

УДК 681.758

В.Г. Колобродов, Г.С. Тимчик, М.С. Колобродов  
 Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

### МЕТОДИЧНА ПОХИБКА ОПТИЧНОГО СПЕКТРОАНАЛІЗАТОРА

**Background.** Coherent optical spectrum analyzers are widely used in information processing systems. The principle of operation of spectrum analyzers is based on the scalar theory of Fresnel diffraction, which approximately describes the propagation of light in the paraxial range. This article examines the systematic error of the optical spectrum analyzer, which is caused by the Fresnel approximation.

**Objective.** The aim is the investigation of the optical spectrum analyzer systematic error, which is caused by the Fresnel approximation, to determine the allowable errors of measurement of the spatial frequency of the signal spectrum.

**Methods.** On the basis of physical and mathematical model of coherent spectrum analyzer systematic error in determining the spatial frequency is investigated, which arises as a result of the transition from the propagation of light in free space to the Fresnel diffraction.

**Results.** An equation for calculating the absolute and relative measurement errors depending on the angle of diffraction of light is obtained, which allowed us to determine the limits of the spectral range for a given relative error of measurement of the spatial frequency. It is found that the Fresnel approximation within the diffraction angle from  $0^\circ$  to  $10^\circ$  provides a relative error less than 1,5 %. At the same time at a diffraction angle of  $20^\circ$ , it is 6,4 %.

**Conclusions.** There are fundamental limits to investigation of the application limits of the scalar theory of Fresnel diffraction, which determine the spatial range, where is the Fresnel equation. At the same time, there is no investigation of the optical spectrum analyzer systematic error, which is caused by the Fresnel approximation. An equation for the absolute systematic error of measurement of the spatial frequency, depending from elements parameters of the spectrum analyzer is obtained. This equation can be used to optimize the parameters of the spectrum analyzer, as well as to compensate for systematic error by the computer processing of the output signal of the spectrum analyzer.

**Keywords:** optical spectrum analyzer; Fresnel diffraction; spatial frequency; frequency measurement error.

#### Вступ

Когерентні оптичні системи для спектрального аналізу просторових сигналів давно вже відомі в класичній оптиці, а широкі їх застосування в радіолокації, метрології, мікробіології тощо стало можливим у зв'язку з бурхливим розвитком лазерної техніки [1]. Теоретичні основи роботи спектроаналізаторів базуються на рівнянні дифракції Френеля, яке наближено описує поширення світла в параксіальній області [2]. Існує низка монографій і статей, присвячених фізичним основам роботи когерентних (лазерних) спектроаналізаторів, а також методам проектування оптичних систем, покладених в основу таких спектроаналізаторів [3–7]. У той же час відсутні дослідження похибок вимірювання спектрів сигналів, які зумовлені наближенням Френеля.

#### Постановка задачі

У роботі досліджується методична похибка оптичного спектроаналізатора, яка зумовлена наближенням Френеля, з метою визначення допустимих похибок вимірювання просторової частоти в спектрі сигналу.

#### Фізико-математична модель оптичного спектроаналізатора

Узагальнена схема оптичного спектроаналізатора складається з когерентного джерела випромінювання, вхідного транспаранта, Фур'є-об'єктива і аналізатора світлового поля. Якщо транспарант розміщений у передній фокальній площині Фур'є-об'єктива і освітлюється плоскою хвилею з амплітудою  $V_p$  (рис. 1), то розподіл амплітуди поля в площині аналізу описується виразом [4]

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4)\right] dx_2 dy_2, \quad (1)$$

де  $t_o(x_2, y_2)$  – функція амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта;  $f$  – фокусна відстань об'єктива.

Розглянемо перетворення Фур'є двовимірної функції  $t_o(x_2, y_2)$ :

$$T_o(v_x, v_y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp[-j2\pi(v_x x_2 + v_y y_2)] dx_2 dy_2, \quad (2)$$

де  $v_x, v_y$  – просторові частоти.

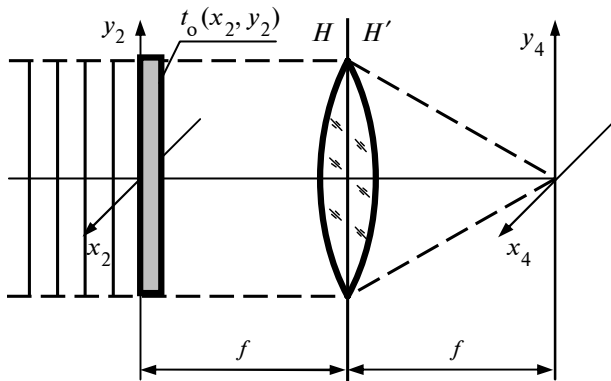


Рис. 1. Оптична схема когерентного спектроаналізатора, коли транспарант розміщений у передній фокальній площині об'єктива

Із порівняння виразу (1) з перетворенням Фур'є (2) випливає такий важливий висновок, що комплексна амплітуда світлового поля у задній фокальній площині лінзи з точністю до сталого множника  $\frac{V_p}{j\lambda f}$  являє собою просторовий спектр від амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта з просторовими частотами:

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda f}; \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda f}. \quad (3)$$

### Обмеження при дифракції Френеля

В основі скалярної теорії дифракції лежить рівняння Кірхгофа, яке дає змогу знайти амплітуду поля  $V(P_0)$  у довільній точці  $P_0$  за екраном, якщо відома амплітуда поля  $V(P)$  в отворі екрану [3, 4]:

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) dS, \quad (4)$$

де  $r = P_0P$  – відстань між точками  $P_0$  і  $P$ ;  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}$  – кут між вектором  $\mathbf{r}$  і нормаллю до екрана;  $\Sigma$  – площа отвору;  $k$  – хвильове число.

Рівняння (4) для випадку, коли екран розміщений у площині  $xu$ , а точка  $P_0$  – у площині  $x_0y_0$ , яка паралельна площині  $xu$  і розташована на відстані  $z$  від неї (рис. 2), визначається рівнянням дифракції Релея–Зоммерфельда:

$$V(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) h(x, y; x_0, y_0) dx dy, \quad (5)$$

де  $h(x, y; x_0, y_0)$  – вагова функція дифракції Релея–Зоммерфельда:

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}); \quad (6)$$

$$r = P_0P = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2}}. \quad (7)$$

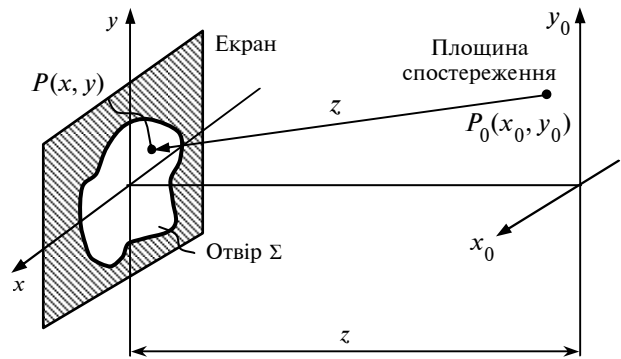


Рис. 2. Схема дифракції Френеля

Щоб спростити обчислення інтеграла (5), Френель запропонував такі наближення:

1) розмір отвору в екрані набагато менший за відстань  $z$  між площинами  $xu$  та  $x_0y_0$ ;

2) дифракція спостерігається біля центра системи координат  $x_0y_0$ , розміри якої набагато менші за відстань  $z$ .

За таких наближень можна вважати, що  $r = P_0P \approx z$ , а  $\cos(\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) \approx 1$ . Слід також зазначити, що в показнику експоненти у виразі (6) не можна замінити  $r$  на  $z$ , оскільки при цьому виникає значна фазова похибка. Наприклад, якщо  $r = z + \Delta z$ , то  $kr = kz + k\Delta z$ . За  $\Delta z = 1$  мм і  $\lambda = 0,5$  мкм,  $k\Delta z = 400\pi$  рад.

Цю похибку можна зменшити, якщо подати вираз (7) у вигляді степеневого ряду та обмежитися двома членами ряду. Скористаємось розкладом функції  $\sqrt{1+t}$  у ряд:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \dots, \quad (8)$$

тоді

$$r \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]. \quad (9)$$

Наближення Френеля (9) виконується, якщо  $\frac{1}{8} t^2 \ll 1$  або

$$kz \frac{1}{8} \left[ \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^2 \ll 1 \text{ радіан,}$$

звідси

$$z \gg \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^2 \right\}^{1/3}. \quad (10)$$

Простір за екраном, який задовольняє умову (10), називають *областю дифракції Френеля*. Наприклад, якщо  $\lambda = 0,5$  мкм, а максимальні розміри отвору в екрані та області спостереження становлять 1 см, то  $z \gg 40$  см.

Підставимо наближення (9) у вираз (6), тоді інтеграл (5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \frac{1}{j\lambda z} \times \\ &\times \exp \left\{ jkz \left[ 1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{2z^2} \right] \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \times \\ &\times \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy. \quad (11) \end{aligned}$$

Вираз (11) називають *рівнянням дифракції Френеля*. Множник  $\exp(jkz)$  визначає постійний фазовий зсув, який не впливає на розподіл поля  $V(x_0, y_0)$ , а тому надалі його не будемо враховувати.

#### Методична похибка оптичного спектроаналізатора

Дифракцію світла можна розглядати як суму плоских хвиль різних просторових частот  $v_x, v_y$ , які поширюються під кутами дифракції  $\varphi_{dx}, \varphi_{dy}$  відповідно. Залежність кута дифракції від просторової частоти при поширенні світла у вільному просторі визначається рівняннями [2, 3]

$$\sin \varphi_{dx} = v_{x,fs} \lambda \quad \text{і} \quad \sin \varphi_{dy} = v_{y,fs} \lambda, \quad (12)$$

де  $\varphi_{dx}, \varphi_{dy}$  – кути між хвильовим вектором  $\mathbf{k}$ , який збігається з напрямком поширення дифрагованого світла і площинами  $yz$  і  $xz$  відповідно (рис. 3);  $v_{x,fs}, v_{y,fs}$  – просторові частоти хвиль у вільному просторі.

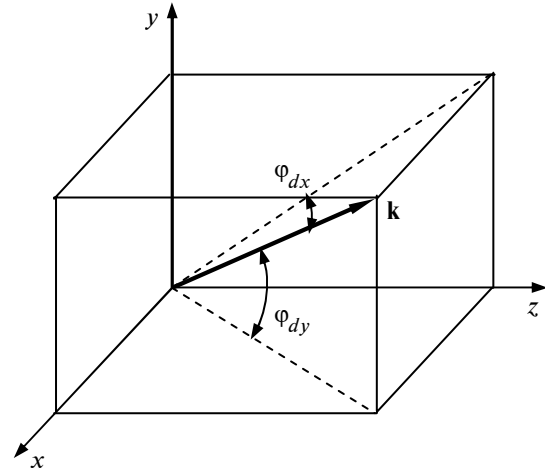


Рис. 3. Кути дифракції при поширенні світла в напрямку хвильового вектора  $\mathbf{k}$

При дифракції Френеля просторові частоти визначаються співвідношенням (3). Користуючись рис. 2 та виразами (3) і (11), знаходимо кути дифракції:

$$\operatorname{tg} \varphi_{dx} = \frac{x_0}{f} = v_{x,F} \lambda \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} \varphi_{dy} = \frac{y_0}{f} = v_{y,F} \lambda, \quad (13)$$

де  $v_{x,F}, v_{y,F}$  – просторові частоти при дифракції Френеля.

Тоді методична похибка у визначенні просторової частоти дифрагованого світла дорівнює

$$\Delta v_x = v_{x,F} - v_{x,fs} = \frac{1}{\lambda} (\operatorname{tg} \varphi_{dx} - \sin \varphi_{dx})$$

і

$$\Delta v_y = v_{y,F} - v_{y,fs} = \frac{1}{\lambda} (\operatorname{tg} \varphi_{dy} - \sin \varphi_{dy}). \quad (14)$$

На рис. 4 зображено одновимірний графік залежності похибки вимірювання просторової частоти від кута дифракції. Аналіз функції (14) і її графіка показує, що для довжини хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм при куті дифракції  $\varphi_{dx} = 5^\circ$  похибка вимірювання просторової частоти становить  $\Delta v_x = 0,67 \text{ мм}^{-1}$ , а при куті дифракції  $\varphi_{dx} = 10^\circ$  –  $\Delta v_x = 5,4 \text{ мм}^{-1}$ .

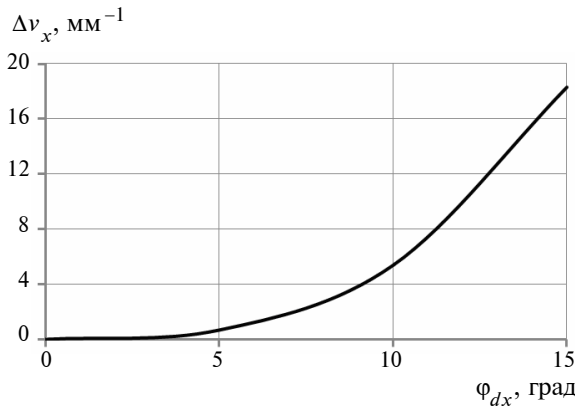


Рис. 4. Залежність методичної абсолютної похибки визначення просторової частоти від кута дифракції для довжини хвилі 0,5 мкм

Визначимо відносну похибку вимірювання просторової частоти  $\delta v_x$ . Із рівнянь (12) і (14) маємо

$$\delta v_x = \frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{\text{tg } \varphi_{dx} - \sin \varphi_{dx}}{\sin \varphi_{dx}} = \frac{1}{\cos \varphi_{dx}} - 1. \quad (15)$$

Для кута дифракції  $\varphi_{dx} = 5^\circ$  відносна похибка становить  $\delta v_x = 0,38\%$ , для кута дифракції  $\varphi_{dx} = 10^\circ$  —  $\delta v_x = 1,54\%$ .

Визначимо відносну похибку для максимальної просторової частоти спектроаналізатора, яка визначається за формулою [6]

$$v_{x,\text{max}} = \frac{x_{3,\text{max}}}{\lambda f} = \frac{D_p - a}{2\lambda f}, \quad (16)$$

де  $D_p$  і  $f$  — діаметр вхідної зіниці і фокусна відстань Фур'є-об'єктива;  $a$  — розмір вхідного транспаранта. У [7] було встановлено, що максимальним значення просторової частоти буде за умови  $D_p = 2a$ .

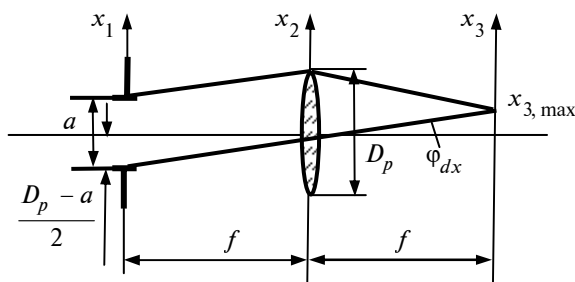


Рис. 5. Схема когерентного оптичного спектроаналізатора для визначення максимальної просторової частоти

Із рис. 5 знаходимо кут дифракції  $\varphi_{dx}$ , який відповідає максимальній просторовій частоті:

$$\text{tg } \varphi_{dx} = \frac{D_p - a}{2f}. \quad (17)$$

**Приклад розрахунку методичної похибки вимірювання просторової частоти когерентного оптичного спектроаналізатора**

Розглянемо когерентний оптичний спектроаналізатор, складові якого мають такі параметри:

- 1) розмір вхідного транспаранта  $a = 25$  мм;
- 2) фокусна відстань і діаметр вхідної зіниці Фур'є-об'єктива:  $f = 100$  мм і  $D_p = 50$  мм відповідно;
- 3) довжина хвилі лазера  $\lambda = 0,628$  мкм.

Із рис. 5 знаходимо кут дифракції, який відповідає точці  $x_3$  у площині аналізу  $x_3 y_3$ :

$$\varphi_d(x_3) = \text{arctg } \frac{x_3}{f}. \quad (18)$$

Тоді абсолютна похибка визначення просторової частоти згідно з (14) дорівнює

$$\Delta v_x = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{x_3}{f} - \sin \left( \text{arctg } \frac{x_3}{f} \right) \right]. \quad (19)$$

При цьому максимальна абсолютна похибка з урахуванням (17) становить

$$\begin{aligned} \Delta v_{x,\text{max}} &= \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{a}{2f} - \sin \left( \text{arctg } \frac{a}{2f} \right) \right] = \\ &= \frac{1000}{0,628} \left[ \frac{25}{200} - \sin \left( \text{arctg } \frac{25}{200} \right) \right] = 1,5 \text{ мм}^{-1}. \end{aligned}$$

Відносна похибка визначення просторової частоти згідно з (15) дорівнює

$$\delta v_x = \frac{1}{\cos \left( \text{arctg } \frac{x_3}{f} \right)} - 1. \quad (20)$$

При цьому максимальна абсолютна похибка з урахуванням (17) становить

$$\delta v_{x,\text{max}} = \frac{1}{\cos \left( \text{arctg } \frac{a}{2f} \right)} - 1 = 0,78 \%$$

## Висновки

Відомі фундаментальні дослідження меж застосування скалярної теорії дифракції, які визначають просторову область, де справедливе рівняння дифракції Френеля. В той же час відсутні дослідження методичної похибки оптичного спектроаналізатора, які обумовлені наближенням Френеля.

У результаті дослідження методичної похибки вимірювання просторової частоти спектра сигналу за допомогою оптичного спектроаналізатора отримані такі результати.

1. Формули, які застосовуються для визначення просторової частоти спектра сигналу, справедливі тільки для параксіальної області оптичної системи спектроаналізатора.

2. Отримано рівняння для наближення Френеля залежно від кута дифракції світла, яке

дало змогу визначити обмеження спектральної області залежно від відносної похибки вимірювання просторової частоти.

3. Встановлено, що наближення Френеля в межах кута дифракції від  $0^\circ$  до  $10^\circ$  забезпечує відносну похибку менше 1,5%. У той же час при куті дифракції  $20^\circ$  вона становить 6,4%.

4. Отримано рівняння для абсолютної методичної похибки вимірювання просторової частоти, яке залежить від параметрів компонентів спектроаналізатора. Це рівняння можна використовувати для компенсації методичної похибки при комп'ютерній обробці вихідного сигналу спектроаналізатора.

Подальші дослідження слід спрямувати на розробку методу визначення впливу параметрів ПЗЗ-матриці, яка розміщена в площині аналізу, на похибку вимірювання спектра сигналу.

## Список літератури

1. *Применение методов фурье-оптики* / Под ред. Г. Старка; пер. с англ. под ред. И.Н. Компанца. – М.: Радио и связь, 1988. – 536 с.
2. Колобродов В.Г., Тимчик Г.С. Проективання дифракційних оптичних елементів і систем. – К.: НТУУ “КПІ”, 2012. – 200 с.
3. Saleh V.E.A., Malvin C.T. *Fundamentals of Photonics*. – New York: Wiley, 1991. – 948 p.
4. Колобродов В.Г., Тимчик Г.С. Прикладна дифракційна оптика. – К.: НТУУ “КПІ”, 2014. – 312 с.
5. Zhang L., Zhong X., Jin G. Design of high resolution Fourier transform lens // *Proc. SPIE*. – 2007. – 6722. – P. 672211-1–672211-6.
6. Колобродов В.Г., Тимчик Г.С., Нгуєн К.А. Визначення узагальнених характеристик когерентних спектроаналізаторів // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. – 2012. – № 5. – С. 102–108.
7. Колобродов В.Г., Тимчик Г.С., Нгуєн К.А. Граничні характеристики когерентного оптичного спектроаналізатора // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. – 2014. – № 5. – С. 119–123.

## References

1. *Applications of Optical Fourier Transforms*, H. Stark, Ed. Moscow, USSR: Radio i svjaz', 1988, 536 p. (in Russian).
2. V.G. Kolobrodov and G.S. Tymchuk, *Design of Diffractive Elements and System Optics*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2012, 200 p. (in Ukrainian).
3. V.E.A. Saleh and C.T. Malvin, *Fundamentals of Photonics*. New York: Wiley, 1991, 948 p.
4. V.G. Kolobrodov and G.S. Tymchuk. *Applied Diffractive Optics*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2014, 312 p. (in Ukrainian).
5. L. Zhang *et al.*, “Design of high resolution Fourier transform lens”, *Proc. SPIE*, vol. 6722, pp. 672211-1–672211-6, 2007.
6. V.G. Kolobrodov *et al.*, “The problems of designing coherent spectrum analyzers”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 5, pp. 102–108, 2012 (in Ukrainian).
7. V.G. Kolobrodov *et al.*, “Limiting characteristics of the optical spectrum ANALYZER”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 5, pp. 119–123, 2014 (in Ukrainian).

В.Г. Колобродов, Г.С. Тимчик, М.С. Колобродов

## МЕТОДИЧНА ПОХИБКА ОПТИЧНОГО СПЕКТРОАНАЛІЗАТОРА

**Проблематика.** Когерентні оптичні спектроаналізатори мають широке застосування в системах обробки інформації. В основі роботи таких спектроаналізаторів лежить скалярна теорія дифракції Френеля, яка наближено описує поширення світла в параксіальній області. В роботі досліджується методична похибка оптичного спектроаналізатора, яка обумовлена наближенням Френеля.

**Мета дослідження.** Метою роботи є дослідження методичної похибки оптичного спектроаналізатора, яка зумовлена наближенням Френеля, з метою визначення допустимих похибок вимірювання просторової частоти в спектрі сигналу.

**Методика реалізації.** На основі фізико-математичної моделі когерентного спектроаналізатора досліджено методичну похибку у визначенні просторової частоти, яка виникає в результаті переходу від поширення світла у вільному просторі до дифракції Френеля.

**Результати дослідження.** Отримано рівняння для розрахунку абсолютної і відносної похибок вимірювання залежно від кута дифракції світла, що дало змогу визначити обмеження спектральної області для заданої відносної похибки вимірювання просторової частоти. Встановлено, що наближення Френеля в межах кута дифракції від  $0^\circ$  до  $10^\circ$  забезпечує відносну похибку менше 1,5 %. У той же час при куті дифракції  $20^\circ$  вона становить 6,4 %.

**Висновки.** Відомі фундаментальні дослідження меж застосування скалярної теорії дифракції, які визначають просторову область, де справедливе рівняння дифракції Френеля. В той же час відсутні дослідження методичної похибки оптичного спектроаналізатора, яка зумовлена наближенням Френеля. Отримано рівняння для абсолютної методичної похибки вимірювання просторової частоти, яке залежить від параметрів компонентів спектроаналізатора. Це рівняння можна використовувати для компенсації методичної похибки при комп'ютерній обробці вихідного сигналу спектроаналізатора.

**Ключові слова:** оптичний спектроаналізатор; дифракція Френеля; просторова частота; похибка вимірювання частоти.

В.Г. Колобродов, Г.С. Тымчик, Н.С. Колобродов

#### МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ОПТИЧЕСКОГО СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА ПРОБЛЕМАТИКА.

**Проблематика.** Когерентные оптические спектроанализаторы находят широкое применение в системах обработки информации. В основе работы таких спектроанализаторов лежит скалярная теория дифракции Френеля, которая приближенно описывает распространение света в параксиальной области. В данной статье исследуется методическая погрешность оптического спектроанализатора, которая обусловлена приближением Френеля.

**Цель исследования.** Целью работы является исследование методической погрешности оптического спектроанализатора, которая обусловлена приближением Френеля, с целью определения допустимых погрешностей измерения пространственной частоты в спектре сигнала.

**Методика реализации.** На основе физико-математической модели когерентного спектроанализатора исследована методическая погрешность определения пространственной частоты, которая возникает в результате перехода от распространения света в свободном пространстве к дифракции Френеля.

**Результаты исследования.** Получено уравнение для расчета абсолютной и относительной погрешностей измерения в зависимости от угла дифракции света, что позволило определить ограничения спектральной области для заданной относительной погрешности измерения пространственной частоты. Установлено, что приближение Френеля в пределах угла дифракции от  $0^\circ$  до  $10^\circ$  обеспечивает относительную погрешность меньше 1,5 %. В то же время при угле дифракции  $20^\circ$  она составляет 6,4 %.

**Выводы.** Известны фундаментальные исследования пределов применения скалярной теории дифракции, определяющие пространственную область, где справедливо уравнение дифракции Френеля. В то же время отсутствуют исследования методической погрешности оптического спектроанализатора, которая обусловлена приближением Френеля. Получено уравнение для расчета абсолютной методической погрешности измерения пространственной частоты, зависящей от параметров компонент спектроанализатора. Это уравнение можно использовать для оптимизации параметров спектроанализатора, а также для компенсации методической погрешности при компьютерной обработке выходного сигнала спектроанализатора.

**Ключевые слова:** оптический спектроанализатор; дифракция Френеля; пространственная частота; погрешность измерения частоты.

Рекомендована Радою  
приладобудівного факультету  
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
26 січня 2015 року