

Relaciones de Convergencia y sus Aplicaciones sobre la Teoría de Crecimiento Económico^{*}

Jorge Andrés Tamayo Castaño^{**}

Julio de 2012

Banco de la República y Universidad Eafit

Asesor:

Munir Jalil Barney

Universidad Eafit

Maestría en Matemáticas Aplicadas.

Medellín

^{*}Este trabajo se presenta como monografía de grado para aspirar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Eafit.

^{**}Investigador del Centro de Estudios Económicos del Banco de la República y profesor de Economía Universidad Eafit. Los comentarios y opiniones aquí expresados no comprometen a ninguna de las instituciones aquí mencionadas.

Índice

I	Introducción	4
1.	Introducción	5
2.	Modelo Teórico	5
2.1.	Modelo de Solow ampliado con función de producción heterogénea.	6
2.2.	Modelo de Solow ampliado con función de producción y calidad en la educación heterogénea.	10
3.	Algunos hechos estilizados.	10
3.1.	PIB per-cápita	11
3.2.	Tasa de inversión sobre el PIB	13
3.3.	Capital humano	15
3.4.	Índice de apertura	17
II	Revisión de la Literatura	21
4.	Revisión de la Literatura	22
4.1.	Convergencia?	23
4.2.	El problema de las variables de control.	25
4.3.	El problema de heterogeneidad.	27
III	Metodología	29
5.	Introducción	30
6.	Preliminares.	30
6.1.	Conceptos Básicos de Teoría Asintótica	30
6.1.1.	Convergencia y Acotamiento de una Sucesión.	30
6.1.2.	Convergencia en Probabilidad y Acotamiento de una Sucesión Aleatoria.	32
6.1.3.	Convergencia en la media cuadrática y la desigualdad de Chebyshev.	34
6.1.4.	Ley de los Grandes Números para variables independientes e idénticamente distribuidas.	35
6.1.5.	Convergencia en Distribución.	35
6.1.6.	Teorema del Límite Central.	36
6.2.	Teoremas Límites para variables serialmente dependientes.	36
6.2.1.	Ley de los grandes números para procesos con covarianza estacionaria.	36
6.2.2.	Sucesiones de Martingalas en Diferencias.	38
6.2.3.	Estimación del modelo autoregresivo.	38
6.3.	Procesos Integrados de Orden 1.	39
6.3.1.	Movimientos Brownianos.	39
6.3.2.	Teorema Funcional del Límite Central.	40
6.3.3.	Teorema del Mapeo Continuo	42
6.3.4.	Aplicación a los procesos con raíz unitaria	43
6.4.	Estimación con Regresores de variación lenta.	45
6.4.1.	Conceptos y definiciones.	45
6.4.2.	Supuestos.	47
6.4.3.	Resultados y Propiedades Asintóticas.	49
6.4.4.	Transformación del modelo $\log t$	50

7. Test de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)	51
7.1. Representación de los Factores y Convergencia	51
7.1.1. Equilibrio de largo plazo y convergencia.	51
7.1.2. Transición Relativa de las Variables.	52
7.2. Relaciones de transición asintóticas.	52
7.3. Test de Convergencia	55
7.3.1. Supuestos del la prueba $\log t$	55
7.3.2. Prueba $\log t$	56
7.3.3. Convergencia por " <i>clusters</i> ".	61
IV Resultados y Conclusiones	62
8. Resultados	63
8.1. Inversión sobre PIB.	63
8.2. Capital Humano	65
8.2.1. Años promedio de Educación.	65
8.2.2. Años promedio de Educación Terciaria	66
8.3. Apertura	69
8.4. Estabilidad Macroeconómica	72
8.4.1. Estabilidad monetaria: Inflación al cuadrado	72
8.4.2. Estabilidad Fiscal: Consumo del gobierno/PIB	74
9. Conclusiones	78
10. Apéndice 1	79
10.1. Inversión/PIB	79
10.2. Capital Humano	80
10.3. Apertura	81
10.4. Estabilidad Macroeconómica	82
10.4.1. Volatilidad de la Inflación.	82
10.4.2. Gasto del Gobierno/PIB	85
V Bibliografía	88

Parte I
Introducción

1. Introducción

En este artículo se extiende el modelo presentado por Phillips y Sul (2009), empleando una estructura similar a la propuesta por Mankiw, Romer y Weil (1992), que tiene en cuenta la calidad del capital humano sobre el crecimiento y convergencia de los países. Este modelo extiende el modelo neoclásico de crecimiento para permitir heterogeneidad en la tasa de crecimiento de la tecnología y en la calidad de la educación de largo plazo, ofreciendo una variedad de posibilidades que incluye tanto convergencia a una senda de estado estacionario común, como distintas formas transitorias de divergencia y convergencia.

Una de las principales conclusiones del modelo presentado es que dos economías con niveles de PIB per-cápita distintos (debido a un estado inicial de tecnología desigual) pueden o no converger, dependiendo de si la tasa de crecimiento de la tecnología o la calidad de la educación es heterogénea, dando cabida a la formación de grupos (“clusters”) de convergencia, los cuales están supeditados a la convergencia de sus determinantes: capital humano, capital físico, entre otros.

Adicionalmente, el presente artículo investiga las características de estos determinantes teóricos y empíricos del PIB per-cápita, los cuales según el modelo anterior, comparten dinámicas de convergencia que determinan la del PIB per-cápita. Siguiendo el método propuesto por Phillips y Sul (2007), el cual permite probar la hipótesis de convergencia al tiempo que provee un nuevo procedimiento para detectar convergencia por “clusters”, Phillips y Sul (2009) investigan las propiedades de convergencia del PIB per-cápita para un conjunto de 146 países. En el esquema empleado por Phillips y Sul (2009), el único determinante de los grupos encontrados para el PIB per-cápita de los países, es la heterogeneidad de la tecnología.

En este artículo, se analizan las características de convergencia de los principales determinantes empíricos como teóricos, tanto para los grupos de Phillips y Sul (2009), como para la dinámica misma de la variable, con el fin de validar las implicaciones del modelo presentado en la sección 2 y/o el de Phillips y Sul (2009) y, contribuir al entendimiento de la relación que hay entre los determinantes del PIB y el mismo. Mucha atención se ha puesto en entender el impacto de estos determinantes sobre el PIB, pero poco énfasis se ha hecho en el análisis de estos.

Este artículo se divide en cuatro partes: la primera (I) presenta una motivación teórica al tema inspirada por Phillips y Sul (2007) junto con algunos hechos estilizados para algunas variables empleadas en este trabajo correspondientes a los determinantes empíricos y teóricos del PIB mencionados por la literatura. La segunda (II), presenta la revisión de la literatura de los artículos más sobresalientes del tema. La metodología es presentada en la parte tres (III)¹, mientras que la cuarta (IV) presenta los principales resultados y conclusiones de este artículo.

2. Modelo Teórico

A continuación se presenta una extensión del modelo de Solow, en donde se incorpora el capital humano siguiendo la propuesta de Mankiw, Romer y Weil (1992) junto con funciones de producción heterogéneas tal como se sugiere en Phillips y Sul (2009). El modelo que se presenta, asume funciones de producción con sendas de productividad distintas para cada uno de los países sobre los cuales se construye el modelo. Adicionalmente, se evalúa el impacto sobre el capital per cápita y sobre el capital humano, y la convergencia (teórica) que implica esta heterogeneidad en la función de producción.

Aunque sencillo, las principales conclusiones teóricas de este modelo concuerdan con la evidencia empírica encontrada en la parte II, sección 8. Igualmente, está en línea con distintos tipos de evidencia teórica y empírica encontrado por la literatura en el análisis de crecimiento económico². En esta sección, se hace

¹Dado el carácter académico de este artículo, se ahonda en los conceptos básicos de la teoría asintótica, y de series de tiempo, con el fin de presentar un esquema global de la metodología.

²Ver próxima subsección.

una descripción breve del modelo de Solow con países heterogéneos y, se analizan algunos aspectos teóricos derivados de este último.

Igualmente se presenta un esquema del mismo modelo incluyendo el supuesto de heterogeneidad en el capital humano, inspirado en lo encontrado por Hanushek y Woessmann (2012a), Hanushek y Woessmann (2012b) y Hanushek (2009).

2.1. Modelo de Solow ampliado con función de producción heterogénea.

Sea $Y_j(t)$ la producción del país j en el periodo t , para una economía cerrada y sin gobierno. Se asume entonces que la función de producción para el país j depende de:

$$Y_j(t) = F(K_j(t), A_j(t)L_j(t), H_j(t))$$

donde $F: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función doblemente diferenciable, con primera derivada positiva con respecto a cada factor productivo (productos marginales positivos), $K_j(t)$ (capital), $L_j(t)$ (trabajo), $H_j(t)$ (capital humano) y segunda derivada negativa (rendimientos marginales decrecientes), con respecto a cada factor. Adicionalmente se asume que F es linealmente homogénea de grado 1 (la función de producción presenta retornos constantes de escala) con respecto a cada uno de los factores. Los supuestos anteriores permiten concluir que F es una función cóncava que satisface las condiciones de Inada³. Por último, $A_j(t)$ se define como el nivel de la tecnología del país j el cual se asume que está definido de la siguiente forma⁴:

$$A_j(t) = A_{i0} \exp(x_j t)$$

donde x_j es el crecimiento porcentual de la tecnología, la cual se asume que es heterogénea para cada uno de los j países. Por otro lado, se supone que la tasa de ahorro del capital físico, s_j , la tasa de ahorro del capital humano, s_j^h , y el crecimiento poblacional, n_j , están determinados de forma exógena⁵, y que las ecuaciones de movimiento del capital físico y humano están dadas por,

$$\frac{d}{dt}(K_j(t)) = -\delta K_j(t) + I_j(t) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(H_j(t)) = -\delta_h H_j(t) + I_j^h(t)$$

donde I_j y I_j^h corresponden a la inversión realizada en capital físico y humano, respectivamente⁶. Dado el supuesto de economía cerrada, las ecuaciones anteriores se pueden expresar en términos per-cápita de la siguiente forma⁷:

$$\dot{k}_j(t) = s_j k_j^\alpha(t) h(t)^\phi - (n_j + x + \delta) k_j(t) \quad (2)$$

$$\dot{h}_j(t) = s_j^h k_j^\alpha(t) h(t)^\phi - (n_j + x + \delta) h_j(t) \quad (3)$$

o en términos del crecimiento porcentual,

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = s_j k_j^{\alpha-1}(t) h(t)^\phi - (n_j + x + \delta) \quad (4)$$

³Ver Acemoglu (2009), pp. 33.

⁴Se debe tener presente que, a diferencia del modelo de Solow convencional, en este modelo se asume que la tecnología es un bien no rival, con dotaciones iniciales por país

⁵Particularmente se asume que $\frac{\dot{L}_j(t)}{L_j(t)} = n_j$ y que el ahorro está determinado por $S_j = sY_j(t)$

⁶Dado que esta es una economía cerrada, $I_j + I_j^h$, es igual a la inversión total, \bar{I}_j , donde $\bar{I}_j = s_j y_{jt} + s_j^h y_{jt}$ es igual al ahorro total de la economía.

⁷Los términos en minúscula representa la variable en términos per-cápita eficientes. Adicionalmente se asume que la tasa de depreciación del capital humano y físico son iguales, $\delta = \delta_h$. Igualmente, se asume que la función de producción es una del tipo cobb-douglas (Ver Acemoglu, 2009).

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = s_j^h k_j^\alpha(t) h(t)^{\phi-1} - (n_j + x + \delta) \quad (5)$$

dado que $\frac{s_j^h}{s_j} k_{jt} = h_{jt}$, y viceversa se tiene,

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = s_j k_j^{\alpha-1}(t) \left(\frac{s_j^h}{s_j} k_j \right)^\phi - (n_j + x + \delta) \quad (6)$$

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = s_j^h \left(\frac{s_j}{s_j^h} h_j(t) \right)^\alpha (t) h_j(t)^{\phi-1} - (n_j + x + \delta) \quad (7)$$

El estado estacionario para el país j está definido por ⁸,

$$k_j^* = \left(\frac{s_i^{1-\phi} s_j^{(h)\phi}}{(n_j + x_j + \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

$$h_j^* = \left(\frac{s_j^\alpha s_j^{(h)(1-\alpha)}}{(n_j + x_j + \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

Para determinar, la transición de la economía j en el momento t , en la vecindad del estado estacionario, se obtiene la expansión de Taylor de la ecuación 2 y 3, alrededor de $\log k_j^*$ y $\log h_j^*$, respectivamente⁹,

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = s_j^{1-\phi} s_j^h \phi \exp[(\alpha - 1 + \phi) \log k_j(t)] - (n_j + x + \delta)$$

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = -s_j^{1-\phi} s_j^h \phi (1 - \alpha - \phi) k_j^{*1-\alpha-\beta} [\log k_j(t) - \log k_j^*] \quad (8)$$

y para el capital humano, alrededor de $\log h_j^*$

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = s_j^h 1-\alpha s_j^\alpha \exp[(\alpha + \phi - 1) \log h(t)] - (n_j + x + \delta)$$

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = -s_j^h 1-\alpha s_j^\alpha (1 - \alpha - \phi) h_j^{*(\alpha+\beta-1)} [\log h_j(t) - \log h_j^*] \quad (9)$$

Por tanto la senda de transición local (en la vecindad del estado estacionario) está, suponiendo un crecimiento del progreso tecnológico heterogéneo x_j por países, está dado por,

$$\gamma_k = -(1 - \alpha - \beta) (n_j + x_j + \delta) [\log k_j(t) - \log k_j^*]$$

$$\gamma_k = -\beta [\log k_j(t) - \log k_j^*] \quad (10)$$

y para el capital humano,

$$\gamma_h = -\beta [\log h_j(t) - \log h_j^*] \quad (11)$$

donde $\beta = (1 - \alpha - \phi) (n_j + x_j + \delta)$. El modelo anterior se puede modificar siguiendo a Phillips y Sul (2007) de la siguiente forma: asumamos que el progreso tecnológico de cada país es heterogéneo, luego las ecuaciones 4 y 6 pueden expresarse como,

⁸Se debe tener presente que el estado estacionario se define cuando $\dot{k}_j(t) = 0$.

⁹Se debe tener presente que $k_j^{\alpha-1}(t) = \exp[(\alpha - 1) \log(k_j(t))]$

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = s_j k_j^{\alpha-1}(t) h(t)^\phi - (n_j + x_j + \delta)$$

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = s_j^h k_j^\alpha(t) h(t)^{\phi-1} - (n_j + x_j + \delta)$$

sumando y restando x ,

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = s_j k_j^{\alpha-1}(t) h(t)^\phi - (n_j + x + \delta) - (x_j - x) \quad (12)$$

$$\frac{\dot{h}_j(t)}{h_j(t)} = s_j^h k_j^\alpha(t) h(t)^{\phi-1} - (n_j + x + \delta) - (x_j - x) \quad (13)$$

empleando la misma estrategia anterior (ecuación 8)¹⁰,

$$\frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = -\beta [\log k_j(t) - \log k_j^*] - (x_{jt} - x)$$

$$\frac{\log k_j(t)}{dt} + \beta \log k_j(t) = \beta \log k_j^* - (x_{jt} - x)$$

solucionando la ecuación diferencial de primer orden anterior,

$$\exp(\beta t) \log k_{jt} = c + \int_0^t \exp(\beta p) \beta \log k_j^* - (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp$$

$$\log k_{jt} = \exp(-\beta t) c + \exp(-\beta t) \int_0^t \exp(\beta p) \beta \log k_j^* - (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp$$

tomando como valor inicial $t = 0, k_{j0}$,

$$\log k_{jt} = \exp(-\beta t) \log k_{j0} + \log k_j^* - \exp(-\beta t) \log k_j^* - \exp(-\beta t) \int_0^t \exp(\beta p) (x_{jp} - x) dp$$

$$\log k_{jt} = \log k_j^* + (\log k_{j0} - \log k_j^*) \exp(-\beta t) - \exp(-\beta t) \int_0^t (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp$$

luego,

$$\log k_{jt} = \log k_j^* + (\log k_{j0} - \log k_j^*) \exp(-\beta_{jt} t) \quad (14)$$

donde,

$$\beta_{jt} = \beta - \frac{1}{t} \log \left\{ 1 - \frac{1}{(\log k_{j0} - \log k_j^*)} \int_0^t (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right\}$$

Expresando la ecuación 14 en términos de un nivel inicial q ,

$$\log k_{jt} = \log k_j^* + (\log k_{j0} - \log k_j^*) \exp(-\beta_{j,q} q)$$

$$\log k_{jt+q} = \log k_j^* + (\log k_{jq} - \log k_j^*) \exp(-\beta_{j,t}^+ t)$$

donde $\beta_{j,t}^+ = \frac{\beta_{j,t+q}(t+q)}{t} - \frac{\beta_{j,q} q}{t}$, y dado que

$$\beta_{j,t+q} = \beta - \frac{1}{t+q} \log \left\{ 1 - \frac{1}{(\log k_{jq} - \log k_j^*)} \int_0^{t+q} (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right\}$$

¹⁰A continuación se desarrolla el proceso para el capital físico. Se asume análogo para el capital humano.

$$\beta_{j,q} = \beta - \frac{1}{q} \log \left\{ 1 - \frac{1}{(\log k_{j0} - \log k_j^*)} \int_0^q (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right\}$$

luego,

$$t\beta_{j,t}^+ = \beta(t+q) - \beta q - \log \left\{ \frac{\left(1 - \frac{1}{(\log k_{j,q} - \log k_j^*)} \int_0^q (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right)}{\left(1 - \frac{1}{(\log k_{j0} - \log k_j^*)} \int_0^{t+q} (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right)} \right\}$$

$$\beta_{j,t}^+ = \beta - \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\left(1 - \frac{1}{(\log k_{j,q} - \log k_j^*)} \int_0^q (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right)}{\left(1 - \frac{1}{(\log k_{j0} - \log k_j^*)} \int_0^{t+q} (x_{jp} - x) \exp(\beta p) dp \right)} \right\}$$

En los casos en que la tecnología converge, las desviaciones de $x_{ip} - x$ son acotadas y por tanto,

$$\beta + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \rightarrow \beta \quad t \rightarrow \infty$$

El procedimiento anterior se puede realizar de forma análoga para la ecuación del capital humano, h_t (ecuación 13), obteniéndose conclusiones idénticas.

Cuando se extiende la propuesta de Phillips y Sul (2009) al modelo de Mankiw, Romer y Weil (1992) con el fin de tener en cuenta el capital humano en la función de producción, se encuentran conclusiones equivalentes en términos de los factores empleados, ya que en el primer caso sólo se emplea el capital y el trabajo como insumo productivo.

Se destacan algunas conclusiones importantes del modelo: primero, este modelo predice que en caso de que dos países compartan tecnologías similares, particularmente que converjan (x y x_j son acotados), tanto el capital físico como el capital humano convergen al mismo grupo global, al igual que el PIB per-cápita. Segundo, en caso de que el progreso tecnológico de cada país sea heterogéneo, x y x_j no son acotados, el modelo predice que ni el capital físico ni humano convergen globalmente. Por último, si el progreso tecnológico de cada país es homogéneo para distintos grupos, el modelo predice que tanto el capital físico como humano convergen a los mismos grupos ("clusters") de convergencia, al igual que el PIB per-cápita.

El modelo anterior, puede extenderse de forma análoga para incluir otros determinantes teóricos, que tengan un impacto sobre la función de producción. Entre estos se destaca, el índice de apertura de un país, volatilidades macroeconómicas, la calidad de las instituciones, entre otras. Siempre que las propiedades básicas del modelo, expresadas al comienzo de esta sección no cambien, el modelo arrojará las mismas conclusiones para el resto de factores productivos que se incluyan.

Por otro lado, se debe tener presente que el modelo presentado no tiene en cuenta el impacto de la educación sobre el capital humano. Es decir, se asume que una unidad de capital humano, medido comúnmente por el número promedio de años de educación, es igual de productivo (calificado) para cualquier país¹¹. A continuación se presenta un esquema del modelo anterior, teniendo presente el impacto de la calidad de este sobre la función de producción¹².

¹¹Hay distintos artículos en la literatura que argumentan que este es un supuesto bastante restrictivo; Hanushek y Woessmann (2008) y Hanushek y Lei Zhang (2008), muestran que incluso al interior de los países la calidad de la educación, medido por las habilidades cognitivas de los estudiantes, es bastante heterogénea, como para pensar en homogeneidad entre países.

¹²Esto es un elemento muy importante a tener en cuenta; Hanushek y Woessmann (2012a) argumentan que la calidad de la educación es el elemento clave para entender el rezago de Latinoamérica en los últimos años (particularmente después de la Segunda Guerra Mundial) frente a países como los del Este Asiático. Ver igualmente Hanushek (2009).

2.2. Modelo de Solow ampliado con función de producción y calidad en la educación heterogénea.

En esta sección se modifica el modelo anterior con el fin de entender el efecto de incluir la heterogeneidad en la educación (habilidades cognitivas desarrolladas por los estudiantes) sobre la dinámica de convergencia de los países. Se proponen dos posibilidades: la primera, es asumir que para un nivel dado de calidad en la educación, la dinámica del modelo es igual; las ecuaciones de movimiento para ambos capitales son iguales. Sin embargo, niveles distintos en la calidad del capital humano si generan diferentes niveles de producción. En este escenario a pesar de haber dos fuentes de heterogeneidades, la tasa de progreso tecnológico y la calidad de la educación, la convergencia o no de los países dependen exclusivamente de la heterogeneidad en el progreso tecnológico.

Se destacan algunas conclusiones importantes de este modelo: primero, dos países con tecnologías similares y niveles de calidad de la educación similar, tanto el capital físico como el capital humano y el PIB per cápita, convergen al mismo grupo global de convergencia. Segundo, en caso de que el progreso tecnológico de cada país sea heterogéneo, no convergen globalmente, el modelo predice que ni el capital físico ni humano lo hacen, y por tanto, tampoco lo hace el PIB per cápita. Por último, si el progreso tecnológico de cada país es homogéneo y la calidad de la educación es heterogénea, el modelo predice que el capital físico converge globalmente, sin embargo el capital humano y el PIB per-cápita no lo hacen. Por último, si el progreso tecnológico y la calidad del capital humano son homogéneos para distintos grupos, el modelo predice que tanto el capital físico como humano, y por tanto el PIB per-cápita, convergen a los mismos grupos (“clusters”) de convergencia.

La segunda opción es tomar la estructura mencionada en el párrafo anterior, y asumir que la ecuación de movimiento del capital humano depende de la calidad del mismo; entre más calificado sea el capital humano, menor es la depreciación de este debido a un efecto “spillover” positivo en el stock de capital humano que la contrarresta. Esto es, a un mayor nivel en el stock de capital humano, es más fácil la acumulación de este, debido a los efectos de “derrame” que genera (dependiendo del nivel de la calidad del capital humano este efecto positivo puede llegar a contrarrestar por completo la depreciación.). En este caso, dos países pueden o no converger dependiendo tanto la tasa de tasa de progreso tecnológico como de la calidad de la educación.

El presente artículo investiga las características de estos determinantes teóricos del PIB per-cápita, pues mucha atención se ha puesto en entender el impacto de estos determinantes sobre el PIB, pero poco énfasis se ha hecho en el análisis empírico de estos. En esta investigación se analizan las características principales de los determinantes teóricos -y algunos empíricos- del crecimiento, junto con sus propiedades de convergencia, tal como lo predice el modelo presentado anteriormente.

3. Algunos hechos estilizados.

En esta sección se describen los principales hechos estilizados para la información empleada en este artículo. A decir, el PIB per-cápita y los principales determinantes de este último resaltados por la literatura y el modelo presentado anteriormente: tasa de inversión en capital sobre PIB, capital humano, apertura de la cuenta corriente de los países y algunos indicadores de estabilidad macroeconómica como la variabilidad de la inflación y el consumo del gobierno sobre PIB.

En la literatura abundan artículos que examinan este tipo de información, particularmente para el PIB per-cápita, no obstante, no se ahonda mucho en el tema¹³. En la sección 3.1 se presentan algunas conclusiones generales sobre las características del PIB per cápita en los últimos 50 años. En la sección 3.2 se describen algunos hechos estilizados para tasa de inversión sobre PIB de los países. Las características sobresalientes del capital humano se describen en la sección 3.3, mientras que las del índice de apertura se mencionan

¹³Ver por ejemplo Durlauf et al. (2005), Barro (1998), Barro y Sala-i-Martin (2004) y Acemoglu (2009)

en la sección 3.4. Dado que la literatura examina ampliamente el tema de los indicadores de estabilidad macroeconómica domésticos para distintos países, el análisis descriptivo de la variabilidad de la inflación y el consumo del gobierno sobre el PIB no se presenta en este artículo.

Los datos del PIB por trabajador, tasa de inversión en capital, índice de apertura, consumo del gobierno sobre PIB provienen de Heston et al. (2011) PENN World Tables 7.1. Estos datos tienen una frecuencia anual para el período 1970-2009. Por otro lado, la información en general de capital humano proviene de Barro y Lee (2010), los cuales construyen indicadores de años promedio de educación para distintos niveles educativos, para un conjunto amplio de países que comprende el período 1950-2010, con una frecuencia de 5 años. Por último, la información de inflación proviene del World Development Indicators 2011 del Banco Mundial, para el período 1970-2010. Se toman los 146 países empleados por Phillips y Sul (2007) con el fin de que sean comparables los resultados.

3.1. PIB per-cápita

Durlauf et al. (2005) después de examinar los principales patrones del PIB per-cápita para 106 países (con una población mayor a 350,000 habitantes de la base de datos de Heston et al., 2002 PENN World Tables 6.1) para el periodo 1960-2002 concluye lo siguiente: primero, durante el periodo de análisis la mayoría de los países crecieron, aunque permanecen disparidades del ingreso importantes. Esta tasa de crecimiento ha tenido variaciones sustanciales independientes del nivel inicial de desarrollo, exceptuado el caso de los países ricos. Segundo, el crecimiento del país en el pasado no predice de forma robusta el crecimiento presente, a pesar de que dicha relación ha venido ganando consistencia. Tercero, la gran mayoría de países experimentaron tasas de crecimiento del PIB per-cápita menores para el período 1980-2002 en comparación con el período 1960-1980. Cuarto, para el periodo de análisis se observa un aumento en la dispersión de las tasas de crecimiento.

La variabilidad de las tasas de crecimiento observada particularmente en países con niveles iniciales bajos de PIB por trabajador deja algunas dudas sobre el proceso de convergencia de los países. El gráfico 1 presenta la dispersión entre el crecimiento promedio del PIB por trabajador y el logaritmo del PIB por trabajador inicial, 1970. Evidentemente el gráfico no sugiere ninguna tendencia a la convergencia de los países. Esto es, no se observa ninguna relación entre el crecimiento promedio y el PIB por trabajador inicial.

Al dividir el análisis anterior para cada una de las regiones se observan patrones bastante disímiles entre cada una de ellas. Los gráficos 2 y 3 comparan el crecimiento promedio del PIB por trabajador y el logaritmo del PIB por trabajador inicial, 1970, para 9 regiones geográficas a nivel mundial con respecto a los países de la OECD. Se destacan algunos patrones sobresalientes: para los países de Latinoamérica (LA), Dragones Asiáticos (DRAG) y el resto de países Asiáticos (AS), se observa algún indicio de convergencia. Caso contrario sucede con los países pertenecientes al Norte de África y Medio Este (MENAF), África subsahariana (SAF) y el resto de países de África (AF) para los cuales se observa gran volatilidad en la tasa de crecimiento, niveles iniciales muy bajos y poco indicio de convergencia. Para el caso de Oceanía (OC) se aprecian niveles del logaritmo del PIB por trabajador iniciales comparativamente mayores a los del resto de regiones junto con bajas tasas de crecimiento promedio.

Crecimiento promedio vs Valor Inicial (1970-2009) PIB por trabajador

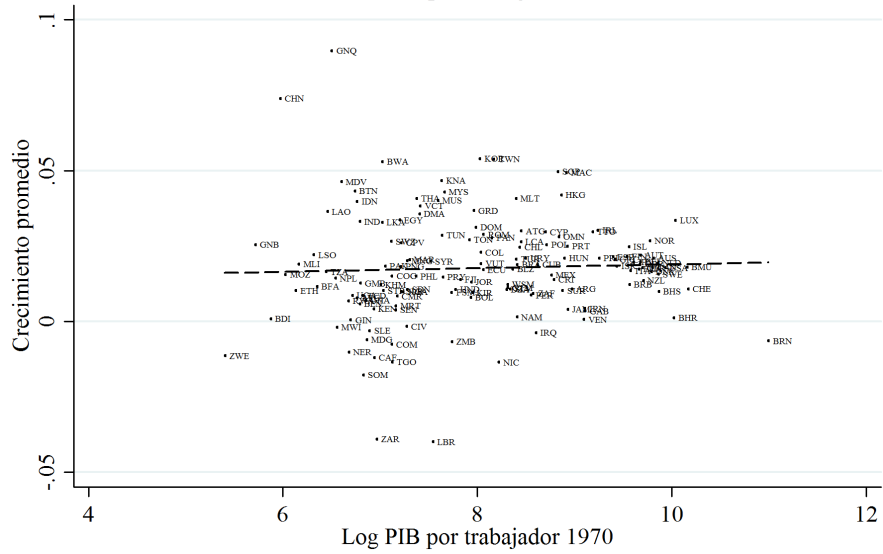


Figura 1: Crecimiento vs log de años de educación promedio

Crecimiento promedio vs Valor Inicial (1970-2009) PIB por trabajador

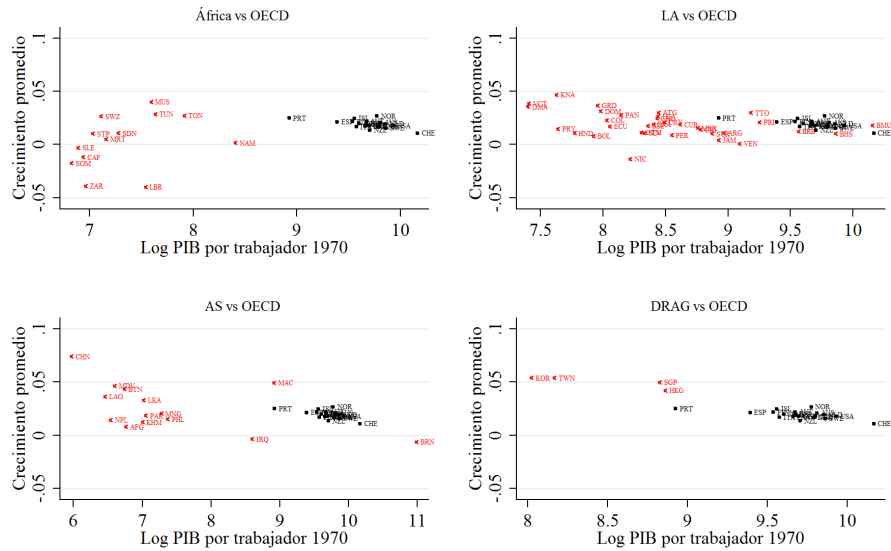


Figura 2: Crecimiento vs log de años de educación promedio por región: 1970-2009

Crecimiento promedio vs Valor Inicial (1970-2009) PIB por trabajador

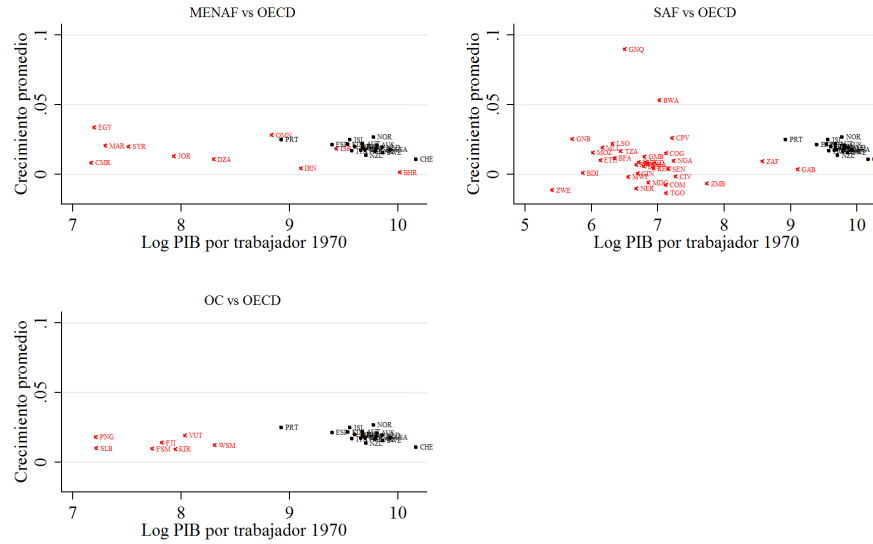


Figura 3: Crecimiento vs log de años de educación promedio por región: 1970-2009

Algunas de las conclusiones descritas en el párrafo anterior se validan en las tablas 1 y 2, las cuales presentan media y desviación estándar promedio, respectivamente, para las décadas del 70 al 80 (década 1), 80 al 90 (década 2), 90 al 00 (década 3) y 00 al 09 (década 4). Sobresalen algunos aspectos: primero, se evidencia el buen desempeño que tuvieron las regiones de los “Dragones Asiáticos” y de las nuevas economías industrializadas (NIC’s) durante este período, acompañadas de una baja volatilidad en la tasa de crecimiento. Por otro lado, se observa que los países de África Subsahariana y del resto de África tuvieron un desempeño bastante regular, acompañadas de una volatilidad en las tasas de crecimiento que aproximadamente dobla al resto de regiones (exceptuando el caso del resto de países asiáticos, AS).

Cuadro 1: Crecimiento promedio del PIB per-cápita por décadas

Década	AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF
1	1.42237	2.38254	7.14317	4.70613	2.6865	3.37035	4.79394	3.5073	2.77642	1.02369
2	-0.225	2.13822	5.56399	1.82302	0.95007	-0.229	3.80784	-1.7354	2.09259	-0.1736
3	-2.1075	1.0485	4.38721	2.10059	1.49326	1.40324	3.48128	2.33589	1.76372	0.85638
4	2.21882	4.71768	3.07975	2.72808	2.37659	1.97768	3.6862	1.42731	1.16999	2.40479

Cuadro 2: Desviación estándar del PIB per-cápita por décadas

Década	AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF
1	8.16957	5.94418	3.62034	6.06154	6.36375	9.23767	4.71255	11.4944	3.11902	8.44268
2	7.23687	7.30944	3.84201	3.51212	5.99193	8.5065	2.80816	9.46919	2.08371	7.36881
3	13.9286	13.8916	4.43603	4.74228	5.01653	4.42005	5.84062	9.50954	2.10746	9.61622
4	8.51031	8.80963	4.25458	3.75632	4.81434	3.20115	3.08873	6.40575	2.60346	7.65739

3.2. Tasa de inversión sobre el PIB

Uno de los determinantes teóricos fundamentales del crecimiento es la tasa de inversión en capital sobre PIB. Igualmente, ha sido ampliamente empleada en las distintas versiones empíricas que utilizan ecuaciones derivadas de modelos teóricos, particularmente, neoclásicos de crecimiento. El gráfico 4 compara la distribución transversal de la tasa de inversión/PIB relativo al nivel observado para los países de la OECD en 1970, para este último año y el 2009. Se aprecia que la distribución para 2009 presenta una mayor kurtosis y

menor dispersión, producto principalmente de un incremento en la tasa de inversión en relación a los países de la OECD para 2009. Esto confirma que en general los países no OECD (de los 146 que se emplean en este trabajo) aumentaron su tasa de inversión entre 1970 y 2009, con respecto a los OECD y en términos absolutos, ya que la tasa de inversión para los últimos permaneció relativamente constante.

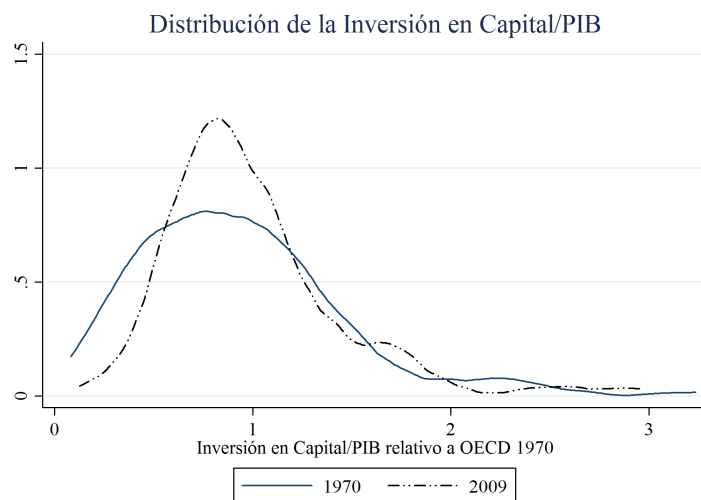


Figura 4: Distribución transversal de la tasa de inversión/PIB

A pesar de este incremento generalizado de la tasa de inversión, existe una gran dispersión de este comportamiento durante el período de análisis. El gráfico 5 presenta la dispersión de la tasa de inversión/PIB relativo a los países de la OECD en 1970, frente a la de 2009. En el gráfico 5 se observa una gran cantidad de países por debajo de la línea de 45 grados, sugiriendo un desempeño negativo frente a los países de la OECD. Esto confirma la apreciación encontrada para el PIB per cápita en cuanto a la variabilidad de las tasas de crecimiento observada, particularmente, en países con niveles iniciales bajos de PIB per-cápita.

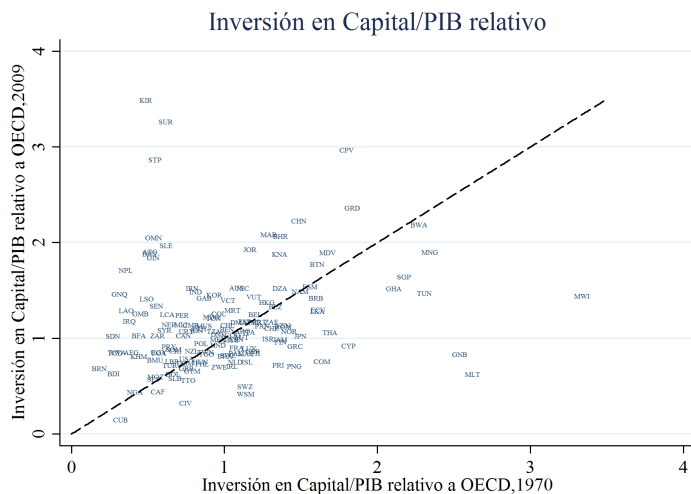


Figura 5: Inversión en capital/PIB: 1960 vs 2009

El gráfico 6 presenta la distribución de las tasas de crecimiento por década para el agregado de los países. Las décadas más exitosas en términos de crecimiento de la tasa de inversión son las décadas del 70 y del 2000, mientras que las de peor desempeño fueron las décadas de los 80 y 90. Este hecho se observa igualmente para el caso del PIB por trabajador.

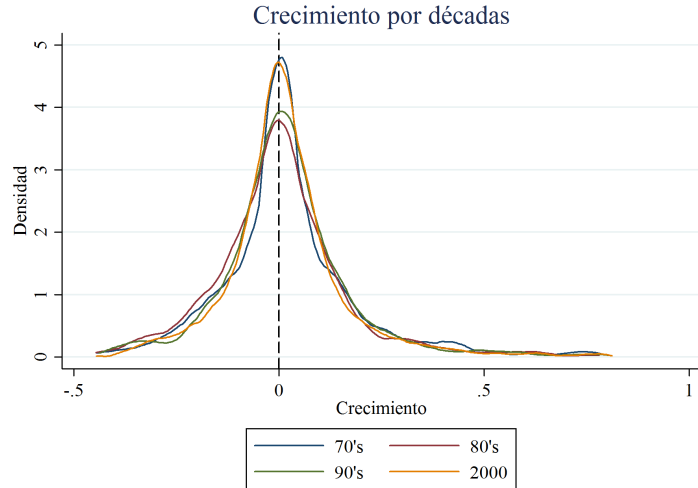


Figura 6: Inversión en capital/PIB: variaciones % por década.

Los gráficos anteriores muestran tres cosas: primero, la tasa de inversión sobre PIB ha crecido para el período 1970-2009; segundo, este crecimiento ha tenido una gran variabilidad entre países, y tercero, estuvo concentrado en las décadas del 70 y 2000. La pregunta restante es si existe evidencia de que haya convergencia entre los países para este determinante. Esto es, si los países que tenían tasas bajas de inversión, al ser los retornos marginales al capital mayores, experimentaron mayores avances en este ratio que aquellos para los cuales ya era elevada.

A pesar de que los patrones descritos para la tasa de inversión son bastante similares a los del PIB, el gráfico 7 muestra algún grado de convergencia, más notoria que la del PIB por trabajador.

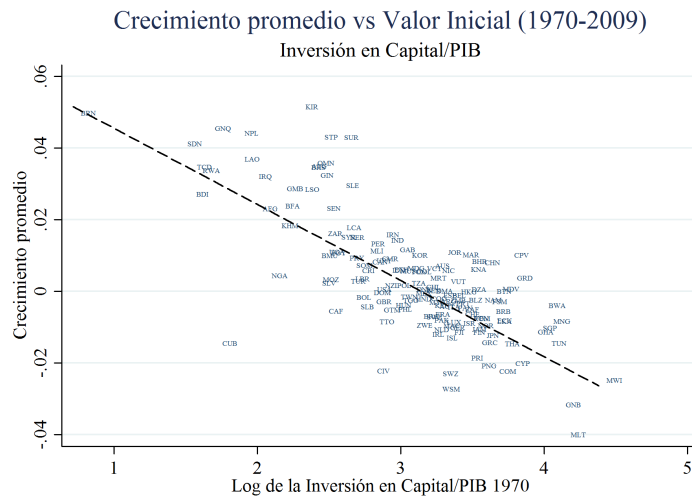


Figura 7: Crecimiento vs log de la tasa de inversión inicial: 1970-2009

3.3. Capital humano

En los últimos 20 años, el capital humano ha tomado protagonismo en el análisis empírico del crecimiento económico. Particularmente, desde los trabajos teóricos de Romer (1986) y Lucas (1988), entender el impacto del capital humano sobre el proceso de crecimiento económico se ha convertido en un paradigma. En

este trabajo se emplean dos medidas del capital humano: años promedio de educación y años promedio de educación terciaria (más adelante se da una justificación al respecto).

El gráfico 8 compara la distribución transversal del número de años promedio de educación para 1970 y 2009, frente al nivel promedio de los países de la OECD en 1970. El avance que ha tenido esta primera medida de capital humano en los últimos años es sorprendente, teniendo presente que se les está comparando con los países de la OECD. De hecho todas las regiones distintas a la OECD, al menos duplicaron el número promedio de años de educación.

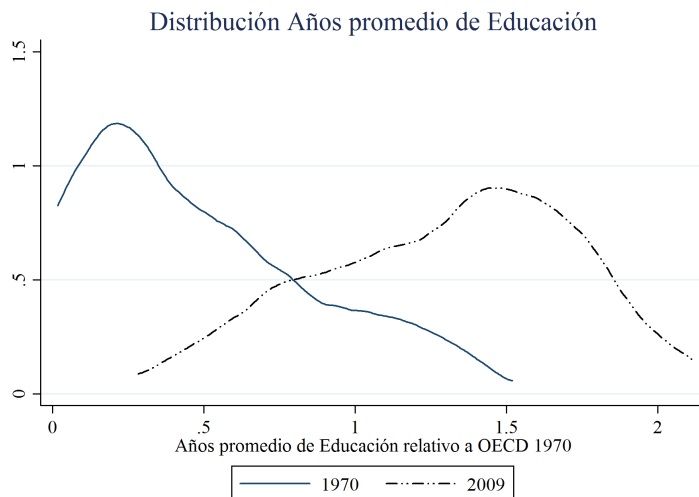


Figura 8: Distribución seccional de años de educación promedio

El gráfico 9 confirma lo mencionado en el párrafo anterior, en donde se presenta la dispersión de los años promedio de educación relativo a los países de la OECD en 1970, frente a 2009. Los países que permanecen al lado derecho de la línea de 45 grados son en su mayoría pertenecientes a la OECD, exceptuando Maldiva, Belice, Cambodia y Tonga, que son precisamente los que experimentaron menor avance durante este periodo.

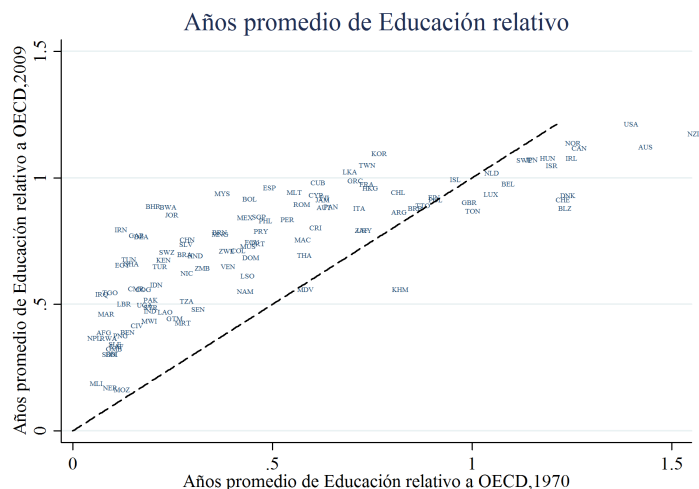


Figura 9: Años de educación promedio: 1960 vs 2009

Aparentemente, este crecimiento en el capital humano ha sido un proceso gradual; el gráfico 10 muestra el crecimiento por décadas desde 1970 hasta 2010 de los años de educación promedio. La década de los 70 es la de mayor crecimiento, seguida por la de los 80, 90 y 2000. A pesar de que se observa una desaceleración

progresiva en la tasa de crecimiento, el gráfico 11 muestra que en promedio los países con menor número de años de educación en 1970, experimentaron mayores tasas de crecimiento promedio, evidenciándose un patrón de convergencia global para el capital humano¹⁴.

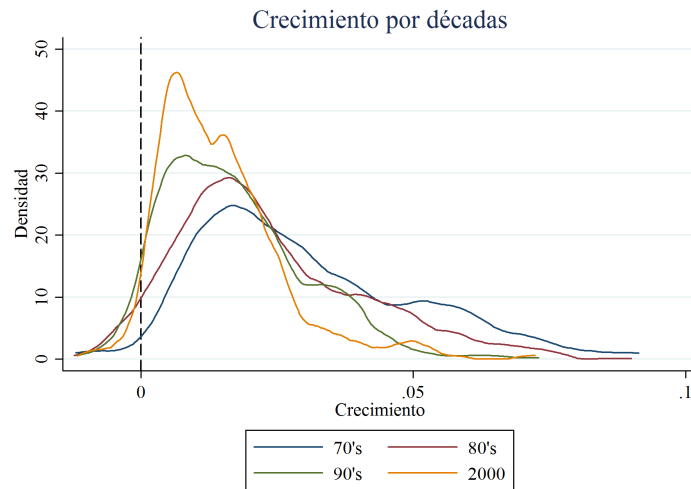


Figura 10: Años de educación promedio: variaciones % por década

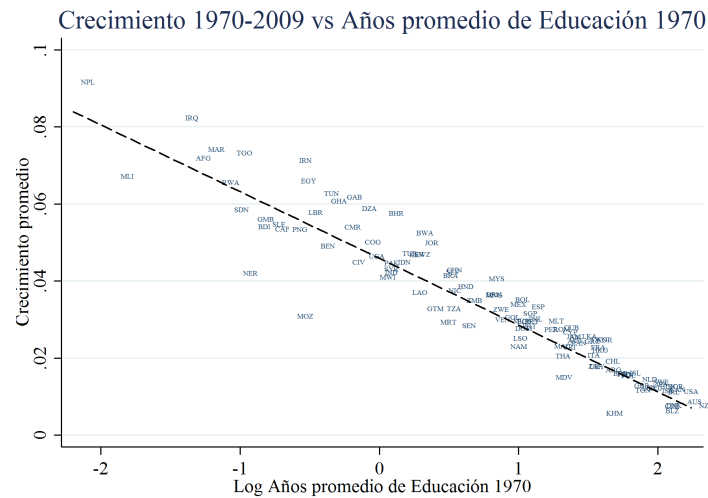


Figura 11: Crecimiento vs log de años de educación promedio: 1970-2009

3.4. Índice de apertura

Sin lugar a dudas, una de las hipótesis más controversiales en la literatura de crecimiento económico, ha sido la de la apertura. El análisis del impacto de la liberalización del comercio y la cuenta de capitales sobre las economías ha sido un tema de discusión constante en la literatura académica¹⁵. La evidencia es mixta y su discusión ha estado centrada en tres aspectos; la calidad de la información, el método empírico y los conceptos teóricos¹⁶.

¹⁴Esta hipótesis es meramente una apreciación del gráfico, y se valida empíricamente más adelante.

¹⁵Ver por ejemplo los trabajos de Sachs y Warner (1995), Easterly and Levine (2003), Rodríguez and Rodrik (2001), Rodrik, Subramanian, and Trebbi (2004), Easterly (2005), y más recientemente Estevadeordal y Taylor (2008)

¹⁶Trabajos seminales como el de Sachs y Warner (1995) encuentran que los países que liberalizan su comercio presentan convergencia del PIB per cápita, a diferencia de aquellos que no lo hacen. Similares resultados encuentra Edwards (2004) quien

En este trabajo se emplea como indicador de apertura la suma de exportaciones más importaciones sobre PIB a precios constantes, construida por Heston et al. (2011), para las 146 economías usadas por Phillips y Sul (2007) para el periodo 1970-2009. A pesar de tener algunos problemas (como por ejemplo, países con una gran economía doméstica pueden tener un nivel bajo en este índice a pesar de no tener distorsiones y barreras al comercio), presenta algunas ventajas sobresalientes: la información disponible, particularmente si se le compara con otros índices populares en la literatura, es cuantiosa¹⁷; es una variable continua, lo cual no exige ningún tratamiento especial para su análisis a través del tiempo¹⁸; no tiene el problema de agregación, como si lo tienen muchos índices, entre otras.

El gráfico 12 presenta la distribución seccional del grado de apertura relativo a los países de la OECD para 1970. A pesar de que hubo un avance importante durante este periodo, se observa que muchos países no presentaron avances significativos en este índice, con respecto a los niveles promedio de la OECD para 1970. De hecho, cuando se compara la dispersión del grado de apertura en relación al nivel observado para los países de la OECD para 1970 vs 2009, gráfico 13, se observa que muy pocos países están por encima de la línea de 45 grados.

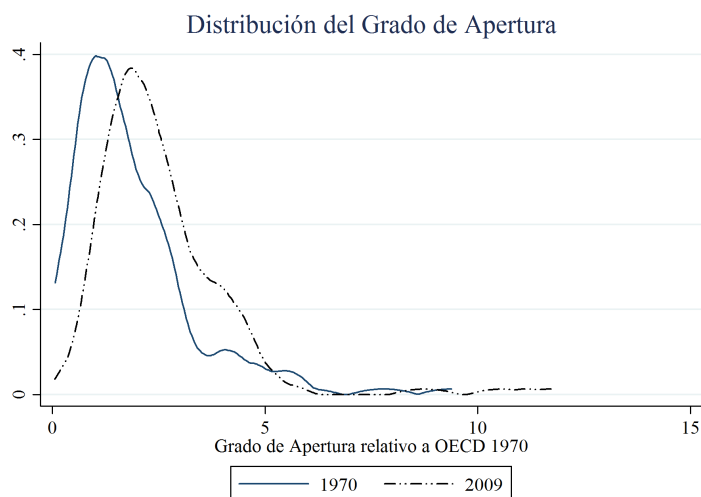


Figura 12: Distribución seccional de grado de apertura

muestra que países con mayor grado de apertura experimentan mayores tasas de crecimiento de la productividad. Por otro lado, existen numerosos trabajos cuyos resultados contrastan con los mencionados anteriormente; Rodríguez and Rodrik (2001) presentan evidencia del impacto de las reformas al comercio (apertura) sobre el crecimiento encontrándose un efecto mínimo y despreciable. Más aún, trabajos como los Rodrik, Subramanian, y Trebbi (2004) y el de Easterly y Levine (2003) argumentan sobre la importancia de centrarse en determinantes profundos como las instituciones que han triunfado sobre otros como las políticas pro-comercio.

¹⁷Ver Edwards (2004) para un análisis y descripción de los principales indicadores empleados en la literatura

¹⁸Esto en caso de que fuera una variable discreta o binaria como la mayoría de los indicadores de la literatura.

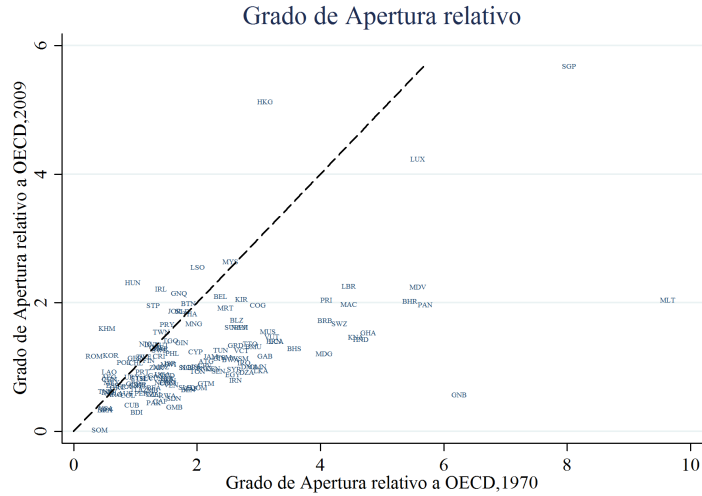


Figura 13: Grado de apertura: 1970 vs 2009

El gráfico 14 presenta un aspecto interesante: los mayores avances en el índice de apertura se presentaron en la década del 70 y 2000, seguido por la década de los 80 y por último la década de los 90. Este patrón de crecimiento resulta bastante singular, ya que en la década de los noventa se promovió en distintas regiones del mundo (Consenso de Washington-ronda de Uruguay, en los 90) la apertura tanto de la cuenta corriente como la de capital.

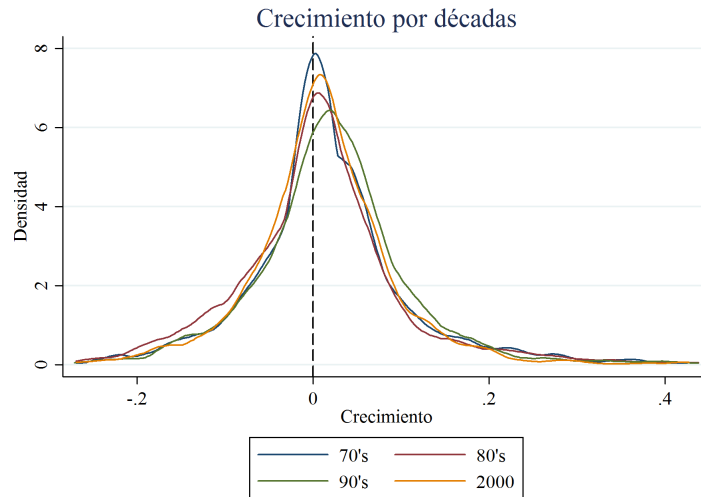


Figura 14: Grado de apertura: variaciones % por década

Al igual que para los determinantes anteriores, el gráfico 15 presenta la dispersión entre el logaritmo del grado de apertura de 1970 frente al crecimiento promedio de este índice, observado para el período 1970-2009. A pesar de que se observa mayor heterogeneidad en el patrón de convergencia, pareciera ser que los países con menor nivel de apertura experimentaron los mayores crecimientos en este indicador.

Crecimiento promedio vs Valor Inicial (1970-2009)
Grado de Apertura

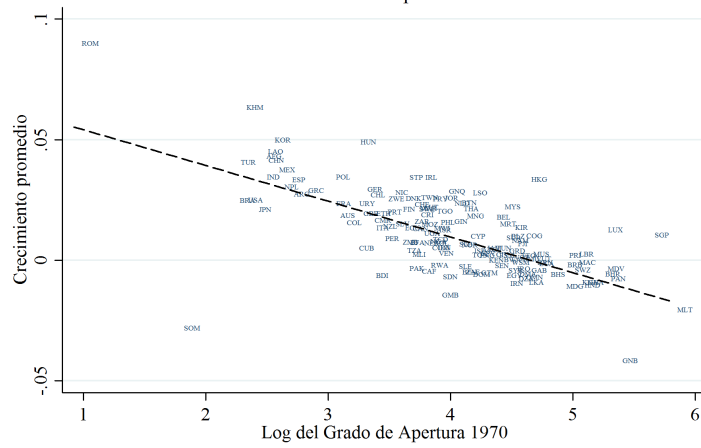


Figura 15: Crecimiento vs log de grado de apertura: 1970-2009

Parte II
Revisión de la Literatura

4. Revisión de la Literatura

El tema de la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones ha sido, sin duda, un tópico presente desde hace muchos años en las agendas de investigación y, desde la publicación del artículo seminal de Solow (1956) el concepto de convergencia y crecimiento económico se ha convertido en una especie de paradigma y caballito de batalla para los economistas. Particularmente, el tema de convergencia económica a nivel internacional, ha despertado un gran interés en la comunidad académica debido a su relevancia directa sobre los países y sus economías.

Los avances en los últimos años tanto en la parte empírica como teórica son sorprendentes. El reciente interés y enfoque que se le ha dado al tema empírico de convergencia y crecimiento económico parte, particularmente, de la publicación de dos artículos seminales de Abramovitz (1986) y Baumol (1986). Esto, junto con la recolección de una gran cantidad de información por parte de Summers y Heston (1988, 1991), provocó una explosión de artículos interesados en investigar empíricamente la convergencia entre países (a nivel mundial) y entre regiones (al interior de cada país), así como sus principales determinantes, dada la importancia del tema.

Al mismo tiempo, se han desarrollado nuevas y novedosas técnicas econométricas con el fin de dar alcance a las limitaciones que imponen los datos y, a las implicaciones provenientes de los modelos teóricos.

Pese a los avances encontrados en la literatura, Durlauf et al. (2005) argumentan que ésta es una de las áreas en las cuales ha sido más difícil obtener avances realmente genuinos. A pesar del gran esfuerzo del conjunto de artículos, en ellos no es fácil llegar a un consenso que alcance los estándares de evidencia logrados en otras áreas de la economía.

Las ecuaciones estándar de crecimiento parten del supuesto clásico del modelo de Solow-Swan en el cual se asume que en la producción de un país en el momento t , $Y_{i,t}$, intervienen distintos factores; la fuerza laboral $L_{i,t}$ que crece a una tasa constante e igual a n , la eficiencia de cada trabajador A que crece a una tasa constante e igual a g ¹⁹. De esta forma, el crecimiento del PIB per-cápita en unidades eficientes del país i , $y_i = Y_{i,t}/A_{i,t}L_{i,t}$ puede expresarse como,

$$\gamma_i = g - \beta \log y^* - \beta \log A_0 + \beta \log y_0 \quad (15)$$

donde y^* es el nivel de estado estacionario de la economía, esto es, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{it} = y_i^*$, donde $y_{it} = Y_{it}/A_{it}L_{it}$, $\beta = -t^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$ y λ es la tasa de convergencia de y_{it} . En el caso de Mankiw, Romer y Weil (1992), se asume que la función de producción está dada por una función de producción *cobb-douglas* de la forma, $Y_{it} = K_{it}^\alpha H_{it}^\phi (A_{it}L_{it})^{1-\alpha-\phi}$, donde K_{it} es el capital físico y H_{it} es el capital humano para la economía i . De esta manera, la ecuación 15 estaría definida así,

$$\begin{aligned} \gamma_i = g - \beta \frac{\alpha + \phi}{1 - \alpha - \phi} \log(n + g + \delta) - \beta \frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi} \log s_K \\ - \beta \frac{\phi}{1 - \alpha - \phi} \log s_H - \beta \log A_0 + \beta \log y_0 + \nu_i \end{aligned} \quad (16)$$

Empleando información para 98 países Mankiw, Romer y Weil (1992) encuentran que $\hat{\beta} \approx -0,3$, $\hat{\alpha} = 0,48$ y $\hat{\phi} = 0,23$. Los autores asumen que la tasa de crecimiento de la tecnología g y el nivel de la tecnología inicial A_{i0} son homogéneas para todos los países, lo cual representa una limitación seria a sus resultados²⁰. Dado esto, muchos estudios han extendido el análisis de Mankiw, Romer y Weil (1992) incluyendo variables de control adicionales, Z_i , a la regresión propuesta inicialmente, 16, con el fin de controlar por esta heterogeneidad. Sin embargo, Durlauf et al. (2005) argumentan que esta estrategia no garantiza que Z_i logre estar correlacionada con el estado inicial de la tecnología o con la tasa de crecimiento de ésta para cada país, g_i . En una línea

¹⁹Más adelante se irán mencionando los demás factores

²⁰Más adelante se discute ampliamente sobre este tema

similar, Temple (1999) plantea que estas variables de control probablemente estarían correlacionadas más con la tasa de crecimiento para cada país, g_i , que con el nivel inicial de tecnología.

Por tanto, una representación del modelo canónico de crecimiento propuesta por Durlauf et al. (2005) esta dada por,

$$\gamma_i = \beta \log y_{i0} + \psi X_i + \pi Z_i + \varepsilon_i \quad (17)$$

donde X_i recoge las variables determinantes tradicionales descritas en el modelo de Solow, mientras que Z_i recoge los determinantes del crecimiento que están por fuera del modelo de Solow original.

4.1. Convergencia?

Sin lugar a dudas el concepto de convergencia económica, dadas sus implicaciones de política, es posiblemente el que más sobresale dentro de la literatura de crecimiento económico. Así, Durlauf et al. (2009) resaltan como el tema de convergencia económica entre países pobres y ricos ha sido una de las hipótesis más intensamente estudiadas, incluso, a pesar de que el orientación recientemente predominante se ha enfocado en sus determinantes fundamentales.

Durlauf et al. (2009) mencionan tres hechos que han motivado los estudios recientes de convergencia entre economías: primero, la persistencia de los gigantescos niveles de desigualdad entre países pobres y ricos. Segundo, los nuevos modelos de crecimiento económico endógeno, los cuales permiten que teóricamente persistan diferencias significativas entre países pobres y ricos, han despertado un nuevo interés por validar dicha hipótesis. Tercero, la buena información para los distintos países que se ha venido recolectando, principalmente por Summers y Heston (1988, 1991).

Por otro lado, Durlauf et al. (2005) argumenta que el objetivo de esta literatura ha estado centrado en responder las siguientes preguntas;

- Las diferencias entre los ingresos per-cápita de los países es temporal o permanente?
- En caso de que sea permanente, se debe a factores estructurales (heterogéneos) o a condiciones iniciales distintas?
- En caso de que estas diferencias en ingreso sean temporales, hablamos de convergencia incondicional?
- En caso de que estas diferencias sean permanentes debido a causas estructurales, hablamos de convergencia condicionada?
- Si las condiciones iniciales determinan en parte las variables de largo plazo, y países con similares condiciones exhiben similares resultados en el largo plazo, estamos hablando de convergencia por clubes (Ver Galor, 1996)?

Siguiendo a Durlauf et al. (2005), una noción teórica básica de convergencia entre dos países i, j , puede representarse de la siguiente forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu(\log y_{i,t} | \rho_{i,0}) - \mu(\log y_{j,t} | \rho_{j,0})\| = 0 \quad (18)$$

donde $\mu(\cdot)$ es una medida de probabilidad, y $\|\cdot\|$ una métrica para calcular la distancia entre las medidas. En la literatura se encuentran distintas representaciones teóricas del concepto de convergencia que parten de una definición similar a la expresada en 18²¹. Sin embargo, este enfoque deja de lado el problema de la heterogeneidad de los parámetros, y su influencia sobre los resultados de convergencia. De esta forma, hay que controlar por estas características heterogéneas, adicional a las condiciones iniciales, $\rho_{i,t}$.

²¹Durlauf et al. (2005) presentan un resumen de ellas.

En este contexto, el concepto clásico de β -convergencia ha sido empleado ampliamente en la literatura empírica internacional con el fin de evaluar la convergencia entre países en los últimos años. Este concepto puede definirse mediante la siguiente ecuación que parte de la ecuación 15,

$$\gamma_i = g_i + \beta_i (\log y_{i,0} - \log y_i^* - \log A_{i,0})$$

De la ecuación anterior se observa que el crecimiento de un país va a depender de la tasa de crecimiento tecnológico g_i , y, conceptualmente, de que tan alejado esté de su estado estacionario. A este último elemento se le conoce como la convergencia de tipo "catching-up" (en caso de que $\beta_i < 0$), la cual depende de las condiciones iniciales. De esta forma, países que estén muy alejados de su estado estacionario, tendrán mayor productividad marginal de los factores y por tanto, una tasa de inversión más elevada, llevando a un mayor crecimiento.

Comúnmente la literatura ha asumido que cuando se adicionan variables de control a la ecuación 17 y se encuentra evidencia de convergencia ($\beta < 0$), hay convergencia condicionada; mientras que, en caso de que no se agreguen variables de control, se habla de convergencia incondicionada.

En promedio, los resultados han encontrado que la tasa promedio de convergencia se acerca a un 2% por año²². Sin embargo, es ampliamente conocido en la literatura los problemas que presenta la estimación conceptual de la β -convergencia; entre estos se encuentran: 1. Cuáles son las variables de control importantes? Muchos estudios han empleado el esquema de Mankiw, Romer y Weil (1992)²³, adicionando a este variables de control, con el fin de controlar por la heterogeneidad de la tecnología inicial y por la tasa de crecimiento inicial, que bajo el marco de MRW se asumen constantes. (ver Klenow y Rodríguez-Clare, 1997a y 1997b; Temple, 1999; Barro, 1991). 2. No Linealidad. 3. Endogenidad de las variables de control ya que también dependen de las condiciones iniciales (Barro y Lee, 1994, Cohen, 1996) 4. Singularidad asintótica de la matriz de varianza-covarianza cuando se emplean regresiones del tipo, $\log t$ (ver Phillips y Sul, 2007).

Otra línea de investigación que también ha sido popular en la literatura es la relacionada con la σ -convergencia, la cual se enfoca en la varianza de $\log y_{it}$, $\sigma_{\log y_{it}}$, y por tanto en la evolución de la distribución del ingreso mundial. La sigma convergencia se da entre los momentos t y $t + T$ si,

$$\sigma_{\log y_{it}}^2 - \sigma_{\log y_{it+T}}^2 > 0$$

Bianchi (1997) usa métodos no paramétricos para estimar la forma de la distribución del ingreso y probar la existencia de múltiples modas en la estimación de la densidad. De esta manera, encuentra evidencia de la existencia de dos modas en la densidad de la función de distribución, siendo esto evidencia de algún grado de polarización en el ingreso. Al realizar este análisis en distintos momentos del tiempo, este autor encuentra que esta polarización ha tenido una concentración más fuerte al lado izquierdo (países más pobres) de la distribución.

Adaptando técnicas de dominancia estocástica al estudio de la distribución del ingreso mundial, Anderson (2004) estudia el progreso de la polarización, ingreso y pobreza de 101 países para el período 1970-1995. Aunque estos métodos ofrecen sólo un orden parcial de la distribución, proveen un método para hacer inferencia sin ambigüedades sobre la localización de la mayor densidad de la función de distribución. Adicionalmente, este esquema permite identificar el grado de polarización en distintos momentos del tiempo; de hecho, Anderson (2004) encuentra que el grado de polarización entre países pobres y ricos ha aumentado durante el período en cuestión.

Otra línea de énfasis que se ha propuesto en la literatura y que ha criticado fuertemente a la anterior por no tener en cuenta la distribución del mundo en su conjunto, tiene que ver con los métodos de distribución

²²Entre los ejemplos más sobresalientes de la literatura se encuentran los siguientes trabajos: Barro and Sala-i-Martin (1992) presentan evidencia de convergencia para un grupo de 98 países y para los pertenecientes a la OECD; Mankiw, Romer and Weil (1992) para una batería de 98 países; Sala-i-Martin (1996a, 1996b) presenta evidencia de β -convergencia y σ -convergencia para una batería de 110 países, un subgrupo de la OECD, entre otros.

²³MRW de aquí en adelante.

dinámicos propuestos por Quah (1993, 1996 y 1997); que, a pesar de emplear un esquema distinto, encuentra que la función de distribución que describe la distribución del ingreso tiene forma bimodal, sugiriendo una tendencia a la polarización.

Uno de los resultados más notables y frecuentes en esta literatura es la poca movilidad ascendente entre países y la persistente polarización encontrada durante los últimos años. Según Durlauf et al. (2005) estos resultados sugieren que la heterogeneidad revelada por los enfoques de distribución (σ -convergencia), se deben, en parte, a la existencia de convergencia por clubes o "clusters".

La gran mayoría de los estudios mencionados anteriormente, están basados en análisis econométricos de datos transversales, particularmente, para el conjunto de países encontrados en las tablas de Summers y Heston (PENN World Tables). Hay dos dificultades principales que han obstaculizado el avance en análisis econométrico de series de tiempo para probar estas teorías: primero, la falta de información, ya que en el mejor de los casos se cuenta con datos disponibles desde 1960, lo cual evidentemente limita el alcance del análisis de "largo plazo". Segundo, los escasos enfoques que han empleado series de tiempo en su estrategia de estimación, carecen de alguna validación teórica, luego son métodos basados meramente en un análisis estadístico.

En este nuevo escenario y, siguiendo a Bernand y Durlauf (1995), un conjunto de países Ω exhiben convergencia en el tiempo si,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Proj}(\log y_{i,t+T} - \log y_{j,t+T} | F_t) = 0$$

donde F_t denota un conjunto de información disponible. Una forma de probar esta hipótesis empíricamente consiste en determinar si,

$$e_t = \log y_{i,t+T} - \log y_{j,t+T}$$

tiene raíz unitaria o presenta alguna tendencia determinística; caso en el cual se rechazaría la hipótesis de convergencia. Sin embargo, este procedimiento presenta varias dificultades, mencionadas por Bernand y Durlauf (1995) y destacadas por Durlauf et al. (2005); aquellos países que se encuentren en transición a su estado estacionario pueden evidenciar un comportamiento para $e_t \sim I(1)$ transitorio, concluyéndose erróneamente la no existencia de convergencia, a pesar de que en el largo plazo si la hay. Luego, estas metodologías resultarían más apropiadas para países avanzados cercanos a su estado estacionario.

Una primera solución a este problema fue presentada por Hobijn y Franses (2000), los cuales emplean un algoritmo de "clustering" para identificar grupos de convergencia, y de esta forma abordar el problema de heterogeneidad en la tecnología y en las condiciones iniciales. Sin embargo, Durlauf et al. (2005), argumentan que, dado que es poco probable que los países se encuentren cerca de su senda de estado estacionario (posiblemente algunos países avanzados si lo estén), los "clusters" que encuentran Hobijn y Franses (2000) pueden estar reflejando, más que convergencia, transiciones temporales.

4.2. El problema de las variables de control.

Durlauf et al. (2005) presentan un resumen de los diferentes regresores que han sido usados en la literatura de crecimiento económico; en total muestran 145 variables que resultaron significativas usando convenciones estadísticas estándar. Adicionalmente, los autores destacan que uno de los principales causantes de esta diversidad en los regresores es el problema de medida (o medición) presente al realizar alguna aproximación empírica de alguna teoría en particular. Esto demuestra el poco consenso que existe en la literatura sobre cuáles son los regresores óptimos que deben ir en la regresión. Brock y Durlauf (2001) señalan que aunque los modelos teóricos han sido guías para determinar el conjunto de regresores que deben ir en la ecuación empírica, existe un problema adicional: los modelos teóricos no tienen límites definidos, así, "una teoría que

destaca a las instituciones como un elemento fundamental del crecimiento no es incompatible con una que señale el aspecto geográfico” (Brock y Durlauf, 2001).

Este hecho no ha sido desconocido por la literatura, la cual ha propuesto distintos métodos econométricos con el fin de dar alcance a la cuestión sobre cuáles son los regresores que deberían ir en una ecuación. Una aproximación inicial es presentada por Levine y Renalt (1992) los cuales mediante el uso del análisis de límites extremos encuentran que los únicos regresores robustos en las ecuaciones de crecimiento son la participación de la inversión en el PIB y el ingreso inicial²⁴. Similares resultados encuentran Kalaitzidakis, Mamuneas y Stengos (2000), quienes especifican una ecuación semejante a la de Levine y Renalt (1992), incluyendo la posibilidad de efectos no lineales. Además de los determinantes encontrados por Levine y Renalt (1992), Kalaitzidakis, Mamuneas y Stengos (2000) encuentran que la volatilidad de la inflación y las distorsiones de la tasa de cambio son igualmente robustas en las distintas especificaciones²⁵.

Sala-i-Martin (1997) propone un procedimiento distinto para evaluar la significancia estadística de ψ_m , el cual consiste en promediar la significancia estadística mediante,

$$\hat{S}_i = \sum_m \omega_m \hat{S}_{i,m}$$

donde $\hat{S}_{i,m}$ es el nivel de significancia estadística asociado a $\hat{\psi}_m$ y ω_m es el peso asignado a cada modelo m , de modo tal que $\sum_m \omega_m = 1$. Sala-i-Martin (1997) determina que una variable es robusta si se encuentra significativa el 95 % de las veces. Así, mediante este procedimiento encuentra que el ingreso inicial, la inversión como proporción del PIB y la educación secundaria son determinantes robustos del crecimiento²⁶.

Empleando algoritmos distintos, aunque metodologías similares inspiradas en la modelación de lo “general-a-simple” (Gets) Hoover y Perez (2004) y Hendry y Krolzig (2004) encuentran que el modelo lineal seleccionado de un espacio de posibles modelos es uno en donde la tasa de crecimiento del PIB está determinada por el número de años que la economía permanece (o ha permanecido) abierta, la tasa de inversión en maquinaria y equipo, una medida de estabilidad política, una media del porcentaje de personas que son protestantes y el porcentaje de personas que pertenecen al confucionismo²⁷.

Otra línea de énfasis que ha sido empleada recientemente para determinar el mejor modelo (determinantes-regresores) es el uso de técnicas bayesianas en este tipo de regresiones. La idea central de esta metodología, según Durlauf et al. (2005), es asumir “el verdadero modelo” como una variable no observable; esto es, sea $\mu(m|D)$ la probabilidad de que, dados los datos D , el modelo m sea el verdadero, donde $\mu(\cdot)$ es una medida de probabilidad. Por regla de Bayes,

²⁴Levine y Renalt (1992) siguiendo una estrategia similar a la empleada por Leamer (1983) y estiman la siguiente ecuación reescrita por Durlauf et al. (2005),

$$\gamma_i = \psi_m S_i + \pi_m R_{i,m} + \varepsilon_{i,m} \tag{19}$$

donde γ_i , es la tasa de crecimiento del PIB per cápita del país i , S_i son el conjunto de regresores que deberían tener todos los modelos de crecimiento económico (los regresores robustos) y $R_{i,m}$ son los regresores del país i característicos del modelo m , donde se asume $m = 1, \dots, M$ modelos. Levine y Renalt (1992) argumentan que existe una fuerte evidencia que permite afirmar que un regresor $s_1 \in S$ afecta robustamente al crecimiento de un país si su coeficiente y significancia son constantes a lo largo de los m modelos.

²⁵Hay dos limitaciones que se deben tener presente en este modelo: la primera, hace referencia a la crítica que menciona Brock, Durlauf y West (2003) en relación al riesgo que se corre al suponer que el modelo de análisis de límites extremos responde al problema de incertidumbre si un país en particular debe realizar cierta política o no (Ver también Brock y Durlauf, 2001). Segundo, Hoover y Perez (2004) muestran que el uso del análisis de límites extremo puede llevar a la conclusión de que muchos determinantes del crecimiento no son estadísticamente significativos, a pesar de que incluso son parte del proceso generador de datos.

²⁶Hay dos críticas importantes a la metodología empleada por Sala-i-Martin (1997) destacadas por Hoover y Perez (2004) y Durlauf et al. (2005): primero, el procedimiento no cuenta con un marco teórico de decisión, luego no permite interpretar los resultados. Segundo, las propiedades asintóticas del procedimiento, dado lo mencionado anteriormente, no son muy buenas.

²⁷Aunque novedosa, esta metodología carece de problemas similares a las mencionadas anteriormente, dado que no se emplea ningún criterio teórico económico para seleccionar el modelo apropiado y se basa meramente en un carácter estadístico. Ver Hendry y Krolzig (2005) para un mayor detalle.

$$\mu(m|D) \propto \mu(D|m) \mu(m)$$

Luego, en la estimación frecuentista, para producir una estimación inicial de $\hat{\psi}$ se realiza un promedio sobre todas las estimaciones $\hat{\psi}_m$. Ahora bien, bajo el contexto bayesiano, $\mu(\psi|D, m)$ se determina mediante²⁸,

$$\mu(\psi|D) = \sum_{m \in M} \mu(\psi|D, m) \mu(m|D)$$

Doppelhofer, Miller y Sala-i-Martin (2004) encuentran cuatro variables con probabilidad “posterior” mayor a 0.9 de ser incluidas en el modelo: el ingreso inicial, porcentaje del PIB proveniente de la minería, número de años en que la economía ha permanecido abierta y porcentaje de la población que practica el confucionismo. Fernández, Ley y Steel (2001a) llegan a conclusiones similares; bajo el supuesto de que la probabilidad “prior” de una variable aparezca en el modelo correcto de crecimiento sea 0,5, cuatro variables tienen probabilidad “posterior” por encima de 0,9 de ser incluida en el modelo correcto: el ingreso inicial, porcentaje de la población que practica el confucionismo, expectativa de vida al nacer y la tasa de inversión sobre maquinaria y equipo.

4.3. El problema de heterogeneidad.

Desde sus inicios, la literatura enfocada en la evidencia empírica de los modelos de crecimiento ha cuestionado el supuesto bajo el cual se ha desarrollado esta: la información de distintos países se supone que proviene de un mismo proceso generador de datos. Durlauf et al. (2005) destacan una cita de Harberger (1987) en la que cuestiona el hecho que Tailandia, República Dominicana, Zimbabue, Grecia y Bolivia aparecen todos en el mismo modelo de regresión a pesar de que no tienen muchas cosas en común. La diferencia notable de los trabajos realizados en la literatura empírica de crecimiento frente a las demás áreas de trabajo de la economía es la información disponible, que lleva a que muchas veces se deje de lado esta crítica. Sin embargo, en caso de que se asuma (o sea cierto) la existencia de la heterogeneidad de los parámetros, se debe tener presente dado que puede traer serios problemas²⁹.

Una primera aproximación a la heterogeneidad de los parámetros es propuesta por Liu y Stengos (1999) los cuales estiman una versión de la ecuación de Solow (a la Mankiw, Romer y Weil, 1992) en un modelo semiparamétrico parcialmente lineal presentado por Durlauf et al. (2005) de la siguiente forma,

$$\gamma_i = k + f_{\beta}(\log y_{i,0}) + \pi_n \log(n_i + g + \delta) + \pi_k \log s_{k,i} + f_{\pi H}(\log s_{H,i}) + \varepsilon_i$$

en donde $f_{\beta}(\cdot)$ y $f_{\pi H}(\cdot)$ son funciones arbitrarias, y las demás variables son las usuales del modelo de Solow ampliado propuesto por Mankiw, Romer y Weil (1992). De esta manera, Liu y Stengos (1999) encuentran que el efecto marginal del ingreso inicial es negativo cuando el ingreso per-cápita excede los \$1,800 US. Adicionalmente, se encuentran impactos positivos del capital humano sobre el crecimiento, únicamente cuando las tasas de escolaridad en secundaria exceden el 15%³⁰. Por otra parte, Mamuneas, Savvides y Stengos (2004) analizan regresiones de productividad para 51 países, en donde el coeficiente del capital humano depende de una medida de apertura de la economía de los países en cuestión; además, encuentran evidencia estadística para rechazar la hipótesis de homogeneidad de los coeficientes.

²⁸Durlauf et al. (2005) mencionan tres críticas que poseen este tipo de aproximaciones: la primera, es el tema de como determinar los “priors” de los parámetros en los modelos; la segunda, es como se debe determinar; por último, se debe tener presente que para cada modelo y para cada teoría existe incertidumbre en la medición. Ver Doppelhofer, Miller y Sala-i-Martin (2004) y Brock, Durlauf y West (2003).

²⁹Particularmente Binder y Pesaran (1999) muestran que si se generaliza el supuesto de homogeneidad en la tasa de crecimiento tecnológico por país, de tal forma que ésta siga una caminata aleatoria, esto puede inducir no estacionariedad de la serie en niveles, llevando a tener que preguntarse por las consecuencias de estas raíces unitarias. Ver Binder and Pesaran (1999), Pesaran (2007) y Durlauf et al. (2005) para más detalle. Adicionalmente Durlauf et al. (2005) mencionan un caso en particular en el cual tendencias heterogéneas pueden no tener consecuencias importantes.

³⁰Similares resultados encuentran Durlauf, Kourtellos y Minkin (2001).

En una aproximación distinta, y con un aire similar a la propuesta por Phillips y Sul (2007), Canova y Marcet (1995) definen la siguiente ecuación,

$$s_{i,t} = a_i + \rho_i s_{i,t-1} + \varepsilon_i$$

donde $s_{i,t}$ es el logaritmo del ratio entre el ingreso per-cápita del país i en el momento t y el agregado internacional. Empleando información de las regiones de Europa y 17 países de Europa occidental encuentran que, en los casos en que se asume heterogeneidad en a_i y ρ_i , los pronósticos realizados difieren estadísticamente de forma sustancial. Adicionalmente, Canova y Marcet (1995) encuentran evidencia de la existencia de correlación entre los valores iniciales de s , y s_{it} , lo cual es muestra de una dependencia entre el largo plazo y las condiciones iniciales³¹.

³¹Maddala y Wu (2000) empleando una metodología similar encuentran resultados en la misma línea a los de Canova y Marcet (1995).

Parte III
Metodología

5. Introducción

A partir de los trabajos de Chamberlain y Rothschild (1983) y Connor y Korajczyk (1986, 1988) los avances en el estudio de métodos econométricos que capturan la heterogeneidad de los agentes de una muestra tipo panel, particularmente, aquella estructura que emplea factores comunes y efectos idiosincráticos, ha tenido un auge notorio. Estudios recientes han generalizado estos modelos de factores comunes en distintas direcciones³².

Para ilustrar algunos de los elementos mencionados, considere el siguiente modelo con un único factor, del cual parten Phillips y Sul (2007)

$$X_{it} = \delta_i \mu_t + \varepsilon_{it} \quad (20)$$

donde δ_i mide la distancia idiosincrática entre algún factor común μ_t y el componente sistémico de X_{it} , y μ_t es el "factor común" (llamado así en la literatura de componentes principales y factores dinámicos). Este último elemento, representa el comportamiento común agregado de X_{it} , recogido en un solo proceso. El modelo busca entonces capturar la dinámica de cada variable (individual) x_{it} en función de μ_t y, por medio de estos el componente sistémico (δ_i) y un error (ε_{it}), ambos idiosincráticos.

Phillips y Sul (2007) proponen un nuevo modelo en donde el componente idiosincrático sistémico depende del tiempo, esto es, la representación del comportamiento de los agentes está dada por un "factor de carga" δ_{it} que puede cambiar a través del tiempo. Este factor δ_{it} tiene un componente estocástico, dado que absorbe ε_{it} , permitiendo así la posibilidad de que δ_{it} converja en el tiempo, en relación con μ_t . Por tanto, estos autores proponen la siguiente forma funcional,

$$X_{it} = \delta_{it} \mu_t \quad (21)$$

donde, tanto δ_{it} como μ_t , cambian (dependen) en el tiempo t . Un aspecto innovador de Phillips y Sul (2007) es la forma semiparamétrica propuesta para el factor (es) de carga, el cual va a estar dado por,

$$\delta_{it} = \delta_i + \sigma_i \xi_{it} L(t)^{-1} t^{-\alpha} \quad (22)$$

en donde se asume que: δ_i es fijo; ξ_{it} es un proceso *idd*(0,1) a través de i pero débilmente dependiente sobre t ; $L(t)$: es una función que cambia lentamente (de forma suave) en el tiempo tal que $L(t) \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$ ³³.

Uno de los aspectos más interesantes de esta estructura, es probar si es posible garantizar si esta hipótesis se acepta, esto es, $\delta_i = \delta_j \forall i \neq j$. El modelo propuesto por Phillips y Sul (2007), permite componentes transitorios en donde $\delta_{it} \neq \delta_{jt}$, incorporando un efecto heterogéneo transitorio, o incluso divergencia transitoria a través de i .

En esta parte del artículo se ahonda en los conceptos básicos de teoría asintótica, dado el carácter académico de este artículo. En la sección 6 se presentan conceptos preliminares empleados en la prueba log t de Phillips y Sul (2007), presentada en la sección 7.

6. Preliminares.

6.1. Conceptos Básicos de Teoría Asintótica

6.1.1. Convergencia y Acotamiento de una Sucesión.

A continuación se enuncian algunos conceptos fundamentales empleados en el análisis de la teoría asintótica. Inicialmente, se mencionan para el caso en que se considera sucesiones determinísticas, y posteriormente

³²Ver por ejemplo Bai (2003, 2004), Bai y Ng (2002, 2006), Stock y Watson (1999), Moon y Perron (2004) y Phillips y Sul (2006)

³³En Phillips y Sul (2007) se expone una condición formal para dicha función.

se expanden para el caso estocástico. Estos conceptos son fundamentales para entender las propiedades del test $\log t$ propuesto por Phillips y Sul (2007).

Las definiciones, lemas, proposiciones y teoremas presentados asumen entendidos los conceptos básicos de Teoría de la Medida y Análisis Real.

Definición: $O(N^\lambda)$ y $o(N^\lambda)$

1. Una sucesión $\{a_N\}$ es $O(N^\lambda)$ (como máximo de orden N^λ) si $\frac{1}{N^\lambda}a_N$ es acotada. Cuando $\lambda = 0$, $\{a_N\}$ es acotada, también escribimos $a_N = O(1)$.
2. $\{a_N\}$ es $o(N^\lambda)$ si $N^{-\lambda}a_N \rightarrow 0$. Cuando $\lambda = 0$, a_N converge a cero, también podemos escribir $a_N = o(1)$.

Ejemplo

1. Si $a_N = \log(N)$, luego $a_N = o(N^\lambda)$ para cualquier $\lambda > 0$
2. Si $a_N = 10 + \sqrt{N}$, luego $a_N = O(N^{1/2})$ y $a_N = o(N^{(1/2+\gamma)})$ para cualquier $\gamma > 0$.

Si cada elemento de un vector o matriz es $O(N^\lambda)$ o $o(N^\lambda)$, luego el vector o la matriz es $O(n^\lambda)$ o $o(n^\lambda)$.

Definición: Convergencia casi segura.

Sea $\{b_n(\cdot)\}$ una sucesión de variables aleatorias real. Decimos que $b_n(\cdot)$ converge casi seguramente a b , esto es, $b_n \xrightarrow{a.s.} b$ si existe un número real b tal que, $P\{\omega : b_n(\omega) \rightarrow b\} = 1$, donde P es una medida de probabilidad definido en un espacio de probabilidad $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$.

El concepto de convergencia casi segura es empleado ampliamente cuando se quiere demostrar las propiedades asintóticas (consistencia) de los distintos estimadores propuestos en econometría. A continuación se presentan algunas proposiciones necesarias para derivar algunas propiedades del estimador de mínimos cuadrados.

Proposición.

Sea $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ y $\{\mathbf{b}_n\}$ una sucesión de vectores aleatorios de dimensión $k \times 1$, tal que, $b_n \rightarrow b$ siendo b de dimensión $k \times 1$. Si g es continua en b , luego

$$g(\mathbf{b}_n) \xrightarrow{a.s.} g(b)$$

Demostración.

White (2001), pp. 19.

Proposición.

Sea $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ una función continua definida en un espacio compacto $C \subset \mathbb{R}^k$. Suponga que $\{\mathbf{b}_n\}$ es una sucesión de vectores aleatorios de dimensión $k \times 1$ y $\{\mathbf{c}_n\}$ es una sucesión de vectores aleatorios de dimensión $k \times 1$ tal que $\mathbf{b}_n(\cdot) - \mathbf{c}_n \xrightarrow{a.s.} 0$ y, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ y \mathbf{c}_n es un vector interior de C uniformemente en $n \Rightarrow g(\mathbf{b}_n(\cdot)) - g(\mathbf{c}_n) \xrightarrow{a.s.} 0$.

Demostración.

White (2001), pp. 22.

Definición: Matrices uniformemente no singulares (White, 2001, pp. 22)

Se dice que una sucesión de matrices de dimensión $k \times k$, $\{\mathbf{A}_n\}$, es uniformemente no singular si, para algún $\delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |\det(\mathbf{A}_n)| > \delta$. Además si $\{\mathbf{A}_n\}$ es una sucesión de matrices de dimensión $k \times k$, luego se dice que $\{\mathbf{A}_n\}$ es uniformemente definida positiva si $\{\mathbf{A}_n\}$ es uniformemente no singular. Si $\{\mathbf{A}_n\}$ es una sucesión de matrices de dimensión $l \times k$, entonces $\{\mathbf{A}_n\}$ tiene rango columna completo uniformemente si existe una sucesión de submatrices de dimensión $k \times k$, $\{\mathbf{A}_n^*\}$, que es uniformemente no singular.

La definición anterior es determinante en el análisis de las propiedades de consistencia del estimador de mínimos cuadrados, ya que si se supone el siguiente modelo,

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}'_t \beta_0 + \varepsilon_t$$

y asumiendo que $\frac{\mathbf{X}'\varepsilon}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$ y $\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} - \mathbf{M}_n \xrightarrow{a.s.} 0$ donde $\mathbf{M}_n = O(1)$ es uniformemente definida positiva, se concluye que existe $\hat{\beta}_n$ y adicionalmente que, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \hat{\beta}_n \xrightarrow{a.s.} \beta_0$.

6.1.2. Convergencia en Probabilidad y Acotamiento de una Sucesión Aleatoria.

Un concepto más débil de convergencia de sucesiones aleatorias es el concepto de convergencia y acotamiento en probabilidad enunciados a continuación.

Definición: Convergencia en Probabilidad.

1. Una secuencia de v.a. $\{x_N : N = 1, 2, \dots\}$ converge en probabilidad a una constante a si,

$$\forall \epsilon > 0, P[|x_N - a| > \epsilon] \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Escribimos $x_N \rightarrow_p a$ y decimos que a es la probabilidad limite (plim) de x_N .

2. En el caso particular en que $a = 0$, también decimos que x_N es $o_p(1)$ o, $x_N \rightarrow_p 0$

3. Una secuencia de v.a. $\{x_N\}$ es acotada en probabilidad, si y solo si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon < \infty \text{ y } N_\epsilon \in \mathbb{Z} : P[|x_N| \geq b_\epsilon] < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon$$

En este caso decimos que $x_N = O_p(1)$

Es importante destacar, siguiendo lo enunciado por White (2001), que en el concepto de convergencia casi segura, la medida de probabilidad toma en cuenta la distribución conjunta de la sucesión completa, mientras que el concepto de convergencia en probabilidad, emplea los primeros n elementos para b_n .

Lema

Si $x_N \rightarrow_p a$ luego $x_N = O_p(1)$.

Prueba.

Sea x_N una secuencia tal que $x_N \rightarrow_p a$, esto es,

$$\forall \epsilon > 0, P[|x_N - a| > \epsilon] \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Lo anterior implica que $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : P[|x_N - a| > 1] < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon$.

Sin embargo, $|x_N| = |x_N + a - a| < |x_N - a| + |a|$, de donde,

$$|x_N| - |a| < |x_N - a|$$

Luego,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : P[|x_N| - |a| > 1] < P[|x_N - a| > 1] < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : P[|x_N| > 1 + |a|] < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon$$

Tomando, $b_\epsilon \equiv 1 + |a|$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon < \infty \text{ y } N_\epsilon \in \mathbb{Z} : P[|x_N| > b_\epsilon] < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon$$

Teorema

Sea $\{b_n\}$ una sucesión de variables aleatorias. Si $b_n \xrightarrow{a.s.} b$, entonces $b_n \rightarrow_p b$.

Demostración.

Véase Lucas (1975), pp. 480.

Definición.

1. Una sucesión aleatoria $\{x_N : N = 1, 2, \dots\}$ es $o_p(a_N)$, donde $\{a_N\}$ es una sucesión positiva no aleatoria, si $x_N/a_N = o_p(1)$. Se escribe, $x_N = o_p(a_N)$

2. Una sucesión aleatoria $\{x_N : N = 1, 2, \dots\}$ es $O_p(a_N)$, donde $\{a_N\}$ es una sucesión positiva no aleatoria, si $x_N/a_N = O_p(1)$. Se escribe, $x_N = O_p(a_N)$

Lema

Si $w_N = o_p(1)$, $x_N = o_p(1)$, $y_N = O_p(1)$ y $z_N = O_p(1)$, luego,

1) $w_N + x_N = o_p(1)$

2) $y_N + z_N = O_p(1)$

3) $y_N z_N = O_p(1)$

1) $x_N z_N = o_p(1)$

Demostración.

Ver Rao (1973).

Lema

Sea $\{Z_N : N = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de matrices de $J \times K$ tal que $Z_N = o_p(1)$, y sea $\{x_N\}$ una sucesión de vectores aleatorios $J \times 1$ tal que $x_N = O_p(1)$. Luego,

$$Z'_N x_N = o_p(1)$$

Demostración.

Basta aplicar el lema anterior al producto de matrices (implica el producto de dos sucesiones $o_p(1)$ y $O_p(1)$, obteniéndose una nueva sucesión $o_p(1)$ y, la suma de sucesiones aleatorias $o_p(1)$ que es $o_p(1)$)

Teorema de Slutsky

Sea $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^j$ una función continua en un punto $c \in \mathbb{R}^k$. Sea $\{x_N : N = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de vectores aleatorios de tamaño $K \times 1$ tal que $\mathbf{x}_N \rightarrow_p c$. Luego,

$$g(x_N) \rightarrow_p g(c) \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Si $g(\cdot)$ es continuo en $p\text{lím } \mathbf{x}_N$

Demostración.

Ver White (2001), pp. 27.

Ejemplo.

Si $X_{1T} \xrightarrow{p} c_1$ y $X_{2T} \xrightarrow{p} c_2$, luego $(X_{1T} + X_{2T}) \xrightarrow{p} (c_1 + c_2)$, dado que $g(X_{1T}, X_{2T}) = X_{1T} + X_{2T}$ es una función continua en (X_{1T}, X_{2T}) .

6.1.3. Convergencia en la media cuadrática y la desigualdad de Chebyshev.

Una condición más fuerte que la convergencia en probabilidad es la convergencia en media cuadrática. Se dice que una sucesión $\{X_T\}$ converge en media cuadrática a c ,

$$X_T \xrightarrow{m.s.} c$$

si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall T \geq N, E(X_T - c)^2 < \epsilon$$

Proposición.

Sea X una *v.a.* con $E(|X|^r)$ finita para algún $r > 0$. Luego,

$$\forall \delta > 0 \text{ y } \forall c, P\{|X - c| > \delta\} \leq \frac{E|X - c|^r}{\delta^r}$$

Demostración.

Ver White (2001), pp. 29.

Una implicación muy importante de la desigualdad de chebyshev es que si $X \xrightarrow{m.s.} c$, luego $\forall \epsilon > 0$ y $\delta > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} : E(X_T - c)^2 < \delta^2 \epsilon \forall T \geq N$. Esto garantiza,

$$P\{|X - c| > \delta\} \leq \frac{E|X - c|^2}{\delta^2} < \epsilon, \quad \forall T \geq N$$

o que,

$$X_T \xrightarrow{p} c$$

6.1.4. Ley de los Grandes Números para variables independientes e idénticamente distribuidas.

Consideremos el comportamiento de,

$$\bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$$

donde $\{Y_t\}$ es *iid* con media μ y varianza σ^2 . Luego la media y la varianza de \bar{Y}_T son iguales a,

$$E(\bar{Y}_T) = E\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t\right) = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T E[Y_t]\right) = \mu$$

$$E(\bar{Y}_T - \mu)^2 = E\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t - \mu\right)^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 E\left(\sum_{t=1}^T Y_t - T\mu\right)^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 E\left(\sum_{t=1}^T Y_t - \sum_{t=1}^T E[Y_t]\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{T}\right)^2 E\left(\sum_{t=1}^T Y_t - E\left(\sum_{t=1}^T Y_t\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 \text{Var}\left(\sum_{t=1}^T Y_t\right) = \left(\frac{1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^T \text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{T}$$

dado que $\frac{\sigma^2}{T} \rightarrow 0$ a medida que $T \rightarrow \infty$, entonces se concluye que $\bar{Y}_T \xrightarrow{m.s.} \mu$, y por tanto $\bar{Y}_T \xrightarrow{p} \mu$.

6.1.5. Convergencia en Distribución.

Sea $\{X_T\}_{T=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias, y sea $F_{X_T}(x)$ la función de distribución acumulada de X_T . Suponga que existe esta función de distribución acumulada $F_X(x)$ tal que,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_{X_T}(x) = F_X(x)$$

para cualquier valor de x donde F_X es continua. Luego se dice que,

$$X_T \xrightarrow{d} X$$

Cuando $F_X(x)$ es de una forma común, como por ejemplo una $N(\mu, \sigma^2)$, decimos que,

$$X_T \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma)$$

Proposición.

a) Sea $\{\mathbf{Y}_T\}$ una sucesión de $(n \times 1)$ vectores aleatorios con $\mathbf{Y}_T \xrightarrow{d} \mathbf{Y}$. Suponga que $\{\mathbf{X}_T\}$ es una sucesión de $(n \times 1)$ vectores aleatorios tal que $\mathbf{X}_T - \mathbf{Y}_T \xrightarrow{p} 0$. Luego $\mathbf{X}_T \xrightarrow{d} \mathbf{Y}$. Esto es, \mathbf{X}_T y \mathbf{Y}_T tienen la misma distribución límite.

b) Sea $\{\mathbf{X}_T\}$ una sucesión de vectores aleatorios de dimensión $(n \times 1)$ con $\mathbf{X}_T \xrightarrow{p} c$ y sea $\{\mathbf{Y}_T\}$ una sucesión de vectores aleatorios $(n \times 1)$ con $\mathbf{Y}_T \xrightarrow{d} \mathbf{Y}$. Luego se cumple que,

$$\{\mathbf{X}_T + \mathbf{Y}_T\} \xrightarrow{d} c + \mathbf{Y}$$

y,

$$\{\mathbf{X}'_T \mathbf{Y}_T\} \xrightarrow{d} c' \mathbf{Y}$$

c) Sea $\{\mathbf{X}_T\}$ una sucesión de vectores de $(n \times 1)$ con $\mathbf{X}_T \xrightarrow{d} \mathbf{X}$, y sea $g(\mathbf{X})$, donde $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, una función continua que no depende de T . Luego, la sucesión de variables aleatorias $\{g(\mathbf{X}_T)\} \xrightarrow{d} g(\mathbf{X})$.

Demostración.

Ver Rao (1973), pp. 122-124.

6.1.6. Teorema del Límite Central.

Note que la variable aleatoria $\sqrt{T}(\bar{Y}_T - \mu)$ tiene media cero,

$$E \left[\sqrt{T} (\bar{Y}_T - \mu) \right] = 0$$

y varianza dada por,

$$\begin{aligned} E \left[\sqrt{T} (\bar{Y}_T - \mu) \right]^2 &= TE \left[(\bar{Y}_T - \mu) \right]^2 = TE \left[(\bar{Y}_T)^2 - 2(\bar{Y}_T \mu) + \mu^2 \right] \\ &= T \left[E (\bar{Y}_T)^2 - 2(E [\bar{Y}_T] \mu) + \mu^2 \right] \\ &= T \left[E (\bar{Y}_T)^2 - \mu^2 \right] \\ &= T \cdot \text{Var} (\bar{Y}_T) = \sigma^2 \end{aligned}$$

El teorema del límite central establece que a medida que T se incrementa, la sucesión $\sqrt{T}(\bar{Y}_T - \mu)$ converge en distribución a una variable aleatoria normal distribuida. La versión más común del T.L.C. establece que si $Y_t \sim i.i.d.$ con media μ y varianza σ^2 , entonces,

$$\sqrt{T}(\bar{Y}_T - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

6.2. Teoremas Límites para variables serialmente dependientes.

6.2.1. Ley de los grandes números para procesos con covarianza estacionaria.

Sea (Y_1, Y_2, \dots, Y_T) una muestra de tamaño T de un proceso con covarianza estacionaria,

$$E(Y_t) = \mu \quad \forall t$$

$$E(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) < \gamma_j \quad \forall t$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty$$

A continuación se discuten las propiedades de la media muestral. Esto es,

$$\bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t \tag{23}$$

Tomando valor esperado de la media muestral tenemos que,

$$E(\bar{Y}_T) = \mu$$

luego, la media es un estimador insesgado de la media poblacional. Por otro lado la varianza,

$$E(\bar{Y}_T - \mu)^2 = E \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t - \mu \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T Y_t - T\mu \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{T^2} E [(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)] [(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)] \\
&= \frac{1}{T^2} E [[(Y_1 - \mu)(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu)(Y_1 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)(Y_1 - \mu)] + \\
&\quad [(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)] [(Y_2 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)]] \\
&= \frac{1}{T^2} E [[(Y_1 - \mu)(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu)(Y_1 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)(Y_1 - \mu)] + \\
&\quad [(Y_1 - \mu)(Y_2 - \mu) + (Y_2 - \mu)(Y_2 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)(Y_2 - \mu)] + \cdots + \\
&\quad [(Y_1 - \mu)(Y_T - \mu) + (Y_2 - \mu)(Y_T - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu)(Y_T - \mu)]] \\
&= \frac{1}{T^2} [[\sigma^2 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{T-1}] + \\
&\quad [\gamma_1 + \sigma + \cdots + \gamma_{T-2}] + \cdots + \\
&\quad [\gamma_{T-1} + \gamma_{T-2} + \cdots + \sigma]] \\
&= \frac{1}{T^2} \{T\sigma + 2(T-1)\gamma_1 + 2(T-2)\gamma_2 + \cdots + 2\gamma_{T-1}\} \\
&= \frac{1}{T} \left\{ \sigma + \frac{2(T-1)}{T}\gamma_1 + \frac{2(T-2)}{T}\gamma_2 + \cdots + \frac{2}{T}\gamma_{T-1} \right\}
\end{aligned}$$

Luego,

$$E(\bar{Y}_T - \mu)^2 = \left| \sigma + \frac{2(T-1)}{T}\gamma_1 + \frac{2(T-2)}{T}\gamma_2 + \cdots + \frac{2}{T}\gamma_{T-1} \right|$$

por la desigualdad triangular tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ |\sigma| + \frac{2(T-1)}{T}|\gamma_1| + \frac{2(T-2)}{T}|\gamma_2| + \cdots + \frac{2}{T}|\gamma_{T-1}| \right\} \\
&\leq \{|\sigma| + 2|\gamma_1| + 2|\gamma_2| + \cdots + 2|\gamma_{T-1}|\} < \infty
\end{aligned}$$

dado que habíamos asumido que,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty$$

Luego, se puede concluir que³⁴,

$$E(\bar{Y}_T - \mu)^2 \rightarrow 0 \tag{24}$$

³⁴Ver Hamilton (1994) páginas 186-199 para una completa derivación de estas propiedades.

6.2.2. Sucesiones de Martingalas en Diferencias.

Sea $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a. con $E(Y_t) = 0 \forall t$, y Ω un conjunto de información disponible hasta el momento t :

$$\Omega = \{Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1, X_t, X_{t-1}, \dots, X_1\}$$

siendo X_t una segunda v.a. Si,

$$E(Y_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{t=1}^T Y_t p(Y_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{t=1}^T Y_t \frac{p(Y_t, \Omega_{t-1})}{p(\Omega_{t-1})} = 0$$

Entonces se dice que $\{Y_t\}$ es una sucesión de martingalas en diferencia con respecto a Ω_t .

Por otro lado, una sucesión de vectores de $(n \times 1)$, $\{\mathbf{Y}_t\}_{t=1}^{\infty}$, que satisface,

$$E(\mathbf{Y}_t) = 0$$

$$E(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_{t1}) = 0$$

se dice que es una sucesión de vectores martingalas en diferencia.

6.2.3. Estimación del modelo autoregresivo.

Considere el siguiente modelo autoregresivo de orden p ,

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (25)$$

En este caso, se debe tener presente que se pueden estar violando algunos de los supuestos fundamentales de los mínimos cuadrados ordinarios pues,

$$y_{t-1} = c + \phi_1 y_{t-2} + \phi_2 y_{t-3} + \dots + \phi_{p-1} y_{t-p} + \phi_p y_{t-p-1} + \varepsilon_{t-1}$$

⋮

$$y_0 = 0$$

luego,

$$E(\mathbf{x}_t, \varepsilon_t) \neq 0$$

Sin embargo, miremos las propiedades asintóticas del estimador por OLS del modelo 25. Notemos que,

$$\sqrt{T}(\mathbf{b}_T - \beta) = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{u}_t' \right]$$

El primer término esta determinado por,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' = \begin{bmatrix} 1 & T^{-1} \sum y_{t-1} & \dots & T^{-1} \sum y_{t-p} \\ T^{-1} \sum y_{t-1} & T^{-1} \sum y_{t-1}^2 & \dots & T^{-1} \sum y_{t-1} y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{-1} \sum y_{t-p} & T^{-1} \sum y_{t-p} y_{t-1} & \dots & T^{-1} \sum y_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la primera fila y primera columna son de la forma,

$$T^{-1} \sum y_{t-1}$$

y, por la proposición 24 sabemos que convergen en probabilidad a,

$$\mu = E(y_t)$$

los demás elementos convergen a,

$$E(y_{t-i}y_{t-j}) = \gamma_{|i-j|} + \mu^2$$

luego,

$$\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \right]^{-1} \xrightarrow{p} Q^{-1}$$

Para el segundo término tenemos,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{u}_t' \right] \xrightarrow{d} N(0, \sigma Q)$$

de lo anterior se tiene,

$$\sqrt{T}(\mathbf{b}_T - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q)$$

6.3. Procesos Integrados de Orden 1.

Para entender el problema del efecto de la raíz unitaria sobre las propiedades asintóticas de la regresión por *OLS* considere el proceso *AR*(1),

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

donde asumimos que $u_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y que $y_0 = 0$. El estimador por *OLS* de ρ esta dado por,

$$\hat{\rho}_T = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}$$

si el verdadero valor de ρ es menor que 1,

6.3.1. Movimientos Brownianos.

Considere una caminata aleatoria,

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t \tag{26}$$

donde se asume que,

$$\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1)$$

Si el proceso comienza con $y_0 = 0$, se sigue que,

$$y_t = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_t$$

luego,

$$y_t \sim N(0, t)$$

Mas aún, para

$$z_t = y_s - y_t = \epsilon_{t+1} + \dots + \epsilon_s$$

se tiene que,

$$z_t \sim N(0, (s - t))$$

Ahora, consideremos el cambio entre y_{t-1} y y_t ; $y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$. Sabemos que esta innovación, ϵ_t , se distribuye $N(0, 1)$. Supongamos que ϵ_t puede verse como la suma de dos variables con distribución normal independientes,

$$\epsilon_t = e_{1t} + e_{2t}$$

con $e_{1t} \sim N(0, \frac{1}{2})$. Podemos entonces asociar e_{1t} con el cambio entre y_{t-1} y un valor de y en un punto intermedio $y_{t-1/2}$,

$$y_{t-1/2} - y_{t-1} = e_{1t} \tag{27}$$

y e_{2t} con un cambio entre $y_{t-(1/2)}$ y y_t ,

$$y_t - y_{t-(1/2)} = e_{2t} \tag{28}$$

Para $t = 1, 2, \dots$, los procesos 27 y 28 tendrán el mismo comportamiento que 26 ya que,

$$y_t - y_{t-1} = e_{1t} + e_{2t} \sim i.i.d. N(0, 1)$$

Adicionalmente, los procesos 27 y 28 son definidos en periodos de tiempo no enteros.

Empleando el mismo razonamiento, podemos imaginar particionar el cambio entre $t - 1$ y t en N subperiodos separados,

$$y_t - y_{t-1} = e_{1t} + e_{2t} + \dots + e_{Nt}$$

con $e_{it} \sim i.i.d. N(0, \frac{1}{N})$. El resultado será un proceso con las mismas propiedades que 26. El límite cuando $N \rightarrow \infty$ da como resultado un proceso continuo en el tiempo llamado movimiento browniano estándar, $W(t)$.

Definición.

Un movimiento browniano estandar $W(\cdot)$ es un proceso estocástico continuo que asocia para cada $t \in [0, 1]$ un escalar $W(t)$, tal que ,

1. $W(0) = 0$
2. Para cualquier periodo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$, los cambios $[W(t_2) - W(t_1)]$, \dots , $[W(t_k) - W(t_{k-1})]$ son independientes multivariados normales con $[W(s) - W(t)] \sim N(0, s - t)$;
3. Para cualquier realización, $W(t)$ es continua con probabilidad de 1.

6.3.2. Teorema Funcional del Límite Central.

Considere un estimador para el cual, dado el tamaño de la muestra T , se calcula la media de la primera mitad de la muestra y se elimina el resto de observaciones,

$$\bar{u}_{[T/2]^*} = \frac{1}{[T/2]^*} \sum_{t=1}^{[T/2]^*} u_t$$

donde $[T/2]^*$ denota el integral mayor que es menor o igual a $T/2$. Este estimador satisface el teorema del límite central,

$$\sqrt{[T/2]^*} \bar{u}_{[T/2]^*} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Nota

Este estimador es completamente distinto del estimador que usa la otra mitad de la muestra.

Generalizando lo anterior, podemos construir una variable $X_T(r)$ de la media muestral para las primeras observaciones contenidas en la fracción $r \in [0, 1]$ de la muestra total,

$$X_T(r) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]^*} u_t$$

luego X_T es una función escalonada.

Ahora bien,

$$\sqrt{T}X_T(r) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]^*} u_t = \frac{\sqrt{[Tr]^*}}{\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{[Tr]^*}} \sum_{t=1}^{[Tr]^*} u_t$$

pero,

$$\frac{1}{\sqrt{[Tr]^*}} \sum_{t=1}^{[Tr]^*} u_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

por el teorema del límite central, mientras que,

$$\frac{\sqrt{[Tr]^*}}{\sqrt{T}} \rightarrow \sqrt{r}$$

Por tanto,

$$\sqrt{T}X_T(r) \xrightarrow{d} N(0, r\sigma^2)$$

y,

$$\frac{\sqrt{T}X_T(r)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, r) \tag{29}$$

Si queremos considerar el comportamiento de la media muestral basado en las observaciones $[Tr_1]^*$ a $[Tr_2]^*$ para $r_2 > r_1$, concluiríamos, teniendo en cuenta lo anterior, que

$$\sqrt{T} \frac{[X_T(r_2) - X_T(r_1)]}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, r_2 - r_1)$$

y es independiente del estimador 29.

De lo anterior se concluye que la sucesión de funciones estocásticas $\frac{\sqrt{T}X_T(\cdot)}{\sigma}$ tiene un comportamiento asintótico descrito por un movimiento browniano estándar;

$$\frac{\sqrt{T}X_T(r)}{\sigma} \xrightarrow{d} W(\cdot) \tag{30}$$

Este resultado se conoce como el teorema funcional del límite central.

Por tanto, cuando la función 30 es evaluada para el caso particular de $r = 1$, el teorema del límite central convencional se obtiene como un caso particular de 30;

$$\sqrt{T} \frac{X_T(1)}{\sigma} = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T u_t \xrightarrow{d} W(1) \sim N(0, 1) \right]$$

Anteriormente definimos las leyes de convergencia para variables aleatorias, ahora necesitamos extender estas definiciones para cubrir funciones aleatorias.

Sea $S(\cdot)$ un proceso estocástico continuo donde $S(r)$ representa el valor para algún período $r \in [0, 1]$. Supongamos adicionalmente que, para cualquier realización, $S(\cdot)$ es una función continua en r con probabilidad 1. Para la sucesión $\{S_T(\cdot)\}_{T=1}^{\infty}$ de tales funciones continuas, decimos que, $S_T(\cdot) \xrightarrow{d} S(\cdot)$ si se cumple lo siguiente:

- Para cualquier colección finita de periodos k , con $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k \leq 1$, la sucesión k -dimensional de vectores aleatorios $\{y_T\}_{T=1}^{\infty}$ converge en distribución a un vector y , donde,

$$\mathbf{y}_T \equiv \begin{bmatrix} S_T(r_1) \\ S_T(r_2) \\ \vdots \\ S_T(r_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} S(r_1) \\ S(r_2) \\ \vdots \\ S(r_k) \end{bmatrix}$$

- Para cada $\epsilon > 0$, la probabilidad de que $S(r_1)$ difiera de $S_T(r_2)$, para cualquier par de periodos r_1 y r_2 , entre los dos en una magnitud δ tiende a cero uniformemente en T a medida que $\delta \rightarrow 0$.
- $P\{|S_T(0)| > \lambda\} \rightarrow 0$ uniformemente en T a medida que $\lambda \rightarrow 0$.

De lo anterior se puede concluir que $\{S_T(\cdot)\}_{T=1}^{\infty}$ y $\{V_T(\cdot)\}_{T=1}^{\infty}$ son sucesiones de funciones continuas aleatorias con $S_T : r \in [0, 1] \rightarrow R^1$ y $V_T : r \in [0, 1] \rightarrow R^1$. Además, sea Y_T la mayor cantidad para la cual $S_T(r)$ difiere de $V_T(r)$ para cualquier valor de r :

$$Y_T \equiv \sup_{r \in [0,1]} |S_T(r) - V_T(r)|$$

Luego, $\{Y_T\}_{T=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias, tal que, si $\{Y_T\}_{T=1}^{\infty} \xrightarrow{p} 0$, luego $S_T(\cdot) \xrightarrow{p} V_T(\cdot)$

6.3.3. Teorema del Mapeo Continuo

El teorema de la función(mapeo) continua establece que si, $S_T(\cdot) \xrightarrow{d} S(\cdot)$ y $g(\cdot)$ es una función continua,

$$g(S_T(\cdot)) \xrightarrow{d} g(S(\cdot))$$

Luego, de 30 se sigue que,

$$\sqrt{T}X_T(r) \xrightarrow{d} \sigma W(\cdot) \tag{31}$$

Como otro ejemplo, considere el caso del funcional tal que,

$$S_T(r) = \left[\sqrt{T}X_T(r) \right]^2 \tag{32}$$

de lo anterior se tiene que,

$$S_T(\cdot) \xrightarrow{d} \sigma^2 [W(\cdot)]^2 \tag{33}$$

6.3.4. Aplicación a los procesos con raíz unitaria

Considere la siguiente caminata aleatoria,

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$

donde $\{u_t\}$ es una sucesión *i.i.d* con media cero y varianza σ^2 . Si $y_0 = 0$, implica que,

$$y_t = u_1 + u_2 + \cdots + u_T$$

y puede emplearse para definir el siguiente proceso estocástico,

$$X_T(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r \leq \frac{1}{T} \\ \frac{y_1}{T} & \text{para } \frac{1}{T} \leq r \leq \frac{2}{T} \\ \frac{y_2}{T} & \text{para } \frac{2}{T} \leq r \leq \frac{3}{T} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_T}{T} & \text{para } r = 1 \end{cases}$$

La integral de $X_T(r)$ es equivalente a,

$$\int_0^1 X_T(r) dr = \frac{y_1}{T^2} + \cdots + \frac{y_{T-1}}{T^2}$$

multiplicando a ambos lados por \sqrt{T} se establece que,

$$\sqrt{T} \int_0^1 X_T(r) dr = T^{-3/2} \sum_{T=1}^T y_{t-1} \quad (34)$$

Luego, de 31 y del teorema de la función continua sabemos que a medida que $T \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{T} \int_0^1 X_T(r) dr \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr$$

Lo que implica,

$$T^{-3/2} \sum_{T=1}^T y_{t-1} \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr \quad (35)$$

Si quisiéramos derivar la ecuación anterior empleando los métodos convencionales expuestos anteriormente, tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} T^{-3/2} \sum_{T=1}^T y_{t-1} &= T^{-3/2} \sum_{t=1}^T y_{t-1} = T^{-3/2} [u_1 + (u_1 + u_2) + \\ &(u_1 + u_2 + u_3) + \cdots + (u_1 + u_2 + \cdots + u_{T-1})] \\ &= T^{-3/2} [u_1(T-1) + u_2(T-2) + \cdots + \\ &[T - (T-1)u_{T-1}]] \\ &= T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_t - T^{-3/2} \sum_{t=1}^T tu_t \end{aligned} \quad (36)$$

pero sabemos que,

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_t \\ -T^{-3/2} \sum_{t=1}^T t u_t \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right)$$

Luego $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}$ se distribuye asintóticamente gaussiana con media cero y varianza igual a $\sigma^2 \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\right] = \frac{\sigma^2}{3}$

Por tanto, si y_t es una caminata aleatoria sin media ni tendencia, la media muestral $T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$ diverge, sin embargo $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T y_t$ converge a una caminata aleatoria cuya distribución puede describirse como la integral de la realización de movimientos brownianos con varianza σ^2 .

Un argumento similar al presentando en 34 puede emplearse para describir la distribución asintótica de la suma de cuadrados de una caminata aleatoria. El estadístico $S_T(r)$ definido en 32 puede ser escrito como,

$$S_T(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r < \frac{1}{T} \\ \frac{y_1^2}{T} & \text{para } \frac{1}{T} \leq r < \frac{1}{T^2} \\ \vdots & \\ \frac{y_T^2}{T} & \text{para } r = 1 \end{cases}$$

De ahí se sigue que,

$$\int_0^1 S_T(r) dr = \frac{y_1^2}{T^2} + \frac{y_2^2}{T^2} + \dots + \frac{y_{T-1}^2}{T^2}$$

De lo anterior se concluye fácil que, dado 33 se había concluido que,

$$S_T(\cdot) \xrightarrow{d} \sigma^2 [W(\cdot)]^2$$

luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_T(r) dr &\xrightarrow{d} \int_0^1 \sigma^2 [W(r)]^2 \\ T^{-w_2} \sum_{t=1}^T y_{t-1} &\xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 \end{aligned}$$

En general, de lo anterior se deriva la siguiente proposición.

Proposición.

Suponga que ξ_t sigue una caminata aleatoria sin media ni tendencia,

$$\xi_t = \xi_{t-1} + u_t$$

asumiendo que $\xi_0 = 0$ y $\{u_t\}$ es una sucesión *i.i.d.* con media cero y varianza σ^2 . Luego se tiene,

- a) $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_t \xrightarrow{d} \sigma W(1) \sim \sigma N(0, 1)$
- b) $T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} u_t \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \sigma^2 \left\{ [W(1)]^2 - 1 \right\}$
- c) $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T t u_t \xrightarrow{d} \sigma W(1) - \sigma \int_0^1 W(r) dr$
- d) $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr$
- e) $T^{-2} \sum_{t=1}^T \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr$
- f) $T^{-5/2} \sum_{t=1}^T t \xi_{t-1} \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 r W(r) dr$

- g) $T^{-3} \sum_{t=1}^T t \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 r [W(r)]^2 dr$
 h) $T^{-(v+1)} \sum_{t=1}^T t^v \rightarrow \frac{1}{v+1}$ para $v = 0, 1, \dots$,

Demostración.

Ver Lutkepohl (2005), pp. 700.

6.4. Estimación con Regresores de variación lenta.

En los modelos de series de tiempo es muy común incluir tendencias determinísticas de tipo sinusoidal o polinomial. Particularmente, el análisis empírico de los modelos de crecimiento económico ha hecho uso extensivo de este tipo de argumentos, con el fin de capturar tendencias no observables como el incremento tecnológico. Igualmente, tal como señala Phillips (2007), el análisis asintótico de este tipo de modelo ha sido desarrollado ampliamente por la literatura. Una de las condiciones más importantes es garantizar que el límite del segundo momento de los regresores exista y sea definido positivo³⁵.

A pesar de su uso extensivo por la literatura empírica de crecimiento, no todas las funciones determinísticas cumplen con este supuesto. Un ejemplo importante, quizás la especificación más empleada erróneamente, es la ecuación del tipo

$$y_s = \alpha + \beta L(s) + u_s \tag{37}$$

donde $L(s)$ es una función de variación lenta y suave como $\log t$. Este tipo de ecuaciones ha sido empleada ampliamente por los trabajos que han querido probar convergencia derivados por lo general del modelo neoclásico de crecimiento; Mankiw et al. (1992), Barro y Sala-i-Martin (2004) entre otros.

En esta sección se presentan los principales supuestos y teoremas que se desprenden del análisis asintótico de ecuaciones del tipo 37, presentados por Phillips (2007) y empleados en la construcción del test econométrico de convergencia propuesto por Phillips y Sul (2007). Igualmente los principales problemas que presenta la estimación por mínimos cuadrados ordinarios de la ecuación 37.

6.4.1. Conceptos y definiciones.

A continuación se introducen los principales conceptos y definiciones sobre los cuales se construyen los resultados primordiales de la teoría asintótica con regresores de variación lenta.

Definición: Función variación regular. Sea $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función medible. Se dice que U es una función de variación regular a infinito, si para algún $\rho \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^+$ se cumple que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho$$

donde ρ es el exponente (índice) de la variación.

³⁵Esto se conoce como las condiciones de “Grenander’s por las condiciones establecidas por Grenander and Rosenblatt (1957) pp. 233–234

Definición: Función de variación regular lenta. Sea $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función medible. Se dice que U es una función de variación regular lenta si el índice de U , ρ , es igual a cero. Esto es, U es una función de variación regular lenta si se cumple que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho$$

donde $\rho = 0$. Estas funciones regulares lentas se denotan por $L(x)$.

Definición: Función de variación suave Sea $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función medible. Se dice que U es una función de variación suave con índice ρ y orden m , si es continuamente diferenciable de orden m y su m -derivada $U^{(m)}$ es una función regular variable con índice ρ .

De las definiciones anteriores es posible concluir que una función de variación regular lenta y suave es una función que satisface los supuestos presentados en las definiciones anteriores.

Teorema: Representación de Karamata. (Bingham, Goldie y Teugels, 1987).

Toda función de variación regular lenta, $L(x)$, con exponente ρ puede expresarse como,

$$L(x) = c(x) \exp \left(\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \quad \text{para } x > a$$

para algún $a > 0$ y una función $c(x) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ que cumple con,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \quad c \in (0, \infty)$$

y,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

Lema: promedio de una función de variación regular y suave (Phillips, 2007, pp. 584)

Sea $L(t)$ una función de variación regular lenta que satisface los supuestos anteriores. Luego, para analizar $\sum_{t=B}^n L(t)$ se debe emplear la sumatoria de Euler con el fin de acelerar la convergencia de esta serie, diferenciando entre los componentes convergentes y divergentes, comparando la exactitud entre la sumatoria y la integral. La sumatoria de Euler esta dada por (e.j. Everest y Ward, 2005, pp. 158, Teorema 8.2);

$$\sum_{t=B}^n L(t) = \int_B^n f(s) ds + \int_B^n \{s\} L'(s) ds - L(n) \{n\} + f(n) \{n\}$$

donde,

$$\{n\} = n - [n]$$

De esta forma, Phillips (2007) muestra que para $B \geq 1$ se tiene,

$$\sum_{t=B}^n L(t) = \int_B^n L(t) dt + O(n^\delta) \quad \text{a medida que } n \rightarrow \infty$$

Lema: potencia de una función de variación regular y suave (Phillips, 2007, pp. 585).

Sea $L(t)$ una función de variación regular lenta que satisface el supuesto 6.4.2. Dada la representación de Karamata para $L(t)$ y $|\varepsilon(x)|$ (Ver abajo), Phillips (2007) muestra que la sumatoria de potencias de $L(t)$ puede representarse como,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L(t)^k = L(n) - kL(n)^k \varepsilon(n) + k^2 L(n)^k \varepsilon(n)^2$$

$$\begin{aligned}
& -k^3 \left[L(n)^k \varepsilon(n)^3 + 3L(n)^k \varepsilon(n)^2 \eta(n) + L(n)^k \varepsilon(n) \eta(n)^2 \right] \\
& o \left(L(n)^k \left[\varepsilon(n)^3 + (n)^k \varepsilon(n)^2 \eta(n) + \varepsilon(n) \eta(n)^2 \right] \right)
\end{aligned}$$

Lema: Segundo momento de una función de variación regular y suave (Phillips, 2007, pp. 587).

Sea $L(t)$ una función de variación regular lenta que satisface el supuesto 6.4.2, luego por los dos lemas anteriores se tiene que el segundo momento esta dado por,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^n (L(s) - \bar{L})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s) \right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \int_1^n L(t)^2 dt - \left(\frac{1}{n} \int_1^n L(t) dt \right)^2 \\
&= L(n)^2 \varepsilon(n)^2 \{1 + o(1)\}
\end{aligned}$$

6.4.2. Supuestos.

Sea $L(t)$ una función de variación regular lenta que satisface el supuesto 6.4.2.

Supuesto A3.1: Función de variación lenta y suave

(a) Sea $L(x)$ una función de variación lenta y suave con la siguiente representación de Karamata,

$$L(x) = c \exp \left(\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \quad \text{para } x \geq a$$

para algún $a > 0$ y donde c es una constante con $c > 0$ y donde $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$.

(b) $|\varepsilon(x)|$ es una función de variación lenta y suave donde ε tiene la siguiente representación de Karamanta,

$$\varepsilon(x) = c_\varepsilon \exp \left(\int_a^x \frac{\eta(t)}{t} dt \right) \quad \text{para } x \geq a$$

para una constante c_ε (posiblemente negativa) y donde $\eta \in C^\infty$, y, $|\eta|$ es una función de variación lenta y suave (SSV) y $\eta(x)^2 \rightarrow 0$ a medida que $x \rightarrow 0$

Bajo el supuesto anterior se tiene que,

$$L'(x) = c \exp \left(\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \cdot \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

$$L'(x) = L(x) \cdot \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

$$\frac{L'(x)x}{L(x)} = \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Realizando un proceso similar, y dado que $|\varepsilon(x)|$ es una función de variación lenta y suave donde ε tiene una representación de Karamanta similar, se obtiene,

$$\eta(x) = \frac{x\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}$$

De lo anterior, se puede mostrar que,

$$\left| \frac{L(rn)}{L(n)} - 1 \right| \leq K(n)g(r)$$

Donde $K(n)$ es una función de variación lenta y suave y $g(r) \in C[0, 1]$. Dado que, $K(n)$ es una función de variación lenta, se cumple que,

$$\frac{K(n)}{n^\eta} \rightarrow 0 \text{ para } \eta > 0$$

Se tiene que para algún $\alpha > 0$ y un entero positivo k ,

$$\int_0^{1/n^\alpha} \left(\frac{L(rn)}{L(n)} - 1 \right)^k dr = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \text{ a medida } n \rightarrow \infty$$

con $\delta = \alpha - \eta > 0$.

Supuesto A3.2: Supuesto para los residuales.

Para todo $t > 0$, u_t tiene una representación de Wold,

$$u_t = C(L)e_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j < \infty \text{ con } \sum_{j=0}^{\infty} j|c_j| < \infty \text{ } C(1) \neq 0$$

con $e_t = iid(0, \sigma_e^2)$ y $\mu_{2p} = E|u_t|^{2p} < \infty$ para algún $p > 2$.

Bajo el supuesto anterior, se sigue que para $f \in C^1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n f\left(\frac{s}{n}\right) u_s \rightarrow_d \int_0^1 f(r) dW(r) = N\left(0, \sigma^2 \int_0^1 f(r)^2 dr\right)$$

Bajo los supuestos mencionados anteriormente Phillips (2007) demuestra el siguiente lema,

Lema (Phillips, 2007, pp. 563).

Si $L(t)$ satisface el supuesto A.3.1 y u_t satisface el supuesto A.3.2, además definiendo,

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L(t)$$

se tiene,

- a. $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{L(n)} \sum_{t=1}^n L(t) u_t \rightarrow_d W(1)$ a medida que $n \rightarrow \infty$
- b. $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) u_t \rightarrow_d \int_0^1 (1 + \log r) dW(r)$ a medida que $n \rightarrow \infty$
- b. $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\varepsilon(n)^j} \sum_{t=1}^n \left(\frac{L(t)}{L(n)} - 1 \right)^j u_t \rightarrow_d \int_0^1 \log^j r dW(r)$ a medida que $n \rightarrow \infty$

6.4.3. Resultados y Propiedades Asintóticas.

Partiendo del modelo 37, se asume que u_s satisface los supuestos 6.4.2. Además se asume que existe un valor inicial finito $a \geq s$. El estimador por mínimos cuadrados ordinarios de α y β , está dado por,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{s=1}^n (y_s - \bar{y}_s) \cdot \sum_{s=1}^n (L(s) - \bar{L})}{\sum_{s=1}^n (L(s) - \bar{L})^2} \quad (38)$$

y,

$$\alpha = \bar{y}_s - \hat{\beta} \bar{L} \quad (39)$$

Luego el comportamiento asintótico de estos dos coeficientes depende del comportamiento del primer y segundo momento muestral, donde,

$$\sum_{s=1}^n (L(s) - \bar{L})^2 = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s) \right)^2$$

por el lema 6.4.1 se tiene que,

$$\sum_{t=1}^n L(t)^k = \int_1^n L(t)^k dt + O(n^\delta)$$

para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño. Luego, por el lema 6.4.1 el primer momento está dado por,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L(t) &= L(n) - L(n) \varepsilon(n) + L(n) \varepsilon(n)^2 \\ &- \left[L(n) \varepsilon(n)^3 + 3L(n) \varepsilon(n)^2 \eta(n) + L(n) \varepsilon(n) \eta(n)^2 \right] \\ &+ O\left(L(n) \left[\varepsilon(n)^3 + (n) \varepsilon(n)^2 \eta(n) + \varepsilon(n) \eta(n)^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (40)$$

mientras que el segundo momento está dado por,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n (L(s) - \bar{L})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L(s) \right)^2 \\ &= L(n)^2 \varepsilon(n)^2 \{1 + o(1)\} \end{aligned} \quad (41)$$

Luego, empleando la definición en 38 y el primer y segundo momento muestral de $L(t)$ (ecuaciones 40 y 41) se tiene,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})}{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2} \cdot \left[\beta \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) + u_t \right] \\ \hat{\beta} &= \left[\beta + \left[\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2 \right]^{-1} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) u_t \right] \\ \hat{\beta} - \beta &= \left[\left[\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2 \right]^{-1} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) u_t \right] \\ \sqrt{n} L(n) \varepsilon(n) (\hat{\beta} - \beta) &= \left[\left[\frac{1}{n L(n)^2 \varepsilon(n)^2} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2 \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{n} L(n) \varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) u_t \right] \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\varepsilon(n)(\hat{\alpha} - \alpha) &= \varepsilon(n) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n u_t - \sqrt{n}L(n)\varepsilon(n) \left(\hat{\beta} - \beta \right) [1 + (\varepsilon(n))] \\ &= -\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n) \left(\hat{\beta} - \beta \right) + o_p(1)\end{aligned}$$

Teorema (Phillips, 2007, pp. 565)

Si $L(t)$ satisface el supuesto 6.4.2 y u_t satisface el supuesto 6.4.2, luego,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{n}\varepsilon(n)(\hat{\alpha} - \alpha) \\ \sqrt{n}L(n)\varepsilon(n) \left(\hat{\beta} - \beta \right) \end{bmatrix} \rightarrow_d N \left(0, \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

En el caso particular en el que $L(s) = \log s$, se tiene que $\varepsilon(n) = \frac{1}{\log n}$ luego,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{n} \frac{1}{\log n} (\hat{\alpha} - \alpha) \\ \sqrt{n} \left(\hat{\beta} - \beta \right) \end{bmatrix} \rightarrow_d N \left(0, \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

6.4.4. Transformación del modelo $\log t$

Una forma de solucionar el problema de la singularidad límite de la matriz de momentos de los regresores es por medio de la transformación del modelo original. Phillips (2007) propone modificar el modelo 37 de tal forma que asintóticamente la matriz de varianza-covarianza del regresor β sea una matriz rango completo. Sumando y restando $\log n$ al modelo original 37 se tiene,

$$y_s = \alpha + \beta L(s) + u_s$$

con $L(s) = \log s$,

$$y_s = \alpha + \beta \log s - \log n + \log n + u_s$$

$$y_s = \alpha + \beta \log \left(\frac{s}{n} \right) + \log n + u_s$$

$$y_s = \alpha_n + \beta \log \left(\frac{s}{n} \right) + u_s$$

en este caso los regresores $[1, \log(s/n)]$ no son colineales. Lo anterior se puede evidenciar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \begin{bmatrix} (\hat{\alpha}_n - \alpha_n) \\ \left(\hat{\beta} - \beta \right) \end{bmatrix} &\rightarrow_d N \left(0, \sigma^2 \left(\int_0^1 ([1, \log r]) ([1, \log r])' \right)^{-1} \right) \\ &= N \left(0, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \right)\end{aligned}$$

De esta manera es posible solucionar el problema de singularidad en la matriz límite de varianza-covarianza. Este es un resultado muy importante empleado por Phillips y Sul (2007) para su prueba de convergencia $\log t$.

7. Test de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)

7.1. Representación de los Factores y Convergencia

Una estructura de panel de datos X_{it} puede ser útil descomponerla de la siguiente forma,

$$X_{it} = g_{it} + a_{it} \quad (42)$$

donde g_{it} representa el componente sistemático, incluyendo componenetes comunes que implican algún tipo de varianza cross-sectional, y un componente transitorio representado por a_{it} . Una forma útil de separar los elementos comunes de X_{it} de los idiosincráticos es mediante la siguiente transformación;

$$X_{it} = \left(\frac{g_{it} + a_{it}}{\mu_t} \right) \mu_t = \delta_{it} \mu_t \quad \forall i, t \quad (43)$$

donde μ_t es un componente común, mientras que δ_{it} representa un componente idiosincrático cambiante en el tiempo. En la literatura de modelos de factores dinámicos y componentes principales, δ_{it} se conoce como la distancia entre el(los) factor común(es) y cada una de las variables de X_{it} . Sin embargo, se debe tener presente que en este caso δ_{it} es cambiante en el tiempo, t .

7.1.1. Equilibrio de largo plazo y convergencia.

Si dos variables macroeconómicas X_{it} y X_{jt} tienen una tendencia estocástica y se cree que en el largo plazo tienden a un equilibrio las dos, comúnmente se acostumbra a probar la hipótesis de cointegración para estas dos variables empíricamente.

La diferencia panel de estas dos series está dada por,

$$X_{it} - X_{jt} = \delta_{it} \mu_t - \delta_{jt} \mu_t = (\delta_{it} - \delta_{jt}) \mu_t$$

Si μ_t es no estacionaria y $\delta_{it} \neq \delta_{jt}$, luego X_{it} generalmente no esta cointegrada con X_{jt} . Pero si δ_{it} y δ_{jt} convergen a un δ común a medida que $t \rightarrow \infty$, podría argumentarse que estas dos series están asintóticamente cointegradas. Sin embargo, en estos casos se debe tener presente que si la velocidad de divergencia de μ_t es mayor que la velocidad de convergencia de δ_{it} , el residuo, $(\delta_{it} - \delta_{jt}) \mu_t$, puede presentar características de una serie no estacionaria, en cuyo caso las pruebas convencionales de cointegración rechazarían dicha hipótesis.

Suponga,

$$\delta_{it} \rightarrow \begin{cases} \delta^a & i \in G_a \\ \delta^b & i \in G_b \end{cases} \quad (44)$$

bajo el modelo 22 se cumple la siguiente relación para los coeficientes de transición de X_{it} y X_{jt} para $i \in G_a$ y $j \in G_b$,

$$X_{it} - \frac{\delta_a}{\delta_b} X_{jt} = \left(\delta_{it} - \frac{\delta_a}{\delta_b} \delta_{jt} \right) \mu_t = \left\{ \sigma_i \xi_{it} - \frac{\delta_a}{\delta_b} \sigma_j \xi_{jt} \right\} \frac{\mu_t}{L(t)t^\alpha}$$

Luego, $X_{it} - \frac{\delta_a}{\delta_b} X_{jt}$ es $I(0)$ cuando $\mu_t = O_p(L(t)t^\alpha)$. Sin embargo, si $L(t)^{-1}t^{-\alpha}\mu_t$ diverge, las series X_{it} y X_{jt} no estan cointegradas aun cuando pueden converger a los subgrupos G_a y G_b cuando $\alpha > 0$.

Una forma de redefinir el concepto de convergencia en el largo plazo entre estas dos series, se puede hacer en términos del ratio y no como una combinación lineal, en este caso las dos series convergen en el largo plazo si,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{it+k}}{X_{jt+k}} = 1 \quad \forall i, j$$

que es equivalente a,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{it} = \delta$$

7.1.2. Transición Relativa de las Variables.

Dado que μ_t es un factor común de 43, puede removerse rescalando la expresión en términos relativos de los factores de carga o de los coeficientes de transición,

$$h_{it} = \frac{X_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{it}} = \frac{\delta_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{it}}$$

Algunas propiedades de h_{it} son:

1. La media trasversal es igual a 1.
2. $\delta_{it} \rightarrow \delta \Rightarrow h_{it} \rightarrow 1$; en este caso la varianza transversal converge a cero, de tal forma que,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_{it} - 1)^2 \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

7.2. Relaciones de transición asintóticas.

Phillips y Sul (2007) asumen el siguiente factor para estandarizar X_{it} ,

$$d_{iT} = T^{\gamma_i} W_i(T)$$

para algún $\gamma_i > 0$ y una función lenta y suave, $W_i(T)$, de tal forma que X_{it} crezca para valores grandes de t de acuerdo a una potencia t^{γ_i} , y el efecto de $W_i(t)$ y fluctuaciones estocásticas.

Adicionalmente, Phillips y Sul (2007) asumen que μ_t crece de acuerdo al factor $t^\gamma Z(t)$ para algún $\gamma > 0$ donde Z es una función lenta y suave. Luego

$$\frac{1}{d_{it}} X_{it} = \frac{1}{T^{\gamma_i} W_i(T)} \left(\frac{g_{it} + a_{it}}{\mu_t} \right) \mu_t = \delta_{iT} \left(\frac{t}{T} \right) \mu_T \left(\frac{t}{T} \right) + o(1) \quad (45)$$

donde,

$$\mu_T \left(\frac{t}{T} \right) = \left(\frac{t}{T} \right)^\gamma \frac{Z \left(\frac{t}{T} T \right)}{Z(T)}; \quad \delta_{iT} \left(\frac{t}{T} \right) = \left(\frac{t}{T} \right)^{\gamma_i - \gamma} \frac{W_i \left(\frac{t}{T} T \right) Z(T)}{W_i(T) Z \left(\frac{t}{T} T \right)} \quad (46)$$

Si $t = [Tr]$, corresponde a la parte entera de Tr , de tal forma que r es la fracción de muestra correspondiente a la observación t . Luego para los valores de t , 45 puede expresarse como,

$$\frac{1}{d_{it}} X_{it} \sim \delta_{iT} \left(\frac{[Tr]}{T} \right) \mu_T \left(\frac{[Tr]}{T} \right) \sim \delta_{iT}(r) \mu_T(r) \quad (47)$$

Phillips y Sul (2007) asumen igualmente que estas funciones convergen a funciones límites finitas a medida que $T \rightarrow \infty$, luego,

$$\mu_T(r) \rightarrow_p \mu(r), \quad \delta_{iT}(r) \rightarrow_p \delta_i(r) \text{ uniformemente para } r \in [0, 1] \quad (48)$$

las funciones límites $\mu(r)$ y $\delta_i(r)$ representan la senda de estado estacionario común y la senda de transición límite para la economía i , respectivamente.

Combinando 47 y 48,

$$\frac{1}{d_{it}} X_{it} \rightarrow_p X_i(r) = \delta_i(r) \mu(r)$$

Tomando el ratio del promedio transversal de 45,

$$h_{iT} \left(\frac{t}{T} \right) = \frac{d_{iT}^{-1} X_{it}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{jT}^{-1} X_{jt}} = \frac{\delta_{iT} \left(\frac{t}{T} \right)}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{jT} \left(\frac{t}{T} \right)} \quad (49)$$

Luego,

$$h_{iT} \left(\frac{[Tr]}{T} \right) \rightarrow_p h_i(r) = \frac{\delta_i(r)}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_j(r)}$$

Veamos lo anterior en detalle:

Analicemos primero el caso en que los componentes son no estocásticos. Suponga que $g_{it} = f_i(t)$ es una función regular cambiante en el tiempo con una tasa del exponente de una potencia igual a γ_i . Esto es,

$$g_{it} = f_i(t) = t^{\gamma_i} W_i(t) \quad (50)$$

donde $W_i(t)$ es una función lenta a infinito, esto es,

$$\frac{W_i(\lambda t)}{W_i(t)} \rightarrow 1 \text{ a medida } t \rightarrow \infty, \forall \lambda > 0$$

Algunos ejemplos de funciones que cumplen con este supuesto son: $W_i(t) = \log t$, $\log^2 t$. Igualmente, sea μ_t una función regular cambiante en el tiempo con exponente $\gamma > 0$, tal que,

$$\mu_t = t^\gamma Z(t) \quad (51)$$

para alguna función que cambia suave en el tiempo $Z(t)$. Sea $t = [Tr]$ para algún $r > 0$, una fracción sobre toda la muestra T , correspondiente a la observación t . Luego, bajo 50,

$$\frac{1}{T^{\gamma_i}} g_{it} = \frac{1}{T^{\gamma_i}} [Tr]^{\gamma_i} \frac{W_i([Tr])}{W_i(T)} W_i(T) \sim r^{\gamma_i} W_i(T) \quad (52)$$

dado que $W_i(t)$ es una función lenta (suave) a infinito se tiene,

$$\frac{W_i(Tr)}{W_i(T)} \rightarrow 1$$

y,

$$\frac{1}{T^{\gamma_i}} [Tr]^{\gamma_i} \rightarrow r^{\gamma_i}$$

Además, empleando un argumento similar al de 52 se concluye que,

$$T^{-\gamma} \mu_t = \frac{1}{T^\gamma} [Tr]^\gamma \frac{Z(Tr)}{Z(T)} Z(T) \sim r^\gamma Z(T)$$

De este comportamiento asintótico, y de 43, se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{T^{\gamma_i}} X_{it} = \frac{g_{it} + a_{it}}{T^{\gamma_i}} = \frac{a_{it}}{T^{\gamma_i}} + \frac{g_{it}}{T^{\gamma_i}} \sim r^{\gamma_i} W_i(T) \quad (53)$$

dado que a_{it} es un componente transitorio, además,

$$\frac{1}{T^{\gamma_i}} \mu_t \sim r^\gamma Z(T) \equiv \mu(r) Z(T) \quad (54)$$

reescribiendo la ecuación 43, se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^{\gamma_i}} \left(\frac{g_{it} + a_{it}}{\mu_t} \right) \mu_t &= \frac{a_{it}}{T^{\gamma_i}} + \frac{g_{it}}{T^{\gamma_i}} \frac{T^\gamma}{\mu_t} \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma} \right) \\
&= o(1) + \frac{g_{it}}{T^{\gamma_i}} \frac{T^\gamma}{\mu_t} \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma} \right) \\
&\sim r^{\gamma_i} W_i(T) \frac{1}{r^\gamma Z(T)} r^\gamma Z(T) \\
&= \{r^{\gamma_i - \gamma} J_i(T)\} \{r^\gamma Z(T)\} \\
&= \delta_{iT}^J(r) \mu_T^Z(r)
\end{aligned}$$

siendo $J_i(T) = W_i(T) \frac{1}{Z(T)}$ una función lenta a infinito. Luego, $\delta_{iT}^J(r)$ y $\mu_T^Z(r)$ varían de forma regular y tienen un comportamiento asintótico similar a funciones con exponentes $r^{\gamma_i - \gamma}$ y r^γ . Sea $d_{iT} = T^{\gamma_i} J_i(T) Z(T) = T^{\gamma_i} W_i(T)$, de tal forma que los componentes cambiantes de forma lenta en t son factorizados en la estandarización,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_{iT}} X_{iT} &= \frac{1}{T^{\gamma_i} J_{iT} Z(T)} \left(\frac{g_{it} + a_{it}}{\mu_t} \right) \mu_t \\
&= \frac{a_{it}}{T^{\gamma_i} W_i(T)} + \frac{g_{it}}{T^{\gamma_i} W_i(T)} \frac{T^\gamma Z(T)}{\mu_t} \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma Z(T)} \right) \\
&= o(1) + \frac{g_{it}}{T^{\gamma_i} W_i(T)} \left(\frac{T^\gamma Z(T)}{\mu_t} \right) \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma Z(T)} \right)
\end{aligned} \tag{55}$$

Definamos las siguientes funciones,

$$\mu_T \left(\frac{t}{T} \right) = \frac{\mu_t}{T^\gamma Z(T)} = \frac{\mu_t}{t^\gamma Z(T)} \frac{t^\gamma Z(t)}{T^\gamma Z(T)} = 1 \cdot \left(\frac{t}{T} \right)^\gamma \frac{Z(\frac{t}{T} T)}{Z(t)} \tag{56}$$

dado que por definición sabíamos que $\mu_t = t^\gamma Z(t)$, adicionalmente sea,

$$\delta_{iT} \left(\frac{t}{T} \right) = \left(\frac{t}{T} \right)^{\gamma_i - \gamma} \frac{W_i(\frac{t}{T} T) Z(T)}{W_i(T) Z(\frac{t}{T} T)} \tag{57}$$

continuando con la ecuación 55 se tiene,

$$= o(1) + \frac{t^{\gamma_i} W_i(t)}{T^{\gamma_i} W_i(T)} \left(\frac{T^\gamma Z(T)}{\mu_t} \right) \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma Z(T)} \right)$$

dado que en 50 definimos $g_{it} = f_i(t) = t^{\gamma_i} W_i(t)$, luego,

$$= o(1) + \frac{t^{\gamma_i} W_i(t)}{T^{\gamma_i} W_i(T)} \left(\frac{T^\gamma Z(T)}{\mu_t} \right) \left(\frac{\mu_t}{T^\gamma Z(T)} \right) \tag{58}$$

reemplazando 56 en 58 se obtiene,

$$= o(1) + \left(\frac{t}{T} \right)^{\gamma_i - \gamma} \frac{W_i(t)}{W_i(T)} \left(\frac{Z(t)}{Z(\frac{t}{T} T)} \right) \mu_T \left(\frac{t}{T} \right)$$

empleando 57,

$$= o(1) + \delta_{iT} \left(\frac{t}{T} \right) \mu_T \left(\frac{t}{T} \right)$$

luego,

$$\sim \delta_{iT}(r) \mu_T(r)$$

Adicionalmente, dadas las propiedades de $W_i(T)$ y $Z(T)$, para $t = [Tr]$, tenemos

$$\delta_{iT}(r) \rightarrow \delta_i(r) = r^{\gamma_i - \gamma} \quad (59)$$

y,

$$\mu_T(r) \rightarrow \mu(r) = r^\gamma \quad (60)$$

Para la versión estocástica se requiere,

$$\delta_{iT}(r) \rightarrow_p \delta_i(r) = r^{\gamma_i - \gamma}$$

$$\mu_T(r) \rightarrow_p \mu(r) = r^\gamma$$

uniformemente para $r \in [0, 1]$, de tal forma que las funciones límites de las funciones de transición $\delta_i(r)$ y de crecimiento $\mu(r)$ tengan un comportamiento determinístico.

De forma aún más general es posible asumir que las funciones límites de las funciones de transición $\delta_i(r)$ y de crecimiento $\mu(r)$ tienen un comportamiento estocástico

7.3. Test de Convergencia

En la sección anterior se mencionó que, bajo el supuesto de convergencia, la varianza cross sectional de $\hat{h}_i(r)$ converge a cero a medida que $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, se debe tener presente que una disminución de esta varianza no implica convergencia general, ya que pueden existir subgrupos con convergencia local, y grupos con divergencia, que causen esta disminución en la varianza. Más adelante se expone un algoritmo presentado por Phillips y Sul (2007) para detectar estos posibles, o no, grupos de convergencia local.

Se presentan entonces algunos supuestos, mencionados por Phillips y Sul (2007), bajo los cuales se construye la prueba de convergencia. Inicialmente se presentan para el caso de convergencia global, aunque su generalización para el caso local es directa.

7.3.1. Supuestos del la prueba $\log t$

Supuesto 1

Se asume que $\xi_{it} \sim iid(0, 1)$ con al menos el cuarto momento finito, $\mu_{4\epsilon}$, sobre i para cada t , estacionario con dependencia débil con respecto a t y sucesión de autocovarianzas igual $\gamma_i(h) = E(\xi_{it}, \xi_{it+h})$, donde se satisface que $\sum_{h=1}^{\infty} h |\gamma_i(h)| < \infty$. Adicionalmente, se asume que las sumas parciales de ξ_{it} y $\xi_{it}^2 - 1$ sobre t satisfacen las leyes de las funciones límites de Panel de Datos,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \xi_{it} \rightarrow B_{i1}(r) \quad \text{as } T \rightarrow \infty \quad \forall i$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} (\xi_{it}^2 - 1) \rightarrow B_{i2}(r)$$

donde B_{i1} y B_{i2} son dos sucesiones de movimientos Brownianos independientes con varianzas ω_{i1} y ω_{i2} , sobre i .

Supuesto 2

Se asume que los siguientes limites existen,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 &= \nu_\psi^2, & \lim_N N^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i^4 &= \nu_{4\psi} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \omega_{ii} &= \omega_\xi^2, & \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i^4 \omega_{2ii} &= \omega_\eta^2 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^N \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_i(h) \gamma_j(h), & & \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \delta_i &= \delta \end{aligned}$$

adicionalmente se supone que $\delta \neq 0$

Supuesto 3

Adicionalmente se asume que,

$$\begin{aligned} 3.a \quad N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \sigma_i \xi_{it} &\rightarrow N(0, \nu_\psi^2) \quad \text{a medida que } N \rightarrow \infty, \quad \forall t \\ 3.b \quad N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) &\rightarrow N(0, \nu_{4\psi} (\mu_{4\xi} - 1)) \quad \text{a medida que } N \rightarrow \infty, \quad \forall t \\ 3.c \quad T^{-1/2} N^{-1/2} \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^N \sigma_i \xi_{it} &\rightarrow N(0, \omega_\xi^2) \quad \text{a medida que } T, N \rightarrow \infty \\ 3.d \quad T^{-1/2} N^{-1/2} \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) &\rightarrow N(0, \omega_\eta^2) \quad \text{a medida que } T, N \rightarrow \infty \\ 3.e \quad T^{-1/2} \sum_{i=1}^T N^{-1/2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i \sigma_j \xi_{it} \xi_{jt} &\rightarrow N\left(0, \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-2} \sum_{i=2}^N \sum_{i=2}^N \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_i(h) \gamma_j(h)\right) \end{aligned}$$

7.3.2. Prueba log t

Dado los supuestos anteriores, se presenta la prueba log t, propuesta por Phillips y Sul (2007). La hipótesis nula que se quiere construir asume que hay convergencia, esto es, $\delta_i \rightarrow \delta$. Formalmente se puede escribir de la siguiente manera,

$$H_0 : \delta_i = \delta \quad \wedge \quad \alpha \geq 0 \tag{61}$$

$$H_A : \delta_i \neq \delta_j \quad \forall i \quad \vee \quad \alpha < 0$$

el parámetro α como ya se mencionó es muy importante ya que....

Dado el modelo presentado en 21,

$$X_{it} = \delta_{it} \mu_t$$

y la semiparametrización de δ_{it} propuesta por Phillips y Sul (2007),

$$\delta_{it} = \delta_i + \sigma_{it}\xi_{it}$$

donde,

$$\sigma_{it} = \frac{\sigma_i}{L(t)t^\alpha}$$

Además, definiendo $\psi_{it} \equiv \sigma_i\xi_{it}$ por el supuesto 3.a se tiene lo siguiente,

$$\psi_{Nt} \equiv \sqrt{N}\psi_t = \sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sigma_i\xi_{it} \Rightarrow N(0, \nu_\psi^2)$$

Lo anterior implica que,

$$\nu_\psi^2 = p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{it}^2 = p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \xi_{it}^2 \quad (62)$$

Por el supuesto 1, se tiene,

$$= p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

Luego, es posible concluir, como lo mencionan Phillips y Sul (2007), que $\psi_t = O_p(N^{-1/2})$. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \psi_t^2 &= \frac{1}{N^2} \psi_{Nt}^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N \psi_{it} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N (\sigma_i \xi_{it})^2 + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt} \right) \end{aligned}$$

sumando y restando $\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^2$, se tiene,

$$= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) + \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt} \right) \quad (63)$$

tomando p lím,

$$= O_p(N^{-1})$$

Por otro lado, en la ecuación 49 se había definido h_{it} , luego,

$$\begin{aligned} h_{it} - 1 &= \frac{\delta_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it}} - 1 \\ &= \frac{\delta_{it} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it}} \end{aligned} \quad (64)$$

Dado que $\delta_{it} = \delta_i + \frac{\sigma_i \xi_{it}}{L(t)t^\alpha}$, la ecuación 64, puede escribirse como,

$$h_{it} - 1 = \left(\delta_i + \frac{\sigma_i \xi_{it}}{L(t)t^\alpha} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it} \right)^{-1} \quad (65)$$

donde,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{it} = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N \psi_{it}}{N} \cdot \frac{1}{L(t)t^\alpha} = \bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha} \quad (66)$$

donde $\bar{\delta} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i}{N}$. Reemplazando 66 en 65, se tiene,

$$h_{it} - 1 = \frac{\delta_i + \frac{\psi_{it}}{L(t)t^\alpha} - \bar{\delta} - \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}}{\bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}} \quad (67)$$

Ahora, anteriormente se mencionó (61) la hipótesis nula en donde se asume que $\delta_i = \delta$, luego la ecuación 67 puede expresarse de la siguiente forma bajo la premisa de la hipótesis nula,

$$h_{it} - 1 = \frac{\frac{\psi_{it}}{L(t)t^\alpha} - \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}}{\bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}}$$

$$h_{it} - 1 = \frac{1}{L(t)t^\alpha} \frac{\psi_{it} - \psi_t}{\bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}}$$

Además se tiene,

$$(h_{it} - 1)^2 = \frac{1}{(L(t)t^\alpha)^2} \frac{(\psi_{it} - \psi_t)^2}{\left(\bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}\right)^2}$$

donde,

$$\left(\bar{\delta} + \frac{\psi_t}{L(t)t^\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\bar{\delta}L(t)t^\alpha + \psi_t}{L(t)t^\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{\bar{\delta}^2 L(t)^2 t^{2\alpha} + 2\bar{\delta}L(t)t^\alpha \psi_t + \psi_t^2}{L(t)^2 t^{2\alpha}}$$

Siguiendo a Phillips y Sul (2007), sea $H_t \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_{it} - 1)^2$, luego,

$$H_t = \frac{(\psi_{it} - \psi_t)^2}{\bar{\delta}^2 L(t)^2 t^{2\alpha} + 2\bar{\delta}L(t)t^\alpha \psi_t + \psi_t^2} \quad (68)$$

Sea,

$$\sigma_{\psi_t}^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi_{it} - \psi_t)^2$$

luego,

$$\sigma_{\psi_t}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi_{it}^2 - 2\psi_{it}\psi_t + \psi_t^2)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{it}^2 - 2\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{it}\psi_t + \psi_t^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{it}^2 - 2\psi_t^2 + \psi_t^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{it}^2 - \psi_t^2$$

Empleando la ecuación 63,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \xi_{it}^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + -2 \frac{1}{N^2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt} \\
&= \frac{N}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \xi_{it}^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \xi_{it}^2 + -2 \frac{1}{N^2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt} \\
&= \frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \xi_{it}^2 - 2 \frac{1}{N^2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt} \\
&= \frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) + \frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 - 2 \frac{1}{N^2} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{it} \psi_{jt}
\end{aligned}$$

Dado que,

$$\frac{N-1}{N^2} = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

luego,

$$\frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 - \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2\right)$$

tomando $\lim_{N \rightarrow \infty}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2\right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = \nu_\psi^2
\end{aligned} \tag{69}$$

Desarrollando una estrategia similar y, por el supuesto 3.b, se concluye que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\xi_{it}^2 - 1) = N(0, \nu_{4\psi}(\mu_{4\xi} - 1))$$

Siguiendo a Phillips y Sul (2007) para derivar la ecuación de la hipótesis se parte de la ecuación 68,

$$\begin{aligned}
H_t &= \frac{\sigma_{\psi t}^2}{\bar{\delta}^2 L(t)^2 t^{2\alpha} + 2\bar{\delta} L(t) t^\alpha \psi_t + \psi_t^2} \\
H_t &= \frac{\sigma_{\psi t}^2}{\bar{\delta}^2 L(t)^2 t^{2\alpha} \left(1 + \frac{2\psi_t}{\bar{\delta} L(t) t^\alpha} + \frac{\psi_t^2}{\bar{\delta}^2 L(t)^2 t^{2\alpha}}\right)}
\end{aligned}$$

y, tomando la expresión anterior para $t = 1$, se obtiene,

$$H_1 = \frac{\sigma_{\psi 1}^2}{\psi_1^2 + 2\bar{\delta} L(1) \psi_1 + \bar{\delta}^2 L(1)^2}$$

Adicionalmente sea $\log H_1 \equiv h_1$, luego

$$\log \left(\frac{H_1}{H_t}\right) = h_1 - H_t$$

Phillips y Sul (2007) proponen los siguientes tres pasos para la construcción de la prueba $\log t$.

Paso 1: Ratio de la varianza cross-seccional H_1/H_t

Se construye la varianza cross-seccional de la siguiente forma,

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_{it} - 1)^2, \quad h_{it} = \frac{X_{it}}{\sum_{i=1}^N X_{it}}$$

Paso 2: Estimación de t

Se estima la ecuación 70 y se calcula el estadístico t convencional robusto para el coeficiente \hat{b} , usando el estimado de la varianza de largo plazo de los residuales de la regresión,

$$\log \left(\frac{H_1}{H_t} \right) - 2 \log L(t) = \hat{\alpha} + \hat{b} \log t + \hat{u}_t \quad (70)$$

para,

$$t = [rT], [rT] + 1, \dots, T \quad r > 0$$

donde,

$$L(t) = \log(t + 1)$$

Phillips y Sul (2007) muestran que el coeficiente estimado de $\log t$ \hat{b} , es $\hat{b} = 2\hat{\alpha}$, donde $\hat{\alpha}$ es la estimación de α en H_0 .

Paso 3: t robusto

Se aplica un “ t test” de autocorrelación y heterocedasticidad de un lado robusto, de la hipótesis de desigualdad $\alpha \geq 0$ usando \hat{b} y el error estándar HAC .

Bajo la hipótesis de convergencia se tiene:

$$h_{it} \rightarrow 1 \text{ y } H_t \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

En Phillips y Sul (2007) se muestra que bajo la hipótesis nula, y bajo los supuestos mencionados anteriormente,

$$\sqrt{NT} (\hat{b} - b) \rightarrow N(0, \Omega^2)$$

donde,

$$\Omega^2 = \frac{\omega_\eta^2}{\nu_\psi^4} \left\{ (1-r) - \left(\frac{r}{1-r} \right) \log^2 r \right\}^{-1}$$

con, $\omega_\eta^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^4 \omega_{2ii}$ y $\nu_\psi^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$. Adicionalmente, Phillips y Sul (2007) muestran que el estadístico de b ,

$$t_{\hat{b}} = \frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}} \rightarrow N(0, 1)$$

Por otro lado, Phillips y Sul (2007) muestran que bajo la hipótesis alternativa también se encuentran distribuciones convencionales para los estadísticos, garantizando la consistencia de la prueba.

7.3.3. Convergencia por "clusters".

Existen otras posibilidades a medida que nos alejamos del supuesto de convergencia estricta de la hipótesis nula de convergencia. Esto es, puede existir convergencia en distintos clusters alrededor de puntos separados de equilibrio y estado estacionario.

Para comenzar con el procedimiento, asumimos que existe un subgrupo básico G_k , en el cual las variables pertenecientes a él convergen. Segundo, se adiciona una variable a G_k , y se prueba si la variable adicional pertenece al grupo G_k , es decir, si la variable converge al mismo grupo básico. Para esto, realizamos el test $\log t$. Si esta variable adicional, $k + 1$, pertenece a G_k entonces el valor b estimado en la regresión $\log t$ no será significativamente negativo, y por tanto la hipótesis nula será aceptada. En caso contrario, la estimación puntual de b depende del tamaño de K .

En resumen, Phillips y Sul (2007) proponen los siguientes pasos:

1. Se organizan las observaciones teniendo en cuenta la información al final de la muestra. Si las series presentan una alta volatilidad se toma la media de la parte final de la muestra y, posteriormente, se organizan de mayor a menor.

2. Para seleccionar el primer grupo básico (*core group*) se toman las primeras k series para formar el subgrupo G_k para $2 \leq k \leq N$ y se estima el test $\log t$ para este subgrupo. El grupo básico de tamaño k se selecciona de acuerdo al siguiente criterio;

$$k^* = \arg \max_k \{t_k\}$$

s.a.

$$\min \{t_k\} > -1.65$$

3. Sea $G_{k^*}^c$ el complemento del grupo básico G_{k^*} y sea $\{x_i\}_{i=1}^T \in G_{k^*}^c$. Se adiciona $\{x_i\}_{i=1}^T$ a G_{k^*} y se realiza de nuevo la regresión $\log t$. Denotemos como t^* el estadístico t de esta regresión. Si $t^* > c$, se incluye $\{x_i\}_{i=1}^T$ a G_{k^*} . Donde c es una constante derivada del ejercicio montecarlo de la estimación.

Este procedimiento se repite para las series restantes pertenecientes a $G_{k^*}^c$ y, dado lo anterior, se forma el primer grupo de convergencia.

Parte IV
Resultados y Conclusiones

8. Resultados

A continuación se presentan los principales resultados empíricos encontrados en esta investigación. Tal como se mencionó, el análisis de convergencia de los determinantes del crecimiento se realiza para las seis principales variables mencionadas en la literatura, presentada en la sección 4. Para cada una de estas variables, se analiza la homogeneidad en su dinámica de convergencia para los grupos de países encontrados por Phillips y Sul (2009) (en adelante PS). En caso de que la tecnología fuera el único factor diferenciador (generador de los “clusters” de crecimiento), el modelo presentado en la sección 2, muestra que los demás determinantes deben converger al interior de cada uno de estos grupos de convergencia. En caso contrario, se observarían patrones heterógeneos.

Posteriormente, se evalúa la dinámica de convergencia de cada una de estas variables. Es decir, se estiman los grupos de convergencia derivados de su proceso generador de datos, empleando el procedimiento propuesto por Phillips y Sul (2007) para cada una de estas variables, con el fin de evaluar diferencias con respecto a los grupos de convergencia encontrados por estos autores y de esta forma validar el modelo presentado en la sección 2. Igualmente, se realiza un análisis de homogeneidad para cada uno de los “clusters” adyacentes encontrados.

A pesar de no ser un análisis causal, los resultados presentados a continuación evalúan, en términos relativos, la importancia de la tecnología y/u otro factor, calidad de la educación, en la determinación de los grupos de crecimiento. Al mismo tiempo provee evidencia sobre la homogeneidad de los determinantes de crecimiento comúnmente empleados en el análisis empírico. Esta heterogeneidad u homogeneidad de los determinantes, complementa la literatura, dado que el análisis de heterogeneidad se ha enfocado sólo en la variable dependiente (PIB per-cápita o crecimiento del PIB per-cápita), dejando de lado las variables explicativas bajo el supuesto de exogeneidad, a pesar de la gran cantidad de críticas que ha tenido este supuesto.

Los datos empleados provienen de diferentes fuentes: el PIB per-cápita, la inversión sobre PIB, apertura, volatilidad de la inflación son tomados de PENN World tables versión 7.0. La información de capital humano es tomada de Barro y Lee (2007). Igualmente, se emplea información de World Development Indicators (2006) del Banco Mundial.

8.1. Inversión sobre PIB.

La tabla 3 presenta las pruebas de convergencia realizadas para los “cluster” de crecimiento encontrados por PS. En la tabla se aprecia que se encuentra convergencia en la variable de inversión sobre PIB para los dos primeros grupos (los más avanzados) sin embargo, para los menos avanzados esta convergencia se rechaza, lo que demuestra una gran heterogeneidad entre los menos desarrollados.

Dada la heterogeneidad encontrada para los menos avanzados en la tasa de inversión, se realiza el procedimiento de búsqueda de “clusters” y convergencia propuesto por Phillips y Sul (2007) para esta variable. La tabla 4 presenta los grupos de convergencia encontrados para la tasa de inversión y la tabla 21 presenta el análisis para los grupos adyacentes encontrados.

En la tabla 21 se evidencia que para los grupos 1 y 2, 2 y 3 y 4 y 5 se acepta la hipótesis nula de convergencia, luego pueden considerarse en un mismo grupo. Particularmente, se observa que básicamente existen dos grupos de convergencia, los cuales recogen alrededor del 90 % de los países evidenciando cierto grado de homogeneidad en la tasa de inversión. De hecho, en la tabla 5 se comparan los clusters encontrados junto con los de PS, en donde se confirma dicho resultado. Los países pertenecientes a los grupos 1, 2, 3 y 4 de PS, están distribuidos casi en su totalidad en los clusters 1 y 2 y 2 y 3. Caso contrario sucede para los países menos avanzados para los cuales se observa más heterogeneidad.

Cuadro 3: Convergencia para los "Clusters" de Phillips y Sul (2007)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Antigua, Australia, Austria, Belgium, Bermuda, Brunei, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, China, Cape Verde, Cyprus, Dominica, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Germany, Equatorial Guinea, Hong Kong, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, St. Kitts & Nevis, South Korea, Luxembourg, Macao, Maldives, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Oman, Puerto Rico, Portugal, Singapore, Sweden, Thailand, Taiwan, USA, St. Vincent & Grenadines.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-2.816	-19.141	
logt	0.459	9.817	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Argentina, Bahrain, Bahamas, Belize, Brazil, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Grenada, Hungary, Indonesia, India, St. Lucia, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Tunisia, Turkey, Uruguay, South Africa
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.403	-6.117	
logt	-0.093	-1.276	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Bhutan, Cuba, Algeria, Ecuador, Fiji, Fed. Sts. of Micronesia, Guatemala, Iran, Jamaica, Lesotho, Morocco, Namibia, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, Romania, El Salvador, Suriname, Venezuela.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	1.373	11.148	
logt	-1.212	-30.951	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Benin, Burkina Faso, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Congo Rep., Comoros, Ethiopia, Ghana, Guinea, Gambia, Honduras, Iraq, Jordan, Kenya, Cambodia, Kiribati, Laos, Mali, Mongolia, Mozambique, Mauritania, Malawi, Nigeria, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Solomon Islands, Sao Tome and Principe, Syria, Chad, Tanzania, Uganda, Vanuatu, Samoa, Zimbabwe.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.243	-6.908	
logt	-0.222	-3.874	
Cluster 5 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Afghanistan, Burundi, Central African Republic, Guinea-Bissau, Liberia, Madagascar, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Somalia, Togo, Dem. Rep. Congo, Zambia.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	2.192	4.094	
logt	-1.142	-6.708	

Cuadro 4: "Clusters" encontrados para la (Inversión/PIB)

Cluster 1	Cluster 3
Antigua, Bahrain, Bahamas, Barbados, Brunei, Bhutan, Botswana, China, Cape Verde, Algeria, Ecuador, Fed. Sts. of Micronesia, Gabon, Ghana, Guinea, Gambia, Equatorial Guinea, Grenada, Hong Kong, Iran, Iceland, Jordan, Cambodia, Kiribati, St. Kitts & Nevis, South Korea, Laos, St. Lucia, Sri Lanka, Lesotho, Morocco, Maldives, Mongolia, Mauritania, Mauritius, Malawi, Malaysia, Namibia, Nicaragua, Oman, Sudan, Senegal, Singapore, Sao Tome and Principe, Suriname, Chad, Thailand, Tunisia, Uganda, St. Vincent & Grenadines, Vanuatu,	Argentina, Benin, Burkina Faso, Bermuda, Brazil, Canada, Cameroon, Congo Rep., Colombia, Comoros, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Ethiopia, France, UK, Germany, Guatemala, Hungary, Iraq, Israel, Kenya, Luxembourg, Madagascar, Mexico, Mali, Malta, Niger, Netherlands, New Zealand, Pakistan, Philippines, Papua New Guinea, Poland, Puerto Rico, Paraguay, Rwanda, El Salvador, Somalia, Sweden, Syria, Togo, Tonga, Turkey, Taiwan, Tanzania, Uruguay, USA, Venezuela
Afghanistan, Australia, Austria, Belgium, Belize, Switzerland, Chile, Cyprus, Dominica, Denmark, Spain, Finland, Fiji, Greece, Honduras, Indonesia, India, Ireland, Italy, Jamaica, Japan, Macao, Mozambique, Norway, Nepal, Panama, Peru, Portugal, Romania, Swaziland, Trinidad & Tobago, South Africa, Dem. Rep. Congo, Zambia	Central African Republic, Guinea-Bissau, Liberia
	Cluster 5 Burundi, Solomon Islands, Zimbabwe
	Cluster 6 Nigeria, Samoa
	Cluster 7 Bolivia, Cote d'Ivoire, Cuba, Sierra Leone

Cuadro 5: Comparación de "clusters"

Cluster	Variable	C1 PS	C2 PS	C3 PS	C4 PS	C5 PS	Total
Cluster 1 y 2	No.	17	8	9	17	1	52
	% Fila	32.69	15.38	17.31	32.69	1.92	100
	% Columna	36.17	28.57	42.86	48.57	8.33	36.36
Cluster 2 y 3	No.	30	20	11	14	7	82
	% Fila	36.59	24.39	13.41	17.07	8.54	100
	% Columna	63.83	71.43	52.38	40	58.33	57.34
Cluster 4 y 5	No.	0	0	0	2	3	5
	% Fila	0	0	0	40	60	100
	% Columna	0	0	0	5.71	25	3.5
Cluster 6	No.	0	0	1	2	1	4
	% Fila	0	0	25	50	25	100
	% Columna	0	0	4.76	5.71	8.33	2.8
Total		47	28	21	35	12	143

8.2. Capital Humano

Tradicionalmente la literatura de crecimiento económico ha identificado el concepto de capital humano con algunas variables como: número promedio de años de educación (Barro y Lee, 2010), resultados en pruebas internacionales comparables (Hanushek y Kimko, 2000), tasa de analfabetismo, el valor de mercado de capital humano (Mulligan y Sala-i-Martin, 1995), entre otras. En esta sección se evalúa la homogeneidad de dos medidas de capital humano: una agregación del número de años de educación y años promedio de educación terciaria para cada país, ambas tomadas de Barro y Lee (2010).

Para ambas variables se toman los países usados por PS y se cruza esta información con los países disponibles en Barro y Lee (2010). Para años promedio de educación se cuenta con un total de 112 países mientras que para años promedio de educación terciaria se cuenta con un total de 115 países. El periodo de análisis va desde 1950 hasta 2010³⁶.

8.2.1. Años promedio de Educación.

La tabla 6 presenta los resultados obtenidos al realizar la prueba de convergencia ($\log t$) a los grupos de crecimiento encontrados por PS. Se aprecia que para todos los grupos no se rechaza la hipótesis de convergencia evidenciando una gran homogeneidad entre estos grupos.

Con el fin de saber si esta homogeneidad se debe a la clasificación de los grupos encontrada por PS, o si se debe a la misma dinámica de la variable, se prueba inicialmente si hay convergencia global para todos los países empleados en la muestra. La tabla 7 muestra que efectivamente no se rechaza la hipótesis nula de convergencia global de la serie. Este resultado es notable y va en línea con lo encontrado por Barro y Lee (2010); en el 2010, la población mundial mayor de 15 años se estima que tenía un promedio de 7.8 años de estudios, un resultado destacado si se le compara con los 3.2 años promedio que se encontraba en 1950. Para las economías avanzadas se estima en 11 años comparado con los 7.1 años para las economías en desarrollo. En 1950, el número promedio de años de educación para las personas mayores de 15 años creció constantemente de 2,1 años a 7,1 años para los países en desarrollo. Particularmente, se destaca el comportamiento de los países del Sur de Asia, y algunos del norte de África en donde los años promedio se duplicaron desde 1980. Sin embargo, se debe tener presente que gran parte de estos avances en educación se deben a los esfuerzos realizados en los grados comprendidos en primaria y secundaria, y por tanto, aún persisten diferencias en la educación terciaria y en la calidad de la misma.

El resultado anterior contrasta notablemente con lo encontrado por PS, dado que el capital humano ha sido considerado recientemente como un motor primordial del crecimiento y desarrollo de las naciones. Si lo anterior es cierto, se debería esperar un comportamiento similar al del PIB per-cápita (a lo encontrado por

³⁶Dado que los datos presentan una frecuencia de cada 5 años, se realizaron distintos procedimientos de extrapolación con el fin de obtener una frecuencia anual de los datos siguiendo la estrategia de desagregación de datos sugerida por Literman.

Cuadro 6: Convergencia para los "Clusters" de Phillips y Sul (2007)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul)			Australia, Austria, Belgium, Brunei, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, China, Cyprus, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Hong Kong, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, South Korea, Luxembourg, Macao, Maldives, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Portugal, Singapore, Sweden,
	b-coef	t-stat	
const	-5.144	-63.825	
logt	1.275	57.749	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul)			Argentina, Bahrain, Belize, Brazil, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Hungary, Indonesia, India, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Tunisia, Turkey, Uruguay, South Africa
	b-coef	t-stat	
const	-7.711	-56.596	
logt	2.317	62.093	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul)			Cuba, Algeria, Ecuador, Fiji, Guatemala, Iran, Jamaica, Lesotho, Morocco, Namibia, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, Romania, El Salvador, Venezuela.
	b-coef	t-stat	
const	-5.641	-483.11	
logt	1.82	569.111	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul)			Benin, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Congo Rep., Ghana, Gambia, Honduras, Iraq, Jordan, Kenya, Cambodia, Laos, Mali, Mongolia, Mozambique, Mauritania, Malawi, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Syria, Tanzania, Uganda, Zimbabwe.
	b-coef	t-stat	
const	-5.741	-36.96	
logt	2.331	54.783	
Cluster 5 de Convergencia (Phillips y Sul)			Afghanistan, Burundi, Central African Republic, Liberia, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Togo, Zambia
	b-coef	t-stat	
const	-22.088	-9.164	
logt	5.292	8.016	

Cuadro 7: Convergencia Global

Cluster 1 de Convergencia			Complemento del Cluster 1		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-5.944	-131.54	const	-0.62	-1.222
logt	1.757	141.996	logt	-0.138	-0.991

PS) para la variable de capital humano empleada en esta sección. Es decir, se debería observar convergencia por "clusters" y no convergencia global, como se ha evidenciado.

No obstante, lo anterior sugiere al menos dos problemas: primero, la variable empleada de capital humano no recoge por completo el concepto teórico empleado en la mayoría de los modelos teóricos; esto es, puede ser que el tema de la calidad y efectividad del capital humano se esté dejando de lado y no se esté teniendo en cuenta en la variable de años de educación promedio propuesta por Barro y Lee (2010). Segundo, existe la incógnita de si el capital humano es, por tanto, el que genera las grandes disparidades del ingreso como en muchas ocasiones se ha sugerido.

El modelo planteado en la sección 2 sugiere que la calidad del capital humano es en sí la que genera disparidades en la dinámica tanto del capital humano como del PIB per-cápita, y no, el stock como tal del capital humano.

Con el fin de dar alcance a algunas de las incógnitas planteadas en el párrafo anterior se realiza un procedimiento similar empleando como *proxy* del capital humano el número promedio de años de educación terciaria. Esta variable tiene varias cualidades: primero, es una variable más homogénea y de cierta forma no sufre de los problemas de agregación que tiene la variable de años de educación promedio. Segundo, dado que se está considerando el nivel más avanzado, recoge en cierto grado la calidad del capital humano, pues se está tomando el más especializado.

8.2.2. Años promedio de Educación Terciaria

La tabla 8 presenta los resultados encontrados al realizar la prueba de convergencia para los grupos encontrados por PS para años promedio de educación terciaria. Estos resultados contrastan notoriamente con los anteriores, ya que, para todos los grupos se rechaza la hipótesis de convergencia. Al igual que en el caso anterior, se lleva a cabo la prueba de convergencia global de los datos, rechazándose igualmente dicha hipótesis (Ver tabla 22). Dado lo anterior, se estima la prueba $\log t$ en conjunto con el algoritmo de

identificación de “clusters” propuesto por esos autores con el fin de comprender un poco más acerca de esta variable.

Cuadro 8: Convergencia para los “Clusters” de Phillips y Sul (2007)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Australia, Austria, Belgium, Brunei, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, China, Cyprus, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Hong Kong, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, South Korea, Luxembourg, Macao, Maldives, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Portugal, Singapore, Sweden, Thailand, Taiwan, USA
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	4.339	40.353	
logt	-2.294	-75.898	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Argentina, Bahrain, Belize, Brazil, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Hungary, Indonesia, India, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Tunisia, Turkey, Uruguay, South Africa
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	2.997	65.106	
logt	-1.702	-131.54	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Cuba, Algeria, Ecuador, Fiji, Guatemala, Iran, Jamaica, Lesotho, Morocco, Namibia, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, Romania, El Salvador, Venezuela
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	2.371	26.022	
logt	-1.62	-63.272	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Benin, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Congo Rep., Ghana, Gambia, Honduras, Iraq, Jordan, Kenya, Cambodia, Laos, Mali, Mongolia, Mauritania, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Syria, Tanzania, Zimbabwe
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	0.262	4.121	
logt	-1.033	-57.805	
Cluster 5 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Afghanistan, Burundi, Central African Republic, Liberia, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Togo, Zambia
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	1.709	26.2	
logt	-1.354	-73.867	

La tabla 9 presenta los “clusters” encontrados para los años promedio de educación terciaria. Al igual que el resultado anterior, estos resultados contrastan notoriamente con los encontrados para el caso de años promedio de educación total. La tabla 23 presenta el análisis realizado para los grupos adyacentes presentados en la tabla 9, en donde se aprecia que para los cluster 1 y 2, 7 y 8, 8 y 9, 9 y 10, 11 y 12, y 12 y 13 se acepta la hipótesis de convergencia, luego, se forman nuevos grupos con cada uno de ellos.

Cuadro 9: "Clusters" encontrados para (Años promedio de Educación Terciaria)

<i>Cluster 1</i> New Zealand, USA	<i>Cluster 10</i> Austria, Switzerland, Costa Rica, Dominican Rep., Ecuador, France, Hong Kong, Hungary, Luxembourg, Macao, Mexico, Nicaragua
<i>Cluster 2</i> Canada, Japan	<i>Cluster 11</i> Belize, Bolivia, China, Cuba, Algeria, Fiji, Gabon, Jordan, Liberia, Morocco, Mongolia, Malaysia, Poland, Portugal, Romania, El Salvador, Thailand, Tonga, Tunisia, Turkey, Venezuela
<i>Cluster 3</i> Australia, South Korea	<i>Cluster 12</i> Argentina, Bahrain, Brunei, Colombia, Egypt, Honduras, Iraq, Italy, Malta, Uruguay
<i>Cluster 4</i> Ireland, Israel	<i>Cluster 13</i> Afghanistan, Benin, Brazil, Botswana, Ghana, India, Pakistan, South Africa
<i>Cluster 5</i> Greece, Iceland	<i>Cluster 14</i> Cote d'Ivoire, Cameroon, Gambia, Laos, Paraguay, Trinidad & Tobago
<i>Cluster 6</i> Belgium, Taiwan	<i>Cluster 15</i> Burundi, Barbados, Central African Republic, Congo Rep., Guatemala, Indonesia, Kenya, Cambodia, Lesotho, Maldives, Mali, Mauritania, Mauritius, Namibia, Niger, Nepal, Philippines, Papua New Guinea, Rwanda, Sudan, Senegal, Sierra Leone, Swaziland, Syria, Togo, Tanzania, Zambia, Zimbabwe
<i>Cluster 7</i> Cyprus, Spain, Netherlands, Sweden	
<i>Cluster 8</i> Chile, UK, Norway	
<i>Cluster 9</i> Denmark, Finland, Iran, Jamaica, Sri Lanka, Panama, Peru, Singapore	

La tabla 10 compara los "clusters" obtenidos con los encontrados por PS cuando se emplea el PIB per-cápita. Se destacan algunos puntos importantes: a pesar de la heterogeneidad observada para la variable de capital humano (años promedio de educación terciaria), reflejada en el número de grupos encontrados, se observa cierto grado de homogeneidad, ya que, los cluster del 1 al 9 están conformados por países que pertenecían al grupo 1 de PS (50 % de los países más avanzados), exceptuando un país perteneciente al grupo 2 de PS en el cluster 5. El cluster 9 y 10, está conformado en un 75 % por países pertenecientes al grupo 1 (45 %) y 2 (30 %) de PS.

Por otro lado, el cluster 14 está conformado en su mayoría (66,67 %) por países pertenecientes al grupo 4 de PS, mientras que los países del cluster 15 pertenecen al grupo 5 (78 %) de PS. En conclusión, a pesar de la cantidad de grupos encontrados en una primera instancia, se refleja una gran concordancia con los grupos encontrados por PS empleando el PIB per-cápita.

Esto refleja varios hechos: primero, la variable empleada efectivamente puede estar recogiendo de forma más precisa elementos asociados a la calidad del capital humano, y de ahí su concordancia con los "clusters" encontrados por PS. Igualmente, estos resultados sugieren que se debe ser cauto a la hora de emplear variables como proxy de capital humano, ya que el concepto de calidad de este, juega un papel fundamental. A pesar de la concordancia con los grupos encontrados por PS, estos resultados sugieren que cuando se quiere tener en cuenta el capital humano dentro de las ecuaciones empíricas de crecimiento, se deben tener en cuenta los "clusters" formados tanto por las diferencias (heterogeneidades) presentes en la tasa de progreso tecnológico de estado estacionario como por niveles intrínsecos de calidad del capital humano., a pesar de que esta última en el largo plazo no implique "clusters" distintos en el primer modelo presentado. Esta implicación puede afectar más la dinámica transitoria de corto plazo, aunque los mismos factores estructurales que afectan la tasa de crecimiento de la tecnología de estado estacionario, pueden afectar la calidad y la efectividad del capital humano de estado estacionario.

Cuadro 10: Comparación de "clusters"

Cluster	Variable	C1 PS	C2 PS	C3 PS	C4 PS	C5 PS	Total
Cluster 1 y 2	No.	4	0	0	0	0	4
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	10.81	0.00	0.00	0.00	0.00	3.57
Cluster 3	No.	2	0	0	0	0	2
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	5.41	0.00	0.00	0.00	0.00	1.79
Cluster 4	No.	2	0	0	0	0	2
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	5.41	0.00	0.00	0.00	0.00	1.79
Cluster 5	No.	1	1	0	0	0	2
	% Fila	50.00	50.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	2.70	4.00	0.00	0.00	0.00	1.79
Cluster 6	No.	2	0	0	0	0	2
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	5.41	0.00	0.00	0.00	0.00	1.79
Cluster 7 y 8	No.	4	0	0	0	0	4
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	10.81	0.00	0.00	0.00	0.00	3.57
Cluster 8 y 9	No.	3	0	0	0	0	3
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	8.11	0.00	0.00	0.00	0.00	2.68
Cluster 9 y 10	No.	9	6	4	1	0	20
	% Fila	45.00	30.00	20.00	5.00	0.00	100
	% Columna	24.32	24.00	22.22	4.35	0.00	17.86
Cluster 11 y 12	No.	4	6	7	3	1	21
	% Fila	19.05	28.57	33.33	14.29	4.76	100
	% Columna	10.81	24.00	38.89	13.04	11.11	18.75
Cluster 12 y 13	No.	4	8	1	4	1	18
	% Fila	22.22	44.44	5.56	22.22	5.56	100
	% Columna	10.81	32.00	5.56	17.39	11.11	16.07
Cluster 14	No.	0	1	1	4	0	6
	% Fila	0.00	16.67	16.67	66.67	0.00	100
	% Columna	0.00	4.00	5.56	17.39	0.00	5.36
Cluster 15	No.	2	3	5	11	7	28
	% Fila	7.14	10.71	17.86	39.29	25.00	100.00
	% Columna	5.41	12.00	27.78	47.83	77.78	25.00
Total		37	25	18	23	9	112

Igualmente se debe tener presente lo siguiente: el modelo presentado en la sección 2 sugiere que los grupos de convergencia pueden depender tanto de las diferencias en el progreso tecnológico como por las diferencias en la calidad de la educación. Lo cual se valida en estos resultados. Sin embargo, dado que este no es un análisis causal, se debe tener presente que no es posible identificar si los factores que influyen sobre la tecnología son los mismos que influyen sobre la calidad del capital humano. Esto se deja para futuras investigaciones.

8.3. Apertura

Otro concepto que ha sido resaltado ampliamente por la literatura como uno de los determinantes fundamentales del crecimiento económico se refiere al grado de apertura de los países. Esto ha sido bastante polémico debido a la diversidad de resultados, tanto a favor como en contra de la liberalización que se ha encontrado en la literatura. Sin embargo, Estevadeordal y Taylor (2008) argumentan que la gran mayoría de los trabajos empíricos que han encontrado evidencia en contra de la apertura de las economías tienen serios problemas, como escasez de datos y diseños empíricos pobres, que se han enfocado en periodos de tiempo en donde la gran apertura a nivel mundial (particularmente con el Consenso de Washington) no se había llevado a cabo. Además, estos autores muestran que los países que liberalizaron sus economías crecieron a una tasa mayor.

En esta sección se emplea el indicador de apertura elaborado por Heston et al. (2011), el cual está definido como el total de exportaciones más importaciones sobre PIB a precios constantes del 2005. Se emplean los mismos países usados por PS (146 en total) para el periodo 1970-2010.

La tabla 11 presenta los resultados encontrados al estimar la prueba de convergencia de Phillips y Sul

(2007) para los grupos encontrados por PS para el PIB per-cápita. Se puede apreciar que se encuentra evidencia para aceptar la hipótesis nula de convergencia para los dos primeros grupos de PS (los más avanzados) y para el grupo 4. Este resultado es similar al encontrado para la variable Inversión sobre PIB, ya que se observa convergencia para los países más desarrollados.

Cuadro 11: Convergencia para los "Clusters" de Phillips y Sul (2009)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Antigua, Australia, Austria, Belgium, Bermuda, Brunei, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, China, Cape Verde, Cyprus, Dominica, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Germany, Equatorial Guinea, Hong Kong, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, St. Kitts & Nevis, South Korea, Luxembourg, Macao, Maldives, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Oman, Puerto Rico, Portugal, Singapore, Sweden, Thailand, Taiwan, USA, St. Vincent & Grenadines.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.451	-6.346	
logt	-0.025	-0.34	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Argentina, Bahrain, Bahamas, Belize, Brazil, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Grenada, Hungary, Indonesia, India, St. Lucia, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Tunisia, Turkey, Uruguay, South Africa
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.165	-8.281	
logt	0.578	4.757	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Bhutan, Cuba, Algeria, Ecuador, Fiji, Fed. Sts. of Micronesia, Guatemala, Iran, Jamaica, Lesotho, Morocco, Namibia, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, Romania, El Salvador, Suriname, Venezuela.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	0.074	0.418	
logt	-0.391	-6.966	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Benin, Burkina Faso, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Congo Rep., Comoros, Ethiopia, Ghana, Guinea, Gambia, Honduras, Iraq, Jordan, Kenya, Cambodia, Kiribati, Laos, Mali, Mongolia, Mozambique, Mauritania, Malawi, Nigeria, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Solomon Islands, Sao Tome and Principe, Syria, Chad, Tanzania, Uganda, Vanuatu, Samoa, Zimbabwe.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-2.57	-9.233	
logt	0.253	2.859	
Cluster 5 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Afghanistan, Burundi, Central African Republic, Guinea-Bissau, Liberia, Madagascar, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Somalia, Togo, Dem. Rep. Congo, Zambia
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	1.429	8.664	
logt	-1.188	-22.653	

La tabla 12 presenta el análisis de "clusters" siguiendo la metodología de Phillips y Sul (2007) y en la tabla 25 se aprecia el análisis de grupos adyacentes respectivo. Adicionalmente, la tabla 13 compara los "clusters" obtenidos para la variable apertura con los encontrados por PS.

Aunque se observa cierto grado de heterogeneidad, se puede apreciar que al igual que en los casos anteriores hay un buen grado de concordancia con los grupos encontrados por PS. Particularmente, se nota que los grupos de convergencia con mayor apertura (cluster 1 y 2, cluster 2 y 3 y cluster 3 y 4) están conformados en su mayoría por países pertenecientes al grupo 1 de PS (países más desarrollados). Por otro lado, los clusters con menor apertura, cluster 4 y 5, cluster 6 y cluster 7, están conformados en su mayoría por países pertenecientes a los grupos menos desarrollados encontrados por PS (grupos 4 y 5). Se destaca igualmente la gran heterogeneidad presente para los grupos del "medio" (grupos 2 y 3) de PS, ya que se encuentran distribuidos entre los clusters 1 al 5 de apertura.

La apreciación subrayada en el párrafo anterior se ratifica en el gráfico 16, el cual presenta el parámetro de convergencia global H_t para los grupos de crecimiento de PS y los "clusters" encontrados para el índice de apertura. Se observa que los grupos 1, 2 y 4 para ambos ejercicios (grupos de PS y derivados del índice de apertura) presentan una dinámica bastante similar, mientras que se aprecia una divergencia mayor en H_t para el grupo 3 y particularmente para el grupo 5, que corresponde a los países menos desarrollados.

Cuadro 12: "Clusters" encontrados para, *Apertura*.

Cluster 1	Cluster 4
Afghanistan, Belgium, Costa Rica, Spain, Germany, Equatorial Guinea, Hong Kong, Hungary, India, Ireland, Cambodia, South Korea, Laos, Luxembourg, Maldives, Mexico, Malaysia, Nicaragua, Netherlands, Philippines, Poland, Paraguay, Romania, Singapore, Sao Tome and Principe, Thailand, Turkey, Zimbabwe	Bahamas, Belize, Bermuda, Bolivia, Barbados, Brunei, Cote d'Ivoire, Cameroon, Colombia, Cyprus, Dominica, Ecuador, Fiji, Fed. Sts. of Micronesia, Guinea, Grenada, Honduras, Iraq, Israel, Italy, Jamaica, Kenya, St. Kitts & Nevis, St. Lucia, Sri Lanka, Mozambique, Mauritius, Namibia, Norway, Nepal, New Zealand, Peru, Papua New Guinea, Sierra Leone, Swaziland, Syria, Chad, Togo, Trinidad & Tobago, Tunisia, Uganda, St Vincent & Grenadines, Venezuela, Vanuatu, Dem. Rep. Congo
Cluster 2	Cluster 5
Argentina, Australia, Brazil, Bhutan, Chile, China, Denmark, Finland, France, Greece, Liberia, Lesotho, Morocco, Portugal, El Salvador, Sweden, Tanzania, Uruguay, USA	Antigua, Benin, Botswana, Comoros, Cape Verde, Dominican Rep., Algeria, Egypt, Ethiopia, Gabon, Gambia, Guinea-Bissau, Guatemala, Indonesia, Iran, Iceland, Japan, Madagascar, Mali, Niger, Nigeria, Oman, Senegal, Solomon Islands, Tonga, Samoa, South Africa, Zambia
Cluster 3	Cluster 6
Austria, Bahrain, Canada, Switzerland, Congo Rep., UK, Ghana, Jordan, Kiribati, Macao, Malta, Mongolia, Mauritania, Malawi, Panama, Puerto Rico, Suriname, Taiwan	Burundi, Burkina Faso, Central African Republic, Cuba, Pakistan, Rwanda, Sudan
Cluster (No Convergen)	Somalia

Cuadro 13: Comparación de "clusters"

Cluster	Variable	C1 PS	C2 PS	C3 PS	C4 PS	C5 PS	Total
Cluster 1 y 2	No.	13	6	3	5	1	28
	% Fila	46.43	21.43	10.71	17.86	3.57	100
	% Columna	27.66	21.43	14.29	13.51	7.69	19.18
Cluster 2 y 3	No.	9	4	4	1	1	19
	% Fila	47.37	21.05	21.05	5.26	5.26	100
	% Columna	19.15	14.29	19.05	2.70	7.69	13.01
Cluster 3 y 4	No.	8	2	1	7	0	18
	% Fila	44.44	11.11	5.56	38.89	0.00	100
	% Columna	17.02	7.14	4.76	18.92	0.00	12.33
Cluster 4 y 5	No.	17	16	11	22	7	73
	% Fila	23.29	21.92	15.07	30.14	9.59	100
	% Columna	36.17	57.14	52.38	59.46	53.85	50
Cluster 6	No.	0	0	2	2	3	7
	% Fila	0.00	0.00	28.57	28.57	42.86	100
	% Columna	0.00	0.00	9.52	5.41	23.08	4.79
Cluster 7	No.	0	0	0	0	1	1
	% Fila	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	100
	% Columna	0.00	0.00	0.00	0.00	7.69	0.68
Total		47	28	21	37	13	146

El análisis regional de estos clusters provee igualmente información valiosa³⁷. La tabla 26 presenta los grupos de crecimiento encontrados para la variable de apertura divididos por regiones geográficas. Se consideran en total 10 regiones, de donde se destaca lo siguiente: la mayoría de los países Asiáticos (51 %), dragones asiáticos (75 %), países europeos no pertenecientes a la OECD (78 %), países recientemente industrializados (75 %) y países de la OECD (58 %) pertenecen al cluster 1 o 2. Mientras que la gran mayoría de países Africanos (54 %), países Latinoamericanos (61 %), países del medio este y Norte de África (70 %), países de África Subsahariana (69 %) pertenecen a los clusters menos abiertos (cluster 4).

De hecho, cuando se analiza la dinámica en el tiempo del grado de apertura por regiones se encuentra que zonas como los dragones asiáticos, países recientemente industrializados (NIC) y los países de la OECD casi duplicaron su índice de apertura durante 1970 a 2010. Mientras que regiones como los países África Subsahariana, Latinoamérica, países del Medio Este y Norte de África y el resto de países de África no lograron incrementos mayores al 20 %.

³⁷Ver Anexo 2 los países pertenecientes a cada región.

En conclusión, al realizar el ejercicio de convergencia para la variable de apertura se encuentra lo siguiente: primero, gran concordancia entre los grupos de países encontrados por PS, teniendo en cuenta únicamente el PIB per-cápita, con los encontrados en esta sección. Se observa mayor divergencia para algunos países de los grupos medios y bajos entre los grupos obtenidos empleando el concepto de apertura y los encontrados por PS. Tercero, una gran segregación geográfica para los grupos encontrados empleando el concepto de apertura, en donde se destaca el rezago de Latinoamérica frente a regiones como los “Dragones Asiáticos” y los NIC’s.

8.4. Estabilidad Macroeconómica

A pesar del gran avance que se ha logrado en el entendimiento del impacto de las distorsiones domésticas e internacionales sobre el ciclo económico³⁸, su impacto sobre el crecimiento de largo plazo aún no es claro. Una primera aproximación la provee Barro (1998), el cual encuentra dos hechos importantes: primero, periodos prolongados de inflaciones altas de los países tienen un efecto negativo, aunque de una magnitud pequeña, sobre el crecimiento económico de las economías. Segundo, Barro (1998) encuentra evidencia de un efecto negativo de incrementos del gasto público sobre el crecimiento del PIB. Según Barro (1998), la variable gasto del gobierno sobre el PIB, se emplea como proxy de gastos en actividades no productivas³⁹.

En esta sección se analiza el comportamiento de estas dos variables que recogen en buena medida posibles distorsiones macroeconómicas domésticas; la tasa de inflación al cuadrado y el consumo del gobierno como proporción del PIB.

8.4.1. Estabilidad monetaria: Inflación al cuadrado

Se emplean dos fuentes de información para la inflación: la primera, corresponde a la base de datos del *World Development Indicators* del Banco Mundial del 2011, la cual contiene información para 106 países durante el periodo 1970-2009. La segunda fuente utiliza el deflactor del PIB que provee PENN World Tables 7.0 de Heston et al. (2011), la cual incluye información para 146 países (los mismos que emplea PS) entre 1970 y 2009.

Dados los estudios empíricos previos, en donde se resalta el impacto negativo de la inflación sobre el crecimiento, se espera una relación inversa (en el orden) entre los grupos encontrados por PS y los “cluster” que se encuentren para la inflación. Por tanto, la comparación del parámetro de transición global, H_t , se hace menos directa y no se presenta⁴⁰.

Inicialmente se presenta el análisis de convergencia de la inflación para los grupos encontrados por PS, y se procede a compararlos con los grupos que de forma autónoma se encuentran para el caso de esta variable, realizando la prueba $\log t$ y el algoritmo de formación de “clusters”.

La tabla 14 presenta los resultados de convergencia para la inflación empleando los grupos encontrados por PS; para todos ellos se rechaza la hipótesis nula de convergencia, evidenciando gran heterogeneidad al interior de cada grupo. Con el fin de comprender mejor esta heterogeneidad, se llevan a cabo varios pasos: primero, se prueba inicialmente si existe evidencia estadística para aceptar la hipótesis nula de convergencia global para los 146 países empleados en la muestra, encontrándose que es posible rechazar dicha hipótesis (ver tabla 27). Se estima, por tanto, la prueba $\log t$ de convergencia junto con el algoritmo de formación de “clusters” (tabla 15) y las pruebas de grupos adyacentes, para la inflación (tabla 28).

³⁸Ver por ejemplo McCallum (1990) y Briault (1995) para un análisis empírico y teórico, respectivamente, sobre los costes generados por algunas distorsiones macroeconómicas como la inflación.

³⁹En Li y Zou (2002) se presentan resultados similares.

⁴⁰Esto es, dada la literatura mencionada en párrafos anteriores, es de esperarse que los primeros grupos de convergencia para el término de inflación al cuadrado este conformado por países que han experimentado grandes volatilidad macroeconómicas, y por tanto, posiblemente sean países menos desarrollados. Mientras que en el caso de PS los primeros grupos de convergencia están conformados por países desarrollados.)

La tabla 16 compara los “clusters” encontrados por este último procedimiento con los grupos estimados originalmente por PS. Se aprecia que dicha heterogeneidad proviene de los grupos del 2 al 5 de PS, ya que más de la mitad de los países pertenecientes a éstos (70 %, 71 % 59 %, 71 % y 50 %) están concentrados en los “clusters” 1 y 2 encontrados para la inflación al cuadrado, los cuales son los de mayor volatilidad. Por otro lado, los países pertenecientes al grupo de los más desarrollados en PS (grupo 1) están concentrados en los "clusters" del 4 al 8, que son los que presentan mayor estabilidad macroeconómica en términos de inflación.

Cuadro 14: Convergencia para los "Clusters" de Phillips y Sul (2007)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Australia, Austria, Belgium, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, Cyprus, Dominica, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, South Korea, Luxembourg, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Portugal, Singapore, Sweden, Thailand, USA, St. Vincent & Grenadines
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	4.992	7.989	
logt	-2.828	-13.938	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Argentina, Bahrain, Bahamas, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Hungary, Indonesia, India, St. Lucia, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Turkey, Uruguay, South Africa.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	3.405	13.883	
logt	-1.955	-24.551	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Algeria, Ecuador, Fiji, Guatemala, Iran, Jamaica, Morocco, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, El Salvador, Suriname, Venezuela
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	3.107	5.908	
logt	-1.836	-10.75	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Burkina Faso, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Ethiopia, Ghana, Gambia, Honduras, Jordan, Kenya, Nigeria, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Solomon Islands, Syria, Tanzania, Samoa, Zimbabwe.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	3.331	7.333	
logt	-2.298	-15.579	
Cluster 5 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Burundi, Madagascar, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Togo, Dem. Rep. Congo
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	0.37	0.677	
logt	-1.547	-8.722	

Cuadro 15: "Clusters" encontrados para la volatilidad de la Inflación

<i>Cluster 1</i> Burundi, Ecuador, Ghana, Honduras, Iran, Nigeria, Papua New Guinea, Suriname, Turkey, Venezuela, Dem. Rep. Congo, Zimbabwe	<i>Cluster 4</i> Australia, Chile, Cote d'Ivoire, Cyprus, Algeria, Spain, Fiji, UK, Gambia, Greece, Ireland, Iceland, Italy, Jordan, South Korea, Luxembourg, Malaysia, Niger, Peru, Poland, Portugal, El Salvador, Thailand, USA, Samoa
<i>Cluster 2</i> Argentina, Botswana, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Ethiopia, Guatemala, Hungary, Indonesia, India, Jamaica, Kenya, Sri Lanka, Madagascar, Mexico, Mauritius, Nicaragua, Nepal, Pakistan, Philippines, Paraguay, Rwanda, Sudan, Solomon Islands, Sierra Leone, Swaziland, Tonga, Uruguay	<i>Cluster 5</i> Belgium, Denmark
<i>Cluster 3</i> Bolivia, Egypt, Malta, Netherlands, Trinidad & Tobago	<i>Cluster 6</i> Austria, Canada, New Zealand, Togo
	<i>Cluster 7</i> Cameroon, Norway
	<i>Cluster 8</i> Israel, Tanzania
	<i>Cluster 9</i> Bahrain, Panama
	<i>Cluster (No Convergencia)</i> Burkina Faso, Bahamas, Barbados, Switzerland, Dominica, Finland, France, Gabon, Japan, St. Lucia, Morocco, Senegal, Singapore, Sweden, Syria, St. Vincent & Grenadines

Cuadro 16: Comparación de "clusters", PS vs C. Estimados.

Cluster	Variable	C1 PS	C2 PS	C3 PS	C4 PS	C5 PS	Total
Cluster 1	No.	0	1	5	4	2	12
	% Fila	0.00	8.33	41.67	33.33	16.67	100
	% Columna	0.00	5.00	35.71	23.53	28.57	14.46
Cluster 2 y 3	No.	2	13	5	6	3	29
	% Fila	6.90	44.83	17.24	20.69	10.34	100
	% Columna	8.00	65.00	35.71	35.29	42.86	34.94
Cluster 3 y 4	No.	2	2	0	1	0	5
	% Fila	40.00	40.00	0.00	20.00	0.00	100
	% Columna	8.00	10.00	0.00	5.88	0.00	6.02
Cluster 4 y 5	No.	14	2	4	4	1	25
	% Fila	56.00	8.00	16.00	16.00	4.00	100
	% Columna	56.00	10.00	28.57	23.53	14.29	30.12
Cluster 5 y 6	No.	2	0	0	0	0	2
	% Fila	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	8.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.41
Cluster 6 y 7	No.	4	0	0	1	1	6
	% Fila	66.67	0.00	0.00	16.67	16.67	100
	% Columna	16.00	0.00	0.00	5.88	14.29	7.23
Cluster 8	No.	1	0	0	1	0	2
	% Fila	50.00	0.00	0.00	50.00	0.00	100
	% Columna	4.00	0.00	0.00	5.88	0.00	2.41
Cluster 9	No.	0	2	0	0	0	2
	% Fila	0.00	100.00	0.00	0.00	0.00	100
	% Columna	0.00	10.00	0.00	0.00	0.00	2.41
Total		25	20	14	17	7	83

Al igual que en el caso del índice de apertura, el análisis regional para el caso de la inflación provee información interesante. La tabla 29 presenta la media y desviación estándar por década para las regiones consideradas a lo largo de este trabajo. Varios puntos a destacar al respecto; primero, las regiones que presentaron mayores niveles de inflación y de volatilidad durante el periodo considerado son África Subsahariana, el resto de países de África considerados y Latinoamérica. Segundo, durante la última década, Latinoamérica ha disminuido sustancialmente sus niveles de inflación y de volatilidad, acercándose a cifras comparables con las economías más desarrolladas. Tercero, sobresale el buen comportamiento que tuvieron los países pertenecientes a los "Dragones Asiáticos", OECD, NIC's y el resto de países asiáticos para las cuatro décadas consideradas, tanto en media como desviación estándar.

Igualmente, si se compara la composición de los "clusters" obtenidos para el caso de la inflación al cuadrado se llega a conclusiones muy similares a las mencionadas en el párrafo anterior (Ver tabla 30). Los países pertenecientes a las regiones de África subsahariana, resto de países de África y Latinoamérica están clasificados en su mayoría en los "clusters" de mayor volatilidad (1 y 2). Por otro lado, la generalidad de los países de las regiones de los "Dragones Asiáticos", NIC's, OECD y países Europeos no pertenecientes a la OECD hacen parte de los "clusters" de menor volatilidad, que son del 4 y 5 en adelante. Esto concuerda bastante bien con los grupos presentados por PS para el caso del PIB per-cápita.

8.4.2. Estabilidad Fiscal: Consumo del gobierno/PIB

En esta sección se analizan y comparan los distintos "clusters" del consumo del gobierno con respecto al PIB para un conjunto de 146 países durante el periodo 1970-2009. Se emplea la información provista por Heston et al. (2011) en la versión 7.0 de PENN World Tables.

Primero, se prueba la hipótesis de convergencia del consumo del gobierno sobre PIB para el conjunto de grupos encontrados por PS, presentados en la tabla 17. Tal como se observa en esta tabla, la hipótesis de convergencia se rechaza para los cinco grupo hallados por PS, reflejando al igual que en el caso de la inflación cierto grado de heterogeneidad de la variable.

Cuadro 17: Convergencia para los "Clusters" de Phillips y Sul (2007)

Cluster 1 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Antigua, Australia, Austria, Belgium, Bermuda, Brunei, Botswana, Canada, Switzerland, Chile, China, Cape Verde, Cyprus, Dominica, Denmark, Spain, Finland, France, UK, Germany, Equatorial Guinea, Hong Kong, Ireland, Iceland, Israel, Italy, Japan, St. Kitts & Nevis, South Korea, Luxembourg, Macao, Maldives, Malta, Mauritius, Malaysia, Netherlands, Norway, New Zealand, Oman, Puerto Rico, Portugal, Singapore, Sweden, Thailand, Taiwan, USA, St. Vincent & Grenadines.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	0.718	6.751	
logt	-0.835	-24.699	
Cluster 2 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Argentina, Bahrain, Bahamas, Belize, Brazil, Barbados, Colombia, Costa Rica, Dominican Rep., Egypt, Gabon, Greece, Grenada, Hungary, Indonesia, India, St. Lucia, Sri Lanka, Mexico, Panama, Poland, Swaziland, Tonga, Trinidad & Tobago, Tunisia, Turkey, Uruguay, South Africa.
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-0.301	-3.852	
logt	-0.433	-17.44	
Cluster 3 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Bhutan, Cuba, Algeria, Ecuador, Fiji, Fed. Sts. of Micronesia, Guatemala, Iran, Jamaica, Lesotho, Morocco, Namibia, Pakistan, Peru, Philippines, Papua New Guinea, Paraguay, Romania, El Salvador, Suriname, Venezuela
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-0.333	-10.4	
logt	-0.485	-47.665	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Benin, Burkina Faso, Bolivia, Cote d'Ivoire, Cameroon, Congo Rep., Comoros, Ethiopia, Ghana, Guinea, Gambia, Honduras, Iraq, Jordan, Kenya, Cambodia, Kiribati, Laos, Mali, Mongolia, Mozambique, Mauritania, Malawi, Nigeria, Nicaragua, Nepal, Sudan, Senegal, Solomon Islands, Sao Tome and Principe, Syria, Chad, Tanzania, Uganda, Vanuatu, Samoa, Zimbabwe
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-0.379	-4.533	
logt	-0.502	-18.874	
Cluster 4 de Convergencia (Phillips y Sul, 2007)			Afghanistan, Burundi, Central African Republic, Guinea-Bissau, Madagascar, Niger, Rwanda, Sierra Leone, Somalia, Togo, Dem. Rep. Congo, Zambia
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.349	-6.874	
logt	-0.219	-3.507	

Se estima entonces la prueba de convergencia para el caso del consumo del gobierno sobre PIB, con el fin de entender mejor la dinámica de esta variable. Similar al caso de la inflación, la evidencia preliminar encontrada sugiere que países con elevado consumo del gobierno como proporción del PIB muestran menor crecimiento. Luego, debería esperarse una correlación negativa entre los grupos de convergencia obtenidos por PS y los grupos estimados para el caso del consumo del gobierno sobre el PIB.

Se prueba inicialmente la hipótesis nula de convergencia global para el conjunto de los 146 países empleados en la muestra, concluyéndose que es posible rechazar dicha hipótesis (ver tabla 31). Dado este resultado, se procede a estimar la prueba logt junto con el algoritmo de identificación de "clusters" para este conjunto de países. Los grupos estimados y el análisis de grupos adyacentes, se presenta en las tablas 18 y 32, respectivamente⁴¹. Los grupos 1 y 2 hallados convergen en uno solo, por lo que se toman como un grupo en conjunto para los análisis posteriores.

Cuadro 18: "Clusters" encontrados para (*Gasto del Gobierno/PIB*)

Cluster 1	Cluster 3
Antigua, Bermuda, Brunei, Bhutan, Colombia, Comoros, Cuba, Fed. Sts. of Micronesia, Gabon, Iraq, Kiribati, St. Lucia, Lesotho, Maldives, Mali, Mauritania, Malawi, Nigeria, Rwanda, Solomon Islands, Sierra Leone, Sao Tome and Principe, Chad, Tonga, St. Vincent & Grenadines, Samoa, Dem. Rep. Congo	Australia, Austria, Belgium, Benin, Bahamas, Bolivia, Brazil, Barbados, Botswana, Central African Republic, Canada, Cameroon, Cyprus, Denmark, Dominican Rep., Egypt, Ethiopia, Finland, Fiji, France, UK, Germany, Ghana, Guinea, Gambia, Guinea-Bissau, Greece, Hungary, Indonesia, Iran, Iceland, Israel, Italy, Kenya, Cambodia, Sri Lanka, Macao
Cluster 2	Cluster 4
Afghanistan, Burundi, Burkina Faso, Belize, China, Congo Rep., Cape Verde, Costa Rica, Dominica, Algeria, Spain, Grenada, Guatemala, Honduras, India, Jamaica, Japan, St. Kitts & Nevis, Laos, Malta, Mongolia, Niger, Nicaragua, Netherlands, Pakistan, Panama, Papua New Guinea, Sudan, Somalia, Tanzania, Vanuatu, Zambia.	Argentina, Bahrain, Switzerland, Chile, Cote d'Ivoire, Ecuador, Equatorial Guinea, Hong Kong, Ireland, Jordan, South Korea, Liberia, Luxembourg, Madagascar, Mexico, Mauritius, Malaysia, Peru, Philippines, Senegal, Syria, Thailand, Tunisia, Uruguay, USA, Venezuela, South Africa

⁴¹Igualmente, los resultados (pruebas estadísticas) obtenidos se presentan en la tabla 31.

Cuadro 19: Comparación de "clusters", PS vs C. Estimados

Cluster PS/ Cluster E.		1	2	3	4	5	Total
Cluster 1 y 2	No.	13	9	9	20	8	59
	% Fila	22.03	15.25	15.25	33.9	13.56	100
	% Columna	27.66	32.14	42.86	54.05	61.54	40.41
Cluster 3	No.	23	13	8	13	3	60
	% Fila	38.33	21.67	13.33	21.67	5	100
	% Columna	48.94	46.43	38.1	35.14	23.08	41.1
Cluster 4	No.	11	6	4	4	2	27
	% Fila	40.74	22.22	14.81	14.81	7.41	100
	% Columna	23.4	21.43	19.05	10.81	15.38	18.49
Total		47	28	21	37	13	146

Al contrastar los grupos obtenidos con los de PS, tabla 19, se encuentran conclusiones interesantes: primero, los países menos desarrollados (grupos 4 y 5) de los grupos hallados por PS, pertenecen en su mayoría a los "clusters" 1 y 2 estimados para el consumo del gobierno con respecto al PIB, que son precisamente los de mayor participación del gobierno en la actividad productiva. Segundo, los países pertenecientes a los grupos del medio de PS (2 y 3), pertenecen en su mayoría a los "clusters" 1 y 2 estimados. Por último, los países más avanzados (grupos 1 y 2) se encuentran, en su mayoría, distribuidos en los "clusters" 3 y 4 estimados para el consumo del gobierno sobre el PIB. Esto refleja una correlación negativa entre los grupos de convergencia encontrados por PS para el PIB per-cápita y los grupos encontrados para el caso del consumo del gobierno sobre el PIB.

Igualmente, al compararse los clusters estimados para el consumo del gobierno como proporción del PIB y su distribución regional, tabla 33, se encuentran patrones similares a los encontrados para el caso de la inflación aunque con algunas diferencias; particularmente, se destaca la participación de los países Asiáticos, distintos a los "Dragones asiáticos" y a los NIC's, y de Oceanía en el primer grupo estimado, que corresponden a los de mayor participación por parte del gobierno en la actividad productiva. Igualmente, sobresale la concentración en el mismo grupo de los países pertenecientes a Latinoamérica, África subsahariana y el resto de países de África.

A pesar de no tener una forma funcional explícita en el modelo presentado en la ecuación 2 que permita entender a fondo el canal de transmisión del impacto de las volatilidades macroeconómicas de un país sobre el crecimiento económico (podría pensarse que entra en la función de producción sin embargo no es claro como serían sus ecuaciones de movimiento, y por tanto si su dinámica depende o no de la tecnología), si se pueden comprobar algunos hechos que corroboran la literatura previa: primero, los grupos encontrados para ambas variables, aunque no iguales, coinciden en su mayoría con los encontrados por PS. Luego, esto sugiere que los países que convergieron al grupo de los más desarrollados presentaron menores volatilidades macroeconómicas. Segundo, se observa una mayor heterogeneidad para los grupos de convergencia de menor desarrollo encontrados por PS. Tercero, esto deja en evidencia un hecho: se debe ahondar en investigaciones futuras sobre el impacto de la tecnología, si la hay, sobre las principales variables macroeconómicas. En caso de que no lo haya, analizar el impacto de estas volatilidades sobre el crecimiento de largo plazo, relación que sugieren los resultados aquí encontrados.

En términos generales los resultados acá presentados sugieren lo siguiente: primero, la evidencia empírica encontrada valida el modelo presentado en la sección 2 cuando se incluye el factor de la heterogeneidad del capital humano sobre la función de producción y la ecuación de movimiento. Esto debido a que la medida de capital físico recoge bastante bien la dinámica observada para los grupos de PS, los cuales teóricamente sólo dependen del factor tecnológico. Por otro lado, cuando se emplea una medida más exigente de capital humano (que intenta recoger la calidad de este) se encuentran mayores grupos, y mayor heterogeneidad, a los encontrados por PS, lo cual también está de acuerdo con el modelo teórico.

Segundo, el índice de apertura recoge bastante bien los grupos encontrados por PS, sugiriendo su importancia dentro del proceso de crecimiento económico. Igualmente lo recogen los índices de volatilidades macroeconómicas.

Tercero, en la mayoría de los determinantes acá analizados, se observa gran heterogeneidad para los países menos avanzados, sugiriendo un mayor cuidado a la hora de estimar ecuaciones de crecimiento para estos grupos. Esto es, el modelo está acorde con lo encontrado empíricamente, particularmente, para los dos primeros grupos de países más avanzados. Lo anterior guarda cierto grado de correspondencia con el análisis regional acá presentado, reforzando aún mas lo mencionado arriba.

9. Conclusiones

El artículo presentado extiende el modelo propuesto por Phillips y Sul (2009), empleando una estructura similar a la de Mankiw, Romer y Weil (1992), que tiene en cuenta la calidad del capital humano sobre el crecimiento y convergencia de los países. Este modelo extiende el modelo neoclásico de crecimiento para permitir heterogeneidad en la tasa de crecimiento de la tecnología y en la calidad de la educación de largo plazo, ofreciendo una variedad de posibilidades que incluye tanto convergencia a una senda de estado estacionario común, como distintas formas transitorias de divergencia y convergencia.

Una de las principales conclusiones del modelo presentado es que dos economías con niveles de PIB per-cápita distintos (debido a un estado inicial de tecnología desigual) pueden o no converger, dependiendo de si la tasa de crecimiento de la tecnología o la calidad de la educación es heterogénea, dando cabida a la formación de grupos (“clusters”) de convergencia, los cuales están supeditados a la convergencia de sus determinantes: capital humano, capital físico, entre otros.

Adicionalmente, el presente artículo investiga las características de estos determinantes teóricos y empíricos del PIB per-cápita, los cuales según el modelo anterior, comparten dinámicas de convergencia que determinan la del PIB per-cápita. Siguiendo el método propuesto por Phillips y Sul (2007), el cual permite probar la hipótesis de convergencia al tiempo que provee un nuevo procedimiento para detectar convergencia por “clusters”, Phillips y Sul (2009) investigan las propiedades de convergencia del PIB per-cápita para un conjunto de 146 países. En el esquema empleado por Phillips y Sul (2009), el único determinante de los grupos encontrados para el PIB per-cápita de los países, es la heterogeneidad de la tecnología.

En este artículo, se analizan las características de convergencia de los principales determinantes empíricos como teóricos, tanto para los grupos de Phillips y Sul (2009), como para la dinámica misma de la variable, con el fin de validar las implicaciones del modelo presentado en la sección 2 y/o el de Phillips y Sul (2009) y, contribuir al entendimiento de la relación que hay entre los determinantes del PIB y el mismo. Mucha atención se ha puesto en entender el impacto de estos determinantes sobre el PIB, pero poco énfasis se ha hecho en el análisis de estos.

En términos generales los resultados acá presentados sugieren lo siguiente: primero, la evidencia empírica encontrada valida el modelo presentado en la sección 2 cuando se incluye el factor de la heterogeneidad del capital humano sobre la función de producción y la ecuación de movimiento. Esto debido a que la medida de capital físico recoge bastante bien la dinámica observada para los grupos de PS, los cuales teóricamente sólo dependen del factor tecnológico. Por otro lado, cuando se emplea una medida más exigente de capital humano (que intenta recoger la calidad de este) se encuentra mayores grupos, y mayor heterogeneidad, a los encontrados por PS, lo cual también está de acuerdo con el modelo teórico. Luego, se debe incluir en investigaciones futuras, a la hora de analizar la convergencia, una variable que controle por la heterogeneidad del capital humano, particularmente de la calidad de este.

Segundo, el índice de apertura recoge bastante bien los grupos encontrados por PS, sugiriendo su importancia dentro del proceso de crecimiento económico. Igualmente lo recogen los índices de volatilidades macroeconómicas.

Tercero, en la mayoría de los determinantes acá analizados, se observa gran heterogeneidad para los países menos avanzados y mayor homogeneidad para los más avanzados, sugiriendo un mayor cuidado a la hora de estimar ecuaciones de crecimiento para el primer grupo. Esto es, el modelo está acorde con lo encontrado empíricamente, particularmente, para los dos primeros grupos de países más avanzados. Igualmente, se encuentra correspondencia con el análisis regional acá presentado, reforzando aún mas lo mencionado arriba. Es decir, no solo son los más o menos avanzados, sino, los mas o menos avanzados de ciertas regiones.

10. Apéndice 1

10.1. Inversión/PIB

Cuadro 20: Resultados de "Clusters" encontrados para la (*Inversión/PIB*)

Convergencia Global					
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-0.631	-4.022			
logt	-0.403	-8.083			
Cluster 1 de Convergencia			Complemento del Cluster 1		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-4.083	-8.031	const	1.108	5.412
logt	0.907	5.613	logt	-0.994	-15.278
Cluster 2 de Convergencia			Complemento del Cluster 2		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-3.13	-6.102	const	1.744	7.046
logt	0.582	3.571	logt	-1.216	-15.455
Cluster 3 de Convergencia			Complemento del Cluster 3		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-1.246	-3.468	const	2.684	5.361
logt	0.078	0.685	logt	-1.661	-10.431
Cluster 4 de Convergencia			Complemento del Cluster 4		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	-2.204	-5.357	const	3.619	6.583
logt	0.158	1.204	logt	-2.068	-11.829
Cluster 5 de Convergencia			Complemento del Cluster 5		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	0.028	0.011	const	3.621	4.701
logt	0.124	0.16	logt	-2.235	-9.128
Cluster 6 de Convergencia			Complemento del Cluster 6		
	b-coef	t-stat		b-coef	t-stat
const	0.403	0.176	const	5.431	5.34
logt	-0.904	-1.239	logt	-2.864	-8.858

Cuadro 21: Análisis de "Clusters" encontrados para la (*Inversión/PIB*)

Cluster	1	2	3	4	5	6
1	Club 1+2					
2	0.632 4.692	Club 2+3				
3		0.058 0.439	Club 3+4			
4			-0.200 -3.880	Club 4+5		
5				-0.047 -0.419	Club 5+6	
6					-1.472 -4.897	Club 6+7
7						-2.235 -9.128

10.2. Capital Humano

Cuadro 22: Resultados de "Clusters" encontrados para *Años promedio de Educación Terciaria*

Convergencia Global				
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>		
const	2.438	58.569		
logt	-1.648	-140.93		

Cluster 1 de Convergencia		Complemento del Cluster 1	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-11.544	-3.705	const 2.458 58.821
logt	2.53	2.889	logt -1.647 -140.29

Cluster 2 de Convergencia		Complemento del Cluster 2	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	3.892	0.761	const 2.398 53.182
logt	-1.269	-0.882	logt -1.631 -128.69

Cluster 3 de Convergencia		Complemento del Cluster 3	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-7.161	-1.99	const 2.376 46.459
logt	1.499	1.482	logt -1.624 -112.97

Cluster 4 de Convergencia		Complemento del Cluster 4	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	2.368	0.547	const 2.329 36.629
logt	-1.836	-1.51	logt -1.61 -90.06

Cluster 5 de Convergencia		Complemento del Cluster 5	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-0.019	-0.004	const 2.264 41.846
logt	-0.282	-0.231	logt -1.586 -104.29

Cluster 6 de Convergencia		Complemento del Cluster 6	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.608	-0.464	const 2.19 34.339
logt	-0.91	-0.935	logt -1.561 -87.119

Cluster 7 de Convergencia		Complemento del Cluster 7	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.564	-3.414	const 2.099 26.074
logt	0.345	1.177	logt -1.517 -67.072

Cluster 8 de Convergencia		Complemento del Cluster 8	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-5.353	-5.109	const 2.062 20.968
logt	0.391	1.327	logt -1.491 -53.95

Cluster 9 de Convergencia		Complemento del Cluster 9	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.269	-4.422	const 1.741 31.136
logt	0.158	0.759	logt -1.381 -87.869

Cluster 10 de Convergencia		Complemento del Cluster 10	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-2.972	-7.646	const 1.386 28.156
logt	0.234	2.146	logt -1.265 -91.479

Cluster 11 de Convergencia		Complemento del Cluster 11	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.114	-5.528	const 0.225 1.352
logt	0.187	1.184	logt -0.908 -19.44

Cluster 12 de Convergencia		Complemento del Cluster 12	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-4.576	-11.203	const -0.007 -0.031
logt	0.582	5.071	logt -0.812 -13.744

Cluster 13 de Convergencia		Complemento del Cluster 13	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.494	-12.127	const -0.523 -1.96
logt	0.159	1.961	logt -0.658 -8.78

Cluster 14 de Convergencia		Complemento del Cluster 14	
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.588	-4.904	const -0.615 -2.457
logt	0.162	0.789	logt -0.614 -8.725

Cuadro 23: Análisis de "Clusters" encontrados para el (Años promedio de Educación Terciaria)

Cluster	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Club 1+2													
2	-2.34	Club 2+3												
3	-0.98	-1.56	Club 3+4											
4		-2.34	-3.6	Club 4+5										
5			-3.36	-2.6	Club 5+6									
6				-58.3	-2.24	Club 6+7								
7					-9.0	-1.75	Club 7+8							
8						-23.7	-0.34	Club 8+9						
9							-1.55	-0.11	Club 9+10					
10								0.135	Club 10+1					
11								0.717	-0.34	Club 11+1				
12									-3.42	0.303	Club 12+1			
13										1.804	-0.13	Club 13+1		
14											-0.8	-0.02	Club 14+1	
15												-0.17	-0.66	Club 15+1
														-8.78

10.3. Apertura

Cuadro 24: Resultados de los "Clusters" encontrados para, Apertura.

Convergencia Global			
	b-coef	t-stat	
const	-1.074	-4.666	
logt	-0.203	-2.768	

Cluster 1 de Convergencia		Complemento del Cluster 1	
	b-coef	t-stat	
const	-2.866	-6.31	const -0.781 -4.178
logt	0.577	3.995	logt -0.373 -6.284

Cluster 2 de Convergencia		Complemento del Cluster 2	
	b-coef	t-stat	
const	-2.08	-15.249	const -0.2 -2.057
logt	0.201	4.627	logt -0.631 -20.375

Cluster 3 de Convergencia		Complemento del Cluster 3	
	b-coef	t-stat	
const	-2.548	-7.308	const -0.193 -1.951
logt	0.419	3.775	logt -0.67 -21.303

Cluster 4 de Convergencia		Complemento del Cluster 4	
	b-coef	t-stat	
const	-2.402	-8.886	const 0.545 5.955
logt	0.167	1.944	logt -0.941 -32.328

Cluster 5 de Convergencia		Complemento del Cluster 5	
	b-coef	t-stat	
const	-1.696	-3.059	const 1.045 6.647
logt	0.005	0.027	logt -1.355 -27.113

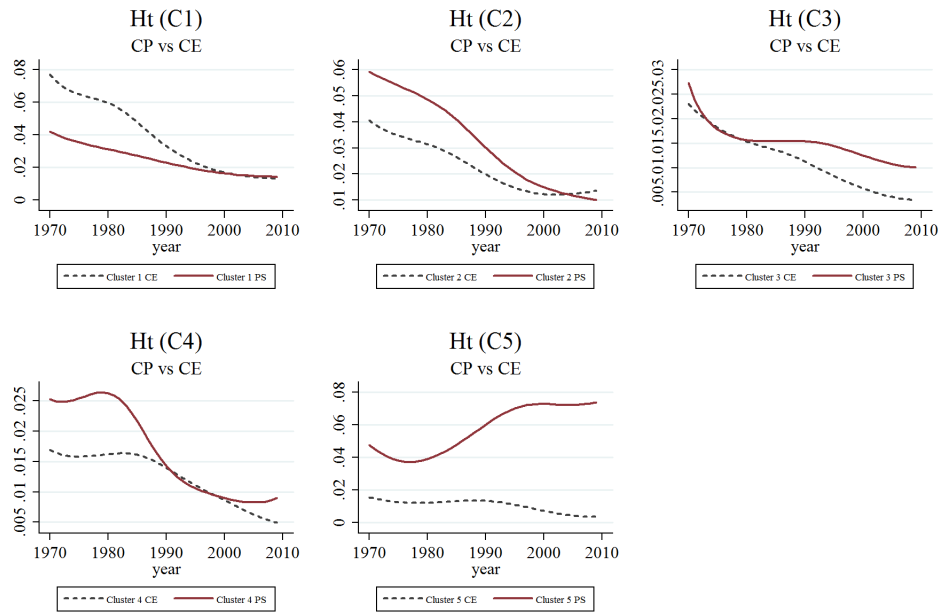
Cluster 6 de Convergencia		Complemento del Cluster 6	
	b-coef	t-stat	
const	-4.208	-3.647	const . .
logt	0.386	1.053	logt . .

Cuadro 25: Análisis de "Clusters" encontrados para, *Apertura*.

Cluster	1	2	3	4	5	6
1	<i>Club</i> 1+2					
2	0.235 2.293	<i>Club</i> 2+3				
3		0.299 2.955	<i>Club</i> 3+4			
4			0.126 1.295	<i>Club</i> 4+5		
5				-0.05 -0.485	<i>Club</i> 5+6	
6					-0.39 -5.789	<i>Club</i> 6+7
7						-1.355 -27.11

Figura 16: Parámetro de Transición Global

Comparación Parámetro de Transición Global, Ht.



10.4. Estabilidad Macroeconómica

10.4.1. Volatilidad de la Inflación.

Cuadro 26: Composición Regional

Region/ Cluster E (Open)	AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF
1	1	4	4	4	7	2	2	0	21	3
	2.08	8.33	8.33	8.33	14.58	4.17	4.17	0	43.75	6.25
	7.69	28.57	100	44.44	21.21	20	50	0	100	9.38
2	3	1	0	4	14	2	2	0	0	2
	10.71	3.57	0	14.29	50	7.14	7.14	0	0	7.14
	23.08	7.14	0	44.44	42.42	20	50	0	0	6.25
3	1	3	0	1	9	3	0	3	0	1
	4.76	14.29	0	4.76	42.86	14.29	0	14.29	0	4.76
	7.69	21.43	0	11.11	27.27	30	0	42.86	0	3.13
4	3	5	0	0	3	3	0	4	0	19
	8.11	13.51	0	0	8.11	8.11	0	10.81	0	51.35
	23.08	35.71	0	0	9.09	30	0	57.14	0	59.38
5	5	1	0	0	0	0	0	0	0	7
	38.46	7.69	0	0	0	0	0	0	0	53.85
	38.46	7.14	0	0	0	0	0	0	0	21.88

Cuadro 27: Resultados de los "Clusters" encontrados para, *Volatilidad de la Inflación*.

Convergencia Global			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	3.838	16.016	
logt	-2.346	-30.151	
Cluster 1 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-1.892	-4.426	
logt	-0.073	-0.528	
Cluster 2 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-2.387	-4.055	
logt	0.331	1.731	
Cluster 3 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-7.031	-5.305	
logt	0.998	2.318	
Cluster 4 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-0.66	-0.574	
logt	-0.461	-1.234	
Cluster 5 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-3.09	-3.68	
logt	-0.238	-0.872	
Cluster 6 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-6.359	-4.412	
logt	0.903	1.928	
Cluster 7 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	2.789	0.52	
logt	-1.672	-0.96	
Cluster 8 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	6.587	1.052	
logt	-2.426	-1.194	
Cluster 9 de Convergencia			
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	
const	-20.957	-1.673	
logt	5.897	1.45	

Cuadro 30: Composición Regional

Cluster		AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF	Total
1	No.	34	0	0	34	136	34	0	34	0	136	408
	% Fila	8.33	0	0	8.33	33.33	8.33	0	8.33	0	33.33	100
	% Columna	16.67	0	0	12.5	20	14.29	0	25	0	26.67	14.46
2	No.	170	136	0	34	340	0	68	34	0	204	986
	% Fila	17.24	13.79	0	3.45	34.48	0	6.9	3.45	0	20.69	100
	% Columna	83.33	100	0	12.5	50	0	50	25	0	40	34.94
3	No.	0	0	0	34	68	34	0	0	34	0	170
	% Fila	0	0	0	20	40	20	0	0	20	0	100
	% Columna	0	0	0	12.5	10	14.29	0	0	7.14	0	6.02
4	No.	0	0	34	170	102	68	68	68	238	102	850
	% Fila	0	0	4	20	12	8	8	8	28	12	100
	% Columna	0	0	100	62.5	15	28.57	50	50	50	20	30.12
5	No.	0	0	0	0	0	0	0	0	68	0	68
	% Fila	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	100
	% Columna	0	0	0	0	0	0	0	0	14.29	0	2.41
6	No.	0	0	0	0	0	34	0	0	136	34	204
	% Fila	0	0	0	0	0	16.67	0	0	66.67	16.67	100
	% Columna	0	0	0	0	0	14.29	0	0	28.57	6.67	7.23
7	No.	0	0	0	0	0	34	0	0	0	34	68
	% Fila	0	0	0	0	0	50	0	0	0	50	100
	% Columna	0	0	0	0	0	14.29	0	0	0	6.67	2.41
8	No.	0	0	0	0	34	34	0	0	0	0	68
	% Fila	0	0	0	0	50	50	0	0	0	0	100
	% Columna	0	0	0	0	5	14.29	0	0	0	0	2.41
Total		204	136	34	272	680	238	136	136	476	510	2,822

Cuadro 28: Análisis de "Clusters" encontrados para la volatilidad de la Inflación

Cluster	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Club 1+2								
2	-0.7 -9.257	Club 2+3							
3		-0.005 -0.027	Club 3+4						
4			-0.184 -0.492	Club 4+5					
5				-0.556 -1.574	Club 5+6				
6					-0.136 -0.529	Club 6+7			
7						-0.369 -1.197	Club 7+8		
8							-2.012 -2.27	Club 8+9	
9								-2.347 -3.231	Club 9+9c
10									-5.515 -7.235

Cuadro 29: Media y desviación estandar por región*

Decada	Media										
	AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF	
70-80	16.9	10.5	15.1	9.9	31.1	14.3	10.4	9.6	12.0	13.4	
80-90	32.3	11.3	8.4	19.6	225.1	28.0	7.1	10.0	10.4	15.0	
90-00	585.9	9.9	5.7	25.6	127.0	10.9	8.2	7.3	3.1	15.3	
00-10	36.7	5.2	3.2	8.0	10.2	4.0	3.8	6.9	2.7	11.6	

Decada	Desviación estandar										
	AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF	
70-80	19.1	7.5	6.9	9.4	67.9	12.6	9.2	5.5	8.4	13.8	
80-90	31.3	8.0	9.1	32.8	1188.4	61.2	4.6	5.9	11.0	16.4	
90-00	3111.0	3.8	2.4	65.3	787.4	10.5	9.0	4.6	2.3	14.5	
00-10	112.0	2.9	0.7	13.2	13.2	4.7	3.2	5.1	1.0	19.3	

* Las celdas sombreadas para el caso de la media representan valores mayores a 10% y para el caso de la desviación estandar representan valores mayores a 15%.

Cuadro 33: Composición Regional

Región/ Cluster E.		AF	AS	DRAG	EU	LA	MENAF	NIC	OC	OECD	SAF	Total
Cluster 1 y 2	No.	7	9	0	1	16	1	1	6	3	15	59
	% Fila	11.86	15.25	0	1.69	27.12	1.69	1.69	10.17	5.08	25.42	100
	% Columna	53.85	64.29	0	11.11	48.48	10	25	85.71	15	46.88	40.41
Cluster 3	No.	3	4	2	6	10	6	1	1	15	12	60
	% Fila	5	6.67	3.33	10	16.67	10	1.67	1.67	25	20	100
	% Columna	23.08	28.57	50	66.67	30.3	60	25	14.29	75	37.5	41.1
Cluster 4	No.	3	1	2	2	7	3	2	0	2	5	27
	% Fila	11.11	3.7	7.41	7.41	25.93	11.11	7.41	0	7.41	18.52	100
	% Columna	23.08	7.14	50	22.22	21.21	30	50	0	10	15.63	18.49
Total		13	14	4	9	33	10	4	7	20	32	146

10.4.2. Gasto del Gobierno/PIB

Cuadro 31: Resultados de los "Clusters" encontrados para, (Gasto del Gobierno/PIB)

Convergencia Global					
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>		<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>
const	-0.132	-3.732			
logt	-0.569	-50.491			
No	hay	convergencia global			
Cluster 1 de Convergencia					
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	Complemento del Cluster 1		
const	-2.239	-11.906	const	-0.236	-21.856
logt	0.203	3.400	logt	-0.499	-145.380
Cluster 2 de Convergencia					
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	Complemento del Cluster 2		
const	-2.198	-4.797	const	-0.398	-12.357
logt	0.094	0.644	logt	-0.361	-35.200
Cluster 3 de Convergencia					
	<i>b-coef</i>	<i>t-stat</i>	Complemento del Cluster 3		
const	-1.649	-6.340	const	-1.621	-8.752
logt	0.205	2.483	logt	0.055	0.931

Cuadro 32: Análisis de los "Clusters" encontrados para (Gasto del Gobierno/PIB)

Cluster	1	2	3
1	Club 1+2		
2	-0.032 -0.803	Club 2+3	
3		-0.153 -3.412	Club 3+4
4			-0.361 -35.2

Anexo 2

Cuadro 34: Países y regiones

Nombre	codigo	Region	Nombre	codigo	Region	Nombre	codigo	Region	Nombre	codigo	Region
Central African Republic	CAF	AF	Hong Kong	HKG	DRAG	Antigua	ATG	LA	Australia	AUS	OECD
Dem. Rep. Congo	ZAR	AF	Singapore	SGP	DRAG	Argentina	ARG	LA	Austria	AUT	OECD
Liberia	LBR	AF	South Korea	KOR	DRAG	Bahamas	BHS	LA	Belgium	BEL	OECD
Mauritania	MRT	AF	Taiwan	TWN	DRAG	Barbados	BRB	LA	Canada	CAN	OECD
Mauritius	MUS	AF	Cyprus	CYP	EU	Belize	BLZ	LA	Denmark	DNK	OECD
Namibia	NAM	AF	Greece	GRC	EU	Bermuda	BMU	LA	Finland	FIN	OECD
Sao Tome and Principe	STP	AF	Hungary	HUN	EU	Bolivia	BOL	LA	France	FRA	OECD
Sierra Leone	SLE	AF	Ireland	IRL	EU	Brazil	BRB	LA	Germany	GER	OECD
Somalia	SOM	AF	Luxembourg	LUX	EU	Chile	CHL	LA	Iceland	ISL	OECD
Sudan	SDN	AF	Malta	MLT	EU	Colombia	COL	LA	Italy	ITA	OECD
Swaziland	SWZ	AF	Poland	POL	EU	Costa Rica	CRI	LA	Japan	JPN	OECD
Tonga	TON	AF	Romania	ROM	EU	Cuba	CUB	LA	Netherlands	NLD	OECD
Tunisia	TUN	AF	Turkey	TUR	EU	Dominica	DMA	LA	New Zealand	NZL	OECD
Benin	BEN	SAF	Afghanistan	AFG	AS	Dominican Rep.	DOM	LA	Norway	NOR	OECD
Botswana	BWA	SAF	Bhutan	BTN	AS	Ecuador	ECU	LA	Portugal	PRT	OECD
Burkina Faso	BFA	SAF	Brunei	BRN	AS	El Salvador	SLV	LA	Spain	ESP	OECD
Burundi	BDI	SAF	Cambodia	KHM	AS	Grenada	GRD	LA	Sweden	SWE	OECD
Cape Verde	CPV	SAF	China	CHN	AS	Guatemala	GTM	LA	Switzerland	CHE	OECD
Chad	TCD	SAF	Iraq	IRQ	AS	Honduras	HND	LA	UK	GBR	OECD
Comoros	COM	SAF	Laos	LAO	AS	Jamaica	JAM	LA	USA	USA	OECD
Congo Rep.	COG	SAF	Macao	MAC	AS	Mexico	MEX	LA			
Cote d'Ivoire	CIV	SAF	Maldives	MDV	AS	Nicaragua	NIC	LA			
Equatorial Guinea	GNQ	SAF	Mongolia	MNG	AS	Panama	PAN	LA			
Ethiopia	ETH	SAF	Nepal	NPL	AS	Paraguay	PRY	LA			
Gabon	GAB	SAF	Pakistan	PAK	AS	Peru	PER	LA			
Gambia	GMB	SAF	Philippines	PHL	AS	Puerto Rico	PRI	LA			
Ghana	GHA	SAF	Sri Lanka	LKA	AS	St. Kitts & Nevis	KNA	LA			
Guinea	GIN	SAF	India	IND	NIC	St. Lucia	LCA	LA			
Guinea-Bissau	GNB	SAF	Indonesia	IDN	NIC	St. Vincent & Grenadines	VCT	LA			
Kenya	KEN	SAF	Malaysia	MYS	NIC	Suriname	SUR	LA			
Lesotho	LSO	SAF	Thailand	THA	NIC	Trinidad & Tobago	TTO	LA			
Madagascar	MDG	SAF	Fed. Sts. of Micronesia	FSM	OC	Uruguay	URY	LA			
Malawi	MWI	SAF	Fiji	FJI	OC	Venezuela	VEN	LA			
Mali	MLI	SAF	Kiribati	KIR	OC	Algeria	DZA	MENAF			
Mozambique	MOZ	SAF	Papua New Guinea	PNG	OC	Bahrain	BHR	MENAF			
Niger	NER	SAF	Samoa	WSM	OC	Cameroon	CMR	MENAF			
Nigeria	NGA	SAF	Solomon Islands	SLB	OC	Egypt	EGY	MENAF			
Rwanda	RWA	SAF	Vanuatu	VUT	OC	Iran	IRN	MENAF			
Senegal	SEN	SAF				Israel	ISR	MENAF			
South Africa	ZAF	SAF				Jordan	JOR	MENAF			
Tanzania	TZA	SAF				Morocco	MAR	MENAF			
Togo	TGO	SAF				Oman	OMN	MENAF			
Uganda	UGA	SAF				Syria	SYR	MENAF			
Zambia	ZMB	SAF									
Zimbabwe	ZWE	SAF									

Parte V
Bibliografía

- Abramovitz, M., 1986, "Catching up, forging ahead and falling behind," *Journal of Economic History*, 46, 385–406.
- Acemoglu, D. 2009, *Introduction to Modern Economic Growth*, MIT Press.
- Anderson, G., 2004, "Making inferences about the polarization, welfare, and poverty of nations: A study of 101 countries 1970–1995," *Journal of Applied Econometrics*, 19 (5), 537–550.
- Baumol, W., 1986, "Productivity growth, convergence, and welfare: What the long-run data show," *American Economic Review*, 76 (5), 1072–1085.
- Barro, R., 1991, "Economic growth in a cross section of countries," *Quarterly Journal of Economics*, 106 (2), 407–443.
- Barro, R. J., 1998, "Determinants of Economic Growth: A Cross-country Empirical Study," *Lionel Robbins Lectures*. MIT Press, primera edición.
- Barro, R. J. y Lee J., 1994, "Sources of economic growth (with commentary)," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 40, 1–57.
- Barro, R. J. y Lee J., 2010, "A New Data set of Education Attainment in the World, 1950–2010," NBER Working Paper, No. 15902, Abril.
- Barro, R. y Sala-i-Martin, X., 1992, "Convergence," *Journal of Political Economy*, 100, 223–251.
- Barro, R., y Sala-i-Martin, X., 2004, *Economic Growth*, segunda edición, MIT Press, Cambridge.
- Bernard, A. y Durlauf, S., 1995, "Convergence in international output," *Journal of Applied Econometrics*, 10 (2), 97–108.
- Bernard, A. y Durlauf, S., 1996, "Interpreting tests of the convergence hypothesis," *Journal of Econometrics*, 71 (1–2), 161–173.
- Bianchi, M., 1997, "Testing for convergence: Evidence from nonparametric multimodality tests," *Journal of Applied Econometrics*, 12 (4), 393–409.
- Binder, M. y Pesaran, M.H., 1999, "Stochastic growth models and their econometric implications," *Journal of Economic Growth*, 4, 139–183.
- Bingham, N. H., Goldie, C.M. y Teugels, J. L., 1987, "Regular Variation," Cambridge University Press.
- Brock, W. y Durlauf, S., 2001, "Growth empirics and reality," *World Bank Economic Review*, 15 (2), 229–272.
- Brock, W., Durlauf, S. y West, K., 2003, "Policy evaluation in uncertain economic environments (with discussion)," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 235–322.
- Canova, F. y Marcet, A., 1995, "The poor stay poor: Non-convergence across countries and regions," Centre for Economic Policy Research Discussion Paper 1265.
- Chamberlain, G. y Rothschild, M., 1983, "Arbitrage, factor structure and mean–variance analysis in large asset markets," *Econometrica*, 51, 1305–1324.
- Cohen, D., 1996, "Tests of the convergence hypothesis: Some further results," *Journal of Economic Growth*, 1 (3), 351–361.
- Connor, G. y Korajczyk, R.A., 1986, "Performance Measurement with Arbitrage Pricing Theory: A New Framework for Analysis," *Journal of Financial Economics*, 15, 373–394.
- Connor, G. y Korajczyk, R.A., 1988, "Risk and Return in Equilibrium APT: Application of a New Test Methodology," *Journal of Financial Economics*, 21, 255–290.
- Doppelhofer, G., Miller, R. y Sala-i-Martin, X., 2004, "Determinants of long-term growth: A Bayesian Averaging of Classical Estimates (BACE) approach," *American Economic Review*, 94 (4), 813–835.
- Durlauf, S., P. Johnson and J. Temple, 2005, *Growth Econometrics*, En: P. Aghion and S. Durlauf (eds.), *Handbook of Economic Growth*, Amsterdam: North-Holland.
- Durlauf, S., P. Johnson and J. Temple, 2009, *The Econometrics of Convergence*, En: Terence C. Mills and Kerry Patterson (eds.), *Palgrave Handbook of Econometrics*, Volume 2: Applied Econometrics, Palgrave Macmillan.
- Easterly, W., 2005, "What did structural adjustment adjust?: The association of policies and growth with repeated IMF and World Bank adjustment loans," *Journal of Development Economics*, 76(1), 1–22.
- Easterly, W. y Levine, R., 2003, "Tropics, germs, and crops: how endowments influence economic development," *Journal of Monetary Economics*, 50(1), 3–39.
- Estevadeordal A. y Taylor A. M., 2008, "Is the Washington Consensus Dead? Growth, Openness, and the Great Liberalization, 1970s–2000s," NBER Working Papers, No. 14264.
- Galor, O., 1996, "Convergence? Inferences from theoretical models," *Economic Journal*, 106, 1056–1069.

- Grenander, U. y Rosenblatt, M., 1957, "Statistical Analysis of Stationary Time Series," Wiley.
- Hanushek, E. A., 2009, "School policy: implications of recent research for human capital investments in South Asia and other developing countries," *Education Economics*, 17(3), 291–313.
- Hanushek, E. A. y Kimko, D. D., 2000, "Schooling, Labor Force Quality, and the Growth of Nations," *American Economic Review*, 90(5), 1184–1208.
- Hanushek, E. A. y Woessmann, L., 2008, "The role of cognitive skills in economic development," *Journal of Economic Literature*, 46(3), 607–668.
- Hanushek, E. A. y Woessmann, L., 2012a, "Schooling, educational achievement, and the Latin American growth puzzle," *Journal of Development Economics*, próximo.
- Hanushek, E. A., y Woessmann, L., 2012b, "Do Better Schools Lead to More Growth? Cognitive Skills, Economic Outcomes, and Causation," *Journal of Economic Growth*, próximo.
- Hanushek, E. A., y Zhang L., 2008, "Quality Consistent Estimates of International Returns to Skill," mimeo.
- Harberger, A., 1987, "Comment," En: Fischer, S. (Ed.), *Macroeconomics Annual*, MIT Press, Cambridge.
- Hendry, D., Krolzig, H.-M. (2004). "We ran one regression". Mimeo, Oxford University.
- Hendry, D., Krolzig, H.-M. (2005). "The properties of automatic gets modelling". *Economic Journal*, in press.
- Heston, A., Summers, R., y Aten, B., 2011, Penn World Table Version 7.0, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania, Mayo.
- Hobijn, B. y Franses, P., 2000, "Asymptotically perfect and relative convergence of productivity," *Journal of Applied Econometrics*, 15, 59–81.
- Hoover, K. y Perez, S., 2004, "Truth and robustness in cross-country growth regressions," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, in press.
- Kalaitzidakis, P., Mamuneas, T. y Stengos, T., 2000, "A non-linear sensitivity analysis of cross country growth regressions," *Canadian Journal of Economics*, 33 (3), 604–617.
- Klenow, P. y Rodriguez-Clare, A., 1997a, "The neoclassical revival in growth economics: has it gone too far?," En: Bernanke, B., Rotemberg, J. (Eds.), *Macroeconomics Annual 1997*, MIT Press, Cambridge.
- Klenow, P. y Rodriguez-Clare, A., 1997b, "Economic growth: a review essay," *Journal of Monetary Economics* 40, 597–617.
- Leamer, E., 1983, "Let's take the con out of econometrics," *American Economic Review*, 73 (1), 31–43.
- Levine, R. y Renelt, D., 1992, "A sensitivity analysis of cross-country growth regressions," *American Economic Review*, 82 (4), 942–963.
- Liu, Z. y Stengos, T., 1999, "Non-linearities in cross country growth regressions: A semiparametric approach," *Journal of Applied Econometrics*, 14 (5), 527–538.
- Lucas, R. E., 1988, "On the mechanics of economic development," *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3–42.
- Lütkepohl, H., 2005, "New Introduction to Multiple Time Series Analysis," Springer-Verlag, Berlin
- Mamuneas, T., Savvides, A. y Stengos, T., 2004, "Economic development and return to human capital: a smooth coefficient semiparametric approach," *Mimeo*, University of Guelph. *Journal of Applied Econometrics*, in press.
- Mankiw, N G., Romer, D. y Weil, D. N., 1992, "A Contribution to the Empirics of Economic Growth," *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–37.
- Mulligan, C. B. y Sala-i-Martin, X., 1995, "A Labor-Income-Based Measure of the Value of Human Capital: An Application to the States of the United States," NBER Working Papers, No. 5018.
- Pesaran, M. H. (2007), "A pair-wise approach to testing for output and growth convergence," *Journal of Econometrics*, 138, 312–355.
- Phillips, P.C.B., 2007, "Regression with Slowly Varying Regressors and Nonlinear Trends," *Econometric Theory*, 23, 557–614
- Phillips, P.C.B. y Sul, D., 2007, "Transition Modeling and Econometric Convergence Tests," *Econometrica*, 75(6), 1771–1855
- Phillips, P.C.B. y Sul, D., 2009. "Economic transition and growth," *Journal of Applied Econometrics*, 24(7), 1153–1185.
- Quah, D., 1993, "Galton's fallacy and tests of the convergence hypothesis," *Scandinavian Journal of Economics*, 95, 427–443.

- Quah, D., 1996, "Twin peaks: growth and convergence in models of distribution dynamics," *Economic Journal*, 106(437), 1045–1055.
- Quah, D., 1997, "Empirics for growth and distribution: Stratification, polarization, and convergence clubs," *Journal of Economic Growth*, 2 (1), 27–59.
- Rao, C. R., 1973, "Linear statistical inference and its applications," Wiley, New York.
- Rodriguez, F. y Rodrik, D., 2001, "Trade policy and economic growth: A sceptic's guide to the cross-national evidence," En: Bernanke, B., Rogoff, K. (Eds.), *Macroeconomics Annual 2000*, MIT Press, Cambridge.
- Rodrik, D., Subramanian, A., y Trebbi, F., 2004, "Institutions rule: the primacy of institutions over geography and integration in economic development," *Journal of Economic Growth*, 9 (2), 131–165.
- Romer, P. M., 1986, "Increasing returns and long-run growth," *Journal of Political Economy*, 94 (5), 1002–1037.
- Sachs, J., y Warner, A., 1995, "Economic reform and the process of global integration (with discussion)," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 1–118.
- Sala-i-Martin, X., 1996a, "The classical approach to convergence analysis," *Economic Journal*, 106, 1019–1036.
- Sala-i-Martin, X., 1996b, "Regional cohesion: evidence and theories of regional growth and convergence," *European Economic Review*, 40, 1325–1352.
- Sala-i-Martin, X., 1997, "I just ran 2 million regressions," *American Economic Review*, 87 (2), 178–183.
- Solow, R., 1956, "A contribution to the theory of economic growth," *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94.
- Summers, R., Heston, A., 1988, "A new set of International comparisons of Real Product and Price Levels Estimates for 130 Countries, 1950–1985," *Review of Income and Wealth*, 34, 1–25.
- Summers, R., Heston, A., 1991, "The PennWorld Table (Mark 5): An expanded set of international comparisons, 1950–1988," *Quarterly Journal of Economics*, 106 (2), 327–368.
- Temple, J. (1999), "The new growth evidence". *Journal of Economic Literature*, 37 (1), 112–156.
- White, H., 2001, "Asymptotic theory for econometricians," Academic Press, San Diego.