УДК 621.314

Є.В. Вербицький, канд. техн. наук
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Визначення кратності ШІМ напруги інвертора за значенням коефіцієнта гармонік на основі подвійного ряду Фур'є

Описано стандартну процедуру розрахунку фільтра інверторів з широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ) за значенням коефіцієнту гармонік. Зазначено, що за постійного значення кратності модуляції вихідна напруга має запас за значенням коефіцієнту гармонік при не повному навантаженні інвертора. Запропоновано динамічно змінювати кратність модуляції ШІМ для забезпечення заданого значення коефіцієнту гармонік і зменшення динамічних втрат у напівпровідникових приладах. Виведено формулу для розрахунку кратності модуляції за значенням коефіцієнту гармонік, параметрів фільтра і навантаження на основі подвійного ряду Фур'є. Бібл. 3, рис. 1.

Ключові слова: *широтно-імпульсна модуляція; кратність модуляції; ряд Фур'є двох змінних.*

Вступ

Імпульсна модуляція є одним з ефективних методів формування необхідної спектральної характеристики сигналів. Тому її використовують для перетворення параметрів потужних сигналів, якими виступають напруга або струм, у перетворювачах електричної енергії. На практиці, внаслідок простоти реалізації, найбільшого поширення набув широтно-імпульсний тип модуляції (ШІМ). Для придушення вищих гармонік, сформованих несучою функцією, на виході ШІМ-перетворювачів встановлюють фільтри. У випадку формування змінної напруги інверторами, якість вихідної напруги оцінюють значенням коефіцієнту гармонік $K_{Г}$, яке не повинно перевищувати максимального значення $K_{Гmax}$. Значення коефіцієнту гармонік залежить від опору навантаження параметрів фільтра, кратності модуляції P, тому параметри фільтра розраховують для найгіршого випадку – в інших режимах роботи, якщо кратність модуляції P напруги є постійним параметром, вихідна напруга має значний запас за значенням коефіцієнту гармонік. За умови варіації значення кратності модуляції Р для підтримання постійного значення $K_{Г}$ можливо зменшити обсяг динамічних втрат у перетворювачі і підвищити його коефіцієнт корисної дії (ККД). При проектуванні фільтрів використовують трудомістку процедуру розрахунку його параметрів за значенням коефіцієнту гармонік $K_{Г}$, яка складається з таких етапів [3]:

1. Розрахунок спектральної характеристики ШІМ сигналу без фільтра з використанням ряду Фур'є однієї змінної.
2. Розрахунок спектральної характеристики відфільтрованого ШІМ сигналу множенням амплітуди кожної гармоніки ШІМ сигналу C_n на передавальну характеристику фільтра K_n.
3. Сумування квадратів амплітуд гармонік і розрахунок коефіцієнту гармонік за формулою:

$$K_{\tilde{A}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty}(K_n C_n)^2}}{K_1 C_1}, \qquad (1)$$

де C_1 - амплітуда першої гармоніки; K_1 - коефіцієнт передавання фільтра на частоті першої гармоніки.

Оскільки процедура перерахунку кратності модуляції P повинна здійснюватись у режимі реального часу, необхідно розробити методику обчислення нескінчених сум формули (1) у згорнутому аналітичному виді.

Розробка методики

Розглянемо методику розрахунку параметрів фільтра першого порядку за заданим значенням коефіцієнту гармонік $K_{Г}$ з індуктивністю L і опором R. Передавальна характеристика фільтра K_n для гармоніки з номером n дорівнює:

$$K_n = \frac{R}{\sqrt{(n\Omega L)^2 + R^2}}, \qquad (2)$$

де Ω - частота модулюючої функції.

За умови використання ШІМ у частотній області перша гармоніка відмежована від вищих гармонік з ненульовим значенням ділянкою спектру довжиною порядку P. Тому для вищих гармонік з ненульовим значенням виконується умова $(n\Omega L)^2 >> R^2$ і формулу (2) можна записати таким чином:

$$K_n = \frac{R}{n\Omega L}. \qquad (3)$$

З урахуванням виразу (3), формула (1) має такий вид:

$$K_Г = \sqrt{\left(\frac{R^2}{(\Omega L)^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n^2}{n^2}\right) / \left(\frac{C_1^2 R^2}{(\Omega L)^2 + R^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{(\Omega\tau)^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n^2}{n^2}\right) / \left(\frac{C_1^2}{(\Omega\tau)^2 + 1}\right)}, \qquad (4)$$

де $\tau = L/R$ – постійна часу фільтра.

Формулу (4) можливо використати для підтримання значення коефіцієнту гармонік на постійному рівні за умови зміни значення сталої часу фільтра шляхом вибору необхідного значення кратності модуляції P, для чого необхідно виразити нескінченні суми гармонік, які в ній містяться, у згорнутій формі.

Для опису спектральної характеристики в згорнутому виді доцільно використати ряд Фур'є двох змінних, у якому одна змінна, наприклад x пропорційна несучій функції $x = \omega \cdot t$, інша змінна, наприклад y – моделюючій функції $y = \Omega \cdot t$, відношення між якими рівне значенню параметра модуляції $x / y = P$.

Коефіцієнти ряду Фур'є двох змінних C_{mn}, які є спектральними складовими сигналу з кратністю m відносно частоти несучої функції і кратністю n відносно частоти модулюючої функції, розраховують за формулою:

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y) e^{j(mx+ny)} dxdy, \qquad (5)$$

де $f(x,y)$ – функція, спектр якої розраховується.

Застосування ряду Фур'є двох змінних дає можливість розрахувати спектральну характеристику модульованого сигналу в аналітичній формі, що, на відміну від ряду Фур'є однієї змінної дозволяє розрахувати інтегральні показники модульованого сигналу, наприклад коефіцієнту гармонік, у згорнутій формі. Вирішення цієї задачі є особливо важливим для ШІМ II роду, оскільки для цього типу модуляції положення фронтів імпульсів розраховується внаслідок вирішення трансцендентних рівнянь, що зменшує точність результату і збільшує обсяг математичних розрахунків. Формула для розрахунку амплітуди $(2k-1)$ гармоніки напруги C_{2k-1}, модульованою двосторонньою, однополярною ШІМ-II на основі ряду Фур'є двох змінних [1]:

$$C_{2k-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2H}{m\pi} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m), \qquad (6)$$

де H – амплітуда модульованого сигналу; $J_z(y)$ – функція Бесселя порядку z від аргументу y; μ – глибина модуляції.

Парні гармоніки модульованої напруги дорівнюють нулю $C_{2k} = 0$.

Амплітуда першої гармоніки C_1 дорівнює амплітуді модулюючої функції, у випадку гармонічного задавального сигналу $A\sin(\Omega t)$, $C_1 = A = \mu H$.

Підставимо значення, розрахованих на основі ряду Фур'є двох змінних, у формулу (4):

$$K_Г = \sqrt{\frac{\frac{1}{(\Omega\tau)^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2H}{m\pi} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\right)^2}{A^2 / \left((\Omega\tau)^2 + 1\right)}}. \qquad (7)$$

Розглянемо квадрати суми ряду, формули (7) окремо і представимо його у формі:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2H}{m\pi} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\right)^2 = \left(\frac{2H}{\pi}\right)^2 \times$$
$$\times\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{2k-1-mP}^2(\pi\mu m)}{m^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m) \times \sum_{m_1=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1}}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1)\right). \qquad (8)$$

Виділимо у формулі (8) складові S_m і $S_{(m)(m1)}$:

$$S_m = \frac{J_{2k-1-mP}^2(\pi\mu m)}{m^2};$$

$$S_{(m)(m_1)} = 2\frac{(-1)^m}{m} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\frac{(-1)^{m_1}}{m_1} \times J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1). \quad (9)$$

У цьому випадку ряд (8) можна записати у такій формі:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2H}{m\pi} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\right)^2 = \left(\frac{2H}{\pi}\right)^2\left(\sum_{m=1}^{\infty} S_m + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m_1=m+1}^{\infty} S_{(m)(m_1)}\right) \quad (10)$$

Підставимо вираз формули (10) у формулу (7):

$$K_\Gamma = \sqrt{\frac{\left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} S_m + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m_1=m+1}^{\infty} S_{(m)(m_1)}\right)}{A^2/\left((\Omega\tau)^2+1\right)}}. \quad (11)$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо:

$$K_\Gamma = \sqrt{\frac{\left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{S_m}{(2k-1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m_1=m+1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{S_{(m)(m_1)}}{(2k-1)^2}\right)}{A^2/\left((\Omega\tau)^2+1\right)}}. \quad (12)$$

Розрахуємо суми по змінній k рядів формули (12) окремо:

$$G_m = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{S_m}{(2k-1)^2} = \frac{1}{m^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{J^2_{2k-1-mP}(\pi\mu m)}{(2k-1)^2}; \quad (13)$$

$$G_{(m)(m_1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{S_{(m)(m_1)}}{(2k-1)^2} = 2\frac{(-1)^{m+m_1}}{m\cdot m_1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{J_{2k-1-mP}(\pi\mu m) J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1)}{(2k-1)^2} \quad (14)$$

Спочатку розглянемо суму G_m, для її розрахунку введемо заміну $2z-1 = 2k-1-mP$.

$$G_m = \frac{1}{m^2}\sum_{z=2-mP}^{\infty}\frac{J^2_{2z-1}(\pi\mu m)}{(2z-1+mP)^2}. \quad (15)$$

З теорії функцій Бесселя відомо [2], що за умови, коли модуль аргументу функції Бесселя перевищує її аргумент, значення функції Бесселя прямує до нуля:

$$J_n(z) \to 0, |n|+1 > z. \quad (16)$$

Сума ряду (15) починається зі значення $z = 2-mP$, оскільки $P >> \pi\mu$, виконується умова $|2mP-3| >> |\pi m\mu|$, тому значення всіх членів ряду, починаючи від мінус нескінченності до $z = 2-mP$ прямують до нуля і їх для спрощення подальших розрахунків можна включити до суми (16):

$$G_m = \frac{1}{m^2}\sum_{z=2-mP}^{\infty}\frac{J^2_{2z-1}(\pi\mu m)}{(2z-1+mP)^2} \cong$$
$$\cong \frac{1}{m^2}\sum_{z=-\infty}^{\infty}\frac{J^2_{2z-1}(\pi\mu m)}{(2z-1+mP)^2}. \quad (17)$$

Для функцій Бесселя виконується рівність:

$$J_{2z-1}(y) = -J_{-(2z-1)}(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J^2_{2z-1}(y) = J^2_{-(2z-1)}(y), \quad (18)$$

тому ряд (17) можна записати так:

$$G_m = \frac{1}{m^4P^2}\sum_{z=1}^{+\infty} J^2_{2z-1}(m\pi\mu)\times$$
$$\left(\frac{1}{(1+(2z-1)/mP)^2} + \frac{1}{(1-(2z-1)/mP)^2}\right). \quad (19)$$

Використаємо розклад функцій

$$(1+z)^{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l z^l;\ (1-z)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l, \quad (20)$$

і підставимо у формулу (19)

$$G_m = \frac{1}{m^4P^2}\sum_{z=1}^{+\infty} J^2_{2z-1}(m\pi\mu)\times$$
$$\left(\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{2z-1}{mP}\right)^l\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2z-1}{mP}\right)^l\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{m^4P^2}\sum_{z=1}^{+\infty} J^2_{2z-1}(m\pi\mu)\left(2+2\sum_{l=1}^{\infty}2l\left(\frac{2z-1}{mP}\right)^{2l}\right). \quad (21)$$

Знайдемо суму окремих складових ряду (21).

Сума

$$G_{m0} = \frac{2}{m^4P^2}\sum_{z=1}^{+\infty} J^2_{2z-1}(m\pi\mu), \quad (22)$$

розрахована в [2]:

$$G_{m0} = \frac{(1 - J_0(2m\pi\mu))}{2m^4P^2}. \quad (23)$$

Розглянемо суму

$$G_{m1} = \frac{4}{m^4P^2}\sum_{z=1}^{+\infty}\left(\frac{2z-1}{mP}\right)^2 J_{2z-1}^2(m\pi\mu) =$$

$$= \frac{4}{m^6P^4}\sum_{z=1}^{+\infty}(2z-1)^2 J_{2z-1}^2(m\pi\mu). \quad (24)$$

Для розрахунку суми (24) скористаємось формулою [2]

$$zJ_z(y) = 0.5y(J_{z-1}(y) + J_{z+1}(y)). \quad (25)$$

Застосувавши тотожність (25) до формули (24), отримаємо:

$$G_{m1} = \frac{1}{m^4P^4}\sum_{z=1}^{+\infty}(\pi\mu)^2(J_{2z-2}(m\pi\mu) + J_{2z}(m\pi\mu))^2 =$$
$$= \frac{(\pi\mu)^2}{m^4P^4}\left(J_0^2(m\pi\mu) + 2\sum_{z=1}^{+\infty}J_{2z}^2(m\pi\mu) + 2\sum_{z=1}^{+\infty}J_{2z-2}(m\pi\mu)J_{2z}(m\pi\mu)\right). \quad (26)$$

Сума

$$J_0^2(m\pi\mu) + 2\sum_{z=1}^{+\infty}J_{2z}^2(m\pi\mu) = 1 + J_0(2m\pi\mu),$$

є табличною. Розрахуємо суму

$$2\sum_{z=1}^{+\infty}J_{2z-2}(m\pi\mu)J_{2z}(m\pi\mu) = $$
$$= \sum_{z=-\infty}^{+\infty}J_{2z-2}(m\pi\mu)J_{2z}(m\pi\mu). \quad (27)$$

Для функцій Бесселя з парним порядком виконується рівність

$$J_{2z-k}(y) = J_{k-2z}(y), \quad (28)$$

Використавши теорему сумування [2] до ряду (27), з урахуванням рівності (28), отримаємо:

$$\sum_{z=-\infty}^{+\infty}J_{2-2z}(m\pi\mu)J_{2z}(m\pi\mu) = J_2(2m\pi\mu)/2. \quad (29)$$

Отже,

$$G_{m1} = \frac{(\pi\mu)^2(1 + J_0(2m\pi\mu) + J_2(2m\pi\mu))}{(mP)^4}. \quad (30)$$

Порівнюючи значення сум G_{m0} і G_{m1}, можна зробити висновок, що $G_{m0}/G_{m1} \sim P^2$, аналогічно $G_{m0}/G_{m2} \sim P^4$ і т.д. Навіть для мінімальних значень параметра модуляції $P = 10$, значення суми G_{m0} на два порядки більше, ніж G_{m1} і на чотири - G_{m2}. Тому при практичних розрахунках сумами $G_{m2}...G_{mk}$ можна знехтувати, а доданок G_{m1} враховувати наближено.

Розглянемо ряд з складовою $S_{(m)(m1)}$

$$G_{(m)(m_1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{S_{(m)(m_1)}}{(2k-1)^2} = \frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1m}\times$$
$$\times\sum_{k=2}^{\infty}\frac{J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1)}{(2k-1)^2}. \quad (31)$$

Введемо заміну $2z - 1 = 2k - 1 - mP$

$$G_{(m)(m_1)} = \frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1m}\times$$
$$\sum_{z=2-mP}^{\infty}\frac{J_{2z-1}(\pi\mu m)J_{2z-1-(m_1-m)P}(\pi\mu m_1)}{(2z-1+mP)^2}. \quad (32)$$

З умови (16) можна зробити висновок, що межу сумування ряду можна почати з мінус нескінченності:

$$G_{(m)(m_1)} = \frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1m}\times$$
$$\sum_{z=-\infty}^{\infty}\frac{J_{2z-1}(\pi\mu m)J_{2z-1-(m_1-m)P}(\pi\mu m_1)}{(2z-1+mP)^2}. \quad (33)$$

Для розрахунку суми (33) використаємо розклад функцій (20)

$$G_{(m)(m_1)} = \frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1m^3P^2}\times\sum_{z=-\infty}^{+\infty}J_{2z-1}(\pi\mu m)J_{2z-1-(m_1-m)P}(\pi\mu m_1)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2z-1}{mP}\right)^k\right)^2. \quad (34)$$

Знайдемо суму окремих складових ряду (34).

$$G_{(m)(m_1)0} = \frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1m^3P^2}\times$$
$$\times\sum_{z=-\infty}^{+\infty}J_{2z-1}(\pi\mu m)J_{2z-1-(m_1-m)P}(\pi\mu m_1). \quad (35)$$

Розрахунок суми (35) можливий за умови використання теореми сумування для додатного значення аргументу другої функції Бесселя y_2

$$J_z(y_1+y_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y_1)J_{z-k}(y_2), \qquad (36)$$

і для від’ємного $(-y_2)$:

$$J_z(y_1-y_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y_1)J_{z-k}(-y_2)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k J_k(y_1)J_{z-k}(y_2). \qquad (37)$$

Віднявши вираз (37) від виразу (36) отримаємо:

$$J_z(y_1+y_2)-J_z(y_1-y_2)=$$

$$2\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k-1}(y_1)J_{z-(2k-1)}(y_2). \qquad (38)$$

Застосувавши формулу (36) до суми, наведеної у формулі (35), отримаємо:

$$G_{(m)(m_1)0}=\frac{(-1)^{m+m_1+1}}{m_1 m^3 P^2}\times\left(J_{(m_1-m)P}(\pi\mu(m_1+m))-J_{(m_1-m)P}(\pi\mu(m_1-m))\right). \qquad (39)$$

Знайдемо суму ряду $G_{(m)(m1)1}$

$$G_{(m)(m_1)1}=\frac{4(-1)^{m+m_1+1}}{m_1 m^4 P^3}\times\sum_{z=-\infty}^{+\infty}(2z-1)J_{2z-1}(\pi\mu m)J_{2z-1-(m_1-m)P}(\pi\mu m_1). \qquad (40)$$

Після використання формули (25) до виразу (40), отримаємо:

$$G_{(m)(m_1)1}=\frac{2(-1)^{m+m_1}}{m_1 m^3 P^3}\times\sum_{z=-\infty}^{+\infty}(J_{2z-2}(\pi\mu m)+J_{2z}(\pi\mu m))J_{(m_1-m)P-(2z-1)}(\pi\mu m_1). \qquad (41)$$

Використавши теорему додавання до виразу (41), отримаємо:

$$G_{(m)(m_1)1}=\frac{(-1)^{m+m_1}}{m_1 m^3 P^3}(J_{(m_1-m)P+1}(\pi\mu(m_1+m))+$$

$$+J_{(m_1-m)P+1}(\pi\mu(m_1-m))+J_{(m_1-m)P-1}(\pi\mu(m_1+m))+$$

$$+J_{(m_1-m)P-1}(\pi\mu(m_1-m))). \qquad (42)$$

Відношення сум $G_{(m)(m1)0}$ і $G_{(m)(m1)1}$ пропорційне параметру модуляції $G_{(m)(m1)0}/G_{(m)(m1)1}\sim P$, тому ряд $G_{(m)(m1)1}$ має швидку збіжність і для його розрахунку враховувати перші два його члени.

Порівняємо порядок значень сум G_{m0}, $G_{(m)(m1)0}$, $G_{(m)(m1)1}$ з використанням нерівності (16). Значення суми виражається через значення сум Бесселя нульового порядку, тому згідно з нерівністю (16), сума G_{m0} має ненульове значення для будь-якого аргументу. Суми $G_{(m)(m1)0}$, $G_{(m)(m1)1}$ виражаються через функції Бесселя з порядком, кратним параметру модуляції P, тому їх значення істотно відрізняється від нуля, для аргументів, які перевищують порядок функцій Бесселя. Оскільки суми $G_{(m)(m1)0}$, $G_{(m)(m1)1}$ залежать від значень двох параметрів m і m_1, спочатку розглянемо випадок, коли різниця значень параметрів дорівнює одиниці $m_1-m=1$ і сума рядів є найбільшою тому, що вони виражаються через функції Бесселя з мінімальним порядком.

$$G_{(m)(m_1)0}=\frac{\left(J_P(\pi\mu(m_1+m))-J_P(\pi\mu)\right)}{m_1 m^3 P^2}; \qquad (43)$$

$$G_{(m)(m_1)1}=\frac{-1}{m_1 m^3 P^3}(J_{P+1}(\pi\mu(m_1+m))+$$

$$+J_{P+1}(\pi\mu)+J_{P-1}(\pi\mu(m_1+m))+J_{P-1}(\pi\mu)). \qquad (44)$$

З урахуванням умови $P>>\pi\mu$ вирази (43) і (44) можна спростити:

$$G_{(m)(m_1)0}=\frac{J_P(\pi\mu(m_1+m))}{m_1 m^3 P^2}; \qquad (45)$$

$$G_{(m)(m_1)1}=$$

$$=\frac{-(J_{P+1}(\pi\mu(m_1+m))+J_{P-1}(\pi\mu(m_1+m)))}{m_1 m^3 P^3}. \qquad (46)$$

Оцінимо, за яких значень параметрів m і m_1 значення сум (45) і (46) істотно відрізняються від нуля для максимального значення глибини модуляції $\mu=1$, за якого значення рядів максимальні. Значення рядів $G_{(m)(m1)0}$, $G_{(m)(m1)1}$ починають відрізнятись від нуля за умови:

$$P<\pi(m_1+m). \qquad (47)$$

Для значення $P=10$: $m_1+m=3$, $P=20$: $m_1+m=7$, $P=30$: $m_1+m=11$. За умови, що різниця параметрів m і m_1 дорівнює одиниці $m_1-m=1$, $P=10$: $m_1=2$, $m=1$, $P=20$: $m_1=4$, $m=3$, $P=30$: $m_1=6$, $m=5$. Оскільки значення функцій Бесселя не перевищує одиниці, верхня межа суми рядів для різних значень параметрів модуляції можна оцінити так:

$P = 10$: $G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{2P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{2P^3}$.

$P = 20$:

$G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{108P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{108P^3}$.

$P = 30$:

$G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{750P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{750P^3}$.

Порівнюючи отримані верхні межі сум рядів $G_{(m)(m1)0}$ і $G_{(m)(m1)1}$ сум з сумою G_{m0}, за умови $m = 1$, можна зробити висновок, що їх значення співвимірні лише для параметра кратності модуляції $P = 10$. Для параметра кратності модуляції $P > 20$, суми $G_{(m)(m1)0}$ і $G_{(m)(m1)1}$ можна не враховувати, або враховувати наближено.

Якщо різниця параметрів $m_1 - m = 2$, значення функцій Бесселя істотно відрізняються від нуля у випадках - значення $P = 10$: $m_1 + m = 6$, $P = 20$: $m_1 + m = 14$, $P = 30$: $m_1 + m = 20$. За умови, що різниця параметрів m_1 і m дорівнює одиниці $m_1 - m = 2$, $P = 10$: $m_1 = 4$, $m = 2$, $P = 20$: $m_1 = 8$, $m = 6$, $P = 30$: $m_1 = 11$, $m = 9$.

Оскільки значення функцій Бесселя не перевищує одиниці, верхня межа суми рядів для різних значень параметрів модуляції можна оцінити так:

P = 10: $G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{32P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{32P^3}$.

P=20:

$G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{1728P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{1728P^3}$.

P=30:

$G_{(m)(m_1)0} = \dfrac{1}{8019P^2}$; $G_{(m)(m_1)1} = \dfrac{-1}{8019P^3}$.

З отриманих значень верхніх меж можна зробити висновок, що суми з умовою $m_1 - m > 1$ істотно не впливають на кінцевий результат.

Загалом можна зробити висновок, що для типових значень модуляції $P > 20$ значно вищий порядок, у порівнянні з іншими, має сума G_{m0} (23). Суму G_{m1} (30) можна враховувати наближено для додаткового підвищення точності розрахунків:

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{m1} \approx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pi\mu)^2}{(mP)^4} = \frac{\pi^6\mu^2}{90P^4}. \tag{48}$$

Один доданок суми G_{m0} також можливо виразити в згорнутому виді:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} G_{m0} &\approx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - J_0(2m\pi\mu))}{2m^4P^2} = \\ &= \frac{\pi^4}{180P^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(2m\pi\mu)}{2m^4P^2}\end{aligned}. \tag{49}$$

Згідно з формулами (48) і (49) сума квадратів вищих гармонік має такий вид:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\right)^2 \approx \\ &\approx \left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} (G_{m0} + G_{m1}) \approx \left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \times \\ &\times \left(\frac{\pi^4}{180P^2}\left(1 + \frac{2(\pi\mu)^2}{P^2}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(2m\pi\mu)}{2m^4P^2}\right).\end{aligned} \tag{50}$$

У випадку, коли кратність модуляції $P < 10$, для зменшення похибки розрахунків до суми (50) необхідно додати один член суми $G_{(m)(m1)0}$, формула (45):

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \times \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2k-1-mP}(\pi\mu m)\right)^2 \approx \\ &\approx \left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)^2 \times \\ &\times \left(\begin{array}{l}\dfrac{\pi^4}{180P^2}\left(1 + \dfrac{2(\pi\mu)^2}{P^2}\right) - \\ -\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(2m\pi\mu)}{2m^4P^2} + \frac{J_P(3\pi\mu)}{2P^2}\end{array}\right).\end{aligned} \tag{51}$$

Оцінка похибки розрахунків суми квадратів вищих гармонік

Сума ряду у кінцевому виразі формули (50) має швидку збіжність, тому для розрахунку значення суми квадратів вищих гармонік достатньо розрахувати декілька перших членів ряду. На рис. 1 наведено значення відносної похибки δ розрахунку суми квадратів вищих гармонік за умови врахування п’яти перших членів ряду суми для значень кратності модуляції $P1$ = 10, 20, 30 ,40, розрахованих за формулою (50) і похибки для кратності модуляції $P2$ = 10, розрахованою за формулою (51).

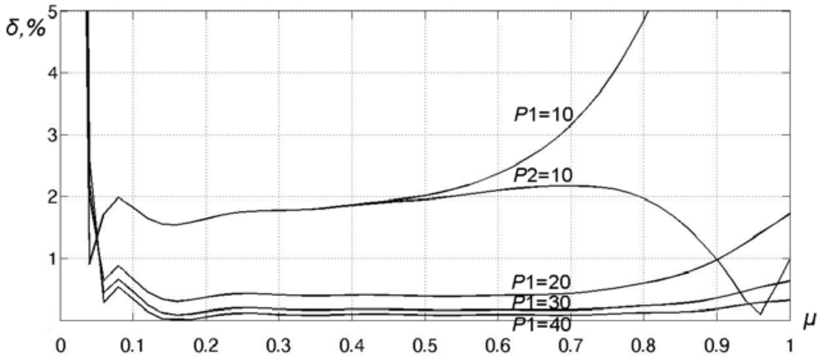

Рис. 1. Графіки залежностей відносної похибки δ значень суми квадратів вищих гармонік відносно значень глибини модуляції μ для різних значень параметру кратності модуляції *P*

З даних, наведених на рис. 1, можна зробити висновок, що окрім значення параметра модуляції $P1=10$, для забезпечення відносної похибки $\delta<2\%$ розрахунку суми квадратів вищих гармонік для значень глибини модуляції $\mu>0{,}15$ достатньо знайти суму перших 5 членів ряду у формулі (50), для зменшення похибки розрахунків при $P=0$ необхідно враховувати додатковий член розкладу за формулою (51).

Розрахунок кратності модуляції *P* за значенням коефіцієнту гармонік

Підстановка розрахованого значення суми квадратів вищих гармонік у формулу (12) дозволяє розрахувати значення кратності модуляції P за значенням коефіцієнту гармонік. Аналітичний вираз для розрахунку параметра P отримаємо для випадку $P>10$, який отримано у формулі (50):

$$K_{\tilde{A}}=\left(\frac{2H}{\pi\Omega\tau}\right)\times \times\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi^4}{180P^2}\left(1+\frac{(\pi\mu)^2}{P^2}\right)-\sum_{m=1}^{5}\frac{J_0(2m\pi\mu)}{2m^4P^2}\right)}{(\mu H)^2/\left((\Omega\tau)^2+1\right)}}, \qquad (52)$$

де $A=\mu H$.

Після ряду перетворень рівняння (52) перетвориться до виду:

$$a_2x^2+a_1x-a_0=0, \qquad (53)$$

де $a_2=\left((\Omega\tau)^2+1\right)\left(\frac{2}{\pi\Omega\tau}\right)^2\frac{\pi^6\mu^2}{180}$,

$$a_1=\left((\Omega\tau)^2+1\right)\left(\frac{2}{\pi\Omega\tau}\right)^2\left(\frac{\pi^4}{180}-\sum_{m=1}^{5}\frac{J_0(2m\pi\mu)}{2m^4}\right),$$

$$a_0=\mu^2K_\Gamma^2,$$

$$x=\frac{1}{P^2}.$$

Значення параметра кратності модуляції P розраховують з квадратного рівняння (53):

$$P=\frac{1}{\sqrt{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2a_0}}}. \qquad (54)$$

Для розрахунку кратності модуляції P за формулою (54) потрібно значно менше математичних операцій ніж за типовою процедурою і дозволяє явно виразити залежність кратність модуляції від значення коефіцієнту гармонік.

Висновок

В статі виведено аналітичну залежність кратності модуляції напруги P від значення коефіцієнта гармонік K_Γ, параметрів фільтра та навантаження, похибка розрахунків за якою не перевищує 2 %, що дає змогу зменшити обсяг динамічних втрат зміною кратності модуляції ШІМ у реальному часі за умови підтримання значення коефіцієнту гармонік на заданому рівні.

Список використаних джерел

1. *D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo.* Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. - IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. - 724 pp.
2. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. Часть I. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. - 798 с.
3. *Захаров А.* Расчет выходного фильтра на заданный коэффициент гармоник напряжения на нагрузке. Силовая электроника, 2005, № 1, с. 46-49.

Поступила в редакцию 12 мая 2015 г.

УДК 621.314

Е.В. Вербицкий, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,

ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Определение кратности модуляции ШИМ напряжения инвертора по значению коэффициента гармоник на основании двойного ряда Фурье

Описано стандартную процедуру расчета фильтра инверторов с ШИМ по значению коэффициента гармоник. Указано, что при постоянной кратности модуляции выходное напряжение имеет запас по значению коэффициента гармоник при неполной нагрузке инвертора. Предложено динамически изменять кратность модуляции ШИМ для обеспечения заданного значения коэффициента гармоник и уменьшения динамических потерь в полупроводниковых приборах. Выведена формула для расчета кратности модуляции по значению коэффициента гармоник, параметрам фильтра и нагрузки на основании двойного ряда Фурье. Библ. 3, рис. 1.

Ключевые слова: *широтно-импульсная модуляция; кратность модуляции; ряд Фурье двух переменных.*

UDC 621.314

I. Verbytskyi, Ph.D.

National technical university of Ukraine «Kyiv politechnic institute»,

Polytechnichna st., 16, building 12, Kyiv, 03056, Ukraine.

Features of voltage spectrum calculations modulated by PWM I and II on basis double Fourier series

Standard procedure for calculating the filter of inverter with PWM according to THD value are discrabed. Indicated that the constant multiplicity modulation of output voltage has a margin on the value of the THD at partial load of inverter. Dynamically changing of the PWM multiplicity for providing a constant THD value and reducig the dynamic losses in semiconductor devices are proposed. The formula for calculating the value of the modulation multiplicity according to THD value harmonic ratio, the filter parameters and the load on the basis of the double Fourier series is obtained. Bibl.3, fig. 1.

Keywords: *pulse width modulation; multiplicity of modulation; Double Fourier series.*

References

1. *Grahame Holmes, D., Thomas, A. Lipo*. (2003). Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. IEEE Press Series on Power Engineering. P. 724.
2. *Watson, G. N.* (1949). A treatise on the theory of Bessel functions [Teoria Besselevyh funktsiy]. Part I. Izdatelstvo inostrannoy literatury. P. 798. (Rus)
3. *Zakharov, A.* (2005). Output filter calculation according total harmonic distortion of load voltage [Raschet vyhodnogo filtra na zadannyi koefitsient garmonic naprazhenia na nagruzke]. Silovaya electronic, № 1, Pp. 46-49. (Rus)