando enfrentaron la actividad 1.2 se observó que no lograron generalizarlos en un proceso.

En la segunda plataforma de los diagramas (nivel Inter-) se observan esquemas representados con las letras I_i, en ambos casos éstos se refieren a que los sujetos recurren a esquemas previos referentes a la Integral.

En el diagrama del sujeto S_5, el esquema I_{10}, representa construcciones débiles aún del significado geométrico de la Integral que se propone en el programa de estudio (como el área bajo la curva), las cuales previamente estudió en el curso de Cálculo Integral. S_5 recordaba que podía calcular áreas con la Integral, pero no identificaba (ni recordaba) los elementos constitutivos para tal aplicación.

En su clase (de acuerdo a sus anotaciones en la libreta de Cálculo Integral) el maestro abordó la idea tradicional: suponer una gráfica, su expresión, un intervalo y la instrucción de calcular el área limitada por la curva dentro del intervalo.

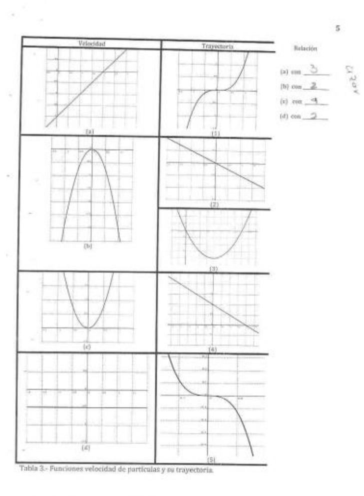
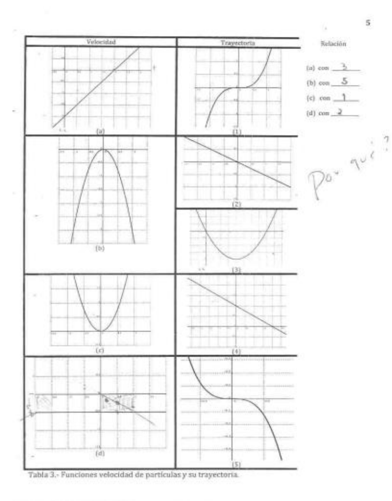
Respecto al esquema I_9, ubicado en el diagrama 56a, se refiere que el sujeto posee construcciones suficientes para realizar la acumulación de áreas de figuras limitadas por rectas. Sin embargo, no aplica aún un proceso de manera autónoma, necesita imitar procedimientos de situaciones similares o que se le indique lo que debe hacer, es por eso que en la figura mencionada tanto I_9 como I_{10} aparecen desconectados de otros esquemas.

A diferencia de este sujeto, S_6 es capaz de aplicar la acumulación de áreas (I_{13}) para resolver algunos problemas que invoquen gráficas de funciones lineales (diseñados para el nivel Intra). Imita procedimientos sin dificultad, y no sólo eso, sino que él recuerda, débilmente, la relación entre Derivada-Integral como procesos inversos (I_{14}) pero en ningún momento evidenció para qué le pudría ser útil esto.

En la tabla 23 se muestra un extracto de entrevista en la que los sujetos argumentan cómo resolvieron la actividad 1.2, diseñada para observar construcciones en el nivel Inter-.

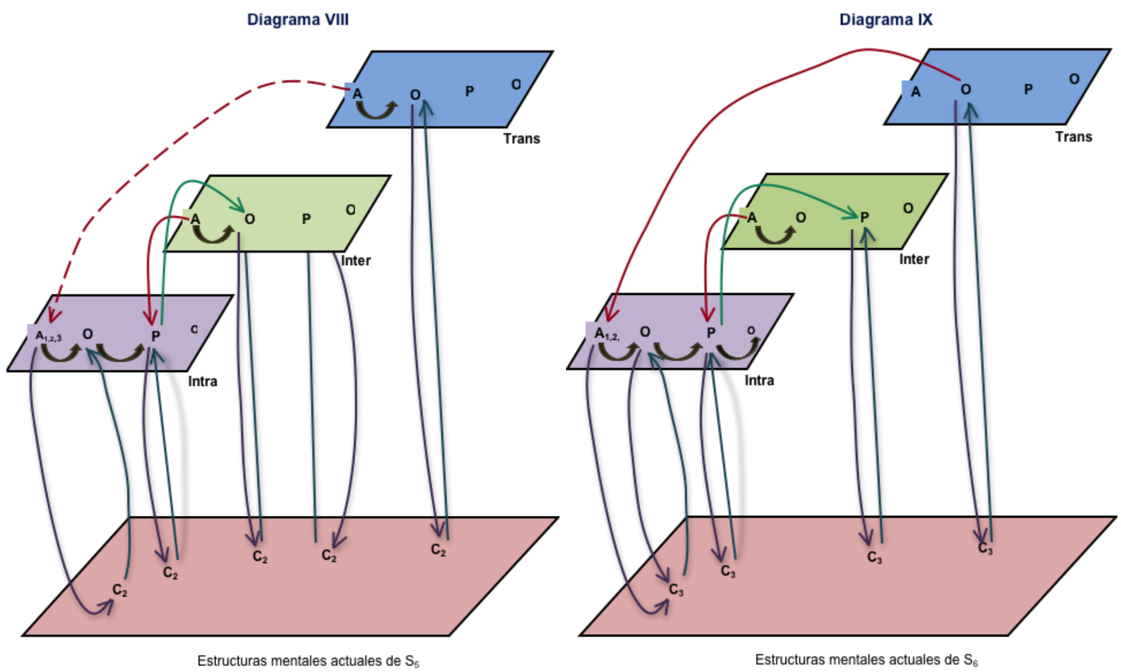
Tabla 23

Solución de S_5 y S_6 a la actividad 1.2

 Respuestas de S_5: a con 3 b con 2 c con 4 d con 5	 Respuestas de S_6: a con 3 b con 5 c con 1 d con 2
Se le preguntó cómo estableció la relación de las gráficas y respondió: *S_5: Aquí, sí, si le soy sincero no le supe interpretar, la verdad, nomás que…* *E: A ver, a con 3.* *S_5: La a con la 3 mmm… (piensa)* *E: Entonces aquí lo que hiciste ¿fue azarosamente?* *S_5: ¡Ja!, azarosamente, sí, maestra, no lo supe. Bueno, no lo pude interpretar, por eso, este, sí, ahí sí fue azarosamente.*	Se le solicitó explicara la razón por la que asoció así las gráficas: *S_6: … Mmm, ni me acuerdo.* *S_6: Para mí sí, no supe ni cómo lo hice.* *E: ¿No acumulaste áreas?* *S_6: No, pues ni me acuerdo, pues la verdad no, no tenía idea en eso, sólo no sé, no se me relacionaba nada a mí.* *E: ¿No te decían algo tantos cuadritos?* *S_6: Pues para mí fue lo único, fue que si ésta bajaba (señala la gráfica b), así pues no sé…* *E: …Y para asociar la A con 3, por ejemplo.* *S_6: Pues como ésta (señala la 5) decrece, la tomé con aquélla (Señala la gráfica b), porque ésta venía bajando y la 3 con la a, y luego como ésta es cuadrada (señala la b) y ésta cúbica (Señala la 5), sólo así no recuerdo, pues sólo nomás ésta.*

En estos fragmentos de entrevista se observa que S_5 no logró resolver la actividad. Respecto a S_6 se observa que el sujeto establece algunas relaciones correctas, sin embargo, no logra explicar cómo lo hizo. De lo poco que aportó se observa que el estudiante entendió que estaba integrando, ya que uno de sus argumentos, cuando asocia a (c) con (1) y a (b) con (5), es que si una es cuadrática la otra debe ser cúbica, si es lineal la otra debe ser cuadrática. Lo que es evidente, dados sus argumentos, es que no resolvió por acumulación de áreas: en su mente no existe un proceso, mucho menos un objeto, que lo lleve a una solución por acumulación de áreas.

En los diagramas de la figura 57 se intenta explicar, con el uso de imágenes, la evolución del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral de los sujetos en cuestión. En este diagrama se establecen las conexiones que tienen lugar cuando el sujeto manipula objetos en diferentes niveles de construcción.



(a) S_5 (b) S_6

Figura 57. Diagramas que representan el esquema para la apropiación del concepto de la Integral de los sujetos S_5 y S_6.

Se puede observar que las conexiones que surgieron entre los diferentes niveles de construcción son similares entre los dos sujetos, excepto que en el diagrama de S_5 (figura

57a) aparece como línea punteada. La diferencia entre esos dos conectores es que cuando ambos intentaron resolver las actividades diseñadas para el nivel Trans-, S_6, a diferencia de S_5, propuso (aunque no lo realizó) que la acumulación de áreas podría ser un camino viable para solucionar el problema propuesto. Sin embargo, a S_5 se le tuvo que recordar que podía resolver mediante la acumulación de áreas; aunque a pesar de esto tampoco resolvió.

Otro aspecto que se pude rescatar de estos diagramas y de los que anteriormente fueron expuestos para los sujetos S_2 y S_3 (igual se observó con S_1 y S_4), son los procesos de reflejamiento hacia niveles inferiores de construcción. Éstos se representan con las flechas que unen las plataformas de los diagramas, cuyo inicio tiene lugar en los niveles superiores. Esto muestra cómo la estructura mental actual del sujeto se moviliza cuando éste enfrenta una situación nueva que provoca un desequilibrio; no sólo se observa eso, sino también el proceso de reflexión, esto es, su tendencia o búsqueda hacia un reequilibrio mental, dando lugar al proceso de asimilación.

4.4.4 Diferencias y Similitudes entre las construcciones de los seis estudiantes.

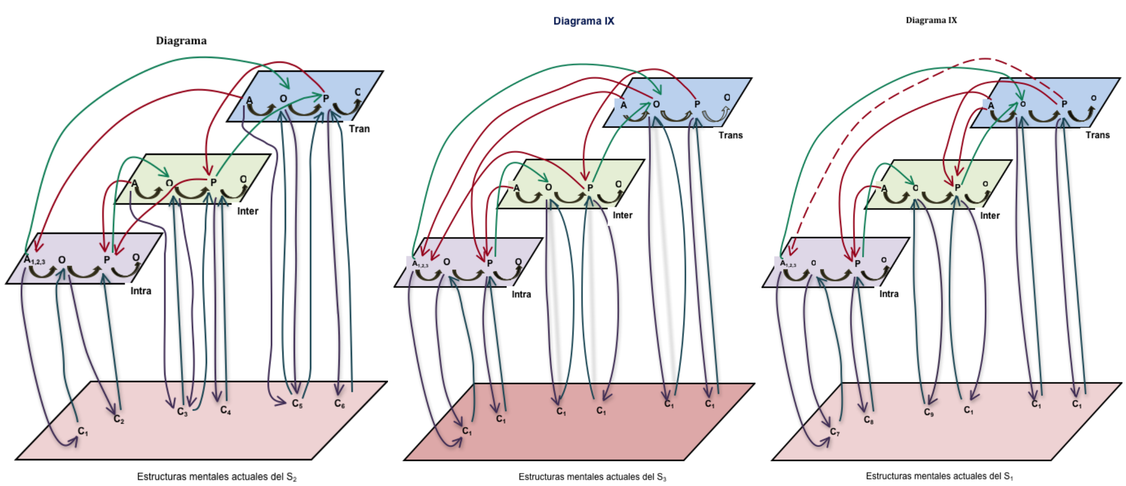
Hasta el momento se han discutido los hallazgos sobre las construcciones de los sujetos que lograron mayor nivel de construcción (S_2 y S_3). Los sujetos que se consideran que menos construcciones lograron (S_5 y S_6) y los casos que se consideraron antagónicos (S_2 y S_5).

Sin embargo, se consideró necesario que para seguir enriqueciendo los hallazgos y perfilar la discusión de los mismos hacia las respuestas a las preguntas que motivaron esta investigación, se decidió analizar y discutir las construcciones de los seis sujetos, para ello se retomaron las tablas comparativas 10 a la 16, descritas en el capítulo precedente.

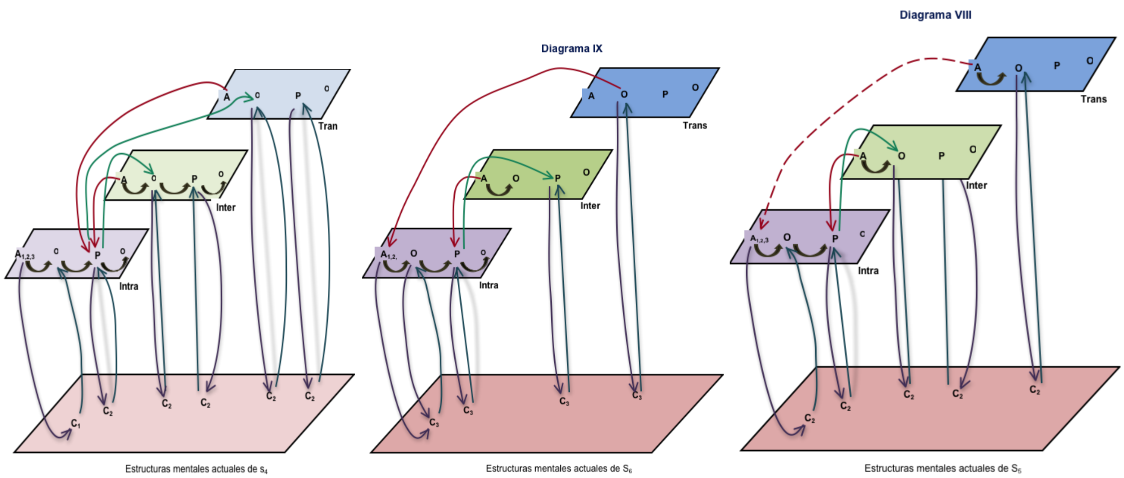
Cuando se inició este nuevo análisis se observó que en dichas tablas hay una tendencia en los datos, por lo que se pueden identificar dos grupos de sujetos: los que logran más altos niveles de construcción del esquema (S_2, S_3 y S_1, que se denominarán grupo A), y los que logran menores niveles de construcción (S_4, S_6 y S_5, grupo B).

En la tabla 24 se describen las similitudes y diferencias que se observaron entre las construcciones de estos grupos, se destacan los esquemas a los que recurren para resolver las situaciones problema, las dificultades que enfrentan en el proceso de solución, así como algunos esquemas que coordinan en su proceso de acomodación.

Hay que recordar que antes de generar estos dos grupos, se discutieron las construcciones de los sujetos que más altos niveles logran, y se observó que sus esquemas previos así como sus procedimientos son similares. Lo mismo sucedió con quienes menos construyeron, es por esa razón que se decidió generar dos grupos. Para facilitar el acceso a la información que se plantea en la tabla 24, se sugiere observar los diagramas de la figura 58, en la que aparece la idea gráfica que representa la evolución del esquema mental de cada sujeto.



a) S_2 b) S_3 c) S_1



d) S_4 e) S_6 f) S_5

Figura 58. Diagramas que representan el esquema para la apropiación del concepto de la Integral de los sujetos del grupo A (S_2, S_3 y S_1) y del grupo B (S_4, S_6 y S_5).

Una similitud que se observa en estos diagramas y que de alguna manera ya se había enfatizado, es la tendencia de los sujetos a regresar a los niveles inferiores para fortalecer sus construcciones siguientes.

Tabla 24

Comparación de las construcciones de los sujetos que integran el Grupo A y el Grupo B

SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DEL GRUPO A Y GRUPO B	
NIVEL INTRA-	
SIMILITUDES	*DIFERENCIAS*
Una similitud que se destaca en los sujetos es que ambos grupos recurren a esquemas que les permiten operar con números reales. En este apartado los sujetos no evidenciaron problema alguno con las operaciones con los números reales.	Una diferencia notoria entre los dos grupos es que los sujetos que integran el grupo A logran interpretar y explicar las razones por las que pueden estimar áreas de figuras geométricas cuando uno de sus lados está coronado por un segmento curvilíneo. Basan su explicación en las particiones que pueden generar en un intervalo sobre el eje horizontal y cómo éstas repercuten en la gráfica de una figura. Visualizan el concepto de cantidad infinitesimal e intuitivamente generan de manera retórica procesos de límites. Los estudiantes que conforman el grupo B no logran calcular áreas de figuras que no sean cuadrados, triángulos o rectángulos, como se plantean en un curso convencional de geometría. Se entiende que esta diferencia se debe a los esquemas que poseen los sujetos que les permiten interpretar cantidades

		infinitesimales.
Ambos grupos poseen esquemas que les permiten explicar el concepto de velocidad y posición y la relación entre éstas, esto es entendible ya que si bien el historial académico no es el mismo, tiene en común que todos son estudiantes del curso de mecánica clásica y estudiaron principios de cinemática. Se detectó que el grupo que sí construye logra enlazar lo conceptos velocidad-posición geométricamente, mientras que quienes no construyen enlazan el concepto desde un enfoque verbal.		Desde que inician la solución de las situaciones problema, los sujetos del grupo A (específicamente S_2 y S_3) recurren a esquemas que promueven el análisis e interpretación de gráficas, logran describir el fenómeno que la gráfica representa a partir del sentido creciente, decreciente, cruces con el eje horizontal de la misma, así como describir la situación del fenómeno cuando la gráfica es positiva o negativa. Para los sujetos del grupo B esto no fue necesario para acumular áreas en las actividades diseñadas para este nivel de construcción, ya que sólo se trataba de seguir instrucciones o imitar procesos, por tanto fueron esquemas que no evidenciaron. Se destaca como diferencia importante entre los dos grupos porque estos esquemas estuvieron presentes en la mente de S_2 y S_3 en todo su proceso de construcción.
Ambos grupos poseen esquemas mentales que les permiten ubicar puntos en el plano cartesiano, son capaces de localizar coordenadas en el plano y de extraer información sobre éstas; por ejemplo, relacionan las variables velocidad-tiempo con los valores (a, b) que aparecen en un punto.		Otra diferencia notable entre los dos grupos es que los sujetos del grupo A recurren a construcciones con las que logran identificar, intuitivamente, una cantidad infinitesimal e infinita. Los sujetos que integran tal grupo manifiestan que entre un intervalo de números existe una cantidad infinita de éstos y, por tanto, el segmento limitado por tales números se puede dividir tantas veces como se quiera.
En general los estudiantes no presentan dificultad para calcular áreas limitadas por segmentos rectilíneos, a excepción de S_5 que no recordó las fórmulas de área de rectángulos.		Los sujetos del grupo B no atendieron algunos planteamientos que se establecieron en las actividades de los bloques, argumentan que no leyeron porque no se percataron de las instrucciones o sencillamente que no siguieron las instrucciones.
Un aspecto similar que se detectó en este nivel de construcción, es que los sujetos de ambos grupos logran acumular áreas limitadas por segmentos rectilíneos, sean de una función lineal o de una función cuya gráfica se muestra discretizada, y esto lo logran coordinando esquemas referentes a áreas de figuras conocidas, lo que permite la manipulación de coordenadas en el plano cartesiano y la operación con los números reales, al parecer de una manera sencilla, ya que siguen instrucciones e imitan procedimientos.		

SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DEL GRUPO A Y GRUPO B		
NIVEL INTER-		
SIMILITUDES		DIFERENCIAS
Los estudiantes, al igual que en el nivel precedente, recurren a esquemas mentales que les permiten operar con los números reales, identificar e interpretar puntos en el plano cartesiano, tener acceso a los conceptos de velocidad y posición de una partícula y calcular áreas de cuadrados, triángulos y rectángulos. S_5 nuevamente enfrentó dificultades con las fórmulas de áreas, en esta ocasión de triángulos. Desde luego se le recordó cómo debía hacerlo para que pudiera avanzar en la solución de las actividades.		Nuevamente en este nivel se presentan las dificultades que evidencian los sujetos del grupo B cuando debieron estimar áreas limitadas por curvas, situación que los estudiantes del grupo A resolvieron sin dificultad.
Se observó que los estudiantes poseen esquemas suficientes que los habilitan a aplicar la fórmula v = d/t sin dificultad. Ésta fue necesaria para resolver algunas actividades diseñadas para este nivel. Muestran dominio en la interpretación de las variables que aparecen en ésta; esto se debe a dos situaciones: la primera, que en la clase de Cinemática el maestro les mostró la utilidad y aplicaciones de la fórmula, y la otra se debe a que en las instrucciones de los problemas diseñados para el nivel Intra- se sugirió la fórmula.		Los sujetos del grupo B nuevamente omiten algunos planteamientos que debieron resolver en las actividades por grupos.
		El grupo B, a diferencia del grupo A presenta dificultades para diferenciar cuándo una gráfica debe ser trazada como una curva suave y cuándo como una serie de sucesos, discretizada. Esto se entiende debido a que en todo el proceso de construcción del esquema presentaron dificultades con la interpretación de cantidades infinitesimales, o la carencia de esquemas que les permitan aplicar los procesos de límites, pese a que éstos son tratados en el curso de Cálculo Diferencial, requisito indispensable para cursar Cálculo Integral.
		Son notables las diferencias entre los grupos cuando se debió analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica velocidad y su relación con la gráfica posición. En este apartado los sujetos del grupo B no logran concatenar el concepto velocidad con el comportamiento de una gráfica y mucho menos su relación con la gráfica posición. Se infiere que esta situación obedece a las construcciones débiles que poseen que les permitirían interpretar el crecimiento o decrecimiento de una gráfica. Los sujetos del grupo B, como se comentó, no evidencian dificultades para entender de manera conceptual la velocidad y posición de una partícula, pero sí presentan problemas cunado estos conceptos son llevados a una representación geométrica. Si lograron interpretaciones no fue por el comportamiento de la gráfica, sino porque hacían

		conclusiones sobre el movimiento: “si se nueve rápido, la velocidad aumenta”, “si llega a un punto el móvil es porque se desplazó, y por tanto hay una velocidad”, etc..
		En este nivel de construcción se pueden destacar dos aspectos interesantes, el sujeto del grupo B, S_5, recurrió a esquemas que le permiten referir la Integral como la antiderivada; sin embargo, evidencia que tales esquemas son débiles, ya que fugazmente hace tal cita pero ésta no trasciende, no conecta este esquema con otros, él lo recuerda ya que cursa por segunda vez Cálculo Integral y recuerda que el maestro lo mencionó. Por otro lado, S_3, integrante del Grupo A, posee esquemas que le permiten entender la Derivada como una velocidad instantánea, y marca claramente la diferencia entre las velocidades medias e instantáneas, lo cual favorece el trazo de sus gráficas primitivas.

SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS CONSTRUCCIONES DEL GRUPO A Y GRUPO B		
NIVEL TRANS-		
SIMILITUDES		*DIFERENCIAS*
Además de las similitudes descritas en el nivel Intra- no se observan similitudes entre los esquemas a los que recurren.		Se observó que en este nivel de construcción se siguen presentando las diferencias observadas en los niveles precedentes; sin embargo, para éste nivel se observaron diferencias que a continuación se describen.
		Se observó que los sujetos del grupo A logran establecer someramente la relación entre la Derivada e Integral, se percatan que una está ligada con la otra. Esto lo ubican a partir de que logran procesos de reversibilidad. En su clase de Mecánica Clásica, su maestro comentó que si derivan la función que representa la posición de una partícula, encuentran la función velocidad, entonces infieren que si de la gráfica velocidad, obtienen la posición, “eso” que hacen es una antiderivada. Los sujetos del grupo B, no logran estas construcciones, quien más se acerca es S_4, pero no muestra claridad en sus argumentos. S_5 y S_6, pese a que cursan por segunda vez Cálculo Integral, no advierten esto desde representaciones geométricas. Ellos tienen la información pero porque su maestro lo comentó, no porque lo hayan inferido en el proceso de las actividades asignadas en esta investigación. Ellos están más familiarizados con representaciones algebraicas que con geométricas, y aun así presentaron dificultades para identificar que la gráfica de la primitiva representaba la gráfica de una función Integrada.

		El grupo A logra acumular áreas sin mayor problema en gráficas que limitan áreas y que no necesariamente presentan un comportamiento lineal. Fueron autónomos en sus procesos y dieron una alternativa para solucionar problemas donde estuviera implicada la Integral, a excepción de S_2, quien prefirió seguir el camino del análisis de gráficas. Para el grupo B fue complicado acumular áreas si éstas estuvieron limitadas por curvas, además acumularon áreas sólo si se les sugería.
		Sobre la obtención de la gráfica de la función primitiva a partir de analizar la gráfica de la Derivada, se observó que los sujetos que más construyen logran la obtención de tal gráfica sin mayor dificultad, a excepción de S_1, quien enfrentó dificultades para interpretar velocidades negativas. Esta situación se detectó en el contexto mismo del problema, ya que cuando el sujeto no logró entender qué significaba que un corredor se moviera con una velocidad negativa, presentó dificultad para interpretar la gráfica. Fue evidente que entró en conflicto ya que por un lado la gráfica le mostraba velocidades negativas y por otro no lo enlazaba al contexto. Sin embargo logró acercase a la respuesta del significado de las velocidades negativas y el efecto que esto tiene sobre la gráfica de posición, pero sus construcciones se consideraron débiles aún.

4.4.5 Esquemas previos que se movilizan en la construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral.

Una de las premisas básicas para esta investigación radica en identificar cuáles son las estructuras mentales que se generan o se movilizan cuando un estudiante transita por los niveles intra, inter y trans, para la construcción del esquema mental que promueve la comprensión del concepto de la Integral, si se aborda desde registros de representación geométricos. Para responder esta pregunta se recurrió a la triangulación y al análisis minucioso de los datos obtenidos desde sus diferentes fuentes. En la tabla 25 se resumen los esquemas previos que se identificó, movilizan los sujetos cuando construyen el esquema. Esta tabla se elaboró tomando como punto de partida las construcciones de los sujetos que, se consideró, logran mayores niveles, y se enriqueció con los resultados de los otros sujetos que participaron en la investigación.

Tabla 25

Esquemas mentales que los sujetos movilizan para la comprensión del concepto de la Integral

NIVEL INTRA	*NIVEL INTER*	*NIVEL TRANS*
Replicar o imitar procedimientos que permiten realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números reales. (R_1)	Habilidades para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números reales. (R_2)	Habilidades para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números reales. (R_2)
Construcciones que faciliten la interpretación y localización de puntos en el plano cartesiano y que faciliten la extracción de información que esté implícita en las coordenadas de un punto, relacionándolas con las cantidades que representan los ejes coordenados. Además debe ser capaz de entender que entre dos puntos en el plano existe una cantidad infinita de puntos. (P_1)	Habilidad en interpretación y localización de puntos en el plano cartesiano y que faciliten la extracción de información que esté implícita en las coordenadas de un punto, relacionándolas con las cantidades que representan los ejes coordenados. Además debe ser capaz de entender que entre dos puntos en el plano existe una cantidad infinita de puntos. (P_1)	Habilidad en interpretación y localización de puntos en el plano cartesiano y que faciliten la extracción de información que esté implícita en las coordenadas de un punto, relacionándolas con las cantidades que representan los ejes coordenados. Además debe ser capaz de entender que entre dos puntos en el plano existe una cantidad infinita de puntos. (P_1)
Construcciones que faciliten calcular áreas de figuras regulares (cuadrados, rectángulos). (A_1)	Habilidad para calcular áreas de figuras regulares (cuadrados, rectángulos, triángulos) que permitan estimar aproximadamente el área de una figura que posee un lado no rectilíneo, sino delimitado por un segmento curvilíneo. (A_2)	Habilidad para calcular áreas de figuras regulares (cuadrados, rectángulos, trapecios), que le permitan estimar aproximadamente el área de una figura que posee un lado no recto, sino delimitado por un segmento curvilíneo. (A_2)
Capacidad de interpretar que en un intervalo de números reales existe una cantidad infinita de ellos. (R_3)	Dentro del campo de los números reales, poseer construcciones que le permitan operar con habilidad la noción intuitiva de cantidades infinitesimales, en donde el sujeto sea capaz de interpretar que en un intervalo de número reales existe una cantidad infinita de números. (R_4)	Dentro del campo de los números reales, poseer construcciones que le permitan operar con habilidad la noción intuitiva de cantidades infinitesimales, en donde el sujeto sea capaz de interpretar que en un intervalo de número reales existe una cantidad infinita de números. (R_4)
Construcciones que promuevan en el sujeto la interpretación intuitiva de la idea de cantidades infinitas. (R_5)	Habilidad para interpretar intuitivamente la idea de cantidades infinitas. (R_5)	Habilidad para interpretar intuitivamente la idea de cantidades infinitas. (R_5)
Construcciones que le permitan interpretar el comportamiento de una función, ya sea en su sentido creciente, decreciente o constante, así como identificar puntos en los que una gráfica es positiva, negativa o cero. (F_1)	Habilidad para interpretar el comportamiento de una función, ya sea en su sentido creciente, decreciente o constante, así como identificar los puntos en los que una gráfica es positiva, negativa o cero. (F_2)	Habilidad para interpretar el comportamiento de una función, ya sea en su sentido creciente, decreciente o constante, así como identificar los puntos en los que una gráfica es positiva, negativa o cero. (F_2)

Se puede observar que los esquemas que movilizan los estudiantes en el nivel Intra- van desde las operaciones elementales con los números reales hasta el análisis geométrico del comportamiento de gráficas. También se puede apreciar en la tabla 25 que en las columnas que corresponde a la descripción de esquemas de los niveles Inter- y Trans- se repiten los esquemas mencionados en la primer columna de la tabla. Al respecto se observó que en la medida en que el sujeto avanza en sus construcciones, los esquemas tales como el plano cartesiano, el análisis de gráficas (sentido creciente, decreciente, estacionario), cantidades infinitesimales, entre otros, van apareciendo en escena y el sujeto manifestó un mayor grado de dominio en éstos, dado que las situaciones problemas asignadas así lo requerían.

4.5 Validez y Triangulación de los datos

La *triangulación* es una estrategia metodológica con la que se pretende controlar la calidad de la investigación. Es aplicada en varios momentos del estudio, de acuerdo con Ruiz (2009), desde el planteamiento del problema y los preparativos para su abordaje, hasta todo el proceso de marcha desde el campo a la creación de los instrumentos, la interpretación de datos y la redacción del texto final (Ruiz, 2009). En la presente investigación se utilizó la estrategia de *triangulación metodológica,* Stake (2010), la cual consistió en analizar y relacionar los datos recabados desde diferentes fuentes.

Los descubrimientos a partir de los estudios cualitativos están influidos por la forma en la cual el investigador diseñó su trabajo. Los enfoques múltiples dentro del mismo estudio favorecen al entendimiento del fenómeno y la eliminación de influencias externas del mismo (Stake, 2010). Las formas como fueron validados los datos recabados en el estudio son:

- Se analizaron los datos recogidos de cada estudiante desde las diferentes técnicas utilizadas en la investigación.
- Desde los datos que arrojó la entrevista, la observación a partir de la discusión por pares y la historieta que desarrolló cada sujeto, se trianguló la información con la intención de entender el fenómeno desde diferentes ángulos. El diagrama de la figura 59 indica esquemáticamente la triangulación de los datos recogidos (Sisto, 2008).

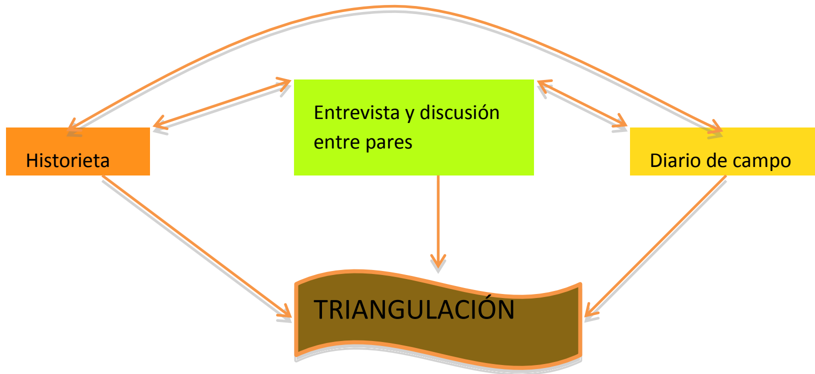


Figura 59. Triangulación de los datos recabados.

Stake (2010) recomienda que, dado que los actores desempeñan un papel fundamental en un estudio, una vez analizados los resultados, y plasmados los diálogos que sostuvieron entrevistadora-entrevistado, se le solicite al sujeto que revise la fidelidad con la que fueron escritas sus respuestas a las preguntas generadas en la entrevista (feedback).

Esto se recomienda cuando el entrevistado ya no será interrogado en otra ocasión. La idea de esta actividad, además de dar grado de confiabilidad a las interpretaciones del investigador, favorece o enriquece las descripciones de tales observaciones, desde la perspectiva de la fuente original: el sujeto, al cual se le considera pieza importante en el estudio (Sisto, 2008).

En el caso de la investigación este aspecto fue cubierto de la siguiente forma: se realizaron audiograbaciones y videograbaciones de las entrevistas; posteriormente, la transcripción de éstas. Una vez realizada la transcripción se solicitó a una persona ajena a la investigación que revisara su veracidad de acuerdo a la información registrada en la audiograbación y videograbación. La razón por la cual no fueron los propios entrevistados quienes revisaron la transcripción de su entrevista es porque no fue posible entrar en contacto con ellos de nuevo.

Se considera que en la investigación existe confiabilidad interna en los resultados obtenidos dado que se utilizaron diferentes fuentes de recolección de datos, las cuales fueron trianguladas. Además se cuenta con la evidencia de las videograbaciones y los instrumentos impresos —con las respuestas que cada sujeto proporcionó—.

Al principio de las entrevistas sucedió que la entrevistadora no lograba profundizar en los argumentos que proporcionan los sujetos S_6 y S_1, ya que estos estudiantes, cuando se les preguntaba sobre el mismo tema más de una vez, manifestaban cierto grado de nerviosismo. Desde luego esto es comprensible, porque no es sencillo para algunos estudiantes argumentar sus procesos de solución cuando se tienen mecanizados ciertos procedimientos (esto se observa continuamente durante las clases de matemáticas). No obstante, esta situación fue resuelta satisfactoriamente cuando se retomó el tema en otro momento y cuando los sujetos lograron relajarse.

5 Discusión y Conclusiones

En reiteradas ocasiones se ha enfatizado en la importancia que tiene que estudiantes universitarios se apropien del concepto de la Integral desde sus diferentes enfoques y registros de representación, también se ha mencionado la importancia que tiene que sean capaces de transitar por éstos en la solución de problemas matemáticos. Se ha hablado sobre la actual escasez de propuestas que expliquen cómo un estudiante comprende el concepto desde registros de representación geométricos (los cuales son necesarios para interpretar y explicar ciertos fenómenos de la ingeniería que en ocasiones desde otro registro de representación no es inmediato o posible deducir).

En este apartado se exponen las reflexiones generadas a partir de los hallazgos en desarrollo de la investigación. Tal información se presenta en tres direcciones:

- Desde los planteamientos iniciales, esto es a partir de las respuestas a las interrogantes que se plantearon al inicio de la investigación, los elementos que aporta el marco teórico y el estado del conocimiento,
- desde los instrumentos y la metodología utilizados en la investigación y
- desde las implicaciones que ésta tiene en el campo de la didáctica de las matemáticas.

5.1 Implicaciones teóricas de la investigación

La pregunta central que motivó la presente investigación fue ¿Cómo construye un estudiante universitario un esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral a partir de registros de representación geométricos? En la búsqueda de respuestas a tal interrogante se revisaron diferentes investigaciones (Cantoral et al., 2003; Delgado, 2009; González y Aldana 2010; Meza, 2001; Morales, 2009; Paschos & Farmaki, 2006; Zuñiga, 2004; Artigué, 1991; Imaz, 2001; Souto y Gómez, 2010; Crisóstomo, 2011; Ordóñez y Contreras, 2010; Dubinsky et al., 2000), en las que de alguna manera abordan la apropiación del concepto de la Integral.

Los trabajos que mayor inciden en describir las etapas por las que un sujeto transita para apropiarse del concepto de la Integral (Definida) son Czarnocha, Loch, Prabhu & Vidakovic (2001), Hamdam (2009, p. 224) y Boigues (2010), Imaz, 2001, Paschos & Farmaki, (2006).

Czarnocha et al. (2001), Imaz (2001) y Boiges (2010) abordan la construcción del concepto a partir de representaciones numéricas y geométricas (de la Integral Definida), en sus trabajos proponen una descomposición genética del concepto de acuerdo con APOE la cual consiste en generar particiones de la región delimitada por una curva, calcular áreas de las figuras que generan tales particiones y aproximar el área de la región desencadenando el proceso del límite. Lo que no se encontró en tales investigaciones fue algún mecanismo que invite al sujeto a dar un significado geométrico a las áreas acumuladas ya que el objetivo de las investigaciones coinciden en aproximar el área limitada por la curva, cuyo eje motor es la suma de Riemann.

Paschos & Farmaki, (2006) utilizan la tecnología para estudiar cómo un sujeto se apropia del concepto de la Integral Definida enfatizando también en registros geométricos y numéricos. Lo interesante de este trabajo fue que se describen las dificultades que presentan los sujetos en el desarrollo de las actividades y cómo utiliza diferentes conocimientos. El objetivo fue que el sujeto, a partir de la contextualización de razones de cambio como velocidades, calculara la distancia recorrida en un intervalo y la asociara con el área. Lo que no se encontró en este trabajo fue en primera instancia la relación geométrica entre estas razones de cambio con la gráfica de la primitiva que representaría distancias recorridas, por otro lado el estudio revela las etapas de construcción de los conocimientos, las imágenes que conforma el sujeto para la apropiación de la Integral pero desde registros numéricos, lo cual ha sido abordado en otros trabajos.

Por otro lado, Meza (2010) realizó un estudio con el que intentó explica si alumnos preuniversitarios y universitarios logran establecer la relación geométrica entre tangentes-áreas desde registros de representación geométricos. En el trabajo se desarrollan una serie de actividades con la intención de que el estudiante logre un acercamiento geométrico al Teorema Fundamental del Cálculo. Lo que no se observó en este estudio es una descripción del progreso o las etapas que tienen lugar en las construcciones de los sujetos cuando manipulan objetos matemáticos.

Entonces, como una primer aportación de los resultados de la presente investigación al estado del conocimiento es que se logró definir, a partir de mecanismos metodológicos, epistemológicos y conceptuales, los niveles de construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral que tienen lugar cuando un sujeto manipula objetos matemáticos relacionados con representaciones geométricas:

> Se definió que el estudiante *logra primer nivel de construcción, denominado **Intra-** en la construcción del esquema para la Integral si es capaz de transformar objetos a partir de imitar procedimientos o a partir de indicaciones externas a él. En otras palabras: un sujeto ha logrado un esquema a nivel operatorio, pero no logra de manera independiente generalizar sus acciones, tal es el caso cuando relaciona la suma de la acumulación de áreas con las ordenadas de un punto (x, y) en el plano cartesiano, a partir de seguir procesos sugeridos. En este nivel no se espera que muestre autonomía sobre la construcción de la función primitiva (Integral); se espera que el estudiante imite procesos o atienda instrucciones.*
>
> En la medida que el estudiante se acerca más al objeto y logra generalizar sus acciones en procesos y con ello siendo más autónomo en la solución de alguna situación problema asignada, el estudiante l*ogra un **nivel Inter-** en la construcción del concepto de la Integral, a partir de representaciones geométricas. Es capaz de relacionar y describir el comportamiento de funciones primitivas (que pertenecen a diferentes familias) a partir de su función derivada desde los procesos de acumulación de cantidades que varían.*
>
> Si el estudiante *es capaz de trasladar el esquema de acumulación de áreas hacia la solución de situaciones problema que pertenecen a diferentes contextos, si logra reversibilidad en los procesos que relacionen la gráfica que representa cantidades que varían con la gráfica que representa la acumulación de estas variaciones,* logra un ***nivel Trans-*** del esquema mental. *En este nivel debe ser capaz de describir el comportamiento de un fenómeno situado a partir de datos que se obtengan de una función que represente razones de cambio, ser capaz de discriminar problemas que no sean resueltos por la Integral e identificar los que sí lo son.*

Uno de los cuestionamientos básicos en la investigación consistió en identificar ¿Qué construcciones mentales previas moviliza el estudiante universitario para conformar las estructuras necesarias que faciliten la comprensión del concepto de la Integral a partir de registros de representación geométricos? Para responder esta pregunta se recurrió a la triangulación y al análisis minucioso de los datos obtenidos desde sus diferentes fuentes (entrevista, trabajo individual, discusión entre pares e historieta). En la tabla 25 (apartado 4.4) se resumieron los esquemas previos que traen a su mente los sujetos que más construyen, desde luego enriquecido el análisis con las aportaciones de los otros sujetos que participaron en la investigación.

Se destacan que en los diferentes niveles de construcción el sujeto recurre a los mismos esquemas. Estos están relacionados con las operaciones de los números reales, el plano cartesiano (relación de coordenadas-punto, extracción de información del plano cartesiano, como las coordinas del punto sobre una gráfica y su relación con las variables involucradas en los ejes coordenados) y esquemas que facilitan calcular áreas de figuras geométricas. Sin embargo, se observó que en la medida en se acercaba más y más al objeto matemático y va transitando a diferentes niveles de construcción, el esquema en turno demandó de un mayor dominio de comprensión.

Ejemplo de ello cuando el sujeto debió interpretar coordenadas en el plano cartesiano para trazar una gráfica, conforme avanzaba la construcción de la gráfica de la función primitiva, el sujeto requirió de realizar trazos más suaves, lo cual fue posible ya que poseía el esquema que le permitió interpretar que entre cada par de número enteros, existen más números los cuales generan pares coordenados que pertenecen también a la gráfica.

Otro esquema mental que fue necesario para la construcción del concepto de la Integral fue el de graficación de funciones, se recurre a éste principalmente en niveles avanzado de construcción, ya que se requieren elementos que permitieran interpretar cuándo una gráfica es creciente, decreciente, estacionaria, positiva, negativa o nula. En el nivel inicial de construcción se observó que esta información fue útil solo para las gráficas lineales, pero en la medida en que los sujetos avanzaron en sus construcciones, el análisis de graficas exigió que el sujeto rescatara información de diferentes familias de curvas, cuyo comportamiento no precisamente fue lineal. Además se requirió que relacionara el efecto que el sentido, creciente y decreciente de una gráfica que representa cantidades que varían tiene sobre su primitiva.

Un esquema que al que recurren los sujetos que mayores construcciones lograron fue relacionado con la interpretación de cantidades infinitesimales. Cuando se les mostró el material de trabajo, en ningún momento se mencionaron a las cantidades infinitesimales. Sin embargo, en la medida en que se les solicitaba que sus representaciones geométricas fueran más detalladas, los sujetos recurrieron a la idea de infinitesimal para estimar cálculos e inferir algunos de sus trazos.

Otra pregunta que se generó en el desarrollo de la investigación consistió en identificar ¿Cuáles conflictos conceptuales enfrenta un estudiante para lograr los requisitos previos necesarios para conformar las estructuras suficientes que faciliten la comprensión del concepto de la Integral? De acuerdo a los resultados de la investigación los principales conflictos que enfrentaron los sujetos (que menos construcciones lograron) cuando manipularon objetos matemáticos, refiere a construcciones débiles de esquemas previos que debieron ser consolidadas en otras etapas escolares, tales como *el cálculo de áreas de figuras conocidas*, por ejemplo para S_5 resultó un conflicto no recordar algunas fórmulas básicas para calcula áreas y esto impidió que avanzara en sus construcciones, entonces fue necesario proporcionarle la información necesaria.

Además del sujeto mencionado, S_1, y S_4 tuvieron dificultad en *estimar áreas de figuras geométricas, cuyo lado superior estuvo definido por un segmento curvilíneo*. Este tipo de figuras surgieron en los problemas en los que se debió acumular áreas limitadas por curvas. Esta situación impidió que los sujetos continuaran con algunos de sus procesos de solución, lo que los limitó únicamente a la acumulación de áreas acotadas solamente por funciones lineales.

Esta situación posiblemente se debe a dos factores, la primera es que los estudiantes poseen esquemas previos relacionados con áreas de figuras conocidas, saben que existe una fórmula que les permite calcular con exactitud un área (triángulo, cuadriláteros, etc.) y al no conocer una fórmula que se ajuste al modelo que se genera cuando estiman áreas de una curva, infieren que no es posible. Otra situación que se observó fue que los estudiantes mencionados no poseen esquemas que les permita dar apertura a la estimación de áreas a partir de segmentar cada vez más la región en cuestión, probablemente esto se deba a construcciones débiles de la idea de cantidades infinitesimales.

También se identificó conflicto sobre construcciones previas débiles fue en el campo de gráficas de funciones, específicamente *el análisis de gráficas*. Dificultades tales como interpretar cuándo una gráfica se considera positiva, negativa o constante, así como el significado de la intersección de la gráfica con el eje horizontal. Al tratarse de una representación geométrica de un concepto, resultó necesario que los sujetos tuvieran construcciones mentales sobre graficación de funciones y el plano cartesiano, ya que los sujetos que menores construcciones alcanzaron no lograron relacionar y dar significado a las variables involucradas con los ejes y los puntos de la gráfica.

Sobre este mismo punto, se observó en los sujetos que mayores niveles de construcción lograron, que éste conocimiento les fue útil en el momento en que debieron analizar el comportamiento de las gráficas que representaron velocidades, ya que uno de los caminos que se consideró en las actividades para la obtención de la función primitiva fue a partir del análisis del comportamiento de la Derivada.

Otra complicación que surgió al no poseer los sujetos elementos de análisis de gráficas fue cuando se debió construir la gráfica de primitiva si la función velocidad se encontraba en el tercer y cuarto cuadrante del plano cartesiano. Se les dificultó considerar el sentido geométrico negativo del área. Los sujetos que menos construyen no interpretaron que el signo de la velocidad (y del área) se debía a su ubicación geométrica, y por tanto, no les fue posible relacionarlo con el movimiento de una partícula.

Uno de los sujetos que mayores construcciones logró, al inicio del análisis de gráficas, cuando surgen las velocidades negativas, tuvo que recurrir a la gráfica del movimiento que se generó cunado éste utilizó el sensor de movimiento y observar la videograbación correspondiente para comprender que el signo de la gráfica velocidad sólo representaba el sentido del movimiento.

En algunos trabajos en los que se aborda la construcción del concepto de la Integral Definida (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Dubinsky et al., 2000; Delgado, 2009; Sealey, 2006, Torres y Martínez (2008), Souto y Gómez, 2010; Thompson, 1994; Hamdam, 2009; Crisóstomo, 2011; Ordóñez y Contreras, 2010; Prabhu

& Vidakovic (2001); Paschos & Farmaki, 2006) se enfatiza en la importancia que tiene el concepto de límite y en otros las cantidades infinitesimales para los procesos de acumulación de áreas. Es de suponer que tales conceptos dotarían a cualquier estudiante de una poderosa herramienta para estimar áreas limitadas por curvas así como el logro de representaciones algorítmicas de la Integral Definida.

En los supuestos iniciales del presente trabajo, se consideró el concepto de infinitesimal como un conocimiento previo esencial para que el sujeto pudiera construir la gráfica de una función primitiva. Sin embargo, los resultados de la presente investigación revelan que en las etapas primarias de la construcción del esquema mental los seis sujetos no recurrieron contundentemente a este concepto. Esto debido a que los trazos de las gráficas solicitadas no requirieron de mayores detalles que acumular áreas en intervalos definidos, aunque en la medida que avanzaban con las actividades los requerimientos de solución exigían que los sujetos afinaran sus trazos.

Quienes progresaron a niveles superiores de construcción del esquema y que lograron bosqueja una función primitiva, formalmente no recurren a este concepto pero se observó que los sujetos que tuvieron presente el concepto de cantidad infinitesimal y además fueron capaces de interpretarlo en una gráfica, lograron estimar áreas limitadas por curvas de manera intuitiva.

Imaz (2001) en su trabajo revela que uno de los obstáculos que presentan los estudiantes que cursan Cálculo Integral es precisamente construcciones débiles de la idea de cantidades infinitesimales. Ya se dijo que en la presente investigación se encontró que el concepto de infinitesimal no es un elemento indispensable en las etapas primarias del esquema (aunque sí se consideró necesario).

Se observó en quienes lograron mayores niveles de construcción (y que poseen el esquema de cantidad infinitesimal), tal información promovió la interpretación de áreas limitadas por curvas y además les permitió mejorar el trazo de sus gráficas, mostrando un aspecto de curvas suaves. Se observó también que quienes no recurrieron a tal esquema sus trazos fueron parecidos a los de una gráfica discreta, ya que no lograron interpretar que entre cada par de números reales existen más números, lo que los limitó en la selección de los subintervalos para generar las áreas.

Otro hallazgo importante en el desarrollo de la investigación que no atañe directamente a los conocimientos previos del sujeto pero que si tuvo repercusión directa en las construcciones del esquema, fue la incapacidad de algunos sujetos de interpretar instrucciones o a su descuido para atender las indicaciones que se plasman en las actividades encomendadas. Por supuesto que no se descarta la posibilidad de que la redacción de las instrucciones no haya resultado clara para algunos, pese a que se revisó y modificó una y otra vez antes y después del pilotaje de los instrumentos.

Este conflicto, ajeno a los esquemas mentales propios de las matemáticas y que seguramente sería un objeto de estudio en otras investigaciones, se considera importante debido a que una propuesta en cualquier área del conocimiento puede fracasar, no por falta de esquemas mentales previos propios del campo de estudio en cuestión, sino por falta de capacidad lectora o por descuido para atender las instrucciones de lo que se está solicitando.

Para responder la pregunta central de la investigación, fue necesario entender y descifrar la movilidad de estructuras mentales que tuvieron lugar tanto en el tránsito de un nivel de construcción a otro así como lo que sucedía al interior de estos, lo cual generó una serie de reflexiones respecto a las aportaciones de los teóricos que fundamentan la investigación.

Tanto los teóricos de APOE como los de la teoría psicogenética basan sus observaciones a partir de que el sujeto realiza *acciones* (las cuales pueden ser inducidas o generadas en la medida que el sujeto se acerca al objeto) sobre objetos. En estos marcos se afirma que el conocimiento que surge cuando un sujeto manipula un objeto transita por diferentes estadios. La aportación de la presente investigación en esta dirección fue describir lo que sucede en cada estadio así como explorar, identificar, analizar y plasmar en un diagrama las conexiones mentales que tiene lugar cuando seis sujetos universitarios se apropian de un concepto matemático.

Se mencionó que el trabajo fue desarrollado en el campo de adultos jóvenes, por lo que se considera que aporta valiosos elementos teóricos a la epistemología genética sobre el desarrollo cognitivo de un estudiante universitario y además dentro de un campo específico del conocimiento, como lo son las matemáticas. Por otro lado, se considera que los resultados de la investigación aportan elementos teóricos y metodológicos interesantes al marco APOE, ya que si bien éste se sustenta con elementos que permiten observar cómo un sujeto universitario (y preuniversitario) construye un concepto matemático, hasta el momento en que se desarrolló la investigación, no se encontró, por un lado algún trabajo que explicara la construcción del concepto de la Integral a partir de registros geométricos y por otro algún trabajo que mostrar las conexiones mentales que surgen en la medida que el sujeto manipula objetos matemáticos y el tipo de abstracción que tiene lugar en sus procesos de construcción.

Además, cuando se analizó cómo es que el sujeto transita de un nivel de construcción a otro fue necesario identificar y describir también las estructuras mentales del sujeto que tuvieron lugar en cada nivel de construcción (en el interior de ese nivel) así como la acomodación de algunos esquemas y las conexiones entre estos. La explicación de lo que se observó en el *Intra*-, *Inter*- y *Trans*- se realizó de acuerdo a las propuestas de la teoría APOE referentes a la construcción de un esquema, ya que en la investigación se observó que en el nivel *Intra*- (aunque se consideran las etapas tempranas del esquema mental para la Integral) es un esquema lo que construye el sujeto, un tanto débil de acuerdo a las pretensiones para el concepto, pero se trata de un esquema al fin.

Los elementos teóricos de APOE favorecieron la explicación de tales construcciones ya que a partir de su idea de esquema facilitó observar los acciones que realiza el sujeto sobre objetos matemáticos y cómo éstas fueron encapsuladas en proceso; además, permitió describir el tipo de abstracción que se desencadena en estas construcciones y los esquemas que moviliza el sujeto.

Se mencionó que en el proceso de construcción del esquema, en las diferentes etapas, en la mente del sujeto se movilizan esquemas previos y actuales con los que se forma nuevas estructuras; esto es, coordina o vincula varios esquemas. Sin embargo, esos esquemas son a la vez estructuras formadas por otros esquemas y así sucesivamente, lo cual, si pudiera dibujarse con mayor detalle, sería un diagrama verdaderamente complejo, lo que muestra que la construcción del conocimiento se asemeja a una red formada por esquemas y un conocimiento es el producto de la movilidad y coordinación de éstos.

Además, estas ideas inducen a pensar en la complejidad de las estructuras que resultan cuando el sujeto enfrenta una situación nueva y se activa el proceso de adaptación.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se elaboró el diagrama de la figura 60, en donde se sintetiza el conjunto de construcciones de los sujetos que participaron en la investigación. Dado que una de las premisas básicas que mantuvo el rumbo de la investigación fue enfatizar en que cada individuo sigue procesos personales de construcción de acuerdo a su estructura mental previa, no se pretende afirmar que el diagrama de la figura 60 representa una generalización de cómo cualquier estudiante de Ingeniería construye el esquema para la Integral.

Se pretende mostrar un extracto de las similitudes que se identificaron en las construcciones de un grupo de seis estudiantes con características particulares, lo cual se considera útil, sobre todo, para enfatizar los esquemas previos que permanecen en el escenario de construcción y que resultaron referentes para esta investigación, hacia la apropiación del concepto de la Integral.

Entonces ¿Cómo construye un estudiante universitario un esquema mental para la apropiación del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos? ¿Cómo surge el proceso de acomodación hacia nuevas estructuras mentales a partir de coordinar los esquemas previos a los que recurre un sujeto en la apropiación del concepto de la Integral? A continuación se responden.

Cuando un sujeto se acerca al objeto matemático *cálculo de áreas limitadas por gráficas* a partir de las actividades $A_{1,2,3}$, se observó que tiene lugar un reflejamiento hacia su estructura cognitiva actual, referida en el plano inferior de la figura 60, en la que tiene lugar el proceso de acomodación y asimilación. En ese momento se identificaron estructuras como C_a y $C_{b,}$ (detalladas en la figura 61), en las que se indican las conexiones entre esquemas relacionados con áreas, operaciones con números reales e interpretación y localización de coordenadas en el plano cartesiano.

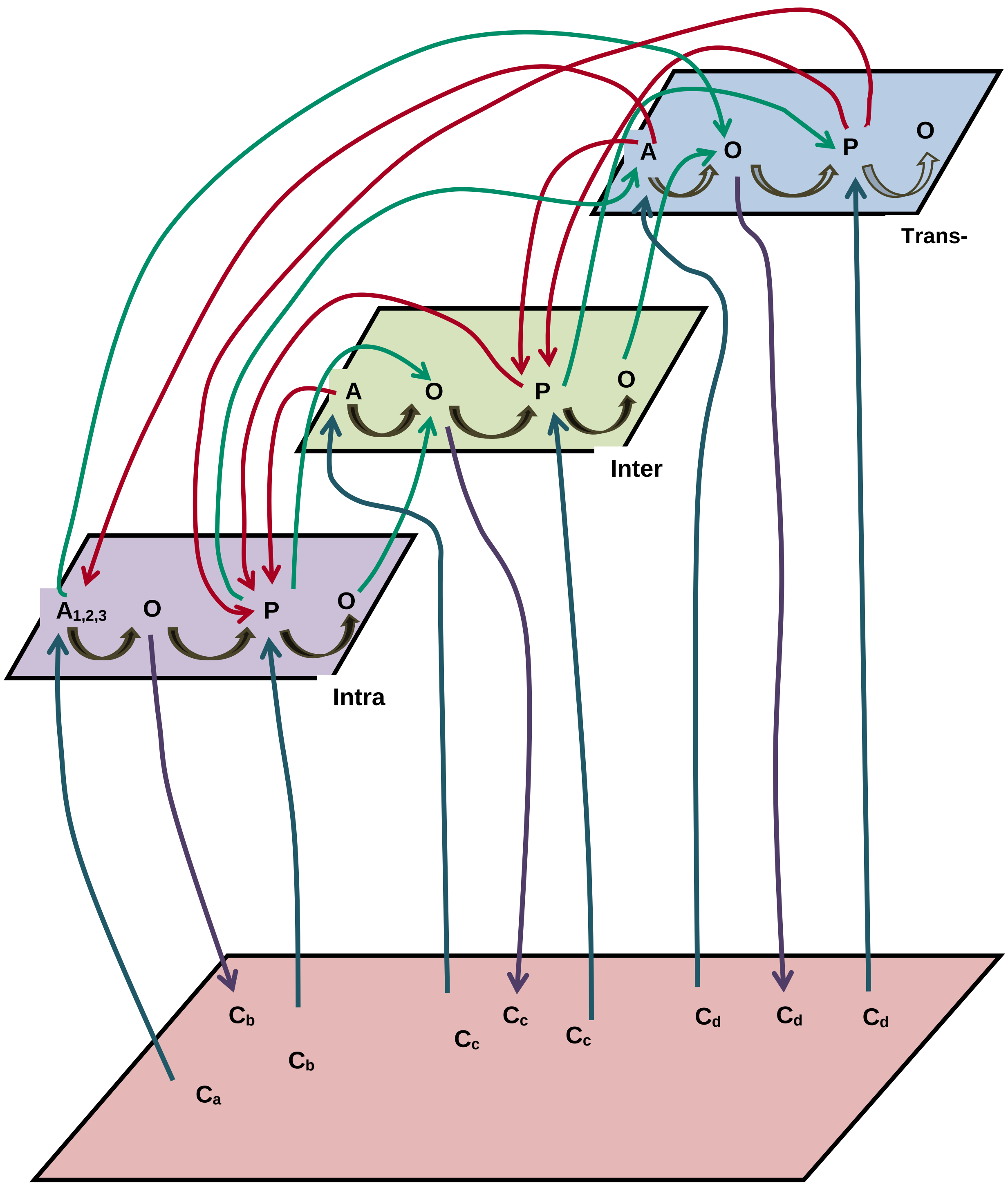
Cuando fue posible tal acomodación, el sujeto regresa al objeto matemático, a pesar de logra avanzar en sus construcciones, enfrenta nuevos obstáculos los que provocan nuevamente un desequilibrio en su estructura mental actual lo cual lo regresa a estructuras previas y a una reorganización de éstas, En este nivel de construcción (Intra-)

el sujeto logró procesos simples referentes a la acumulación de áreas, pero sólo de figuras limitadas por rectas, no generalizó procesos hacia otras familias de curvas.

De acuerdo con APOE el sujeto logró encapsular los procesos en un objeto matemático, denominado construcción de *gráficas de la función primitiva*, el cual fue enriqueciendo y ampliando en la medida que el sujeto sigue acercándose al objeto matemático. Esta situación genera nuevos desequilibrios en las estructuras mentales del sujeto, lo que promovió nuevamente la búsqueda de equilibrio. Para ello manipuló objetos matemáticos, nuevamente apareció en escena el objeto *cálculo de áreas limitadas por gráficas*, entonces el sujeto regresa a las *acciones* $A_{1,2,3}$ (en el diagrama 60 se observa con la flecha que conecta con color rojo), y principalmente a los *procesos* consolidados en niveles previos (nivel Intra-), lo que provocó nuevamente una acomodación en su estructura mental (plano inferior de la figura 60) y esto generó conexiones entre esquemas C_c (ver figura 61), que pertenecen al campo de los números reales, áreas, funciones, plano cartesiano y las construcciones sobre el objeto de la Integral desde representaciones geométricas.

El sujeto, en la medida en que actúa sobre el objeto matemático, obtuvo de éste información que le permitió avanzar a otros niveles de construcción y consolidar construcciones. Además, se observó que los sujetos (todos) regresaron a niveles inferiores de construcción. Esto se representa con las flechas de color rojo, lo que Piaget y García (Piaget y García, 2004) llaman *reflejamiento*, que significa recurrir a construcciones o procesos anteriores para fortalecer los actuales. Eso se observa en la figura 60, representado por flechas rojas que van de la plataforma del nivel Inter- a la Intra-.

En la figura 60 se observa que la letra P, que representa los procesos en la plataforma del nivel Intra-, conecta, mediante una flecha color verde, con la O, que representa un objeto matemático que aparece en la plataforma del nivel Inter-. Esto representó un proceso de *reflexión* del conocimiento adquirido en un nivel inferior, que se reflejó en el superior, igual sucedió desde el nivel Intra- al Trans- y del Inter- al Trans-.



Estructuras mentales previas del sujeto

Figura 60.- Diagrama que representa el esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral.

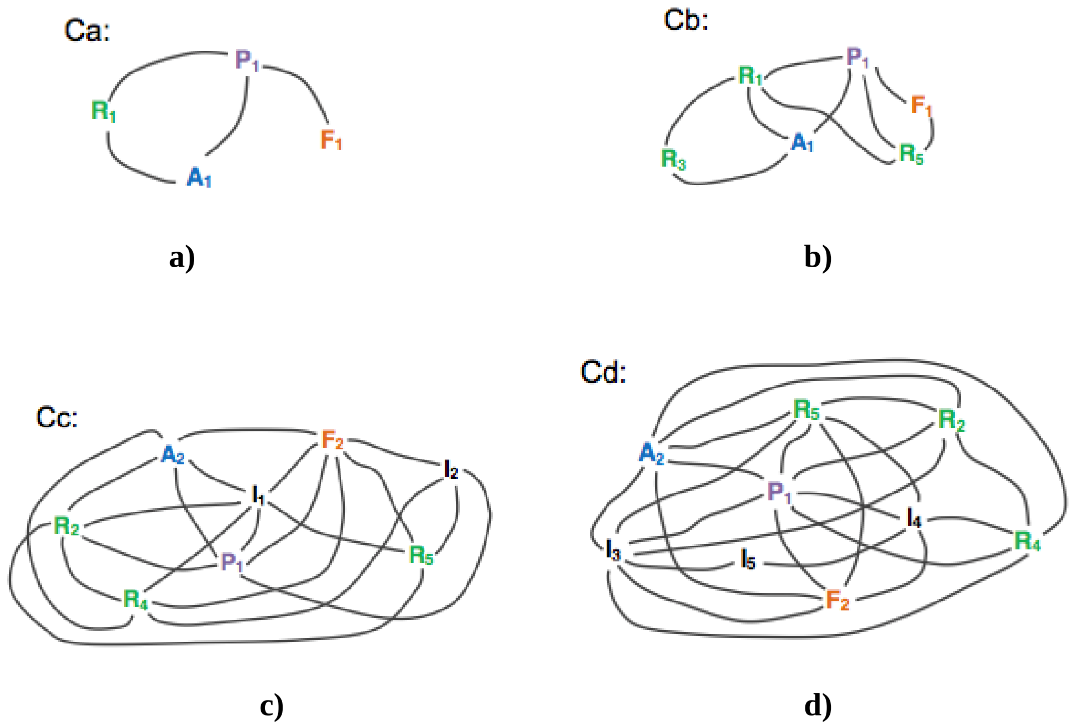


Figura 61. Conexiones entre esquemas previos

Se observó que cuando el sujeto enfrentó las actividades asignadas para el nivel Trans- tuvo lugar un reflejamiento hacia los niveles anteriores para interactuar con el objeto matemático; esto se representa mediante las flechas rojas. En ocasiones se observó que algunos sujetos (S_3, S_4) permanecían en el nivel inferior cuando retomaron los procesos que promovieron sus construcciones en ese nivel, y así fortalecieron sus procesos hacia la aplicación de tales construcciones y nuevamente, como resultado del mecanismo de reflexión, avanzaron el peldaño hacia el nivel Trans-. En el proceso de construcción del esquema de la Integral se observó que al transitar desde un nivel a otro, el conocimiento no es un cúmulo de información, sino que se va construyendo a partir de procesos de reflexión y reflejamiento, que permiten al sujeto reacomodar, fortalecer y enriquecer su estructura mental.

Como ya se mencionó, las letras O que aparecen en cada nivel del diagrama de la figura 60 representan objetos matemáticos que manipula el sujeto. Esencialmente la primer letra O, de izquierda a derecha de cada plataforma, representa el *cálculo de áreas* *limitado por curvas*, y el segundo objeto, identificado también por la letra O, representa la *construcción de la gráfica de la función primitiva*.

Estos dos objetos matemáticos no son los únicos que aparecen en escena cuando un sujeto trabajó en sus construcciones, se mencionan ya que fueron focalizados en esta investigación. El lector podría preguntarse por qué se citan los objetos matemáticos en cada nivel si se trata de los mismos objetos, la respuesta es que el objeto *cálculo de áreas limitado por curvas* es manipulado por el sujeto una y otra vez, pero a medida que avanza en sus construcciones, la manera en como lo manipula es diferente: lo hace con mayor detalle y profundidad y esto enriqueció su andamiaje mental, y si el sujeto avanza en sus construcciones, es más rica la construcción del objeto, hasta fue capaz de entender para qué le será útil (por ejemplo en su cotidianidad) y qué situaciones problema puede o no resolver con éste.

Se mencionó que la figura 60 representa el mecanismo de construcción que siguen los sujetos que participaron en la investigación para la apropiación del concepto de la Integral. En las plataformas, representada por las palabras Intra-, Inter- y Trans-, se observa la interacción de acciones, procesos y objetos, que justamente son, de acuerdo con APOE, los que conforman un esquema mental. Esta idea conduce a la reflexión de que, dentro de esta gran estructura, aparecen procesos internos, los cuales son a su vez esquemas, y dentro de éstos habrá otros procesos que generan esquemas, y así sucesivamente.

5.2 Implicaciones Metodológicas

Como fortaleza de la investigación se puede señalar la metodología aplicada en la recolección de los datos. Es de destacar todo el proceso a partir de la planeación, desde su fundamentación y apego al marco teórico, hasta su aplicación. De modo similar, también la fundamentación y elaboración de los instrumentos así como la selección de los sujetos que en ésta participaron, desde los que aportaron para enmarcar y justificar el estudio hasta los sujetos que participaron en el trabajo de campo. La metodología fue aplicada de acuerdo con su planteamiento inicial, hubo algunos ajustes en la selección de los sujetos de estudio por cuestiones del mismo contexto en el que se realizó, pero finalmente la recolección de datos, así como la elaboración de los instrumentos, siguieron el curso planteado inicialmente.

Respecto a los instrumentos de recolección de datos, se destaca que se aplicaron los mismos a todos los sujetos y por tanto se proponen las mismas acciones para que los seis sujetos inicien su interacción con el objeto. Cabe señalar que los instrumentos no surgieron de la espontaneidad, validados y perfeccionados por los elementos que constituyen el ciclo APOE, fueron producto de una construcción basada en la experiencia y en un minucioso análisis desde diversas fuentes y de un seguimiento meticuloso del desempeño académico de cada estudiante en su curso de Mecánica Clásica, quienes fueron observados algunos meses antes del diseño de los instrumentos. Además se consideró el perfil académico de los estudiantes que participaron ya que se revisó detalladamente los contenidos de los programas de estudios de los cursos previos al de Mecánica Clásica.

Dichos instrumentos se elaboraron a partir de considerar ese andamiaje inicial de conocimientos necesarios, para que fueran posibles las nuevas construcciones. Sin embargo, se observó que para algunos, por ejemplo para S_5, no fueron las adecuadas, dada la estructura mental que posee en el momento de iniciar las actividades Esta situación invita a reflexionar en la necesidad de promover condiciones didácticas que atiendan las necesidades de los estudiantes de acuerdo a los diferentes conocimientos previos que se identifiquen en éstos.

El orden en el que se recolectaron los datos fue: i) a partir de los materiales impresos, ii) la entrevista, iii) el trabajo en pares y, por último, iv) la historieta. En el momento en que los sujetos asistieron al aula para elaborar la historieta, el resto de sus compañeros de grupo estaban libres de compromisos escolares (una semana antes de iniciar oficialmente el periodo vacacional); además por tratarse de la última actividad del trabajo de campo, se puede inferir que los sujetos deseaban estar desocupados, fuera de la escuela, de vacaciones (cuatro de los seis estudiantes vivían en poblaciones alejadas de la ciudad donde se realizó el trabajo de campo).

Es de considerar la posibilidad de que esta situación provocó que los sujetos elaboraran una historieta escueta, sin formato; da la impresión que los estudiantes estaban ya cansados —en ese momento—, dado que alguno de ellos, en otros momentos del trabajo de campo mostró poseer elementos suficientes del esquema mental de la Integral para elaborar una historieta con mayor profundidad. Sin embargo, se consideró la espontaneidad de los datos que plasmaron, pese a cualquier situación que haya generado la calidad de las historietas.

Respecto al estudiante que se considera que menos construcciones para el esquema mental para la apropiación del concepto de la Integral —S_5—, se considera que otro tipo de acciones que promueven construcciones hubiesen sido más adecuadas para el sujeto: se refiere, en este caso, a acciones que le recuerden (o le permitan construir) lo que debe saber antes de iniciar el estudio de la Integral a partir de representaciones geométricas.

5.3 Implicaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas

Se comentó que cuando un sujeto se encuentra en el nivel Inter- o Trans-, éste regresa a los niveles precedentes, y en ese viaje de ida y vuelta se reacomodan nuevamente las estructuras mentales que fueron construidas en niveles anteriores, de donde se desprende que en el aprendizaje de las matemáticas no se debe considerar que la construcción de un objeto matemático es total y definitiva, además, es necesario tener presente que son diversas las acciones que promueven la interacción del sujeto con el objeto. Una consideración que no se encuentre dentro de este marco sería un error, dado que se observó que las estructuras mentales del sujeto no son estáticas, éstas se reacomodan continuamente cada vez que el sujeto se acerca al objeto, dando lugar a interpretaciones cada vez más ricas.

Las consecuencias de este planteamiento invitan al maestro de matemáticas a la reflexión sobre la importancia que tienen el tipo de actividades que planee diseñar a fin de promover que un sujeto se apropie de un concepto, el tipo de estrategias de aprendizaje deberá implementar el profesor y que considere adecuadas para realizarse dentro y fuera del aula y desde luego, reflexiones sobre la viabilidad de su proceso de evaluación y las consecuencias de este.

En los planteamientos iniciales de la investigación se consideró que el concepto de cantidad infinitesimal era indispensable para la construcción del concepto de la Integral desde registros geométricos. De acuerdo a los datos recabados se observó que si un sujeto no posee una estructura mental suficiente que le permita manipular el objeto acumulación de áreas, el cual involucra cantidades infinitesimales, no es un impedimento para que construya un bosquejo de la función primitiva.

La investigación arrojó resultados que evidencian que las cantidades infinitesimales resultan útiles al sujeto para afinar los bosquejos de la primitiva. Se infiere que si bien no fue un conocimiento indispensable, podría ser necesario, como se mencionó, para afinar los trazos de la primitiva y desde luego, cuando se requiera formalizar el concepto de la Integral desde otros registros de representación.

Durante el tiempo en el cual se desarrolló la investigación se buscó, en diversos escenarios de divulgación científica investigaciones que explicaran las estructuras mentales que moviliza un sujeto cunado intenta apropiarse del concepto de la Integral desde registros de representación geométrica, tal información no fue posible encontrarla.

Paralelamente se analizaron los programas de estudio vigentes del curso de Cálculo Integral y la bibliografía que en éstos se proponen en diversas instituciones de nivel superior; al respecto se encontró que la mayoría (tanto en los programas como en los libros) no hacen planteamientos claros para el abordaje del concepto de la Integral desde registros geométricos. Si bien en la investigación no se pretende generalizar los hallazgos, si mostrar, por un lado la importancia de los registros de representación geométrica en la formación de un estudiante de ingeniería, y por otro lo que sucede en la mente de seis sujetos cuando se apropian del concepto desde tales registros: las estructuras mentales que moviliza, las dificultades matemáticas que enfrentaron así como los conocimientos previos a los que recurren.

A partir de estos hallazgos, y la descripción de los conocimientos previos que promueven o impiden las construcciones de los sujetos, la presente investigación podría abrir escenarios apropiados para que en las nuevas investigaciones se aborden los planteamientos necesarios para incluir en las aulas de matemáticas, de las carreras de Ingeniería, el abordaje del concepto de la Integral desde registros de representación geométricos.

Debido a las diversas opiniones de los profesores que de alguna manera participaron en la investigación, respecto a las importancia que estudiantes de ingeniería se apropien del concepto de la Integral desde registros geométricos, se observó que la mayoría de ellos no aborda (o no conocía) el concepto desde tal registro de representación. Otros lo consideraron no importante para su clase, privilegiando los procesos algorítmicos del concepto.

Estos hallazgos afirman la pertinencia de investigaciones como la presente, que invita a la reflexión a los maestros de matemáticas, en particular sobre la importancia que tiene que un estudiante de ingeniería se apropie de los conceptos matemáticos desde sus diversos registros de representación, en este caso, desde registros geométricos.

Asumiendo que la preocupación de la mayoría de las profesoras y profesores de matemáticas que imparten el curso de Cálculo Integral sería encontrar las respuestas a preguntas como "¿por qué un estudiante de matemáticas no construye el esquema mental para la Integral desde registros de representación geométricos?", que se respondió en la investigación focalizando las construcciones previas del sujeto (las cuales *son elementos esenciales en la construcción del esquema para la Integral*).

Se argumentó que si tales esquemas fueron construidos sólo en etapas primarias, o débilmente, están en la mente del sujeto, pero a éste se le dificulta establecer conexiones entre ellos y mucho menos enlazarlos con la nueva información, lo que lo lleva a construcciones débiles, las cuales seguramente aparecerán en su vida académica futura y no sabrá qué hacer con esa información o para qué le es útil, a pesar de saber que existe.

Esta situación comúnmente se respira en las aulas, donde los sujetos presentan serias dificultades en su concomimiento matemático previo, lo que les impide avanzar en la nueva información. Se asume que otras problemáticas dignas de ser reflexionadas están implicadas en tal pregunta, ya que en la investigación se encontraron elementos colaterales que de alguna manera se considera que están inmersos en el aprendizaje de las matemáticas y que no fueron objeto de estudio de este trabajo.

Esto quiere decir que es necesario reflexionar en que la construcción de estructuras mentales en las matemáticas obedece a procesos cognitivos que involucran estructuras mentales de diferente naturaleza, los cuales se observaron en el curso del trabajo de campo, y aunque no fueron documentados en la investigación se asume que deberán estar presentes en futuros trabajos de investigación. Esto se refiere a esquemas que potencien las capacidades lectoras del sujeto, la capacidad de verbalizar y exponer sus ideas, entre otras. En la dinámica del trabajo de campo se observó que algunos sujetos no cuentan con el tiempo necesario (lo expresaron algunos de ellos) para dedicar a sus estudios.

No hay experiencias fuera del aula con los objetos que el sujeto aborda en sus clases; algunos estudiantes debían volver a sus actividades agrícolas o laborales una vez finalizada su jornada escolar (por ejemplo S_5, S_6 y otros dos sujetos que abandonaron la investigación). Un sujeto comentó que esta situación la ha vivido en todas sus etapas escolares, lo cual se agrava en un nivel superior ya que las demandas académicas aumentan, donde los conocimientos y habilidades adquiridas en niveles precedentes son necesarios y se vuelve indispensable la actividad en los laboratorios y con frecuencia se requiere que el sujeto traiga a su mente algún concepto matemático.

Los sujetos no tienen oportunidad de interactuar y experimentar fuera del aula con objetos matemáticos para obtener así la suficiente información de éstos, lo cual, de entrada se considera un proceso personal y que se desarrolla en tiempo y forma diferente. Además, no se cuenta con suficiente tiempo para la interacción social del objeto matemático con otros sujetos, lo cual resultaría enriquecedor para sus construcciones mentales.

A más de cuatro años de iniciada la Reforma Integral de la Educación Media Superior en todo el país y a dos años en el Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica de entrar en vigor el trabajo en base a competencias, se puede observar en las planeaciones docentes de las academias de matemáticas correspondientes que los profesores no han sido capaces de abandonar el esquema tradicional para llevar a las aulas un trabajo en el cual los procesos de aprendizaje desarrollados por los alumnos sean el eje medular de todo el trabajo; es decir, se desplaza el foco desde los procesos de enseñanza hasta los procesos de aprendizaje.

En este sentido, el presente trabajo es un punto de referencia para los profesores de matemáticas, como una estrategia de trabajo centrada en el estudiante y sus procesos de aprendizaje la cual responde a las necesidades de las reformas señaladas.

Aunque no está dentro de los objetivos planteados en la investigación, una implicación didáctica de ésta, que podría ser considerada como un alcance, es la propuesta de algunas ***acciones*** que sirvan como punto de partida para que los maestros que imparten el curso de Cálculo Integral tengan un referente para el abordaje del concepto de la Integral desde registros de representación geométricos, ya que se ha señalado en reiteradas ocasiones en la investigación la ausencia de esta arista del concepto.

Como acción inicial, que se considera que acercaría por primera vez al sujeto con el objeto *cálculo de áreas limitadas por gráfica*, se sugiere presentar la gráfica de una función lineal, en donde el estudiante deba calcular el área limitada por la curva dentro de un intervalo. El sujeto utilizará métodos convencionales (fórmula para cuadrados, rectángulos, trapecios).

Se sugiere iniciar con un intervalo que abarque la mayor parte del área que se puede observar en el dominio de la función que aparezca en el dibujo. Posteriormente solicitar que divida por mitad tal intervalo y que se calcule el área, y así sucesivamente hacer divisiones de subintervalos cada vez más pequeños (con el respectivo cálculo de su área). Cada vez habrá una mayor cantidad de figuras para calcular áreas, pero en intervalos más reducidos.

Se recomienda propiciar la relación sujeto-objeto con diferentes recursos, no solo manipulando objetos mentales sino también objetos físicos. En el caso de la presente investigación fue útil que los sujetos "vivieran" el movimiento del objeto en cuestión, registraran los datos y partir de éstos describieran las distancias que recorre. La experiencia para los sujetos fue enriquecedora; por ejemplo S_1 enfrentó dificultades al interpretar el efecto que tiene una velocidad negativa en la posición de una partícula.

Cuando se mostró el video en donde realizó la actividad 3.3.2 (consistió en registrar la velocidad que se genera al alejar y acercar un libro a un sensor de movimiento y también la velocidad con la que se mueve un compañero), se le pidió que asociara el movimiento que observa en el video con la gráfica de velocidad que le proporcionó el detector de movimiento y la gráfica de distancias que él construyó, el sujeto infirió que una velocidad negativa significa que un objeto se aleja y que una positiva significa que el sujeto se acerca al punto de referencia.

Para acercar al sujeto a la construcción de la función primitiva a partir de analizar el comportamiento de su función derivada, se sugiere primeramente que el profesor se asegure de que el sujeto conocerá cierta información previa. Para esto se propone las ideas de la tabla 25 y posteriormente generar actividades que le permitan hacer uso de tal información.

Tabla 25

Relación geométrica entre la Derivada y su función primitiva

Si la curva de la función de razones de cambio (derivada)	***Está situada***	***Entonces las función integrada***
es positiva	encima del eje horizontal	es creciente
es cero (se anula)	en el eje horizontal	es paralela al eje horizontal
es negativa	por debajo del eje horizontal	es decreciente

5.4 Futuras investigaciones

La presente investigación se centró en realizar un estudio cualitativo para describir cómo se construye el esquema mental para la comprensión del concepto de la Integral, no fue la intención afirmar que es el único camino para la comprensión del concepto. Sin embargo, con la intención de dar continuidad al análisis del objeto de estudio de la investigación, se propone, a partir de conformar un equipo de trabajo, integrado por docentes del área de matemáticas para que, con la metodología desarrollada en la investigación, se analicen las construcciones de diferentes sujetos de observación y de esta forma generar una propuesta didáctica que promueva la apropiación del concepto de la Integral desde registros de representación geométricos; para posteriormente estudiar su pertinencia, probablemente a partir de un estudio cuantitativo y proponerla a la comunidad académica del área de matemáticas.

Una de las técnicas utilizada en la investigación para observar las construcciones de los sujetos fue la discusión entre pares. Se comentó que con ésta no se pretendía propiciar aprendizajes colaborativos, sino focalizar las aportaciones de cada sujeto para la solución de la situación problema y con esto profundizar en la descripción de las construcciones de cada individuo. Además, en el transcurso de la investigación se consideró que el conocimiento es una construcción individual, y que éste surge a partir de la capacidad del sujeto de adaptarse al medio cuando modificar sus estructuras mentales actuales e incluye nuevos esquemas que le permitan comprender eventos del espacio que lo rodea.

Entonces, como un elemento colateral, no considerado dentro del objeto de estudio de ésta investigación pero que no se puede ignorar, ya que fortalecería las construcciones de un sujeto, es la oportunidad de que descubra la concordancia de sus construcciones con las de otros sujetos a partir de la interacción social. Este aspecto no fue focalizado intencionalmente en la investigación pero se observó que los sujetos cuando intercambian opiniones sobre la solución de los problemas, a partir de las construcciones individuales, éstas se fortalecían. La idea, que podría ser objeto de estudio de investigaciones posteriores, consiste describir de qué manera la discusión en parejas podría resultar un medio por el cual el maestro de matemáticas promueva aprendizajes a partir de una situación matemática problema suficientemente intencionada que desequilibre las estructuras mentales de los sujetos y propicie el diálogo entre éstos.

Una línea de trabajo que puede desprenderse de la metodología utilizada en la investigación es el análisis de las construcciones mentales de los estudiantes cuando se apropian de algún otro concepto matemático. Los resultados de tales trabajos podrían generar propuestas didácticas las cuales, al ser sometidas a un riguroso estudio, enriquecerían un campo tan fértil como el de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Difícilmente se podrá acceder a todos los procesos que desarrolla un sujeto en aras de apropiarse de un concepto matemático, ya que los procesos mentales que participan no son privativos del área de las matemáticas, sino que hay muchos que son transversales y paralelos, que le facilitan o no la interpretación de la información al sujeto. Además hay estructuras que impiden o facilitan que exprese sus ideas, esto por citar algunos aspectos que aparecieron en la investigación, y que, aunque no fueron objeto de estudio de la misma, es importante considerar para futuras investigaciones.

6 Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Boston: Kluwer.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, M., (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., (2004). *A Framework for Research a Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A., (2000). *Development of Students´ understanding of Cosets, Normality, and Quotient Groups*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/CNQ.pdf

Badillo, j. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Colombia "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física*. Tesis Doctoral no publicada Universidad Autónoma de Barcelona. España. Recuperado el 20 de Febrero del 2010 de: http://www.tdx.cat/TDX-0611104-144929

Barboza, A., (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,* 6(3), 199-219.

Bell, E. T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. (4ª Ed.). México: Fondo de Cultura económica.

Blanco, C., (2005). El Constructivismo Biológico ¿Una alternativa al realismo? Revista electrónica Cinta de Moebio de La Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de Chile. No. 22 Marzo de 2005. En línea: http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/moebio/ última consulta 27 de Abril de 2011.

Boigues, F. (2010). *Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería*. Recuperado el 24 de febrero del 2011 de:

http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Boyce, W., Diprima, R., (1994). *Cálculo*. Primera edición. México: CECSA.

Boyer, C. (2001) *Historia de las matemáticas*. 1ª Edición. Madrid: Alianza Editorial.

Breindenbach, D, Dubinsky, E. & Nichols, D. (1992). *Development of the Process Conception of Function*. Eduactional Studies in Mathematics 23. 247-285. Recuperado el 5 de Septiembre del 2009 de http://www.math.kent.edu/~edd/PROCESSFUNC.pdf

Brousseau. B., (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Camacho, Depool y Garbín (2008). *Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos*. Revista Educación Matemática, 3(29), pp 35-57.

Camarena, P. (2010). *Las matemáticas en el contexto de las ciencias*. Revista INNOVACIÓN Eductiva, 46(9), pp 15-25.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Relime 1(6), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero., Alanís, J., Rodríguez y R., Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Castorina, J.A., Coll, C., Díaz Barriga, A., Díaz Barriga Arceo, F., García, B., Hernández, G., Moreno Armella, L., Muriá, I., Pessoa de Calvalbo, A. M., Vasco, C.E. (2006). *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones*. México: Paidos Educador.

Chevallard, I., (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique

Cordero, F., Muñoz, G., Solis, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo editorial Iberoamérica SA de CV.

Cortés, C. (2011). Diferencias y Acumulación vs Derivada e Integral. Por publicarse.

Crisostomo, E. (2011). *Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

CUCEI. (2010). *Planes y programas de estudio*. Recuperado el 10 de Octubre del 2010 en: http://www.cucei.udg.mx/portal/index.php

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovik, D. (2001). The Concepto of Definite Integral: coordination of two Schemas. En The International Conference of Psichology of Mathematics Education Proceedindg of 25th PME, (2), pp 297-304.

DGEST, (2010). *Dirección general de educación superior tecnológica*. Información recuperada de http://www.dgest.gob.mx el 9 de diciembre del 2010.

Delgado, M. (2009). *Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. El Cálculo y su Enseñanza*. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 12 de abril del 2011 de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Em3v4rTYf11.pdf

Delgado, M. (2009). Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo, *El Cálculo y su Enseñanza* © 2009 Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 1 de enero del 2011 de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~elcalculoysuensenanza/investigacion/articulosPDF/Delgado.pdf

Dubinsky, E., Lewin, P. (1986), *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. Recuperado el 12 de Febrero del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20-%20Refereed

Dubinsky, E., Elterman, F., Gong, C., (1988). *The Student´s Construction of Quantification*. Recuperado el 21 de marzo del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20- %20Refereed.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20- %20Refereed

Dubinsky, E. (1996). *Applying a Piagetian Perspective Post-secondary Mathematics Education*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/EducMatArt.pdf

Dubinsky, E. (2000). *De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: un viaje personal*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 3, Núm.1, marzo, 2000. pp. 47 – 70.

- Duckworth, E., (2005). Critical exploration in the classroom. *New Educator* **1** (4): 257–272 . enlace: http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?_nfpb=true&_&ERICExtSearch_SearchValue_0=EJ819901&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=EJ819901

Dubinsky, E. (2001). *Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses*. Recueprado el 10 de octubre de: http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20- %20Refereed

Eduards, H. y Penney, D. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Pearson Education.

Einstein, A., y Infeld, L. (1986). *La evolución de la Física*. España: Biblioteca Científica Salvat.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Flick, U. (2007ª). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. España: Editorial Morata.

Franklin, J., (1999), *Students' Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions.* Tesis Doctoral. Purdue University.

Giambatista, A., McCarthy, B. y Richardson, R. (2009). *Física*. México: McGraw Hill

Giancoli, D. (2008). *Física para Ciencias e Ingenierías*. (4ª edición). Volúmen I. México: Pearson

Glasersfeld, E. (1997) *Homage to Jean Piaget*. Irish Journal of Psychology 18(3): 293–306. Recuperado el 1 de Septiembre del 2010 de: http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/KOGNITIVEENTWICKLUNG/Glasersfeld.shtml

Godino, J. (2004). *Didactica de las matemáticas para maestros. España: Universidad de Granada.* http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

González, P. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. 24 ciencia abierta. España: Novola.

González, T. y Aldana, E. (2010). *Comprensión de la Integral Definida en el marco de la Teoría APOE.* 4-22. Recuperado el 24 de Febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Gundermann, H. (2001). *El método de los estudios de caso***.** (pp. 249-288). En: Tarrés, M.L. (Coord.). Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social. México: Porrúa.

Guzmán, J., Hoyos, V., Rodríguez, R. (1985). *Cálculo Integral. Programa Nacional de Formación de Actualización y de profesores de Matemáticas*. México: CINVESTAV-IPN.

Hadam, M. (2009). *Transcribing an Animation: The case of the Riemann Sums*. Recuperado el 17 de Febrero del 2011 de: http://math.unipa.it/~grim/21_project/Hamdan223-226.pdf (pp. 223-226)

Hawking, S. (2011). *Dios creó los números*. 3ra Edición. España: EGEDSA.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. (5a Edición). México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2003) Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Publicado en la memoria del XI encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel medio superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Michoacán, México. Enero del 2003.

Imaz, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito?. Revista Avances y Perspectiva Vol 20, CINVESTAV-IPN. Mexico. pp 305-311. Recuperado el 2 de Enero del 2011 de: http://www.cinvestav.mx/Portals/0/Publicaciones%20y%20Noticias/Revistas/Avance%20y%20perspectiva/septoct01/4%20IMAZ.pdf

Inhelder, B., Sinclair, H., Bovet, M., (2002), *Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento*. (3ra edición). España: Ediciones Morata

IPN. (2004). Planes y programas de estudio. Recuperado el 10 de Octubre en: http://www.des.ipn.mx/wps/wcm/connect/des/DES/Inicio/OFERTA_EDUCATIVA/OFERTA_EDUCATIVA/ICFM/FISICO_MATEMATICAS.HTM

ITCG. (2009). *Programa de Estudio de Matemáticas II*, recuperado el 20 de Noviembre del 20009 de:
http://www.itcg.edu.mx/itcg/oferta_educativa/ingenieria/ing_gestemp/Calculo_Integral.pdf.

ITCG. (2010). *Programa de Estudio de Mecánica Clásica*, recuperado el 24 de Agosto del 2011 de: : http://www.itcdguzman.edu.mx/pdf/IELC-2010/Mecanica%20Clasica.pdf

ITCG. (2010a). *Retícula de la carrera de Ingeniería Electrónica*, recuperado el 25 de Enero del 2011 de: http://www.itcdguzman.edu.mx/

Juárez, J., Betancourt, Y. (2008*). Un análisis del aprendizaje del concepto de espacio vectorial*. Recuperado el 25 de Mayo del 2010 de: http://knol.google.com/k/un-an%C3%A1lisis-del-aprendizaje-del-concepto-de-espacio-vectorial#

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación Matemática, 20(2), 65-89.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Integral*. (1ª Edición). México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1983). *El Cálculo con Geometría Analítica*. (4ª edición). México: FEM.

Luna, H. (1986). *La suma de cantidades infinitamente pequeñas*. 1ª edición. México: Centro de Investigación de Docencia en Matemática Educativa de la universidad Autónoma de Coahuila.

Mesa, R. (2001). Tangentes y áreas versus Integrales y derivadas. Memoria del)no encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Conferencia Internacional sobre el uso de Tecnología en la Enseñanza de las matemáticas. (p 165-173). Recuperado el 1 de Agosto del 2011 de: http://www.matedu.cinvestav.mx/publicaciones/e-librosydoc/memorias3.pdf

Morales, A. (2009). Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones. Tesis Doctoral publicada en el portal del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. Recuperada el 21 de Febrero del 2011 en: http://www.cicata.ipn.mx/FILES/PDF/PROME_D_20090200_001.PDF

Muñoz, G., (2000) Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2(3)*, pp 131 – 170.

OCDE. (2003). *The pisa 2003 Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OCDE

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. Publicado en la memoria de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática. pp. 23- 41

Paschos, T. & Farmki, V. (2006). The Reflective Abstraction In The Construction Of The Concept Of The Definite Integral: A Case Study. Recuperado el 2 de Febreo del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Paschos, T. (2009). *The Reflective Abstraction in the Construction of the Concept of the Definite Integral: a case study*. Recuperado el 17 de Febrero del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Planchart, O. (2002). La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Recuperada el 4 de Abril del 2011 de: http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

Parra, C., Saiz, I., Santaló, L., Gálvez, G., Charnay, R., Brousseau, G., Lerner, D., Sadovsky, P. (1998). *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*. México: Paidós Educador.

Piaget, J. y García, L. (2004), *Psicogénesis e Historia de las ciencias*. (10ª Edición). México: Siglo XXI Editores.

Piaget, J. (1971) *Science of education and the psychology of the child.* New York: Viking Press (French: *Psychologie et pédagogie*, 1969). Citado por Glasersfeld (1997, p. 293) (continuar la búsqueda de la fuente original)

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2001). *Cálculo*. (8ª edición) México: Prentice Hall.

Rico, L. (2003). *Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003, Proyecto Pisa 2003*. Recuperado el 15 de Junio de 2009 de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2756510

Resnick, L., Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Temas de Educación. Máxico: Paidós.

Roa-Fuentes, S., Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 1(13), 88-112.

Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. España: Ediciones Aljibe.

Rodríguez, M., (2010). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. (1ª Edición). España: Octaedro.

Rosado, M. C. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN, México.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. (1ª Edción). Costa Rica: EUNED.

Ruiz, O. (2009). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. (4ª Edición). Bilbao: Universidad de Deusto.

Salinas, P., Alanís, A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. Y Garza, J. (2001). *Elementos del Cálculo, reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza*. (1ª Edición). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2004). De los Bernoulli a los Borbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo. 1ª Edición. España: NIVOLA

Sánchez, G., García, M., Llenares, S., (2008*). La comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008) 11(2):267-297.

Sealey, V., (2006). Definite Integrals, Riemann Sums, and Area under a Curva: What is necessary and suffuent?. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://www.pmena.org/2006/cd/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING-0007.pdf

SNEST. (2008). Tomado el 23 de marzo del 2010 de:

http://www.dgit.gob.mx/index.php/quienes_somos/informacion/snest.html

SNEST. (2008a). Tomado el 23 de marzo del 2010 de: http://www.dgit.gob.mx/index.php/academica/docencia/direccion_de_docencia.html

Socas, M. (2009). *DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS La innovación y la investigación*. Recuperado el 23 de mayo del 2010. de: http://www.seiem.es/publicaciones/tesis.htm

Souto, B., Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de la Integral en la enseñanza universitaria. Publicado en la memoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. pp. 80-94.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. & Vidakovic, D. (1991). *A Search for a constructivist approach for understadnding the countable set P(N)*, recuperado el 21 de Septiembre del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20- %20Refereed

Stein, S., Barcellos, A. (1995). *Cálculo con Geometría Analítica*. (5ª Edición). México: Mc Graw Hill.

Stewart, J. (2008). *Cálculo, trascendentes tempranas*. (6ta edición). México: CENGAGE learning.

Swokowski, E., (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo, una Variable.* (9ª Edición). México: Addison Wesley Longman.

Thompson, W. (1994). *Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus*. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 229–274.

Tippens, A. (1986). *Física, conceptos y aplicaciones*. México: McGraw Hill.

Torres, A. y Martínez D. (2008). The understanding of the Integral defined as mathematical object in the university students. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://tsg.icme11.org/document/get/383

Trigueros, M. (2005). *La Noción de Esquema en la investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior*. Revista Educación matemática, 1(17), 5-31.

UNAM. (2010). Planes de estudio para las carreras de Ingenierias.Recuperado el 10 de Octubre del 2010 de: https://www.dgae.unam.mx/planes/carrera.html.

Valles, M. (2007). Técnicas Cualitativas de Investigación Social, reflexión metodológica y práctica profesional. Síntesis Sociológica. Cuarta Edición. Madrid, España.

Vargas, I. (2000). *Didáctica I de la Matemática***.** Recuperado el 12 de Febrero del 2010 en: http://www.google.com.mx/search?sourceid=navclient&hl=es&ie=UTF-8&rlz=1T4SKPB_esMX339MX339&q=George+Vergnaux

Vela, F. (2001). Un acto metodológico básico de la investigación social: La entrevista cualitativa. (pp. 63-96). En: Tarrés, M.L. (Coord.). Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social. México: Porrúa

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica, Calculo Integral*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Woolfolk, A., (1996) *Psicología Educativa*. México: Prentice Hall.

Young, H. y Freedman. (2009). *Física universitaria*. (12ª edición). Volúmen I. México: Addison-Wesley

Zazkis, R. & Dubinsky, E. (1996) Dihedral groups: A tale of two interpretations. *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol. 2. 61-82

Zill, D., (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zuñiga, L. (2004), Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería, Tesis doctoral, publicada en el portal del CICATA. Recuperada el 21 e Febrero del 2011: http://www.cicata.ipn.mx/FILES/PDF/PROME_D_20040500_001.PDF

Referencias complementarias

Arnold-Cathalifaud, M. (2003) Fundamentos del Constructivismo Sociopoiético. Cinta de Moebio Revista Electrónica de Epistemología de Ciencias Sociales. Número 18. Universidad de Chile. Santiago de Chile. En línea: http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/moebio/18/arnold.htm última consulta 22 de mayo de 2011.

Blanco, C. J. 2000. "Constructivismo", pp. 148-153. En: MUÑOZ, J. y VELARDE, J. (eds.): Compendio de Epistemología.

Blanco, M. y Carlos J. (2005), Epistemologías evolucionistas y organización Biosemiótica. En busca del constructivismo contemporáneo. A parte Rei. Revista digital de filosofía. En línea: http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/lista.html última consulta 27 de Abril de 2011.

De Faria, E. (2006). *Ingeniería Didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. año 1, número 2. Costa Rica. Recuperado el 30 de Abril de 2010 en: www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria

Díaz, Á. (2006) El enfoque de competencias en la educación: ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?. Perfiles educativos [online]. 2006, vol.28, n.111 [citado 2010-11-04], pp. 7-36 . Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982006000100002&lng=es&nrm=iso . ISSN 0185-2698

García, J. (2001). *La didáctica de las matemáticas: una visión general*. Recuperado el 21 de Junio del 2010 de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

Glasersfeld, E. (1996). *Aspectos del constructivismo Radical*. En M. Pakman (Editor), *Construcciones de la experiencia humana*. Barcelona: Gedisa.

Godino, J. (2004a). Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

González, M. (2005). Cómo Desarrollar Contenidos para la Formación on Line Basados en Objeto Aprendizaje. Revista de Educación a Distancia (4)3. Recuperado el 16 de Junio de 2009, de: http://www.um.es/ead/red/M3/.

Grijalva, A. (2008). El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función. Tesis Doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada. Recuperada el 4 de Febrero del 2011 de: http://www.cicata.ipn.mx/FILES/PDF/PROME_D_20081100_002.PDF

Jara, P. (1998) Las Revoluciones de la Ciencia o una Ciencia Revolucionaria. Convergencias y contrapuntos antes y después de Kuhn. Revista electrónica Cinta de Moebio Número sin mes pp 0. Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de Chile. Departamento de Sociología. Universidad de Chile. En línea: http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/moebio/04/jara01.htm última consulta 22 de mayo de 2011.

Jiménez, A. (2002). Creación de ambientes de aprendizaje. Recuperado el 13 de Junio de 2009 de: http://www.lie.upn.mx/docs/CreacionDe001.pdf.

Kuhn, T. (1983). La Estructura De Las Revoluciones Científicas. México: Fondo de Cultura Económica.

Hernández, G. (2008). Paradigmas en Psicología de la Educación. México: Paidós Educador.

Llanos, A. (1968). Los presocráticos y sus fragmentos. Buenos Aires: Juárez.

Llenares, S. y Socas, M. (2000). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Extraído de el 12 de mayo del 2010 de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/boletines/Boletin8.pdf

López, C. (2005). Los Repositorios de Objetos de Aprendizaje como soporte a un entorno e-learning. Tesina doctoral no publicada, Universidad de Salamanca.

López, R. (2010), Para una conceptualización del constructivismo. Rev. Mad. N° 23, Septiembre de 2010. pp. 25-30. En línea; http://www.revistamad.uchile.cl/23/lopez_03.pdf.

Marco, G. (2005), Un Modelo de Análisis de Competencias Matemáticas en un Entorno Interactivo. Recuperado el 12 de junio del 2009 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/tecnologia

Martínez, M. (1997). *La investigación cualitativa etnográfica en educación*. Manual teórico-práctico. México: Trillas.

Maturana, H. & Varela, F. (1996). *El árbol del conocimiento*. Las bases Biológicas del conocimiento Humano. España: Debate pensamiento.

Nietzche, F. (1996). La genealogía de la moral. Madrid: Alianza Editorial.

Nietzsche, F. (1972). Más allá del bien y del mal. Madrid: Alianza.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project (Proyecto KOM. The national academies.

Perrenaud, P. (2000). Construir competencias. Entrevista con Philippe Perrenoud, Universidad de Ginebra. Observaciones recogidas por Paola Gentile y Roberta Bencini. Texto original de una entrevista "El Arte de Construir Competencias " original en portugués en Nova Escola (Brasil), Septiembre 2000, pp. 19-31. Traducción: Luis González Martínez

Protágoras y Gorgias (1980). Fragmentos y testimonios. Buenos Aires: Hyspamérica.

Ramírez, R. (2009). La noción de mediación semiótica en el enfoque constructivista vygotskiana. Omnia, 1(15), 70-81.

Rivas, P. (1997). Kühn El Gran Revolucionario. Las revoluciones científicas de Kühn y la teoría moderna de la evolución. Una analogía más allá de la casualidad. Cinta de Moebio No.2. Diciembre de 1997. Facultad de Ciencias Sociales. Universidad de Chile. En línea: http://www.facso.uchile.cl/publicaciones/moebio/ última consulta 29 Abril de 2011.

Segal, L. (1994). Soñar la realidad. El constructivismo de Heins Von Foerster. Barcelona: Paidós.

Sisto, V. (2008). La investigación como una aventura de producción dialógica: La relación con el otro y los criterios de validación en la metodología cualitativa contemporánea. Psicoperspectivas, VII, 114-136. Recuperado el 23 de abril de 2011 desde http://www.psicoperspectivas.cl

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. USA: The Falmer Pres

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Ediciones Morata. Quinta edición.

Tobón, S. (2006) Aspectos básicos de la formación basada en competencias. Talca: Proyecto Mesesupo.

Vargas, X. (2005). El aprendizaje y el desarrollo de competencias. Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico, UPN, tomado de: http://www.scribd.com/doc/11595754/GasocaEl-Aprendizaje-y-El-Desarrollo- de-Las-Competencias el día 23 de Octubre de 2009.

Victorino, L. y Medina, G. (2008). Educación basada en competencias y el proyecto Tuning en Europa y Latinoamérica: su impacto en México. Recuperado el 11 de Junio de 2009 de http://octi.guanajuato.gob.mx/octigto/formularios/ideasConcyteg/Archivos/39072008_EDU_BASADA_COMPETENCIAS_PROYECTO_TUNING.pdf

Watzlawick, P. (1981). ¿Es real la realidad? . Barcelona: Herder.

Watzlawick, P. (1992). La coleta del Barón de Münchhausen. Barcelona: Herder.

Wilhelmi, M., Font, V., Rodino, J., (2005). *Bases Empíricas De Modelos Teóricos En Didáctica De Las Matemáticas: Reflexiones Sobre La Teoría De Situaciones Didácticas Y El Enfoque Ontológico Y Semiótico*. Recuperado el 14 de abril de 2010 en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas_5junio06.pdf

8 Anexos

Anexo A

Anexo	Descripción
A	**Instrumentos para el Bloque I**
B	**Instrumentos para el Bloque II**
C	**Instrumentos para el Bloque III**
D	**Instrumentos para el trabajo en pares**
E	**Descripción de las construcciones del estudiante S_2**
F	**Descripción de las construcciones del estudiante S_5**
G	**Descripción de las construcciones del estudiante S_1**
H	**Descripción de las construcciones del estudiante S_3**
I	**Descripción de las construcciones del estudiante S_4**
J	**Descripción de las construcciones del estudiante S_6**