УДК 519.21

Н.В. Прохоренко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ЗВ’ЯЗОК РОЗПОДІЛУ МАКСИМУМУ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ З ЛІНІЙНИМ ЗСУВОМ ІЗ РОЗПОДІЛОМ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА ПО ЛАМАНИХ

Background. The probability distributions of functionals of Chentsov random field $X(s,t)$ like supremum on the unit square are not yet known. Some trivial probability distribution theory for $X(s,t)$ can be obtained by using known results about the standard Wiener process. O. Klesov and N. Kruglova expressed probability that Wiener process crossing a step-wise linear barriers in terms of n-tuple integral of a function involving exponents and the standard Gaussian density. Also they used this result for obtaining the distribution of the maximum of the Chentsov field on polygonal lines. We consider the problem of finding the distribution of the maximum of the Chentsov random field on polygonal lines with several points of break and the problem of finding zero-crossing probabilities of the Wiener process with a step-wise linear shift in this paper.
Objective. The purpose of this paper is to find the conditions for a correspondence between these problems.
Methods. We used Doob’s Transformation Theorem in the proof of the main results.
Results. Conditions for a correspondence between the problem of finding the distribution of the maximum of the Chentsov random field on polygonal lines with several points of break and the problem of finding zero-crossing probabilities of the Wiener process with a step-wise linear shift are found. It is proved that at the certain conditions a polygonal line with n points of break one-to-one corresponds to a step-wise linear shift.
Conclusions. Under certain conditions there is a two-way correspondence between the considered problems.
Keywords: Chentsov random field; the distribution of the maximum; Wiener process; Doob’s transformation theorem.

Вступ

У роботі досліджуються задачі знаходження ймовірності перетину вінерівським процесом з кусково-лінійним зсувом нульового рівня і знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по ламаних, зв’язок між цими проблемами. Розв’язки таких теоретичних задач необхідні для вирішення певних проблем в метеорології, радіофізиці, геології, статистиці, економіці тощо. Тому дослідження функціоналів від вінерівського процесу і поля Ченцова є дуже актуальним.

Уперше вінерівський процес описав Л. Башельє в 1900 р. Йому належить такий відомий результат:

$$P\left\{\max_{s\in[0,t]} w(s)\le b\right\} = P\{|w(s)|\le b\} =$$

$$= 1-\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx.$$

Пізніше активно досліджували задачу такого вигляду:

$$P\left\{\sup_{t\in[T_1,\,T_2]} (w(t)-h(t))<0\right\}, \qquad (1)$$

де $h(t)$ – деяка неперервна функція. Тут потрібно відзначити роботи Дж.Л. Дуба [1], С. Малмквіста [2], С. Парка і С. Параньяпа [3, 4], О. Клесова і Н. Круглової [5]. Так, Дж.Л. Дуб [1] отримав такий результат:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,\,\infty]} (w(t)-kt-b)<0\right\} = 1-e^{-2kb}.$$

Це дало змогу Малмквісту [2] дослідити такі розподіли: $P\{w(t)\le kt+b, 0<t<t_1 \,|\, w(t_1)=x\}$ і $P\{w(t)\le kt+b, t_1<t<t_2 \,|\, w(t_1)=x_1, w(t_2)=x_2\}$.

С. Парк і С. Параньяп [3] отримали точний розв’язок задачі (1), коли $h(t)$ – ламана з однією точкою зламу. Їх результат було узагальнено О. Клесовим і Н. Кругловою на випадок ламаної з n точками зламу [5].

Аналогом вінерівського процесу в багатовимірному випадку є поле Ченцова. Але, на відміну від одновимірного випадку, точні розподіли функціоналів від поля Ченцова ще досі не знайдено. Докладно досліджено асимптотичну поведінку максимуму від поля Ченцова, а вираз для точного розподілу було отримано лише по ламаних. Так, С. Парк і С. Праньяп [3], І.І. Клесов [6] дослідили задачу знаходження максимуму поля Ченцова по ламаних з однією точкою зламу, а О. Клесов і Н. Круглова [7, 8] отримали аналогічний результат для ламаних з декількома точками зламу.

Отже, розподіли функціоналів від вінерівського процесу досліджуються вже давно, і для багатьох із них отримано точні вирази. Для поля Ченцова такі задачі досі залишаються нерозв'язаними. Оскільки при дослідженні максимуму поля Ченцова по ламаних використовують результат задачі (1), то актуальним буде знайти і зворотній зв'язок між ймовірністю (1) і розподілом максимуму поля Ченцова по певних областях аргументів. Це дасть можливість знаходити точні вирази для невідомих розподілів функціоналів від поля Ченцова.

Постановка задачі

Розглянемо такі задачі.

Задача 1. Нехай $n \geq 1$ і $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$. Розглянемо послідовності чисел $\{a_j, j = \overline{1, n+1}\}$, $\{b_j, j = \overline{1, n+1}\}$ такі, що:

1) $a_j \geq 0, j = \overline{1, n+1}$;

2) $b_{n+1} > 0$;

3) $a_j t_j + b_j > 0, j = \overline{1, n}$, і $a_j t_j + b_j = a_{j+1} t_j + b_{j+1}, j = \overline{1, n}$.

Необхідно знайти ймовірність вигляду (1), де

$$h(t) = b_1 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i) I_{(t_{i-1}, t_i]}(t) + (a_{n+1} t + b_{n+1}) I_{(t_n, +\infty)}(t).$$

Задача 2. Досліджується двопараметричне поле Ченцова $X(s,t)$ на ламаних L з n точками зламу, які починаються в точці $(0,1)$ і закінчуються в точці $(1,0)$. Координати точок зламу задовольняють такі умови:

1) $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$;

2) $1 = y_0 > y_1 \geq \ldots \geq y_n > y_{n+1} = 0$.

Необхідно для $\lambda > 0$ знайти розподіл:

$$P\left\{ \sup_{(s,t) \in L} X(s,t) < \lambda \right\}. \qquad (2)$$

У роботах [3, 7, 8] при дослідженні задачі 2 було використано результати задачі 1. Виникає питання: чи можна від проблеми (2) перейти до відповідної їй проблеми (1)?

Отже, метою роботи є знаходження умов відповідності між задачею знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по ламаних з n точками зламу і задачею знаходження ймовірності перетину вінерівським процесом з кусково-лінійним зсувом нульового рівня.

Попередні відомості

Означення 1. Випадковий процес $\{w(t); t \geq 0\}$ називається вінерівським, якщо:

1) $w(t)$ — гауссівський процес (тобто $\forall n \in N$ $\forall t_1, \ldots, t_n \geq 0$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k w(t_k)$ — гауссівська випадкова величина);

2) $E[w(t)] = 0$;

3) $E[w(t) w(s)] = t \wedge s$.

Позначимо $D = [0, 1]^2$.

***Означення* 2.** Дійсне сепарабельне гауссівське поле $X(s,t)$ називається полем Ченцова, якщо воно задовольняє такі умови:

1) $X(0, t) = X(s, 0) = 0$ для всіх $s, t \in [0;1]$;

2) $E[X(s,t)] = 0$ для всіх $(s, t) \in D$;

3) $E[X(s, t) X(s', t')] = \min(s, s') \min(t, t')$ для всіх (s, t) та $(s^1, t^1) \in D$.

Наведемо результати робіт [1, 5, 8], які використовуються нижче при доведенні основних результатів.

Теорема 1 (перетворення Дуба) [1]. Якщо $Y(t)$ — гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією $R(s, t) = u(s) v(t)$, $s \leq t$, такою, що функція $a(t) = u(t)/v(t)$ зростає та неперервна, то процес $Y(u(a_1(t)))/v(a_1(t))$ стохастично еквівалентний вінерівському процесу $w(t)$, де $a_1(t)$ — обернена до $a(t)$ функція.

Теорема 2 [5]. Нехай $n \geq 1$ і $T > 0$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$ і $t_{j-1} < t_j, 1 \leq j \leq n+1$. Покладемо $\Delta_j = t_j - t_{j-1}, 1 \leq j \leq n+1$. Послідовності чисел $\{a_j, j = \overline{1, n+1}\}$, $\{b_j, j = \overline{1, n+1}\}$ такі, що:

1) $a_j \geq 0, j = \overline{1, n+1}$;

2) $b_{n+1} > 0$.

Позначимо $h_j(t) = a_j t + b_j, 1 \leq j \leq n+1$. Припустимо, що $h_j(t_j) = h_{j+1}(t_j)$, $1 \leq j \leq n$, і $h_j(t_j) > 0, 1 \leq j \leq n$. Покладемо

$$h(t) = b_1 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} h_i(t) I_{(t_{i-1}, t_i]}(t).$$

Тоді

$$P\left\{ \sup_{t \in [0,T]} (w(t) - h(t)) < 0 \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{h_1(t_1)} \ldots \int_{-\infty}^{h_n(t_n)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \exp\left\{ -\frac{2\beta_j (h_j(t_j) - u_j)}{\Delta_j} \right\} \right) \times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{a_{n+1}\Delta_{n+1}+\beta_{n+1}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}}\right)-e^{-2a_{n+1}\beta_{n+1}}\Phi\left(\frac{a_{n+1}\Delta_{n+1}-\beta_{n+1}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}}\right)\right]\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\varphi_{0,\Delta_j}(u_j-u_{j-1})du_1\ldots du_n,$$

де $\beta_j=h_j(t_{j-1})-u_{j-1}, 1\le j\le n+1$, $\varphi_{0,\Delta}(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{2\Delta}}}{\sqrt{2\pi}}$ – щільність гауссівського розподілу з нульовим математичним сподіванням і дисперсією Δ, а $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_{0,1}(u)du$ – функція розподілу нормального розподілу.

***Зауваження* 1.** Теорема 4 справедлива і в граничному випадку, тобто при $t_{n+1}\to\infty$. У подальшому будемо використовувати саме граничний випадок.

Нехай

$$0=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}=1 \qquad (3)$$

і

$$1=y_0>y_1\ge\ldots\ge y_n>y_{n+1}=0. \qquad (4)$$

Теорема 3 [8]. Нехай $\{X(s,t): s,t\ge 0\}$ – це поле Ченцова на одиничному квадраті й ламана L має n точок зламу $Q_1,\ldots,Q_n$ з координатами $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ відповідно. Координати цих точок задовольняють умови (3), (4). Позначимо $\Delta_i=\frac{x_i}{y_i}, i=\overline{0,n}$, $u_0=0$. Тоді для будь-якого $\lambda>0$

$$P_n(\lambda)=P\left\{\sup_{(s;t)\in L}X(s;t)<\lambda\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda/y_1}\ldots\int_{-\infty}^{\lambda/y_n}\prod_{i=1}^{n}\times\left(1-\exp\left\{-2\lambda\left(\frac{\lambda}{y_n}-u_n\right)\right\}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left(1-\exp\left\{-\frac{2\left(\frac{\lambda}{y_{i-1}}-u_{i-1}\right)\left(\frac{\lambda}{y_i}-u_i\right)}{(\Delta_i-\Delta_{i-1})}\right\}\right)\times$$

$$\times\varphi_{0,\Delta_i-\Delta_{i-1}}(u_i-u_{i-1})du_1\ldots du_n.$$

Основні результати

При доведенні теореми 3 за допомогою перетворень Дуба виникла необхідність використання результатів теореми 2. Отже, якщо задано координати точок зламу ламаної, по якій знаходиться розподіл максимуму поля Ченцова, то однозначно знаходяться коефіцієнти функції $h(t)$ в задачі 1. Цілком природнім є пошук зворотнього зв'язку між задачами. Тобто для заданих коефіцієнтів функції $h(t)$ потрібно знайти відповідні координати точок зламу ламаної в задачі 2.

Дослідження оберненої задачі також дає відповідь на питання, чи може функції $h(t)$ відповідати цілий клас кривих, по яких знаходиться розподіл максимуму поля Ченцова. Якщо буде знайдено клас кривих, то це дасть можливість знаходити точний розподіл максимуму поля Ченцова по цих кривих, використавши відомий результат для вінерівського процесу.

Теорема 4. Нехай $\{X(s,t): s,t\ge 0\}$ – це поле Ченцова на одиничному квадраті, $w(t)$ – вінерівський процес і ламана L має n точок зламу $Q_1,\ldots,Q_n$ з координатами $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ відповідно. Координати цих точок задовольняють умови (3), (4). Зафіксуємо $\lambda>0$. Нехай

1) $t_i=\frac{x_i}{y_i}, i=\overline{0,n}$;

2) $a_i=\frac{\lambda(y_{i-1}-y_i)}{x_iy_{i-1}-x_{i-1}y_i}, i=\overline{1,n}; a_{n+1}=\lambda$;

3) $b_i=\frac{\lambda(x_i-x_{i-1})}{x_iy_{i-1}-x_{i-1}y_i}, i=\overline{2,n+1}; b_1=\lambda$.

Тоді розв'язку задачі 2 однозначно відповідає розв'язок задачі 1.

Доведення. Спочатку перевіримо, чи такі параметри задовольняють умови задачі 1.

З умови (4) випливає, що $y_{i-1}-y_i\ge$ $\ge 0, i=\overline{1,n+1}$.

З (3) отримаємо, що

$$x_i>x_{i-1}, i=\overline{1,n+1}, \qquad (5)$$

а з (4) маємо

$$y_{i-1}\ge y_i,\ i=\overline{1,n+1}. \qquad (6)$$

Оскільки $x_i, y_i > 0, i = \overline{1,n},$ то, помноживши почленно нерівності (5) і (6), отримаємо, що $x_i y_{i-1} > x_{i-1} y_i, i = \overline{1,n}.$ Отже,

$$\frac{\lambda(y_{i-1} - y_i)}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i} = a_i \geq 0, i = \overline{1,n}; a_{n+1} = \lambda > 0;$$

$$b_{n+1} = \frac{\lambda(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}} = \frac{\lambda(1 - x_n)}{y_n} > 0,$$

оскільки $x_n < 1$ і $y_n > 0;$

$$h_i(t_i) = a_i t_i + b_i =$$

$$= \frac{\lambda(y_{i-1} - y_i)}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i} \cdot \frac{x_i}{y_i} + \frac{\lambda(x_i - x_{i-1})}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i} =$$

$$= \frac{\lambda(x_i y_{i-1} - x_i y_i + x_i y_i - x_{i-1} y_i)}{(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) y_i} = \frac{\lambda}{y_i} > 0, i = \overline{1,n}.$$

Аналогічно

$$h_{i+1}(t_i) = a_{i+1} t_i + b_{i+1} =$$

$$= \frac{\lambda(y_i - y_{i+1})}{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}} \cdot \frac{x_i}{y_i} + \frac{\lambda(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}} =$$

$$= \frac{\lambda(x_i y_i - x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i - x_i y_i)}{(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) y_i} =$$

$$= \frac{\lambda}{y_i} = h_i(t_i), i = \overline{1,n}.$$

Отже, умови теореми 2 виконуються. Тепер перевіримо правильність вибору параметрів функції $h(t)$.

Запишемо рівняння ламаної: $L = \{(s,t) \mid t = v(s)\}$, де

$$v(s) = I_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(-\frac{s(y_{i-1} - y_i)}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \times I_{(x_{i-1}; x_i]}(s).$$

Позначимо $X_L(s)$ звуження поля Ченцова на ламану L. Використавши перетворення Дуба, отримаємо:

$$P\left\{ \sup_{(s;t) \in L} X(s;t) < \lambda \right\} = P\left\{ \sup_{s \in [0,1]} X(s; v(s)) < \lambda \right\} =$$

$$= P\left\{ \sup_{s \in [0,1]} X_L(s) < \lambda \right\} = P\left\{ \sup_{s \in [0,\infty)} X_L(a^{-1}(s)) < \lambda \right\} =$$

$$= P\left\{ \sup_{s \in (0,\infty)} \left(\frac{X_L(a^{-1}(s))}{v(a^{-1}(s))} - \frac{\lambda}{v(a^{-1}(s))} \right) < 0 \right\} =$$

$$= P\left\{ \sup_{s \in (0,\infty)} w(t) - \frac{\lambda}{v(a^{-1}(s))} < 0 \right\} =$$

$$= P\left\{ w(t) < \frac{\lambda(x_i - x_{i-1})}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i} + \frac{\lambda t(y_{i-1} - y_i)}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}; \quad t \in (\Delta_{i-1}; \Delta_i], \ i = \overline{1,n}; \quad w(t) < \frac{\lambda(1 - x_n)}{y_n} + \lambda t, \ t > \Delta_n \right\}.$$

Порівнявши останню рівність з (1), отримаємо:

$$t_i = \frac{x_i}{y_i}, i = \overline{0,n};$$

$$a_i = \frac{\lambda(y_{i-1} - y_i)}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}, \ i = \overline{1,n+1};$$

$$b_i = \frac{\lambda(x_i - x_{i-1})}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}, \ i = \overline{1,n+1},$$

що і потрібно було довести.

Теорема 5. Зафіксуємо $\lambda > 0$. Нехай $n \geq 1$, $t_0 = 0$ і $t_{j-1} < t_j < \infty, 1 \leq j \leq n.$ Послідовності чисел $\{a_j, j = \overline{1,n+1}\}, \{b_j, j = \overline{1,n+1}\}$ такі, що:

1) $a_j \geq 0, j = \overline{1,n}; a_{n+1} = \lambda;$

2) $b_j > 0, j = \overline{2,n+1}; b_1 = \lambda;$

3) $a_i t_i t_{i-1} + b_i t_{i-1} < a_{i-1} t_i t_{i-1} + b_{i-1} t_i, i = \overline{1,n+1};$

4) $a_{i-1} t_{i-1} + b_{i-1} < a_i t_i + b_i, i = \overline{1,n+1}.$

Позначимо $h_j(t) = a_j t + b_j, 1 \leq j \leq n+1.$ Нехай $y_i = \dfrac{\lambda}{h_i(t_i)}, \ x_i = \dfrac{\lambda t_i}{h_i(t_i)}, \ i = \overline{1,n}.$

Тоді розв'язку задачі 1 однозначно відповідає розв'язок задачі 2.

Доведення. Розглянемо поле Ченцова $\{X(s,t) : s,t \geq 0\}$. Позначимо $X_L(s)$ звуження поля Ченцова на криву L, яка задається як множина точок: $L = \{(s,t) \mid s = f(s), s \in [0,1]\}$, де $f(s)$ – невідома спадна функція, яка задовольняє умову $f(1) = 0$. Знайдемо цю функцію, використовуючи перетворення Дуба. Позначимо $a(t) = \dfrac{t}{f(t)}$. Тоді

$$P\left\{\sup_{(s;t)\in L} X(s;t)<\lambda\right\}=P\left\{\sup_{s\in[0,1]} X(s;f(s))<\lambda\right\}=$$

$$=P\left\{\sup_{s\in[0,1]} X_L(s)<\lambda\right\}=P\left\{\sup_{s\in[0,\infty)} X_L(a^{-1}(s))<\lambda\right\}=$$

$$=P\left\{\sup_{s\in(0,\infty)}\left(w(s)-\frac{\lambda}{f(a^{-1}(s))}\right)<0\right\}.$$

Порівнюючи останню рівність із ймовірністю (1) задачі 1, отримаємо

$$\frac{1}{f\left(\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}\right)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i^*t+b_i^*)I_{(t_{i-1},t_i]}(t)+(a_{n+1}^*t+b_{n+1}^*)I_{(t_n,\infty)}(t),$$

де $a_i^*=\frac{a_i}{\lambda}, b_i^*=\frac{b_i}{\lambda}, i=\overline{1,n+1}$. Домножимо обидві частини рівності на $\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}$. Тоді

$$\frac{\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}}{f\left(\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}\right)}=\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^*t+b_i^*)I_{(t_{i-1},t_i]}(t)+(a_{n+1}^*t+b_{n+1}^*)I_{(t_n,\infty)}(t)\right).$$

Оскільки $\frac{\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}}{f\left(\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}\right)}=t$, то

$$t=\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^*t+b_i^*)I_{(t_{i-1},t_i]}(t)+(a_{n+1}^*t+b_{n+1}^*)I_{(t_n,\infty)}(t)\right),$$

$$\left(\frac{t}{f(t)}\right)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t}{(a_i^*t+b_i^*)}I_{(t_{i-1},t_i]}(t)+$$

$$+\frac{t}{(a_{n+1}^*t+b_{n+1}^*)}I_{(t_n,\infty)}(t),$$

$$\frac{t}{f(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^*t}{(1-a_i^*t)}I_{(\Delta_{i-1},\Delta_i]}(t)+$$

$$+\frac{b_{n+1}^*t}{(1-a_{n+1}^*t)}I_{(\Delta_n,\Delta_{n+1})}(t).$$

Звідси

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-a_i^*t)}{b_i^*}I_{(\Delta_{i-1},\Delta_i]}(t)+$$

$$+\frac{(1-a_{n+1}^*t)}{b_{n+1}^*}I_{(\Delta_n,\Delta_{n+1})}(t), \quad (7)$$

де $\Delta_i=\frac{t_i}{a_i^*t_i+b_i^*}, i=\overline{1,n}$, а $\Delta_{n+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{a_{n+1}^*t+b_{n+1}^*}=1.$

Отже, задачі 1 однозначно відповідає функція $f(t)$. Як бачимо, це рівняння ламаної.

Тепер розглянемо поле Ченцова на ламаній з n точками злому $Q_1,\ldots,Q_n$ з координатами $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ відповідно. В загальному випадку рівняння такої ламаної задається у вигляді $L=\{(s,t)\mid t=f(s)\}$, де

$$f(s)=I_{\{0\}}(s)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\left(-\frac{s(y_{i-1}-y_i)}{x_i-x_{i-1}}+\frac{x_iy_{i-1}-x_{i-1}y_i}{x_i-x_{i-1}}\right)I_{(x_{i-1};x_i]}(s). \quad (8)$$

Порівняємо відповідні коефіцієнти функцій у (7) і (8). Отримаємо

$$\frac{\lambda}{b_i}=\frac{x_iy_{i-1}-x_{i-1}y_i}{x_i-x_{i-1}},\frac{a_i}{b_i}=\frac{y_{i-1}-y_i}{x_i-x_{i-1}},$$

$$x_i=\frac{t_i}{a_it_i+b_i}, i=\overline{1,n}.$$

Отже, маємо

$$y_i=\frac{\lambda}{h_i(t_i)}, x_i=\frac{\lambda t_i}{h_i(t_i)}, i=\overline{1,n}.$$

Оскільки координати точок злому мають задовольняти (3) і (4), то параметри задачі 1 додатково мають задовольняти такі умови:

$$a_it_it_{i-1}+b_it_{i-1}<a_{i-1}t_it_{i-1}+b_{i-1}t_i, i=\overline{1,n+1}; \quad (9)$$

$$a_{i-1}t_{i-1}+b_{i-1}<a_it_i+b_i, i=\overline{1,n+1}; \quad (10)$$

$$a_{n+1}=\lambda, b_1=\lambda.$$

***Зауваження* 1.** Розглянемо задачу 2. Зафіксуємо $n > j > 1$. Нехай $y_i \to 1,\ 1 \le i < j,\ x_j \to 1,$ $y_j \to 1,\ x_i \to 1,\ i > j$ (тобто ламана прямує до межі квадрата). Тоді в задачі 1: $h(t) \to$ $\to \lambda I_{[0,1)}(t) + \lambda t I_{[1,\infty)}$.

***Зауваження* 2.** Розглянемо задачу 2. Нехай $y_i \to 1 - x,\ 1 \le i \le n$ (тобто ламана прямує до діагоналі квадрата). Тоді в задачі 1: $h(t) \to$ $\to \lambda t + \lambda$.

***Приклад*.** Розглянемо ймовірність вигляду: $A = P\{w(t) < (2t+1)\lambda, t \in [0,1];\ w(t) < 3t\lambda, t \in (1,2],$ $w(t) < (t+4)\lambda, t > 2\}$.

Необхідно знайти відповідні координати точок зламу ламаної з задачі 2.

***Розв'язання*.** Випишемо параметри задачі 1 із ймовірності А: $a_1 = 2\lambda$, $b_1 = \lambda$, $t_1 = 1$, $a_2 = 3\lambda$, $b_2 = 0$, $t_2 = 2$, $a_3 = \lambda$, $b_3 = 4\lambda$. З теореми 5 випливає, що $x_1 = \frac{1}{3}, y_1 = \frac{1}{3}$ і $x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{4}$. Отже, ламана має такі дві точки зламу: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Висновки

Нашими попередниками знайдено точні розподіли поля Ченцова по ламаних з однією та більше точками зламу (задача 2), досліджено ймовірність перетину вінерівським процесом з лінійним, кусково-лінійним зсувом певного рівня (задача 1). У попередніх роботах при дослідженні задачі 2 використовували результати задачі 1. Зв'язок між розв'язками цих задач не було встановлено.

Ми знайшли умови, за яких розв'язку задачі 2 однозначно відповідає розв'язок задачі 1. Було розв'язано обернену задачу. Тобто було знайдено умови переходу від знаходження ймовірності перетину вінерівським процесом з кусково-лінійним зсувом нульового рівня до знаходження відповідного розподілу поля Ченцова по ламаних. Ці задачі ми розв'язали за допомогою перетворень Дуба.

Доведено, що за певних умов кусково-лінійній функції зсуву однозначно відповідає ламана з *n* точками зламу. Отже, не існує класу кривих, по яких знаходиться розподіл максимуму поля Ченцова і які б відповідали задачі 1.

Оскільки при доведенні теореми 5 ми додатково накладали умови (9), (10) на параметри функції зсуву, то задача 1 є "ширшою", ніж задача 2.

Проблематику статті можна розширити до випадку, коли в (1) розглядається деяка неперервна функція *h*, а в (2) ламана *L* замінюється на клас певних кривих. Для цього необхідно буде знайти точний вираз для ймовірності перетину вінерівським процесом з криволінійним зсувом нульового рівня.

Список літератури

1. *Doob J.L.* Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems // Ann. Math. Statist. – 1949. – **20**. – P. 393–403.
2. *Malmquist S.* On certain confidence contours for distribution functions // Ann. Math. Statist. – 1954. – **25**. – P. 523–533.
3. *Paranjape S.R., Park C.* Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh-Wiener process on the boundary // J. Appl. Probab. – 1973. – **10**, № 4. – P. 875–880.
4. *Paranjape S.R., Park C.* Probabilities of Wiener paths crossing differentiable curves // Pacific J. Math. – 1974. – **53**. – P. 579–583.
5. *Klesov O.I., Kruglova N.V.* The distribution of a functional of theWiener process and its application to the Brownian sheet // Statistics. – 2011. – **45**, № 1. – P. 19–26.
6. *Клесов І.І.* Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1995. – Вип. 51. – С. 63–66.
7. *Клесов О.І., Круглова Н.В.* Розподіл функціоналів типу максимуму для двопараметричного поля Ченцова // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 4. – С. 136–141.
8. *Kruglova N.V.* Distribution of the maximum of the Chentsov random field // Theory Stoch. Proc. – 2008. – № 1. – P. 76–81.

References

1. J.L. Doob, "Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems", *Ann. Math. Statist*, vol. 20, pp. 393–403, 1949.
2. S. Malmquist, "On certain confidence contours for distribution functions", *Ann. Math. Statist*, vol. 25, pp. 523–533, 1954.
3. S.R. Paranjape and C. Park, "Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh-Wiener process on the boundary", *J. Appl. Probab.*, vol. 10, no. 4, pp. 875–880, 1973.

4. R. Paranjape and C. Park, "Probabilities of Wiener paths crossing differentiable curves", *Pacific J. Math*, vol. 53, pp. 579–583, 1974.
5. O.I. Klesov and N.V. Kruglova, "The distribution of a functional of theWiener process and its application to the Brownian sheet", *Statistics*, vol. 45, no. 1, pp. 19–26, 2011.
6. I.I. Klesov "On the probability of attainment of a curvilinear level by a Wiener field", *Teoriya Ymovirnostey ta Matematychna Statystyka*, no. 51, pp. 63–67, 1995 (in Ukrainian).
7. O.I. Klesov and N.V. Kruglova "The distribution of a functional of the maximum type for the two-parameter Chentsov random field", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 136–141, 2007 (in Ukrainian).
8. N.V. Kruglova, "Distribution of the maximum of the Chentsov random field", *Theory Stoch. Proc.*, no. 1, pp. 76–81, 2008.

Н.В. Прохоренко

ЗВ'ЯЗОК РОЗПОДІЛУ МАКСИМУМУ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ З ЛІНІЙНИМ ЗСУВОМ ІЗ РОЗПОДІЛОМ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА ПО ЛАМАНИХ

Проблематика. Досі невідомий імовірнісний розподіл функціоналів від поля Ченцова, таких як супремум на одиничному квадраті. Використовуючи відомі результати для стандартного вінерівського процесу, можна отримати деяку тривіальну теорію імовірнісних розподілів для $X(s,t)$. О. Клесов і Н. Круглова виразили ймовірність того, що вінерівський процес перетне кусково-лінійний рівень, у термінах *n*-кратного інтеграла від функції, що містить експоненту та щільність стандартної гауссівської величини. Також вони використали цей результат для дослідження максимуму поля Ченцова на ламаних. Ми розглядаємо задачу знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по ламаних з декількома точками зламу і задачу знаходження ймовірності перетину вінерівським процесом з лінійним зсувом нульового рівня.

Мета дослідження. Метою дослідження є встановлення умов відповідності між цими проблемами.

Методика реалізації. При доведенні основних результатів було використано перетворення Дуба.

Результати дослідження. Знайдено умови відповідності між задачею знаходження розподілу максимуму поля Ченцова по ламаних з декількома точками зламу та задачею знаходження ймовірності перетину вінерівським процесом з лінійним зсувом нульового рівня. Доведено, що за певних умов кусково-лінійній функції зсуву однозначно відповідає ламана з n точками зламу.

Висновки. За певних умов між розглянутими задачами існує двосторонній зв'язок.

Ключові слова: поле Ченцова; розподіл максимуму; вінерівський процес; перетворення Дуба.

Н.В. Прохоренко

СВЯЗЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА С ЛИНЕЙНЫМ СДВИГОМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА НА ЛОМАНЫХ

Проблематика. До сих пор неизвестно вероятностное распределение функционалов от поля Ченцова, таких как супремум на единичном квадрате. Используя известные результаты для стандартного винеровского процесса, можно получить некоторую тривиальную теорию вероятностных распределений для $X(s,t)$. О. Клесов и Н. Круглова выразили вероятность того, что винеровский процесс пересечет кусочно-линейный уровень, в терминах *n*-кратного интеграла от функции, содержащей экспоненту и плотность стандартной гауссовской величины. Также они использовали этот результат для исследования распределения максимума поля Ченцова на ломаных. Мы рассматриваем задачу нахождения распределения максимума поля Ченцова на ломаных с несколькими точками излома и задачу нахождения вероятности пересечения нулевого уровня винеровским процессом с кусочно-линейным сдвигом.

Цель исследования. Нахождение условий соответствия между этими проблемами – это цель нашего исследования.

Методика реализации. При доказательстве основных результатов использовались преобразования Дуба.

Результаты исследования. Найдены условия соответствия между задачей нахождения распределения максимума поля Ченцова на ломаных с несколькими точками излома и задачей нахождения вероятности пересечения нулевого уровня винеровским процессом с кусочно-линейным сдвигом. Доказано, что при определенных условиях кусочно-линейной функции сдвига однозначно соответствует ломаная с n точками излома.

Выводы. При определенных условиях существует двусторонняя связь между рассматриваемыми проблемами.

Ключевые слова: поле Ченцова; распределение максимума; винеровский процесс; преобразования Дуба.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
7 травня 2015 року