

ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE PAGO DE DIVIDENDOS CUANDO EL EXCEDENTE SIGUE UN PROCESO BROWNIANO DRIFT

Juan S. Marín, Francisco Zuluaga

jmarind@eafit.edu.co, fzuluag2@eafit.edu.co

Resumen

En este trabajo se estudia el caso concreto cuando el excedente de una compañía de seguros se comporta de acuerdo a un movimiento Browniano Drift, y a partir de allí se deduce el comportamiento del excedente modificado para una estrategia de barrera y para una estrategia de pago continuo con el objetivo de determinar los parámetros óptimos que hacen que cada una de ellas maximice la expectativa del valor presente de los dividendos descontados. Además, se comparan los resultados obtenidos con una estrategia de pago continuo con aquellos que se obtienen asumiendo una estrategia de barrera. Los experimentos numéricos mostraron que la estrategia de barrera produce más dividendos que la estrategia de pago continuo bajo diferentes escenarios de parámetros (incluyendo diferentes niveles de volatilidad), razón por la cual se concluye que independientemente del perfil de aversión al riesgo del inversionista, si éste decide invertir, entonces siempre preferirá que sus dividendos sean pagados acordes con una estrategia de barrera.

Palabras Clave: Estrategia de pago continuo, estrategia de barrera, movimiento Browniano Drift, dividendos.

Abstract

In this paper, we study the case when the surplus of an insurance company behaves according to a Brownian Drift motion, subsequently we derive the modified surplus dynamics assuming both a barrier strategy and a continuous

payment strategy in order to determine the optimal parameters which make that each of these strategies maximize the mathematical expectation of the present value of the discounted dividends. In addition, we compare the results obtained with a continuous payment strategy with those obtained with a barrier strategy. The numerical experiments suggest that the barrier strategy is more profitable than the continuous payment one under different constellations of parameters (including different levels of volatility), and therefore it may be concluded that independently of the risk aversion profile of the investor, if he decides to invest, then he will always prefer his dividends to be paid according with a barrier strategy.

Keywords: Continuous payment strategy, barrier strategy, Brownian drift motion, dividends

1. Introducción

En ciencias actuariales y particularmente en teoría de la ruina, uno de los problemas clásicos se refiere al modelado matemático del excedente de una compañía de seguros. Dicho problema ha sido ampliamente estudiado en la literatura actuarial y ha sido abordado desde diferentes puntos de vista y analizado bajo diferentes supuestos. En todas las variaciones del modelo se asume que los ingresos entran al excedente de la compañía a una tasa constante, sin embargo, tales variaciones tienen lugar en los supuestos respecto a la naturaleza estocástica de la pérdida agregada, así

como en la naturaleza del tiempo (continuo o discreto) y en la consideración de estrategias de pago de dividendos. Una vez se tiene la especificación matemática del modelo y sus supuestos, se pretende conocer (en la medida de lo posible) la probabilidad de ruina y la distribución del tiempo de ruina y sus momentos. En este sentido, el modelo más simple es un modelo en tiempo discreto, el cual supone que el excedente se comporta como una caminata aleatoria, y que carece de estrategia de pago de dividendos, por lo que el excedente puede crecer sin límites. En este sentido, De Finetti [1957] fue el primero en preocuparse por obtener una estrategia de pago de dividendos en dicho modelo, para ello trata de responder la siguiente pregunta: ¿cuál es la estrategia óptima de dividendos, si el objetivo principal es maximizar el valor esperado de los dividendos descontados, que serán pagados a los inversionistas? De Finetti concluye que la estrategia óptima debe ser una estrategia de barrera, y además propone un método para obtener el valor al cual debe ser fijado el nivel de barrera. El trabajo desarrollado por De Finetti motivó trabajos posteriores como los de Miyasawa [1962], Takeuchi [1962], y Morill [1966]. A partir de allí, varios autores han estudiado el problema de encontrar una estrategia óptima de dividendos en modelos similares al planteado por De Finetti, así como su impacto en la distribución del tiempo de ruina. Tal es el caso de Borch [1990], Buhlmann [1970], Gerber [1972] y Seal [1969]. Es también de mencionar las contribuciones hechas por Albrecher and Kainhofer [2002], al considerar estrategias de barrera no lineales. Trabajos más recientes se han concentrado en estudiar estrategias de dividendos óptimas cuando se asume un modelo en tiempo continuo, donde la pérdida agregada se ve perturbada por un movimiento Browniano. Dado que existen gran variedad de procesos derivados del movimiento Browniano, cada uno de ellos conlleva a una especificación particular del modelo matemático que describe el excedente modificado de la compañía, y, en consecuencia, la estrategia de dividendos resultante depende de dicha especificación. En éste tipo de modelos es de mencionar los aportes hechos por Grandell [1991] y Asmussen and Taksar [1997], donde deducen la probabilidad de ruina cuando el excedente sigue un proceso de difusión, Gerber and

Shiu [2005] retoman el modelo del excedente como un proceso de difusión y analizan la estrategia de barrera óptima, así como la distribución del tiempo de ruina bajo dicha estrategia. Finalmente, sobresale la labor de Gerber et al. [2004], en donde analizan la estrategia de barrera óptima cuando el excedente se comporta como un proceso Ornstein-Uhlenbeck, así como también las contribuciones de Avanzi and Wong [2012] al considerar una estrategia de dividendos basada en pagos continuos.

En este trabajo se estudia el caso concreto cuando el excedente se comporta de acuerdo a un movimiento Browniano Drift, y a partir de allí se deduce el comportamiento del excedente modificado para una estrategia de barrera y para una estrategia de pago continuo con el objetivo de determinar los parámetros óptimos que hacen que cada una de ellas maximice la expectativa del valor presente de los dividendos descontados. Además, se comparan los resultados obtenidos con una estrategia de pago continuo con aquellos que se obtienen asumiendo una estrategia de barrera, con el fin de evaluar las condiciones en las cuales cada estrategia resulta ser óptima, brindando así elementos técnicos y precisos que son útiles para el análisis de estrategias de dividendos en un contexto real.

2. El modelo del excedente modificado

Sea $U(t)$ el excedente de la compañía en el instante t . En el problema aquí abordado, se asume que $U(t)$ sigue un proceso Browniano Drift, cuya especificación es como sigue:

$$U(t) = x + \mu t + \sigma W(t); t \geq 0 \quad (1)$$

donde $\mu, \sigma \geq 0$ son los parámetros de tendencia y difusión respectivamente, $x > 0$ representa el excedente inicial y $\{W(t), t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional.

2.1. Dinámica del excedente modificado bajo una estrategia de barrera

La estrategia de barrera consiste en pagar dividendos a los inversionistas cada vez que el excedente modificado de la compañía sobrepasa un determinado nivel que se conoce como nivel de barrera. La cantidad pagada a los inversionistas es la diferencia entre el valor del excedente modificado y el nivel de barrera. Una definición más rigurosa se presenta a continuación:

Sea $M(t)$ una función que describe el máximo valor alcanzado por el excedente de la compañía al instante t , $M(t)$ se conoce como máxima corrida y viene definida así:

$$M(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} U(\tau) \quad (2)$$

En consecuencia, los dividendos pagados a los inversionistas hasta el tiempo t son:

$$D(t) = (M(t) - b)_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } M(t) \leq b \\ M(t) - b & \text{si } M(t) > b \end{cases} \quad (3)$$

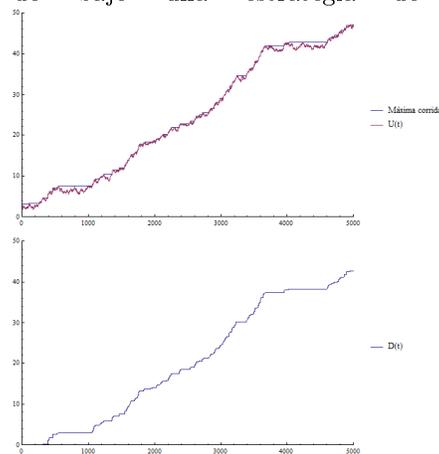
Así pues, el excedente modificado de la compañía viene dado por:

$$X(t) = U(t) - D(t) \quad (4)$$

2.2. Dinámica del excedente modificado bajo una estrategia de pago continuo

A diferencia de la estrategia de barrera, la estrategia de pago continuo se caracteriza por el hecho que los inversionistas reciben un flujo continuo de dividendos definido por una tasa fija sobre el excedente modificado, sea $g > 0$ tal tasa, entonces el excedente modificado, entendido como la diferencia entre el excedente de la compañía en un instante dado t y el pago acumulado de dividendos hasta dicho instante tiempo, se puede expresar como:

Fig. 1: Dinámica del excedente modificado bajo una estrategia de barrera



$$Y(t) = U(t) - g \int_0^t Y(s) ds \quad (5)$$

$$dY(t) = dU(t) - gY(t)dt \quad (6)$$

$$dY(t) = [\mu - gY(t)] dt + \sigma dW(t) \quad (7)$$

La ecuación anterior especifica la dinámica del excedente modificado bajo una estrategia de pago continuo. Es interesante notar que de 5 se tiene que:

$$E[Y(t)] = x + \mu t - g \int_0^t E[Y(s)] ds \quad (8)$$

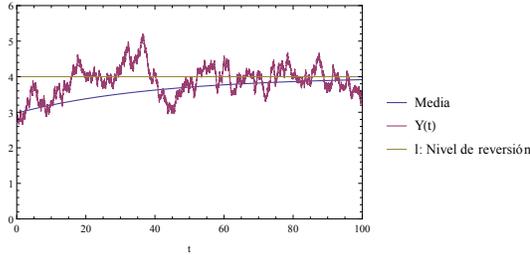
haciendo $s(t) = E[Y(t)]$, entonces es claro que la ecuación anterior satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{s}(t) + gs(t) = \mu \quad (9)$$

teniendo en cuenta que $s(0) = x$, se obtiene:

$$s(t) = \frac{\mu}{g} [1 - e^{-gt}] + xe^{-gt} \quad (10)$$

Fig. 2: Dinámica del excedente modificado bajo una estrategia de pago continuo



lo cual implica que la media de largo plazo viene dada por:

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{\mu}{g} \quad (11)$$

Observe que cuando el excedente de la compañía sobrepasa el nivel l , el término de tendencia en la ecuación 7 se hace negativo, de manera análoga, cuando el excedente de la compañía se encuentra por debajo del nivel l , el término de tendencia en dicha ecuación es positivo, por lo que el proceso siempre está fluctuando alrededor de la media de largo plazo, en consecuencia, l es llamado nivel de reversión del proceso. Note que en la ecuación 10, $s(t)$ puede ser interpretado como el valor presente de la diferencia entre el excedente inicial y el nivel de reversión junto con el valor presente de una anualidad perpetua μ a una tasa g . Dicha interpretación es interesante en tanto da cuenta del hecho que en el largo plazo el valor presente de $x - l$ se hace tan pequeño que $s(t)$ puede ser explicado mediante una anualidad perpetua, lo cual es coherente con el comportamiento que tendría el excedente modificado bajo un escenario sin incertidumbre ($\sigma = 0$).

3. Deducción del valor esperado de los excedentes descontados

En aras de encontrar los parámetros óptimos de cada estrategia de pago de dividendos, es necesario definir el criterio de optimización. En este caso, las estrategias de pago de dividendos buscan beneficiar al inversionista, por lo que el criterio de optimización

debe buscar maximizar los beneficios del mismo. No obstante, desde que el comportamiento del excedente es estocástico, se busca maximizar la esperanza matemática del valor presente de los excedentes descontados, a una tasa fija de descuento $\delta > 0$. Observe que los inversionistas reciben dividendos hasta que el excedente modificado, se hace cero, momento en el cual la compañía cae en la ruina. Sea $Z(t)$ el excedente modificado en el instante t , entonces el tiempo de ruina se define como sigue:

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid Z(t) = 0\} \quad (12)$$

En los siguientes apartados se estudiará la deducción del valor esperado de los excedentes descontados bajo cada estrategia.

3.1. Valor esperado de los dividendos descontados bajo una estrategia de barrera

Es claro entonces que el valor presente de los dividendos viene dado por:

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \quad (13)$$

Siguiendo la notación de Gerber and Shiu [2005], sea $E[D] = V(x; b)$, con $0 \leq x \leq b$. Ahora bien, aplicando el lema de Itô se tiene que:

$$V(U(dt); b) = V(U(0); b) + [\mu V'(U(0); b) + \frac{\sigma^2}{2} V''(U(0); b)] dt \quad (14)$$

$$+ \sigma V'(U(0); b) dW(0) \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que $U(0) = x$, y aplicando valor esperado en ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene:

$$E[V(U(dt); b)] = V(x; b) + [\mu V'(x; b) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x; b)] dt \quad (16)$$

De otro lado considere el intervalo infinitesimal 0 a dt , claramente el excedente no alcanza ni el nivel de barrera, ni tampoco llega a ser 0. Además,

la esperanza matemática del excedente en dt , no es más que la esperanza matemática del valor presente de los dividendos capitalizados a una fuerza de interés δ en dicho intervalo de tiempo, en consecuencia: $E[V(U(dt); b)] = e^{\delta dt}V(x; b)$. Finalmente igualando esta expresión con 16 y haciendo una aproximación de primer orden se obtiene que $V(x; b)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\sigma^2}{2}V''(x; b) + \mu V'(x; b) - \delta V(x; b) = 0 \quad (17)$$

junto con las condiciones de frontera:

$$V(0; b) = 0 \quad (18)$$

$$V'(b; b) = 1 \quad (19)$$

Siguiendo los argumentos expuestos por Gerber and Shiu [2005], note que cuando $x = 0$ la ruina es inmediata, por lo que no hay dividendos pagados a los inversionistas, ello justifica la condición 18. Por otro lado considere el siguiente razonamiento: sea $\varepsilon > 0$, y ahora suponga dos situaciones, la primera en la cual $x = b$, y la segunda en la cual $x = b - \varepsilon$; esto significa que en la primera de ellas los dividendos pagados a los inversionistas serán por una cantidad ε más altos que en la segunda para casi todas las realizaciones del proceso $\{W(t), t \geq 0\}$, esto es:

$$V(b; b) - V(b - \varepsilon; b) = \varepsilon \quad (20)$$

$$\frac{V(b; b) - V(b - \varepsilon; b)}{\varepsilon} = 1 \quad (21)$$

Como 21 es válida para cualquier $\varepsilon > 0$ (tan cerca a cero como se quiera), entonces ello claramente implica la condición 19. Una prueba más rigurosa se encuentra en Gerber [1972].

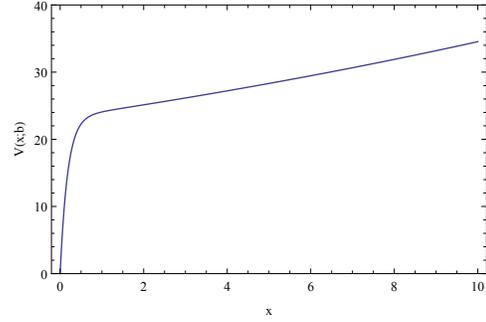
La ecuación 17 es una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea con coeficientes constantes, luego su solución general viene dada por:

$$V(x; b) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{sx} \quad (22)$$

donde c_1, c_2 son números reales y r, s satisfacen la ecuación característica:

$$\frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \mu\zeta - \delta = 0 \quad (23)$$

Fig. 3: Esperado del valor presente de los dividendos descontados como función de x



Denote por $g(x) = e^{rx} - e^{sx}$, entonces dado que 22 debe satisfacer las condiciones de frontera 18 y 19, se tiene que: $c_1 = \frac{1}{g'(b)}$ y $c_2 = -\frac{1}{g'(b)}$, en consecuencia:

$$V(x; b) = \frac{g(x)}{g'(b)} \quad (24)$$

Como $V(x; b) \geq 0$ para $0 \leq x \leq b$, entonces r, s se escogen de manera tal que tanto el numerador como el denominador de 24 sean positivos:

$$r = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (25)$$

$$s = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (26)$$

3.2. Valor esperado de los dividendos descontados bajo una estrategia de pago continuo

3.2.1. Dividendos sin nivel de absorción

El nivel de absorción se define como el valor del excedente modificado para el cual la compañía no puede seguir operando, el momento en el que ello ocurre recibe el nombre de tiempo de primer pasaje. En particular, cuando el nivel de absorción es cero, entonces el tiempo de primer pasaje se conoce como tiempo de

ruina (ver ecuación 12). Aunque asumir que no hay nivel de absorción carece de realismo, en ésta sección se parte de dicho supuesto, pues permite llegar a algunos resultados que serán de capital importancia para analizar el caso cuando se fija un nivel de absorción determinado. Denotando por F_x al valor presente de los dividendos cuando no hay absorción, se tiene que:

$$F_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g Y(t) dt \quad (27)$$

aplicando valor esperado a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene:

$$E[F_x] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g E[Y(t)] dt \quad (28)$$

reemplazando 10 en la ecuación anterior, resulta:

$$E[F_x] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g \left[\frac{\mu}{g} (1 - e^{-gt}) + x e^{-gt} \right] dt \quad (29)$$

$$E[F_x] = \frac{\mu}{\delta} + \frac{xg - \mu}{\delta + g} \quad (30)$$

Es claro que de la expresión 30, y del hecho que $\delta, \mu, x > 0$, $E[F_x]$ es monótonamente creciente para toda $g > 0$. En consecuencia se obtiene la siguiente desigualdad:

$$E[F_x] < \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\delta} + \frac{xg - \mu}{\delta + g} = \frac{\mu}{\delta} + x \quad (31)$$

3.2.2. Dividendos con nivel de absorción cero

Aunque el nivel de absorción puede ser fijado en cualquier punto de la recta real dependiendo de las políticas y posibilidades de cada compañía (por ejemplo, en algunos casos tal nivel es fijado por debajo de cero siempre y cuando la compañía cubra al menos sus costos variables), el presente trabajo se concentra en el caso cuando el nivel de absorción es cero.

$$E[F_{x;0}] = \int_0^T e^{-\delta t} g Y(t) dt \quad (32)$$

$$E[F_{x;0}] = E[F_x] - E[e^{-\delta T}] E[F_a] \quad (33)$$

Reemplazando 30 en 33:

$$E[F_{x;0}] = \frac{\mu}{\delta} + \frac{xg - \mu}{\delta + g} - \left(\frac{\mu}{\delta} + \frac{ag - \mu}{\delta + g} \right) E[e^{-\delta T}] \quad (34)$$

Es interesante ver que en la ecuación 34 la esperanza matemática del valor presente de los dividendos descontados queda expresada en términos de la transformada de laplace del tiempo de ruina, que guarda una estrecha relación con la función generadora de momentos del tiempo de ruina. En la siguiente sección se presentarán algunos resultados concernientes al cálculo de dicha función, con el fin de tener las herramientas necesarias para conocer el esperado del valor presente de los dividendos descontados bajo una estrategia de pago continuo.

Nota

Observe que de 7, $Y(t)$ es un proceso de Itô con término de tendencia: $\mu - gY(t)$, y término de difusión: σ . Ahora bien, sea $E[F_{x;0}] = W(x; g)$ tal que $W \in C^2[0, T]$. Entonces aplicando Lema de Itô se obtiene:

$$W(Y(dt); g) = W(Y(0); g) + [(\mu - gY(0))W'(Y(0); g) +$$

$$\frac{\sigma^2}{2} W''(Y(0); g)] dt + \sigma W'(Y(0); g) dW(0) \quad (35)$$

Teniendo en cuenta que $Y(0) = U(0) = x$, y haciendo un razonamiento análogo al de la sección anterior para deducir la ecuación 17 se llega a que, $W(x; g)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\sigma^2}{2} W''(x; g) + (\mu - gx)W'(x; g) - \delta W(x; g) = 0 \quad (36)$$

No obstante, encontrar las condiciones de frontera adecuadas para resolver la ecuación anterior no es tan sencillo como cuando se supone una estrategia de barrera, razón por la cual se prefirió usar un razonamiento diferente para encontrar $E[F_{x;0}]$.

4. La función generadora de momentos del tiempo de ruina

4.1. La función generadora de momentos del tiempo de ruina bajo una estrategia de barrera

Siguiendo los resultados de Gerber and Shiu [2005], considere $L(x; b) = E[e^{-\delta T}]$, observe que aplicando la fórmula de Itô y haciendo un procedimiento análogo al llevado a cabo en la sección 3.1 se llega a que $L(x; b)$ satisface la ecuación diferencial descrita en 17, no obstante, las condiciones de frontera para dicha ecuación no son las mismas que las halladas en 18 y 19. Note que, en este caso, $L(x; b)$ se interpreta como el valor esperado del valor presente de un pago de una unidad descontado a una tasa δ desde el momento de la ruina dado un capital inicial $0 \leq x \leq b$ y un nivel de barrera b . Así pues, siguiendo esta interpretación se tiene que las condiciones de frontera vienen dadas por:

$$L(0; b) = 1 \quad (37)$$

$$L'(0; b) = 0 \quad (38)$$

En consecuencia, se obtiene la siguiente expresión:

$$L(x; b) = \frac{re^{-s(b-x)} - se^{-r(b-x)}}{re^{-sb} - se^{-rb}} \quad (39)$$

donde r, s son las raíces de la ecuación característica y vienen dadas por las ecuaciones 25 y 26 respectivamente. Haciendo $\theta = -\delta$, y considerando a r y s como funciones de θ se llega a la siguiente expresión:

$$E[e^{\theta T}] = \frac{re^{-(b-x)s(\theta)} - se^{-(b-x)r(\theta)}}{re^{-bs(\theta)} - se^{-br(\theta)}} \quad (40)$$

4.2. La función generadora de momentos del tiempo de ruina bajo una estrategia de pago continuo

De acuerdo a Alili et al. [2005], la transformada de Laplace del momento de ruina cuando el excedente

modificado sigue un proceso de Ornstein Ulenbeck, viene dado por el cociente de dos funciones parabólicas cilíndricas. Avanzi and Wong [2012] demuestran que haciendo un cambio adecuado de variables y parámetros, es posible utilizar los resultados hallados por Alili para encontrar la transformada de Laplace del momento de ruina cuando el excedente modificado sigue un proceso de reversión a la media, mediante la siguiente expresión:

$$E[e^{-\delta T}] = e^{\frac{gx}{2\sigma^2}(x-2l)} \frac{D(-\frac{\delta}{g}, -\sqrt{2g}(\frac{l-x}{\sigma}))}{D(-\frac{\delta}{g}, -\sqrt{2g}(\frac{l}{\sigma}))} \quad (41)$$

donde $D(\cdot, \cdot)$ representa la función parabólica cilíndrica, que surge como solución de la ecuación diferencial de Weber. Nuevamente, haciendo $\theta = -\delta$, se obtiene la función generadora de momentos:

$$E[e^{\theta T}] = e^{\frac{gx}{2\sigma^2}(x-2l)} \frac{D(\frac{\theta}{g}, -\sqrt{2g}(\frac{l-x}{\sigma}))}{D(\frac{\theta}{g}, -\sqrt{2g}(\frac{l}{\sigma}))} \quad (42)$$

5. Deducción de los parámetros óptimos

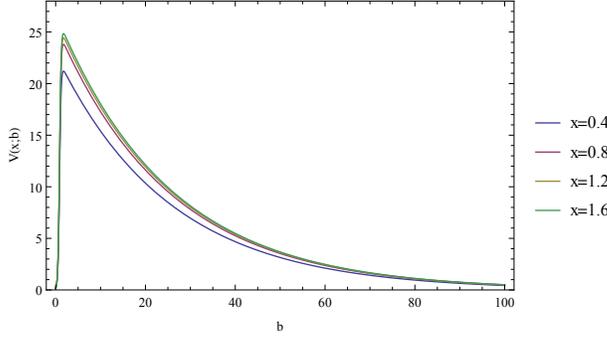
5.1. El nivel de barrera óptimo

En este punto el interés radica en escoger adecuadamente el nivel de barrera b , de manera que maximice la esperanza matemática del valor presente de los dividendos descontados bajo una estrategia de barrera, esto es maximizar $V(x; b)$ tal y como aparece en la ecuación 24. Luego, usando la condición de primer orden se tiene que:

$$\frac{\partial V(x; b)}{\partial b} = -\frac{(e^{rx} - e^{sx})(r^2e^{rb} - s^2e^{sb})}{(re^{rb} - se^{sb})^2} = 0 \quad (43)$$

Es interesante notar que como $r > s$, la factorización de la ecuación anterior implica que el único factor que tiene sentido que se haga cero es $r^2e^{rb} - s^2e^{sb}$, lo cual significa que el nivel barrera óptimo no depende del capital inicial x (ver figura 4), en efecto:

$$r^2e^{rb} - s^2e^{sb} = 0 \quad (44)$$

Fig. 4: $V(x; b)$ como función del nivel de barrera para diferentes valores del excedente inicial x 

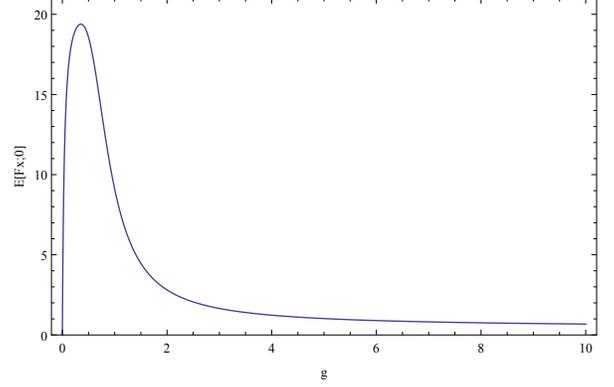
$$b^* = \frac{2}{r-s} \ln \left| \frac{s}{r} \right| \quad (45)$$

Es fácil ver que $\frac{\partial^2 V(x; b)}{\partial b^2} \Big|_{b=b^*} < 0$, lo que claramente confirma que b^* maximiza $V(x; b)$.

5.2. El nivel de reversión óptimo

Para el caso cuando el excedente modificado se comporta como un proceso de reversión a la media, es claro que el esperado del valor presente de los dividendos descontados viene dado por la expresión 34, donde la transformada de laplace del momento de ruina viene dada por 41. Observe que el nivel de reversión está determinado por μ y g (ver ecuación 11), sin embargo, μ no es un parámetro fácil de controlar por la compañía pues está asociado con la dinámica del excedente y en un escenario práctico sería resultado de una estimación de parámetros. Por otro lado, g es un parámetro que la compañía sí puede controlar pues determina la fracción del excedente modificado que será pagada como dividendos a los inversionistas. En este orden de ideas, se busca encontrar el valor de g , tal que maximiza $E[F_{x;0}]$. En Avanzi and Wong [2012], se demuestra la diferenciabilidad de $E[F_{x;0}]$ así como la existencia del máximo de dicha función, por lo que tiene sentido plantear las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial E[F_{x;0}]}{\partial g} = 0 \quad (46)$$

Fig. 5: Esperado del valor presente de los dividendos descontados como función de g .

No obstante, encontrar una expresión de forma analítica (como la hallada para una estrategia de barrera) para hallar tal g no es posible en este caso pues la función cilíndrica parabólica es una función especial en términos de series de potencias que hace imposible encontrar analíticamente la g que satisface las condiciones de primer orden. Sin embargo, el proceso puede ser llevado a cabo numéricamente. La figura 5 muestra la gráfica del valor esperado de los dividendos descontados en función del parámetro g , para $\mu = 1$, $\sigma = 0,6$, $x = 0,4$ y $\delta = 0,04$, la cual evidencia la diferenciabilidad de la función y la existencia del máximo.

Finalmente, considere g^* tal que satisface la ecuación 46 y además $\frac{\partial^2 E[F_{x;0}]}{\partial g^2} \Big|_{g=g^*} < 0$, entonces el nivel de reversión óptimo denotado por l^* está dado por:

$$l^* = \frac{\mu}{g^*} \quad (47)$$

6. Resultados de la comparación de estrategias

Las tablas 1-4 muestran los resultados óptimos bajo cada estrategia de pago de dividendos al variar los parámetros x , σ , μ y δ . En primer lugar, la tabla 1 ratifica lo establecido en la sección 5.1 respecto a la independencia entre el excedente inicial y el nivel de barrera óptimo, contrario a lo que sucede con

x	b^*	$V(x; b)$	l^*	$E[F_{x;0}]$
0,4	1,756	21,203	2,825	19,384
0,8	1,756	23,804	2,638	22,406
1,2	1,756	24,427	2,540	23,306
1,6	1,756	24,844	2,488	23,825

Tab. 1: Comparación entre la estrategia de barrera y pago continuo para $\mu = 1, \sigma = 0,6, \delta = 0,04$

σ	b^*	$V(x; b)$	l^*	$E[F_{x;0}]$
0,25	0,417	24,983	0,641	24,701
0,50	1,314	23,156	2,103	21,743
0,75	2,481	17,646	3,935	15,602
1,00	3,802	12,355	5,761	10,488

Tab. 2: Comparación entre la estrategia de barrera y pago continuo para $x = 0,4, \mu = 1, \delta = 0,04$

respecto al nivel de reversión óptimo, en donde se evidencia claramente una relación inversa. También es interesante ver que en ambas estrategias a medida que aumenta el excedente inicial, el esperado del valor presente del excedente modificado también aumenta, lo cual es coherente desde que un mayor excedente inicial hace que la compañía tenga más reservas para afrontar las reclamaciones y, en consecuencia, el tiempo de ruina se hace más grande permitiendo a los inversionistas recibir dividendos por más tiempo; aumentando así el esperado del valor presente de los excedentes descontados. La tabla 2, muestra que a medida que se incrementa la volatilidad del excedente de la compañía la esperanza del valor presente de los pagos descontados disminuye, pues tanto el nivel de barrera como el nivel de reversión aumentan con el objetivo de prolongar el tiempo de ruina.

Recordando que el término de tendencia, μ , está asociado con los pagos continuos que recibe la compañía en virtud de las primas cobradas por los seguros, la tabla 3 muestra un resultado obvio: a medida que la compañía recibe más dinero por unidad de tiempo, el valor esperado del valor presente de los dividendos descontados aumenta de manera significativa. No

μ	b^*	$V(x; b)$	l^*	$E[F_{x;0}]$
0,5	2,456	7,362	3,517	6,170
1,0	1,756	21,203	2,825	19,384
1,5	1,371	35,268	2,262	33,572
2,0	1,134	48,703	1,871	47,323

Tab. 3: Comparación entre la estrategia de barrera y pago continuo para $x = 0,4, \sigma = 0,6, \delta = 0,04$

δ	b^*	$V(x; b)$	l^*	$E[F_{x;0}]$
0,01	2,268	87,601	4,247	83,443
0,04	1,756	21,203	2,825	19,384
0,07	1,545	11,847	2,356	10,577
0,1	1,409	8,151	2,066	7,160

Tab. 4: Comparación entre la estrategia de barrera y pago continuo para $x = 0,4, \mu = 1, \sigma = 0,6$

obstante, y como se expuso anteriormente, el parámetro μ no es fácilmente controlable desde que las primas que cobra la compañía están sujetas al juego de oferta y demanda del mercado (por ejemplo, si la compañía cobrase primas tan altas como quisiera entonces podría eventualmente quedarse sin clientes y caer en la ruina). De otro lado, la tabla 4 evidencia que al incrementar la tasa de descuento, la expectativa del valor presente de los dividendos descontados disminuye, lo cuál es natural si se tiene en cuenta que la tasa de descuento es una medida del cambio del dinero en el tiempo, de manera que una tasa de descuento mayor, implica una tasa más alta de desvalorización del dinero.

Note que bajo los diferentes escenarios planteados anteriormente, la estrategia de barrera siempre produce mejores resultados que la estrategia de pago continuo, es decir, que la expectativa del valor presente de los dividendos descontados con una estrategia barrera es mayor que la generada por una estrategia de pago continuo. Aun así, los resultados producidos por ambas estrategias son bastante similares. Debido a que la comparación entre ambas estrategias es la misma para cualquier nivel de incertidumbre (ver tabla 3), una vez que el inversionista haya decidido invertir, la estrategia de barrera siempre será preferida por éste sin importar su nivel de aversión al riesgo (asumiendo

un inversionista racional). Es de anotar, que la validez de éste análisis se encuentra sustentada bajo el supuesto que el inversionista busca siempre maximizar la esperanza del valor presente de los dividendos descontados, las conclusiones aquí presentadas podrían variar si se introducen otros criterios, como por ejemplo, que el inversionista necesite tener un mínimo de dividendos por unidad de tiempo.

7. Conclusiones

En este trabajo se presentó la deducción del modelo matemático que describe el esperado del valor presente de los dividendos descontados tanto para el caso de una estrategia de barrera como para el caso de una estrategia de pago continuo, con el objetivo de encontrar el nivel de barrera óptimo y el nivel de reversión óptimo que maximizaban la expectativa del valor presente de los dividendos descontados. Los experimentos numéricos mostraron que la estrategia de barrera produce más dividendos que la estrategia de pago continuo bajo cualquier escenario, razón por la cual se concluye que independientemente del perfil de aversión al riesgo del inversionista, si éste decide invertir, entonces siempre preferirá que sus dividendos sean pagados acordes con una estrategia de barrera. Finalmente, trabajos posteriores podrían ir encaminados principalmente en dos direcciones: la primera, explorar un criterio diferente a la expectativa del valor presente de los dividendos descontados y nuevamente comparar las estrategias; y la segunda, aplicar la teoría aquí expuesta para modelar el excedente modificado de una compañía con datos empíricos, y determinar los parámetros óptimos para una estrategia de pago de dividendos, lo cual implicaría enfrentarse al problema de la estimación de parámetros.

Referencias

- H Albrecher and R Kainhofer. Risk Theory with a nonlinear Dividend Barrier. *Computing*, 68(4):289–311, 2002. ISSN 0010-485X. doi: 10.1007/s00607-001-1447-4.
- L. Alili, P. Patie, and J. L. Pedersen. Representations of the first hitting time density of an ornstein-uhlenbeck process 1. *Stochastic Models*, 21(4):967–980, 2005. doi: 10.1080/15326340500294702.
- Søren Asmussen and Michael Taksar. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(1):1–15, June 1997. ISSN 01676687. doi: 10.1016/S0167-6687(96)00017-0.
- Benjamin Avanzi and Bernard Wong. On a mean reverting dividend strategy with Brownian motion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(2):229–238, September 2012. ISSN 01676687. doi: 10.1016/j.insmatheco.2012.04.002.
- Karl Borch. *Economics of Insurance*. Lexington Books, Amsterdam, 1990.
- Hans Buhlmann. *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.
- Bruno De Finetti. Su un impostazione alternativa dell teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2: 433–43, 1957.
- Hans U Gerber. Games of Economic Survival with Discrete- and Continuous-Income Process. *operations Research*, 20:37–45, 1972.
- Hans U Gerber and Elias S Shiu. Brownian Motion. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 2005.
- Hans U Gerber, Jun Cai, and Hailiang Yang. Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck model with credit and debit interest. pages 94–119, 2004.
- Jan Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer, New York, 1991.
- K. Miyasawa. An Economic Survival Game. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 4:95–113, 1962.
- John. Morill. One-Person Games of Economic Survival. *Naval Research Logistic Quarterly*, 13:49–70, 1966.

Hilary L Seal. *Stochastic Theory of a Risk Business*.
Wiley, New York, 1969.

K. Takeuchi. A Remark on Economic Survival Games. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 4:114–21, 1962.