

Solución Numérica del Modelo de Heston con Reversión a la Media

Freddy H. Marín Sánchez¹, Laura Catalina Echeverri Guzmán².

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
Email: fmarinsa@eafit.edu.co¹, lechev11@eafit.edu.co²

Resumen

En este trabajo se propone una variación del modelo de Heston (1993) en la que se considera el precio del activo subyacente como un proceso de reversión a la media. A partir de esto, se realiza una transformación al problema que permite construir un esquema de diferencias finitas explícitas para la valoración de opciones según este modelo. El esquema es de segundo orden en el espacio y de primer orden en el tiempo. Se presenta un análisis sobre las condiciones para la positividad del esquema. Se prueba la estabilidad condicional en el sentido de von Neumann realizando un análisis de Fourier del problema y se verifica la convergencia del mismo. Se presentan algunos resultados de experimentos numéricos para la valoración de opciones call europeas.

Palabras clave: esquema de diferencias finitas explícitas, reversión a la media, positividad, valoración de opciones.

1 Introducción

Los primeros estudios de la teoría de valoración de opciones fueron condensados en el modelo de Black-Scholes (1973), que muestra que, sin hacer asunciones acerca de las preferencias de los inversionistas, se puede obtener una expresión del valor de las opciones que no depende directamente del rendimiento esperado del activo subyacente o la opción. Esto se logra a través de un argumento de cobertura dinámica en un mercado perfecto libre de arbitraje.

Los supuestos del modelo de Black-Scholes forman un escenario ideal, en el que es posible una estrategia de inversión activa, en mercados perfectos, en los que la tasa de interés es constante y libre de riesgo, y el precio de activo subyacente se comporta como un Movimiento Browniano Geométrico. En este modelo se asume que el precio del activo subyacente sigue la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (1)$$

donde S_t es el precio del activo en el tiempo t , μ es la tasa esperada de retorno del activo, σ es su volatilidad y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional.

Este tipo de modelos es el más ampliamente usado para explicar el comportamiento del precio de las acciones. Sin embargo, algunos estudios empíricos han mostrado que las consideraciones hechas en el modelo de Black-Scholes son irrealistas y no explican los cambios en la volatilidad, que son de gran impacto en los mercados financieros. Además, se ha encontrado que este modelo es poco preciso a la hora de modelar otros activos financieros además de las acciones, como los commodities.

En esta dirección, hay modelos más sofisticados que incorporan más precisamente la volatilidad como una variable aleatoria que se establece como un segundo factor de riesgo en mercados financieros debido a que no solo los retornos de los activos están en riesgo. En esta clase de modelos, llamados modelos de volatilidad estocástica, el modelo más representativo es el modelo de Heston (1993).

2 Modelo de Heston

El modelo de Heston (1993) es un modelo con volatilidad estocástica, donde se asume que la volatilidad del activo no es constante, ni siquiera determinista, pero sigue un proceso aleatorio. Este modelo se basa en un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas que representan el comportamiento dinámico del activo subyacente y las otras dinámicas de la volatilidad, y que son Movimientos Brownianos correlacionados. Si la volatilidad sigue un proceso Ornstein Uhlenbeck, el modelo puede expresarse como se muestra:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_1(t) \quad (2)$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_2(t) \quad (3)$$

$$dZ_1(t)dZ_2(t) = \rho dt \quad (4)$$

donde V_t es la varianza de los retornos del activo y $\sqrt{V_t}$ la volatilidad del precio del activo en el tiempo t , $\{Z_1(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{Z_2(t)\}_{t \geq 0}$ dos Movimientos Brownianos Estandar correlacionados en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con factor de correlación ρ . k , σ , θ y ρ son la velocidad de reversión a la media de la volatilidad, la volatilidad de la volatilidad, la media de largo plazo de la volatilidad y el factor de correlación respectivamente.

A partir de este sistema, se establece que el precio de la opción $f(S_t, V_t, t)$ sigue la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + \rho V_t \sigma S_t \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial V_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \\ + [K(\theta - V_t) - \lambda(V_t, S_t, t)] \frac{\partial f}{\partial V_t} - r f = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\lambda(S, V, t)$ representa el precio de mercado del riesgo de la volatilidad.

La ecuación (5) ha sido resuelta para $S, V > 0$, $0 \leq t \leq T$ sujeto a condiciones de frontera dependientes del tipo de opción específica.

Con argumentos similares a los establecidos en Black-Scholes (1973) se puede encontrar la ecuación diferencial parcial (EDP) que representa el precio de la opción. Esta debe resolverse usando un método numérico pues no es posible obtener una solución analítica.

Para el caso de modelos con volatilidad estocástica, se han usado también un amplio espectro de métodos numéricos. En D. Y. Tangman, A. Gopaul y M. Bhuruth (2008) se considera un esquema compacto de orden superior (o HOC por sus siglas en inglés) para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, para discretizar la ecuación diferencial parcial cuasi-lineal de Black-Scholes en la evaluación numérica de opciones americanas y europeas. También se muestra que el sistema (HOC), con una extensión de la malla a lo largo de la dimensión del precio de la acción, da soluciones numéricas aproximadas para el tipo de opciones europeas bajo volatilidad estocástica. En Rana y Ahmad (2011) se propone un esquema de diferencias finitas para la valoración de opciones con volatilidad estocástica incorporando un modelo GARCH en el contexto del mercado financiero indio, que se resuelve por el método de Crank-Nicolson. En K. J. In't Hout y S. Foulon (2010) se proponen cuatro divisiones de tipos de esquema Dirección Alterna Implícita (o ADI por sus siglas en inglés): el esquema de Douglas, el esquema de Craig-Sneyd, el esquema de Craig-Sneyd modificado y el esquema de Hundsdörfer-Verwer, cada uno de los cuales contiene un parámetro libre. En ese trabajo se desarrolla una semi-discretización de la ecuación diferencial parcial de Heston, usando esquemas de diferencias finitas con una malla no uniforme, resultando en grandes sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente, en F. Marín, M. Bastidas (2012) se presenta un

esquema de diferencias finitas explícitas para la valoración de opciones europeas con volatilidad estocástica.

El modelo de Heston ha sido ampliamente aceptado y usado para diversos tipos de activos subyacentes. Sin embargo, hay una evidencia clara de que, por ejemplo, algunos energéticos pueden ser modelados con procesos asociados a modelos de reversión a la media con parámetros constantes, S. Deng (1999) y A. Lavassani et al. (2001a), e incluso modelos más sofisticados que incluyen saltos y parámetros funcionales, determinísticos o estocásticos, como los que se describen en D. Pilipovic (2007) y H. Geman y A. Roncoroni (2008). En estos tipos de activos el modelo de Heston no permitiría explicar de forma convincente el comportamiento de los precios, es por esto que se hace pertinente ahondar en el estudio de modelos que incluyan procesos de reversión a la media, para así abarcar un mayor número de activos financieros.

En el presente trabajo se plantea entonces una modificación al modelo de Heston donde se considera el activo subyacente como un proceso de reversión a la media. Con base en la EDP se construye un esquema numérico para la solución de dicha EDP basado en diferencias finitas explícitas. Del esquema se prueba que se cumplan los supuestos de positividad, consistencia, estabilidad y convergencia, y se establecen las condiciones para que esto sea posible. Finalmente se presenta la implementación del mismo para una opción call europea con experimentos numéricos.

En la sección 3 se presenta el modelo propuesto; en la 4, la metodología empleada para la construcción del esquema numérico, esto es, la construcción de la EDP, la transformación de la EDP en una ecuación más simple, la construcción del esquema numérico de diferencias finitas explícitas y el análisis del esquema. La sección 5 presenta los resultados obtenidos del experimento numérico realizado junto con la discusión de los mismos. Las conclusiones se muestran en la sección 6.

3 Modelo de Heston con reversión a la media

El modelo propuesto es también un modelo con volatilidad estocástica, donde se asume que la volatilidad del activo no es constante ni determinista sino que sigue un proceso aleatorio, además de que el término de tendencia es un proceso de reversión a la media. En este modelo se establece que el precio del activo subyacente esta dado por el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sqrt{V_t}S_t dZ_1(t) \quad (6)$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_2(t) \quad (7)$$

$$dZ_1(t)dZ_2(t) = \rho dt \quad (8)$$

Con la condición inicial $S_0 = s$. μ es la media de largo plazo del precio del activo y α es la velocidad de reversión a la media del precio del activo. Los demás coeficientes son los establecidos para la ecuación (3) y (4).

El precio de una opción call o de cualquier otro instrumento derivado sobre S_t es una función $F(S_t, V_t, t)$. Al aplicar la fórmula de Itô sobre F se obtiene

$$\begin{aligned} dF = & \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t} \alpha(\mu - S_t) + \frac{\partial F}{\partial V_t} k(\theta - V_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} \sigma V_t S_t \rho \right) dt \\ & + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sqrt{V_t} S_t dZ_1(t) + \frac{\partial F}{\partial V_t} \sigma \sqrt{V_t} dZ_2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Luego se discretizan las ecuaciones (6), (7) y (8), obteniendo

$$\Delta S = \alpha(\mu - S)\Delta t + \sqrt{V}S\Delta Z_1 \quad (10)$$

$$\Delta V = k(\theta - V)\Delta t + \sigma\sqrt{V}\Delta Z_2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta F = & \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S}\alpha(\mu - S) + \frac{\partial F}{\partial V}k(\theta - V) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}VS^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma^2V + \frac{\partial^2 F}{\partial S\partial V}\sigma VS\rho \right) \Delta t \\ & + \frac{\partial F}{\partial S}\sqrt{V}S\Delta Z_1 + \frac{\partial F}{\partial V}\sigma\sqrt{V}\Delta Z_2 \end{aligned} \quad (12)$$

donde ΔS , ΔV y ΔF son los cambios en S , V y F en un intervalo de tiempo pequeño Δt .
A partir de esto se construye un portafolio, Π , de forma que su valor esté dado por

$$\Pi = -F + S\frac{\partial F}{\partial S} + V\frac{\partial F}{\partial V} \quad (13)$$

y de esta manera el cambio $\Delta\Pi$ en el valor del portafolio en un intervalo de tiempo pequeño Δt toma la forma

$$\Delta\Pi = -\Delta F + \Delta S\frac{\partial F}{\partial S} + \Delta V\frac{\partial F}{\partial V} \quad (14)$$

Substituyendo (10), (3) y (12) en (14)

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = & - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}VS^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma^2V + \frac{\partial^2 F}{\partial S\partial V}\sigma VS\rho \right) \Delta t \end{aligned} \quad (15)$$

Como esta ecuación no contiene los términos ΔZ_1 o ΔZ_2 , este portafolio deberá ser libre de riesgo durante el tiempo Δt .

Así se sigue que

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (16)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo.

De las ecuaciones (14), (15) y (16) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \sigma VS\rho\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2V\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \\ + rS\frac{\partial F}{\partial S} + rV\frac{\partial F}{\partial V} - rF = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Por los teoremas de Girsanov y Cameron-Martin-Girsanov (vea Mao, X. (1997)), se propone un cambio de medida en la valoración con riesgo neutral sobre el precio del activo y la varianza para obtener

$$\begin{aligned}
d\hat{Z}_1(t) &= dZ_1(t) + \Lambda_s(S, V, t) \\
d\hat{Z}_2(t) &= dZ_2(t) + \Lambda_v(S, V, t) \\
\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\Lambda_s(S, V, s)^2 + \Lambda_v(S, V, s)^2) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \Lambda_s(S, V, s) dZ_1(s) - \int_0^t \Lambda_v(S, V, s) dZ_2(s) \right\}
\end{aligned}$$

donde Λ_s y Λ_v son el precio de riesgo de mercado de la acción y la volatilidad respectivamente. De este modo (17) resulta ser

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho \sigma V S \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} \\
&+ \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (\alpha(\mu - S) - S\sqrt{V}\Lambda_s) \frac{\partial F}{\partial S} \\
&+ (k(\theta - V) - \sigma\sqrt{V}\Lambda_v) \frac{\partial F}{\partial V} - rF = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Note que en Heston (1993) se asume que el precio del riesgo de mercado de la volatilidad es proporcional a la volatilidad, por tanto

$\exists a$ constante

$$\begin{aligned}
\Lambda_v &= a\sqrt{V_t} \\
\Lambda_v \sigma \sqrt{V_t} &= a\sigma V_t \\
&= \lambda_2 V \\
&= \lambda_v(S, V, t)
\end{aligned} \tag{19}$$

siendo λ_2 una constante.

Se asume además

$$\begin{aligned}
S\sqrt{V_t}\Lambda_s &= \lambda_1 S \\
&= \lambda_s(S, V, t)
\end{aligned} \tag{20}$$

con λ_1 constante.

En adelante $\lambda_s = \lambda_s(S, V, t)$ y $\lambda_v = \lambda_v(S, V, t)$ por simplicidad.

En consecuencia las ecuaciones (6), (7) y (8) pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned}
dS_t &= \left(\frac{\alpha(\mu - S_t)}{S_t} - \sqrt{V_t}\Lambda_s \right) dt + \sqrt{V_t} S_t d\hat{Z}_1(t) \\
dV_t &= \left(\frac{k\theta}{V_t} - k - \frac{\sigma}{\sqrt{V_t}}\Lambda_v \right) dt + \sigma\sqrt{V_t} d\hat{Z}_2(t) \\
\rho dt &= d\hat{Z}_1(t) d\hat{Z}_2(t)
\end{aligned}$$

donde $\hat{Z}_1(t)$ y $\hat{Z}_2(t)$ son nuevos Brownianos bajo la medida \mathbb{Q} .

Luego, con (18), (19) y (20)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho\sigma VS\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial V} \\
& + \frac{1}{2}\sigma^2V\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (\alpha(\mu - S) - \lambda_1S)\frac{\partial F}{\partial S} \\
& + (k(\theta - V) - \lambda_2V)\frac{\partial F}{\partial V} - rF = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Una opción call europea con precio de ejercicio K y tiempo de maduración T satisface la ecuación (21) y el problema es completo, sujeto a las siguientes restricciones de frontera

$$\begin{aligned}
F(S, V, T) &= \text{máx}(0, S - K) \\
F(0, V, t) &= 0 \\
F(\infty, V, t) &= 1 \\
&\text{ojo} \\
F(S, \infty, t) &= S
\end{aligned}$$

3.1 Transformación del problema

En aras de la conveniencia, la ecuación (21) será transformada en un modelo equivalente no lineal usando la siguiente transformación

$$\begin{aligned}
H &= e^{r(T-t)}F \\
X &= e^{r(T-t)}S \\
\tau &= \frac{\nu}{2}(T-t) \\
v &= V
\end{aligned}$$

De donde

$$H = H(X, v, \tau)$$

luego

$$F = e^{-r(T-t)}H$$

Por tanto, la ecuación (21) se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \tau} &= \frac{2}{v}(\alpha^*(\mu^* - X))\frac{\partial H}{\partial X} + X^2\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + 2\rho\sigma X\frac{\partial^2 H}{\partial X\partial v} + \sigma^2\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \\
&+ \frac{2}{v}(k^*(\theta^* - v))\frac{\partial H}{\partial v}
\end{aligned} \tag{22}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \alpha - r + \lambda_1 \\
\mu_T^* &= \frac{\alpha\mu e^{r(T-t)}}{\alpha - r + \lambda_1} \\
k^* &= k + \lambda_2 \\
\theta^* &= \frac{k\theta}{k + \lambda_2}
\end{aligned}$$

y

$$(X, v, \tau) \in [0, \infty] \times [v_m, v_M] \times [0, \frac{v_M}{2}T]$$

Con la condicion inicial $H(X, v, 0) = f(X)$; $X > 0$.

3.2 Construcción del esquema numérico

Para la aproximación numérica es importante tener un dominio acotado tal que sea posible calcular la solución. Como el dominio de la ecuación (21) no es acotado, debe buscarse el dominio numérico acotado, el cual puede escogerse de acuerdo con diferentes criterios; vea R. Kangro et. al (2000), por ejemplo.

Denotemos $[0, b]$ como el dominio para la variable activo X , donde b se escoge de tal forma que el intervalo incluya el precio de ejercicio y el precio inicial, y denotemos $[c, d]$ el dominio para la variable varianza v , donde c y d se escogen de tal forma que el intervalo incluya la varianza mínima y máxima posible.

Luego se define el esquema numérico como:

$$(X, v, \tau) \in [0, b] \times [c, d] \times [0, \frac{d}{2}T]$$

con los nodos

$$\begin{aligned} X_i &= ih_1; & 0 \leq i \leq N_x \\ v_j &= c + jh_2; & 0 \leq j \leq N_v \\ \tau^n &= nk; & 0 \leq n \leq N_\tau \end{aligned}$$

$$N_x h_1 = b; \quad N_v h_2 = d - c; \quad N_\tau k = \frac{v_M}{2}T$$

La aproximación numérica para la solución exacta $H(X_i, v_j, \tau^n)$ es denotada por: U_{ij}^n . Las aproximaciones para las derivadas parciales están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \tau}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{k} + O(k) \\ \frac{\partial H}{\partial X}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{i+1j}^n - U_{i-1j}^n}{2h_1} + O(h_1) \\ \frac{\partial H}{\partial v}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{ij+1}^n - U_{ij-1}^n}{2h_2} + O(h_2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{ij-1}^n - 2U_{ij}^n + U_{ij+1}^n}{h_2^2} + O(h_2^2) \\ &= \Delta_j^n(U) + O(h_2^2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial v}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{i+1j+1}^n + U_{i-1j-1}^n - U_{i-1j+1}^n - U_{i+1j-1}^n}{4h_1 h_2} \\ &\quad + O(h_1 h_2) \\ &= \Delta_{ij}^n(U) + O(h_1 h_2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial X^2}(x_i, v_j, \tau^n) &= \frac{U_{i-1j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i+1j}^n}{h_1^2} + O(h_1^2) \\ &= \Delta_i^n(U) + O(h_1^2) \end{aligned} \tag{23}$$

Note que debido al uso de aproximaciones centradas de las derivadas en $X_0 = 0$, $X_{N_x} = b$ y $v_0 = c$, $v_{N_v} = d$, aparecen nodos ficticios externos $X_{-1} = -h_1$, $X_{N_x+1} = (N_x + 1)h_1$, $v_{-1} = c - h_2$ y $v_{N_v+1} = c + (N_v + 1)h_2$.

Las aproximaciones $U_{0,-1}^n$, U_{0,N_v+1}^n , $U_{N_x,-1}^n$, U_{N_x,N_v+1}^n , $U_{-1,0}^n$, $U_{N_x+1,0}^n$, U_{-1,N_v}^n , U_{N_x+1,N_v}^n son obtenidas usando extrapolación lineal a lo largo de las aproximaciones obtenidas de los nodos interiores más cercanos en el dominio numérico.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
U_{0,-1}^n &= 2U_{0,0}^n - U_{0,1}^n \\
U_{N_x,-1}^n &= 2U_{N_x,0}^n - U_{N_x,1}^n \\
U_{-1,0}^n &= 2U_{0,0}^n - U_{1,0}^n \\
U_{-1,N_v}^n &= 2U_{0,N_v}^n - U_{1,N_v}^n \\
U_{0,N_v+1}^n &= 2U_{0,N_v}^n - U_{0,N_v-1}^n \\
U_{N_x,N_v+1}^n &= 2U_{N_x,N_v}^n - U_{N_x,N_v-1}^n \\
U_{N_x+1,0}^n &= 2U_{N_x,0}^n - U_{N_x-1,0}^n \\
U_{N_x+1,N_v}^n &= 2U_{N_x,N_v}^n - U_{N_x-1,N_v}^n
\end{aligned} \tag{24}$$

y de (24) se obtiene

$$\Delta_{i,0}^n U = \Delta_{i,N_v}^n U = \Delta_{0,j}^n U = \Delta_{N_x,j}^n U = 0, \quad 0 \leq n \leq N_\tau$$

Luego, reemplazando las derivadas parciales de la ecuación (22) por las aproximaciones dadas por (23) se obtiene el esquema numérico

$$\begin{aligned}
U_{ij}^{n+1} &= a_i U_{i+1}^n + b_{ij}^T U_{i-1j}^n + e_i U_{ij}^n + \\
& c_i U_{i+1j+1}^n + c_i U_{i-1j-1}^n - c_i U_{i-1j+1}^n \\
& - c_i U_{i+1j-1}^n + d_j U_{ij-1}^n + f_j U_{ij+1}^n
\end{aligned} \tag{25}$$

donde

$$a_i = ki^2 \tag{26}$$

$$b_{ij}^T = \frac{k\alpha^*(\mu_T^* - ih_1)}{h_1(c + jh_2)} \tag{27}$$

$$c_i = \frac{\rho\sigma ik}{2h_2} \tag{28}$$

$$d_j = k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} - \lambda_j \right) \tag{29}$$

$$e_i = \left(1 - 2i^2k - \frac{2k}{h_2^2}\sigma^2 \right) \tag{30}$$

$$f_j = k \left(\frac{\sigma^2}{h_2^2} + \lambda_j \right) \tag{31}$$

$$\lambda_j = \frac{1}{h_2(c + jh_2)} [k^*(\theta^* - (c + jh_2))] \tag{32}$$

Usando la extrapolación y el esquema numérico (25) en las fronteras, se obtiene

$$\begin{aligned}
U_{00}^{n+1} &= U_{00}^n = \dots = U_{00}^0 = f(X_0) = f(0) \\
U_{0N_v}^{n+1} &= U_{0N_v}^n = \dots = U_{0N_v}^0 = f(X_0) = f(0) \\
U_{N_x 0}^{n+1} &= U_{N_x 0}^n = \dots = U_{N_x 0}^0 = f(X_{N_x}) = f(b) \\
U_{N_x N_v}^{n+1} &= U_{N_x N_v}^n = \dots = U_{N_x N_v}^0 = f(X_{N_x}) = f(b)
\end{aligned}$$

entonces

$$U_{ij}^{n+1} = b_{ij}^T (U_{i+1j}^n - U_{i-1j}^n) + \lambda_j (U_{ij+1}^n - U_{ij-1}^n) + U_{ij}$$

para $i = 0, i = N_x$ y $j = 1, \dots, N_v - 1$, o para $j = 0, j = N_v$ e $i = 1, \dots, N_x - 1$.

3.3 Análisis del esquema

Suponga que

$$0 \leq c \leq \theta^* \leq d; h_1 > 0 \quad (33)$$

Si $2cd \leq \theta^*(d+c)$

Entonces

$$h_2 \leq \frac{\sigma^2 c}{k^*[\theta^* - c]}; k \leq \frac{1}{2 \left[\left(\frac{b}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{h_2} \right)^2 \right]}$$

Además, tomando $\delta = \frac{\alpha\mu}{\alpha-r+\lambda_1}$, $\mu_T^* = \delta e^{r(T-t)}$ con $\delta \geq b e^{-r(T-t)}$.

En consecuencia los coeficientes $a_i, b_{ij}^T, c_i, d_j, e_i, f_j$ son no negativos para $0 \leq i \leq N_x$ y $0 \leq j \leq N_v$.

3.3.1 Positividad

Una propiedad adecuada para el esquema numérico para la valoración es la positividad.

Definición 1. Defina

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij}^n &= U_{i+1,j}^n - U_{ij}^n \\
\Delta_j^n &= U_{i,j+1}^n - U_{ij}^n \\
\dot{\Delta}_{ij}^n &= U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \\
\dot{\Delta}_j^n &= U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n
\end{aligned}$$

Note que de la condición inicial puede deducirse que $U_{ij}^0 = \max(i\Delta S - K, 0)$ pues $U(X, v, 0) = f(X) = \max(X - K, 0)$. Además, $\Delta_{ij}^n \geq 0$, $\Delta_j^n \geq 0$ y por tanto $\dot{\Delta}_{ij}^n \geq 0$, $\dot{\Delta}_j^n \geq 0$.

Luego, para el esquema se cumple que

Si $\dot{\Delta}_{i+1}^n - \dot{\Delta}_{i-1}^n \geq 0 \quad \forall n; 0 \leq n \leq N_\tau$ y se cumplen las restricciones (33) el esquema es no negativo para $0 \leq i \leq N_x; 0 \leq j \leq N_v$.

3.3.2 Consistencia

La consistencia de un esquema numérico con respecto a una ecuación en derivadas parciales significa que la solución exacta del esquema de diferencias finitas aproxima la solución exacta de la EDP (vea Smith (1985)).

Teorema 1. Para cualquiera de los parámetros fijos, el esquema (25) es consistente con la ecuación diferencial parcial.

Demostración. Trivial por construcción (vea sección II C).

3.3.3 Estabilidad

Para analizar la estabilidad lineal en el sentido de von Neumann del esquema (25) se reescribe

$$U^n(i, j) = A^n \exp(I[\bar{k}_1 m + \bar{k}_2 n])$$

Donde $m = i\Delta x$, $n = j\Delta v$, I es la unidad imaginaria, A^n es la amplitud en el tiempo n . $\bar{k}_i = \frac{2\pi h}{\lambda_i}$ son ángulos de fase con longitud de onda λ_i .

Luego, $\xi = \frac{A^{n+1}}{A^n}$ el factor de amplificación satisface

$$\begin{aligned} \xi = & 2bI \sin(\bar{k}_1 \Delta x) + 2a \cos(\bar{k}_1 \Delta x) + e \\ & - 4c[\sin(\bar{k}_1 \Delta x) \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] + d[\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - i \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \\ & + f[\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - i \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta v \rightarrow 0} & \left| 2bI \sin(\bar{k}_1 \Delta x) + 2a \cos(\bar{k}_1 \Delta x) + e \right. \\ & \left. - 4c[\sin(\bar{k}_1 \Delta x) \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \right. \\ & \left. + d[\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - i \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \right. \\ & \left. + f[\cos(\bar{k}_2 \Delta v) - i \sin(\bar{k}_2 \Delta v)] \right| \\ & = |2a_i + e_i + d_j + f_j| \end{aligned}$$

Es claro que los coeficientes del esquema numérico son ponderados y probabilidades de movimiento, por tanto

$$b_{ij}^T - b_{ij}^T + a_i + e_i + a_i + c_i + c_i - c_i - c_i + d_j + f_j = 1 \text{ entonces } 2a_i + e_i + d_j + f_j = 1$$

Por lo que

$$|\xi| = |2a_i + e_i + d_j| = 1 \tag{34}$$

Demostrando entonces que el esquema numérico es críticamente estable.

3.3.4 Convergencia

Teorema 2 (Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer). Un esquema de diferencias finitas consistente para una ecuación diferencial en derivadas parciales para los que el problema de valor inicial está bien planteado es convergente si y solo si es estable.

Demostración. (vea Strikwerda (1989))

Finalmente, usando el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer con el teorema 1 y la condición (34) se puede concluir la convergencia del esquema (25).

4 Resultados

En esta sección se comprueban las propiedades del esquema numérico propuesto (25).

Considere una opción call europea (entonces $f(S) = \max(0, S - K)$).

Las Figuras 1 y 2 muestran el precio calculado con el método numérico y los resultados obtenidos con $h_1 = 5$ (Figura 1) y $h_2 = 1$ (Figura 2). De estas figuras se observa cómo el refinamiento de la malla afecta la solución obtenida.

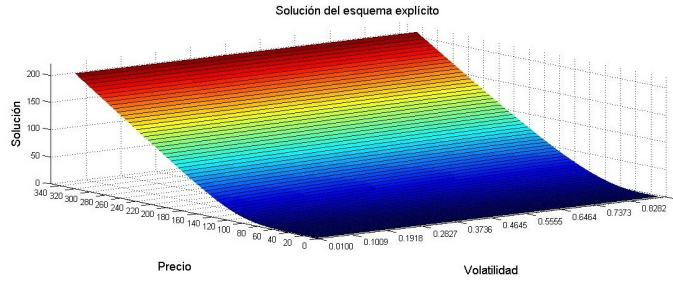


Figura 1: Solución del esquema explícito ($h_1 = 5$). Parámetros: $r = 0,05, T = 1/2, \sigma = 0,1, k^* = 2, \theta^* = 0,011, \alpha^* = 1 * 10^{-5}, c = 0,01, \rho = 1, d = 1, K = 105, b = 315, S_0 = 100$.

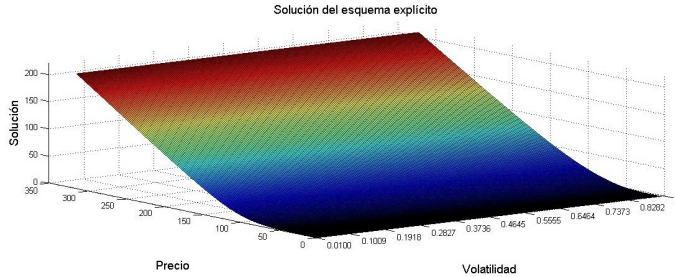


Figura 2: Solución del esquema explícito ($h_1 = 1$). Parámetros: $r = 0,05, T = 1/2, \sigma = 0,1, k^* = 2, \theta^* = 0,011, \alpha^* = 1 * 10^{-5}, c = 0,01, \rho = 1, d = 1, K = 105, b = 315, S_0 = 100$.

Adicionalmente, la Figura 3 presenta el análisis de convergencia para la solución correspondiente a la posición en el esquema para S_0 y a diferentes valores de la volatilidad para cada una de las mallas propuestas. De la Figura 3 se observa que a medida que disminuye el tamaño del paso la solución converge.

5 Conclusiones

En este trabajo se planteó una variación al modelo presentado en Heston (1993) donde el activo subyacente sigue un proceso de reversión a la media. A partir del modelo, se obtuvo la ecuación diferencial parcial presentada en (21) y, tras la transformación de variables presentada en (22), se construyó un esquema numérico de diferencias finitas explícitas que es consistente con esta última ecuación. Este esquema es de segundo orden en el espacio y de primer orden en el tiempo. Se

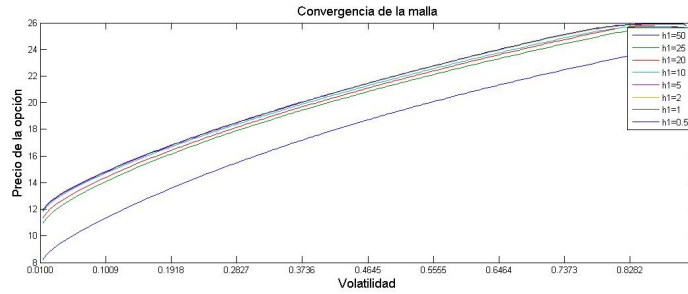


Figura 3: Convergencia de la malla para valores diferentes de h_1 y de la volatilidad

comprobó la positividad y la estabilidad del esquema y se plantearon las condiciones suficientes sobre los tamaños de paso de la discretización de la volatilidad y el tiempo en función del tamaño del paso del precio del activo para que esto fuera posible.

La implementación computacional del esquema numérico es simple y tiene un bajo costo computacional y provee soluciones confiables que son no decrecientes en el activo subyacente y en la dirección de la volatilidad a partir de una función no decreciente de pagos iniciales. Algunos resultados computacionales son mostrados para ilustrar la convergencia del esquema. De las gráficas obtenidas se observa que la refinación de la malla conduce a resultados más fiables. Como trabajo futuro se plantean variaciones en h_2 que permitan tener una malla más refinada, y de las cuales pueda concluirse sobre aspectos como la relación entre el tiempo computacional y la bondad de la solución.

Bibliografía

- [1] A. Lari-Lavassani, A. Sadeghi, A. Ware, Mean Reverting Models for Energy Option Pricing, [http://finance.math.ucalgary.ca/papers/LavassaniSadeghiWare 2001.pdf](http://finance.math.ucalgary.ca/papers/LavassaniSadeghiWare%2001.pdf). (2001a).
- [2] D. Pilipovic, Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives, McGraw-Hill, New York, (2007).
- [3] D.Y. Tangman, A. Gopaul, and M. Bhuruth. Numerical pricing of options using high- order compact finite difference schemes. *J. Comp. Appl. Math.* 218(2), 270–280, 2008.
- [4] F. Black y M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.* 81, 637-659, 1973.
- [5] F. Marín, Árboles Binomiales para la Valoración de Opciones sobre Procesos Derivados de la Ecuación Diferencial Estocástica Autónoma, *Ingeniería y Ciencia.* 6 (12), 153-158, (2010).
- [6] F. Marín, M. Bastidas, Numerical Solution of Pricing of European Call Option with Stochastic Volatility. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences.* 13 (3), 666- 677, (2012).
- [7] F. Marín, Y. Vargas, M. Pinzón, Numerical Comparison of Pricing of European Call Options for Mean Reverting Processes. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences.* 14 (2), 385-395, (2013).
- [8] G. Courtadon, A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis.* 17 (5), 697 -703, (1982a).
- [9] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. 68, 6-13 and 22-23, (1994).
- [10] G.D. Smith. Numerical Solution of Partial Dierential Equations: Finite Dierence Methods. Oxford University Press, Oxford, England, third edition, (1985).
- [11] H. Geman, A. Roncoroni, Understanding the fine structure of electricity prices, *Journal of Business.* 79 (3), (2006).

- [12] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Pacific Grove, CA: Wadsworth and Brooks, (1989).
- [13] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross, A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*. 53, 385–407, (1985).
- [14] J. Hull, A. White, Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 25 (1), 87- 100, (1990).
- [15] K. J. In 't Hout and S. Foulon. ADI finite difference schemes for option pricing in the Heston model with correlation. *International journal of numerical analysis and modeling* volume 7, number 2, pages 303–320, 2010.
- [16] Lari-Lavassani, M. Simchi, A. Ware, A Discrete Valuation of Swing Options. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*. 9 (1), 35-74 (2001b).
- [17] M. Bohner, F. Marín, S. Rodríguez, European Call Option pricing using the Adomian decomposition Method, *Advances in Dynamical System and Applications*. 7 (2), 25-38, (2013) in press.
- [18] M. Bohner, Y. Zheng, On Analytical Solutions of the Black-Scholes Equation, *Applied Mathematics, Letters* 22, 309-313 (2009).
- [19] M. Brennan, E. Schwartz, Analyzing convertible bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 15, 907–29, (1980).
- [20] M. Broadie, P. Glasserman, Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. *Management Science*. 42 (2), 269-285, (1996).
- [21] R. Kangro, R. Nicolaidis, Far field boundary conditions for Black_Scholes equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38 (4), 1357-1368, (2000).
- [22] S. Deng, Stochastic models of energy commodity prices and their applications: mean-reversion with jumps and spikes, Working paper, University of California, Berkeley, Octobre 25 (1999).
- [23] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6(2), 327-343, 1993.
- [24] U.S. Rana, Asad Ahmad, Numerical solution of pricing of european option with stochastic volatility, *International Journal of Engineering* 24 (2), 189–202, 2011
- [25] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*. Horwood Publishing Ltd, Chichester, 1st edition (1997).