1997-03

La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo

Gómez-López, Luis F.

La enseñanza de las matemáticas

desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo

huella

LUIS FELIPE GÓMEZ

iteso

cuadernos de divulgación académica

24

La enseñanza de las matemáticas

desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo

La enseñanza de las matemáticas

desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo

Luis Felipe Gómez

huella

cuadernos de divulgación académica 24

iteso

ITESO

Rector:
Pablo Humberto Posada Velázquez, S.J.

Director General Académico:
Carlos Corona Caraveo

Director de Relaciones Externas:
Pedro Núñez Hermosillo

Jefe de Extensión Universitaria:
Felipe Curiel Aguirre

Responsable de Publicaciones:
Hilda Elena Hernández

Diseño de portada: Jabaz

Impreso y hecho en México.
Printed and made in Mexico.

ISBN 968-6101-42-X

Índice

Introducción

De las áreas de estudio, las que más dificultad presentan a los niños pequeños son, sin duda alguna, las matemáticas y los elementos de lingüística de la clase de español. A diferencia de otras áreas de estudio donde lo importante es decir, lo común de estas dos es que los alumnos tienen que hacer. Es quizá esto lo que las haga particularmente difíciles. En áreas tales como ciencias sociales, y en buena parte también en las ciencias naturales, basta con que el niño repita lo que aprendió de un texto. Sin embargo, en lingüística y en matemáticas tiene que saber decir, pero debe sobre todo saber aplicar un conjunto de reglas, principios y procedimientos. Además, es frecuente que la evaluación esté más bien basada en las ejecuciones del alumno que en la recitación.

La dificultad en el aprendizaje de las matemáticas causa serios problemas a los individuos pues muy pocas cosas en nuestra sociedad escapan al conteo o a la medición. Necesitamos contar el dinero cuando compramos o vendemos, saber el largo de nuestros pantalones o nuestros zapatos y cuántos metros de alfombra se requieren para cubrir una habitación que tiene 4 metros de largo por 3.5 metros de ancho. Además, el célebre psicólogo ruso Lev Vygotsky, pionero en el desarrollo de habilidades de pensamiento, afirma que las cuatro operaciones básicas de la aritmética proporcionan las bases para el subsiguiente desarrollo de una serie de procesos internos sumamente complejos en el pensamiento del niño.[1]

Según Campbell y Fey,[2] las matemáticas tienen un récord impresionante de contribuciones al descubrimiento,

---

1. Vygotsky, L. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Grijalbo, Barcelona, 1979.
2. Campbell, P. y James Fey, "New goals for school mathematics", en R. Brandt. *Contents of the curriculum*, ASCD, Alexandria, 1989.

la resolución de problemas en ciencia y tecnología, la toma de decisiones en negocios y gobierno y en la expresión creativa en las artes. De acuerdo con estos autores, los análisis recientes acerca de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas norteamericanas han concluido que los alumnos no están adquiriendo las habilidades ni la comprensión que necesitarán para participar eficientemente en los ambientes culturales, económicos, políticos y científicos del futuro. Estudios internacionales muestran que los estudiantes de Estados Unidos están muy por debajo de sus contrapartes en otros países desarrollados. En México la situación no es mejor. Aunque no encontré información acerca del rendimiento académico en el área de matemáticas, Guevara Niebla,[3] al hablar en general acerca del aprendizaje académico, dice que el 83.7% y el 96.2% de los alumnos de primaria y secundaria, respectivamente, obtuvieron notas reprobatorias en una prueba de conocimientos. Otro estudio, realizado por Tirado Segura,[4] muestra que incluso los estudiantes en la universidad continúan adquiriendo conocimientos que corresponden a los niveles básicos de educación.

El desarrollo de las habilidades aritméticas sin comprensión exige una enorme cantidad de tiempo de instrucción, energía y persistencia. El currículum actual, en el mejor de los casos, produce un dominio sobre los procedimientos aritméticos después de cinco o seis años de práctica y repeticiones constantes.

El propósito del presente trabajo es sugerir que el enfoque sociocultural del desarrollo cognoscitivo presenta una buena alternativa a la enseñanza tradicional de la aritmética.

---

3. Guevara Niebla, G. "México ¿un pais de reprobados?", en *Nexos*, núm.162, junio de 1991, pp.33-44.
4. Tirado Segura, F. "La crítica situación de la educación básica en México", en *Ciencia y Desarrollo*, núm.71, 1986, pp.81-94.

Se inicia con una breve descripción de lo que son las matemáticas y la aritmética, y continúa con la explicación del conocimiento matemático desde un enfoque sociocultural. Después de los apartados anteriores siguen tres secciones, que abordan la importancia del lenguaje, la representación y la intervención de un adulto en la construcción del conocimiento matemático por parte del niño. Estas secciones llevarán ejemplos obtenidos en trabajo de campo tanto con niños sin dificultades en el aprendizaje de las matemáticas como con niños que presentan déficit en esta área del conocimiento.

¿Qué son las matemáticas?

Por lo general se define a las matemáticas como una ciencia que estudia, por medio de sistemas hipotético-deductivos, las propiedades de entes abstractos como los números y las figuras geométricas, etc., así como las relaciones que se establecen entre ellos. En este trabajo me estaré refiriendo a la aritmética como la parte de las matemáticas que estudia los números enteros racionales, las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), elevación a potencias, extracción de raíces y el uso de los resultados de estas operaciones en la vida cotidiana.

Por otra parte, considero que las operaciones aritméticas, más que simples ejercicios formales, son abstracciones o modelos de las relaciones que reiteradamente ocurren en el mundo y que, por lo tanto, forman parte de la experiencia del niño, dado que todos han recibido, substraído, compartido y utilizado repetidas veces una misma cantidad. Por lo que a partir de estas experiencias universales se puede construir (y debería poderse con facilidad) todo un conjunto de definiciones y procedimientos que ayuden al niño a pasar de su experiencia concreta y tangible a una conceptualización abstracta de la misma. Esta conceptualización le permitiría la resolución de problemas con la misma estructura en otros contextos, y además fincar posteriores conocimientos sobre esta base.

Al hablar de construcción de conocimiento tenemos que referirnos necesariamente al pensamiento. Kenneth Craik[5] propuso que el pensamiento es la manipulación de representaciones internas del mundo, por lo tanto el niño debe tener experiencias directas e indirectas de los modelos que construye. También debe poder hacer manipulaciones reales a partir de las operaciones mentales que realiza.

De acuerdo con Johnson-Laird[6] comprender un fenómeno es tener un modelo de él. Cuando una persona explica satisfactoriamente algo a alguien le transmite un plano para la construcción de un modelo. Esas representaciones internas del mundo pueden llevarse a cabo de diferentes maneras, según Bruner y Greenfield podemos hablar de tres modos de "conocer" algo:[7] a través de su ejecución, por medio de una imagen suya o mediante un significado como el lenguaje.

¿Cómo explica el enfoque sociocultural la comprensión del conocimiento matemático?

Una de las principales aportaciones del enfoque sociocultural es la afirmación de Vygotsky de que toda operación mental fue inicialmente una actividad interpersonal. Llamaba a esta afirmación la ley genética general del desarrollo cultural y en ella afirmaba que todas las funciones psicológicas superiores aparecen en dos planos, primero en el interpsicológico (entre aprendiz y adulto) y posteriormente

5. Craik, Kenneth. *The nature of the explanation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1943.
6. Joshson-Laird, F. *Mental models*, Harvard University Press, Cambridge, 1983.
7. Bruner, J. Olver y P. Greenfield. *Studies in cognitive growth*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.

en el intrapsicológico (mental).[8] Esta afirmación general de Vygotsky también es válida para un conocimiento particular, como son las matemáticas. Los primeros conocimientos matemáticos que los niños adquieren se generan a través del conteo de objetos. Esta actividad sólo se da como interacción entre adulto y niño y no podría ser realizada por el niño solo. Lo mismo sucede con el resto de las operaciones aritméticas elementales. El punto a destacar aquí es que las operaciones aritméticas inician como operaciones físicas realizadas por el niño sobre los objetos pero con la guía de un adulto. Posteriormente esas operaciones se vuelven mentales, es decir intrapsicológicas, y el niño puede operar sin ayuda los símbolos que sustituyen a los objetos.

Para Vygotsky el aprendizaje incluye la entrada a la cultura, vía la inducción de un miembro de la misma más capacitado. Refiriéndonos al conocimiento matemático, el adulto guía la atención y la conducta del niño hacia la identificación de las relaciones cuantitativas y hacia la manipulación de cantidades.

De acuerdo con Vygotsky una teoría del desarrollo del niño debe ser necesariamente una teoría del desarrollo de las relaciones interfuncionales entre adulto y niño y su actividad co-constructiva, para Piaget el desarrollo es una consecuencia de la dialéctica entre filogenie y ontogenie, enfatizando así el papel de la maduración y de los aprendizajes del niño a partir de sus acciones sobre los objetos.

Vygotsky y los exponentes posteriores de la escuela histórico cultural insisten en que el desarrollo emerge de la interacción de tres factores fundamentales: filogenie, ontogenie e historia (se da actualmente en forma de cultura). De esta manera señalan que lo "sociocultural se vuelve un

8. Vygotsky, L. "The genesis of the higher mental functions", en J.V. Wertsch (ed.). *The concept of activity in soviet psychology*, Sharpe, Armonk, 1981.

componente irreductible de lo psicológico".[9] Esto significa que el niño no construye el conocimiento matemático pues su vida entera no le alcanzaría para ello, sino que reconstruye este conocimiento ya sea abstrayéndolo de sus acciones sobre los objetos, de distintas operaciones mentales que realiza, o reconstruyendo el conocimiento generado por la cultura a través de representaciones mentales que él elabora. En cualquiera de los casos el niño es guiado por otra persona en este proceso de reconstrucción.

De acuerdo con Barbara Rogoff y Lave esta interacción entre adulto y niño es crucial para que se dé un aprendizaje óptimo,[10] pues los niños rara vez pueden ser responsables, de manera independiente, del descubrimiento de conexiones entre problemas o de transformar el conocimiento para que quepa en un nuevo problema. Los adultos arreglan la ocurrencia de las tareas cognoscitivas para facilitar el aprendizaje de los niños regulando la dificultad de la tarea y modelando una ejecución madura. La presencia de un adulto competente (o un coetáneo más capaz) es también un factor clave para el aprendizaje, pues es éste quien posee el conocimiento generado por la cultura y ayuda al aprendiz en la reconstrucción del mismo presentándole sólo aquellos aspectos relevantes para su aprendizaje, graduándole la dificultad, mostrándole discrepancias para que aumente su conocimiento y tomando la responsabilidad de la actividad para gradualmente dejar que sea el aprendiz quien asuma la responsabilidad completa.

A partir de la afirmación de Vygotsky de que toda actividad mental fue inicialmente una actividad interpersonal y tomando en cuenta lo que dice Rogoff sobre la importancia de la participación de un adulto para facilitar el aprendizaje,

9. Bakhurts, D. y M. Cole. "Introduction: Comparing Piaget and Vygotsky", en *Quarterly newsletter of the laboratory of human conditions*, vol.10, núm.4, octubre de 1988, pp.98-99.
10. Rogoff, Barbara y Jean Lave. *Everyday cognition: Its development in social context*, Harvard University Press, Cambridge, 1984.

podemos enfatizar la importancia de la participación de un adulto en la facilitación del aprendizaje de los niños. Este autor aporta la noción de zona del desarrollo próximo para demostrar cómo los procesos cognoscitivos están mediados por otro miembro de la cultura más capaz. Vygotsky demostró que la capacidad de los niños variaba fuertemente al pasar del trabajo individual al trabajo con la guía de un maestro. Esta diferencia entre la capacidad de resolver un problema de manera independiente y la capacidad de resolverlo con la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz es lo que se denomina zona del desarrollo próximo. Vygotsky define a la zona del desarrollo próximo como:

> [...] la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.[11]

Cuando se le pide a un niño que realice una actividad que puede hacer por sí mismo no es construcción de conocimiento, o dicho en otros términos, no es aprendizaje, sino práctica de lo ya construido. Por otra parte, si se pretende enseñar algo que está fuera de las capacidades actuales del niño sería una pérdida de tiempo pues no le sería posible aprenderlo. Es importante ayudar al niño en la construcción del conocimiento nuevo en su zona del desarrollo próximo para que avance de manera rápida y segura. La zona del desarrollo próximo es dinámica pues por una parte sufre modificaciones en cuestión de segundos posibilitando nuevos aprendizajes y, por otra, el olvido se encarga de hacerla retroceder a niveles previos. El proceso de aprendizaje no es un proceso ascendente, sino recursivo.

11. Vygotsky, L. *El desarrollo...*, *op.cit.*, p.133.

Para trabajar en la zona del desarrollo próximo es indispensable que el maestro posea un excelente dominio de lo que desea enseñar pues sólo así tendrá la posibilidad de situarse continuamente en el nivel de competencia del niño y de responder contingentemente a sus necesidades de ayuda.

Lo anterior significa que es indispensable la participación de otra persona para ayudar a un niño en la construcción del conocimiento matemático. Esta persona, más competente, ayudará al niño a apropiarse de las herramientas creadas por la cultura (sistema numérico, algoritmos, conceptualizaciones, esquemas cognoscitivos, etc). También le arreglará las actividades de tal manera que el alumno sea estimulado en los límites de su capacidad. Además, el adulto le ayudará a generalizar los conocimientos a nuevas situaciones y a relacionar ese conocimiento con otros que ya posee.

En opinión de Vygotsky, la cultura proporciona las herramientas simbólicas necesarias para la construcción de la conciencia y las funciones mentales superiores. Con esta idea Vygotsky se refería fundamentalmente a los símbolos lingüísticos, pero también podemos pensar en otro tipo de herramientas representacionales como acciones, íconos y símbolos.

La posición constructivista estructural de Piaget dice que el concepto de número es el resultado de la construcción de una estructura cognoscitiva basada en la experiencia y la abstracción; por lo tanto no es un esquema intelectual heredado ni una propiedad abstraída de los objetos reales, sino el resultado de una "abstracción reflexiva" de las acciones llevadas a cabo sobre los objetos. Piaget explica el concepto de número como el resultado de la coordinación de acciones tales como la construcción de la correspondencia uno a uno entre conjuntos de objetos o entre relaciones cualitativas, como el añadir o quitar objetos o grupos de objetos.

El psicólogo alemán Peter Damerow critica la posición piagetiana argumentando que su teoría excluye la posibilidad de que la transformación de las estructuras cognoscitivas sea influenciada por las representaciones materiales de las mismas en acciones, dibujos o símbolos, o por otras formas de interacción social mediada por estas representaciones. También critica que Piaget no toma en cuenta los conceptos mediacionales extraídos de la cultura adulta –transmitidos por padres, profesores e incluso experimentadores– y, según Nicolopoulou,[12] erróneamente interpreta todo el desarrollo como epigenético. Damerow considera que parte del desarrollo del individuo debe consistir en el esfuerzo por apropiarse de estructuras cognoscitivas culturalmente desarrolladas. En este punto está más de acuerdo con Vygotsky y la escuela sociohistórica. Damerow añade que la transición hacia las funciones mentales superiores depende de los medios de representación, y como ejemplo habla de las tablas de Uruk (Irak), donde nuevas maneras de representación numérica extendieron las posibilidades de abstracción:

> El ímpetu real para la transición a un sistema numérico semiabstracto en los textos arcaicos fue el cambio en el medio de representación. No hay razón para creer que esta transición fue precedida por un cambio en la estructura cognoscitiva, sino que fue inducida o cuando menos facilitada por la emergencia de un medio representacional más rico y flexible.[13]

---

12. Nicolopoulou, A. "Introduction: The invention of the writing and developmet of numerical concepts in Sumeria: Some implications for developmental psychology", en *Quarterly newsletter of the laboratory of human cognition*, vol.11, núm.4, octubre de 1989, pp.114-124.
13. *Ibidem.*

Jardine y Morgan hacen eco de la filosofía fenomenológica,[14] que afirma que las matemáticas están fundadas en la vida diaria. Compartimos con ellos tal opinión, y con Damerow y la escuela vygotskyana la idea de que los medios culturalmente creados (en este caso la representación) son determinantes para la transición hacia formas superiores de pensamiento. Por lo tanto, la representación en la construcción del conocimiento matemático, así como todo tipo de estructuras cognoscitivas culturalmente desarrolladas deben ser vistas como piezas fundamentales en la enseñanza del mismo.

Vygotsky, en su obra *Pensamiento y lenguaje*,[15] habla de la importancia del pensamiento como instrumento de regulación de la acción. Aquí de nuevo encontramos una diferencia importante entre los enfoques de Piaget y Vygotsky: el primero considera al lenguaje como uno más entre un grupo de sistemas representacionales significativos, mientras que en la teoría de Vygotsky el lenguaje es paradigmático.

Rommetveit también ha subrayado la importancia del trabajo conjunto y señala que cualquier situación,[16] evento y objeto tiene muchas interpretaciones posibles y que el habla sirve para imponer una determinada interpretación y para crear una realidad temporalmente compartida. A este proceso de compartir algunos aspectos de la definición de la situación Rommetveit le llama intersubjetividad.

Al analizar el funcionamiento interpsicológico es necesario utilizar la noción de definición de la situación –la manera

---

14. Jardine, D. y A. Morgan Friffithe. "Analogical thinking in young children and the use of logicomathematical knowledge as a paradigm in Jean Piaget's genetic epistemology", en *Quarterly newsletter of the laboratory of human cognition*, vol.9, núm.4, octubre de 1987, pp.95-101.
15. Vygotsky, L. *Pensamiento y lenguaje*, Ediciones Quinto Sol, México, s/f.
16. Rommetveit, R. "On the architecture of intersubjetivy", en R. Rommetveit y Blakar. *Studies of languaje, thought and verbal communication*, Academic Press, Londres, 1979.

en que se representan o definen los objetos y los sucesos en una situación.[17] Ello permite caracterizar el hecho de que los interlocutores puedan diferir y cambiar sus representaciones del mismo conjunto de objetos y eventos. Dado este hecho, el lenguaje desempeña un papel importantísimo ya que el lenguaje permite crear una realidad temporalmente compartida. De ahí la importancia de la precisión del lenguaje y de un uso especializado de éste en las matemáticas.

En resumen, podemos decir que el conocimiento matemático es una construcción social de una cultura a través de su historia, pero que a su vez tiene que ser reconstruida por cada nuevo miembro de la cultura. Esta reconstrucción del conocimiento recibe la ayuda de otro miembro de la cultura más capaz. Se han identificado diferentes métodos para ayudar en esa construcción.[18] Además de la ayuda de otro más capaz y de la utilización de métodos de ayuda, es indispensable que se dé el proceso que Rommetveit llama intersubjetividad,[19] a través del uso del lenguaje, y que el aprendizaje ocurra en la zona del desarrollo próximo, identificada inicialmente por Lev Vygotsky,[20] y que se utilicen diferentes medios de representación.

A partir de lo anterior resultaría útil tomar en cuenta los siguientes aspectos para una eficaz enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

1. La ayuda del maestro (otros adultos y coetáneos) es la parte central de la enseñanza, la cual ocurre en la zona del desarrollo próximo y se fomenta utilizando diversos medios de ayuda como son la ejecución guiada, la estructuración cognoscitiva, la explicación, etcétera.

---

17. Wertsch, J. *Vygotsky y la formación social de la mente*, Paidós, Barcelona, 1988.
18. Véase: Tharp, R. y Ronald Gallimore. *Rousing minds to life*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
19. Rommetveit, R. *Op.cit.*
20. Vygotsky, L. *El desarrollo de los..., op.cit.*

2. El uso de sistemas representacionales que permitan al alumno tener una imagen clara de los elementos con que está trabajando, las relaciones entre ellos y las operaciones que debe ejecutar con los mismos. Estas representaciones pueden ser concretas, pictóricas o abstractas.
3. Uso de un lenguaje especializado que permita la claridad y precisión al nombrar objetos, algoritmos, operaciones y relaciones.

Dicho lo anterior, en las secciones siguientes se analizarán la importancia del lenguaje, la representación y la mediación de un adulto en la construcción del conocimiento matemático.

El uso del lenguaje en la enseñanza del conocimiento matemático

Como se mencionaba antes, otra de las diferencias importantes entre los enfoques de Piaget y Vygotsky es que el primero considera al lenguaje como uno más entre un grupo de sistemas representacionales significativos, mientras que en la teoría de Vygotsky el lenguaje es paradigmático. Aunque ambos autores comparten la premisa de que el conocimiento es construido activamente por el niño, para Vygotsky una teoría del desarrollo del niño debe ser necesariamente una teoría del desarrollo de las relaciones interfuncionales entre adulto y niño y su actividad co-constructiva, por lo tanto lo sociocultural se vuelve un componente irreductible de lo psicológico.[21]

Autores recientes hacen una distinción entre conocimiento declarativo y conocimiento procesal, teniendo que ver más con el uso del lenguaje el primero y con la ejecución el segundo. De acuerdo con Robert Marzano y colaboradores,[22] el conocimiento declarativo incluye lo que deseamos que los alumnos sepan, hechos, conceptos y principios. El conocimiento procesal es lo que queremos que los alumnos sepan cómo hacer, es decir, procesos y habilidades. La distinción entre conocimiento declarativo y procesal es importante porque adquirimos cada tipo de conocimiento de diferente manera.

Pareciera que con frecuencia en la enseñanza de las matemáticas se enfatiza el uso de procedimientos algorítmicos sin una base conceptual, cayendo así en la repetición de reglas rutinarias, mismas que en un corto plazo se olvidan y que no permiten un aprendizaje adecuado.

---

21. Bakhurst, D y M. Cole. "Introduction: Comparing Piaget and Vygotsky", *op.cit.*, pp.93-99.
22. Marzano, R. y cols. *Dimensiones del aprendizaje*, ITESO, Guadalajara, 1992.

Según Patricia Campbell,[23] el problema con el cálculo que domina el curriculum de primaria es que se enseña como un conjunto de reglas que se repetirán hasta que los alumnos alcancen la repetición por hábito, cuando en su lugar debería enfatizarse la comprensión. Continúa diciendo que para los alumnos menos capaces es muy difícil memorizar datos aislados y procedimientos sin sentido ya que las habilidades de cálculo sin comprensión exigen una enorme cantidad de tiempo de instrucción, energía y persistencia.

Campbell enfatiza que la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en primaria ha producido evidencia convincente de que la comprensión conceptual y de cálculo deben verse como dominios que se apoyan mutuamente, es decir, no hay que enseñar aisladamente los conceptos o los procedimientos, sino que debe señalarse la interrelación entre ellos.

Hatano, en un estudio realizado sobre los estudiantes que iban a clases especiales de ábaco en Japón, encontró que éstos por lo general fracasaban al transferir sus conocimientos de ábaco a lápiz y papel y sugiere que esta instrucción pudo haber fallado porque los alumnos no comprenden el significado de cada paso de la operación en el ábaco.[24] En otras palabras, las operaciones hechas en ábaco por usuarios experimentados es semánticamente opaca, esto es, los símbolos y referentes no están claramente conectados durante la operación. Esta opacidad semántica fue revelada más directamente en las entrevistas acerca de la lógica de los pasos específicos con los niños que aprenden habilidades de ábaco. Las representaciones de números en el ábaco, aunque visibles concretamente, son pobres en significado y la manera de manipulación es mecánica. Considerando la opacidad semántica de las operaciones con ábaco es difícil

23. Campbell, P. y James Fey, "News goals for school mathematic", *op.cit.*
24. Hatano, G. "Two microworlds of computation: How are they related?", en *Quarterly newsletter of the laboratory of human cognition*, vol.11, núm.1/2, enero-abril de 1989, pp.15-19.

pensar que estas prácticas induzcan intuiciones matemáticas,[25] sin embargo estos alumnos tienden a ir bien en las matemáticas escolares principalmente en primaria, y es que el incremento en la habilidad para realizar las operaciones básicas puede permitirles concentrarse en procesos de orden superior, incluyendo el monitoreo de los pasos de las estrategias ejecutivas y el revisar las respuestas.

Por lo que dice Hatano, y aunado a lo que anteriormente veníamos afirmando, los procedimientos pueden aprenderse aun sin el conocimiento declarativo sobre los mismos, pero esta eficiencia en la ejecución de las operaciones, aunque útil porque se pueden obtener buenas calificaciones, puede estar escondiendo deficiencias importantes en la representación mental de las operaciones y en el conocimiento de los principios que gobiernan los algoritmos.

Como se señaló en la introducción, pareciera que una de las dificultades que enfrentan los niños con las matemáticas es el conocimiento procesal, dado que con frecuencia se enseña sin enfatizar la parte conceptual de estos procedimientos, y, dicho con más precisión, la dificultad estriba en que al mismo tiempo deben construirse ambos tipos de conocimiento así como la relación que permita derivar procedimientos a partir de ciertas definiciones, y la relación inversa, es decir la construcción de conceptualizaciones a partir de las propias acciones en las operaciones matemáticas.

A través de este apartado se mostrará cuál es el papel del conocimiento declarativo y del procesal en la construcción del conocimiento y cómo se relacionan ambos tipos de conocimiento. Se presentan extractos de una situación de enseñanza interactiva en la cual se pone de manifiesto la importancia del lenguaje en la enseñanza de las matemáticas. En el trabajo participan un adulto (A) y un niño (N).

---

25. Resnick, L. *Towards the thinking curriculum*, ASCD, Alexandria, 1989.

a. Para construir el conocimiento matemático los niños necesitan saber el significado de una gran cantidad de palabras

Para la construcción de las operaciones matemáticas es indispensable que el niño sepa lo que las palabras significan, pues de otra manera será imposible que ejecute las operaciones. Por esa razón el adulto con frecuencia le pregunta el significado de los términos que se utilizan: (extracto de una transcripción de un adulto trabajando con un niño de 4 años 6 meses).

Transcripción:

A: ¿Qué es una decena?
N: Un conjunto que no tiene nada de sueltos.

Explicación:

El niño entiende la decena en términos de una analogía con un pastor que hace corralitos cada que tiene un nuevo conjunto de diez borreguitos.

Transcripción:

(Una semana después)
A: ¿Qué es una decena?
N: Una cosa que tiene diez cosas.

Explicación:

Una semana después el niño está manejando el término decena de manera más abstracta.

Para poder realizar una resta el niño debe saber qué significa el término "menos".

Transcripción:

A: ¿Qué quiere decir menos?
N: Que le quites.

Explicación:

Aquí el adulto quiere asegurarse de que el niño conozca los términos que se están utilizando y el niño muestra que comprende el significado del término como la operación concreta de quitar.

b. El uso de nuevos términos es útil para expresar nuevas relaciones y para distinguir funciones en las operaciones matemáticas

El niño inventa una palabra para poder describir adecuadamente lo que hace.

Transcripción:

A: ¿Qué se le pone antes de empezar?
N: Su contrincante.
A: ¿Cuál es su contrincante?
N: Pues la otra cosa para saber cuántos son.
A: No te entiendo. Explícame.
N: Los kilos.

Explicación:

El niño está realizando una multiplicación con cierto número de vacas como primer factor y le falta anotar el peso de las mismas como segundo factor. Al no utilizar términos como "conjuntos" y "elementos" ni "factores" ni "multiplicando" y "multiplicador", inventa el término "contrincante".

En una sesión de trabajo posterior el niño de 6 años 6 meses ha ejecutado el algoritmo de la multiplicación y ha obtenido el resultado correcto pero se queja de no haber entendido. Es notorio cómo el lenguaje, incluso el uso de ciertos términos, es indispensable para avanzar en el conocimiento matemático. Se necesitan nuevas palabras para expresar nuevas relaciones. En este caso el adulto introduce el término "factores" para poder explicar la multiplicación y hace uso también de los términos "conjuntos" y "elementos", que el niño recientemente había aprendido:

Transcripción:

A: Mira, no es tan fácil, a ver deja ver si puedo explicarte, vamos a considerar todo el tiempo dos factores.
N: ¿Qué es eso de considerar dos factores?
A: Que en la multiplicación siempre vamos a tener dos cosas, uno el número de conjuntos.
N: Ajá.
A: Y otra el número de cositas que cada conjunto tiene. ¿Cuántos conjuntos hay aquí?
N: Tre... este nueve.
A: Conjuntos.
N: Tres.
A: ¿Cuáles son los conjuntos?
N: Estos.
A: Las bolsitas ¿verdad?
N: Que tienen manzanas.
A: Y ¿cuántos elementos tiene cada conjunto?
N: Tres.
A: Tres, muy bien, esos son nuestros dos factores, un factor son, es el conjunto, no, los conjuntos, y el otro factor son los ¿los qué?
¿Ya me entendió?
N: Ajá.

Explicación:

El niño encuentra dificultades para comprender la multiplicación. El adulto introduce el término "factores" para ayudar al niño en la comprensión de la operación.

c. Con frecuencia el conocimiento procesal se sigue del conocimiento declarativo

En este caso el niño de 6 años conoce los términos unidades decenas y centenas; ha hecho ejercicios de identificación de cada uno de ellos en la escuela. Luego la maestra, para evitar que el niño mecánicamente les pusiera las iniciales c d u a los números, le pidió que anotara primero la d luego la u y finalmente la c.

Transcripción:

> A: ¿Y qué significa descomponer?
> N: Desordenar, y ya no sirve cuando lo desordenas.
> N: Descomponer (significa) que ya no funcione y por eso este número no funciona, y así está descompuesto.
> N: Por ejemplo, si tú inventaras un robot y suponiendo que esto (señala dos módulos de madera) fuera un robot y luego estuviera bien que te ayudara, que sacara por ahí platos y la comida con unas manos y luego los metía pero luego que dejara basura y que a ti no te gustaría, entonces tal vez tu querías descomponerlo.

Explicación:

> Al dialogar el niño con un adulto sobre la descomposición se vio precisado a definir el concepto de descomponer y dijo que consistía en hacer que no sirva, y para explicarlo analoga eso con un robot y menciona como utilidad del procedimiento que si te dicen que descomponga un número ya sabes hacerlo. Por lo anterior, para el niño descomponer una cantidad significaba desordenarla para que ya no fuera la misma.

Aquí resulta muy evidente cómo a partir de la definición que construyó el niño sobre lo que es descomponer, elaboró un procedimiento coherente con el mismo.

d. Se pueden hacer procedimientos sin que se tenga el conocimiento declarativo

El niño puede llevar a cabo una operación de multiplicación y obtener el resultado correcto pero sin tener el conocimiento declarativo de lo que está haciendo.

Transcripción:

A: Ah... a ver ¿cuántos montones tienes?
N: Cuatro.
A: ¿De cuántas canicas?
N: De cuat... de cinco.
A: Entonces eso cómo se dice.
N: Cuatro por cinco igual a, un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, pero ¡todavía no te entiendo!
A: ¿No? ¿Qué es lo que no me entiendes?
N: Lo que tengo que hacer para que me dé el resultado.

Explicación:

El niño puede hacer la operación de multiplicación porque ha aprendido los pasos, sin embargo no puede conceptualizar en qué consiste ese proceso. Afortunadamente en este caso el niño no se conforma con poder ejecutar el procedimiento, sino que se interesa en la conceptualización del mismo.

En otra ocasión el niño había hecho la resta 51-21, se le pide que realice la operación inversa, es decir 30+21; al comprender lo que se le pide da inmediatamente el resultado correcto, pero encuentra mucha dificultad para explicar lo que hizo:

N: Mira, esta es la resta y esto está al revés y entonces nos va a dar el mis... nos va a dar el resultado; pero en la resta éste (el 51) era el símbolo (se refiere a que era el minuendo), pero aquí es lo que tenemos (como resultado) porque ésta es una suma.

Aunque es evidente que el niño puede revertir la operación que anteriormente había hecho, no tiene los conceptos verbales para poder manifestar su pensamiento. Quizá aquí se pueda ver la importancia del lenguaje para poder seguir con el aprendizaje pues sin el lenguaje el adulto no podrá darse cuenta de lo que puede hacer el niño y se quedaría con la impresión falsa de que no puede hacer más.

El adulto parafrasea con mayor precisión lo que el niño ha dicho y éste desea comprobar el resultado. El niño hace la suma y afirma que está comprobado. El adulto pregunta qué comprueba y el niño dice:

Transcripción:

N: Si haces esta resta (51-21) y luego esta suma (30+21) el número al que le teníamos que quitar antes te va a salir de la cantidad (como resultado) y por eso es cincuenta y uno.

Explicación:

Aquí se hace evidente la carencia de etiquetas verbales, lo que impide al niño expresar con claridad su pensamiento.

Aquí el niño, después de comprobar su dicho, intenta explicar con más claridad lo que hizo. También puede notarse que le fue más fácil realizar la operación que explicitar el proceso.

e. El conocimiento declarativo y procesal se determinan recíprocamente y se unen especialmente en las demostraciones

En esta sesión con el niño de 4 años puede apreciarse cómo el conocimiento declarativo y el procesal van estrechamente ligados y parecen determinarse recíprocamente. El niño tiene ante sí dos hileras de fichas de dominó, unas acomodadas de manera horizontal y otras de manera vertical, por lo que las hileras que forman son de diferente tamaño. El niño demuestra que hay la misma cantidad en las hileras, primero cuenta y da el número en cada una de ellas y posteriormente las acomoda en una relación de uno a uno. El niño da razones y describe procedimientos:

A: ¿Cuántas hay?
N: Diez y diez.

A: ¿Dónde hay más?
N: En ni una.
A: ¿En ninguna? ¿por qué?
N: Porque diez y diez.
A: Ah... diez y diez, ¿oye cómo supiste lo qué tenías que hacer para saber dónde había más?
N: Hmm... nada más contarlas.
A: Ah... y ¿ahora qué estás haciendo?
N: ¡Contándolas!
A: ¿Para qué?
N: Para ver si es cierto.
A: Ah... quieres ver si es cierto y les estás dando vuelta, para que también queden horizontalmente aquellas.
N: Sí.

En el siguiente extracto puede notarse cómo el conocimiento declarativo y procesal se encuentran indisolublemente ligados, pues el niño explica lo que hace mientras que ejecuta las acciones para resolver la operación de cuatro por cuatro, que le fue planteada de manera verbal en un ejemplo.

A: No, dime primero.
N: Los de Alan, los de Cice y los de Hugo, y luego los voy a contar y voy a decir que se hicieron tantos.
A: A ver, pero... ¿cuántos son tuyos?
N: Cuatro.
A: ¿Y cómo los vas a poner?
N: Voy a poner cuatro y aquí una R, cuatro U, de Hugo, cuatro C de Cice y cuatro A de Alan.

f. La definición de las operaciones resulta importante para una conceptualización adecuada de los procesos que se realizan

Un grupo de niños que presentaban problemas con las matemáticas escolares y que eran atendidos en el Centro Polanco del ITESO no lograban distinguir cuándo debían realizar la operación de suma, resta, multiplicación o división. Para ayudarles se les enseñó a definir cada una de esas operaciones. Primero se les preguntó qué era una suma; hubo varias respuestas, hasta que alguien dijo que era una operación; entonces se empezó a hablar de lo que era una operación, se habló de los operadores de maquinaria y de autobuses, llegando a la conclusión de que operar significa mover o manipular. A partir de ahí hicieron una distinción entre operación mental y operación física, pues la aritmética puede trabajarse de ambas maneras. Una vez dicho que la suma era una operación se procedió a buscar la función de tal operación; los niños encontraron que servía para juntar montones o puños, luego alguien mencionó que consistía en unir conjuntos, discutieron las diferencias entre montones, puños y conjuntos, descubriendo la utilidad del término conjunto dado que los montones o los puños no pueden ser uno ni cero mientras que el conjunto sí. La conclusión fue que la suma era una operación que consiste en unir conjuntos. A partir de esta definición el resto de las operaciones básicas de la aritmética no representaron dificultad alguna, pues al saber que eran operaciones lo único que restaba era determinar la función de cada una de ellas.

En este procedimiento los niños, con ayuda del maestro, siguieron la manera usual de construir definiciones, es decir encontrar la categoría a la cual pertenece el concepto (en este caso la suma es una operación); encontrada esa categoría, se buscan sus características (que consiste en unir conjuntos) y se verifica que no se confunda con los demás miembros de esa categoría (con las otras operaciones).

Esta actividad fue sumamente útil pues ante problemas que se les planteaban los niños se preguntaban ¿qué tipo de operación debo hacer? o ¿de qué se trata este problema? Sus respuestas eran comparadas con las definiciones y así determinaban el tipo de operación aritmética requerida.

Valga mencionar que esta actividad les sirvió para ampliar la información que tenían pues anteriormente habían hablado de la suma como juntar, de la resta como quitar, de la multiplicación como repetir y de la división como repartir, pero esto no había sido suficiente.

Podemos concluir que el conocimiento declarativo es sumamente importante en la construcción del conocimiento matemático, aun para el manejo eficiente de los algoritmos, por lo que su utilización debería incrementarse. Si la herramienta fundamental en el desarrollo de los procesos de pensamiento es el lenguaje, deberíamos utilizarlo más para la explicitación de conceptos, para la introducción de términos nuevos que representen las experiencias, para explicar ciertos principios y su aplicación en diferentes contextos y que finalmente los algoritmos sean aplicaciones prácticas que tengan su base en una conceptualización clara del fenómeno en cuestión. Es importante evitar la memorización de procedimientos; en su lugar los niños podrían crear modelos mentales de las operaciones que realizan, comprender los conceptos, generalizar los principios subyacentes a la operación y pasar del nivel concreto de las operaciones a la abstracción.

Los algoritmos deben ser presentados de manera lógica y deben ser verificados muchas veces (aunque sea en formas elementales) por los niños antes de que se utilicen de manera descontextualizada (en el sentido vygotskyano del término), y para esto el conocimiento declarativo es muy importante, primero como descripción y luego como explicación.

También hemos visto que para que el niño pueda determinar las relaciones de los objetos entre sí y de éstos con sus acciones necesita tener palabras precisas para nombrar los objetos, su función, la categoría a la cual pertenecen, las relaciones y las acciones que realiza sobre ellos. Los niños pueden pensar más de lo que expresan, por lo que el desarrollo del lenguaje es primordial para el aprendizaje de las matemáticas.

Sugerencias para la enseñanza:

- Proporcionar herramientas verbales, es decir enseñar las palabras necesarias para nombrar acciones, operaciones, relaciones, etc., que permitan la identificación inicial, la operación de símbolos y finalmente la comunicación del resultado.
- Exigir un uso preciso del lenguaje, es decir utilizar las acepciones matemáticas de las palabras distinguiéndolas de otras acepciones cotidianas pero menos precisas de las mismas.
- Pedir continuamente explicación conceptual de los procesos seguidos para que el niño conceptualice adecuadamente.
- Pedir al niño que elabore algoritmos a partir de las conceptualizaciones matemáticas que haya construido.
- Utilizar problemas matemáticos que incluyan el contexto y los personajes conocidos por el niño.
- Ayudar al niño a definir conceptos clave en términos de género próximo y diferencia específica.
- Pedir al niño describir verbalmente los problemas.
- Dialogar con el niño acerca de conceptos y operaciones antes de que inicie la resolución del problema.
- Alentar al niño a utilizar la descripción y la explicación tanto de sus aciertos como de sus errores.
- Plantear discrepancias que ayuden a resaltar los aspectos críticos o centrales del problema.

La representación en el aprendizaje de las matemáticas

La representación tiene un papel importante en la construcción del conocimiento matemático, pues todas las cuestiones aritméticas tratan sobre objetos, eventos, acciones y de las relaciones entre ellos, de manera tal que el conocimiento matemático es una representación simbólica de los mismos. Esta representación simbólica no se da de manera automática, sino que el niño tiene que aprender un código en términos del cual representará sus experiencias. Los niños representan sus experiencias aritméticas de distintas maneras: con objetos concretos y acciones, con íconos, con imágenes visuales mentales y con símbolos.

Inicialmente los niños hacen representaciones concretas en donde un objeto (una ficha por ejemplo) representa otro (una manzana). Estas representaciones iniciales gradualmente se van transformando y pasan a ser representaciones pictóricas y/o simbólicas. También sucede con frecuencia que cuando el niño se encuentra trabajando con símbolos decide hacer una representación pictórica o concreta para poder comprender la operación que está realizando. Es importante mencionar que todas estas transiciones están mediatizadas por el lenguaje en mayor o menor medida.

Sobre la representación Bruner dice que hay tres tipos:[26] enactiva (objetos y acciones), icónica (dibujos e imágenes mentales) y simbólica (números en el caso de las matemáticas), y éstas tienen un efecto profundo en la vida intelectual de los individuos.

El psicólogo alemán Peter Damerow[27] considera que parte del desarrollo del individuo debe consistir en el esfuerzo por apropiarse de estructuras cognoscitivas cultural-

---

26. Bruner, J. Olver. y P. Greenfield. *Studies cognitive growth, op.cit.*
27. A. Nicolopoulou, "Introduction: The invention of writing and the developmental psychology", *op.cit.*, pp.114-124.

mente desarrolladas y que la transición hacia las funciones mentales superiores depende de los medios de representación. Como ejemplo habla de las tablas de Uruk (Irak), donde nuevas maneras de representación numérica extendieron las posibilidades de abstracción.

Alrededor del año 8500 a.C., en Uruk, se utilizaban fichas para llevar la contabilidad. Estas fichas eran de barro y tenían distintas formas geométricas (esféricas, cilíndricas, cónicas, etc.). Las fichas representaban tanto ciertos objetos naturales como productos o animales. Utilizadas en un contexto particular expresaban el tipo de producto, y el número de ellas, la cantidad. Por ejemplo, cada ficha de cierto tipo representaba a cada animal de un rebaño. Si nacía un animal se agregaban fichas, si se perdían o se mataban algunos se retiraban las fichas correspondientes. También se movían las fichas de un lugar a otro para indicar que ciertos animales se habían cambiado de un pastor a otro.

Alrededor de 3500 a.C. las fichas sufrieron un cambio radical indicado por la proliferación de marcas en su superficie. En este periodo las fichas se ponen en pequeñas vasijas del tamaño de una pelota de tenis y se sellan para que su transporte sea seguro. Estos contenedores se llevaban para realizar transacciones comerciales. Cuando había una disputa se rompía el contenedor para contar las fichas, pero hecho esto ya no era de utilidad para validar la transacción. De ahí surgió otra fase, se marcaba el contenido en la superficie del contenedor imprimiendo la forma de las fichas en el barro, por lo que ya no era necesario abrir el contenedor. Al hacer esto se daba un sistema doble: las inscripciones y el contenido. Dado lo inútil de tener esta duplicidad, el sistema se cambió por unas tablillas planas con inscripciones. Posteriormente se anotaron caracteres ideográficos y se llegó a tener 60 de ellos.

Damerow afirma que debido al cambio en el tipo de representación utilizada (marcas en lugar de objetos) se dio una transición a sistemas numéricos semiabstractos. No hay razón para creer que la transición fue precedida por un cambio en la estructura cognoscitiva de los individuos o una expansión de la técnica aritmética. Dicho de otra manera, este cambio conceptual, ocurrido hace 5,500 años, podría no haberse originado por un desarrollo en el sistema cognoscitivo de los humanos, sino que pudo deberse a que hubo un cambio en la manera en que las personas representaron la información numérica. Ese cambio en el sistema de representación pudo dar origen a un cambio en la capacidad de abstracción de la humanidad.

Probablemente la aparición de las fichas de barro fue para solucionar problemas prácticos de cantidad. La invención de un nuevo medio de representación permitió que se cristalizaran tanto el concepto de número como las operaciones aritméticas, llegando a grados que previamente hubieran sido imposibles. De acuerdo con Damerow, el uso de fichas de arcilla para representar números y realizar operaciones aritméticas incluye el uso de representaciones primarias que coordinan acción y cognición directamente.

Podríamos decir que los símbolos utilizados acentuaron los aspectos cuantitativos de los objetos pero también retuvieron algunas características mínimas, ya que representan objetos específicos del mundo real. Esta esquematización de objetos ayuda a producir un mundo en miniatura o "microcosmos", que crea su propio espacio de operación al permitir que se realizan acciones directas sobre los objetos simbólicos. Manipular los símbolos es más fácil que manejar los objetos naturales, y su propósito principal es registrar en el microcosmos (sistema numérico) los cambios que ocurren en el macrocosmos (el mundo real).

Con esta nueva manera de representación se da un cambio en la cognición pues empiezan a operarse las cantidades en un nivel cada vez más simbólico.

Los niños, en su desarrollo ontogenético, también pasan por ciertos estadios en el uso de medios de representación;

desde las operaciones con objetos concretos, pasando al uso de representaciones pictóricas y adquiriendo una cada vez mayor habilidad para la representación simbólica. Estas transiciones en el uso de medios de representación en los niños debería graduarse adecuadamente si queremos que se dé un verdadero aprendizaje.

En una investigación sobre la construcción del conocimiento matemático dos niños pequeños utilizan el lenguaje como medio para dirigir y regular las transiciones entre los diferentes tipos de representación.[28] Durante el trabajo pudo observarse con frecuencia cómo inicialmente con el niño pequeño (4 años) era indispensable la representación física de los eventos. Posteriormente se podía pasar a la representación pictórica o simbólica, pero cuando se encontraban dificultades en la operación con símbolos era necesario regresar a la representación física o, cuando menos, a la elaboración de una representación pictórica que dotara de sentido a los símbolos numéricos.

Algunos ejemplos del uso de la representación por parte de los niños son los siguientes:

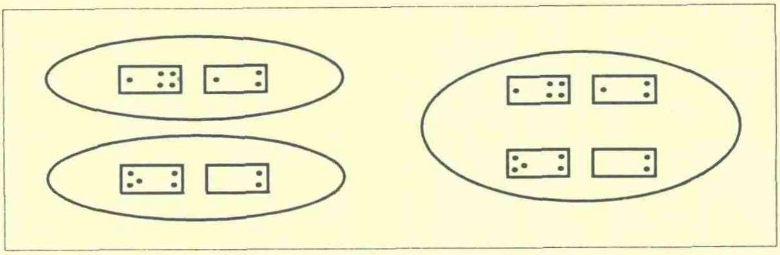
Representación enactiva

Un niño de 4 años tiene fichas para realizar operaciones aritméticas, el adulto le dice que suponga que tiene tres fichas y que le regalan dos más. El niño hace dos conjuntos con dos y tres fichas, respectivamente (1). El adulto le pregunta cuánto es y el niño une los conjuntos y los cuenta (2).

---

28. Gómez, L. *La construcción del conocimiento matemático: Análisis de la interacción entre adulto y niño desde una perspectiva genética, constructivista y social*, tesis de maestría, ITESO, 1992.

Figura 1

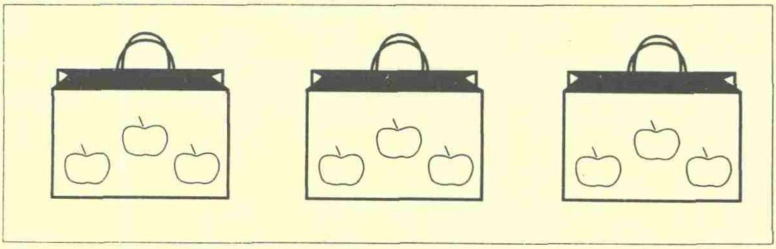


Aquí la representación es enactiva dado que el niño ejecuta las acciones directamente sobre objetos físicos. Se realizó una operación física de suma.

Representación pictórica

El adulto plantea al niño de 6 años el siguiente problema: ¿Cuánto es 3 por 3? El niño dibuja tres bolsas transparentes y les dibuja tres manzanas dentro a cada una.

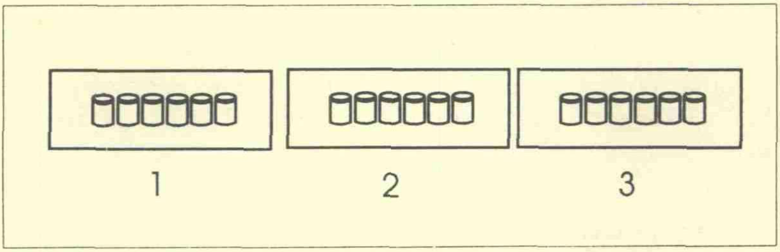
Figura 2



En el ejemplo anterior el niño no realiza la operación sobre los objetos físicos sino que los dibuja y a partir de esa representación plantea la operación de multiplicación como reiteración de una cantidad y cuenta el número de objetos dibujados.

El adulto plantea al niño de 6 años el siguiente problema: Un borrachito tomó 18 cervezas y ahora desea saber cuántos *six pack* ha consumido. El niño dibuja dieciocho cervezas y las agrupa en conjuntos de seis y cuenta los conjuntos.

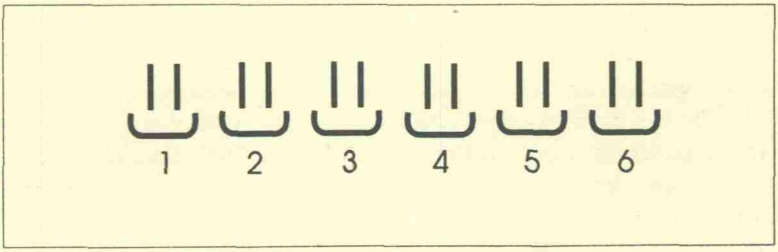
Figura 3



En este ejemplo, como en el anterior, aunque el niño prescinde de los objetos concretos, necesita una representación pictórica para tener una idea clara de lo que debe hacer. Agrupa los dibujos de las cervezas en conjuntos de seis y así obtiene el resultado de la división. En este caso opera la división agrupando las representaciones icónicas.

Un adulto plantea a un niño de seis años el siguiente problema: En la zapatería hay doce zapatos sin caja y la empleada desea saber cuántos pares son. El niño dibuja líneas verticales en lugar de los zapatos, une los pares con una línea horizontal y los cuenta.

Figura 4

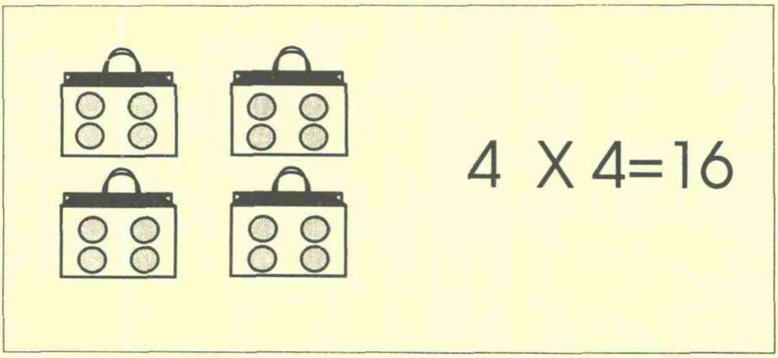


Este ejemplo sigue siendo pictórico, sin embargo ya son sólo marcas las que representan a los zapatos, podríamos decir que se va acercando más a lo simbólico.

Representación simbólica

El adulto plantea a un niño de 6 años el siguiente problema: Tenemos 4 bolsas y cada bolsa tiene 4 panes, ¿cuántos son en total? El niño los dibuja primero, luego escribe 4x5 y da el resultado.

Figura 5



Otro tipo de representaciones simbólicas más abstractas son las matrices de doble entrada que se presentan en la siguiente página. Estas matrices proporcionan toda la información acerca de los datos aritméticos básicos.
En estas tablas encontramos los resultados de la suma y la multiplicación en la intersección de cualquier par de números de la columna y la fila. Además, en la fila o la columna encontramos el resultado de la división de cualquier número que se encuentre en la intersección de éstas. En el caso de la resta se sigue el mismo procedimiento que en la división.

MATRIZ DE SUMA Y RESTA

+/-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	10

MATRIZ DE MULTIPLICACION Y DIVISION

X/%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si los niños llegan a manejar estas representaciones tendrían el conocimiento de las operaciones básicas de la aritmética.

Podemos concluir que la representación desempeña un papel muy importante en la construcción del conocimiento matemático y que la transición entre los distintos tipos de representación sigue cierto curso de desarrollo. Debe enfatizarse que no es posible que en el curso de la vida de un individuo pueda reconstruirse todo el conocimiento y las representaciones que la humanidad ha construido en milenios. Por tal razón es necesaria la transmisión de las representaciones creadas culturalmente cuidando que el niño pueda reconstruir el proceso evolutivo involucrado en su creación. Finalmente, valga recalcar que no todas las construcciones matemáticas son producto del desarrollo, sino creaciones de la cultura trasmitidas de generación en generación.

Durante la enseñanza de las matemáticas sería útil tomar en cuenta lo siguiente:

- Al inicio de la enseñanza enfatizar el uso de objetos concretos sobre los cuales el niño ejecute fisicamente las operaciones y permitirle el uso de los dedos para contar.
- Cuando el niño domine la ejecución de operaciones fisicas sobre objetos concretos, se le pedirá de manera gradual que resuelva problemas aritméticos imaginando mentalmente los datos del problema o dibujándolos en su cuaderno.
- Cuando el niño logre lo anterior con cierta facilidad, se le pueden empezar a plantear problemas aritméticos en forma simbólica, es decir utilizando sólo números y otro tipo de signos.
- Si el niño encuentra dificultades al realizar una operación sería conveniente sugerirle regresar a otro de los tipos de representación para que comprenda mejor la estructura de la operación que el problema requiere.

La mediación de un adulto en la construcción del conocimiento matemático

En esta sección se comentará acerca de la manera de ayudar al niño en la construcción del conocimiento matemático con las aportaciones que proporciona la teoría sociocultural del desarrollo cognoscitivo. Estas aportaciones señalan directrices generales, así como maneras específicas de apoyar la enseñanza.

Según Vygotsky toda operación mental fue inicialmente una actividad interpersonal. Llamaba a esta afirmación la ley genética general del desarrollo cultural. En ella afirmaba que todas las funciones psicológicas superiores aparecen en dos planos, primero en el interpsicológico y posteriormente en el intrapsicológico.[29] De ahí podemos desprender la idea de que el conocimiento aritmético debe construirse de manera interpersonal, es decir el aprendiz debe realizar la operación externamente con ayuda de alguien más capaz para que posteriormente la operación pase a ser intrapersonal y el niño la ejecute en la mente.

De acuerdo con Vygotsky, el aprendizaje de los niños se da a través de la interacción con otra persona más capaz. Para que este aprendizaje ocurra es necesario que el aprendizaje se dé en la zona del desarrollo próximo que anteriormente habíamos mencionado. Es decir un adulto guía al niño en la adquisición de nuevos aprendizajes, planteándole situaciones que sean un reto para su capacidad actual pero que pueden ser resueltas exitosamente por el niño gracias a la ayuda que el adulto le proporciona. Esta transición de la ejecución ayudada a la ejecución sin ayuda no es abrupta, Tharp y Gallimore señalan que hay varias etapas en esta transición hacia la ejecución autónoma.[30] En la primera

29. Vygotsky, L. "The genesis of higher mental functions", *op.cit.*
30. Tharp, R. y Ronald Gallimore. *Rousing minds to life, op.cit.*

etapa la ejecución del niño es ayudada por otros más capaces. En la segunda etapa la ejecución es ayudada por el niño mismo a través de autoinstrucciones. En la tercera etapa la ejecución del niño se ha vuelto automática. Algunas veces las habilidades automatizadas se olvidan y entonces se da la cuarta etapa, la desautomatización de la ejecución y el retorno a la etapa uno.

De acuerdo con Rogoff y Lave[31] los niños rara vez pueden ser responsables, de manera independiente, del descubrimiento de conexiones entre problemas o de transformar el conocimiento para que quepa en el nuevo problema. Los adultos arreglan la ocurrencia de las tareas cognoscitivas para facilitar el aprendizaje de los niños regulando la dificultad de la tarea y modelando una ejecución madura. En la medida en que el niño va aprendiendo el maestro va dejándole la responsabilidad de la actividad hasta que el niño la asume completamente. Los adultos también regulan la dificultad de la tarea y modelan una ejecución madura. Rogoff y Lave[32] citan el trabajo de Wertsch y Stone de "la instrucción proléptica", proceso en el cual el aprendiz ejecuta aspectos simples de una tarea dirigido por un experto. Al ejecutar la tarea bajo la guía del experto el aprendiz participa en la creación del conocimiento contextual relevante para la tarea y adquiere algo de la comprensión que el experto tiene del problema y de la solución. La enseñanza proléptica contrasta tanto con la explicación, donde el adulto habla acerca de la tarea en lugar de guiar al niño, como con la demostración, donde el profesor hace la tarea en lugar de involucrar al niño en la acción. La instrucción proléptica integra la explicación y demostración con un énfasis en la participación del aprendiz en la actividad instruccional.

31. Rogoff, B. y Jane Lave. *Everyday cognition: Its development in social context*, *op.cit.*
32. *Ibidem.*

Como afirman Duffy y Roheler,[33] la enseñanza es mucho más que poner a los alumnos a realizar tareas y organizar los contenidos en ciertas maneras. También y básicamente es una interacción cognoscitiva entre alumno y maestro, principalmente cuando se trata de desarrollar una comprensión conceptual en lugar de respuestas automáticas.

Otro aspecto importante durante la enseñanza de la aritmética es la comunicación y el papel del lenguaje. Rommetveit ha subrayado que cualquier situación, evento y objeto tiene muchas interpretaciones posibles, y que el habla sirve para imponer una determinada interpretación y para crear una realidad temporalmente compartida.[34] A este evento de compartir algunos aspectos de la definición de la situación, Rommetveit le llama intersubjetividad.

Puesto que un adulto y un niño que operan en la zona del desarrollo próximo a menudo aportan diferentes definiciones de la situación en una tarea determinada, pueden enfrentarse a serios problemas para establecer y mantener la intersubjetividad. Para el adulto el reto está en encontrar el modo de comunicarse con el niño, de manera que éste pueda participar, por lo menos mínimamente, en el funcionamiento interpsicológico y pueda, finalmente, definir la situación de un modo culturalmente apropiado. Durante las primeras fases del desarrollo no es posible crear la intersubjetividad al nivel de formulaciones verbales de las definiciones abstractas de la tarea.[35] Contrariamente, la comunicación debe basarse en signos referidos al propio contexto. Esta comunicación, que opera con base en un nivel mínimo de definición de la situación compartida (es decir de la intersubjetividad), constituye la base para la transición al funcionamiento interpsicológico.

33. Duffy, G. y L. Roheler. "The subtleties of instructional mediation", en *Educational Leadership*, vol.43, núm.7, abril de 1986, pp.23-27.
34. Rommetveit, R. "On the architecture of intersubjetivity", *op.cit.*
35. Wertsch, J. *Vygotsky y la formación social de la mente, op.cit.*

Como objetivo final en el proceso de aprendizaje de la aritmética tenemos el que el niño internalice las operaciones que ha ejecutado exteriormente con la ayuda del adulto. Por ejemplo, si el niño con ayuda de un adulto puede unir ocho conjuntos con seis elementos cada uno, y puede contarlos y dar una respuesta, ahora deseamos que pueda hacer él solo esta operación, ya sea física o mentalmente. A este proceso le llamamos internalización. Piaget y Vygotsky, aunque de acuerdo en lo esencial de este proceso, tienen algunas divergencias.

Tanto Piaget como Vygotsky concebían la internalización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasa a ejecutarse en un plano interno; sin embargo, a diferencia de Piaget, Vygotsky definía la actividad externa en términos de procesos sociales mediatizados semióticamente, y argumentaba que las propiedades de esos procesos proporcionan la clave para entender la aparición del funcionamiento interno.

El interés de Vygotsky en los procesos sociales lo llevó a examinar los sistemas de representación necesarios para participar en dichos procesos; de aquí su énfasis en la internalización del discurso. Por el contrario, el énfasis de Piaget en la interacción del niño pequeño con la realidad física lo llevó a examinar los sistemas de representación necesarios para manipular objetos. Como resultado, Piaget concebía la internalización básicamente en términos de esquemas que reflejan las regularidades de la acción física de los individuos. De esta manera, y aunque ambos autores trataron el tema de la internalización, sus ideas diferentes sobre los orígenes de los procesos psicológicos humanos los llevaron a centrar su análisis sobre actividades y medios de representación distintos.

De acuerdo con Wertsch[36] el proceso de internalización consiste en una serie de transformaciones:

---

36. *Ibidem.*

a. Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente.
b. Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal.
c. La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos.

El concepto de internalización es muy importante en la construcción del conocimiento matemático, pues ayuda a comprender cómo se forman los procesos psicológicos en los individuos y dirige la atención hacia los aspectos socioculturales de la educación, ayudando así a no caer en el error de creer que el niño puede aprender de su experiencia directa del mundo sin otro humano que le transmita las adquisiciones de su cultura. Es importante aclarar que sí puede aprender directamente de la experiencia, pero enfatizamos que la mayor parte de nuestro conocimiento es culturalmente trasmitido y que esa transmisión nos capacita para posteriormente aprender directamente de nuestro entorno y enriquecer así la cultura.

Finalmente valga recalcar que Vygotsky defendía la existencia de una relación inherente entre la actividad externa y la interna, pero en forma de una relación genética en la que el punto principal es cómo son creados los procesos psicológicos internos como resultado de la exposición del niño a lo que Vygotsky denominaba "formas culturales maduras de comportamiento".[37]

A partir de lo anterior se pueden hacer las siguientes sugerencias:

37. Zinchenko, V. "Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind", en J.V. Wertsch. *Vygotsky and the social formation of mind*, Harvard University Press, Cambridge, 1985.

- El aspecto clave en la enseñanza es la interacción entre adulto y niño; primero se construyen las operaciones externamente entre ambos, para que posteriormente sean realizadas internamente por el niño.
- La enseñanza se da únicamente en la zona del desarrollo próximo, que se determina por lo que el niño no puede hacer solo pero sí con la ayuda de otra persona más competente.
- Es importante programar adecuadamente las actividades que se den a los niños cuidando que vayan de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto y de lo trivial a lo controversial. Es decir, es muy importante regular la dificultad de la tarea.
- El aprendizaje debe ser trascendente, es decir debe ayudar no sólo a resolver el problema inmediato, sino permitir la resolución de problemas que puedan presentársele posteriormente.
- El adulto debe modelar la ejecución madura para que el alumno gradualmente llegue a dominarla de la misma forma.
- Inicialmente el adulto debe asumir la responsabilidad de que la actividad se realice correctamente, y de manera gradual irá dejando al alumno la responsabilidad de la actividad.
- El adulto debe asegurarse de que él y los alumnos estén hablando exactamente de lo mismo, es decir que se dé esa realidad momentáneamente compartida que llamamos intersubjetividad.
- El adulto debe proveer práctica que permita que la operación que él ha ayudado a que se realice externamente sea internalizada por parte del alumno.

Propuesta

Se propone un tipo de enseñanza que permita una conceptualización amplia, conjuntamente con los procedimientos algorítmicos, puesto que sólo con una conceptualización del número y una comprensión del porqué de las operaciones y de los procedimientos algorítmicos los niños podrán aplicar el conocimiento matemático como una herramienta para la solución de problemas. La conceptualización matemática y las operaciones aritméticas deben presentarse como aspectos complementarios del estudio matemático. Además, el maestro debe procurar, tanto como sea posible, que las situaciones matemáticas sean primeramente investigadas con modelos concretos, en preparación para la utilización en situaciones más poderosas pero más abstractas y simbólicas. Más adelante sería esencial enfatizar que las matemáticas consisten en temas interrelacionados, no en una colección de reglas aisladas.

El maestro debe promover que todos los alumnos tengan la habilidad de representar la estructura de los eventos aritméticos a través de modelos verbales, manipulativos o pictóricos y de traducir esos modelos a expresiones matemáticas.

Necesita haber una interacción más activa entre maestro y alumno, pues a partir de esta interacción el niño se apropiará de las herramientas creadas por la cultura para desarrollar más su razonamiento matemático.

Apéndice

Evaluación del proceso y producto de una intervención correctiva para la enseñanza de las matemáticas en niños de primaria

El problema

Carlos es un niño de 10 años que cursa el cuarto grado de primaria y fue remitido a un centro de educación especial por presentar dificultades de aprendizaje principalmente en el área de matemáticas.

Se le aplicó una prueba de inteligencia en la que demostró poseer habilidades intelectuales ligeramente superiores al promedio. En la evaluación pedagógica de matemáticas se le presentó el siguiente problema: En la granja del tío Arturo hay 32 gallinas y 8 puercos. Si queremos saber cuántas patas de animales hay, ¿qué tenemos que hacer? Su respuesta inmediata fue: 42 patas de animales. Al preguntarle cómo lo supo, dijo que pensando, y fue repasando en voz alta: como las gallinas tienen dos patas y son 32 por todas... entonces son más... 72... y los puercos.... 32, ah no, son más. ¿Cuántas? Unas 92.

La respuesta es incorrecta pero bastante aproximada. Todo esto lo hizo sin utilizar lápiz ni papel. Se le pidió que lo hiciera en el papel y puso una división: 32/2 y dijo que era para saber cuántas son. Se le cuestionó y se le pidió que dijera si el problema se podía resolver con una suma, una resta, una multiplicación o una división. Contestó que con una resta, luego que con una multiplicación y por último pareció completamente confundido.

En otra parte de la evaluación se le dictaron operaciones. Así escribió y resolvió una suma y una resta:

1435 +	573 -
128	32 =
395 =	253
6665	

Sin embargo, cuando se le pedía que hiciera operaciones similares mentalmente, sus respuestas, aunque inexactas, eran mucho más aproximadas y mostraba un procedimiento correcto para sumar y restar que ciertamente no era el algoritmo formal enseñado en la escuela.

La pregunta que surge es por qué un niño que tiene una inteligencia normal y buenas habilidades de cálculo mental –de lo cual dio muestras en muchas ocasiones– tiene tales dificultades con el aprendizaje formal de las matemáticas. Piaget lo planteó de la siguiente manera: Es difícil imaginar cómo estudiantes que se desenvuelven bien cuando se trata de elaborar y utilizar su inteligencia espontánea se ven limitados para comprender una enseñanza (las matemáticas) que se refiere exclusivamente a lo que se deriva de tales habilidades.

Este problema no es privativo de Carlos. Es algo que desafortunadamente se vuelve ordinario en nuestras escuelas; es un problema que afecta a una gran cantidad de niños y que se traduce en baja eficiencia del sistema educativo, ya sea por reprobación o por bajar los estándares de rendimiento escolar, lo que a su vez tiene un efecto en cascada que llega hasta el nivel universitario, en donde se encuentran estudiantes que no pueden reconocer la igualdad entre 8+8+8+8+8 y 5x8.[1]

Entre los errores más comunes observados en los niños se encuentran el escribir los números como suenan, por ejemplo 537 lo escriben como 50037. De manera inversa, suelen leer números como el 40083 como 483, y en general

1. Tirado Segura, F. "La crítica situación de la educación básica en México", en *Ciencia y Desarrollo*, núm.71, 1986, pp.81-94.

tienen muchas dificultades para leer números que tienen ceros intermedios. También suelen alinear mal los sumandos o el minuendo y el sustraendo, como en el ejemplo anterior, hacen sumas en diagonal, tienen muchas dificultades con las operaciones en las que hay que llevar y no saben qué hacer cuando encuentran ceros en los números con los que están haciendo una operación.

Además de estos errores, no se saben las tablas, cometen errores al contar, hacen tanteos muy gruesos (como la primera respuesta de Carlos al problema de las gallinas y los puercos) y no existe una comprensión de los principios básicos del conocimiento matemático, por ejemplo los que se refieren al sistema decimal. En efecto, muchos niños afirman que el 3 de 735 es más grande que el 3 de 382 porque el primer número es mayor que el segundo. Otra manifestación de sus dificultades es la escisión entre sus procedimientos informales de cálculo y los formales. Así, pueden dar dos soluciones completamente distintas a un mismo problema sin que la contradicción les haga revisar algún procedimiento. O sea, es perfectamente legítimo llegar a soluciones diferentes puesto que se usan procedimientos distintos.[2]

Estas dificultades las encontramos en niños que tienen "problemas de aprendizaje" y que suelen ser referidos a centros que atienden este tipo de problemas. Sin embargo, de acuerdo con Ginsburg y Allardice, este tipo de errores se presentan en casi todos los niños cuando están aprendiendo el conocimiento formal de las matemáticas, o para decirlo de manera más sencilla, las matemáticas escolares, y conforme van avanzando en su escolaridad van haciéndose menos frecuentes. En el caso de los niños con problemas de aprendizaje son más persistentes y existe el riesgo de que se vuelvan más difíciles de superar si no se interviene a tiempo.

---

2. Ginsburg, H.P. y B.S. Allarddice."Children's difficulties with school mathematics", en Rogoff, B. y J. Lave. *Everyday cognition: Its development in social context*, Harvard University Press, Cambrigde, 1984.

¿Qué es lo que provoca este problema? Dentro del campo de la educación especial, diversos autores afirman que el problema es complejo y lo causan muchos factores. Reissman y Kaufman los agrupan en cuatro clases: cognitivos, psicomotores, fisicosensoriales y socioemocionales. Algunos autores subrayan unos más que otros, por ejemplo Johnson, Bley y Thornton les dan mucho peso a los factores perceptomotrices. En síntesis, se puede afirmar que para estos autores las causas de las dificultades están en el mismo niño que las presenta, en lo que pudieran llamarse deficiencias o déficits en "habilidades básicas", condiciones de disposición, prerrequisitos para aprender o disfunciones de índole diversa.[3]

Aunque este punto de vista tiene gran arraigo y apoyo en la práctica de la educación especial, no deja de ser incompleto o parcial a la luz de una teoría sociocultural del desarrollo cognoscitivo y, por tanto, del aprendizaje. Desde este punto de vista lo que hay que enfatizar son los aspectos sociales de la transmisión-construcción de conocimientos o, en otras palabras, la manera como se enseñan las matemáticas en las escuelas. Planteado de otra manera, podría preguntarse por qué los niños aprenden procedimientos informales –bastante eficaces en ocasiones– para resolver problemas y operaciones matemáticas y tienen tanta dificultad para aprender los procedimientos formales. No se puede afirmar que los primeros sean innatos, sino que de alguna manera son transmitidos socialmente y aprendidos. Tenemos que pensar entonces que las pedagogías no escolares son más eficaces que las escolares. Por tanto, habría que hacer estudios comparativos entre los procesos de aprendizaje escolares y los no escolares.

3. Gearheart, B. *Incapacidad para el aprendizaje*, El manual moderno, México, 1987.

Este es un campo en el que falta mucha investigación. En un estudio reciente acerca de la práctica de maestros (as) en la enseñanza de las matemáticas se presenta la opinión de tres maestras sobre qué es lo más importante respecto de este tópico. Una de ellas afirma: [...] para mí lo básico de las matemáticas son las tablas de multiplicar y las operaciones básicas, división, multiplicación, suma, resta. Ya de ahí depende todo lo demás, fracciones, problemas, todo, todo, todo." Las otras dos opiniones son bastante similares.[4]

Es claro que este tipo de concepciones del profesor, tan restrictivas, no facilitan el que el alumno construya conocimientos matemáticos significativos y bien fundamentados, ni que el maestro eche mano de recursos más amplios y poderosos que la repetición y la práctica mecánica.

Las consecuencias en términos de rendimiento escolar son nefastas. Un estudio publicado en 1991 mostró que el 83.7% de los alumnos de primaria y el 96.2% de los alumnos de secundaria obtuvieron notas reprobatorias en una prueba de conocimientos.[5] No es posible afirmar que tales porcentajes de alumnos tengan problemas de aprendizaje. Se impone claramente revisar las prácticas de enseñanza y proponer modelos de intervención educativa con base en teorías bien fundamentadas y que tomen en cuenta al alumno y su contexto psicológico y social.

No se trata de enfatizar sólo los aspectos "técnicos" del conocimiento y la enseñanza de las matemáticas, sino también los componentes afectivos y emocionales implicados en cualquier situación de aprendizaje, pero que suelen ser más patentes y perturbadores en el caso de las matemáticas.

El estilo cognoscitivo, el papel de la metacognición, el tomar en cuenta el potencial de aprendizaje, el estilo de

4. Méndez Balderas R. "Algunas concepciones de los maestros en la enseñanza de las matemáticas", en *Cero en conducta*, año 6, núm.25, mayo-junio de 1991.
5. Guevara Niebla, G. "México ¿un país de reprobados?", en *Nexos*, núm.162, junio de 1991, pp.33-44.

enseñanza mediacional, son elementos a tomar en cuenta en el diseño de intervenciones a este nivel.[6]

Se requiere mucha investigación en este campo. Acerca de cómo construyen los niños el conocimiento matemático y cómo y por qué se atoran en este proceso constructivo; también en la línea de la evaluación y desarrollo de programas de intervención en los que se busque instrumentar alguno de los principios señalados anteriormente.

El presente estudio se ubica en este contexto. Aunque es un trabajo con niños que tienen dificultades en el aprendizaje, la intervención está basada en principios que son aplicables en otros escenarios educativos y pretende hacer aportaciones a la creación de ambientes educativos más eficaces.

Descripción del programa

Datos generales

El programa lo iniciaron 11 niños, todos ellos remitidos al Centro Polanco del ITESO por dificultades en el aprendizaje escolar. De los 11 que iniciaron sólo terminaron siete. Dos de los desertores dejaron de asistir al programa durante las primeras cinco sesiones y los otros dos lo hicieron durante el segundo mes del mismo.

El programa se extendió por 34 sesiones, que se efectuaban a razón de dos por semana y cuya duración oscilaba entre hora y media y dos horas.

Previa al inicio del programa, se efectúo una entrevista a las madres de estos niños y a éstos se les aplicaron dos pruebas: la prueba SOI de habilidades de aprendizaje[7] y una

6. Ginsburg, H.P. y B.S. Allardice. *Op.cit.*
7. Meeker, Mary. *Structure of intelect. Learning abilities test.* La edición en español es de 1984.

"Evaluación pedagógica de matemáticas" elaborada por la Dirección General de Educación Especial de la SEP.

Los sujetos

Como ya se indicó, los sujetos que asistieron durante todo el programa fueron siete, cuatro niñas y tres niños. Tres tenían ocho años, dos tenían nueve y los otros dos, once. Cuatro cursaban el tercer grado de primaria, uno estaba en cuarto, otro en quinto y el restante en segundo. Cuatro habían repetido por lo menos una vez algún año escolar y los demás no eran repetidores. En promedio, los niños presentaban un año de desfase entre su edad cronológica y su edad escolar.

La "Evaluación pedagógica de matemáticas"

Esta prueba explora los siguientes campos del conocimiento matemático: sistema decimal, operaciones, fracciones, sistema de medidas, noción de tiempo, solución de problemas, simetría, líneas, y perímetro, superficie y volumen. Se utilizó la versión correspondiente al segundo ciclo, que es la que usualmente se aplica a los niños que cursan el tercero o cuarto grado de primaria.

Más que una cuantificación de lo que el niño sabe o no sabe, la prueba persigue una apreciación cualitativa acerca de qué tan bien están construidas las nociones que explora. Por lo mismo, no tiene un formato rígido y se aplica de manera interactiva. El aplicador no sólo plantea las situaciones de la prueba, sino que también cuestiona, confronta, repregunta, da ejemplos e incluso puede facilitar la respuesta. La condición es que lleve un registro exacto del curso de estas interacciones, para luego hacer una interpretación adecuada sobre las nociones revisadas.

Sin embargo, también se pueden cuantificar las respuestas del sujeto. De hecho, para este reporte se decidió hacer una cuantificación, considerando si la primera respuesta del sujeto a las diversas preguntas era correcta o incorrecta. Las respuestas se agruparon en las siguientes categorías:

1. Conocimiento de números
2. Comparación de cantidades
3. Antecedentes y consecuentes
4. Transformación de cantidades
5. Solución de problemas
6a. Dictado de operaciones
6b. Solución de operaciones
7. Noción de fracción
8. Operaciones con fracciones
9. Medidas
10. Noción de tiempo
11. Simetría

Las cuatro primeras corresponden al campo de sistema decimal y las demás corresponden a los otros campos que explora la prueba. De la cuantificación se eliminaron los aspectos de líneas y perímetro, superficie y volumen, porque el primero no se aplicó y el segundo era prácticamente ignorado por la totalidad de los niños.

Supuestos del programa

1. *El niño*

Supuesto:

1.1 Las necesidades de seguridad emocional, aprecio positivo y respeto afectan el aprendizaje del niño.

Sugerencias:

a. Dar al niño un trato personal.
b. Informarle que está permitido cometer errores.
c. Recalcar sus respuestas acertadas.

d. Dirigirse al niño siempre por su nombre.
e. Señalar los errores del niño con brevedad, ayudándole a encontrar la falla y señalando que los errores pueden permitirnos nuevos aprendizajes

Supuesto:

1.2 El sentirse competente hace que el niño se sienta motivado a realizar la tarea y a correr riesgos en el aprendizaje.

Sugerencias:

a. Utiliza las respuestas acertadas del niño y su trabajo en general para ayudarle a mejorar su autoestima.
b. Gradúa la dificultad de la tarea y utiliza problemas concretos, sobre todo en las fases iniciales de un proceso.
c. Pide a los niños que planteen sus propios problemas.
d. Ayuda al niño a estimar el resultado antes de que haga el cálculo preciso.
e. Enseña al niño a evaluar sus propios razonamientos y operaciones.

Supuesto:

1.3 Los niños tienen experiencias con las relaciones cuantitativas y éstas pueden ser simbolizadas.

Sugerencias:

a. Partir de la experiencia del niño.
b. Pedir continuamente que el niño dé ejemplos.
c. Ayudar al niño a expresar de manera simbólica lo que ha dicho de manera lingüística.
d. Pedir al niño que plantee problemas.

Supuesto:

1.4 La motivación es un aspecto importante en el aprendizaje.

Sugerencias:

a. Fomentar la motivación intrínseca ayudando al niño a tener logros en la tarea.
b. Enfatizar el que el niño descubra reglas y principios.
c. Relacionar el aprendizaje con las experiencias e intereses del niño.
d. Asegúrate de plantear problemas que estén dentro del nivel de competencia del niño para que tenga éxito.
e. Plantea problemas que sean un reto para el niño pero que no lleguen a causarle frustración.
f. Realiza prácticas que incluyan juegos.

Supuesto:

1.5. Para que el conocimiento sea significativo debe tener una utilidad práctica.

Sugerencias:

a. Ayudar al niño a comprender la utilidad de la aritmética.
b. Plantearle problemas similares a los que el niño encuentra en la vida diaria.
c. Ayudar al niño a comprender la utilidad futura de estas habilidades en su desempeño académico.
d. Ayudar al niño a encontrar problemas cuantitativos en situaciones de la vida diaria.
e. Procura llegar a razonamientos abstractos que permitan al niño comprender el poder de las matemáticas como instrumentos generales para resolver problemas cuantitativos.

Supuesto:

1.6 No es suficiente con que el niño comprenda, es importante que internalice y automatice los procedimientos.

Sugerencias:

a. Proveer práctica suficiente para que el niño internalice los procedimientos.
b. Hacer variaciones en los problemas que se le presenten.
c. Plantear de manera recurrente problemas con la misma estructura a través de un período de tiempo largo.
d. Fomenta la representación física y el uso de los dedos para contar.
e. Haz câlculo mental.
f. Utiliza las tablas de Pitágoras.

2. *La construcción interpersonal del conocimiento*

Supuesto:

2.1. Los humanos aprendemos primordialmente de otros humanos.

Sugerencias:

a. Trabajar de manera interactiva con el niño la mayor parte del tiempo.
b. Permitir que los niños trabajen en grupo.
c. Ayudar al niño, inicialmente, a hacer las operaciones, guiando tú el proceso.

Supuesto:

2.2 Las experiencias de aprendizaje mediado ayudan al niño a avanzar en el conocimiento.

Sugerencias:

a. Tener claro el proceso que deseas enseñar.
b. Ayudar al niño a comprender el principio o regla subyacente a toda una serie de problemas similares y no limitarte a ayudarlo a resolver el problema presente.
c. Trabajar en la zona del desarrollo próximo del niño.
d. Jerarquizar las tareas de sencilla a compleja y dividirla en partes.
e. Enseñar al niño a buscar la información relevante.

Supuesto:

2.3 La enseñanza ocurre en la zona del desarrollo próximo.

Sugerencias:

a. Ayudar al niño cuando no pueda realizar solo su trabajo.
b. Cuando el niño ya sepa bien un proceso, dejarlo que practique solo y ayudar al que esté encontrando dificultades.
c. Ayudar al niño en el nivel que él lo requiera.

Supuesto:

2.4. La explicitación de los procedimientos seguidos y de los principios aplicados incrementa el conocimiento de las matemáticas.

Sugerencias:

a. Pedir explicaciones de lo que el niño hace.
b. Ayudar al niño a descubrir las reglas y principios.
c. Pedir al niño que plantee un problema donde pueda utilizarse la regla recién aprendida.

Supuesto:

2.5 El maestro debe responsabilizarse del aprendizaje de los alumnos regulando el ritmo, la secuencia y la complejidad del mismo.

Sugerencias:

a. Organizar el trabajo de tal manera que vaya de lo simple a lo complejo y de lo concreto a lo abstracto.
b. Descomponer las actividades difíciles en partes.
c. Pasar gradualmente la responsabilidad al alumno.
d. Promover una gran cantidad de práctica con variaciones.
e. Ayuda al niño a representar gráfica o simbólicamente los problemas aritméticos.

Supuesto:

2.6 Es preferible que mediante la participación guiada el niño descubra un principio a que éste le sea enseñado directamente por el maestro.

Sugerencias:

a. Diseñar actividades para propiciar el descubrimiento.
b. Ayudar al niño a que encuentre la relación entre los datos de un problema.
c. Plantear reiteradamente problemas con la misma estructura para guiar al niño hacia el descubrimiento de los principios que los gobierna.

3. *Los medios de ayuda*

Supuesto:

3.1 Los medios de representación desempeñan un papel crucial en la comprensión.

Sugerencias:

a. Ayudar al niño a representar los problemas matemáticos antes de intentar su resolución.
b. Modelar la representación de los problemas.

Supuesto:

3.2 Comprender es construir modelos simbólicos, pictóricos o enactivos de los objetos, eventos y sus relaciones.

Sugerencias:

a. Pedir al niño representaciones, enactivas, pictóricas y simbólicas de los eventos.
b. Modelar el uso de los distintos tipos de representación.

Supuesto:

3.3 La cultura posee herramientas para resolver problemas numéricos, mismas que el niño necesita.

Sugerencias:

a. Enseñar principios.
b. Enseñar nemotécnicas.
c. Enseñar maneras de representación.
d. Enseñar vocabulario.
e. Ayudar a clasificar
f. Ayudar a deducir, etcétera.

Supuesto:

3.4 Las matemáticas requieren del niño un vocabulario especializado.

Sugerencias:

a. Ayudar al niño a que comprenda las relaciones numéricas utilizando términos que le sean comunes.

b. Substituir términos poco precisos por otros de mayor precisión.
c. Ayudar al niño a dar nombre a cada proceso, a cada operación y a cada parte de la misma.
d. Enfatiza la interacción verbal y que el niño proporcione explicaciones de sus razonamientos y acciones.

Supuesto:

3.5 El niño aprende las conductas cognoscitivas que observa en el adulto.

Sugerencias:

a. Modela la conducta cognoscitiva que deseas que el niño siga.
b. Habla en voz alta mientras resuelves un problema.
c. Comenta qué harás para solucionar el siguiente problema.

Supuesto:

3.6 Para facilitar la enseñanza, el adulto debe distinguir entre el conocimiento declarativo y el procesal.

Sugerencias:

a. Separa lo que es conocimiento declarativo de lo que es el conocimiento procesal.
b. Haz que el niño memorice el conocimiento declarativo y haga práctica del conocimiento procesal.
c. Pide al niño que explique los procedimientos en términos del conocimiento declarativo.

Supuesto:

3.7 La reflexión es un aspecto importante en la construcción del conocimiento matemático.

Sugerencias:

a. Pedir a los niños que piensen las respuestas antes de contestar.
b. Ante una pregunta, elegir a uno de los niños sólo hasta que todos tengan la mano levantada.
c. Pedir las razones que avalan su respuesta.
d. Es mejor que el niño aprenda los principios que gobiernan la solución de problemas que la mera ejercitación en el uso de algoritmos.

Supuesto:

3.8 Es mejor el aprendizaje de principios que la mera ejercitación de los algoritmos.

Sugerencias:

a. Pedir al niño explicaciones de las operaciones que realiza.
b. Enfatizar los aspectos de comprensión.
c. Pedir al niño que describa el proceso que va a seguir antes de realizarlo.
d. Demostrar los principios que queramos enseñar y pedir al niño que los explique.

Supuesto:

3.9 La memoria desempeña un papel importante en el aprendizaje.

Sugerencias:

a. Ayudar al niño a hacer buenas representaciones para que no olvide la información.
b. Enfatizar el uso de la escritura para no olvidar.
c. Ayudar al niño funcionando como banco de información.

Supuesto:

3.10 Es importante que el niño conozca las características del sistema numérico decimal.

Sugerencias:

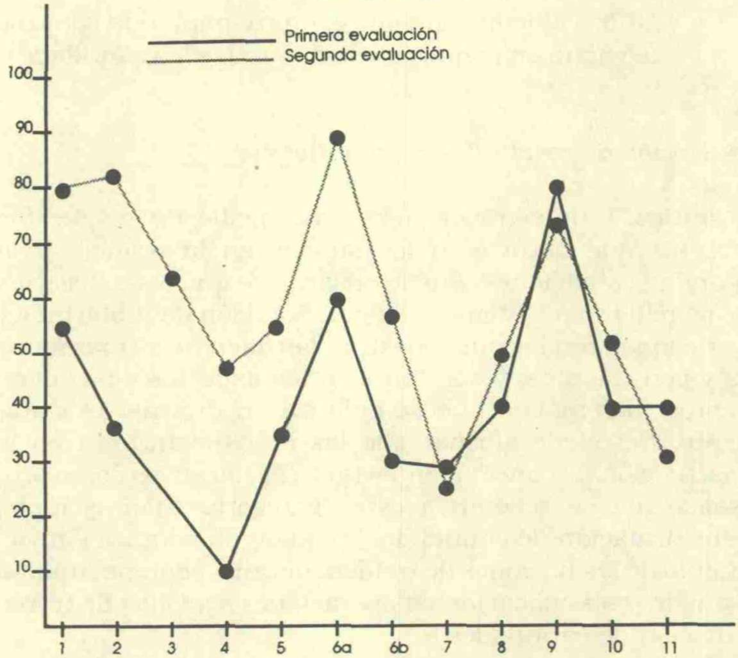
a. Explica la decimalidad del sistema numérico.
b. Ayuda al niño a comprender la posicionalidad del sistema numérico.
c. Utiliza objetos para que el niño comprenda cómo se agrupan en conjuntos de diez todas las cantidades.

Descripción de resultados cuantitativos

La gráfica 1 muestra el porcentaje medio de respuestas correctas que obtuvieron los sujetos en la primera y la segunda evaluaciones. Puede observarse que las categorías que se refieren a Sistema Decimal, Solución de Problemas y Operaciones son las que muestran las diferencias más grandes y consistentes, y son también lcs aspectos del conocimientos matemático que se enfatizaron durante el tratamiento. Se puede afirmar que los niños avanzaron en la construcción de conocimientos tanto declarativos como procesales que se refieren a estas categorías. Por ejemplo, "transformación de cantidades" requiere la adquisición y el dominio de las nociones de unidad, decena, centena, unidad de millar, y su aplicación en operaciones sencillas de transformación de cantidades.

En el resto de las categorías hubo incrementos y decrementos, pero ni unos ni otros pueden considerarse importantes. Las nociones matemáticas bajo estas categorías no se trabajaron en las sesiones de tratamiento porque se le dio más énfasis a las nociones básicas. Sin embargo, entre la primera y la segunda evaluación transcurrieron más de 6 meses, durante los cuales los niños asistieron a sus respectivas escuelas, donde, de acuerdo con los programas oficiales, debieron haber abordado estas nociones. Los resultados observados llevan a la conclusión de que o no se trabajaron en sus salones de clase o la manera en que se hizo no fue productiva, al menos para estos niños.

Gráfica 1



1. Conocimiento de número
2. Comparación de cantidades
3. Antecedente y consecuente
4. Transformación de cantidades
5. Solución de problemas
6a. Dictado de operaciones
6b. Solución de operaciones
7. Noción de fracción
8. Operaciones con fracciones
9. Medidas
10. Noción del tiempo
11. Simetría

En la prueba SOI de habilidades de aprendizaje no se obtuvieron diferencias importantes entre la primera y la segunda evaluación, excepto en las dos subpruebas en que se manejan contenidos numéricos, a saber, una prueba de memoria de números (MSU) y una en la que se tienen que resolver series numéricas (CSS). Ambos incrementos reflejan la mayor familiaridad que adquirieron los niños para el manejo de contenidos numéricos.

Discusión del proceso

1. Fue difícil realizar trabajo grupal dado que al efectuarse tal tipo de trabajo parecía que no nos dirigíamos a nadie. Las preguntas, si eran fáciles, despertaban conductas impulsivas en donde todos querían dar la respuesta. Si la pregunta era difícil nadie pensaba, rayaban el cuaderno y hacían otras. Si se le preguntaba a alguien en particular, esa persona respondía pero el resto del grupo se desentendía y no escuchaba las aportaciones.
   Hubiera sido deseable que se hubiera insistido más en la interacción verbal y en la participación colectiva, quizá en un inicio mediante juegos y competencias.
2. El trabajo individual fue muy bien aceptado por los niños. Les agradaban los ejercicios preparados que se les entregaban y pedían ayuda individualmente. En esta asesoría individual ponían mucha atención y se mostraban interesados.
3. La cantidad de trabajo realizado cambió con el transcurso del tiempo; al inicio se encontraban cansados después de una hora de trabajo y se les permitía hacer juegos educativos que no tenían que ver con las matemáticas. Posteriormente les poníamos juegos matemáticos y finalmente no utilizamos juegos.

4. Otro cambio importante observado fue el cambio en la impulsividad. Inicialmente los niños cubrían su cuaderno para que los otros no vieran, se burlaban cuando alguien no sabía y casi no exhibían conducta cooperativa. Posteriormente exhibían un poco más de conducta cooperativa, pero ésta consistía en dar las respuestas correctas. Al final, Martha podía ayudar haciendo preguntas y guiando el proceso. Martha y Pedro mostraban mucha impulsividad y competitividad. En una ocasión, al inicio, los pusimos de parejas a jugar a resolver sumas sencillas, por ejemplo (6+3); dada su competitividad y conducta impulsiva, se enojaron y terminaron sin jugar. La mamá de Pedro reportó que en su casa temían que llegara a volverse loco porque lo veían que se arrastraba por la casa, no tenía orden, iba mal en la escuela, no obedecía, etc., pero gradualmente el comportamiento de Pedro fue cambiando y disminuyó notoriamente la conducta impulsiva.

5. Hubo un cambio también en el conocimiento de los niños.

    a. Martha sabía hacer sumas sencillas, no sabía las tablas, no sabía las series numéricas, no sabía resolver problemas planteados oralmente, se equivocaba en la utilización de la decimalidad y tenía bajas calificaciones en la escuela en esta materia. La maestra decía que iba a reprobar. Martha mostró mucho interés en el aprendizaje y continuamente pedía que se le pusiera más trabajo que al resto del grupo. Gradualmente mejoraron sus calificaciones en la escuela y fue notorio su avance dentro del grupo. Hacia el final ella ayudaba a sus compañeros, mostraba menos impulsividad y podía hacer multiplicaciones, sumas, restas, divisiones y problemas verbales. Sabía las tablas muy bien. Utilizaba el sistema numérico decimal. En una de las últimas sesiones comentó que en la prueba había sacado 9.5 en el área de matemáticas pero que en las otras materias no le fue bien porque no le gustaban. Comenta la secretaria del Centro Polanco que Martha le pagaba y le decía cuánto debía recibir de cambio.

b. Pedro también tenía pocos conocimientos. Se le dificultaban las series numéricas del dos en delante, no sabía las tablas, no sabía sumar ni restar cuando necesitaba "llevar" y no sabía multiplicar ni dividir, aunque ya lo había visto en la escuela. En la escuela iba reprobando en matemáticas. En una ocasión la maestra pidió una evaluación nuestra porque con la que le habían hecho en la escuela iba a reprobar. Posteriormente el niño iba mejor en la escuela y el avance era notorio; se sabía bien las tablas, comprendía la suma, resta, multiplicación y división, y aprendió a comprobarlas.

c. Mary parecía tener algunas dificultades de aprendizaje y, como consecuencia, algunos problemas emocionales. Al estar trabajando a veces hacía comentarios fuera del tema, como que era muy burra, que no aprendía, que la regañó la maestra, etc. Aprendía a hacer los algoritmos pero la parte conceptual se le dificultaba. En una ocasión la maestra nos mandó decir que ya iba bien en aritmética, que ahora la ayudaran a mejorar su lectura. Hacia el final Mary trabajaba mejor, aunque su comprensión conceptual no iba al mismo nivel que su capacidad para realizar los algoritmos. Mary parecía contenta con sus logros y continuamente hacía referencia a lo valioso de la ayuda que recibía.

d. Aracely. Desde el inicio Aracely tenía mayores conocimientos que el resto de los niños. Era muy callada. Con frecuencia dejaba de trabajar, al parecer por cansancio. Su comprensión parece ser buena. Durante el transcurso de las sesiones fue haciéndose más ágil y cada vez se le tuvo que pedir menos que continuara trabajando. En ella, aunque la mejoría fue evidente, el cambio no fue tan grande como en los otros niños.

e. Alfonso es otro niño de los que tenían escaso conocimiento matemático, al grado de que se le dificultaba la serie del uno cuando era inversa y todas las series, menos la del uno, cuando eran ascendentes. Es un niño muy introvertido que rara vez habla. Se le insistió mucho en su participación y la fue aumentando, pero la familia tuvo un problema y el niño dejó de ir un tiempo, cuando regresó su nivel de participación bajó. La familia no ayudaba a que el niño practicara lo aprendido.

f. Adriana. Quizá fue quien menos sabía matemáticas, se le dificultaba aun la serie ascendente del uno y difícilmente escribía números mayores de 10. Su progreso fue muy grande. Trabajaba bien, principalmente la representación de los problemas aritméticos que se le planteaban. Aprendió a sumar, restar, multiplicar y dividir, pero no aprendió las tablas (esta era una actividad para hacer en casa, por lo que no podía hacer operaciones si no tenía a la mano las tablas de multiplicar). A pesar de sus avances notorios, éstos fueron insuficientes para aprobar su curso escolar. Nos informó que en la escuela le dijeron que repetiría el año.

g. Desde el inicio, Chuy tenía el nivel de conocimientos más alto de todo el grupo; su nivel de impulsividad era alto y quizá sea ésta la dificultad principal que presente. El progreso en él no fue tan notorio como en otros niños, dado que él ya sabía bastante; sin embargo, debido a su impulsividad, hace las cosas antes de reflexionar y es probable que otros niños del grupo obtuvieran una mejor calificación que él en una prueba.

6. Tratamos todo el tiempo de que los ejercicios respondieran al nivel de sofisticación y a la necesidad inmediata. Por lo que en cada ocasión diseñábamos las actividades de acuerdo con las nuevas necesidades. Con frecuencia regresábamos a nociones anteriores para integrar mejor el conocimiento.

7. A pesar de que fue muy bueno el haber diseñado los ejercicios en cada ocasión, quizá hubiera convenido más tener un cuaderno con ejercicios, definiciones, ejemplos, procedimientos, etc., y que en el trabajo individual fueran avanzando según el ritmo personal pero en el trabajo grupal llevar el nivel general que el grupo tuviera, así hubiéramos logrado tanto el trabajo interactivo como el trabajo individual, para que cada uno marchara a su propio ritmo.

8. De entre las actividades, resultaron útiles las competencias que hacíamos de series numéricas antes de aprender las tablas:

- Los juegos para aprender hechos numéricos.
- Las actividades de representación de los problemas.
- Los ejercicios con problemas planteados verbalmente.
- Los ejercicios de identificación de las partes de la resta y la prueba de la misma.
- Las tablas de Pitágoras.
- El cálculo mental.

9. Parece que el clima del grupo era un clima afectivo, de respeto pero con límites claros.

Conclusiones

Como se muestra, el programa produjo los resultados esperados. Podemos destacar los siguientes puntos:

1. Pareciera que el ayudar a los niños a representar los problemas aritméticos de diferentes maneras les permitía comprender la estructura de los mismos, lo cual a su vez facilitaba la elección del algoritmo a utilizar. Pudo observarse la diversidad de métodos empleados por los niños durante el trabajo. Mientras que un niño representaba todos los eventos con pequeños círculos o rayitas, otros utilizaban el papel perforado de las hojas de computadora, alguien más representaba pictóricamente y había quien necesitara representar físicamente el problema y físicamente realizar la operación.

2. El hecho de pedir un lenguaje preciso permitió que los niños pudieran identificar las partes de los problemas y los algoritmos, y que pudieran comunicar con precisión sus dudas, sus discrepancias y sus resultados. En el siguiente extracto de una sesión se muestra cómo la definición de las operaciones fundamentales de la aritmética permitió que pudieran identificar con facilidad el algoritmo que debían utilizar en cada problema:

Maestra:	¿Qué es la suma?
Tere:	Es una operación.
Maestra:	¿Qué significa operación?
	(risas, comentarios de qué es lo que hacen los médicos).
Maestra:	¿Han escuchado que alguien opera algún aparato, o que es operador de alguna cosa?
Isela:	Mi papá es operador de una máquina de esas que aplanan cuando ponen el pavimento.

Arturo: También hay operadoras de máquinas de coser en los talleres.

Maestra: ¿Qué creen que signifique operar?

Tere: Manejar una máquina.

Maestra: ¿Sólo manejar máquinas?

Arturo: También manejar barrigas (risas).

Maestra: Sí, manejar máquinas, instrumentos y objetos es operar. En las matemáticas ¿qué se opera?

Tere: Cosas.

Jorge: Números.

Maestra: Sí, en las matemáticas operamos objetos o conjuntos de objetos, y a eso le vamos a llamar operación física. Y ¿cómo podemos llamarle a la operación que hacemos dentro de la cabeza sin operar los objetos reales?

Alonso: Operación mental.

Maestra: Entonces las operaciones las podemos hacer de manera física, con objetos, o de manera mental. ¿Qué es la suma?

Magda: Es la operación de unir objetos.

De esta manera continuó el diálogo en torno a si eran objetos, puños, montones, grupos o conjuntos. Precisaron que el mejor término a utilizar sería el de conjuntos y llegaron a las definiciones.

3. El aspecto central del trabajo fue la realización de trabajo interactivo que permitía trabajar con el grupo o de forma individual, de manera que cada niño recibiera ayuda en la cantidad y con la sofisticación necesaria, es decir continuamente se trabajó en la "zona del desarrollo próximo" de cada uno de los participantes. Aunque inicialmente los niños preferían trabajar de manera individual, gradualmente fueron aceptando el trabajo interactivo, tanto con el maestro como entre ellos.

La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo se terminó
de imprimir en marzo de 1997 en los talleres
de Conexión Gráfica, S.A. de C.V., Libertad 1471,
Guadalajara, Jalisco, México.
La edición consta de 500 ejemplares.
Cuidado de edición: Hilda Elena Hernández
Diseño: Hattie Ortega
Tipografía y formación: Laura Michel
Oficina de Extensión Universitaria del ITESO
Tel: (91-3)669-34-80, fax: (91-3)669-34-81

Análisis recientes acerca de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas norteamericanas han concluido que los alumnos no están adquiriendo las habilidades y la comprensión que necesitarán para participar de manera eficiente en los ambientes culturales, económicos y políticos del futuro. En México los estudios señalan que el 84% y el 96% de los alumnos de primaria y secundaria, respectivamente, obtuvieron notas reprobatorias en una prueba de conocimientos; incluso los estudiantes de la universidad continúan adquiriendo conocimientos que corresponden a los niveles básicos de educación.

Ante ese problema, el enfoque sociocultural del desarrollo cognoscitivo presenta una buena alternativa a la eseñanza tradicional de las matemáticas.

Luis Felipe Gómez es licenciado en Psicología, con especialidad en Desarrollo Cognoscitivo, y maestro en educación por el ITESO. Ha realizado estudios de desarrollo de habilidades del pensamiento en diferentes universidades del país y ha asesorado escuelas en la instrumentación de nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje. Actualmente es profesor investigador en el ITESO.