

УДК 621.314

Є.В. Вербицький, канд. техн. наукНаціональний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Особливості розрахунку спектру напруги, модульованої по закону ШІМ I і II на основі подвійного ряду Фур'є

Описано загальні алгоритми розрахунку спектральних характеристик напруги інвертора після фільтра з широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ) I і II родів. Виведено формули для розрахунку вільної і перехідної складової модульованої напруги. Запропоновано розраховувати спектральну характеристику перехідної складової ШІМ I і II роду рядом Фур'є двох змінних, спектральну характеристику вільної складової ШІМ-I рядом Фур'є однієї змінної, вільної складової ШІМ-II – рядом Фур'є двох змінних. Бібл. 5, рис. 3.

Ключові слова: широтно-імпульсна модуляція; спектральна характеристика; ряд Фур'є двох змінних.

Вступ

Імпульсна модуляція використовується в пристроях силової електроніки, що зумовлено простотою її формування і високим коефіцієнтом корисної дії (ККД) перетворення параметрів електричної енергії. При формуванні вихідного сигналу період T несучої функції зазвичай значно менше періода Θ вихідного сигналу $T \ll \Theta$, що збільшує ефективність придушення вищих гармонік модульованого сигналу фільтром. Аналіз якості параметрів напруги після фільтра оцінюють за її спектральною характеристикою. За умови використання ряду Фур'є однієї змінної спектр модульованої напруги можливо розрахувати лише у чисельному виді, що ускладнює аналіз і збільшує обсяг розрахунків через необхідність сумування спектру кожного періода несучої функції. Використання ряду Фур'є двох змінних [1] дозволяє описати частотну характеристику модульованої вихідної напруги у згорнутій формі. У роботі [4] розроблено основні засади методики, яка дозволяє розрахувати спектральну характеристику напруги на виході фільтра на основі використання рядів Фур'є однієї і двох змінних. Методика базується на методі накладання, що дозволяє представити сумарну реакцію фільтра на широтно-

імпульсну послідовність, як суперпозицію реакції на кожний імпульс модуляції. За умови використання методики до ШІМ сигналів I і II роду процедура розрахунку спектра має певні особливості, пов'язані з принципом визначення положення переднього і заднього фронтів імпульсів модуляції. Тому актуальною задачею є адаптація методики розрахунку спектру для I і II роду модуляції, що дозволить представити сумарну реакцію фільтра на модульований сигнал у згорнутій формі.

Методика розрахунку спектру напруги після фільтра з модуляцією ШІМ-I

Положення переднього і заднього фронту імпульсів ШІМ I роду модуляції залежить від значення модулюючої функції у наперед визначені моменти часу і може бути розрахований безпосередньо. Тому розрахунок спектру модульованого сигналу на виході фільтра, можливо розглядати як суму спектрів його вільної і перехідної складової [4], які обчислюються з використанням рядів Фур'є однієї і двох змінних. Ілюстрація методики розрахунку спектру ШІМ-I показана на рис. 1, алгоритм розрахунку спектру містить такі етапи:

- Опис перехідного процесу на виході фільтра, рис. 1 (а), як суми реакцій на кожний імпульс напруги ШІМ, рис. 1 (б).
- Опис реакції u на імпульс модульованої напруги u_M як суми перехідної складової, яка відповідає інтервалу під'єднання джерела напруги до навантаження $-(i-1)T + t_{\Pi i} \dots (i-1)T + t_{3i}$, рис. 1 (в) і вільної складової, яка відповідає часовому інтервалу між закінченням імпульсу і початком наступного півперіода модульованого сигналу $(i-1)T + t_{3i} \dots \Theta / 2$, рис. 1 (г).
- Розрахунок положення переднього $t_{\Pi i}$ і заднього t_{3i} фронтів ШІМ-послідовності, рис. 1 (в) для подвійного ряду Фур'є.

- Розрахунок спектру перехідних складових, рис. 1 (в) за допомогою ряду Фур'є двох змінних.
- Розрахунок положення заднього t_{3i} фронту і тривалості імпульсу напруги ШІМ-

- послідовності, рис. 1 (г) для ряду Фур'є однієї змінної.
- Розрахунок спектру вільних складових, рис. 1 (г) за допомогою ряду Фур'є однієї змінної.
- Визначення сумарної спектральної характеристики напруги на виході фільтра.

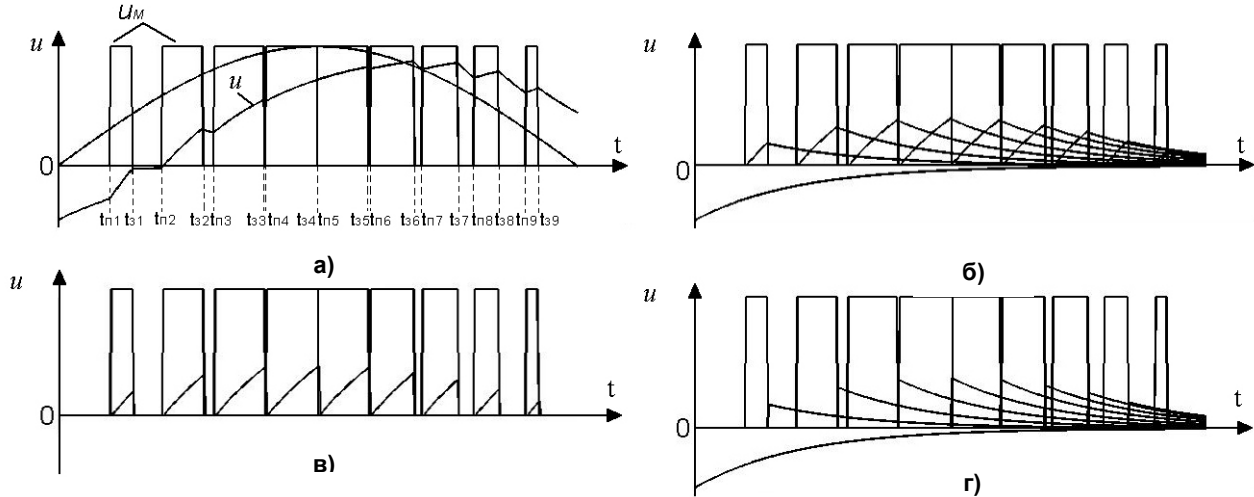


Рис. 1. Ілюстрація до методики розділення напруги на вільну і перехідну складові

Розглянемо особливості використання методики на прикладі однополярної ШІМ з двосторонньою модуляцією при ввімкненні на виході модулятора L -фільтра, навантаження з опором R і джерела напруги E . Нехай на інтервалі накопичення енергії і на інтервалі передавання енергії у навантаження параметри схеми заміщення перетворювача однакові, стала часу фільтра $\tau = L / R$. Для спрощення розрахунків введемо змінні $y = 2\pi t / \Theta = \Omega t$, $\Delta y = 2\pi T / \Theta = 2\pi / P$, де P – кратність модуляції. Покрокове застосування алгоритму розрахунку наведено нижче.

1. Опис перехідного процесу

Сумарну реакцію фільтра на широтно-модульований сигнал $x_M(t)$ можна представити як суперпозицію реакції на кожний імпульс модуляції $x_i(t)$ з несучою частотою ω :

$$x_M(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t + i2\pi / \omega), \quad (1)$$

де N – кількість імпульсів ШІМ.

2. Розклад напруги на вільну і перехідну складову

Перехідний процес можна розглядати, як суму перехідної складової, яка описує струм під час тривалості імпульсу напруги:

$$u_{ШІМi}(y) = E(1 - e^{-(y-y_{\Gamma i})/(\Omega\tau)}), y_{\Gamma i} \leq y \leq y_{3i} \quad (2)$$

і вільної складової, яка описує струм навантаження, після відключення джерела від навантаження:

$$u_{0i}(y) = u_{ШІМi(1)}(y_i) e^{-(y-y_{3i})/(\Omega\tau)}, y_{3i} \leq y \leq \pi \quad (3)$$

3. Розрахунок положення імпульсів модуляції перехідних складових

Для розрахунку спектру перехідних складових використовують ряд Фур'є двох змінних x і y . Змінна x пропорційна кутовій частоті ω несучої пилкоподібної функції, $x = \omega \cdot t$, змінна y – кутовій частоті Ω модулюючої функції, $y = \Omega \cdot t$, відношення між якими рівне значенню параметра кратності модуляції $x / y = P$. Коефіцієнти ряду Фур'є C_{mn} , які є спектральними складовими сигналу з кратністю m відносно частоти несучої функції і кратністю n відносно частоти модулюючої функції, розраховують за формулою:

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) e^{j(mx+ny)} dx dy, \quad (4)$$

де $f(x,y)$ – функція, спектр якої розраховується.

Для ШІМ-І нижню x_1 і верхню межу x_2 інтегрування розраховують за значенням модулюючої функції на початку періода ШІМ, рис. 2.

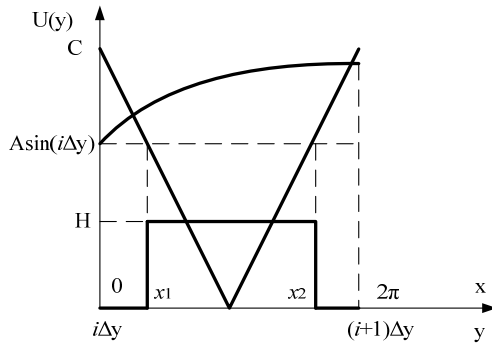


Рис. 2. Ілюстрація принципу формування модульованого сигналу ШІМ-І

Тому для розрахунку спектру ШІМ-І замість неперервної модулюючої функції $f(y)$ у подвійному ряді Фур'є використовують ступінчасту функцію $f(n\Delta y)$, для чого вводять змінну y' :

$$y' = y - x\Omega / \omega. \quad (5)$$

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) e^{j(mx+ny)} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y') e^{j((m+n\Omega/\omega)x+ny')} dx dy'. \quad (6)$$

Межі інтегрування розраховують у точці перетину пілкоподібної функції з прямою, ордината якої дорівнює значенню модулюючої функції на початку періода. За умови синусоїдальної модулюючої функції $f = Asin(y)$ межі інтегрування дорівнюють:

$$x_1 = \pi(1 - Asin(i\Delta y) / C) = \pi(1 - \mu sin(i\Delta y));$$

$$x_2 = \pi(1 + Asin(i\Delta y) / C) = \pi(1 + \mu sin(i\Delta y)), \quad (7)$$

де μ – глибина модуляції.

Підінтегральну функцію на періоді ШІМ (рис.1 (в)) задають таким виразом:

$$f(x) = E(1 - e^{-x/(\omega\tau)}). \quad (8)$$

4. Розрахунок спектру перехідних складових

Підставляючи аналітичний вираз імпульсів напруги, які описуються виразом (8), в формулу для розрахунку спектра модульованого сигналу (6), отримуємо:

$$C_{ПЕРmn} = \frac{E}{2\pi^2} \left[\int_0^{\pi} \int_{\pi-\mu sin(y)}^{\pi+\mu sin(y)} \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau\omega}}\right) e^{j\left(\left(m+\frac{n\Omega}{\omega}\right)x+ny\right)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi+\mu sin(y)}^{2\pi-\mu sin(y)} \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau\omega}}\right) e^{j\left(\left(m+\frac{n\Omega}{\omega}\right)x+ny\right)} dx dy \right]. \quad (9)$$

Розділимо інтеграл на дві частини:

$$C_{ПЕРmn} = \frac{E}{2\pi^2} \left[\int_0^{\pi} \int_{\pi-\mu sin(y)}^{\pi+\mu sin(y)} e^{j((m+n\Omega/\omega)x+ny)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi+\mu sin(y)}^{2\pi-\mu sin(y)} e^{j((m+n\Omega/\omega)x+ny)} dx dy \right] -$$

$$\left[\int_0^{\pi} \int_{\pi-\mu sin(y)}^{\pi+\mu sin(y)} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j((m+n\Omega/\omega)x+ny)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi+\mu sin(y)}^{2\pi-\mu sin(y)} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j((m+n\Omega/\omega)x+ny)} dx dy \right]. \quad (10)$$

Позначимо першу частину виразу (10) $C_{ПЕР1mn}$. Вона описує спектр модульованого сигналу без фільтра і розрахована в [1]:

$$C_{ПЕР1m(2n-1)} = \frac{2j(-1)^m E}{(m+(2n-1)\Omega/\omega)\pi} J_{2n-1}(\pi(m+(2n-1)\Omega/\omega)\mu), \quad (11)$$

де $J_n(z)$ – функція Бесселя порядку n з аргументом z , [2].

Для спрощення другої частини виразу (10) $C_{ПЕР2mn}$, проінтегруємо її за змінною x :

$$C_{ПЕР2mn} = -\frac{E e^{\frac{\pi}{\tau\omega} + j\pi(m+\frac{n\Omega}{\omega})}}{2\pi^2 (j(m+\frac{n\Omega}{\omega}) - \frac{1}{\tau\omega})} \int_0^{\pi} \left(e^{-\frac{\mu sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(\mu sin(y)(m+\frac{n\Omega}{\omega})+ny)} - e^{-\frac{\mu sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu sin(y)(m+\frac{n\Omega}{\omega})+ny)} \right) dy -$$

$$-\int_{\pi}^{2\pi} \left(e^{\frac{\mu \sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu \sin(y)(m+n\Omega/\omega)+ny)} - e^{\frac{\mu \sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(\mu \sin(y)(m+n\Omega/\omega)+ny)} \right) dy. \quad (12)$$

Після розділення інтегралу (12) по чвертям періода і застосування підстановки $y = z$, $y = \pi - z$, $y = \pi + z$, $y = 2\pi - z$, для першої, другої, третьої і четвертої чверті відповідно, отримуємо:

$$C_{ПЕР2mn} = -\frac{Ee^{-\frac{\pi}{\tau\omega} + j\pi(m+n\Omega/\omega)}}{2\pi^2(j(m+\frac{n\Omega}{\omega}) - \frac{1}{\tau\omega})} \int_0^{\pi/2} \left(e^{\frac{\mu \sin(z)}{\tau\omega}} e^{j(\mu \sin(z)(m+\frac{n\Omega}{\omega}))} \left(e^{jnz} + e^{jn(\pi-z)} - e^{jn(\pi+z)} - e^{jn(2\pi-z)} \right) - e^{\frac{\mu \sin(z)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu \sin(z)(m+n\Omega/\omega))} \left(e^{jnz} + e^{jn(\pi-z)} - e^{jn(\pi+z)} - e^{jn(2\pi-z)} \right) \right) dz. \quad (13)$$

З аналізу виразу (13), можна зробити висновок, що для парних n коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{ПЕР2m(2n)} = 0$. Для непарних n інтеграл виразу (13) має такий вид:

$$C_{ПЕР2m(2n-1)} = \frac{2E(-1)^m e^{-\frac{\pi}{\tau\omega} + \frac{j\pi(2n-1)\Omega}{\omega}}}{\pi(j(m+\frac{(2n-1)\Omega}{\omega}) - \frac{1}{\tau\omega})} \times J_{(2n-1)} \left(\mu \left(m + \frac{(2n-1)\Omega}{\omega} \right) + \frac{j}{\tau\omega} \right). \quad (14)$$

Для розрахунку амплітуди гармоніки першої складової з номером k $C_{ПЕР(k)}$ через значення спектральних складових C_{mn} використовують таку формулу:

$$C_{ПЕР(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{ПЕР1m(k-mP)} + C_{ПЕР2m(k-mP)}. \quad (15)$$

5. Розрахунок положення імпульсів модуляції вільної складової

Положення переднього фронту на періоді i несучої:

$$y_{Pi} = i\Delta y + (\Delta y / 2)(1 - \mu \sin(i\Delta y)). \quad (16)$$

Положення заднього фронту відраховують

від середини i -го періода ШІМ:

$$y_{Zi} = i\Delta y + (\Delta y / 2)(1 + \mu \sin(i\Delta y)). \quad (17)$$

Ширину імпульсу на періоді несучої i розраховують як різницю положення заднього і переднього фронту:

$$y_i = y_{Zi} - y_{Pi} = \Delta y \mu \sin(i\Delta y). \quad (18)$$

6. Розрахунок спектру вільних складових

Розглянемо складові спектральної характеристики, які розраховуються за допомогою ряду Фур'є однієї змінної. Початкові умови вільної складової розраховують у момент завершення імпульсу:

$$u_{0i} = E(1 - e^{-y_i/(\Omega\tau)}) = E(1 - e^{-\Delta y \mu \sin(i\Delta y)/(\Omega\tau)}), \quad (19)$$

зважаючи на це спектр вільної складової дорівнює:

$$C_{ВІЛ(n)} = \frac{1}{2\pi} \left(u_{0i} \int_0^{2\pi} e^{-y/(\Omega\tau)} e^{-jny} dy + \sum_{i=0}^{P-1} u_{0i} \int_{y_{Zi}}^{2\pi} e^{-y/(\Omega\tau)} e^{-jny} dy \right). \quad (20)$$

Враховуючи умову симетричності $u(y) = -u(\pi + y)$, вираз (20) можна записати:

$$C_{ВІЛ(n)} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} u_{0i} e^{-y/(\Omega\tau)} e^{-j(2n-1)y} dy + \sum_{i=0}^{P/2-1} \int_{y_{Zi}}^{\pi} u_{0i} e^{-y/(\Omega\tau)} e^{-j(2n-1)y} dy \right) = \frac{1}{-\pi((1/(\Omega\tau) + j(2n-1)))} \left(-u_0 e^{-\pi/(\Omega\tau)} - u_0 + E(-Pe^{-\pi/(\Omega\tau)} / 2 + e^{-\pi/(\Omega\tau)} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-\Delta y \mu \sin(i\Delta y)/(\Omega\tau)} - e^{-(\Delta y/2)(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-(i\Delta y(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))+(\Delta y/2)\mu \sin(i\Delta y)(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))} + \right.$$

$$+ e^{-(\Delta y/2)(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-i(\Delta y(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))+(\Delta y/2)\mu \sin(i\Delta y)(j(2n-1)+3/(\Omega\tau)))}. \quad (21)$$

Для знаходження сум виразу (21) використано розклади функцій $\sin(\sin(y))$ і $\cos(\sin(y))$ через функції Бесселя $J_n(z)$ [3], що дає змогу значно збільшити збіжність рядів, через які виражаються вказані функції:

$$\cos(z\sin(y)) = J_0(z) + 2 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v}(z) \cos(2vy);$$

$$\sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-\Delta y \mu \sin(i\Delta y)/(\Omega\tau)} = PJ_0(j\Delta y \mu / (2\Omega\tau)) / 2 + j2 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1}(j\Delta y \mu / (\Omega\tau)) \operatorname{ctg}((2v-1)\Delta y / 2); \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-i(\Delta y(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))+(\Delta y/2)\mu \sin(i\Delta y)(j(2n-1)+1/(\Omega\tau)))} &= J_0((\Delta y / 2)\mu(j / (\Omega\tau) - (2n-1))) \frac{-e^{-\pi/(\Omega\tau)} - 1}{e^{-\Delta y(j(2n-1)+1/(\Omega\tau))} - 1} + \\ &+ 0,5 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v}((\Delta y / 2)\mu(j / (\Omega\tau) - (2n-1))) (2 + 2\cos(\pi j / (\Omega\tau)) - \sin(\pi j / (\Omega\tau))) \times \\ &\times (\operatorname{ctg}(\Delta y(j / (\Omega\tau) - (2n-1) - 2v) / 2) + \operatorname{ctg}(\Delta y(j / (\Omega\tau) - (2n-1) + 2v) / 2)) + j \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v}((\Delta y / 2)\mu(j / (\Omega\tau) - (2n-1))) \times \\ &\times \left(\frac{\cos((j / (\Omega\tau) - (2n-1) - 2v)\Delta y / 2) + \cos((j / (\Omega\tau) - (2n-1) - 2v)\Delta y / 2 - \pi j / (\Omega\tau))}{2\sin(\Delta y(j / (\Omega\tau) - (2n-1) - 2v) / 2)} + \right. \\ &\left. + \frac{\cos(\Delta y(j / (\Omega\tau) - (2n-1) + 2v) / 2) - \cos((j / (\Omega\tau) - (2n-1) + 2v)\Delta y / 2 - \pi j / (\Omega\tau))}{\sin(\Delta y(j / (\Omega\tau) - (2n-1) + 2v) / 2)} \right) + \\ &+ j \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1}((\Delta y / 2)\mu(j / (\Omega\tau) - (2n-1))) \times \\ &\times \left(\frac{\cos(\Delta y(-j / (\Omega\tau) + 2(n+v-1)) / 2) - \cos((-j / (\Omega\tau) + 2(n+v-1))\Delta y / 2 + j\pi / (\Omega\tau))}{2\sin(\Delta y(-j / (\Omega\tau) + 2(n+v-1)) / 2)} + \right. \\ &\left. + \frac{\cos(\Delta y(j / (\Omega\tau) + 2(v-n)) / 2) - \cos((j / (\Omega\tau) + 2(v-n))\Delta y / 2 - j\pi / (\Omega\tau))}{2\sin(\Delta y(j / (\Omega\tau) - 2(v-n)) / 2)} \right) - \\ &- 0,5 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1}((\Delta y / 2)\mu(j / (\Omega\tau) - (2n-1))) \times \\ &\times (\sin(\pi(j / (\Omega\tau))) (\operatorname{ctg}(\Delta y(j / (\Omega\tau) - 2(n+v-1)) / 2) - \operatorname{ctg}(\Delta y(j / (\Omega\tau) - 2(n-v)) / 2))). \end{aligned} \quad (24)$$

7. Побудова сумарної спектральної характеристики

Значення і фазовий зсув гармоніки k $C_{(k)}$ модульованого сигналу ШІМ-І на виході фільтру розраховують на основі суми спектрів вільної і перехідної складової:

$$C_{(k)} = C_{\text{ПЕР}(k)} + C_{\text{ВИЛ}(k)}. \quad (25)$$

$$\sin(z\sin(y)) = 2j \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1}(z) \sin((2v-1)y). \quad (22)$$

На основі формул розкладу (22) знайдемо значення сум формули (21) у згорнутому виді. Останні дві суми є однотипними, тому для їх обчислення використано один вираз.

Загалом для розрахунку спектральної характеристики відфільтрованого модульованого сигналу необхідно обчислити суми декількох рядів функцій Бесселя, які мають достатньо швидку збіжність, тому для розрахунку кожної гармоніки необхідно використати лише декілька перших членів суми рядів.

Методика розрахунку спектру напруги після фільтру з модуляцією ШІМ-II

Положення імпульсів модуляції другого роду розраховують у результаті вирішення трансцендентного рівняння, тому значення переднього і заднього фронту імпульсів можуть бути обчислені тільки наближено. Однак за умови використання подвійного ряду Фур'є положення імпульсів задається у межах інтегрування і може бути обчислене точно. Тому окрім перехідної подвійний ряд Фур'є доцільно використовувати для розрахунку вільної складової. В усьому іншому алгоритм розрахунку спектру напруги з ШІМ-II є аналогічним ШІМ-I. Нижче наведено алгоритм для розрахунку перехідної і вільної складової.

Пункти 1 і 2 алгоритму: опис перехідного процесу і розклад напруги на вільну і перехідну складові є аналогічним випадку ШІМ-I.

$$C_{ПЕРmn} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(y))} \int_0^{\pi(1-\mu\sin(y))} (1 - e^{-x/\tau\omega}) e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi(1+\mu\sin(y))}^{2\pi(1-\mu\sin(y))} \int_0^{\pi(1-\mu\sin(y))} (1 - e^{-x/\tau\omega}) e^{j(mx+ny)} dx dy \right). \quad (27)$$

Розділимо інтеграл на дві частини:

$$C_{ПЕРmn} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(y))} \int_0^{\pi(1-\mu\sin(y))} e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi(1+\mu\sin(y))}^{2\pi(1-\mu\sin(y))} \int_0^{\pi(1-\mu\sin(y))} e^{j(mx+ny)} dx dy \right) - \left[\int_0^{\pi(1+\mu\sin(y))} \int_0^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi(1+\mu\sin(y))}^{2\pi(1-\mu\sin(y))} \int_0^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy \right]. \quad (28)$$

Позначимо першу частину виразу (28) $C_{ПЕР1mn}$. Вона описує спектр модульованого сигналу без фільтра:

$$C_{ПЕР1m(2n-1)} = \frac{2(-1)^m I_{ВІМ}}{m\pi} J_{2n-1}(\pi m \mu). \quad (29)$$

Для спрощення другої частини виразу (28) $C_{ПЕР2mn}$, проінтегруємо її за змінною x :

$$C_{ПЕР2mn} = -\frac{E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega} + j\pi m}}{2\pi^2 (jm - 1/\tau\omega)} \int_0^{\pi} \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(\mu\pi\sin(y)m+ny)} - e^{\frac{\mu\pi\sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu\pi\sin(y)m+ny)} \right) dy - \int_{\pi}^{2\pi} \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu\pi\sin(y)m+ny)} - e^{\frac{\mu\pi\sin(y)}{\tau\omega}} e^{j(\mu\pi\sin(y)m+ny)} \right) dy. \quad (30)$$

Розбиваючи їх по чвертям періода і застосовуючи підстановки $y = z$, $y = \pi - z$, $y = \pi + z$,

$y = 2\pi - z$, для першої, другої, третьої і четвертої чверті відповідно, отримаємо:

$$C_{ПЕР2mn} = -\frac{E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega} + j\pi m}}{2\pi^2 (jm - 1/\tau\omega)} \int_0^{\pi/2} \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(z)}{\tau\omega}} e^{j(\mu\pi\sin(z)m)} (e^{jnz} + e^{jn(\pi-z)} - e^{jn(\pi+z)} - e^{jn(2\pi-z)}) - e^{\frac{\mu\pi\sin(z)}{\tau\omega}} e^{j(-\mu\pi\sin(z)m)} (e^{jnz} + e^{jn(\pi-z)} - e^{jn(\pi+z)} - e^{jn(2\pi-z)}) \right) dz. \quad (31)$$

Розрахунок положення імпульсів модуляції перехідних складових

Положення переднього x_1 і заднього x_2 фронтів імпульсів ШІМ-II визначається точками перетину модулюючої функції і пилкоподібної напруги:

$$x_1 = \pi(1 - A\sin(y)/C) = \pi(1 - \mu\sin(y));$$

$$x_2 = \pi(1 + A\sin(y)/C) = \pi(1 + \mu\sin(y)), \quad (26)$$

Для розрахунку спектру ШІМ-II використовують формулу (4). Підінтегральну функцію на періоді ШІМ (рис. 1 (в)) задають формулою (8).

Розрахунок спектру перехідних складових Підставляючи аналітичний вираз імпульсів напруги, які описуються виразом (8), в формулу для розрахунку спектра модульованого сигналу (4), отримаємо:

Для парних n коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{ПЕР2m(2n)} = 0$. Для непарних – розраховуються за формулою:

$$C_{ПЕР2m(2n-1)} = \frac{2j(-1)^m E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega}}}{\pi(jm - 1/\tau\omega)} J_{(2n-1)}(\text{мл}(m + j/\tau\omega)) \quad (32)$$

Розрахунок положення імпульсів модуляції вільних складових

Для розрахунку вільних складових, рис. 1 (г) за допомогою подвійного ряду Фур'є їх необхідно розділити на компоненти, які змінюються з частотою несучої ω . Графічні ілюстрації одного з варіантів розділення вільних складових для подальшого розрахунку їх спектру рядом Фур'є двох змінних показано на рис.3.

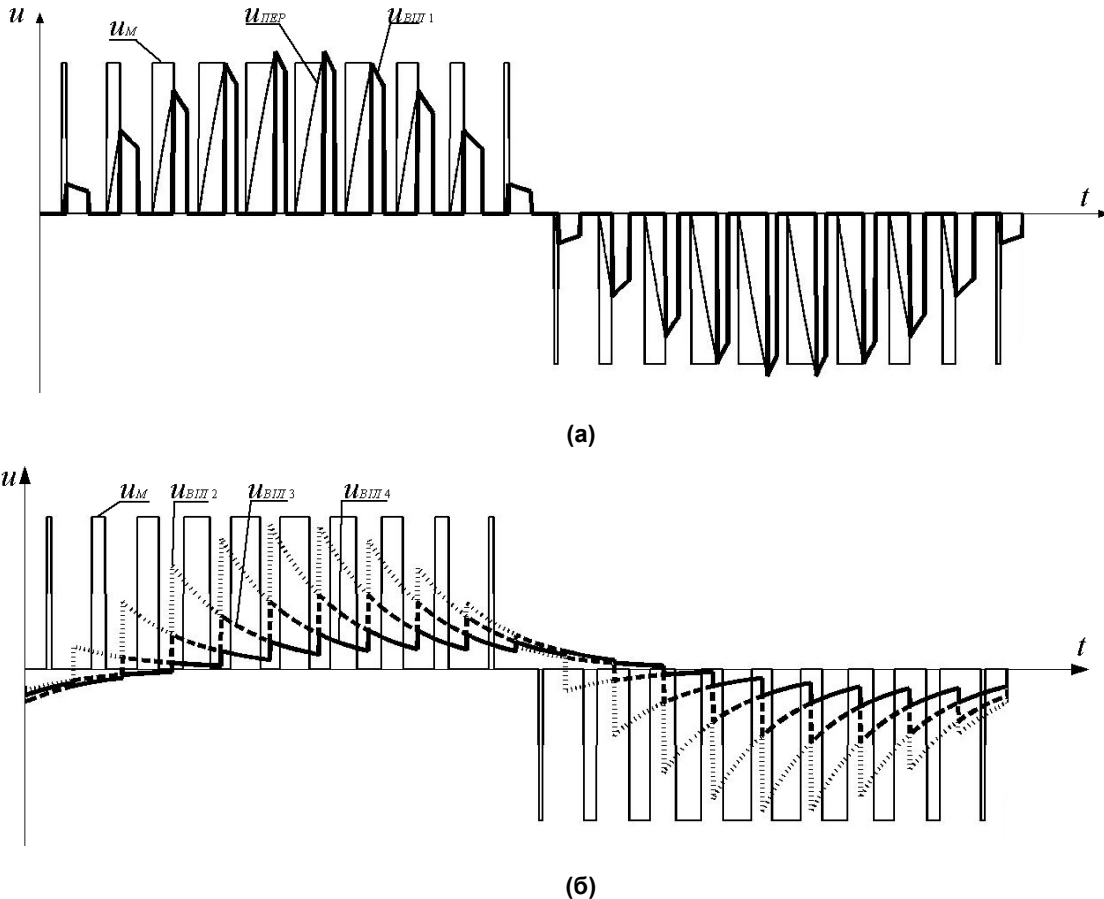


Рис. 3. Графічна ілюстрація до розділення вільної складової на компоненти, які змінюються з частотою несучої

Компонента $u_{ВЛ1}$, зображена на рис. 3 (а), описує ділянки вільних складових на інтервалах між заднім фронтом імпульсу ШІМ, від якого утворена вільна складова, і кінцем даного періоду ШІМ: $iT + y_{3i} \dots (i+1)T$. Компонента $u_{ВЛd}$, де $d = 2 \dots (0,5P + 1)$ описує ділянки вільних складових на періодах ШІМ, які зміщені на $(d-1)$ період відносно імпульсу, з якого починається вільна складова.

Передній фронт компоненти $u_{ВЛ1}$ на періоді ШІМ співпадає із заднім фронтом імпульсу, формула (26). Задній фронт складової $u_{ВЛ1}$ рівний 2π . Для інших компонент передній фронт співпадає із початком періода $x_1 = 0$, а задній фронт – з кінцем періода $x_2 = 2\pi$.

Розрахунок спектру вільних складових

Розрахуємо спектр компонент вільної складової. Спектр компоненти $u_{ВЛ1}$ розраховують за формулою:

$$C_{ВІЛ1mn} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi u_{01}(y) \int_{\pi(1+\mu\sin(y))}^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy + \int_\pi^{2\pi} u_{01}(y) \int_{\pi(1-\mu\sin(y))}^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy \right). \quad (33)$$

де $u_{01}(y) = E(1 - e^{-y_i}) = E(1 - e^{-2\pi\mu\sin(y)})$ - початкові умови вільної складової імпульсу модуляції з номером i .

Після підстановки у формулу (33) початкових умов, отримуємо:

$$C_{ВІЛ1mn} = \frac{E}{2\pi^2(jm - 1/(\tau\omega))} \left(\int_0^\pi (1 - e^{-2\pi\mu\sin(y)}) \times \left(e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega}} e^{j(2\pi m+ny)} - e^{\frac{-\pi(1+\mu\sin(y))}{\tau\omega}} e^{j(\pi(1+\mu\sin(y))m+ny)} \right) dy - \int_\pi^{2\pi} (1 - e^{-2\pi\mu\sin(y)}) \left(e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega}} e^{j(2\pi m+ny)} - e^{\frac{-\pi(1-\mu\sin(y))}{\tau\omega}} e^{j(\pi(1-\mu\sin(y))m+ny)} \right) dy \right). \quad (34)$$

Розіб'ємо інтеграли формули (34) на частини:

$$C_{ВІЛ1mn} = \frac{E}{2\pi^2(jm - 1/(\tau\omega))} \left[\int_0^\pi e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega}} e^{j(2\pi m+ny)} dy - \int_\pi^{2\pi} e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega}} e^{j(2\pi m+ny)} dy - \int_0^\pi e^{\frac{-\pi(1+\mu\sin(y))}{\tau\omega}} e^{j(\pi(1+\mu\sin(y))m+ny)} dy - \int_\pi^{2\pi} e^{\frac{-\pi(1-\mu\sin(y))}{\tau\omega}} e^{j(\pi(1-\mu\sin(y))m+ny)} dy \right]. \quad (35)$$

Перші два інтеграли, які входять в формулу (35) розраховують так:

$$C_{ВІЛ1-1m(2n-1)} = \frac{2e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega}} E}{\pi^2(jm - 1/(\tau\omega))(2n - 1)}. \quad (36)$$

Останні два інтеграли після перетворення мають вид:

$$\tilde{N}_{\tilde{A}^2 E_{1-2m(2n-1)}} = -\frac{e^{\frac{-\pi}{\tau\omega}} (-1)^m E}{\pi^2(jm - \frac{1}{\tau\omega})} \int_0^\pi e^{j(\pi(\frac{j}{\tau\omega} + \mu)\sin(y)\delta + (2n-1)y)} dy = -\frac{e^{\frac{-\pi}{\tau\omega}} (-1)^m E}{\pi^2(jm - \frac{1}{\tau\omega})} \left(\pi J_{2n-1}(\pi\delta(\frac{j}{\tau\omega} + \mu)) + 2j \left(\frac{J_0(\pi(j/\tau\omega + \mu)\delta)}{2n-1} + \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v}(\pi(j/\tau\omega + \mu)\delta) \times \frac{1}{2n-1-2v} + \frac{1}{2n-1-2v} \right) \right). \quad (37)$$

Всі вільні компоненти, зображені на рис. 3 (б) можливо виразити через одну з них, найзручніше через $u_{ВІЛ2}(y)$:

$$u_{ВІЛi}(y) = u_{ВІЛ2}(y + (i-2)\Delta y) e^{-(i-2)\Delta y/(\tau\omega)}. \quad (38)$$

З аналізу виразу (38) можна зробити висновок, за умови відомого спектру компоненти $u_{ВІЛ2}(y)$ значення інших компонент отримують за умови використання теореми запізнення [5]. Спектральну характеристику $u_{ВІЛ2}(y)$ розраховують за формулою:

$$C_{ВІЛ2mn} = \frac{e^{jn\Delta y}}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi u_{02}(y) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_\pi^{2\pi} u_{02}(y) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy \right), \quad (39)$$

де

$u_{02}(y) = E(1 - e^{-y_i}) e^{-(\pi-y_i/2)} = -jEe^{-\pi} \sin(j\pi\mu\sin(y))$ - початкові умови для компоненти $u_{ВІЛ2}(y)$; множник $e^{jn\Delta y}$ враховує зміщення компоненти $u_{ВІЛ2}(y)$ на один період несучої.

$$C_{ВІЛ2mn} = -\frac{j e^{jn\Delta y} E e^{-\pi}}{\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \sin(j\pi\mu\sin(y)) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy + \int_\pi^{2\pi} \sin(j\pi\mu\sin(y)) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x}{\tau\omega}} e^{j(mx+ny)} dx dy \right) =$$

$$= \frac{jEe^{-\pi} e^{jn\Delta y} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega)})}{\pi^2 (jm - 1/\tau\omega)} \times \int_0^{\pi} \sin(j\pi\mu \sin(y)) e^{jny} (1 - e^{jn\pi}) dy. \quad (40)$$

Для парних n коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{ВІЛ(2m)(2n)} = 0$. Для непарних – розраховуються за формулою:

$$C_{ВІЛ2(m)(2n-1)} = \frac{jEe^{-\pi} e^{j(2n-1)\Delta y} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega)})}{\pi(jm - 1/\tau\omega)} J_{(2n-1)}(j\mu\pi). \quad (41)$$

Розрахунок спектру інших компонент $u_{ВІЛi}(y)$ здійснюють з використанням теореми запізнення:

$$C_{ВІЛi(m)(2n-1)} = C_{ВІЛ2(m)(2n-1)} e^{j(2n-1)(i-2)\Delta y} = \frac{jEe^{-\pi} e^{j(2n-1)(i-1)\Delta y} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega)})}{\pi(jm - 1/\tau\omega)} J_{(2n-1)}(j\mu\pi). \quad (42)$$

Компоненти $u_{ВІЛ2}(y) \dots u_{ВІЛ(P+1)}(y)$ мають подібну структуру, тому для представлення їх спектру в згорнутому виді знайдемо їх суму:

$$C_{ВІЛ\Sigma m(2n-1)} = \sum_{i=2}^{P/2+1} C_{ВІЛi(m)(2n-1)} = \frac{jEe^{-\pi} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega)}) J_{(2n-1)}(j\mu\pi)}{\pi(jm - 1/\tau\omega)} \times \frac{e^{j\Delta y(2n-1)} (e^{j\Delta y(2n-1)P/2} - 1)}{e^{j\Delta y(2n-1)} - 1} = 2 \frac{jEe^{-\pi} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega)}) J_{(2n-1)}(j\mu\pi)}{\pi(jm - 1/\tau\omega)} \frac{e^{j\Delta y(2n-1)}}{1 - e^{j\Delta y(2n-1)}}. \quad (43)$$

Останню компоненту вільної складової розраховують з використанням ряду Фур'є однієї змінної. Вона описує вплив початкових умов на початку півперіода модулюючої напруги:

$$C_{ВІЛ0(2n-1)} = \frac{1}{\pi} u_0 e^{-\pi/(\Omega\tau)} \int_0^{\pi} e^{-y/(\Omega\tau)} e^{-j(2n-1)y} dy = \frac{u_0 e^{-\pi/(\Omega\tau)}}{\pi(1/\Omega\tau + j(2n-1))} (1 - e^{-\pi/(\Omega\tau)}). \quad (44)$$

Отже, спектральна характеристика ШІМ сигналу II роду складається з п'яти складових:

$$C_n = C_{ПЕР1n} + C_{ПЕР2n} + C_{ВІЛ0n} + C_{ВІЛ1n} + C_{ВІЛ\Sigma n} \quad (45)$$

Загалом, методика розрахунку спектральної характеристики вихідної напруги, модульованої ШІМ-II, має простіші вирази, ніж для випадку ШІМ-I, оскільки вільна складова розраховується за допомогою ряду Фур'є двох змінних, що спрощує кінцеві аналітичні вирази.

Висновок

Розроблено методики розрахунку спектру в згорнутій формі сигналів з модуляцією ШІМ-I і ШІМ-II. Методики розрахунку передбачають спільне використання рядів Фур'є однієї і двох змінних:

1. Перехідну складову сигналів ШІМ-I і ШІМ-II розраховують рядом Фур'є двох змінних.
2. Вільну складову ШІМ-I розраховують рядом Фур'є однієї змінної, вільну складову ШІМ-II – рядом Фур'є двох змінних.

Список використаних джерел

1. *D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. - IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. - 724 pp.*
2. *Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. – 831 с.*
3. *Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть I. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. - 798 с.*
4. *Вербицкий Е.В. Использование двойного ряда Фурье для расчета спектра модулированных сигналов. Технічна електродинаміка – Київ, 2012, № 4, с. 96-98.*
5. *Татаринов В. Н., Татаринов С. В. Спектры и анализ. Учебное пособие. Томск: Томский государственный университет, 2012, 324 стр.*

Поступила в редакцию 12 мая 2015 г.

УДК 621.314

Е.В. Вербицкий, канд. техн. наукНациональный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Особенности расчета спектра напряжения, модулированного по закону ШИМ I и II на основе двойного ряда Фурье

Описано общие алгоритмы расчета спектральных характеристик напряжения инвертора после фильтра с широтно-импульсной модуляцией I и II родов. Выведено формулы для расчета свободной и переходной составляющей модулированного напряжения. Предложено рассчитывать спектральную характеристику переходной составляющей ШИМ I и II рода рядом Фурье двух переменных, спектральную характеристику свободной составляющей ШИМ-I рядом Фурье одной переменной, свободной составляющей ШИМ-II – рядом Фурье двух переменных. Библи. 5, рис. 3.

Ключевые слова: широтно-импульсная модуляция, спектральная характеристика, ряд Фурье двух переменных.

UDC 621.314

I. Verbytskyi, Ph.D.National technical university of Ukraine «Kyiv politechnic institute»,
Polytechnichna st., 16, building 12, Kyiv, 03056, Ukraine.

Features of voltage spectrum calculations modulated by PWM I and II on basis double Fourier series

Described general algorithms for calculating the spectral characteristics of the inverter voltage after the filter with PWM I and II kind. The formulas for the calculation of the free and the transient component of the modulated voltage are obtained. Perform calculations of the spectral characteristic of the transient component PWM I and II kind by double Fourier series are proposed. Calculations of spectral characteristic of PWM-I free component performed by one variable Fourier series, the PWM II free component performed by two variables Fourier series. Bibl. 5, Fig. 3.

Keywords: pulse width modulation, spectral characteristic, Double Fourier series.

References

1. *Grahame Holmes, D., Thomas, A. Lipo.* (2003). Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. IEEE Press Series on Power Engineering. P. 724.
2. *Abramovits, M., Stigan, I.* (1979). Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs and mathematical tables [Spravochnik matematicheskikh funktsiy. S formulamy, grafikamy i matematicheskimi tablitsamy]. Nauka. P. 831. (Rus)
3. *Watson, G. N.* (1949). A treatise on the theory of Bessel functions [Teoria Besselevykh funktsiy]. Part I. Izdatelstvo inostrannoy literatury. P. 798. (Rus)
4. *Verbytskyi, I. V.* (2012). Double Fourier series using for spectrum calculation of modulated signals [Ispolzovanie dvoynogo ryada Furye dlya rascheta spectra modulirovannykh signalov]. (Rus)
5. *Tatarinov, V. N., Tatarinov, S. V.* (2012). Spectra and analysis [Spectry I analiz]. Textbook. Tomsk: Tomskiy gosudarstvennyi universitet. P. 324. (Rus)